

Sprawy organizacyjne

Literatura

Wykład będzie w zasadzie „samowystarczalny”. Oto kilka pozycji przydatnej literatury uzupełniającej (wszystkie pozycje zostały wydane przez PWN):

Andrzej Birkholc, *Analiza matematyczna*.
Grigorij Michajłowicz Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. I–III.
Franciszek Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy*.
Witold Kołodziej, *Analiza matematyczna*.
Kazimierz Kuratowski, *Rachunek różniczkowy i całkowy*.
Stanisław Łojasiewicz, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*.
Krzysztof Maurin, *Analiza*, t. I–II.
Walter Rudin, *Podstawy analizy matematycznej*.
Walter Rudin, *Analiza rzeczywista i zespolona*.
Laurent Schwartz, *Kurs analizy matematycznej*, t. I–II.

Program wykładu

- (1) Szeregi w przestrzeniach Banacha.
- (2) Iloczyny szeregów.
- (3) Iloczyny nieskończone.
- (4) Szeregi funkcyjne.
- (5) Operator odwracania w algebrach Banacha.
- (6) Szeregi potęgowe.
- (7) Funkcje e^z , $\sin z$, $\cos z$, $\dots$
- (8) Przeliczalne rodziny sumowalne.
- (9) Funkcje analityczne I.
- (10) Różniczkowanie szeregu wyraz po wyrazie.
- (11) Funkcje analityczne II.
- (12) Szereg Taylora.
- (13) Całka Riemanna.
- (14) Pierwotne.
- (15) Podstawowe twierdzenie rachunku całkowego.
- (16) Długość krzywej.
- (17) Przykłady zastosowania całek.
- (18) Całka niewłaściwa.
- (19) Całki krzywoliniowe.
- (20) Twierdzenie Riemanna-Lebesgue’a.
- (21) Kryterium Dirichleta.
- (22) Twierdzenie Fejéra.
- (23) Szeregi Fouriera — abstrakcyjny punkt widzenia.
- (24) Kryteria zbieżności jednostajnej.
- (25) Funkcje o wahanii ograniczonym.
- (26) Kryterium Jordana.
- (27) Funkcje ciągłe o rozbieżnym szeregu Fouriera.

Kontynuacje

W przyszłym roku akademickim będą wykłady z Analizy Matematycznej 3 (60 godzin) i 4 (60 godzin).

Zaliczanie ćwiczeń

W semestrze jest 60 godz. ćwiczeń. Limit nieobecności to 20 godzin, w tym limit nieobecności nie-usprawiedliwionych to 8 godzin.

W przypadku przekroczenia któregośkolwiek z tych limitów student otrzymuje ocenę NZAL i nie jest dopuszczony do egzaminów.

Egzaminy

Ze względu na pandemię koronawirusa egzaminy będą się odbywać według następujących wyjątkowych zasad:

(1) Student, który uzyskał z zaliczenia ocenę $\geq 3,0$ otrzymuje automatycznie taką samą ocenę końcową z egzaminu, z tym że student, który ma ocenę $< 5,0$ może z własnej woli zdawać zdalnie egzamin ustny, aby poprawić ocenę.

(2) Studenci z zaliczeniem 2,0 będą zdawać zdalnie egzamin ustny.

(3) Egzaminy poprawkowe będą zdalnymi egzaminami ustnymi.

Szeregi

6.1. Szeregi w przestrzeniach Banacha

W tym rozdziale $(E, \|\cdot\|)$ będzie ustaloną przestrzenią Banacha nad $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $E \neq \{0\}$.

Definicja 6.1.1. Dla $(a_n)_{n=0}^\infty \subset E$ definiujemy $S_n := \sum_{k=0}^n a_k$, $n \in \mathbb{N}_0$. Parę $((a_n)_{n=0}^\infty, (S_n)_{n=0}^\infty)$ nazywamy *szeregiem*. Zwykle, zamiast powyższej pary, piszemy $\sum_{n=0}^\infty a_n$. Element a_n nazywamy *n-tym wyrazem szeregu*, zaś S_n nazywamy *n-tą sumą częściową szeregu*. Szereg $\sum_{n=0}^\infty a_n$ nazywamy:

- *zbieżnym*, jeżeli $S_n \rightarrow S \in E$. Element S nazywamy wtedy *sumą szeregu* i oznaczamy przez $\sum_{n=0}^\infty a_n$; szeregi, które nie są zbieżne nazywamy *rozbieżnymi*;

- *bezwzględnie zbieżnym*, jeżeli szereg $\sum_{n=0}^\infty \|a_n\|$ jest zbieżny;

- *bezwzględnie zbieżnym*, dla dowolnej bijekcji $\sigma : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ szereg $\sum_{n=0}^\infty a_{\sigma(n)}$ jest zbieżny oraz

$$\sum_{n=0}^\infty a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^\infty a_n;$$

- *warunkowo zbieżnym*, jeżeli jest zbieżny, ale nie jest bezwarunkowo zbieżny.

Oczywiście można również rozważać szeregi $\sum_{n=n_0}^\infty a_n$, gdzie $n_0 \in \mathbb{Z}$.

Obserwacja 6.1.2. (a) Następujące warunki są równoważne:

(i) szereg $\sum_{n=0}^\infty a_n$ jest zbieżny;

(ii) dla dowolnego $n_0 \in \mathbb{N}_0$ szereg $\sum_{n=n_0}^\infty a_n$ jest zbieżny;

(iii) istnieje $n_0 \in \mathbb{N}_0$ takie, że szereg $\sum_{n=n_0}^\infty a_n$ jest zbieżny.

(b) Zob. Przykład 5.6.11:

- $e^x = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} x^k$, $x \in \mathbb{R}$;
- $\sin x = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$, $x \in \mathbb{R}$;
- $\cos x = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$, $x \in \mathbb{R}$;
- $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$, $|x| < \frac{1}{2}$;
- $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^\infty \binom{\alpha}{k} x^k$, $|x| < \frac{1}{2}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

(c) Jeżeli $(a_n)_{n=0}^\infty \subset \mathbb{R}_+$, to następujące warunki są równoważne:

(i) szereg $\sum_{n=0}^\infty a_n$ jest zbieżny;

(ii) ciąg $(S_n)_{n=0}^\infty$ jest ograniczony;

(iii) pewien podciąg ciągu $(S_n)_{n=0}^\infty$ jest zbieżny;

(iv) pewien podciąg ciągu $(S_n)_{n=0}^\infty$ jest ograniczony.

W przypadku, gdy $(a_n)_{n=0}^\infty \subset \mathbb{R}_+$,

- zamiast pisać, że szereg $\sum_{n=0}^\infty a_n$ jest zbieżny będziemy pisać $\sum_{n=0}^\infty a_n < +\infty$,
- zamiast pisać, że szereg $\sum_{n=0}^\infty a_n$ jest rozbieżny będziemy pisać $\sum_{n=0}^\infty a_n = +\infty$.

(d) Jeżeli szeregi $\sum_{n=0}^\infty a_n, \sum_{n=0}^\infty b_n$ są zbieżne, to dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ szereg $\sum_{n=0}^\infty (\alpha a_n + \beta b_n)$ jest zbieżny oraz $\sum_{n=0}^\infty (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=0}^\infty a_n + \beta \sum_{n=0}^\infty b_n$.

(e) Pojęcie bezwzględnej zbieżności nie zależy od wyboru norm równoważnych.

(f) Niech $L \in \mathcal{L}(E, F)$ (F jest przestrzenią Banacha nad $\mathbb{K}$). Jeżeli szereg $\sum_{n=0}^\infty a_n$ jest zbieżny do sumy S (odp. bezwzględnie zbieżny, odp. bezwarunkowo zbieżny), to szereg $\sum_{n=0}^\infty L(a_n)$ jest zbieżny do sumy $L(S)$ (odp. bezwzględnie zbieżny, odp. bezwarunkowo zbieżny).

W konsekwencji, jeżeli $L \in \text{Isom}(E, F)$, to szereg $\sum_{n=0}^\infty a_n$ jest zbieżny (odp. bezwzględnie zbieżny, odp. bezwarunkowo zbieżny) wtedy i tylko wtedy, gdy szereg $\sum_{n=0}^\infty L(a_n)$ jest zbieżny (odp. bezwzględnie zbieżny, odp. bezwarunkowo zbieżny).

Przykład 6.1.3 (Szereg harmoniczny). $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} = +\infty$. Istotnie,

$$S_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \geq 1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + \cdots + 2^{n-1}\frac{1}{2^n} = 1 + \frac{n}{2} \longrightarrow +\infty.$$

ĆWICZENIE: $S_{10^3} = 7,485$, $S_{10^6} = 14,393$, $S_{10^9} = 21,301$ z dokładnością do 0,001.

Twierdzenie 6.1.4 (Warunek konieczny zbieżności szeregów). *Jeżeli szereg $\sum_{n=0}^\infty a_n$ jest zbieżny, to*
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

Dowód. Niech $S := \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$. Wtedy $a_n = S_n - S_{n-1} \longrightarrow S - S = 0$. □

Przykład 6.1.5. Szereg geometryczny $\sum_{n=0}^\infty q^n$, gdzie $q \in \mathbb{C}$ ($0^0 := 1$), jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $|q| < 1$. Wtedy $\sum_{n=0}^\infty q^n = \frac{1}{1-q}$, $|q| < 1$. Istotnie, jeżeli $|q| < 1$, to $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \longrightarrow \frac{1}{1-q}$. Gdy $|q| \geq 1$, to nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregów.

Twierdzenie 6.1.6 (Warunek Cauchy'ego zbieżności szeregów). *Szereg $\sum_{n=0}^\infty a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall m > n \geq n_0 : \|a_{n+1} + \cdots + a_m\| \leq \varepsilon.$$

Dowód. Ponieważ $S_m - S_n = a_{n+1} + \cdots + a_m$ wystarczy skorzystać z zupełności E . □

Twierdzenie 6.1.7 (Twierdzenie o tasowaniu szeregów bezwzględnie zbieżnych). *Każdy szereg bezwzględnie zbieżny jest bezwarunkowo zbieżny (w szczególności, jest zbieżny).*

Dowód. Niech $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ będzie dowolną bijekcją i niech $\varepsilon > 0$. Z warunku Cauchy'ego dla szeregu $\sum_{n=0}^\infty \|a_n\|$ wynika, że istnieje $N_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla dowolnego zbioru skończonego $I \subset \mathbb{N}_{N_0+1}$ mamy $\sum_{n \in I} \|a_n\| \leq \varepsilon$. Niech $N \geq N_0$ będzie takie, że $\{0, \dots, N_0\} \subset \{\sigma(0), \dots, \sigma(N)\}$. Wtedy dla dowolnych $m > n \geq N$ mamy $\{\sigma(n+1), \dots, \sigma(m)\} \subset \mathbb{N}_{N_0+1}$ a stąd $\sum_{k=n+1}^m \|a_{\sigma(k)}\| \leq \varepsilon$. W takim razie szereg $\sum_{n=0}^\infty a_{\sigma(n)}$ spełnia warunek Cauchy'ego, a więc jest zbieżny.

Niech $S_n := \sum_{k=0}^n a_k$, $S_n^\sigma := \sum_{k=0}^n a_{\sigma(k)}$. Niech $\varepsilon > 0$ i niech N_0, N będą jak powyżej. Wtedy dla $n \geq N$ mamy

$$\|S_n - S_n^\sigma\| \leq \sum_{k \in \{N_0+1, \dots, n\}} \|a_k\| + \sum_{k \in \{\sigma(0), \dots, \sigma(n)\} \setminus \{0, \dots, N_0\}} \|a_k\| \leq 2\varepsilon. \quad \square$$

Twierdzenie 6.1.8 (Kryterium porównawcze). (a) *Jeżeli $0 \leq a_n \leq b_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, oraz $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty$, to $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$.*

(b) *Jeżeli $0 \leq a_n \leq b_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, oraz $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$, to $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$.*

(c) *Jeżeli $a_n, b_n > 0$, $n \in \mathbb{N}_0$, oraz $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ dla $n \geq N$, to ze zbieżności szeregu $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ wynika zbieżność szeregu $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ oraz z rozbieżności szeregu $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ wynika rozbieżność szeregu $(b_n)_{n=0}^{\infty}$.*

Dowód. (a) $a_0 + \dots + a_n \leq b_0 + \dots + b_n$.

(b) $b_0 + \dots + b_n \geq a_0 + \dots + a_n \rightarrow +\infty$.

(c) Możemy założyć, że $N = 0$. Wtedy $\frac{a_n}{a_0} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \dots \frac{a_1}{a_0} \leq \frac{b_n}{b_0}$. $\square$

Twierdzenie 6.1.9 (Kryterium asymptotyczne). *Niech $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$, $(b_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}_{>0}$.*

(a) *Jeżeli $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty$ oraz $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} < +\infty$, to $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$.*

(b) *Jeżeli $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$ oraz $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$, to $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$.*

(c) *Jeżeli $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}_{>0}$ oraz $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0, +\infty)$, to $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \iff \sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty$.*

Dowód. (a) Wobec Obserwacji 2.4.1(e), wnioskujemy, że istnieje $M > 0$ takie, że $a_n \leq Mb_n$, $n \gg 1$. Możemy więc skorzystać z kryterium porównawczego.

(b) Wobec Obserwacji 2.4.1(f), wnioskujemy, że istnieje $M > 0$ takie, że $a_n \geq Mb_n$, $n \gg 1$, i znów możemy skorzystać z kryterium porównawczego.

(c) wynika z (a) i (b). $\square$

Twierdzenie 6.1.10 (Kryterium kondensacyjne). *Jeżeli $0 \leq a_{n+1} \leq a_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, to*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \iff \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} < +\infty.$$

Dowód. Niech $S_n := \sum_{k=0}^n a_k$, $S'_n := \sum_{k=0}^n 2^k a_{2^k}$. Wtedy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}S'_n &= \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}(a_1 + 2a_2 + 2^2a_{2^2} + \dots + 2^n a_{2^n}) = a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \dots + 2^{n-1}a_{2^n} \\ &\leq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \dots + (a_{2^{n-1}+1} + \dots + a_{2^n}) = S_{2^n} - a_0 \\ &= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \dots + (a_{2^{n-1}} + a_{2^{n-1}+1} + \dots + a_{2^n-1}) + a_{2^n} \\ &\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^{n-1}a_{2^{n-1}} + 2^n a_{2^n} = S'_n. \end{aligned} \quad \square$$

Ćwiczenie 6.1.11. Udowodnić, że dla dowolnego $p \in \mathbb{N}_2$, jeżeli $0 \leq a_{n+1} \leq a_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, to

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \iff \sum_{n=0}^{\infty} p^n a_{p^n} < +\infty.$$

Przykład 6.1.12 (Szereg harmoniczny rzędu α). Dla $\alpha \in \mathbb{R}$ mamy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < +\infty \iff \alpha > 1$.

Rzeczywiście, jeżeli $\alpha \leq 1$, to $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Jeżeli $\alpha > 1$, to stosujemy kryterium kondensacyjne $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{1-\alpha})^n$.

Ćwiczenie 6.1.13. Dla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} \ln^{\beta} n}$.

Obserwacja 6.1.14. Korzystając z Przykładu 5.6.11(d), wiemy się, że dla dowolnego $h > -1$ istnieje $\theta = \theta(h) \in (0, 1)$ taka, że $\ln(1+h) = h - \frac{1}{2} \frac{h^2}{(1+\theta h)^2}$. Wynika stąd, że $0 < h - \ln(1+h) < \frac{1}{2} h^2$, $h > 0$. W szczególności,

$$0 < \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zatem szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right)$$

jest zbieżny. Zauważmy, że

$$\sum_{n=1}^N \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{N+1}{N}\right) = \ln(N+1).$$

W szczególności, ciąg

$$\left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \right) - \ln N = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right) + \ln \frac{N+1}{N}$$

jest zbieżny do granicy skończonej zwanej stałą Eulera ⁽¹⁾ $\gamma \simeq 0,5772$.

Twierdzenie 6.1.15 (Kryterium Cauchy'ego zbieżności szeregów). *Niech $\alpha := \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} \in [0, \infty]$.*

Wtedy:

- (a) *Jeżeli $\alpha < 1$, to $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| < +\infty$.*
- (b) *Jeżeli $\alpha > 1$, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny (nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregów).*
- (c) *Jeżeli $\alpha = 1$, to nic nie wiadomo.*

Dowód. (a) Niech $q \in (\alpha, 1)$. Na podstawie Obserwacji 2.4.1(e) mamy $\sqrt[n]{\|a_n\|} \leq q$ dla $n \geq N$, czyli $\|a_n\| \leq q^n$, $n \geq N$, i stosujemy kryterium porównawcze.

(b) Niech $q \in (1, \alpha)$. Istnieje podciąg $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ taki, że $\sqrt[n_k]{\|a_{n_k}\|} \geq q$, $k \in \mathbb{N}_0$, a zatem $\|a_{n_k}\| \geq q^{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty$. Nie jest więc spełniony warunek konieczny zbieżności szeregów.

(c) $a_n := \frac{1}{n}$, $a_n := \frac{1}{n^2}$. □

Twierdzenie 6.1.16 (Kryterium d'Alemberta ⁽²⁾ zbieżności szeregów). *Niech $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset E_*$.*

- (a) *Jeżeli $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} < 1$, to $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| < +\infty$.*
- (b) *Jeżeli $\frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} \geq 1$ dla $n \geq n_0$, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny (nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregów).*
- (c) *Jeżeli $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} > 1$, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny (nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregów).*

Dowód. (a) Wystarczy zastosować Twierdzenie 2.4.2 i kryterium Cauchy'ego.

(b) $\|a_m\| \geq \|a_{n_0}\| > 0$ dla $m \geq n_0$.

(c) wynika z (b). □

Przykład 6.1.17. Dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$ szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ jest zbieżny.

⁽¹⁾ Leonhard Euler (1707–1783).

⁽²⁾ Jean d'Alembert (1717–1783).

Definicja 6.1.18. Definiujemy *funkcję eksponens* $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$e^z = \exp z = \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Funkcja ta jest rozszerzeniem na całe $\mathbb{C}$ znanej nam funkcji $\mathbb{R} \ni x \longmapsto e^x$, co uzasadnia użycie symbolu e^z .

Funkcja $\exp$ zostanie szczegółowo omówiona w § 6.7.

Obserwacja 6.1.19. (a) W Twierdzeniu 6.1.16(c) nie można zastąpić $\lim_{n \rightarrow +\infty}$ przez $\limsup_{n \rightarrow +\infty}$. Dla przy-

kładu, niech $a_n := \frac{2+(-1)^n}{2^n}$. Wtedy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$, ale $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{2} > 1$.

(b) Kryterium Cauchy'ego jest istotnie mocniejsze niż kryterium d'Alemberta.

Np. w powyższym przykładzie mamy $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1$.

Oprócz poznanych dotychczas kryteriów zbieżności szeregów jest bardzo wiele innych użytecznych kryteriów. Na przykład:

Twierdzenie 6.1.20. Niech $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}_{>0}$.

(a) (*Kryterium Kummera* ⁽³⁾) Niech $(b_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}_{>0}$ i $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b_n} = +\infty$. Połóżmy $K_n := b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1}$.

Jeżeli $K_n \geq c > 0$ dla $n \geq N$, to $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$.

Jeżeli $K_n \leq 0$ dla $n \geq N$, to $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$.

(b) (*Kryterium Raabego* ⁽⁴⁾) Niech $R_n := n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1)$.

Jeżeli $R_n \geq c > 1$ dla $n \geq N$, to $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$.

Jeżeli $R_n \leq 1$ dla $n \geq N$, to $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$.

(c) (*Kryterium Bertranda* ⁽⁵⁾) Niech $B_n := (\ln n)(n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) - 1)$.

Jeżeli $B_n \geq c > 1$ dla $n \geq N$, to $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$.

Jeżeli $B_n \leq c < 1$ dla $n \geq N$, to $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$.

(d) (*Kryterium Gaussa* ⁽⁶⁾). Przypuśćmy, że $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$, gdzie $\lambda, \mu > 0$, a ciąg $(\theta_n)_{n=0}^{\infty}$ jest ograniczony.

Jeżeli $\lambda > 1$ lub $(\lambda = 1 \text{ i } \mu > 1)$, to $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$.

Jeżeli $\lambda < 1$ lub $(\lambda = 1 \text{ i } \mu \leq 1)$, to $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$.

Zauważmy, że dla $b_n := 1$, $n \in \mathbb{N}_0$, kryterium Kummera redukuje się do kryterium d'Alemberta.

Dowód. (a) Możemy założyć, że $N = 0$. W pierwszym przypadku mamy: $c(a_1 + \dots + a_{n+1}) \leq a_0 b_0 - a_1 b_1 + \dots + a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1} = a_0 b_0 - a_{n+1} b_{n+1} < a_0 b_0$, a stąd $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \frac{1}{c} a_0 b_0 < +\infty$.

W drugim przypadku mamy: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{1}{\frac{b_{n+1}}{b_n}}$ i korzystamy z Twierdzenia 6.1.8(c).

(b) Stosujemy kryterium Kummera dla $b_n := n$.

⁽³⁾ Ernst Eduard Kummer (1810–1893).

⁽⁴⁾ Joseph Ludwig Raabe (1801–1859).

⁽⁵⁾ Joseph Louis François Bertrand (1822–1900).

⁽⁶⁾ Carl Friedrich Gauss (1777–1855).

(c) Zastosujemy kryterium Kummera dla $b_n := n \ln n$. Mamy $n \ln n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - (n+1) \ln(n+1) = (\ln n) \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) - \ln(1 + \frac{1}{n})^{n+1} = B_n - \ln(1 + \frac{1}{n})^{n+1} \approx B_n - 1$.

(d) Mamy $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\lambda}$, a stąd przypadki, gdy $\lambda \neq 1$ wynikają z kryterium d'Alemberta. Dalej zakładamy, że $\lambda = 1$. Mamy $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \mu$, a stąd przypadki, gdy $\mu \neq 1$ wynikają z kryterium Raabego. Dalej zakładamy, że $\lambda = \mu = 1$. Zastosujemy kryterium Bertranda. Mamy $B_n = \frac{\ln n}{n} \theta_n \rightarrow 0$. $\square$

Przykład 6.1.21. (a) Korzystając z kryterium Raabego pokażemy, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e} \right)^n = +\infty$. Zauważmy, że $\frac{n}{e \sqrt[n]{n!}} \rightarrow 1$ (Przykład 2.4.3(b)) więc kryterium Cauchy'ego nie rozstrzyga. Udowodnimy, że $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n} - 1 \right) = \frac{1}{2}$. Istotnie,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} \left(\frac{e}{(1+x)^{1/x}} - 1 \right) &\stackrel{H(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{e}{(1+x)^{1/x}} - 1 \right)' = \lim_{x \rightarrow 0+} \left(e^{1-\frac{1}{x} \ln(1+x)} - 1 \right)' \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e}{(1+x)^{1/x}} \left(\frac{1}{x^2} \ln(1+x) - \frac{1}{x(1+x)} \right) \\ &\stackrel{\text{Peano}}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e}{(1+x)^{1/x}} \frac{(x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)) - (x - x^2 + o(x^2))}{x^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(b) Korzystając z kryterium Gaussa pokażemy, że szereg

$$1 + \left(\frac{1}{2} \right)^p + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^p + \cdots + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3) \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2) \cdot (2n)} \right)^p + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^p$$

jest zbieżny dla $p > 2$ i rozbieżny dla $0 < p \leq 2$. Istotnie,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{2n}{2n-1} \right)^p = \left(1 - \frac{1}{2n} \right)^{-p} \stackrel{\text{Peano}}{=} 1 + \frac{p}{2n} + \frac{p(p+1)}{2} \frac{1}{(2n)^2} + o\left(\frac{1}{(2n)^2} \right) = 1 + \frac{p}{2n} + \frac{\theta_n}{n^2},$$

gdzie ciąg $(\theta_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony.

Zauważmy, że $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{2n+1}{2n+2} \right)^p \rightarrow 1$, a więc kryterium d'Alemberta nie rozstrzyga.

Twierdzenie 6.1.22 (Twierdzenie Riemanna o tasowaniu szeregu warunkowo zbieżnego). *Jeżeli szereg rzeczywisty $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, ale nie jest bezwzględnie zbieżny, to dla dowolnych $-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq +\infty$*

istnieje bijekcja $\sigma : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ taka, że jeżeli $S'_n := \sum_{k=0}^n a_{\sigma(k)}$, to $\liminf_{n \rightarrow +\infty} S'_n = \alpha$ i $\limsup_{n \rightarrow +\infty} S'_n = \beta$.

Oznacza to, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest warunkowo zbieżny, a nawet więcej, dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ istnieje

bijekcja $\sigma : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ taka, że $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)} = x$.

Dowód. Można założyć, że $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$ (ĆWICZENIE). Ustalmy α, β oraz ciągi $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}, (\beta_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ takie, że $\alpha_n \rightarrow \alpha$, $\beta_n \rightarrow \beta$, $\beta_0 > 0$ oraz $\alpha_n < \beta_n$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Niech $a_n^+ := \max\{a_n, 0\}$, $a_n^- := \max\{-a_n, 0\}$. Oczywiście, $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$, $a_n = a_n^+ - a_n^-$. Gdyby $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ < +\infty$ (odp. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^- < +\infty$), to wtedy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^- < +\infty$ (odp. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ < +\infty$), co daje $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$

— sprzeczność. Wynika stąd, że $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^- = +\infty$.

Niech $A := \{n \in \mathbb{N}_0 : a_n > 0\} = \{k_0, k_1, \dots\}$, gdzie $k_0 < k_1 < \dots$, i analogicznie $B := \{n \in \mathbb{N}_0 : a_n < 0\} = \{\ell_0, \ell_1, \dots\}$, gdzie $\ell_0 < \ell_1 < \dots$. Oczywiście $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{N}_0$. Szereg $\sum_{s=0}^{\infty} a_{k_s}$

(odp. $\sum_{s=0}^{\infty} (-a_{\ell_s})$) różni się od szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$ (odp. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$) tylko wyrazami zerowymi, więc jest również rozbieżny.

Rozpoczynamy konstrukcję bijekcji σ :

6.2. Iloczyn szeregów

Krok 0: Niech $p_0 \in \mathbb{N}_0$ będzie najmniejszą liczbą taką, że $T_0 := a_{k_0} + \dots + a_{k_{p_0}} > \beta_0$ i niech $q_0 \in \mathbb{N}_0$ będzie najmniejszą liczbą taką, że $U_0 := T_0 + a_{\ell_0} + \dots + a_{\ell_{q_0}} < \alpha_0$.

Krok 1: Niech $p_1 > p_0$ będzie najmniejszą liczbą taką, że $T_1 := U_0 + a_{k_{p_0+1}} + \dots + a_{k_{p_1}} > \beta_1$ i niech $q_1 > q_0$ będzie najmniejszą liczbą taką, że $U_1 := T_1 + a_{\ell_{q_0+1}} + \dots + a_{\ell_{q_1}} < \alpha_1$.

Rozbieżność szeregów gwarantuje to, że procedura może być dowolnie kontynuowana.

Teraz definiujemy

$$(\sigma(0), \sigma(1), \dots) := (k_0, \dots, k_{p_0}, \ell_0, \dots, \ell_{q_0}, k_{p_0+1}, \dots, k_{p_1}, \ell_{q_0+1}, \dots, \ell_{q_1}, \dots).$$

Zauważmy, że $0 < T_s - \beta_s \leq a_{k_{p_s}}$ oraz $a_{\ell_{q_s}} \leq U_s - \alpha_s < 0$. Wynika stąd, że $T_s \rightarrow \beta$, $U_s \rightarrow \alpha$. W szczególności, $\limsup_{n \rightarrow +\infty} S'_n \geq \limsup_{s \rightarrow +\infty} T_s = \beta$ oraz $\liminf_{n \rightarrow +\infty} S'_n \leq \liminf_{s \rightarrow +\infty} U_s = \alpha$.

Na koniec wystarczy jeszcze zauważyć, że sumy pośrednie przy przechodzeniu od U_{s-1} do T_s leżą pomiędzy U_{s-1} i T_s , zaś sumy pośrednie przy przechodzeniu od T_s do U_s leżą pomiędzy U_s i T_s . $\square$

Wniosek 6.1.23. *Jeżeli $1 \leq d := \dim_{\mathbb{R}} E < +\infty$, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest bezwarunkowo zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest bezwzględnie zbieżny. W szczególności, szereg liczb zespolonych jest bezwarunkowo zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest bezwzględnie zbieżny.*

Dowód. Implikacja ($\Leftarrow$) wynika z Twierdzenia 6.1.7. Implikacja ($\Rightarrow$) dla szeregów rzeczywistych ($d = 1$) wynika z Twierdzenia 6.1.20. Z Twierdzenia 5.11.11 wynika, że dowód sprowadza się do przypadku $E = \mathbb{R}^d$. Jeżeli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_{n,1}, \dots, a_{n,d})$ jest bezwarunkowo zbieżny, to szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,j}$, $j = 1, \dots, d$, są bezwarunkowo zbieżne, a stąd $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|_1 \leq \sum_{j=1}^d \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n,j}| < +\infty$. $\square$

Twierdzenie* 6.1.24 (Lévy-Steinitz ⁽⁷⁾⁽⁸⁾). *Niech $\mathbf{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}^d$ będzie ciągiem takim, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Zdefiniujemy:*

$$\mathcal{X}(\mathbf{a}) := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \exists \sigma: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 : \sigma \text{ jest bijekcją, szereg } \sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} \text{ jest zbieżny oraz } x = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} \right\}.$$

Jeśli $\mathcal{X}(\mathbf{a}) \neq \emptyset$, to $\mathcal{X}(\mathbf{a})$ jest rzeczywistą podprzestrzenią afiniczną $\mathbb{R}^d$.

Zauważmy, że zbiór $\mathcal{X}(\mathbf{a})$ jest punktem wtedy i tylko wtedy, gdy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest bezwarunkowo (a więc bezwzględnie) zbieżny.

Prawdziwe jest następujące ogólne twierdzenie.

Twierdzenie* 6.1.25. ⁽⁹⁾ *Niech E będzie przestrzenią Banacha. Wówczas E jest skończenie wymiarowa wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset E$, jeżeli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest bezwarunkowo zbieżny, to jest bezwzględnie zbieżny.*

W szczególności, jeżeli $\dim E = \infty$, to istnieje szereg bezwarunkowo zbieżny, który nie jest bezwzględnie zbieżny.

6.2. Iloczyn szeregów

Twierdzenie 6.2.1. *Niech $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, $(b_n)_{n=0}^{\infty} \subset E$, $B_n := \sum_{k=0}^n b_k$, $n \in \mathbb{N}_0$. Wtedy:*

(a) *(Kryterium Dirichleta) Jeżeli ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ jest monotoniczny, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ oraz ciąg $(B_n)_{n=0}^{\infty}$ jest ograniczony, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny.*

⁽⁷⁾ Paul Pierre Lévy (1886–1971).

⁽⁸⁾ Ernst Steinitz (1871–1928).

⁽⁹⁾ Zob. A. Dvoretzky, C.A. Rogers, *Absolute and unconditional convergence in linear normed spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 36 (1950), 192–197.

(b) (*Kryterium Abela* ⁽¹⁰⁾) Jeżeli ciąg $(a_n)_{n=0}^\infty$ jest monotoniczny i ograniczony oraz szereg $\sum_{n=0}^\infty b_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=0}^\infty a_n b_n$ jest zbieżny.

(c) (*Kryterium Leibniza*) Jeżeli ciąg $(b_n)_{n=0}^\infty \subset \mathbb{R}_{>0}$ jest malejący, to szereg $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n b_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$.

Dowód. (a) Niech $\|B_n\| \leq M, n \in \mathbb{N}_0$. Zdefiniujmy dodatkowo $B_{-1} := 0 \in E$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^m a_n b_n &= \sum_{n=0}^m a_n (B_n - B_{n-1}) = \sum_{n=0}^m a_n B_n - \sum_{n=0}^m a_n B_{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^m a_n B_n - \sum_{n=0}^{m-1} a_{n+1} B_n = \left(\sum_{n=0}^{m-1} (a_n - a_{n+1}) B_n \right) + a_m B_m. \end{aligned} \quad (*)$$

Powyższe przekształcenie nosi nazwę *transformacji Abela*. Ponieważ $a_m B_m \rightarrow 0$, wystarczy pokazać, że $\sum_{n=0}^\infty \|(a_n - a_{n+1}) B_n\| < +\infty$. Istotnie, wobec monotoniczności ciągu $(a_n)_{n=0}^\infty$ mamy

$$\sum_{n=0}^m |a_n - a_{n+1}| \|B_n\| \leq M |a_0 - a_{m+1}|, \quad m \in \mathbb{N}_0,$$

a ciąg $(M|a_0 - a_{m+1}|)_{m=0}^\infty$ jest oczywiście ograniczony.

(b) Ciągi $(a_m)_{m=0}^\infty$ i $(B_m)_{m=0}^\infty$ mają granice, $a_m \rightarrow a, B_m \rightarrow B$. Stąd $a_m B_m \rightarrow aB$. Teraz korzystamy z (*) i rozumiemy jak w (a).

(c) Wynika z (a) i warunku koniecznego zbieżności szeregów. $\square$

Przykład 6.2.2. (a) Na mocy kryterium Dirichleta szereg $\sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n}$ jest zbieżny dla $|z| \leq 1, z \neq 1$.

Istotnie, dla $|z| < 1$ mamy $|\frac{z^n}{n}| \leq |z|^n$, a ostatni szereg to zbieżny szereg geometryczny. Dla $z \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$ mamy $|\sum_{k=1}^n z^k| = |z \frac{1-z^{n+1}}{1-z}| \leq \frac{2}{|1-z|}$.

(b) Na mocy kryterium Leibniza, dla dowolnego $\alpha > 0$ szereg $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ jest zbieżny.

(c) Dla dowolnego $\alpha \in (0, 1]$ szereg $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ jest warunkowo zbieżny.

Definicja 6.2.3 (Iloczyn Cauchy'ego szeregów). Niech $\Phi \in \mathcal{L}(E, F; G)$ i niech $(a_n)_{n=0}^\infty \subset E, (b_n)_{n=0}^\infty \subset F, c_n := \sum_{k=0}^n \Phi(a_k, b_{n-k}), n \in \mathbb{N}_0$. Szereg $\sum_{n=0}^\infty c_n$ nazywamy *iloczynem Cauchy'ego szeregów* $\sum_{n=0}^\infty a_n$ i $\sum_{n=0}^\infty b_n$ względem odwzorowania Φ . W przypadku, gdy $\Phi : \mathbb{K} \times E \rightarrow E, (\alpha, x) \mapsto \alpha x$ mówimy po prostu o iloczynie Cauchy'ego szeregów.

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} A_n &:= \sum_{k=0}^n a_k, \quad B_n := \sum_{k=0}^n b_k, \quad C_n := \sum_{k=0}^n c_k, \quad n \in \mathbb{N}_0, \\ A &:= \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \sum_{n=0}^\infty a_n, \quad B := \lim_{n \rightarrow +\infty} B_n = \sum_{n=0}^\infty b_n, \quad C := \lim_{n \rightarrow +\infty} C_n = \sum_{n=0}^\infty c_n, \end{aligned}$$

oczywiście przy założeniu, że odpowiednie szeregi są zbieżne.

Twierdzenie 6.2.4 (Twierdzenie Mertensa ⁽¹¹⁾). (a) Jeżeli $\sum_{n=0}^\infty \|a_n\| < +\infty$ oraz szereg $\sum_{n=0}^\infty b_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=0}^\infty c_n$ jest zbieżny oraz $C = \Phi(A, B)$.

⁽¹⁰⁾ Niels Abel (1802–1829).

(b) Jeżeli $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| < +\infty$ oraz $\sum_{n=0}^{\infty} \|b_n\| < +\infty$, to $\sum_{n=0}^{\infty} \|c_n\| < +\infty$.

Dowód. (a) Zauważmy, że zawsze możemy założyć, że $\|\Phi\| \leq 1$ (ĆWICZENIE). Niech $M > 0$ będzie takie, że $\|B_n\| \leq M$, $\|a_0\| + \dots + \|a_n\| \leq M$, $n \in \mathbb{N}_0$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Niech $n_0 \in \mathbb{N}_0$ będzie takie, że $\sum_{k=n_0+1}^n \|a_k\| \leq \frac{\varepsilon}{8M}$ dla $n \geq n_0 + 1$. Niech dalej $n_1 > n_0$ będzie takie, że $\|B_{n-n_0} - B\| \leq \frac{\varepsilon}{4M}$ oraz $\|A_n - A\| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$ dla $n \geq n_1$. Teraz dla $n \geq n_1$ mamy $\|C_n - \Phi(A, B)\| \leq \|C_n - \Phi(A_n, B)\| + \|A_n - A\| \|B\| \leq \|C_n - \Phi(A_n, B)\| + \frac{\varepsilon}{2}$. Pozostaje oszacować pierwszy składnik. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} C_n &= \Phi(a_0, b_0) + \Phi(a_0, b_1) + \Phi(a_1, b_0) + \dots + \Phi(a_0, b_n) + \dots + \Phi(a_n, b_0) \\ &= \Phi(a_0, b_0 + \dots + b_n) + \Phi(a_1, b_0 + \dots + b_{n-1}) + \dots + \Phi(a_{n-1}, b_0 + b_1) + \Phi(a_n, b_0) = \sum_{k=0}^n \Phi(a_k, B_{n-k}). \end{aligned}$$

Stąd dla $n \geq n_1$ dostajemy:

$$\begin{aligned} \|C_n - \Phi(A_n, B)\| &= \left\| \sum_{k=0}^n \Phi(a_k, B_{n-k} - B) \right\| \leq \sum_{k=0}^n \|a_k\| \|B_{n-k} - B\| \\ &= \sum_{k=0}^{n_0} \|a_k\| \|B_{n-k} - B\| + \sum_{k=n_0+1}^n \|a_k\| \|B_{n-k} - B\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n_0} \|a_k\| \|B_{n+n_0-k-n_0} - B\| + \sum_{k=n_0+1}^n \|a_k\| 2M \leq \sum_{k=0}^{n_0} \|a_k\| \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{4} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

(b) Na podstawie (a) szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \|a_k\| \|b_{n-k}\|$ jest zbieżny. Ponadto,

$$\sum_{n=0}^m \|c_n\| \leq \|\Phi\| \sum_{n=0}^m \sum_{k=0}^n \|a_k\| \|b_{n-k}\|.$$

□

Przykład 6.2.5. Jeżeli oba szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ są tylko zbieżne, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ nie musi być zbieżny.

Dla przykładu: $a_0 = b_0 := 0$, $a_n = b_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$. Szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ są zbieżne na podstawie kryterium Leibniza i nie są bezwzględnie zbieżne (Przykład 6.1.12). Mamy $|c_n| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} > \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$.

Obserwacja 6.2.6. (a) $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{C}$.

Istotnie, korzystamy z iloczynu Cauchy'ego szeregów. Mamy

$$\exp(a)\exp(b) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} \frac{b^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (a+b)^n = \exp(a+b).$$

(b) $\exp(0) = 1$, $\exp z \neq 0$, $\exp(-z) = \frac{1}{\exp z}$, $z \in \mathbb{C}$.

Przykład 6.2.7. W przypadku p -szeregów liczb zespolonych $\sum_{n=0}^{\infty} a_{j,n}$, $j = 1, \dots, p$, ich iloczyn Cauchy'ego $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ ma postać

$$c_n = \sum_{\substack{s_1, \dots, s_p \in \mathbb{N}_0 \\ s_1 + \dots + s_p = n}} a_{1,s_1} \cdots a_{p,s_p}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Na podstawie Twierdzenia 6.2.4, jeżeli $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{j,n}| < +\infty$, $j = 1, \dots, p$, to $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < +\infty$ oraz $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \prod_{j=1}^p \sum_{n=0}^{\infty} a_{j,n}$. W szczególności, jeżeli $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$, to $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{s_1, \dots, s_p \in \mathbb{N}_0 \\ s_1 + \dots + s_p = n}} a_{s_1} \cdots a_{s_p}$, przy czym ostatni szereg jest zbieżny bezwzględnie.

6.3. Iloczyny nieskończone

Oprócz szeregów liczb zespolonych rozważane są również nieskończone iloczyny liczb zespolonych.

Definicja 6.3.1. Niech $(a_n)_{n=0}^\infty \subset \mathbb{C}$. Powiemy, że *iloczyn nieskończony* $\prod_{n=0}^\infty a_n$ jest zbieżny, jeżeli dla pewnego $p \in \mathbb{N}_0$ ciąg iloczynów częściowych $I_k := \prod_{n=p}^k a_n$, $k \in \mathbb{N}_p$, jest zbieżny do granicy skończonej i różnej od zera. W szczególności, musi być $a_n \neq 0$, $n \geq p$. Oczywiście, badając zbieżność iloczynu nieskończonego, zawsze możemy przyjąć, że $p = 0$. Pełny sens definicji ujawni się, gdy będziemy badać iloczyny funkcyjne $x \mapsto \prod_{n=0}^\infty f_n(x)$ (zob. Twierdzenie 6.4.13).

Zgodnie z tradycją wyrazy iloczynu nieskończonego zapisujemy w postaci $a_n = 1 + c_n$. Mówimy, że iloczyn nieskończony $\mathcal{I} : \prod_{n=0}^\infty (1 + c_n)$ jest *bezwzględnie zbieżny*, jeżeli iloczyn $\prod_{n=0}^\infty (1 + |c_n|)$ jest zbieżny. Iloczyn $\mathcal{I}$ nazywamy *bezwzględnie zbieżnym*, jeżeli dla dowolnej bijekcji $\sigma : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, iloczyn nieskończony $\prod_{n=0}^\infty (1 + c_{\sigma(n)})$ jest zbieżny i jego wartość nie zależy od σ . Iloczyn zbieżny, który nie jest bezwzględnie zbieżny nazywamy *zbieżnym warunkowo*.

Przykład 6.3.2. (a) $\prod_{n=2}^\infty (1 - \frac{1}{n^2}) = \frac{1}{2}$.

Istotnie, $I_k = \prod_{n=2}^k (1 - \frac{1}{n^2}) = \prod_{n=2}^k \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdots \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{k+1}{2k} \rightarrow \frac{1}{2}$.

(b) $\prod_{n=1}^\infty (1 + \frac{1}{n})$ jest rozbieżny. Istotnie, $I_k = \prod_{n=1}^k (1 + \frac{1}{n}) = \prod_{n=1}^k \frac{n+1}{n} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{k+1}{k} = k+1 \rightarrow +\infty$.

(c) $\prod_{n=2}^\infty (1 - \frac{1}{n})$ jest rozbieżny. Istotnie, $I_k = \prod_{n=2}^k (1 - \frac{1}{n}) = \prod_{n=2}^k \frac{n-1}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{k-1}{k} = \frac{1}{k} \rightarrow 0$.

Obserwacja 6.3.3 (Warunek konieczny zbieżności iloczynu nieskończonego). Jeżeli iloczyn $\mathcal{I}$ jest zbieżny, to $c_n \rightarrow 0$. Istotnie, $1 + c_n = \frac{I_n}{I_{n-1}} \rightarrow 1$.

Twierdzenie 6.3.4 (Warunek konieczny i dostateczny zbieżności iloczynu nieskończonego). *Iloczyn $\mathcal{I}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \forall k \in \mathbb{N} : |(1 + c_{n+1}) \cdots (1 + c_{n+k}) - 1| \leq \varepsilon$. (*)*

Dowód. Jeżeli iloczyn jest zbieżny, to ciąg $(I_k)_{k=1}^\infty$ spełnia warunek Cauchy'ego. Ponieważ $I_k \rightarrow I \neq 0$, możemy założyć, że $|I_k| \geq c > 0$ dla $k \geq N_0$ przy pewnym $c > 0$. Dobierzmy teraz $N \geq N_0$ takie, że $|I_{n+k} - I_k| \leq c\varepsilon$ dla $n \geq N$ i $k \in \mathbb{N}$. Wtedy $|(1 + c_{n+1}) \cdots (1 + c_{n+k}) - 1| = \frac{|I_{n+k} - I_k|}{|I_k|} \leq \frac{c\varepsilon}{c} = \varepsilon$.

Jeżeli warunek (*) zachodzi, to biorąc $\varepsilon = \frac{1}{2}$ dostajemy $\frac{1}{2} \leq |(1 + c_{n+1}) \cdots (1 + c_{n+k})| \leq \frac{3}{2}$, $n \geq N$, $k \in \mathbb{N}$. W szczególności, $\frac{1}{2} \leq |\frac{I_k}{I_{k_0}}| \leq \frac{3}{2}$ dla $k > k_0 = N$.

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Na podstawie (*) mamy $|\frac{I_{n+k}}{I_n} - 1| = |(1 + a_{n+1}) \cdots (1 + c_{n+k}) - 1| \leq \frac{2}{3}\varepsilon \frac{1}{|I_{k_0}|}$ dla $n \geq N > k_0$ i $k \in \mathbb{N}$. Wynika stąd, że $|I_{n+k} - I_n| \leq \frac{2}{3}\varepsilon \frac{|I_n|}{|I_{k_0}|} \leq \varepsilon$ dla $n \geq N$ i $k \in \mathbb{N}$. Oznacza to, że ciąg $(I_k)_{k=1}^\infty$ spełnia warunek Cauchy'ego. Jest więc zbieżny do pewnej granicy skończonej I . Pozostaje pokazać, że $I \neq 0$, co wynika z oszacowania $\frac{1}{2} \leq |\frac{I_k}{I_{k_0}}|$ dla $k > k_0$. $\square$

Twierdzenie 6.3.5. *Jeżeli iloczyn $\prod_{n=0}^\infty (1 + c_n)$ jest bezwzględnie zbieżny, to jest zbieżny.*

Dowód. Skorzystamy z Twierdzenia 6.3.4. Wystarczy zauważyć (ĆWICZENIE), że

$$|(1 + c_{n+1}) \cdots (1 + c_{n+k}) - 1| \leq ((1 + |c_{n+1}|) \cdots (1 + |c_{n+k}|) - 1). \quad \square$$

Twierdzenie 6.3.6. *Niech $(c_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}_+$, $\tau \in \{-1, 1\}$. Wtedy iloczyn $\prod_{n=0}^\infty (1 + \tau c_n)$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_{n=0}^\infty c_n$. W szczególności, dla dowolnego ciągu $(c_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$, iloczyn $\prod_{n=0}^\infty (1 + c_n)$ jest bezwzględnie zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_{n=0}^\infty |c_n| < +\infty$.*

Dowód. W przypadku $\tau = 1$ niech $S_k := \sum_{n=0}^{\infty} c_n$. Zauważmy, że ciąg $(I_k)_{k=1}^{\infty}$ jest rosnący. Mamy $S_k \leq I_k$, co daje implikację ($\Rightarrow$). W drugą stronę mamy $1 + x \leq e^x$, $x \geq 0$, a stąd $I_k \leq e^{S_k}$.

W przypadku, gdy $\tau = -1$ możemy założyć, $c_n < 1$, $n \in \mathbb{N}_0$. Mamy $1 - c_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 - c_n}}$. Pozostaje udowodnić, że $\sum_{n=0}^{\infty} c_n < +\infty \iff \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{1 - c_n} < +\infty$ (ĆWICZENIE). $\square$

Twierdzenie 6.3.7. (a) Jeżeli iloczyn I jest bezwzględnie zbieżny, to jest bezwarunkowo zbieżny.

(b) Niech $(z_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, $z_n \rightarrow 0$. Wtedy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy iloczyn $\prod_{n=0}^{\infty} e^{z_n}$ jest zbieżny.

(c) Niech $(c_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, $c_n \rightarrow 0$. Wtedy iloczyn I jest bezwzględnie zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest bezwarunkowo zbieżny.

Dowód. (a) Niech $\sigma : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ będzie dowolną bijekcją. Na podstawie Twierdzenia 6.3.6 i twierdzenia o tasowaniu szeregów, iloczyn $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + c_{\sigma(n)})$ jest bezwzględnie zbieżny. Pozostaje wykazać równość wartości. Niech $I'_k := \prod_{n=0}^k (1 + c_{\sigma(n)}) \rightarrow I'$. Chcemy pokazać, że $\frac{I_k}{I'_k} \rightarrow 1$. Skracaając podobne

czynniki mamy $\frac{I_k}{I'_k} = \frac{\prod_{n \in A_k} (1 + c_n)}{\prod_{n \in A'_k} (1 + c_n)} =: \frac{J_k}{J'_k}$, gdzie $A_k \subset \{0, \dots, k\}$ i $A'_k \subset \{\sigma(0), \dots, \sigma(k)\}$. Pokażemy, że $J_k \rightarrow 1$ i $J'_k \rightarrow 1$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Na podstawie Twierdzenia 6.3.4 istnieje $N_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $|\left(\prod_{n \in A} (1 + c_n) - 1\right)| \leq \left(\prod_{n \in A} (1 + |c_n|) - 1\right) - 1 \leq \varepsilon$ dla dowolnego zbioru skończonego $A \subset \mathbb{N}_{N_0}$. Dobierzmy $N \geq N_0$ takie, że $\{0, \dots, N_0\} \subset \{\sigma(0), \dots, \sigma(N)\}$. Wtedy dla $k > N$ mamy $A_k \subset \{N_0 + 1, \dots, k\}$, $A'_k \subset \{\sigma(0), \dots, \sigma(k)\} \setminus \{0, \dots, N_0\}$. Wynika stąd, że $|J_k - 1| \leq \varepsilon$ oraz $|J'_k - 1| \leq \varepsilon$ dla $k > N$.

(b) Niech $S_n := \sum_{k=0}^n z_k$, $I_n := \prod_{k=0}^n e^{z_k}$, $S := \sum_{n=0}^{\infty} z_n$, $I := \prod_{n=0}^{\infty} e^{z_n}$, o ile szereg (odp. iloczyn) jest zbieżny. Mamy $e^{S_n} = I_n$, skąd natychmiast wynika, że jeżeli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ jest zbieżny, to iloczyn $\prod_{n=0}^{\infty} e^{z_n}$ jest zbieżny.

Założmy, że iloczyn $\prod_{n=0}^{\infty} e^{z_n}$ jest zbieżny. Niech $z_n = x_n + iy_n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Mamy $|I_n| = e^{\operatorname{Re} S_n}$, czyli $\operatorname{Re} S_k = \ln |I_n|$. Skąd wynika, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ jest zbieżny. Pozostaje wykazać, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ jest zbieżny. Zauważmy, że iloczyn $\prod_{n=0}^{\infty} e^{iy_n}$ jest zbieżny do $I/|I|$ ⁽¹²⁾. Problem sprowadza się więc do przypadku $x_n = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$ (wtedy $|I| = 1$). Przypuśćmy, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ jest rozbieżny. Niech $T_n := \sum_{k=0}^n y_k$ ($S_n = iT_n$). Z warunku Cauchy'ego wynika, że istnieje $0 < \varepsilon < \pi/4$ takie, że $\forall n \in \mathbb{N}_0 \exists m > n : |T_{n,m}| > \varepsilon$, gdzie $T_{n,m} := T_m - T_n = \sum_{k=n+1}^m y_k$. Niech $0 < \lambda < \sin \varepsilon$. Istnieje $n_0 \in \mathbb{N}_0$ takie, że $|y_n| < \varepsilon$ i $|I_n - I| < \lambda$ dla $n \geq n_0$. Ustalmy najmniejsze $m_0 > n_0$ takie, że $|T_{n_0, m_0}| > \varepsilon$. Zauważmy, że $\varepsilon < |T_{n_0, m_0}| < 2\varepsilon$ (ĆWICZENIE). Oczywiście, $|I_{m_0} - I_{n_0}| < 2\lambda$, a stąd $|I_{m_0}/I_{n_0} - 1| < 2\lambda$, czyli $|e^{iT_{n_0, m_0}} - 1| < 2\lambda$. Biorąc pod uwagę to, że $\varepsilon < |T_{n_0, m_0}| < 2\varepsilon$, dostajemy $|e^{iT_{n_0, m_0}} - 1| > 2 \sin \varepsilon$ — sprzeczność.

(c) Implikacja ($\Rightarrow$) wynika z (a). Dla dowodu przeciwnej implikacji Możemy założyć, że $|c_n| < 1/2$, $n \in \mathbb{N}_0$. Niech $z_n := \operatorname{Log} z_n = \ln |1 + c_n| + i \operatorname{Arg}(1 + c_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$ ⁽¹³⁾. Na podstawie (a), jeżeli iloczyn $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + c_n) = \prod_{n=0}^{\infty} e^{z_n}$ jest bezwarunkowo zbieżny, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ jest bezwarunkowo zbieżny, a więc

⁽¹²⁾ W tym miejscu korzystamy w rzeczywistości z ciągłości zespolonej funkcji eksponens, który to fakt udowodnimy w niedalekiej przyszłości — zob. Przykład 6.4.12(b).

⁽¹³⁾ Dla $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ definiujemy *logarytm główny* $\operatorname{Log} z$ wzorem $\operatorname{Log} z := \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$. Oczywiście $e^{\operatorname{Log} z} = z$. Zauważmy, że funkcja Log jest ciągła (ĆWICZENIE). Ponadto, $\lim_{\mathbb{C} \ni z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Log}(1+z)}{z} = 1$ (ĆWICZENIE).

bezwzględnie zbieżny (Wniosek 6.1.23). Pozostaje wykazać, że jeżeli $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| < +\infty$, to $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < +\infty$ i skorzystać z Twierdzenia 6.3.6. Wystarczy pokazać, że $|c_n| \leq C|z_n|$ dla pewnej stałej $C > 0$ przy $n \gg 1$, a to wynika z tego, że $\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in \mathbb{C}}} \frac{\operatorname{Log}(1+z)}{z} = 1$. $\square$

6.4. Ciągi i szeregi funkcyjne

Definicja 6.4.1. Niech X będzie dowolnym niepustym zbiorem. Rozważmy ciąg funkcji $f_n : X \rightarrow E$, $n \in \mathbb{N}$. Przypomnijmy, że:

- Ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny punktowo do funkcji $f : X \rightarrow E$, jeżeli $f_n(x) \rightarrow f(x)$ dla dowolnego $x \in X$. W przypadku, gdy $X = \{x_0\}$, pojęcie ciągu funkcyjnego redukuje się do ciągu elementów przestrzeni E .
- Ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji f (por. Twierdzenie 3.3.2(i)), jeżeli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall x \in X : \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon. \quad (\dagger)$$

Przyjmijmy dodatkowo, że (X, ϱ) jest przestrzenią metryczną. Mówimy, że ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest:

- *zbieżny lokalnie jednostajnie* do funkcji f , jeżeli dowolny punkt $a \in X$ posiada otoczenie $U \subset X$ takie, że $f_n|_U \rightarrow f|_U$ jednostajnie;
- *zbieżny niemal jednostajnie* do funkcji f , jeżeli dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset X$ mamy $f_n|_K \rightarrow f|_K$ jednostajnie;

Obserwacja 6.4.2. (a) $f_n \rightarrow f$ jednostajnie na X wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \|f_n(x) - f(x)\| = 0.$$

(b) $(f_n \rightarrow f \text{ jednostajnie}) \implies (f_n \rightarrow f \text{ lokalnie jednostajnie}) \implies (f_n \rightarrow f \text{ niemal jednostajnie}) \implies (f_n \rightarrow f \text{ punktowo})$.

(c) Jeżeli X jest przestrzenią zwartą, to zbieżność jednostajna, lokalnie jednostajna i niemal jednostajna są równoważne.

(d) Jeżeli przestrzeń X jest *lokalnie zwarta* (tzn. każdy punkt $a \in X$ posiada otoczenie $U \subset X$ takie, że $\overline{U}$ jest zbiorem zwartym (np. $X \subset \mathbb{R}^n$)), to zbieżność lokalnie jednostajna i niemal jednostajna są równoważne.

Przykład 6.4.3. (a) Niech $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy:

- $f_n \rightarrow f$ punktowo, gdzie $f(x) := \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } x \in [0, 1) \\ 1, & \text{jeżeli } x = 1 \end{cases}$.
- $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0, 1]\} = \sup\{x^n : x \in [0, 1]\} = 1$; w szczególności, zbieżność nie jest jednostajna (nie jest również jednostajna na $[0, 1)$).
- Dla dowolnego $\theta \in (0, 1)$ mamy $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0, \theta]\} = \theta^n$; w szczególności, $f_n \rightarrow f$ lokalnie jednostajnie na $[0, 1)$.

(b) Niech $f_n : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $f_n(x) := \frac{2nx}{n^2+x^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy:

- $f_n \rightarrow 0$ punktowo na $\mathbb{R}$.
- $f_n(n) = 1$; w szczególności, ciąg nie jest zbieżny jednostajnie.
- Dla dowolnego $M > 0$ mamy $\sup\{|f_n(x)| : |x| \leq M\} = \frac{2nM}{n^2+M^2}$; w szczególności, $f_n \rightarrow 0$ lokalnie jednostajnie.

(c) Niech $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) := \frac{nx}{1+n^2x^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy:

- $f_n \rightarrow 0$ punktowo na $\mathbb{R}$.
- $\sup\{|f_n(x)| : x \in \mathbb{R}\} = |f_n(\pm \frac{1}{n})| = \frac{1}{2}$; w szczególności, ciąg nie jest zbieżny jednostajnie w żadnym otoczeniu zera.

Definicja 6.4.4. Wszystkie pojęcia, wprowadzone wyżej dla ciągów funkcyjnych, przenoszą się na szeregi funkcyjne $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$. Dodatkowo, dla szeregów funkcyjnych wprowadzamy pojęcie *zbieżności bezwzględnej jednostajnej*, gdy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|$ jest zbieżny jednostajnie. Można też mówić o *zbieżności bezwzględnej lokalnie jednostajnej*, czy też o *zbieżności bezwzględnej niemal jednostajnej*.

Dla szeregów funkcyjnych rozważamy też pojęcie *zbieżności normalnej na X* , gdy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup\{\|f_n(x)\| : x \in X\} < +\infty.$$

Zgodnie z ogólnym wzorcem możemy też mówić o *zbieżności lokalnie normalnej*, czy też o *zbieżności niemal normalnej*.

Twierdzenie 3.3.2 daje nam natychmiast

Twierdzenie 6.4.5 (Warunek Cauchy'ego zbieżności jednostajnej szeregu). *Następujące warunki są równoważne:*

- (i) *szereg funkcyjny $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ jest zbieżny jednostajnie na X ;*
- (ii) *spełniony jest jednostajny warunek Cauchy'ego, tzn.*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m > n \geq n_0 \quad \forall x \in X : \left\| \sum_{k=n+1}^m f_k(x) \right\| \leq \varepsilon.$$

Twierdzenie 6.4.6. (a) *Szereg zbieżny bezwzględnie jednostajnie (odp. bezwzględnie lokalnie jednostajnie, bezwzględnie niemal jednostajnie) jest zbieżny jednostajnie (odp. lokalnie jednostajnie, niemal jednostajnie).*

(b) *(Kryterium Weierstrassa zbieżności jednostajnej szeregu funkcyjnego) Szereg zbieżny normalnie (odp. lokalnie normalnie, niemal normalnie) jest zbieżny bezwzględnie jednostajnie (odp. lokalnie jednostajnie, niemal jednostajnie).*

Obserwacja 6.4.7. (a) Niech $(f_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{B}(X, E)$. Zauważmy, że jeżeli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ jest zbieżny jednostajnie na X , to $f := \sum_{n=0}^{\infty} f_n \in \mathcal{B}(X, E)$. Stąd:

- (zbieżność jednostajna szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ na X) $\iff$ (zbieżność szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ w $\mathcal{B}(X, E)$);
- (zbieżność bezwzględna jednostajna szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ na X) $\iff$ (zbieżność szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|$ w $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$);
- (zbieżność normalna szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ na X) $\iff$ (zbieżność bezwzględna $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ w $\mathcal{B}(X, E)$).

(b) Założenie $(f_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{B}(X, E)$ nie jest ograniczające. Jeżeli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ jest jednostajnie zbieżny, to z jednostajnego warunku Cauchy'ego (z $\varepsilon = 1$) wynika, że istnieje $n_0 \in \mathbb{N}_0$ takie, że $\|f_k(x)\| \leq 1$, $x \in X$, $k > n_0$. Tak więc $f_k \in \mathcal{B}(X, E)$ dla $k > n_0$.

(c) Powyższe obserwacje pozwalają przenosić automatycznie wyniki dotyczące szeregów elementów przestrzeni Banacha E na szeregi funkcyjne. Po prostu stosujemy wyniki dotyczące szeregów o wyrazach z E do szeregów o wyrazach z $\mathcal{B}(X, E)$.

W ten sposób na przykład dostajemy:

Twierdzenie 6.4.8 (Twierdzenie o tasowaniu szeregów bezwzględnie jednostajnie zbieżnych). *Przypuśćmy, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ jest zbieżny jednostajnie bezwzględnie na X . Niech $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ będzie dowolną bijekcją. Wtedy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_{\sigma(n)}$ jest zbieżny jednostajnie bezwzględnie na X ⁽¹⁴⁾.*

Przykład 6.4.9. Szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1 - z^{2n}}, \quad z \in X := \mathbb{C} \setminus \mathbb{T},$$

⁽¹⁴⁾ Oczywiście, na podstawie Twierdzenia 6.1.7 mamy $\sum_{n=0}^{\infty} f_{\sigma(n)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, $x \in X$.

jest zbieżny lokalnie normalnie.

Istotnie dla dowolnego $\theta \in (0, 1)$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n \geq N$ mamy

$$\sup \left\{ \left| \frac{z^n}{1 - z^{2n}} \right| : |z| \leq \theta \right\} \leq 2\theta^n, \quad \sup \left\{ \left| \frac{z^n}{1 - z^{2n}} \right| : |z| \geq \frac{1}{\theta} \right\} \leq 2\theta^n \quad (\text{ĆWICZENIE}).$$

Ćwiczenie 6.4.10. Niech $g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g_n(x) := \begin{cases} 1 - \frac{1}{n}, & \text{jeżeli } 0 \leq x \leq \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \frac{n+1}{2}x, & \text{jeżeli } \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 - \frac{1}{2n}, & \text{jeżeli } \frac{1}{n} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

Zdefiniujmy $f_n := g_n - g_{n-1}$, $k \in \mathbb{N}_2$. Wtedy szereg $\sum_{n=2}^{\infty} f_n$ jest zbieżny bezwzględnie jednostajnie, ale nie jest zbieżny normalnie.

Twierdzenie 6.4.11. Załóżmy, że szereg funkcyjny $f := \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ jest lokalnie jednostajnie zbieżny.

Wtedy:

- (a) Jeżeli dla pewnego $a \in X$ mamy $f_n \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C}; a)$, $n \in \mathbb{N}$, to $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C}; a)$.
- (b) Jeżeli $f_n \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$, to $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$.

Dowód. Wystarczy skorzystać z Twierdzenia 4.4.1. □

Przykład 6.4.12. (a) Suma szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1 - z^{2n}}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{T}$, jest funkcją ciągłą.

(b) Funkcja eksponens jest ciągła.

Zagadnienia dotyczące szeregów mają swoje odpowiedniki dla iloczynów funkcyjnych.

Twierdzenie 6.4.13. Niech (X, ϱ) będzie przestrzenią lokalnie zwartą i niech $(f_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$. Jeżeli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|$ jest zbieżny niemal jednostajnie w X , to iloczyn $I := \prod_{n=0}^{\infty} (1 + f_n)$ jest zbieżny niemal jednostajnie w X (w szczególności, $I \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$).

Dowód. Na podstawie Twierdzeń 6.3.5 i 6.3.6, dla dowolnego $x \in X$, iloczyn $I(x) := \prod_{n=0}^{\infty} (1 + f_n(x))$ jest zbieżny bezwzględnie. Pozostaje wykazać, że $I_k \rightarrow I$ niemal jednostajnie. Ustalmy zbiór zwarty $K \subset X$. Ponieważ $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n| \in \mathcal{C}(X)$, zatem istnieje $C > 0$ takie, że $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)| \leq C$, $x \in K$. Stąd dla $x \in K$ dostajemy $|I_k(x)| \leq (1 + |f_1(x)|) \cdots (1 + |f_k(x)|) \leq e^{|f_1(x)| + \cdots + |f_k(x)|} \leq e^C$.

Mamy $I_n - I_{n-1} = I_{n-1}f_n$. Stąd $I_k = I_0 + \sum_{n=1}^k (I_n - I_{n-1}) = I_0 + \sum_{n=1}^k I_{n-1}f_n$. Wystarczy więc pokazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |I_{n-1}f_n|$ jest zbieżny jednostajnie na K . Wynika to z oszacowania $|I_{n-1}(x)f_n(x)| \leq e^C |f_n(x)|$, $x \in K$. □

6.5. Operator odwracania w algebrach Banacha

Definicja 6.5.1. Mówimy, że $(A, \|\cdot\|)$ jest *algebrą Banacha* z jedyneką, jeżeli:

- A jest algebrą z jedyneką e ,
- $(A, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Banacha,
- $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$, $x, y \in A$,
- $\|e\| = 1$.

Niech $O(A)$ oznacza zbiór elementów odwracalnych algebry A i niech $O(A) \ni x \xrightarrow{A} x^{-1} \in O(A)$. Odnajdujemy, że A jest bijekcją; $A^{-1} = A$.

Obserwacja 6.5.2. (a) Niech $X \neq \emptyset$ będzie zwartą przestrzenią topologiczną i niech $A := \mathcal{C}(X, \mathbb{K})$. Wtedy A z normą Czebyszewa (supremową) jest algebrą Banacha z jedyneką. Ponadto, $O(A) = \{f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{K}) : f(x) \neq 0, x \in X\}$ oraz $A(f) = 1/f$.

(b) Niech $E \neq \{0\}$ będzie przestrzenią Banacha nad $\mathbb{K}$ i niech $A := \mathcal{L}(E, E)$. Wtedy A z normą z $\mathcal{L}(E, E)$ i składaniem jako mnożeniem wewnętrznym jest algebrą Banacha z jędyką id_E . Ponadto, $O(A) = \text{Isom}(E, E)$ oraz $\Lambda(L) = L^{-1}$.

(c) Niech $A := \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n) \simeq \mathbb{M}(n \times n; \mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^{n^2}$ (z normą operatorową z $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$). Wtedy $O(A)$ to zbiór macierzy odwracalnych, tzn. $O(A) = \{L \in \mathbb{M}(n \times n; \mathbb{K}) : \det L \neq 0\}$. Zauważmy, że jest to zbiór otwarty w $\mathbb{M}(n \times n; \mathbb{K})$. Ponadto, odwzorowanie $O(A) \ni L \xrightarrow{\Lambda} L^{-1} \in O(A)$ jest homeomorfizmem.

Powyższa sytuacja (w (c)) nie jest przypadkowa. Mamy bowiem następujący ogólny wynik.

Twierdzenie 6.5.3. *Niech A będzie algebrą Banacha z jędyką e . Wtedy:*

(a) $B(e, 1) \subset O(A)$ oraz $(e - x)^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu}$, $\|x\| < 1$, gdzie $x^0 := e$.

(b) Ogólniej, jeżeli $a \in O(A)$, to $B(a, 1/\|a^{-1}\|) \subset O(A)$ oraz $(a - x)^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (a^{-1}x)^{\nu} a^{-1}$, $\|x\| < 1/\|a^{-1}\|$. W szczególności, $O(A)$ jest otwarty w A .

(c) Odwzorowanie $O(A) \ni x \xrightarrow{\Lambda} x^{-1} \in O(A)$ jest homeomorfizmem.

Dowód. (a) Ustalmy $x \in A$, $\|x\| < 1$. Na wstępie zauważmy, że ponieważ $\|x^{\nu}\| \leq \|x\|^{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$, zatem szereg jest zbieżny do pewnego elementu a . Mamy:

$$(e - x)a = a - xa = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu} - \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu+1} = e, \quad a(e - x) = a - ax = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu} - \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu+1} = e.$$

(b) Niech $a \in O(A)$. Ustalmy $x \in A$, $\|x\| < 1/\|a^{-1}\|$. Wtedy $\|a^{-1}x\| < 1$. Ponieważ $a - x = a(e - a^{-1}x)$, wystarczy skorzystać z (a).

(c) Niech $a \in O(A)$, $\|x\| < 1/\|a^{-1}\|$. Na podstawie (b) mamy:

$$\|A(a - x) - A(a)\| = \|(a - x)^{-1} - a^{-1}\| = \left\| \sum_{\nu=1}^{\infty} (a^{-1}x)^{\nu} a^{-1} \right\| \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \|a^{-1}\|^{\nu+1} \|x\|^{\nu} = \frac{\|a^{-1}\|^2 \|x\|}{1 - \|a^{-1}\| \|x\|}. \quad \square$$

Korzystając z poprzednich rozważań łatwo dostajemy następujący wynik.

Twierdzenie 6.5.4. *Dla dowolnego $L_0 \in \text{Isom}(E, F)$ i $X \in \mathcal{L}(E, F)$ takich, że $\|X\| < 1/\|L_0^{-1}\|$ mamy*

$$L_0 - X \in \text{Isom}(E, F), \quad (L_0 - X)^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (L_0^{-1} \circ X)^{\nu} \circ L_0^{-1}.$$

W szczególności, zbiór $\text{Isom}(E, F)$ jest otwarty w $\mathcal{L}(E, F)$, a odwzorowanie

$$\text{Isom}(E, F) \ni L \xrightarrow{\Lambda} L^{-1} \in \text{Isom}(F, E)$$

jest homeomorfizmem.

6.6. Szeregi potęgowe

Niech E będzie ustaloną przestrzenią Banacha nad $\mathbb{K}$.

Definicja 6.6.1. *Szeregiem potęgowym o środku w punkcie $a \in \mathbb{K}$ nazywamy szereg funkcyjny postaci*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n, \quad (*)$$

gdzie $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset E$, $z \in \mathbb{K}$ ($0^0 := 1$). Oczywiście wszystkie własności szeregu (*) można odczytać badając szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, czyli zakładając, że $a = 0$. Tak też zawsze będziemy czynić. Liczbę

$$R := \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|}} \in [0, +\infty]$$

nazywamy *promieniem zbieżności szeregu potęgowego*.

Twierdzenie 6.6.2. *Rozważmy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.*

- (a) Jeżeli $R > 0$, to dla dowolnego $0 < r < R$ istnieją $\theta \in (0, 1)$ oraz $M > 0$ takie, że $\|a_n z^n\| \leq M\theta^n$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ oraz $z \in K(r)$. ⁽¹⁵⁾
- (b) Jeżeli $R > 0$, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ jest zbieżny lokalnie normalnie w $K(R)$.
- (c) Jeżeli $R > 0$ i $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $z \in K(R)$, to $f \in \mathcal{C}(K(R), E)$ (Twierdzenie 6.4.11(b)).
- (d) Jeżeli $R < +\infty$, to dla $z \notin \overline{K(R)} \cap \mathbb{K}$ szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ jest rozbieżny.
- (e) $R = \sup \left\{ |z| : \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n z^n\| < +\infty \right\} = \sup \left\{ |z| : \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \|a_n z^n\| < +\infty \right\}$.
- (f) Jeżeli $0 < R < +\infty$, to o zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ dla $z \in \mathbb{K} \cap \partial K(R)$ nic nie można powiedzieć.

Dowód. (a) Dla $|z| \leq r$ mamy $\|a_n z^n\| \leq \|a_n\| r^n$. Ponadto, $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\|a_n\| r^n} = \frac{r}{R} < 1$. Biorąc $\frac{r}{R} < \theta < 1$ wnioskujemy, że istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $\|a_n\| r^n \leq \theta^n$ dla $n > N$. Teraz wystarczy tylko wziąć $M := \max\{1, \|a_n\| (r/\theta)^n : n = 1, \dots, N\}$.

(b) wynika z (a).

(c) wynika z (b) i Twierdzenia 6.4.11.

(d) Ponieważ $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\|a_n z^n\|} = \frac{|z|}{R} > 1$, wystarczy skorzystać z kryterium Cauchy'ego.

(e) Niech $R_1 := \sup\{|z| : \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n z^n\| < +\infty\}$, $R_2 := \sup\{|z| : \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \|a_n z^n\| < +\infty\}$. Na podstawie (b)

i (d) mamy $R = R_1 \leq R_2$. Jeżeli $\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \|a_n z^n\| < +\infty$, to dla dowolnego $\theta \in (0, 1)$ szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n (\theta z)^n\|$ jest zbieżny, a więc $R_2 \leq R_1$.

(f) Rozważmy następujące przykłady ($R = 1$):

- $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$: dla dowolnego $z \in \mathbb{T}$ szereg jest rozbieżny.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$: dla dowolnego $z \in \mathbb{T}$ szereg jest bezwzględnie zbieżny.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$: dla $z = 1$ szereg jest rozbieżny; dla $z \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$ szereg jest zbieżny na mocy kryterium Dirichleta (Przykład 6.2.2(a)).

□

Obserwacja 6.6.3. Jeżeli $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $z \in K(R)$ ($R > 0$), to $a_1 = f'(0) := \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z}$ ⁽¹⁶⁾.

Istotnie, $\frac{f(z) - f(0)}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n$, $z \in K(R) \setminus \{0\}$. Szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n$ ma ten sam promień zbieżności: $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_{n+1}|} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} \right)^{\frac{n+1}{n}} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}$. W szczególności, funkcja $g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n$, $z \in K(R)$, jest ciągła. Mamy więc $a_1 = g(0) = \lim_{z \rightarrow 0} g(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z}$.

6.7. Funkcje e^z , $\sin z$, $\cos z$, ...

Głównym celem tego podrozdziału jest formalne zdefiniowanie liczby π i funkcji trygonometrycznych. Przypomnijmy (Definicja 6.1.18), że funkcję eksponens $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definiujemy wzorem

$$e^z = \exp z = \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

⁽¹⁵⁾ Uwaga: Tu i dalej, jeżeli $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, to $K(a, r)$, $K(r)$ oznaczają koła na płaszczyźnie. Jeżeli zaś $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ to oznaczają one przedziały $(a - r, a + r)$, $(-r, r)$.

⁽¹⁶⁾ Oczywiście, jeżeli $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, to $f'(0)$ pokrywa się ze znaną nam pochodną. Jeżeli $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, to jest to coś nowego — pochodna zespolona

Jest to funkcja ciągła. Ponadto, Na podstawie Obserwacji 6.6.3 mamy $(e^z)'(0) = 1$.

Definicja 6.7.1. Definiujemy funkcje trygonometryczne (wzory Eulera):

$$\sin z := \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}, \quad \cos z := \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Obserwacja 6.7.2. (a) $\sin$ i $\cos$ są funkcjami ciągłymi.

(b) $\exp(iz) = \cos z + i \sin z$, $z \in \mathbb{C}$.

(c) $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, $\cos(-z) = \cos z$, $\sin(-z) = -\sin z$, $z \in \mathbb{C}$.

(d) $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$, $z \in \mathbb{C}$.

Istotnie,

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{1}{2i} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!} \right) = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ \cos z &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!} \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(iz)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}. \end{aligned}$$

(e) $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ oraz $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, $a, b \in \mathbb{C}$. W szczególności, $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$, $z \in \mathbb{C}$ (jedynka trygonometryczna).

Istotnie,

$$\begin{aligned} \sin a \cos b + \sin b \cos a &= \frac{1}{4i} \left((e^{ia} - e^{-ia})(e^{ib} + e^{-ib}) + (e^{ib} - e^{-ib})(e^{ia} + e^{-ia}) \right) \\ &= \frac{1}{2i} (e^{ia} e^{ib} - e^{-ia} e^{-ib}) = \frac{1}{2i} (e^{i(a+b)} - e^{-i(a+b)}) = \sin(a+b). \end{aligned}$$

Drugi wzór pozostawiamy jako ĆWICZENIE.

(f) $\sin(\mathbb{R}) \subset [-1, 1]$, $\cos(\mathbb{R}) \subset [-1, 1]$.

(g) Na podstawie Obserwacji 6.6.3 mamy $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$, $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z - 1}{z} = 0$.

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \cos 2 &= 1 - \frac{2^2}{2!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} < -1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!} < -1 + \frac{2^4}{4!} \left(1 + \frac{2^2}{5^2} + \frac{2^4}{5^4} + \dots \right) \\ &= -1 + \frac{16}{24} \frac{1}{1 - \frac{4}{25}} = -1 + \frac{50}{63} < 0. \end{aligned}$$

W takim razie, z własności Darboux funkcji ciągłych wynika, że funkcja $\cos$ musi mieć zero w przedziale $(0, 2)$.

Definicja 6.7.3. $\pi := 2 \inf\{x > 0 : \cos x = 0\}$.

Obserwacja 6.7.4. (a) $0 < \pi < 4$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

(b) $0 < \cos x < 1$ dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Ustalmy $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Oczywiście $0 < \cos x \leq 1$. Dla uzyskania ostrej nierówności zauważmy, że

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} \left(1 - \frac{x^2}{3 \cdot 4} \right) - \frac{x^6}{6!} \left(1 - \frac{x^2}{7 \cdot 8} \right) - \dots < 1.$$

(c) $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ oraz $0 < \sin x < 1$ dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Ustalmy $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Oczywiście $\sin \frac{\pi}{2} \in \{-1, +1\}$. Wystarczy pokazać, że $\sin x > 0$. Mamy

$$\sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3} \right) + \frac{x^5}{5!} \left(1 - \frac{x^2}{6 \cdot 7} \right) + \dots > 0.$$

(d) $\cos \pi = \cos 2 \frac{\pi}{2} = \cos^2 \frac{\pi}{2} - \sin^2 \frac{\pi}{2} = -1$,

$\sin \pi = 2 \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 0$,

$\cos(2\pi) = \cos^2 \pi - \sin^2 \pi = 1$,

$\sin(2\pi) = 2 \sin \pi \cos \pi = 0$.

6. Szeregi

(e) $\cos(z + 2(k+1)\pi) = \cos(z + 2k\pi) \cos 2\pi - \sin(z + 2k\pi) \sin 2\pi = \cos(z + 2k\pi)$, a stąd $\cos(z + 2k\pi) = \cos z$,

$\sin(z + 2k\pi) = \sin z$, $z \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$ (korzystamy z Obserwacji 6.7.2(e)).

(f) $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, $x, y \in \mathbb{R}$. W szczególności, $e^{\pi i} = -1$.

(g) $e^{z+2k\pi i} = e^z$, $z \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Istotnie, $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z$.

Twierdzenie 6.7.5. (a) *Odwzorowanie $[0, 2\pi) \ni t \mapsto e^{it} \in \mathbb{T}$ jest bijektywne.*

(b) $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(c) $e^a = e^b \iff \frac{a-b}{2\pi i} \in \mathbb{Z}$.

(d) *Dla $x \in \mathbb{R}$ funkcje $\sin x$ i $\cos x$ pokrywają się z funkcjami znanymi z trygonometrii.*

Dowód. (a) Wiemy, że $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1) \in \Phi([0, 2\pi))$. Ponadto, wiemy, że

$$\{(x + iy) \in \mathbb{T} : x > 0, y > 0\} = \Phi((0, \frac{\pi}{2})).$$

Z okresowości wnioskujemy, że $\mathbb{T} \subset \Phi([0, 2\pi))$. Pozostaje injektywność. Przypuśćmy, że $\Phi(t') = \Phi(t'')$, $t' < t''$. Niech $4t := t'' - t'$, $t \in (0, \frac{\pi}{2})$, $x + iy := e^{it} \in \mathbb{T}$ ($x, y \in (0, 1)$). Mamy $e^{i4t} = 1$, czyli $1 = (x + iy)^4 = (x^2 - y^2 + 2ixy)^2 = (x^2 - y^2)^2 - 4x^2y^2 + 8ixy(x^2 - y^2)$. Stąd $x^2 = y^2$, a więc $x^2 = y^2 = \frac{1}{2}$. Ostatecznie dostajemy $1 = (x + iy)^4 = -1$ — sprzeczność.

(b) Mamy $z = |z| \cdot \frac{z}{|z|}$. Na podstawie (a) istnieje $y \in [0, 2\pi)$ takie, że $e^{iy} = \frac{z}{|z|}$. Oczywiście istnieje $x \in \mathbb{R}$ takie, że $e^x = |z|$. Ostatecznie więc mamy $z = e^x(\cos y + i \sin y) = e^{x+iy}$.

(c) Niech $c := a - b = \alpha + i\beta$. Mamy $1 = e^c = e^\alpha(\cos \beta + i \sin \beta)$, Stąd $\sin \beta = 0$, a więc, wobec (a), $\frac{\beta}{2\pi} \in \mathbb{Z}$. W konsekwencji $1 = e^\alpha$, skąd wynika, że $\alpha = 0$.

(d) ĆWICZENIE. □

Definicja 6.7.6 (Funkcje hiperboliczne). Funkcje hiperboliczne $\cosh$ i $\sinh$ (zob. Ćwiczenie 4.4.23) mogą być rozszerzone na całą płaszczyznę zespoloną. Definiujemy:

- *cosinus hiperboliczny*: $\mathbb{C} \ni z \mapsto \frac{\cosh z}{2} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \in \mathbb{C}$;
- *sinus hiperboliczny*: $\mathbb{C} \ni z \mapsto \frac{\sinh z}{2} = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \in \mathbb{C}$;
- *tangens hiperboliczny*: $\mathbb{C} \setminus \{(\frac{1}{2} + k)\pi i : k \in \mathbb{Z}\} \ni z \xrightarrow{\text{tgh}} \frac{\sinh z}{\cosh z} \in \mathbb{C}$.

6.8. Przeliczalne rodziny sumowalne

Poznane wcześniej pojęcie szeregu bezwarunkowo zbieżnego będziemy chcieli przenieść na szeregi funkcyjne postaci $\sum_{i \in I} f_i$, gdzie I jest dowolnym zbiorem przeliczalnym, X jest dowolnym zbiorem niepustym, zaś $f_i : X \rightarrow E$, $i \in I$, gdzie E jest przestrzenią Banacha nad ciałem $\mathbb{K}$, $E \neq \{0\}$. Oznaczmy przez $\mathcal{F}(I)$ rodzinę wszystkich niepustych skończonych podzbiorów I . Rozważmy rodzinę funkcji $f_i : X \rightarrow E$, $i \in I$. Dla $A \in \mathcal{F}(I)$ zdefiniujmy $f_A := \sum_{i \in A} f_i : X \rightarrow E$. Oczywiście $f_{\{i\}} = f_i$. Przyjmujemy, że $f_\emptyset := 0$.

Obserwacja 6.8.1. (a) W przypadku, gdy $X = \{x_0\}$ szereg $\sum_{i \in I} f_i$ redukuje się do szeregu elementów przestrzeni Banacha E .

(b) Istnieje też możliwość badania szeregów $\sum_{i \in I} f_i$, gdzie I jest dowolnym zbiorem nieskończonym (zob. Definicja 6.8.6).

Twierdzenie 6.8.2. *Następujące warunki są równoważne:*

(i) *rodzina $(f_i)_{i \in I}$ jest jednostajnie sumowalna na X , tzn. istnieje funkcja $f_I : X \rightarrow E$ taka, że*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists S(\varepsilon) \in \mathcal{F}(I) \forall A \in \mathcal{F}(I) : S(\varepsilon) \subset A \forall x \in X : \|f_A(x) - f_I(x)\| \leq \varepsilon;$$

(ii) *rodzina $(f_i)_{i \in I}$ spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego, tzn.*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists C(\varepsilon) \in \mathcal{F}(I) \forall A \in \mathcal{F}(I \setminus C(\varepsilon)) \forall x \in X : \|f_A(x)\| \leq \varepsilon;$$

(iii) *rodzina $(f_i)_{i \in I}$ jest jednostajnie bezwarunkowo sumowalna, tzn. dla dowolnej bijekcji $\sigma : \mathbb{N}_0 \rightarrow I$ szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_{\sigma(n)}$ jest zbieżny jednostajnie na X i jego suma nie zależy od σ , przy czym tą sumą jest funkcja f_I z warunku (i);*

(iv) dla dowolnej bijekcji $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow I$ szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_{\sigma(n)}$ jest zbieżny jednostajnie na X .

Obserwacja 6.8.3. (a) Funkcja f_I w warunku (i) jest wyznaczona jednoznacznie. Nazywamy ją sumą rodziny $(f_i)_{i \in I}$ i oznaczamy przez $f_I = \sum_{i \in I} f_i$.

(b) Jeżeli $X = \{x_0\}$ słowo „jednostajnie” pomijamy i mówimy o *sumowalnej* rodzinie elementów przestrzeni E .

(c) Zauważmy, że w warunku (i) (odp. (ii)) zbiór $S(\varepsilon)$ (odp. $C(\varepsilon)$) może być powiększony bez szkody dla zachodzenia warunku.

(d) Jednostajna sumowalność to nic innego jak jednostajna bezwarunkowa zbieżność szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} f_{\sigma(n)}$ dla pewnej dowolnie ustalonej bijekcji $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow I$.

(e) Jeżeli rodzina $(f_i)_{i \in I} \subset \mathcal{B}(X, E)$ jest jednostajnie sumowalna na X , to istnieje stała $M > 0$ taka, że $\|f_A(x)\| \leq M$, $x \in X$, $A \in \mathcal{F}(I)$. W szczególności, $\|f_I(x)\| \leq M$, $x \in X$.

Istotnie, dla $A \in \mathcal{F}(I \setminus S(1))$ mamy $\|f_A(x)\| = \|f_{A \cup S(1)}(x) - f_{S(1)}(x)\| \leq \|f_{A \cup S(1)}(x) - f_I(x)\| + \|f_{S(1)}(x) - f_I(x)\| \leq 2$. Teraz wystarczy przyjąć $M := \max\{2, \|f_i\|_X : i \in S(1)\}$.

Dowód Twierdzenia 6.8.2. (i) $\implies$ (ii): Niech $C(\varepsilon) := S(\varepsilon/2) := S$. Wtedy dla $A \in \mathcal{F}(I \setminus S)$ i $x \in X$ mamy:

$$\|f_A(x)\| = \|f_{A \cup S}(x) - f_S(x)\| \leq \|f_{A \cup S}(x) - f_I(x)\| + \|f_S(x) - f_I(x)\| \leq \varepsilon.$$

(ii) $\implies$ (i): Możemy założyć, że $C(\frac{1}{n}) \subsetneq C(\frac{1}{n+1})$, $n \in \mathbb{N}$. Niech $s_n := f_{C(\frac{1}{n})}$, $n \in \mathbb{N}$. Mamy

$$\|s_{n+k}(x) - s_n(x)\| = \|f_{C(\frac{1}{n+k}) \setminus C(\frac{1}{n})}(x)\| \leq \frac{1}{n}, \quad n, k \in \mathbb{N}, x \in X.$$

Oznacza to, że ciąg funkcji $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia jednostajny warunek Cauchy’ego na X . Ponieważ E jest przestrzenią Banacha, zatem $s_n \longrightarrow s$ jednostajnie na X (dla pewnej funkcji $s : X \longrightarrow E$). Pokażemy, że rodzina $(f_i)_{i \in I}$ jest jednostajnie sumowalna do s .

Z poprzedniej nierówności wynika, że $\|s_n(x) - s(x)\| \leq \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$. Jeżeli teraz $A \in \mathcal{F}(I)$ i $C(\frac{1}{n}) \subset A$, to

$$\|f_A(x) - s(x)\| \leq \|f_A(x) - f_{C(\frac{1}{n})}(x)\| + \|f_{C(\frac{1}{n})}(x) - s(x)\| \leq \|f_{A \setminus C(\frac{1}{n})}(x)\| + \frac{1}{n} \leq \frac{2}{n}, \quad x \in X.$$

(i) $\implies$ (iii): Ustalmy bijekcję $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow I$ oraz $\varepsilon > 0$. Niech $N_0 \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $S(\varepsilon) \subset \{\sigma(0), \dots, \sigma(N_0)\}$. Wtedy dla dowolnego $N \geq N_0$ mamy $S(\varepsilon) \subset \{\sigma(0), \dots, \sigma(N)\} =: A$, a stąd

$$\left\| \sum_{n=0}^N f_{\sigma(n)}(x) - f_I(x) \right\| = \|f_A(x) - f_I(x)\| \leq \varepsilon, \quad x \in X.$$

Implikacja (iii) $\implies$ (iv) jest oczywista.

(iv) $\implies$ (ii): Przypuśćmy, że dla pewnego $\varepsilon > 0$ warunek (ii) nie zachodzi. Ustalmy dowolne $i_0 \in I$. Zbiór $C(\varepsilon) := \{i_0\}$ nie może być dobry. W takim razie istnieje zbiór $F(1) \in \mathcal{F}(I \setminus \{i_0\})$ taki, że $\sup_{x \in X} \|f_{F(1)}(x)\| > \varepsilon$. Zbiór $C(\varepsilon) := F(1)$ też nie może być dobry. Znajdziemy więc $F(2) \in \mathcal{F}(I \setminus (F(1) \cup \{i_0\}))$ taki, że $\sup_{x \in X} \|f_{F(2)}(x)\| > \varepsilon$. Teraz bierzemy $C(\varepsilon) := F(1) \cup F(2)$ i znajdujemy $F(3) \in \mathcal{F}(I \setminus (F(1) \cup F(2) \cup \{i_0\}))$ taki, że $\sup_{x \in X} \|f_{F(3)}(x)\| > \varepsilon$. Rozumując dalej znajdziemy ciąg $(F(k))_{k=1}^{\infty}$ parami rozłącznych skończonych podzbiorów I taki, że $\sup_{x \in X} \|f_{F(k)}(x)\| > \varepsilon$, $k \in \mathbb{N}$.

Teraz skonstruujemy pewną bijekcję $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow I$, którą będziemy utożsamiać z permutacją zbioru I .

Jeżeli zbiór $F(0) := I \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} F(k)$ jest skończony, to na początku ustawimy elementy zbioru $F(0)$ w dowolnej kolejności, potem elementy zbioru $F(1)$ (też w dowolnej kolejności), potem $F(2)$ itd.

Niech $N(k) := \#F(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Zdefiniujmy $S_N := \sum_{n=0}^N f_{\sigma(n)}$. Wtedy $S_{N(0)+\dots+N(k)} - S_{N(0)+\dots+N(k-1)} = f_{F(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, a więc ciąg $(S_N)_{N=0}^{\infty}$ nie spełnia warunku Cauchy’ego; sprzeczność.

W przypadku gdy zbiór $F(0)$ jest nieskończony, ustawiamy jego elementy w ciąg $i_1, i_2, \dots$, a następnie budujemy permutację σ następująco: stawiamy i_1 , potem elementy zbioru $F(1)$, potem i_2 , potem $F(2)$, itd. Podobnie jak poprzednio, bez trudu widzimy, że $(S_N)_{N=0}^{\infty}$ nie może spełniać warunku Cauchy’ego

bowiem $S_{N(0)+\dots+N(k)+k} - S_{N(0)+\dots+N(k-1)+k} = f_{F(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, a więc $(S_N)_{N=0}^\infty$ nie może spełniać warunku Cauchy'ego; sprzeczność. $\square$

Twierdzenie 6.8.4 (Twierdzenie o grupowaniu wyrazów). *Niech $I = \bigcup_{j \in J} I(j)$, gdzie $I(j) \neq \emptyset$ i $I(j) \cap I(k) = \emptyset$ dla $j \neq k$ ⁽¹⁷⁾⁽¹⁸⁾. Jeżeli rodzina $(f_i)_{i \in I}$ jest jednostajnie sumowalna na X , to rodzina $(f_{I(j)})_{j \in J}$ jest jednostajnie sumowalna na X ⁽¹⁹⁾. Ponadto,*

$$\sum_{j \in J} f_{I(j)} = f_I, \text{ czyli } \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I(j)} f_i \right) = \sum_{i \in I} f_i.$$

Odnajmy, że oczywiście twierdzenie odwrotne nie zachodzi, np. $E := \mathbb{R}$, $I = J := \mathbb{N}$, $I(j) := \{2j-1, 2j\}$, $f_i := (-1)^i$. Wtedy $f_{I(j)} = 0$ dla dowolnego $j \in \mathbb{N}$, ale rodzina $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ nie jest sumowalna.

Dowód. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech $B(\varepsilon) := \{j \in J : I(j) \cap S(\frac{\varepsilon}{2}) \neq \emptyset\}$, gdzie $S(\frac{\varepsilon}{2}) \in \mathcal{F}(I)$ jest takie, jak w Twierdzeniu 6.8.2(i). Ponieważ zbiory $I(j)$, $j \in J$, są parami rozłączne mamy $B(\varepsilon) \in \mathcal{F}(J)$. Pokażemy, że z punktu widzenia rodziny $(f_{I(j)})_{j \in J}$ zbiór $B(\varepsilon)$ będzie pełnić rolę zbioru $S(\varepsilon)$, tzn. $\|f_I(x) - \sum_{j \in B} f_{I(j)}(x)\| \leq \varepsilon$, $x \in X$, dla dowolnego $B \in \mathcal{F}(J)$ takiego, że $B(\varepsilon) \subset B$.

Ustalmy B i niech $N := \#B$. Dla dowolnego $j \in J$ niech $D(j) \in \mathcal{F}(I(j))$ będzie takie, że

$$A \in \mathcal{F}(I(j)), D(j) \subset A \implies \|f_A(x) - f_{I(j)}(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2N}, \quad x \in X. \quad (20)$$

Możemy oczywiście założyć, że $S(\frac{\varepsilon}{2}) \cap I(j) \subset D(j)$. Niech $A := \bigcup_{j \in B} D(j)$. Zauważmy, $S(\frac{\varepsilon}{2}) \subset A$, a więc

$\|f_A(x) - f_I(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $x \in X$. Mamy:

$$\begin{aligned} \left\| f_I(x) - \sum_{j \in B} f_{I(j)}(x) \right\| &\leq \left\| f_I(x) - \sum_{j \in B} f_{D(j)}(x) \right\| + \sum_{j \in B} \|f_{D(j)}(x) - f_{I(j)}(x)\| \\ &\leq \|f_I(x) - f_A(x)\| + \varepsilon/2 \leq \varepsilon, \quad x \in X. \end{aligned} \quad \square$$

Twierdzenie 6.8.5 (Twierdzenie o mnożeniu rodzin sumowalnych). *Niech $\Phi \in \mathcal{L}(E, F; G)$. Niech $(f_i)_{i \in I}$ będzie jednostajnie sumowalną rodziną odwzorowań ograniczonych $f_i : X \rightarrow E$, $i \in I$, i niech $(g_j)_{j \in J}$ będzie jednostajnie sumowalną rodziną odwzorowań ograniczonych $g_j : X \rightarrow F$, $j \in J$. Jeżeli co najmniej jedna z tych rodzin jest bezwzględnie jednostajnie sumowalna, to rodzina $(\Phi(f_i, g_j))_{(i,j) \in I \times J}$ jest jednostajnie sumowalna oraz $\sum_{(i,j) \in I \times J} \Phi(f_i, g_j) = \Phi(f_I, g_J)$. Jeżeli obie rodziny są bezwzględnie jednostajnie sumowalne, to rodzina $(\Phi(f_i, g_j))_{(i,j) \in I \times J}$ jest bezwzględnie jednostajnie sumowalna.*

Dowód. Załóżmy, że rodzina $(g_j)_{j \in J}$ jest bezwzględnie jednostajnie sumowalna. Pozostały przypadek pozostawiamy jako ĆWICZENIE. Jeżeli już będziemy wiedzieć, że rodzina $(\Phi(f_i, g_j))_{(i,j) \in I \times J}$ jest jednostajnie sumowalna, to wzór na sumę będzie natychmiast wynikać z twierdzenia o grupowaniu rodzin sumowalnych. Istotnie, biorąc $I(j) := I \times \{j\}$, dostajemy

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} \Phi(f_i, g_j) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} \Phi(f_i, g_j) \right) = \sum_{j \in J} \Phi \left(f_I, \sum_{i \in I} g_j \right) = \sum_{j \in J} \Phi(f_i, g_J) = \Phi(f_I, g_J).$$

Przechodźmy do dowodu jednostajnej sumowalności rodziny $(\Phi(f_i, g_j))_{(i,j) \in I \times J}$. Możemy założyć, że $\|\Phi\| \leq 1$. Wiemy, że istnieje stała $M > 0$ taka, że dla dowolnych $A \in \mathcal{F}(I)$, $B \in \mathcal{F}(J)$ mamy: $\|f_A(x)\| \leq M$, $\sum_{j \in B} \|g_j(x)\| \leq M$, $x \in X$. W szczególności, $\|f_I(x)\| \leq M$ oraz $\sum_{j \in J} \|g_j(x)\| \leq M$, $x \in X$ (zob. Obserwacja 6.8.3(e)).

Weźmy $\varepsilon > 0$ i niech zbiory $S(\varepsilon) \in \mathcal{F}(I)$, $C(\varepsilon) \in \mathcal{F}(J)$ będą takie, że $\|f_A(x) - f_I(x)\| \leq \varepsilon$, $x \in X$, dla dowolnego $A \in \mathcal{F}(I)$ takiego, że $S(\varepsilon) \subset A$ oraz $\sum_{j \in B} \|g_j(x)\| \leq \varepsilon$, $x \in X$, dla dowolnego $B \in \mathcal{F}(J \setminus C(\varepsilon))$.

⁽¹⁷⁾ Pewne rodziny $I(j)$ mogą być skończone.

⁽¹⁸⁾ Zauważmy, że $\#J \leq \aleph_0$. Zbiór J może być skończony.

⁽¹⁹⁾ Na podstawie Twierdzenia 6.8.2(ii) każda z rodzin $(f_i)_{i \in I(j)}$ jest sumowalna.

⁽²⁰⁾ Tzn. zbiór $D(j)$ pełni względem rodziny $(f_i)_{i \in I(j)}$ rolę zbioru $S(\frac{\varepsilon}{2N})$. W przypadku, gdy rodzina $I(j)$ jest skończona przyjmujemy $D(j) := I(j)$.

Niech teraz $D \in \mathcal{F}(I \times J)$ będzie taki, że $S(\varepsilon) \times C(\varepsilon) \subset D$. Dla dowolnego $j \in J$ niech $D(j) := \{i \in I : (i, j) \in D\}$ ⁽²¹⁾. Mamy

$$\sum_{(i,j) \in D} \Phi(f_i, g_j) - \Phi(f_I, g_J) = \sum_{(i,j) \in D} \Phi(f_i, g_j) - \sum_{j \in J} \Phi(f_I, g_j) = \sum_{j \in J} \Phi(f_{D(j)} - f_I, g_j)$$

($f_\emptyset := 0$). Wynika stąd, że

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{(i,j) \in D} \Phi(f_i, g_j) - \Phi(f_I, g_J) \right\| &\leq \sum_{j \in C(\varepsilon)} \|f_{D(j)} - f_I\| \|g_j\| + \sum_{j \notin C(\varepsilon)} \|f_{D(j)} - f_I\| \|g_j\| \\ &\leq \varepsilon \sum_{j \in C(\varepsilon)} \|g_j\| + 2M \sum_{j \notin C(\varepsilon)} \|g_j\| \leq 3M\varepsilon. \end{aligned}$$

Jeżeli obie rodziny są bezwzględnie jednostajnie sumowalne, to na podstawie pierwszej części dowodu rodzina $(\|f_i\| \|g_j\|)_{(i,j) \in I \times J}$ jest jednostajnie sumowalna, co oznacza, że rodzina $(\Phi(f_i, g_j))_{(i,j) \in I \times J}$ jest bezwzględnie jednostajnie sumowalna. $\square$

Na koniec rozważymy przypadek, gdy I jest dowolnym nieskończonym zbiorem, niekoniecznie przeliczalnym. Niech X i I będą dowolnymi niepustymi zbiorami i niech E będzie ustaloną przestrzenią Banacha nad $\mathbb{K}$. Tak jak poprzednio, oznaczmy przez $\mathcal{F}(I)$ rodzinę wszystkich niepustych skończonych podzbiorów I . Rozważmy rodzinę funkcji $f_i : X \rightarrow E$, $i \in I$. Tak, jak poprzednio zdefiniujmy $f_A := \sum_{i \in A} f_i$, $A \in \mathcal{F}(I)$.

Definicja 6.8.6. Powiemy, że rodzina funkcji $(f_i)_{i \in I}$ jest *jednostajnie sumowalna na X* , jeżeli istnieje funkcja $f_I : X \rightarrow E$ taka, że

$$\forall \varepsilon > 0 \exists S(\varepsilon) = S(\varepsilon, I) \in \mathcal{F}(I) \forall A \in \mathcal{F}(I) : S(\varepsilon) \subset A : \|f_A(x) - f_I(x)\| \leq \varepsilon, \quad x \in X;$$

(por. Twierdzenie 6.8.2(i)). Funkcja f_I jest wyznaczona jednoznacznie (ĆWICZENIE). Nazywamy ją *sumą* rodziny f i oznaczamy przez $\sum_{i \in I} f_i$

Następujące twierdzenie pozwala zredukować przypadek dowolnego I do przypadku, gdy I jest przeliczalny.

Twierdzenie 6.8.7. *Jeżeli rodzina $(f_i)_{i \in I}$ jest jednostajnie sumowalna na X , to $\#\{i \in I : f_i \neq 0\} \leq \aleph_0$.*

Dowód. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i $i \in I \setminus S(\varepsilon)$ mamy:

$$\|f_i(x)\| = \|f_{\{i\} \cup S(\varepsilon)}(x) - f_{S(\varepsilon)}(x)\| \leq \|f_{\{i\} \cup S(\varepsilon)}(x) - f_I(x)\| + \|f_{S(\varepsilon)}(x) - f_I(x)\| \leq 2\varepsilon, \quad x \in X.$$

Innymi słowy: $\{i \in I : \exists x \in X : \|f_i(x)\| > 2\varepsilon\} \subset S(\varepsilon)$ dla dowolnego $\varepsilon > 0$. W takim razie

$$\{i \in I : f_i \neq 0\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} S\left(\frac{1}{n}\right). \quad \square$$

6.9. Funkcje analityczne I

Niech $\Omega \subset \mathbb{K}$ będzie otwarty i niech E będzie przestrzenią Banacha nad $\mathbb{K}$.

Definicja 6.9.1. Powiemy, że funkcja $f : \Omega \rightarrow E$ jest *analityczna na Ω* ($f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, E)$), jeżeli dla dowolnego $a \in \Omega$ istnieje szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$, $a_n \in E$, $n \in \mathbb{N}_0$, o dodatnim promieniu zbieżności taki, że $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ dla z z pewnego otoczenia punktu a .

W przypadku, gdy $\Omega \subset \mathbb{C}$ będziemy równoważnie mówić o *funkcji holomorficznej* i będziemy pisać $f \in \mathcal{O}(\Omega, E)$.

Obserwacja 6.9.2. (a) $\mathcal{C}^\omega(\Omega, E)$ jest przestrzenią wektorową.

⁽²¹⁾ Odnosimy, że $S(\varepsilon) \subset D(j)$ dla $j \in C(\varepsilon)$.

(b) Przypomnijmy, że każdy szereg potęgowy jest zbieżny niemal normalnie w swoim kole zbieżności (Twierdzenie 6.6.2). W szczególności, $\mathcal{C}^\omega(\Omega, E) \subset \mathcal{C}(\Omega, E)$.

(c) Jeżeli $f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{K})$, $g \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, E)$, to $fg \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, E)$. Istotnie, jeżeli $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ oraz $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$, $z \in K(a, r)$, to korzystając z iloczynu Cauchy'ego szeregów (Twierdzenie 6.2.4) mamy:

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) (z-a)^n, \quad z \in K(a, r).$$

(d) Funkcja $\mathbb{C}_* \ni z \mapsto \frac{1}{z}$ jest holomorficzna.

Istotnie, dla $a \neq 0$ i dla $|z-a| < |a|$ mamy

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a} \frac{1}{1 + \frac{z-a}{a}} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-a}{a} \right)^n.$$

(e) Jeżeli $f \in \mathcal{O}(\Omega, E)$, to $f|_{\Omega \cap \mathbb{R}} \in \mathcal{C}^\omega(\Omega \cap \mathbb{R}, E)$.

Twierdzenie 6.9.3 (Zasada identyczności dla funkcji analitycznych). *Jeżeli $f, g \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, E)$, gdzie $\Omega \subset \mathbb{K}$ jest obszarem (tzn. zbiorem otwartym i spójnym) i $f = g$ na pewnym niepustym zbiorze mającym punkt skupienia w Ω , to $f \equiv g$.*

Dowód. Zastępując f, g przez $f-g, 0$, sprowadzamy dowód do przypadku $g \equiv 0$. Wiemy, że istnieje punkt $a \in \Omega$ oraz ciąg $(z_s)_{s=1}^{\infty} \subset \Omega \setminus \{a\}$ taki, że $z_s \rightarrow a$ i $f(z_s) = 0$, $s \in \mathbb{N}$. Wiemy, że $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$, $x \in K(a, r) \subset \Omega$. Oczywiście, $f(a) = a_0 = 0$. Gdyby $f \not\equiv 0$ w $K(a, r)$, to dla pewnego $p \in \mathbb{N}$ mielibyśmy $f(z) = \sum_{n=p}^{\infty} a_n(z-a)^n$, $z \in K(a, r)$, przy czym $a_p \neq 0$. Wynika stąd, że $f(z) = (z-a)^p \sum_{n=p}^{\infty} a_n(z-a)^{n-p} =: (z-a)^p h(z)$ i $h(a) = a_p \neq 0$. Funkcja h jako dana szeregiem potęgowym musi być ciągła w $K(a, r)$. Ponieważ $z_s \neq a$, wnioskujemy, że $h(z_s) = 0$, $s \gg 1$ — sprzeczność. Tak więc $f = 0$ w $K(a, r)$.

Niech $\Omega_0 := \{z_0 \in \Omega : f = 0 \text{ w pewnym otoczeniu otwartym punktu } z_0\}$. Wiemy, że $\Omega_0 \neq \emptyset$. Wprost z definicji wynika, że Ω_0 jest otwarty. Pierwsza część dowodu pokazuje, że każdy punkt skupienia zbioru Ω_0 w Ω należy do Ω_0 . Znaczący to, że Ω_0 jest domknięty w Ω . Ponieważ Ω jest spójny, musi być $\Omega_0 = \Omega$. $\square$

Twierdzenie 6.9.4. *Niech $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset E$ i załóżmy, że promień zbieżności R szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ jest dodatni. Niech*

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n, \quad z \in K(a, R).$$

Wtedy $f \in \mathcal{O}(K(R), E)$.

Dowód. Ustalmy $b \in K(a, R)$. Niech $0 < r < R - |b-a|$ i niech $z \in K(b, r)$. Policzmy formalnie:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-b+b-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} a_n(z-b)^s (b-a)^{n-s} \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{n=s}^{\infty} a_n \binom{n}{s} a_n (b-a)^{n-s} \right) (z-b)^s. \end{aligned}$$

Niech $I := \{(n, s) \in \mathbb{N}_0^2, n \geq s\}$ i niech $c_{n,s} := a_n \binom{n}{s} (z-b)^s (b-a)^{n-s}$, $(n, s) \in I$. Aby powyższy rachunek formalny był poprawny wystarczy (na podstawie twierdzenia o grupowaniu wyrazów w rodzinach sumowalnych), aby rodzina $(c_{n,s})_{(n,s) \in I}$ była sumowalna. Wiemy, że wystarczy znaleźć bijekcję $\sigma : \mathbb{N}_0 \rightarrow I$ taką, że $\sum_{k=0}^{\infty} |c_{\sigma(k)}| < +\infty$. Jako σ przyjmijmy następujące ustawienie zbioru I w ciąg: $(c_{0,0}, c_{1,0}, c_{0,1}, \dots, c_{n,0}, c_{n,1}, \dots, c_{n,n}, \dots)$. Wtedy

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_{\sigma(k)}| = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^n \|a_n\| \binom{n}{s} |z-b|^s |b-a|^{n-s} = \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| (|z-b| + |b-a|)^n < +\infty$$

(korzystamy tu z tego, że $|b - a| + |z - b| < R$). $\square$

Wniosek 6.9.5. (a) *Każdy wielomian $f : \mathbb{K} \rightarrow E$ jest funkcją analityczną na $\mathbb{K}$.*

(b) $\exp, \sin, \cos, \sinh, \cosh \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$.

Twierdzenie 6.9.6 (Twierdzenie o złożeniu funkcji analitycznych). *Niech $\Omega, U \subset \mathbb{K}$ będą otwarte i niech $f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, E)$, $\varphi \in \mathcal{C}^\omega(U, \mathbb{K})$ będą takie, że $\varphi(U) \subset \Omega$. Wtedy $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^\omega(U, E)$.*

Obserwacja 6.9.7. W przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ powyższe twierdzenie zostanie później udowodnione innymi metodami (Twierdzenie 6.11.4).

Dowód Twierdzenia 6.9.6. Ustalmy $t_0 \in U$ i niech $a := \varphi(t_0)$. Aby uprościć zapis, zauważmy, iż dokonując stosownych translacji, możemy założyć, że $t_0 = 0$, $a = 0$ i $f(a) = 0$ (ĆWICZENIE). Niech $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, $z \in K(r) \subset \Omega$, oraz $\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k t^k$, $t \in K(\tau) \subset U$. Możemy założyć, że $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| |t|^k < r$ dla $t \in K(\tau)$.

W szczególności, $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| |t|^k \right)^n < +\infty$, $t \in K(\tau)$.

Cały problem polega na poprawności następującego rachunku formalnego dla $t \in K(\tau)$:

$$f(\varphi(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k t^k \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{s \in \mathbb{N}^n: |s|=k} b_{s_1} \cdots b_{s_n} \right) t^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{s \in \mathbb{N}^n: |s|=k} b_{s_1} \cdots b_{s_n} \right) t^k.$$

Aby wykazać poprawność tego grupowania wyrazów wystarczy sprawdzić, że rodzina

$$(a_n b_{s_1} \cdots b_{s_n} t^k)_{k, n \in \mathbb{N}, n \leq k, s \in \mathbb{N}^n: |s|=k}$$

jest sumowalna. Tak jest, bowiem (por. metoda dowodu Twierdzenia 6.9.4):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^k \sum_{s \in \mathbb{N}^n: |s|=k} \|a_n b_{s_1} \cdots b_{s_n}\| |t|^k \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| |t|^k \right)^n < +\infty. \quad \square$$

Wniosek 6.9.8. *Niech $f, g \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{K})$, $M := g^{-1}(0)$. Wtedy $\frac{f}{g} \in \mathcal{C}^\omega(\Omega \setminus M, \mathbb{K})$. W szczególności:*

- funkcje wymierne są analityczne,
- funkcje tg , ctg , tgh są holomorficzne.

Dowód. Korzystając z analityczności funkcji $z \mapsto \frac{1}{z}$ i z Twierdzenia 6.9.6, wnioskujemy, że $\frac{1}{g} \in \mathcal{C}^\omega(\Omega \setminus M, \mathbb{K})$. Teraz wystarczy już tylko skorzystać z analityczności iloczynu funkcji analitycznych. $\square$

Twierdzenie 6.9.9 (Twierdzenie o funkcji odwrotnej do funkcji analitycznej). *Niech $\Omega, U \subset \mathbb{K}$ będą otwarte i niech $f : \Omega \rightarrow U$ będzie bijekcją taką, że $f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega)$. Przypuśćmy, że dla pewnego $a \in \Omega$ mamy $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$, $z \in K(a, r) \subset \Omega$, przy czym $a_1 \neq 0$. Niech $a := g(t_0)$. Wtedy funkcja $g := f^{-1}$ jest analityczna w otoczeniu t_0 .*

Cały czas pamiętajmy o bijekcji $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$, dla której odwzorowanie odwrotne nie jest analityczne.

Obserwacja 6.9.10. W przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ powyższe twierdzenie zostanie później udowodnione innymi metodami (Twierdzenie 6.11.5).

Dowód Twierdzenia 6.9.9. Bez szkody dla ogólności, po stosownych translacjach, możemy założyć, że $a = 0 = t_0$ (stąd $a_0 = 0$). Zastępując funkcję f funkcją $z \mapsto f(\frac{z}{a_1})$, możemy założyć, że $a_1 = 1$.

Zmieniając znak przy współczynnikach a_n , $n \geq 2$, możemy założyć, że $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n =: \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$.

Przypuśćmy, że $g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n t^n$, $t \in K(\tau)$. Mamy $f(g(t)) = t$, $t \in K(\tau)$. A stąd:

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s \in \mathbb{N}^n: |s|=k} b_{s_1} \cdots b_{s_n} \right) t^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^k \sum_{s \in \mathbb{N}^n: |s|=k} c_n b_{s_1} \cdots b_{s_n} \right) t^k,$$

czyli $b_1 = 1$ oraz $\sum_{n=1}^k \sum_{s \in \mathbb{N}^n: |s|=k} c_n b_{s_1} \cdots b_{s_n} = 0$ dla $k \geq 2$. Zapiszmy ostatnie równanie w innej postaci:

$$b_k = \sum_{n=2}^k \sum_{s \in \mathbb{N}^n: |s|=k} a_n b_{s_1} \cdots b_{s_n} =: P_k(a_2, \dots, a_k, b_1, \dots, b_{k-1}), \quad k = 2, 3, \dots,$$

co daje rekurencyjny wzór na współczynniki b_k , $k \geq 2$. Zauważmy, że współczynniki wielomianu P_k są naturalne oraz, że $b_k = P_k(a_2, \dots, a_k, b_1, \dots, b_{k-1}) \geq 0$ dla $a_n \geq 0$, $n \geq 2$.

Umiemy więc wyznaczyć formalnie współczynniki szeregu funkcji g . Pozostaje sprawdzić, że szereg ten jest zbieżny w pewnym otoczeniu zera. Zastosujemy *metodę majoranty analitycznej*.

Ustalmy $C > 1$ takie, że $|a_n| \leq C^n$, $n \in \mathbb{N}$ (por. Twierdzenie 6.6.2) i niech $F(z) := z - \sum_{n=2}^{\infty} C^n z^n = z - \frac{C^2 z^2}{1-Cz}$, $|z| < 1/C$. Mamy $F(0) = 0$. Równanie $F(z) = t$, tzn. $(C^2 + C)z^2 - (1 + Ct)z + t = 0$ ma dla małych $|t|$ jednoznaczne rozwiązanie $G(t) = \frac{(1+Ct) - \sqrt{(1+Ct)^2 - 4t(C^2+C)}}{2(C^2+C)}$ takie, że $G(0) = 0$. Przypuśćmy na chwilę, że wiemy, że G jest analityczna, $G(t) = B_1 t + \sum_{n=2}^{\infty} B_n t^n$, $|t| < \tau$. Powtarzając poprzednie formalne rozumowanie, mamy $B_1 = 1$ oraz

$$B_k = \sum_{n=2}^k \sum_{s \in \mathbb{N}^n: |s|=k} C^n B_{s_1} \cdots B_{s_n} = P_k(C^2, \dots, C^k, B_1, \dots, B_{k-1}), \quad k = 2, 3, \dots,$$

przy czym $B_k \geq 0$ oraz $|b_k| \leq B_k$, $k \geq 2$. W konsekwencji, szereg $z - \sum_{k=2}^{\infty} b_k t^k$ jest zbieżny dla $|t| < \tau$. Wra-

camy do problemu analityczności G . Zapiszmy $G(t) = \frac{(1+Ct) \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4t(C^2+C)}{(1+Ct)^2}} \right)}{2(C^2+C)}$. Pamiętając o twierdzeniu o składaniu funkcji analitycznych, wnioskujemy, że problem leży w pokazaniu, że funkcja $u \mapsto \sqrt{1+u}$ jest analityczna w otoczeniu $u = 0$. Przypadek $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ znamy (Przykład 5.6.11(d)).

Pokażemy, że $\sqrt{1+u} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)_n u^n$ dla $u \in K(1)$. Istotnie, wiemy, że $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{1}{2}\right)_n\right|} = 1$ (Przykład 2.4.3(c)). W szczególności, szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)_n u^n$ jest zbieżny w kole $K(1)$.

Pozostaje wykazać, że $\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)_k \left(\frac{1}{2}\right)_{n-k} = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } n \leq 1 \\ 0, & \text{jeżeli } n \geq 2 \end{cases}$. Wynika to natychmiast z *identyczności Chu–Vandermonde’a* $\binom{22}{23}$

$$\sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{n-k} = \binom{\alpha+\beta}{n}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (*)$$

W naszym przypadku $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, a więc $\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)_k \left(\frac{1}{2}\right)_{n-k} = \binom{1}{n} = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } n \leq 1 \\ 0, & \text{jeżeli } n \geq 2 \end{cases}$.

W przypadku, gdy $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ powyższa identyczność $(*)$ jest elementarna (ĆWICZENIE). W przypadku ogólnym niech

$$W(\alpha, \beta) := \left(\sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{n-k} \right) - \binom{\alpha+\beta}{n}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Wiemy, że $W(\alpha, \beta) = 0$ dla $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$. Dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{N}$ funkcja $W(\alpha, \cdot)$ jest wielomianem jednej zmiennej, który zeruje się na $\mathbb{N}$. W takim razie $W(\alpha, \beta) = 0$ dla $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{C}$. Dla dowolnego $\beta \in \mathbb{C}$ funkcja $W(\cdot, \beta)$ jest wielomianem jednej zmiennej, który zeruje się na $\mathbb{N}$. Stąd $W(\alpha, \beta) = 0$ dla $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. $\square$

$\binom{22}{23}$ Chu Shih-chieh (1260–1320).

$\binom{23}{23}$ Alexandre-Théophile Vandermonde (1735–1796).

6.10. Różniczkowanie szeregu wyraz po wyrazie

Twierdzenie 6.10.1 (Twierdzenie o różniczkowaniu szeregu wyraz po wyrazie). *Niech $P \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem ograniczonym nieredukującym się do punktu, $k \in \mathbb{N}$ i niech $f_n \in \mathcal{D}^k(P, E)$, $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że:*

- szereg $g_k := \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ jest zbieżny jednostajnie na P ,
- istnieją punkty $c_0, \dots, c_{k-1} \in P$ takie, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(j)}(c_j)$ jest zbieżny.

Wtedy:

- szereg $g_j := \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(j)}$ jest zbieżny jednostajnie na P , $j = 0, \dots, k-1$,
- $g_0 \in \mathcal{D}^k(P, E)$,
- $g_0^{(j)} \equiv g_j$, czyli $(\sum_{n=1}^{\infty} f_n)^{(j)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(j)}$, $j = 1, \dots, k$.

Dowód. Wystarczy skorzystać z Twierdzenia 5.7.1. □

Korzystając z metody dowodu Twierdzenia 5.7.1 łatwo wykazać (ĆWICZENIE) następujące

Twierdzenie 6.10.2 (Twierdzenie o różniczkowaniu rodziny sumowalnej wyraz po wyrazie). *Niech $P \subset \mathbb{R}$ będzie ograniczonym przedziałem nieredukującym się do punktu, $k \in \mathbb{N}$ i niech $f_i \in \mathcal{D}^k(P, E)$, $i \in I$. Załóżmy, że:*

- szereg rodzina $(f_i^{(k)})_{i \in I}$ jest jednostajnie sumowalna na P i $g_k := \sum_{i \in I} f_i^{(k)}$,
- istnieją punkty $c_0, \dots, c_{k-1} \in P$ takie, że rodzina $(f_i^{(j)}(c_j))_{i \in I}$ jest sumowalna.

Wtedy:

- rodzina $(f_i^{(j)})_{i \in I}$ jest jednostajnie sumowalna na P , $g_j := \sum_{i \in I} f_i^{(j)}$, $j = 0, \dots, k-1$,
- $g_0 \in \mathcal{D}^k(P, E)$,
- $g_0^{(j)} \equiv g_j$, czyli $(\sum_{i \in I} f_i)^{(j)} = \sum_{i \in I} f_i^{(j)}$, $j = 1, \dots, k$.

6.11. Funkcje analityczne II

Niech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ będzie szeregiem potęgowym o współczynnikach z przestrzeni Banacha E nad $\mathbb{R}$ i niech R oznacza jego promień zbieżności (zob. podrozdział 6.6).

Twierdzenie 6.11.1. *Założmy, że $R > 0$ i niech $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-R, R) =: P$. Wtedy:*

- dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$, promień zbieżności szeregu $\sum_{n=k}^{\infty} k! \binom{n}{k} a_n x^{n-k}$ jest równy R ,
- $f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} k! \binom{n}{k} a_n x^{n-k}$, $x \in P$,
- $f \in C^\infty(P, E)$,
- $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)$, $k \in \mathbb{N}_0$,
- dla dowolnego $0 < r < R$ istnieją $C, \varrho > 0$ takie, że

$$\frac{1}{k!} \sup_{|x| \leq r} \|f^{(k)}(x)\| \leq \frac{C}{\varrho^k}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Dowód. (a) Szereg $\sum_{n=k}^{\infty} k! \binom{n}{k} a_n x^{n-k}$ powstaje przez k -krotne zróżniczkowanie wyraz po wyrazie. Wystarczy więc zbadać przypadek $k = 1$, czyli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$. Mamy

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(n+1) \|a_{n+1}\|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n+1]{(n+1) \|a_{n+1}\|} \right)^{(n+1)/n} = \frac{1}{R}.$$

(b) Z (a) wynika, że szereg $\sum_{n=k}^{\infty} k! \binom{n}{k} a_n x^{n-k}$ jest zbieżny lokalnie normalnie w P . Teraz wystarczy zastosować twierdzenie o różniczkowaniu szeregu wyraz po wyrazie.

(c) i (d) wynika z (b).

(e) Zdefiniujmy

$$\varphi(t) := \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \quad |t| < 1.$$

Na podstawie dotychczasowego dowodu wiemy, że:

$$\frac{k!}{(1-t)^{k+1}} = \varphi^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{\infty} k! \binom{n}{k} t^{n-k}.$$

Ustalmy $0 < r < s < R$ i niech $M := \sup\{\|a_n\|s^n : n \in \mathbb{N}_0\}$. Wobec (b), dla $|x| \leq r$ mamy:

$$\begin{aligned} \|f^{(k)}(x)\| &= \left\| \sum_{n=k}^{\infty} k! \binom{n}{k} a_n x^{n-k} \right\| \leq \sum_{n=k}^{\infty} k! \binom{n}{k} \frac{M}{s^n} r^{n-k} \\ &= \frac{M}{s^k} \sum_{n=k}^{\infty} k! \binom{n}{k} \left(\frac{r}{s}\right)^{n-k} = \frac{M}{s^k} \varphi^{(k)}\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{M}{s^k} \frac{k!}{(1-\frac{r}{s})^{k+1}} = k! \frac{\frac{M}{1-\frac{r}{s}}}{(s-r)^k}. \end{aligned} \quad \square$$

Wniosek 6.11.2. Niech $\Omega \in \text{top } \mathbb{R}$.

(a) $\mathcal{C}^\omega(\Omega, E) \subset \mathcal{C}^\infty(\Omega, E)$.

(b) $f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, E) \implies f' \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, E)$.

Twierdzenie 6.11.3. Niech $\Omega \in \text{top } \mathbb{R}$ i niech $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, E)$. Wtedy

$$f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, E) \iff \forall K \subset\subset \Omega \exists C > 0 \exists \varrho > 0 \forall k \in \mathbb{N}_0 : \frac{1}{k!} \sup_{x \in K} \|f^{(k)}(x)\| \leq \frac{C}{\varrho^k}.$$

Dowód. ($\Leftarrow$): Niech $a \in \Omega$ i niech $[a-r, a+r] \subset \Omega$. Niech C i ϱ będą takie, jak w warunku dla $K := [a-r, a+r]$. Bez trudu widzimy, że promień zbieżności szeregu Taylora $T_a f$ musi być co najmniej ϱ . Dalej, korzystając ze wzoru Taylora dla $\mathcal{D}^{n+1}$, dla $|x-a| < \min\{r, \varrho\}$ mamy:

$$\begin{aligned} \left\| f(x) - \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n \right\| &= \|R_k(f, a, x)\| \\ &\leq \frac{\sup_{|\xi-a| \leq r} \|f^{(k+1)}(\xi)\|}{(k+1)!} |x-a|^{k+1} \leq C \left(\frac{|x-a|}{\varrho} \right)^{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

($\Rightarrow$): Rozumujemy lokalnie. Wystarczy wykorzystać Twierdzenie 6.11.1(e). $\square$

Twierdzenie 6.11.3 pozwala w przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ w łatwy sposób udowodnić twierdzenia o składaniu i odwracaniu odwzorowań analitycznych (zob. Twierdzenia 6.9.6 i 6.9.9).

Twierdzenie 6.11.4 (Twierdzenie o składaniu funkcji analitycznych dla $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Niech $P, Q \subset \mathbb{R}$ będą przedziałami otwartymi. Jeżeli $f \in \mathcal{C}^\omega(P, E)$, $\varphi \in \mathcal{C}^\omega(Q, \mathbb{R})$ oraz $\varphi(Q) \subset P$, to $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^\omega(Q)$.

Dowód. Oczywiście $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^\infty(Q, F)$. Niech $K \subset\subset Q$. Ponieważ, φ i f są analityczne, zatem na podstawie Twierdzenia 6.11.3 istnieją stałe $C > 1$, $0 < \varrho < 1$ takie, że

$$\frac{1}{k!} \sup_{t \in K} |\varphi^{(k)}(t)| \leq \frac{C}{\varrho^k}, \quad \frac{1}{k!} \sup_{x \in \varphi(K)} \|f^{(k)}(x)\| \leq \frac{C}{\varrho^k}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Teraz skorzystamy z Twierdzenia 5.6.12

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} \sup_{t \in K} \|(f \circ \varphi)^{(k)}(t)\| &= \sup_{t \in K} \left\| \sum_{\alpha \in \Pi_k} \frac{1}{\alpha_1! \cdots \alpha_k!} f^{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)}(\varphi(t)) \left(\frac{\varphi'(t)}{1!} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\varphi^{(k)}(t)}{k!} \right)^{\alpha_k} \right\| \\ &\leq \sum_{\alpha \in \Pi_k} \frac{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)!}{\alpha_1! \cdots \alpha_k!} \frac{C}{\varrho^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_k}} \left(\frac{C}{\varrho} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{C}{\varrho^k} \right)^{\alpha_k} \end{aligned}$$

$$= \frac{C}{\varrho^k} \sum_{\alpha \in \Pi_k} \frac{(\alpha_1 + \dots + \alpha_k)!}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} \left(\frac{C}{\varrho}\right)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_k} \leq \frac{C}{\varrho^k} 2^{k-1} \left(\frac{C}{\varrho}\right)^k = \frac{C/2}{\left(\frac{\varrho^2}{2C}\right)^k},$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z następującego wzoru:

$$\sum_{\alpha \in \Pi_k} \frac{(\alpha_1 + \dots + \alpha_k)!}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} = 2^{k-1}.$$

Dla dowodu tego wzoru, niech

$$f(x) := \frac{1}{2-x} = \frac{1}{1-(x-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(1)(x-1)^n, \quad |x-1| < 1,$$

$$\varphi(t) := \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \varphi^{(n)}(0)t^n, \quad |t| < 1.$$

Wtedy

$$f(\varphi(t)) = \frac{1}{2 - \frac{1}{1-t}} = \frac{1-t}{1-2t} = \sum_{n=0}^{\infty} (2t)^n - t \sum_{n=0}^{\infty} (2t)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (f \circ \varphi)^{(n)}(0) t^n, \quad |t| < \frac{1}{2}.$$

Teraz, korzystając ze wzoru na pochodną złożenia, dostajemy

$$2^{k-1} = \frac{1}{k!} (f \circ \varphi)^{(k)}(0) = \sum_{\alpha \in \Pi_k} \frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} f^{(\alpha_1 + \dots + \alpha_k)}(1) \left(\frac{\varphi'(0)}{1!}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\right)^{\alpha_k}$$

$$= \sum_{\alpha \in \Pi_k} \frac{(\alpha_1 + \dots + \alpha_k)!}{\alpha_1! \dots \alpha_k!}. \quad \square$$

Twierdzenie 6.11.5 (Twierdzenie o funkcji odwrotnej do funkcji analitycznej dla $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). *Niech $U, V \subset \mathbb{R}$ będą przedziałami otwartymi i niech $f : U \rightarrow V$ będzie bijekcją klasy $\mathcal{C}^\omega(U)$. Wtedy jeżeli $f'(a) \neq 0$ dla pewnego $a \in U$, to funkcja $g := f^{-1}$ jest klasy $\mathcal{C}^\omega$ w pewnym otoczeniu punktu $b := f(a)$.*

Dowód. ⁽²⁴⁾ Możemy założyć, że $f'(x) \neq 0$ dla $x \in U$. Skorzystamy z Twierdzenia 6.11.3. Ustalmy $K \subset \subset V$. Wiemy, że $g \in \mathcal{C}^\infty(V)$ (Twierdzenie 5.5.6). Na podstawie Obserwacji 6.9.2(d) oraz Twierdzenia 6.9.6 wnioskujemy, że $h := \frac{1}{f'} \in \mathcal{C}^\omega(U)$. Istnieją więc stałe $C, \varrho > 0$ takie, że

$$\frac{1}{s!} \sup_{y \in K} |h^{(s)}(g(y))| \leq \frac{C}{\varrho^s}, \quad s \in \mathbb{N}_0. \quad (\dagger)$$

Teraz udowodnimy indukcyjnie, że

$$\frac{1}{k!} \sup_{y \in K} |g^{(k)}(y)| \leq \frac{C_k}{\varrho^{k-1}}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (\ddagger)$$

gdzie

$$C_k := (2C)^k (-1)^{k-1} \binom{\frac{1}{2}}{k} = (2C)^k (-1)^{k-1} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1) \dots (\frac{1}{2}-k+1)}{k!} > 0.$$

Zauważmy, że $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{C_k} = 2C$ (ĆWICZENIE), a więc $(\ddagger)$ zakończy dowód.

Ponieważ, $g' = h \circ g$, przypadek $k = 1$ wynika natychmiast z $(\dagger)$ (z $s = 0$). Teraz $k \rightsquigarrow k+1$. Korzystamy z Twierdzenia 5.6.12:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k+1)!} \sup_{y \in K} |g^{(k+1)}(y)| &= \frac{1}{(k+1)!} \sup_{y \in K} |(h \circ g)^{(k)}(y)| \\ &= \frac{1}{k+1} \sup_{y \in K} \left| \sum_{\alpha \in \Pi_k} \frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} h^{(\alpha_1 + \dots + \alpha_k)}(g(y)) \left(\frac{g'(y)}{1!}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{g^{(k)}(y)}{k!}\right)^{\alpha_k} \right| \\ &\leq \frac{1}{k+1} \sum_{\alpha \in \Pi_k} \frac{(\alpha_1 + \dots + \alpha_k)!}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} \frac{C}{\varrho^{\alpha_1 + \dots + \alpha_k}} \left(\frac{C_1}{\varrho^{1-1}}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{C_k}{\varrho^{k-1}}\right)^{\alpha_k} \end{aligned}$$

⁽²⁴⁾ Zob. S. G. Krantz, H. R. Parks, *A primer of real analytic functions*, Birkhäuser, 2002.

6. Szeregi

$$\begin{aligned}
&= \frac{C}{\varrho^k} \frac{1}{k+1} \sum_{\alpha \in \Pi_k} \frac{(\alpha_1 + \dots + \alpha_k)!}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} \left((2C)^1 (-1)^{1-1} \left(\frac{1}{1} \right) \right)^{\alpha_1} \dots \left((2C)^k (-1)^{k-1} \left(\frac{1}{k} \right) \right)^{\alpha_k} \\
&= \frac{(2C)^{k+1}}{\varrho^k} \frac{(-1)^k}{2(k+1)} \sum_{\alpha \in \Pi_k} \frac{(-1)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_k} (\alpha_1 + \dots + \alpha_k)!}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} \left(\frac{1}{1} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{1}{k} \right)^{\alpha_k} \\
&\stackrel{(*)}{=} \frac{(2C)^{k+1}}{\varrho^k} \frac{(-1)^k}{2(k+1)} 2(k+1) \left(\frac{1}{k+1} \right) = \frac{C_{k+1}}{\varrho^k},
\end{aligned}$$

gdzie (*) wynika ze wzoru

$$\sum_{\alpha \in \Pi_k} \frac{(-1)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_k} (\alpha_1 + \dots + \alpha_k)!}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} \left(\frac{1}{2} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{1}{k} \right)^{\alpha_k} = 2(k+1) \left(\frac{1}{k+1} \right).$$

Powyższy wzór udowodnimy korzystając ponownie z Twierdzenia 5.6.12 dla funkcji

$$\begin{aligned}
f(x) &:= \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \quad x \in (-1, 1), \\
\varphi(t) &:= 1 - \sqrt{1-2t} = - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-2t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} t^n, \quad t \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}). \quad (25)
\end{aligned}$$

Niech $h := f \circ \varphi$. Mamy

$$h(t) = f(\varphi(t)) = \frac{1}{\sqrt{1-2t}} = \varphi'(t),$$

a stąd

$$\begin{aligned}
-(k+1)! \binom{\frac{1}{2}}{k+1} (-2)^{k+1} &= \varphi^{(k+1)}(0) = h^{(k)}(0) \\
&= \sum_{\alpha \in \Pi_k} \frac{k!}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} f^{(\alpha_1 + \dots + \alpha_k)}(0) \left(\frac{\varphi'(0)}{1!} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \right)^{\alpha_k} \\
&= k! \sum_{\alpha \in \Pi_k} \frac{(\alpha_1 + \dots + \alpha_k)!}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} \left(- \left(\frac{1}{1} \right) (-2)^1 \right)^{\alpha_1} \dots \left(- \left(\frac{1}{k} \right) (-2)^k \right)^{\alpha_k} \\
&= (-2)^k k! \sum_{\alpha \in \Pi_k} \frac{(-1)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_k} (\alpha_1 + \dots + \alpha_k)!}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} \left(\frac{1}{1} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{1}{k} \right)^{\alpha_k}. \quad \square
\end{aligned}$$

Wniosek 6.11.6. $\log_a \in \mathcal{C}^\omega(\mathbb{R}_{>0})$ ($a > 0$, $a \neq 1$), $\arcsin \in \mathcal{C}^\omega((-1, 1))$, $\arccos \in \mathcal{C}^\omega((-1, 1))$, $\arctg \in \mathcal{C}^\omega(\mathbb{R})$, $\operatorname{arccotg} \in \mathcal{C}^\omega(\mathbb{R})$.

6.12. Szereg Taylora

Definicja 6.12.1. Niech $P \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem otwartym, $a \in P$. Niech E będzie przestrzenią Banacha nad $\mathbb{R}$ i niech $f \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{D}^n(P, E; a)$. Wtedy definiujemy *szereg Taylora funkcji f w punkcie a* jako szereg potęgowy postaci

$$(T_a f)(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) (x-a)^n.$$

Obserwacja 6.12.2. (a) (ĆWICZENIE*) Istnieje funkcja $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że:

- dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ istnieje otwarte otoczenie zera U_n takie, że $f|_{U_n} \in \mathcal{C}^n(U_n)$,
- nie istnieje otwarte otoczenie zera U takie, że $f|_U \in \mathcal{C}^\infty(U)$.

(b) Promień zbieżności szeregu Taylora nie musi być dodatni (zob. Twierdzenie Borela ⁽²⁶⁾ 6.12.3), ani też, jeżeli jest dodatni, to wcale nie musi zachodzić równość $T_a f = f$ w jakimś otoczeniu punktu a .

Klasyczny przykład to: $f(x) := 0$ dla $x \leq 0$ i $f(x) := \exp(-1/x)$ dla $x > 0$, $a := 0$. Wtedy $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ i $T_0 f = 0$ (por. Obserwacja 5.5.2(g)).

⁽²⁵⁾ korzystamy tu z rozwinięcia $(1+t)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} t^n$, $t \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (Przykład 5.6.11(d)).

⁽²⁶⁾ Émile Borel (1871–1956).

(c) Jeżeli $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $|x| < R$, jak w Twierdzeniu 6.11.1, to $T_0 f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. W szczególności, jeżeli $f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, E)$ ($\Omega \in \text{top } \mathbb{R}$), to dla dowolnego punktu $a \in \Omega$ mamy $T_a f(x) = f(x)$ dla x z pewnego otoczenia punktu a .

Twierdzenie 6.12.3 (Borel). *Dla dowolnego ciągu $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset E$ istnieje funkcja $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, E)$ taka, że $T_0 f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, czyli $\frac{1}{n!} f^{(n)}(0) = a_n$, $n \in \mathbb{N}_0$.*

Dowód. Zasadniczym etapem dowodu będzie pokazanie, że dla dowolnego $N \in \mathbb{N}_0$ istnieje funkcja $g_N \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, E)$ taka, że $g_N = 0$ w pewnym otoczeniu zera oraz

$$\sum_{n=0}^N \sup_{x \in \mathbb{R}} \|(a_{N+1} x^{N+1} - g_N)^{(n)}(x)\| \leq \frac{1}{2^N}. \quad (\dagger)$$

Przypuśćmy, że $(\dagger)$ zachodzi. Wtedy definiujemy

$$f(x) := a_0 + \sum_{N=0}^{\infty} (a_{N+1} x^{N+1} - g_N(x)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Warunek $(\dagger)$ gwarantuje, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ szereg $\sum_{N=k}^{\infty} (a_{N+1} x^{N+1} - g_N)^{(k)}$ jest normalnie zbieżny w $\mathbb{R}$. Stąd, wobec Twierdzenia 6.10.1, funkcja f jest poprawnie zdefiniowana, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, E)$ oraz

$$f^{(n)}(0) = \sum_{N=0}^{\infty} (a_{N+1} x^{N+1} - g_N)^{(n)}(0) = \sum_{N=0}^{\infty} (a_{N+1} x^{N+1})^{(n)}(0) = n! a_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

co zakończy dowód.

Przystępujemy do realizacji $(\dagger)$. Niech $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, [0, 1])$, $\varphi(x) = 0$ dla $|x| \leq 1/2$, $\varphi(x) = 1$ dla $|x| \geq 1$. Niech $C_n := \sup\{|\varphi^{(n)}(x)| : x \in \mathbb{R}\}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Zauważmy, że $C_0 = 1$ oraz $C_n < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$. Połóżmy

$$h_\varepsilon(x) := \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) x^{N+1}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0.$$

Wtedy dla $0 < \varepsilon \leq 1$ mamy

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \sup_{x \in \mathbb{R}} |(x^{N+1} - h_\varepsilon)^{(n)}(x)| &= \sum_{n=0}^N \sup_{|x| \leq \varepsilon} \left| \left(x^{N+1} \left(1 - \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right) \right)^{(n)} \right| \\ &= \sum_{n=0}^N \sup_{|x| \leq \varepsilon} \left| \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} (x^{N+1})^{(s)} \left(1 - \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right)^{(n-s)} \right| \\ &= \sum_{n=0}^N \sup_{|x| \leq \varepsilon} \left| - \sum_{s=0}^{n-1} \binom{n}{s} \binom{N+1}{s} s! x^{N+1-s} \varepsilon^{s-n} \varphi^{(n-s)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \binom{N+1}{n} n! x^{N+1-n} \left(1 - \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right) \right| \\ &\leq \sum_{n=0}^N \left(\sum_{s=0}^{n-1} \binom{n}{s} \binom{N+1}{s} s! \varepsilon^{N+1-s} \varepsilon^{s-n} C_{n-s} + \binom{N+1}{n} n! \varepsilon^{N+1-n} \right) \\ &\leq \sum_{n=0}^N \varepsilon^{N+1-n} \left(\sum_{s=0}^n \binom{n}{s} \binom{N+1}{s} s! C_{n-s} \right) \leq \varepsilon \sum_{n=0}^N \left(\sum_{s=0}^n \binom{n}{s} \binom{N+1}{s} s! C_{n-s} \right) = \varepsilon \text{const}(N). \end{aligned}$$

Teraz jako g_N wystarczy wziąć $a_{N+1} h_\varepsilon$ ze stosownie małym ε . □

ROZDZIAŁ 7

Całka

7.1. Całka Riemanna

Ustalamy przedział $P := [a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$. Niech $|P| := b - a$.

Definicja 7.1.1. *Podziałem* przedziału P nazywamy dowolny ciąg punktów $\pi = (x_0, \dots, x_m)$, gdzie $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ ($m \in \mathbb{N}$). Średnicą podziału $\pi = (x_0, \dots, x_m)$ nazywamy liczbę $\text{diam } \pi := \max\{x_j - x_{j-1} : j = 1, \dots, m\}$.

Ciąg $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ podziałów przedziału P nazywamy *normalnym*, jeżeli $\text{diam } \pi_k \rightarrow 0$.

Niech $\pi = (x_0, \dots, x_m)$, $\pi' = (x'_0, \dots, x'_n)$ będą podziałami P . Powiemy, że π' *jest wpisany w* π lub też, że π' *jest zagęszczeniem* π , jeżeli $\{x_0, \dots, x_m\} \subset \{x'_0, \dots, x'_n\}$. W tej sytuacji piszemy $\pi' \preccurlyeq \pi$.

Obserwacja 7.1.2. (a) Relacja $\preccurlyeq$ jest przechodnia.

(b) Dla dowolnych podziałów π_1, π_2 przedziału P istnieje podział π taki, że $\pi \preccurlyeq \pi_j$, $j = 1, 2$; π jest *wspólnym zagęszczeniem* podziałów π_1 i π_2 .

Definicja 7.1.3. Niech $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją ograniczoną. Dla dowolnego przedziału $Q := [p, q] \subset P$ zdefiniujemy $m(f, Q) := \inf f(Q)$, $M(f, Q) := \sup f(Q)$.

Dla dowolnego podziału $\pi = (x_0, \dots, x_m)$ przedziału P połóżmy:

$$L(f, \pi) := \sum_{j=1}^m m(f, [x_{j-1}, x_j])(x_j - x_{j-1}), \quad U(f, \pi) := \sum_{j=1}^m M(f, [x_{j-1}, x_j])(x_j - x_{j-1}).$$

Czasami, dla uproszczenia zapisu, będziemy pisać $m_j(f) := m(f, [x_{j-1}, x_j])$, $M_j(f) := M(f, [x_{j-1}, x_j])$, $\Delta x_j := x_j - x_{j-1}$, $j = 1, \dots, m$. Liczbę $L(f, \pi)$ nazywamy *sumą aproksymacyjną dolną dla funkcji f przy podziale π* . Analogicznie, $U(f, \pi)$ nazywamy *sumą aproksymacyjną górną*. Sumy te nazywamy o *sumami Darboux*. Zauważmy, że $m(f, P)(b - a) \leq L(f, \pi) \leq U(f, \pi) \leq M(f, P)(b - a)$. Niech

$$\int_{*P} f = \int_{*a}^b f := \sup_{\pi} L(f, \pi), \quad \int_P^* f = \int_a^{*b} f := \inf_{\pi} U(f, \pi),$$

gdzie supremum i infimum bierzemy po wszystkich podziałach P . Liczbę $\int_{*P} f$ nazywamy *całką dolną z funkcji f* . Analogicznie, liczbę $\int_P^* f$ nazywamy *całką górną*. Powiemy, że funkcja f jest *całkowalna w sensie Riemanna na przedziale P* ($f \in \mathcal{R}(P, \mathbb{R}) = \mathcal{R}(P)$), jeżeli $\int_{*P} f = \int_P^* f$. Wtedy wspólną wartość tych całek oznaczamy przez $\int_P f (= \int_a^b f)$ i nazywamy *całką Riemanna z funkcji f po przedziale P* .

Dla funkcji ograniczonych $f = u + iv : P \rightarrow \mathbb{C}$ mówimy, że f jest *całkowalna w sensie Riemanna* ($f \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$), jeżeli $u, v \in \mathcal{R}(P)$. Wtedy przyjmujemy $\int_P f = \int_a^b f := \int_P u + i \int_P v$.

Obserwacja 7.1.4. Zauważmy, że $M(f, Q) - m(f, Q) = \sup_{x', x'' \in Q} (f(x') - f(x'')) = \sup_{x', x'' \in Q} |f(x') - f(x'')|$.

W szczególności,

$$U(f, \pi) - L(f, \pi) = \sum_{j=1}^m \left(\sup_{x', x'' \in [x_{j-1}, x_j]} |f(x') - f(x'')| \right) \Delta x_j.$$

Przykład 7.1.5. (a) Każda funkcja stała $c \in \mathbb{C}$ jest całkowalna w sensie Riemanna i $\int_P c = c|P|$.

(b) Niech $f := \chi_{P \cap \mathbb{Q}, P}$ ⁽¹⁾ będzie funkcją Dirichleta. Wtedy $L(f, \pi) = 0$ oraz $U(f, \pi) = |P|$ dla dowolnego podziału π . Tak więc $\int_{*P} f = 0$ oraz $\int_P^* f = |P|$, czyli $f \notin \mathcal{R}(P)$.

Obserwacja 7.1.6 (Własności całki Riemanna I). Niech $f, g : P \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi, \psi : P \rightarrow \mathbb{C}$ będą ograniczone i niech π, π_1, π_2 będą podziałami przedziału P .

⁽¹⁾ Przypomnijmy, że $\chi_{A, P}$ oznacza funkcję charakterystyczną zbioru $A \subset P$.

(a) Dla dowolnego $c \in \mathbb{R}$ mamy $L(f + c, \pi) = L(f, \pi) + c|P|$, $U(f + c, \pi) = U(f, \pi) + c|P|$. W konsekwencji,

$$\int_{*P} (f + c) = \left(\int_{*P} f \right) + c|P|, \quad \int_P^* (f + c) = \left(\int_P^* f \right) + c|P|.$$

W szczególności, dla dowolnego $c \in \mathbb{C}$,

$$\varphi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C}) \iff \varphi + c \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C}) \text{ oraz } \int_P (\varphi + c) = \int_P \varphi + \int_P c.$$

(b) Jeżeli $f \leq g$, to $L(f, \pi) \leq L(g, \pi)$, $U(f, \pi) \leq U(g, \pi)$. Stąd $\int_{*P} f \leq \int_{*P} g$ i $\int_P^* f \leq \int_P^* g$. Jeżeli ponadto $f, g \in \mathcal{R}(P)$, to $\int_P f \leq \int_P g$ (*monotoniczność całki*).

(c) $L(-f, \pi) = -U(f, \pi)$. W szczególności,

- $\int_{*P}(-f) = -\int_P^* f$,
- $\varphi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C}) \iff -\varphi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$ oraz $\int_P(-\varphi) = -\int_P \varphi$.
- $\varphi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C}) \iff \overline{\varphi} \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$ oraz $\int_P \overline{\varphi} = \overline{\int_P \varphi}$.

(d) Jeżeli $\pi_1 \preceq \pi_2$, to $L(f, \pi_1) \geq L(f, \pi_2)$, $U(f, \pi_1) \leq U(f, \pi_2)$. W szczególności,

- $L(f, \pi_1) \leq U(f, \pi_2)$ dla dowolnych π_1, π_2 (wystarczy wykorzystać poprzednie nierówności dla π i π_j , gdzie π jest wspólnym zagęszczeniem podziałów π_1 i π_2),
- $\int_{*P} f \leq \int_P^* f$.

Istotnie, niech $\pi_2 = (x_0, \dots, x_m)$. Wystarczy rozważyć przypadek, gdy $\pi_1 = (x_0, \dots, x_{k-1}, x'_k, x_k, \dots, x_m)$. Wtedy

$$\begin{aligned} L(f, \pi_2) &= \sum_{j=1}^{k-1} m_j(f) \Delta x_j + m_k(f) \Delta x_k + \sum_{j=k+1}^m m_j(f) \Delta x_j \\ &\leq \sum_{j=1}^{k-1} m_j(f) \Delta x_j + m(f, [x_{k-1}, x'_k])(x'_k - x_{k-1}) + m(f, [x'_k, x_k])(x_k - x'_k) + \sum_{j=k+1}^m m_j(f) \Delta x_j = L(f, \pi_1). \end{aligned}$$

Analogicznie postępujemy dla sum górnych.

(e) $f \in \mathcal{R}(P) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \pi : U(f, \pi) - L(f, \pi) \leq \varepsilon$. Istotnie, jeżeli $f \in \mathcal{R}(P)$, to dla $\varepsilon > 0$ niech π_1, π_2 będą podziałami takimi, że

$$U(f, \pi_2) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \int_P f \leq L(f, \pi_1) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Teraz wystarczy jako π wziąć wspólne zagęszczenie π_1 i π_2 i skorzystać z (d).

Jeżeli spełniony jest warunek po prawej stronie, to ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech π będzie podziałem takim jak w warunku. Wtedy

$$\int_P^* f - \int_{*P} f \leq U(f, \pi) - L(f, \pi) \leq \varepsilon,$$

co, wobec dowolności ε , daje całkowalność.

(f) Dla każdego normalnego ciągu podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ mamy:

$$L(f, \pi_k) \longrightarrow \int_{*P} f, \quad U(f, \pi_k) \longrightarrow \int_P^* f.$$

Ograniczymy się do sum górnych. Można założyć, że $f \geq 0$ (zastępując f przez $f + c$). Weźmy $\varepsilon > 0$ i niech $\pi = (x'_0, \dots, x'_m)$ będzie podziałem takim, że $U(f, \pi) - \int_a^{*b} f \leq \varepsilon$. Niech $\pi_k = (x_{k,0}, \dots, x_{k,m_k})$, $k \geq 1$. Wtedy

$$\begin{aligned} U(f, \pi_k) &= \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, m_k\}: \exists i \in \{1, \dots, m\}: \\ [x_{k,j-1}, x_{k,j}] \subset [x'_{i-1}, x'_i]}} M(f, [x_{k,j-1}, x_{k,j}]) (x_{k,j} - x_{k,j-1}) \\ &+ \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, m_k\}: \forall i \in \{1, \dots, m\}: \\ [x_{k,j-1}, x_{k,j}] \not\subset [x'_{i-1}, x'_i]}} M(f, [x_{k,j-1}, x_{k,j}]) (x_{k,j} - x_{k,j-1}) \leq U(f, \pi) + M(f, P) \eta_k, \text{ gdzie} \\ \eta_k &:= \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, m_k\}: \exists i \in \{1, \dots, m-1\}: \\ x'_i \in (x_{k,j-1}, x_{k,j})}} (x_{k,j} - x_{k,j-1}) \leq m \operatorname{diam} \pi_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Ostatecznie

$$\int_P^* f \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} U(f, \pi_k) \leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} U(f, \pi_k) \leq \int_P^* f + \varepsilon,$$

co, wobec dowolności $\varepsilon > 0$, kończy dowód.

Definicja 7.1.7. Niech $\pi = (x_0, \dots, x_m)$ będzie podziałem P i niech $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$, $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \dots, m$. Dla dowolnej funkcji $\varphi : P \rightarrow \mathbb{C}$ sumę

$$M(f, \pi, \xi) := \sum_{j=1}^m \varphi(\xi_j) \Delta x_j$$

nazywamy *sumą aproksymacyjną pośrednią dla funkcji φ przy podziale π i punktach pośrednich ξ* . Czasami mówimy o *sumie Cauchy'ego-Riemanna*.

Obserwacja 7.1.8. (a) $M(\alpha\varphi + \beta\psi, \pi, \xi) = \alpha M(\varphi, \pi, \xi) + \beta M(\psi, \pi, \xi)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

(b) $|M(\varphi, \pi, \xi)| \leq M(|\varphi|, \pi, \xi)$.

(c) Dla funkcji ograniczonej $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ mamy: $L(f, \pi) \leq M(f, \pi, \xi) \leq U(f, \pi)$.

Twierdzenie 7.1.9. Dla funkcji ograniczonej $\varphi = u + iv : P \rightarrow \mathbb{C}$ następujące warunki są równoważne:

- (i) $\varphi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$;
- (ii) istnieje $c \in \mathbb{C}$ takie, że dla dowolnego normalnego ciągu podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ oraz dla dowolnego wyboru punktów pośrednich $(\xi_k)_{k=1}^\infty$ (tzn. ξ_k jest zbiorem punktów pośrednich dla π_k) mamy $M(\varphi, \pi_k, \xi_k) \rightarrow c$;

równoważnie: dla dowolnego normalnego ciągu podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ oraz dla dowolnego wyboru punktów pośrednich $(\xi_k)_{k=1}^\infty$ istnieje $c \in \mathbb{C}$ takie, że $M(\varphi, \pi_k, \xi_k) \rightarrow c$;

(iii) istnieje $c \in \mathbb{C}$ takie, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla dowolnego podziału π o średnicy $\leq \delta$ oraz dla dowolnego wyboru punktów pośrednich ξ mamy $|M(\varphi, \pi, \xi) - c| \leq \varepsilon$;

(iv) istnieje $c \in \mathbb{C}$ oraz normalny ciąg podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ takie, że dla dowolnego wyboru punktów pośrednich $(\xi_k)_{k=1}^\infty$, mamy $M(\varphi, \pi_k, \xi_k) \rightarrow c$;

równoważnie: istnieje normalny ciąg podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ takie, że dla dowolnego wyboru punktów pośrednich $(\xi_k)_{k=1}^\infty$, istnieje $c \in \mathbb{C}$ takie, że $M(\varphi, \pi_k, \xi_k) \rightarrow c$.

Dowód. (i) $\Rightarrow$ (ii) wynika z Obserwacji 7.1.8(c) i 7.1.6(f): $M(\varphi, \pi_k, \xi_k) = M(u, \pi_k, \xi_k) + iM(v, \pi_k, \xi_k) \rightarrow \int_P u + i \int_P v = \int_P \varphi$.

Równoważność (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) jest elementarna (ĆWICZENIE).

Implikacja (ii) $\Rightarrow$ (iv) jest trywialna.

Dla dowodu implikacji (iv) $\Rightarrow$ (i) wystarczy zauważyć, że istnieją ciągi punktów pośrednich $(\xi'_k)_{k=1}^\infty$, $(\xi''_k)_{k=1}^\infty$ takie, że

$$M(u, \pi_k, \xi'_k) - L(u, \pi_k) \leq \frac{1}{k}, \quad U(u, \pi_k) - M(u, \pi_k, \xi''_k) \leq \frac{1}{k}, \quad k \geq 1.$$

Wtedy, na podstawie Obserwacji 7.1.6(f),

$$M(u, \pi_k, \xi'_k) = \operatorname{Re}(M(\varphi, \pi_k, \xi'_k)) \rightarrow \operatorname{Re} c = \int_{*P} u, \quad M(u, \pi_k, \xi''_k) = \operatorname{Re}(M(\varphi, \pi_k, \xi''_k)) \rightarrow \operatorname{Re} c = \int_P^* u,$$

a zatem $\int_{*P} u = \int_P^* u$, czyli $u \in \mathcal{R}(P)$. Podobnie rozumiemy dla v . $\square$

Obserwacja 7.1.10. Sumy aproksymacyjne pośrednie można zdefiniować dla dowolnego odwzorowania $\varphi : P \rightarrow E$, gdzie E jest przestrzenią Banacha. Pozwala to przenieść pojęcie całki Riemanna: odwzorowanie $\varphi : P \rightarrow F$ nazywamy *całkowalnym w sensie Riemanna* ($\varphi \in \mathcal{R}(P, E)$), jeżeli istnieje $c \in E$ takie, że dla dowolnego normalnego ciągu podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ oraz dla dowolnego wyboru punktów pośrednich mamy $M(\varphi, \pi_k, \xi_k) \rightarrow c$. Element c nazywamy wtedy *całką Riemanna odwzorowania φ po P* i oznaczamy $\int_P \varphi$. Twierdzenie 7.1.9 gwarantuje zgodność definicji dla $E = \mathbb{C}$.

Pojawia się tu pewna subtelność: nowa definicja całki obejmuje formalnie funkcje nieograniczone, a Twierdzenie 7.1.9 dotyczy tylko funkcji ograniczonych. Dla usunięcia tego problemu wystarczy zauważyć, że jeżeli funkcja $\varphi : P \rightarrow E$ jest całkowalna w nowym sensie, to musi być ograniczona. Istotnie, przypuśćmy, że $\sup_P \|\varphi\| = +\infty$ i niech $P \ni a_\nu \rightarrow a_0 \in P$ będzie ciągiem takim, że $\|\varphi(a_\nu)\| \rightarrow +\infty$. Weźmy normalny ciąg podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$, $\pi_k = (x_{k,0}, \dots, x_{k,m_k})$, taki, że $a_0 \in (x_{k,s_k-1}, x_{k,s_k})$. Ustalmy k . Wybierzmy w sposób dowolny punkty pośrednie $\xi_{k,j}$ $j \neq s_k$. Ponieważ $\sup_{(x_{k,s_k-1}, x_{k,s_k})} \|\varphi\| = +\infty$, to

zawsze znajdziemy punkt ξ_{k,s_k} taki, że $\|M(\varphi, \pi_k, \xi_k)\| \geq k$. Mamy więc $\|M(\varphi, \pi_k, \xi_k)\| \rightarrow +\infty$, czyli φ nie może być całkowalna w nowym sensie.

Ćwiczenie* 7.1.11. Proszę na bieżąco sprawdzać, które z poznawanych własności funkcji klasy $\mathcal{R}(P, \mathbb{C})$ przenoszą się na $\mathcal{R}(P, E)$.

Obserwacja 7.1.12 (Własności całki Riemanna II). (a) Niech $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją monotoniczną. Wtedy $f \in \mathcal{R}(P)$.

Istotnie, możemy założyć, że f jest rosnąca. Wtedy $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, $x \in P$, a zatem f jest ograniczona. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zdefiniujmy podział $\pi_n = (x_{n,0}, \dots, x_{n,n})$, $x_{n,j} := a + \frac{j}{n}(b-a)$, $j = 0, 1, \dots, n$. Mamy

$$U(f, \pi_n) - L(f, \pi_n) = \sum_{j=1}^n (f(x_{n,j}) - f(x_{n,j-1})) \frac{b-a}{n} = (f(b) - f(a)) \frac{b-a}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

i korzystamy z Obserwacji 7.1.6(e).

(b) $\mathcal{R}(P, \mathbb{K})$ jest $\mathbb{K}$ -przestrzenią wektorową, a operator $\mathcal{R}(P, \mathbb{K}) \ni \varphi \mapsto \int_P \varphi \in \mathbb{K}$ jest $\mathbb{K}$ -liniowy.

(c) Jeżeli $\psi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$, $\varphi : P \rightarrow \mathbb{C}$ jest ograniczona oraz $|\varphi(x') - \varphi(x'')| \leq |\psi(x') - \psi(x'')|$, $x', x'' \in P$, to $\varphi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$. Istotnie, korzystając z Obserwacji 7.1.4 mamy

$$\begin{aligned} U(\operatorname{Re} \varphi, \pi) - L(\operatorname{Re} \varphi, \pi) &= \sum_{j=1}^m \left(\sup_{x', x'' \in [x_{j-1}, x_j]} |\operatorname{Re} \varphi(x') - \operatorname{Re} \varphi(x'')| \right) \Delta x_j \\ &\leq \sum_{j=1}^m \left(\sup_{x', x'' \in [x_{j-1}, x_j]} |\varphi(x') - \varphi(x'')| \right) \Delta x_j \leq \sum_{j=1}^m \left(\sup_{x', x'' \in [x_{j-1}, x_j]} |\psi(x') - \psi(x'')| \right) \Delta x_j \\ &\leq (U(\operatorname{Re} \psi, \pi) - L(\operatorname{Re} \psi, \pi)) + (U(\operatorname{Im} \psi, \pi) - L(\operatorname{Im} \psi, \pi)). \end{aligned}$$

Teraz możemy skorzystać z Obserwacji 7.1.6(e). Podobnie postępujemy dla $\operatorname{Im} \varphi$.

(d) Jeżeli $\varphi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$, to $|\varphi| \in \mathcal{R}(P)$ oraz $|\int_P \varphi| \leq \int_P |\varphi|$.

Istotnie, całkowalność $|\varphi|$ wynika z (c). Jeżeli $\varphi : P \rightarrow \mathbb{R}$, to nierówność wynika natychmiast z monotoniczności całki. W przypadku zespolonym niech $\alpha \in \mathbb{T}$ będzie takie, że $\alpha \int_P \varphi = |\int_P \varphi|$. Wtedy

$$\left| \int_P \varphi \right| = \alpha \int_P \varphi = \int_P (\alpha \varphi) = \int_P \operatorname{Re}(\alpha \varphi) \leq \int_P |\varphi|.$$

(e) Jeżeli $\varphi, \psi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$, to $\varphi\psi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$.

Istotnie, niech $|\varphi|, |\psi| \leq C$. Wtedy:

$$|\varphi(x')\psi(x') - \varphi(x'')\psi(x'')| \leq C(|\varphi(x') - \varphi(x'')| + |\psi(x') - \psi(x'')|), \quad x', x'' \in P.$$

Teraz możemy użyć rozumowania takiego, jak w (c).

(f) Operator $\mathcal{R}(P, \mathbb{K}) \times \mathcal{R}(P, \mathbb{K}) \ni (\varphi, \psi) \mapsto \int_P \varphi \bar{\psi} \in \mathbb{K}$ jest semi-iloczynem skalarnym. W konsekwencji (zob. Twierdzenie 5.11.22), zachodzi nierówność Schwarz'a dla całek Riemanna:

$$\left| \int_P \varphi \bar{\psi} \right| \leq \sqrt{\int_P |\varphi|^2} \sqrt{\int_P |\psi|^2}, \quad \varphi, \psi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C}).$$

(g) Funkcja $\mathcal{R}(P, \mathbb{C}) \ni \varphi \xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathcal{R}}} \sqrt{\int_a^b |\varphi|^2}$ jest seminormą (Twierdzenie 5.11.23).

(h) $\mathcal{C}(P, \mathbb{C}) \subset \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$.

Istotnie, możemy założyć, że $\varphi : P \rightarrow \mathbb{R}$. Dla $\varepsilon > 0$, wobec jednostajnej ciągłości funkcji φ na P , istnieje $\delta > 0$ takie, że $|\varphi(x') - \varphi(x'')| \leq \varepsilon$ o ile $|x' - x''| \leq \delta$. Niech π będzie podziałem P o średnicy $\leq \delta$. Wtedy $U(\varphi, \pi) - L(\varphi, \pi) \leq \varepsilon |P|$.

(i) Jeżeli $0 \leq f \in \mathcal{C}(P)$ i $\int_P f = 0$, to $f \equiv 0$.

(j) $\|\cdot\|_{\mathcal{R}}$ jest normą na przestrzeni $\mathcal{C}(P, \mathbb{C})$.

(k) Niech $a < c < b$. Wtedy $\varphi \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{C}) \iff \varphi|_{[a, c]} \in \mathcal{R}([a, c], \mathbb{C})$, $\varphi|_{[c, b]} \in \mathcal{R}([c, b], \mathbb{C})$. Ponadto,

$$\int_a^b \varphi = \int_a^c \varphi + \int_c^b \varphi.$$

Istotnie, jeżeli $\varphi|_{[a,c]} \in \mathcal{R}([a,c], \mathbb{C})$, $\varphi|_{[c,b]} \in \mathcal{R}([c,b], \mathbb{C})$, to niech $(\pi'_k)_{k=1}^\infty$ (odp. $(\pi''_k)_{k=1}^\infty$) będzie normalnym ciągiem podziałów $[a,c]$ (odp. $[c,b]$) takim, że przy dowolnym wyborze punktów pośrednich $(\xi'_k)_{k=1}^\infty$ (odp. $(\xi''_k)_{k=1}^\infty$) mamy $M(\varphi, \pi'_k, \xi'_k) \rightarrow \int_a^c \varphi$ (odp. $M(\varphi, \pi''_k, \xi''_k) \rightarrow \int_c^b \varphi$). Zestawiając podziały π'_k i π''_k , $k \in \mathbb{N}$, dostajemy normalny ciąg podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ przedziału $[a,b]$ taki, że dla dowolnego wyboru punktów pośrednich $(\xi_k)_{k=1}^\infty$ mamy: $M(\varphi, \pi_k, \xi_k) \rightarrow \int_a^c \varphi + \int_c^b \varphi$. Oznacza to, że $\varphi \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{C})$ oraz $\int_a^b \varphi = \int_a^c \varphi + \int_c^b \varphi$.

Dla dowodu implikacji przeciwnej, wystarczy rozważyć przypadek, gdy $\varphi = f \in \mathcal{R}([a,b])$. Dla $\varepsilon > 0$ niech π będzie podziałem $[a,b]$ takim, że $U(f, \pi) - L(f, \pi) \leq \varepsilon$. Zauważmy, że zawsze możemy założyć, że $c \in \pi$. Istotnie, jeżeli $\tilde{\pi}$ jest podziałem powstałym przed dołożeniem c , to na podstawie Obserwacji 7.1.6(d), $U(f, \tilde{\pi}) - L(f, \tilde{\pi}) \leq U(f, \pi) - L(f, \pi)$.

Jeżeli $c \in \pi$, to π rozpada się na podział π' przedziału $[a,c]$ i podział π'' przedziału $[c,b]$. Stąd $\varepsilon \geq U(f, \pi) - L(f, \pi) = (U(f, \pi') - L(f, \pi')) + (U(f, \pi'') - L(f, \pi''))$, co dowodzi całkowalności φ na obu przedziałach.

(l) Przestrzeń $\mathcal{C}(P, \mathbb{C})$, $\|\cdot\|_{\mathcal{R}}$ nie jest zupełna.

Istotnie, niech $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$,

$$f_n(x) := \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ \frac{n}{2}(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}), & \text{jeżeli } \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 1, & \text{jeżeli } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad f := \chi_{(1/2, 1]}.$$

Oczywiście $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{C}(P)$. Łatwo sprawdzić, że $\|f_n - f\|_{\mathcal{R}} \rightarrow 0$ (ĆWICZENIE). W szczególności, $(f_n)_{n=1}^\infty$ jest ciągiem Cauchy'ego w $(\mathcal{C}(P, \mathbb{C}), \|\cdot\|_{\mathcal{R}})$. Przypuśćmy, że $\|f_n - g\|_{\mathcal{R}} \rightarrow 0$ dla pewnej funkcji $g \in \mathcal{C}(P, \mathbb{C})$. Wtedy $\int_P |f - g|^2 = 0$. Stąd $g = 0$ na $[0, \frac{1}{2}]$ i $g = 1$ na $(\frac{1}{2}, 1]$; sprzeczność.

(m) Jeżeli $\varphi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$, to dla dowolnego $[p, q] \subset P$ mamy $\varphi|_{[p,q]} \in \mathcal{R}([p, q], \mathbb{C})$.

(n) (Twierdzenie o wartości średniej.) Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{C}(P)$ istnieje $\xi \in P$ taki, że

$$f(\xi) = \frac{1}{|P|} \int_P f.$$

Istotnie, $\min f(P) \leq \frac{1}{|P|} \int_P f \leq \max f(P)$ i teraz wystarczy skorzystać z zasady Darboux.

(o) Jeżeli $\mathcal{R}(P, \mathbb{C}) \ni \varphi_n \rightarrow \varphi$ jednostajnie na P , to $\varphi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$ i $\int_P \varphi_n \rightarrow \int_P \varphi$.

Istotnie, możemy założyć, że $\varphi_n = f_n : P \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, oraz $\varphi = f : P \rightarrow \mathbb{R}$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech n_0 będzie takie, że

$$|f(x') - f(x'')| \leq \varepsilon + |f_{n_0}(x') - f_{n_0}(x'')|, \quad x', x'' \in P.$$

Niech π będzie podziałem P takim, że $U(f_{n_0}, \pi) - L(f_{n_0}, \pi) \leq \varepsilon$. Wtedy $U(f, \pi) - L(f, \pi) \leq \varepsilon(b-a) + \varepsilon$. Wynika stąd całkowalność funkcji f . Zbieżność całek wynika bezpośrednio z nierówności

$$\left| \int_P \varphi_n - \int_P \varphi \right| \leq \int_P |\varphi_n - \varphi| \leq |P|(\sup_P |\varphi_n - \varphi|).$$

(p) Niech $\varphi_n \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}_0$. Załóżmy, że szereg funkcyjny $\sum_{n=0}^\infty \varphi_n$ jest zbieżny jednostajnie. Wtedy suma szeregu funkcyjnego $\sum_{n=0}^\infty \varphi_n$ jest funkcją całkowalną oraz

$$\int_P \sum_{n=0}^\infty \varphi_n = \sum_{n=0}^\infty \int_P \varphi_n.$$

(q) Niech $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{q_1, q_2, \dots\}$ i niech $f_n := \chi_{\{q_1, \dots, q_n\}, [0, 1]}$, $f := \chi_{\mathbb{Q} \cap [0, 1], [0, 1]}$ (funkcja Dirichleta). Wtedy $\int_0^1 f_n = 0$, $f_n \rightarrow f$ punktowo, ale $f \notin \mathcal{R}([0, 1])$.

(r) Niech $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) := \begin{cases} n^2 x, & \text{jeżeli } x \in [0, \frac{1}{n}) \\ -n^2 x + 2n, & \text{jeżeli } x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}) \\ 0, & \text{jeżeli } x \in [\frac{2}{n}, 1] \end{cases}, \quad n \geq 2.$$

Wtedy $f_n \in \mathcal{C}([0, 1])$, $f_n \rightarrow 0$ punktowo, ale $\int_0^1 f_n = 1$, $\int_0^1 f = 0$.

Definicja 7.1.13. Mówimy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}$ ma *miarę Jordana zero* ($|A| = 0$), jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje skończona rodzina przedziałów $P_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \dots, m$, taka że $A \subset \bigcup_{j=1}^m P_j$ i $\sum_{j=1}^m (b_j - a_j) \leq \varepsilon$.

Obserwacja 7.1.14. (a) Zawsze możemy założyć, że $P_1, \dots, P_m$ są parami rozłączne.

- (b) Jeżeli $|A| = 0$, to A jest ograniczony.
- (c) Jeżeli A jest skończony, to $|A| = 0$.
- (d) Jeżeli $|A| = 0$ i $B \subset A$, to $|B| = 0$.
- (e) Jeżeli $|A_1| = \dots = |A_m| = 0$, to $|A_1 \cup \dots \cup A_m| = 0$.
- (f) Jeżeli $\mathbb{R} \ni a_n \rightarrow a_0 \in \mathbb{R}$, to zbiór $\{a_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ ma miarę Jordana zero.
- (g) Jeżeli $|A| = 0$, to $|\bar{A}| = 0$.

Przykład 7.1.15. Zbiór Cantora $C \subset [0, 1]$ ma miarę Jordana zero (zob. Przykład 3.2.4).

Istotnie, wiemy, że $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$, gdzie $C_n = \bigcup_{j=1}^{2^n} C_{n,j}$, gdzie $C_{n,j}$, $j = 1, \dots, 2^n$, są przedziałami domkniętymi, parami rozłącznymi, każdy o długości $\frac{1}{3^n}$. Oznacza to, że suma długości przedziałów wchodzących w skład C_n jest równa $(\frac{2}{3})^n$.

Obserwacja 7.1.16 (Własności całki Riemanna III). (a) Niech $\varphi : P \rightarrow \mathbb{C}$ będzie ograniczona i niech

$$N_P(\varphi) := \{a \in P : \varphi \text{ nie jest ciągła w punkcie } a\}$$

ma miarę Jordana zero. Wtedy $\varphi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$.

Istotnie, możemy założyć, że $f = \varphi : P \rightarrow \mathbb{R}$. Niech $|f| \leq C$ i ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech $[a_j, b_j]$, $j = 1, \dots, m$, będą przedziałami parami rozłącznymi takimi, że $N_P(f) \subset \bigcup_{j=1}^m (a_j, b_j)$ oraz $\sum_{j=1}^m (b_j - a_j) \leq \varepsilon$.

Niech $K := P \setminus \bigcup_{j=1}^m (a_j, b_j)$. Zbiór K jest zwarty i f jest ciągła na K . Zatem jest jednostajnie ciągła.

Niech $\delta > 0$ będzie takie, że $|f(x') - f(x'')| \leq \varepsilon$ dla $x', x'' \in K$, $|x' - x''| \leq \delta$. Rozważmy podział $\pi = (x_0, \dots, x_r)$ przedziału P taki, że $\text{diam } \pi \leq \delta$ oraz $\{a_1, b_1, \dots, a_m, b_m\} \cap P \subset \{x_0, \dots, x_r\}$. Wtedy

$$\begin{aligned} U(f, \pi) - L(f, \pi) &= \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, r\}: \\ [x_{j-1}, x_j] \subset K}} (M_j(f) - m_j(f)) \Delta x_j + \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, r\}: \\ (x_{j-1}, x_j) \subset P \setminus K}} (M_j(f) - m_j(f)) \Delta x_j \\ &\leq \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, r\}: \\ [x_{j-1}, x_j] \subset K}} \varepsilon \Delta x_j + \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, r\}: \\ (x_{j-1}, x_j) \subset P \setminus K}} 2C \Delta x_j \leq \varepsilon(|P| + 2C). \end{aligned}$$

(b) Niech $\varphi, \psi : P \rightarrow \mathbb{C}$ będą ograniczone. Jeżeli zbiór $D_P(\varphi, \psi) := \{a \in P : \varphi(a) \neq \psi(a)\}$ ma miarę Jordana zero, to $\varphi \in \mathcal{R}(P) \iff \psi \in \mathcal{R}(P)$. Ponadto, $\int_P \varphi = \int_P \psi$.

Istotnie, możemy założyć, że $f = \varphi, g = \psi : P \rightarrow \mathbb{R}$. Przypuśćmy, że $|f|, |g| \leq C$ oraz $g \in \mathcal{R}(P)$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech $[a_j, b_j]$, $j = 1, \dots, m$, będą przedziałami parami rozłącznymi takimi, że $D_P(f, g) \subset \bigcup_{j=1}^m (a_j, b_j)$ oraz $\sum_{j=1}^m (b_j - a_j) \leq \varepsilon$. Niech $K := P \setminus \bigcup_{j=1}^m (a_j, b_j)$. Rozważmy podział $\pi = (x_0, \dots, x_r)$ przedziału P taki, że $\{a_1, b_1, \dots, a_m, b_m\} \cap P \subset \{x_0, \dots, x_r\}$. Wtedy

$$\begin{aligned} U(f, \pi) - L(f, \pi) &= \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, r\}: \\ [x_{j-1}, x_j] \subset K}} (M_j(f) - m_j(f)) \Delta x_j + \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, r\}: \\ (x_{j-1}, x_j) \subset P \setminus K}} (M_j(f) - m_j(f)) \Delta x_j \\ &\leq U(g, \pi) - L(g, \pi) + 2C\varepsilon, \end{aligned}$$

skąd łatwo wynika, że $f \in \mathcal{R}(P)$. Ponadto,

$$\left| \int_P f - \int_P g \right| \leq \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, r\}: \\ [x_{j-1}, x_j] \subset P \setminus K}} \int_{[x_{j-1}, x_j]} |f - g| \leq 2C\varepsilon,$$

co dowodzi równości obu całek.

7.2. Pierwotne

(c) Relacja $\varphi \sim \psi : \iff D_P(\varphi, \psi)$ ma miarę Jordana zero, jest relacją równoważnościową w $\mathcal{R}(P, \mathbb{C})$; całka Riemanna jest dobrze określonym operatorem liniowym $\mathcal{R}(P, \mathbb{C})/\sim \longrightarrow \mathbb{C}$.

(d) Jeżeli $0 \leq f \in \mathcal{R}(P)$ i $\int_P f = 0$, to zbiór $Z_f := \{x \in P : f(x) > 0\}$ jest przeliczalną sumą zbiorów miary Jordana zero.

Wystarczy pokazać, że dla dowolnego $c > 0$ zbiór $A := \{x \in P : f(x) \geq c\}$ ma miarę Jordana zero. Weźmy $\varepsilon > 0$ i podział $\pi = (x_0, \dots, x_m)$ taki, że $U(f, \pi) \leq \varepsilon$. Wtedy

$$\varepsilon \geq U(f, \pi) \geq c \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, m\}: \\ A \cap [x_{j-1}, x_j] \neq \emptyset}} (x_j - x_{j-1}).$$

Wynika stąd, że A można pokryć skończoną liczbą przedziałów o łącznej długości $\leq \varepsilon/c$.

(e) Zbiór Z_f w (d) może nie mieć miary Jordana zero. Dla przykładu, niech $P \cap \mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \dots\}$ i niech $f : P \longrightarrow [0, 1]$, $f(x) := \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{j}, & \text{jeżeli } x = r_j \end{cases}$. Oczywiście, zbiór $Z_f = P \cap \mathbb{Q}$ nie ma objętości zero, ale $\int_P f = 0$. Istotnie, dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ rozważmy podział $\pi = (x_0, \dots, x_m)$ ($m \geq k$) taki, że $\sum_{j \in I} (x_j - x_{j-1}) \leq \frac{1}{k}$, gdzie $I := \{j \in \{1, \dots, m\} : [x_{j-1}, x_j] \cap \{r_1, \dots, r_k\} \neq \emptyset\}$. Wtedy

$$U(f, \pi) = \sum_{j \in I} M_j(f) \Delta x_j + \sum_{j \notin I} M_j(f) \Delta x_j \leq \sum_{j \in I} \Delta x_j + \sum_{j \notin I} \frac{1}{k+1} \Delta x_j \leq \frac{1}{k} + \frac{|P|}{k+1}.$$

Obserwacja 7.1.17. (a) W przyszłości poznamy następujące ważne twierdzenie: $\varphi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C}) \iff N_P(\varphi)$ ma miarę Lebesgue'a zero, tzn. dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje co najwyżej przeliczalna rodzina przedziałów $P_j = [a_j, b_j]$, $j \in I$, taka że $N_P(\varphi) \subset \bigcup_{j \in I} P_j$ i $\sum_{j \in I} (b_j - a_j) \leq \varepsilon$.

(b) Oczywiście, każdy zbiór miary Jordana zero ma miarę Lebesgue'a zero.

(c) Zauważmy, że jeżeli $A_k \subset \mathbb{R}$ jest zbiorem o mierze Lebesgue'a zero, $k \in \mathbb{N}$, to zbiór $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ ma miarę Lebesgue'a zero.

Istotnie, niech $\varepsilon > 0$ i niech $P_{k,j} = [a_{k,j}, b_{k,j}]$, $j \in I(k)$, będzie co najwyżej przeliczalną rodziną przedziałów takich, że $A_k \subset \bigcup_{j \in I(k)} P_{k,j}$ oraz $\sum_{j \in I(k)} (b_{k,j} - a_{k,j}) \leq \frac{\varepsilon}{2^k}$. Wtedy $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j \in I(k)} P_{k,j}$ oraz

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j \in I(k)} (b_{k,j} - a_{k,j}) \leq \varepsilon.$$

7.2. Pierwotne

W tym podrozdziale $P = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$.

Definicja 7.2.1. Powiemy, że funkcja $F : P \longrightarrow \mathbb{R}$ jest *pierwotną* lub *całką nieoznaczoną* funkcji $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ jeżeli:

- F jest ciągłą,
- istnieje co najwyżej przeliczalny zbiór $S \subset P$ taki, że $F'(x)$ istnieje oraz $F'(x) = f(x)$ dla dowolnego $x \in P \setminus S$.

Piszemy wtedy $F(x) = \int f(x)dx + C$, lub też $F(x) = \int f(x)dx$ pamiętając, że do F zawsze można dodać stałą. Będziemy pisać $S = S_F$, choć oczywiście zbiór S nie jest wyznaczony jednoznacznie.

Przykład 7.2.2. Funkcja $F(x) := \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$, jest pierwotną funkcji $f(x) := \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } x = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}, & \text{jeżeli } x \neq 0 \end{cases}$ ($S_F = \{0\}$).

Obserwacja 7.2.3. (a) Jeżeli F_j jest pierwotną funkcji f_j , $j = 1, 2$, to $\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2$ ($\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$) jest pierwotną funkcji $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ ($S_{\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2} \subset S_{F_1} \cup S_{F_2}$).

(b) Jeżeli F_1, F_2 są pierwotnymi funkcji f , to $F_1 - F_2 \equiv \text{const}$ (por. Wniosek 5.4.3).

(c) Równość $\int f(x)dx = \int g(x)dx$, $x \in P$, będziemy zawsze rozumieć z dokładnością do stałej.

(d) Jeżeli $f, g : P \longrightarrow \mathbb{R}$ różnią się na zbiorze co najwyżej przeliczalnym i F jest pierwotną f , to F jest również pierwotną g .

Twierdzenie 7.2.4. Niech F będzie pierwotną funkcji f . Załóżmy, że funkcja f jest ciągła w pewnym punkcie $c \in P$. Wtedy $F'(c)$ istnieje oraz $F'(c) = f(c)$. W szczególności, jeżeli $f \in \mathcal{C}(P)$, to $F \in \mathcal{D}(P)$ oraz $F'(x) = f(x)$, $x \in P$.

Dowód. Niech $S := S_F$. Na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych (Wniosek 5.4.4) mamy

$$\left| \frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) \right| \leq \frac{1}{|h|} (\sup\{|F'(\xi) - f(c)| : \xi \in [c, c+h] \setminus S\})|h| \\ \leq \sup\{|f(\xi) - f(c)| : \xi \in [c, c+h]\} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \quad \square$$

Obserwacja 7.2.5 (Pierwotne funkcji elementarnych). Uwaga: W każdym przedziale, z którego składa się zbiór po prawej stronie wzoru, do wzoru na pierwotną można dodać dowolną stałą.

$$\begin{aligned} \int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \neq 0, n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}; & \int x^\alpha dx &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad x > 0, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}; \\ \int \frac{dx}{x} &= \ln|x|, \quad x \neq 0; & \int e^x dx &= e^x, \quad x \in \mathbb{R}; \\ \int \sin x dx &= -\cos x, \quad x \in \mathbb{R}; & \int \cos x dx &= \sin x, \quad x \in \mathbb{R}; \\ \int \frac{dx}{\cos^2 x} &= \tan x, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}; & \int \frac{dx}{\sin^2 x} &= -\cot x, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}; \\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin x, \quad x \in (-1, 1); & \int \frac{dx}{1+x^2} &= \arctan x, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Twierdzenie 7.2.6 (Wzór na całkowanie przez części I). Jeżeli $f, g \in \mathcal{C}^1(P)$, to

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx, \quad x \in P,$$

w tym sensie, że $\int f'(x)g(x)dx$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $\int f(x)g'(x)dx$ istnieje i ponadto zachodzi powyższa równość (z dokładnością do stałej).

Dowód. Przypuśćmy, że $H'(x) = f(x)g'(x)$, $x \in P$ (korzystamy z Twierdzenia 7.2.4). Wtedy $(fg - H)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f(x)g'(x) = f'(x)g(x)$, $x \in P$. Podobnie, jeżeli $\int f'(x)g(x)$ istnieje. $\square$

Przykład 7.2.7. (a) $\int x \cos x dx = \int x(\sin x)' dx = x \sin x - \int x' \sin x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x$.

Uwaga: Jeżeli źle zaczniemy stosować wzór na całkowanie przez części, to sytuacja, zamiast się uprościć, może się skomplikować, np. $\int x \cos x dx = \int (\frac{x^2}{2})' \cos x dx = \frac{x^2}{2} \cos x + \int \frac{x^2}{2} \sin x dx$.

(b) $\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = (x-1)e^x$.

(c) $\int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x(\ln x - 1)$.

(d) $\int x^\alpha \ln x dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ln x - \int \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \frac{1}{x} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} (\ln x - \frac{1}{\alpha+1})$, $\alpha \neq -1$.

(e) $I := \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - (-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx) = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$. Stąd $I = e^x(\sin x + \cos x) - I$, a więc $I = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x)$. Przykład ten ilustruje ważną technikę obliczania całek nieoznaczonych, w której problem obliczenia całki nieoznaczonej $I = \int f(x)dx$ sprowadza się do ułożenia pewnego równania funkcyjnego spełnianego przez tę całkę.

(f) $\int e^x \sin x dx = \text{ĆWICZENIE}$.

(g) Niech $I_n := \int \sin^n x dx$, $x \in \mathbb{R}$. Dla $n = 2$ mamy: $I_2 = \int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x$. Wzór rekurencyjny $I_n \rightsquigarrow I_{n-2}$:

$$\begin{aligned} I_n &= \int \sin^{n-1} x (-\cos x)' dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)(I_{n-2} - I_n). \end{aligned}$$

Wynika stąd, że $I_n = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.

Twierdzenie 7.2.8 (Wzór na całkowanie przez podstawienie I). *Niech $f \in \mathcal{C}(P)$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(Q)$, $\varphi(Q) \subset P$. Wtedy*

$$\left(\int f(t) dt \right) \Big|_{t=\varphi(x)} = \int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx, \quad x \in Q,$$

w tym sensie, że:

- jeżeli $\int f(t) dt$ istnieje, to $\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx$ istnieje i zachodzi powyższa równość;
- jeżeli $\varphi : Q \rightarrow P$ jest bijekcją, $\varphi'(x) \neq 0$, $x \in Q$, oraz $\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx$ istnieje, to $\int f(t) dt$ istnieje i zachodzi powyższa równość.

Dowód. Niech $F'(t) = f(t)$, $t \in P$ (korzystamy z Twierdzenia 7.2.4). Wtedy $(F \circ \varphi)'(x) = F'(\varphi(x)) \varphi'(x)$, $x \in Q$.

Niech $H'(x) = f(\varphi(x)) \varphi'(x)$, $x \in Q$. Wtedy $(H \circ \varphi^{-1})'(t) = H'(\varphi^{-1}(t)) (\varphi^{-1})'(t) = H'(\varphi^{-1}(t)) \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))} = f(t) \varphi'(\varphi^{-1}(t)) \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))} = f(t)$. $\square$

Przykład 7.2.9. (a) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int_{t=\sqrt{x}}^{t=\sqrt{x}} 2e^t dt = 2e^{\sqrt{x}}$.

(b) $\int e^{\sin x} \cos x dx = \int_{t=\cos x}^{t=\sin x} e^t dt = e^t = e^{\sin x}$.

(c) $\int x^2 \sqrt{1+x^3} dx = \int_{t=1+x^3}^{t=1+x^3} \frac{1}{3} \sqrt{t} dt = \frac{2}{9} t^{3/2} = \frac{2}{9} (\sqrt{1+x^3})^3$.

Przykład 7.2.10 (Całka z pochodnej logarytmicznej). Niech $\varphi : P \rightarrow \mathbb{R}_*$ będzie funkcją różniczkowalną. Wtedy $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \left(\int \frac{1}{t} dt \right) \Big|_{t=\varphi(x)} = \ln |\varphi(x)|$, $x \in P$.

Dla przykładu: $\int \operatorname{tg} x dx = - \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = - \ln |\cos x|$, $\int \operatorname{ctg} x dx = \operatorname{Cwiczenie}$.

Obserwacja 7.2.11. Istnieje wiele klas funkcji f , dla których są znane efektywne metody obliczania całki nieoznaczonej $\int f(x) dx$. Jest tak np. gdy f jest funkcją wymierną. Jest jednak wiele *całek nieelementarnych*, np. $\int \frac{e^x}{x} dx$. Przypomnijmy sobie, że całka $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2e^{\sqrt{x}}$ jest elementarna.

Inne całki nieelementarne to np.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx, \quad \int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{1}{\ln x} dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{\cos x}{x} dx.$$

7.3. Podstawowe twierdzenie rachunku całkowego

W tym podrozdziale $P = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$.

Twierdzenie 7.3.1. *Niech $f \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$, $a \in P$. Wtedy funkcja*

$$F : P \rightarrow \mathbb{C}, \quad F(x) := \int_a^x f, \quad x \in P,$$

spełnia warunek Lipschitza. W szczególności, $F \in \mathcal{C}(P, \mathbb{C})$.

Przyjmujemy, że $\int_a^x f := - \int_x^a f$ dla $x < a$ oraz $\int_a^a f = 0$.

Dowód. Odnajdujemy, że F jest poprawnie określona. Niech $|f| \leq C$ i niech $x', x'' \in P$, $x' < x''$. Wtedy

$$|F(x') - F(x'')| = \left| \int_a^{x'} f - \int_a^{x''} f \right| = \left| \int_{x'}^{x''} f \right| \leq C(x'' - x'). \quad \square$$

Twierdzenie 7.3.2. *Dla $f \in \mathcal{C}(P)$ niech*

$$F(x) := \int_a^x f, \quad x \in P.$$

Wtedy F jest pierwotną funkcji f .

Dowód. Ustalmy $x_0 \in P$ oraz $h \neq 0$ takie, że $x_0 + h \in P$. Wtedy, na podstawie twierdzenia o średniej całkowitej mamy

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f}{h} = f(x_0 + \theta(h)h),$$

gdzie $\theta(h) \in [0, 1]$. Wobec ciągłości funkcji f w punkcie x_0 mamy $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + \theta(h)h) = f(x_0)$. $\square$

Twierdzenie 7.3.3 (Podstawowe twierdzenie rachunku całkowego I). *Niech $f \in \mathcal{C}(P)$ i niech F będzie pierwotną funkcji f . Wtedy*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) =: F|_a^b.$$

Dowód. Niech $G(x) := \int_a^x f$, $x \in P$. Na mocy poprzedniej propozycji G jest pierwotną funkcji f , a zatem istnieje stała $c \in \mathbb{R}$ taka, że $F(x) = G(x) + c$, $x \in P$. W szczególności, $F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \int_a^b f$. $\square$

Przykład 7.3.4 (Zastosowania). (a) $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x|_1^2 = \ln 2$. Z drugiej strony $M(\frac{1}{x}, \pi_n, \xi_n) \rightarrow \int_1^2 \frac{dx}{x}$, gdzie $\pi_n := (1, 1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{2}{n}, \dots, 1 + \frac{n}{n})$, $\xi_n := (1 + \frac{1}{n}, \dots, 1 + \frac{n}{n})$. W taki razie:

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{n+j} \rightarrow \ln 2.$$

(b) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x|_0^1 = \frac{\pi}{4}$. Z drugiej strony: $M(\frac{1}{1+x^2}, \pi_n, \xi_n) \rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, gdzie $\pi_n := (0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n})$, $\xi_n := (\frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n})$. Stąd:

$$\sum_{j=1}^n \frac{n}{n^2 + j^2} \rightarrow \frac{\pi}{4}.$$

(c) (Zob. Przykład 5.6.11(d)) Niech $f(x) := \ln(1+x)$, $x > -1$. Wtedy $f'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$, przy czym szereg jest zbieżny lokalnie normalnie w $(-1, 1)$. Korzystając z Twierdzenia 7.3.2 oraz z Obserwacji 7.1.12(p), dostajemy

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}, \quad |x| < 1.$$

(d) Korzystając z tych samych metod dostajemy dla $|x| < 1$:

$$\arctg x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Definicja 7.3.5. Powiemy, że funkcja $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ jest:

- *schodkowa* ($f \in \mathcal{S}(P)$), jeżeli istnieje podział $\pi = (x_0, \dots, x_m)$ przedziału P taki, że funkcja $f|_{(x_{j-1}, x_j)} \equiv \text{const} =: c_j$, $j = 1, \dots, m$;
- *prosta* ($f \in \mathcal{P}(P)$), jeżeli dla dowolnego $x \in P$ istnieją skończone granice jednostronne $f(x+)$ i $f(x-)$ (przy czym, jak zwykle, na końcach przedziału jedną z granic pomijamy).
- *kawałkami klasy $\mathcal{C}^k$* ($f \in \mathcal{C}^k(P)$), gdzie $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty, \omega\}$, jeżeli istnieje podział $\pi = (x_0, \dots, x_m)$ przedziału P taki, że $f|_{(x_{j-1}, x_j)}$ przedłuża się do pewnej funkcji klasy $\mathcal{C}^k([x_{j-1}, x_j])$, $1 \leq j \leq m$. Kładziemy $\mathcal{C}' := \mathcal{C}'^0$.

Obserwacja 7.3.6. (a) Jeżeli $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to $f \in \mathcal{C}^k([a, b])$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje podział $\pi = (x_0, \dots, x_m)$ odcinka $[a, b]$ taki, że $f|_{[x_{j-1}, x_j]} \in \mathcal{C}^k([x_{j-1}, x_j])$, $1 \leq j \leq m$.

(b) Jeżeli $f \in \mathcal{C}^1(P)$, to $f' \in \mathcal{C}'(P)$. Istotnie, jeżeli podział $\pi = (x_0, \dots, x_m)$ jest taki, jak w Definicji 7.3.5, to f' jest poprawnie określona w zbiorze $P \setminus \{x_0, \dots, x_m\}$ oraz $f|_{(x_{j-1}, x_j)}$ przedłuża się do funkcji ciągłej na $[x_{j-1}, x_j]$, $1 \leq j \leq m$. Wartości f' w punktach $x_0, \dots, x_m$ możemy ustalić dowolnie.

(c) $\mathcal{C}(P) \subsetneq \mathcal{C}'(P) \subsetneq \mathcal{B}(P)$.

(d) Każda funkcja monotoniczna jest prosta.

(e) $\mathcal{S}(P) \subsetneq \mathcal{C}'(P) \subsetneq \mathcal{P}(P)$.

(f) $\mathcal{S}(P)$, $\mathcal{C}^k(P)$ i $\mathcal{P}(P)$ są $\mathbb{R}$ -przestrzeniami wektorowymi.

(g) Jeżeli $f \in \mathcal{C}(P)$, $g \in \mathcal{P}(P)$, to $fg \in \mathcal{P}(P)$.

Twierdzenie 7.3.7. Niech $f : P \rightarrow \mathbb{R}$. Wtedy następujące warunki są równoważne:

- (i) $f \in \mathcal{P}(P)$;
- (ii) istnieje ciąg $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{S}(P)$ taki, że $f_n \rightarrow f$ jednostajnie na P .

Dowód. (i) $\implies$ (ii): Wystarczy pokazać, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja $g \in \mathcal{S}(P)$ taka, że $|f(t) - g(t)| \leq \varepsilon$, $t \in P$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Dla dowolnego $c \in P$ istnieje liczba $\delta = \delta(c) > 0$ taka, że $|f(t) - f(u)| \leq \varepsilon$ dla $t, u \in (c - \delta, c) \cap P$ lub $t, u \in (c, c + \delta) \cap P$ (ĆWICZENIE). Wobec zwartości przedziału P istnieją punkty $c_1, \dots, c_r \in P$, $a = c_1 < \dots < c_r = b$ takie że $P \subset \bigcup_{i=1}^r (c_i - \delta(c_i), c_i + \delta(c_i))$.

Położmy dla uproszczenia $\delta_i := \delta(c_i)$, $i = 1, \dots, r$. Niech $\pi = (x_0, \dots, x_m)$, będzie takim podziałem P , że $\{x_0, \dots, x_m\} = \{c_i, c_i - \delta_i, c_i + \delta_i : i = 1, \dots, r\} \cap P$. Zdefiniujmy $g : P \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(t) := \begin{cases} f(\frac{x_{j-1}+x_j}{2}), & \text{jeżeli } t \in (x_{j-1}, x_j), j = 1, \dots, m \\ f(x_j), & \text{jeżeli } t = x_j, j = 0, \dots, m \end{cases}.$$

Oczywiście $g \in \mathcal{S}(P)$. Jeżeli $x_{j-1} \in (c_i - \delta_i, c_i + \delta_i)$, to $(x_{j-1}, x_j) \subset (c_i - \delta_i, c_i) \cap P$ lub $(x_{j-1}, x_j) \subset (c_i, c_i + \delta_i) \cap P$. Stąd $|f(t) - f(\frac{x_{j-1}+x_j}{2})| \leq \varepsilon$, $t \in (x_{j-1}, x_j)$. W konsekwencji, $|f(t) - g(t)| \leq \varepsilon$, $t \in P$.

(ii) $\implies$ (i): Niech teraz $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$, gdzie $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{S}(P)$ i zbieżność jest jednostajna. Niech $c \in [a, b]$ i rozważymy granicę prawostronną (granicę lewostronną pozostawiamy jako ĆWICZENIE). Niech $g_n : [c, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g_n(x) := \begin{cases} f_n(c+), & \text{jeżeli } x = c \\ f_n(x), & \text{jeżeli } x \in (c, b] \end{cases}$. Funkcja g_n jest ciągła w punkcie c . Ponieważ ciąg $(f_n)_{n=1}^\infty$ spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego, zatem ciąg $(f_n(c+))_{n=1}^\infty$ spełnia zwykły warunek Cauchy'ego (ĆWICZENIE). Zdefiniujmy $g : [c, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) := \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(c+), & \text{jeżeli } x = c \\ f(x), & \text{jeżeli } x \in (c, b] \end{cases}$. Wtedy $g_n \rightarrow g$ jednostajnie na $[c, b]$. Stąd na podstawie twierdzenia o zachowaniu ciągłości przy przejściu do granicy jednostajnej (por. Twierdzenie 4.4.1), mamy $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = g(c)$, co oznacza w szczególności, że $f'(c+)$ istnieje (i równa się $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(c+)$). $\square$

Wniosek 7.3.8. $\mathcal{P}(P) \subset \mathcal{B}(P)$.

Twierdzenie 7.3.9. (a) Każda funkcja z $\mathcal{S}(P)$ ma pierwotną.

(b) Każda funkcja z $\mathcal{P}(P)$ ma pierwotną.

Przykład 7.3.10. Funkcja $F(x) := \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$, jest pierwotną funkcji $f(x) := \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } x = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}, & \text{jeżeli } x \neq 0 \end{cases}$, ale $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = +\infty$. Zatem f ma pierwotną, ale $f \notin \mathcal{P}(P)$.

Dowód Twierdzenia 7.3.9. (a) Niech $f \in \mathcal{S}(P)$ i niech $\pi = (x_0, \dots, x_m)$, $c_1, \dots, c_m$ będą jak w definicji przestrzeni $\mathcal{S}(P)$. Mamy $f = f_1 + \dots + f_m$ na $P \setminus \{x_0, \dots, x_m\}$, gdzie $f_j := c_j \chi_{(x_{j-1}, x_j), P}$. Wystarczy teraz zauważyć, że każda funkcja f_j ma pierwotną. Istotnie, wystarczy wziąć $F_j(x) :=$

$$\begin{cases} x_{j-1}, & \text{jeżeli } x \in [a, x_{j-1}] \\ x, & \text{jeżeli } x \in (x_{j-1}, x_j) \\ x_j, & \text{jeżeli } x \in [x_j, b] \end{cases}.$$

(b) Niech $f \in \mathcal{P}(P)$. Na podstawie Twierdzenia 7.3.7 istnieje ciąg $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{S}(P)$ taki, że $f_n \rightarrow f$ jednostajnie na P . Na podstawie (a) każda z funkcji f_n ma pierwotną F_n . Możemy założyć, że $F_n(a) = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Niech S_{F_n} będzie zbiorem osobliwym dla F_n . Wtedy zbiór $S := \bigcup_{n=1}^\infty S_{F_n}$ jest co najwyżej przeliczalny. Pokażemy, że $F_n \rightarrow F$ jednostajnie na P oraz, że $F'(x) = f(x)$ dla $x \in P \setminus S$. Dowód będzie analogiczny do dowodu twierdzenia o różniczkowaniu ciągu wyraz po wyrazie (Twierdzenie 5.7.1).

Dla dowodu jednostajnej zbieżności ciągu $(F_n)_{n=1}^\infty$ pokażemy, że spełnia on jednostajny warunek Cauchy'ego. Niech $f_{m,n} := f_m - f_n$, $F_{m,n} := F_m - F_n$, $m > n$. Wiemy, że $F'_{m,n} = f_{m,n}$ na $P \setminus S$ oraz $\sup\{|f_{m,n}(\xi)| : \xi \in P\} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Na podstawie Wniosku 5.4.4, dla $x \in P$ mamy

$$\begin{aligned} |F_{m,n}(x)| &= |(F_{m,n}(x) - F_{m,n}(a))| \leq (\sup\{|F'_{m,n}(\xi)| : \xi \in [a, x] \setminus S\})|x - a| \\ &\leq (\sup\{|f_{m,n}(\xi)| : \xi \in P\})(b - a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Niech $F := \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n$. Dla dowodu tego, że F jest pierwotną f ustalmy $c \in (a, b) \setminus S$. Chcemy pokazać,

$$\text{że } F'(c) = f(c). \text{ Niech } \varphi_n, \varphi : P - c \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_n(h) := \begin{cases} \frac{F_n(c+h) - F_n(c)}{h} - f_n(c), & \text{jeżeli } h \neq 0 \\ 0, & \text{jeżeli } h = 0 \end{cases},$$

$\varphi(h) := \begin{cases} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c), & \text{jeżeli } h \neq 0 \\ 0, & \text{jeżeli } h = 0 \end{cases}$. Zauważmy, że φ_n jest ciągła w punkcie 0 oraz $\varphi_n \rightarrow \varphi$ punktowo na $P - c$. Jeżeli pokażemy, że ta zbieżność jest jednostajna, to na podstawie twierdzenia o zachowaniu ciągłości przy przejściu do granicy jednostajnej wnioskujemy, że φ jest ciągła w punkcie 0, a to oznacza, że $F'(c) = f(c)$. Liczymy

$$\begin{aligned} |\varphi_m(h) - \varphi_n(h)| &= \frac{1}{|h|} |F_{m,n}(c+h) - F_{m,n}(c) - F'_{m,n}(c)h| \\ &\leq \sup\{|F'_{m,n}(\xi) - F'_{m,n}(c)| : \xi \in [c, c+h] \setminus S\} \leq 2 \sup\{|f_{m,n}(\xi)| : \xi \in P\} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad \square \end{aligned}$$

Twierdzenie 7.3.11 (Podstawowe twierdzenie rachunku całkowego II). (a) Jeżeli $f \in \mathcal{S}(P)$, to $f \in \mathcal{R}(P)$ oraz $\int_P f = F(b) - F(a)$, gdzie F jest dowolną pierwotną f .

(b) Jeżeli $f \in \mathcal{P}(P)$, to $f \in \mathcal{R}(P)$ oraz $\int_P f = F(b) - F(a)$, gdzie F jest dowolną pierwotną f . W szczególności, wynik jest prawdziwy dla $f \in \mathcal{C}(P)$ (co daje Twierdzenie 7.3.3).

Obserwacja 7.3.12. Dla funkcji $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ mającej pierwotną F definiuje się całkę Cauchy'ego $\int_P f(x)dx := F(b) - F(a)$. Twierdzenie 7.3.11(b) mówi, że dla $f \in \mathcal{P}(P)$ całka Cauchy'ego pokrywa się z całką Riemanna — zob. Obserwacja 7.6.2(f).

Dowód Twierdzenia 7.3.11. Zauważmy, że liczba $F(b) - F(a)$ nie zależy od wyboru pierwotnej funkcji f .

(a) Niech $x_j, c_j, f_j, F_j, j = 1, \dots, m$, będą jak w dowodzie Twierdzenia 7.3.9(a). Wystarczy udowodnić wynik dla każdej funkcji f_j z osobna. Całkowalność funkcji f_j jest oczywista. Ponadto, $\int_P f_j = c_j(x_j - x_{j-1})$. Z drugiej strony, $F_j(b) - F_j(a) = c_j x_j - c_j x_{j-1} = c_j(x_j - x_{j-1}) = \int_P f_j$.

(b) Na podstawie Twierdzenia 7.3.7 istnieje ciąg $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{S}(P)$ taki, że $f_n \rightarrow f$ jednostajnie na P . Na podstawie (a) $f_n \in \mathcal{R}(P)$ oraz $\int_P f_n = F_n(b) - F_n(a)$, gdzie F_n jest pierwotną f_n . Możemy założyć, że $F_n(a) = 0, n \in \mathbb{N}$. Z własności całki Riemanna wiemy, że wtedy $f \in \mathcal{R}(P)$ oraz $\int_P f_n \rightarrow \int_P f$.

Z dowodu Twierdzenia 7.3.11 wiemy, że $F_n \rightarrow F$ jednostajnie na P oraz, że F jest pierwotną f . W takim razie $\int_P f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_P f_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (F_n(b) - F_n(a)) = F(b) - F(a)$. $\square$

Twierdzenie 7.3.13 (Wzór na całkowanie przez części II). Niech $u, v \in \mathcal{P}(P)$ i niech U (odp. V) będzie pierwotną dla u (odp. v). Wtedy

$$\int_a^b U(x)v(x)dx = (UV)|_a^b - \int_a^b u(x)V(x)dx.$$

W szczególności, jeżeli $u = f', v = g'$, gdzie $f, g \in \mathcal{C}^1(P)$, to dostajemy klasyczny wzór na całkowanie przez części (Twierdzenie 7.2.6)

$$\int_a^b f'g = (fg)|_a^b - \int_a^b fg'.$$

Dowód. Na wstępie zauważmy, że $Uv, uV, UV \in \mathcal{P}(P)$ (ponieważ U i V są ciągłe), a zatem obie całki istnieją. Mamy $(UV)' = U'V + UV' = uV + Uv$ na $P \setminus (S_U \cup S_V)$. Stąd

$$\int_a^b u(x)V(x)dx + \int_a^b U(x)v(x)dx = \int_a^b (u(x)V(x) + U(x)v(x))dx = (UV)|_a^b. \quad \square$$

Twierdzenie 7.3.14 (Wzór na całkowanie przez podstawienie II). *Niech $f \in \mathcal{C}(P)$, $u \in \mathcal{P}(Q)$, gdzie $Q = [p, q] \subset \mathbb{R}$, $p < q$. Niech U będzie pierwotną funkcji u . Załóżmy, że $U(Q) \subset P$. Wtedy*

$$\int_{U(p)}^{U(q)} f(x) dx = \int_p^q f(U(t)) u(t) dt.$$

W szczególności, jeżeli $u = \varphi'$, gdzie $\varphi \in \mathcal{C}^1(Q)$, $\varphi(Q) \subset P$, to dostajemy klasyczny wzór na całkowanie przez podstawienie (Twierdzenie 7.2.8)

$$\int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f = \int_p^q (f \circ \varphi) \cdot \varphi'.$$

Dowód. Zauważmy, że $(f \circ U)u \in \mathcal{P}(Q)$ (ponieważ $f \circ U$ jest ciągła), a zatem całka po prawej stronie jest dobrze określona. Niech F będzie pierwotną funkcji f . Przypomnijmy, że $F \in \mathcal{D}(P)$ (Twierdzenie 7.2.4). Mamy $(F \circ U)'(t) = F'(U(t))U'(t) = f(U(t))u(t)$, $t \in Q \setminus S_U$. Stąd

$$\int_p^q f(U(t))u(t) dt = (F \circ U)|_p^q = \int_{U(p)}^{U(q)} f(x) dx. \quad \square$$

7.4. Długość krzywej

Definicja 7.4.1. *Długością krzywej $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ w przestrzeni metrycznej (X, ϱ) nazywamy liczbę $L(\gamma) \in [0, +\infty]$ daną wzorem: $L(\gamma) := \sup_{\pi} \{S(\gamma, \pi)\}$, gdzie $S(\gamma, \pi) := \sum_{j=1}^m \varrho(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j))$, a supremum jest brane po wszystkich podziałach $\pi = (t_0, \dots, t_m)$ przedziału $[a, b]$. Zauważmy, że jeżeli $\pi' \preceq \pi$, to $S(\gamma, \pi') \geq S(\gamma, \pi)$. Krzywą γ nazywamy *prostowalną*, gdy $L(\gamma) < +\infty$.*

Obserwacja 7.4.2. (a) $L(\gamma)$ nie zależy od parametryzacji γ (i dlatego możemy zawsze ograniczyć się do krzywych $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$) ⁽²⁾,

(b) $L(\ominus \gamma) = L(\gamma)$, tzn. długość krzywej nie zależy od orientacji ⁽³⁾,

(c) $L(\gamma_1 \oplus \gamma_2) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$ ⁽⁴⁾.

Lemat 7.4.3. *Dla każdego normalnego ciągu podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ przedziału $[0, 1]$ mamy:*

$$S(\gamma, \pi_k) \rightarrow L(\gamma).$$

Dowód. (Por. Obserwacja 7.1.6(f).) Weźmy $\ell < L(\gamma)$ i niech $\pi' = (t'_0, \dots, t'_{m_0})$ będzie podziałem przedziału $[a, b]$ takim, że $S(\gamma, \pi') > \ell$. Dla $0 < \delta < \text{diam } \pi'$ weźmy dowolny podział $\pi = (t_0, \dots, t_m)$ odcinka $[a, b]$ o średnicy $\leq \delta$. Punkty $t_0, \dots, t_m$ dzielimy na m_0 -grup, zaliczając do i -tej grupy te punkty t_j , dla których $t'_{i-1} \leq t_j < t'_i$, $i = 1, \dots, m_0 - 1$, a do grupy m_0 — pozostałą „końcówkę” punktów. Punkty i -tej grupy numerujemy kolejno $t_{n_i}, \dots, t_{n_{i+1}-1}$, gdzie $n_1 = 0$, $n_{m_0+1} = m + 1$. Wobec nierówności trójkąta mamy:

$$\begin{aligned} L &\geq S(\gamma, \pi) = \sum_{i=1}^{m_0} \sum_{j=n_i}^{n_{i+1}-1} \varrho(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j)) \\ &\geq \sum_{i=1}^{m_0} \left(\varrho(\gamma(t'_i), \gamma(t'_{i-1})) - \varrho(\gamma(t'_{i-1}), \gamma(t_{n_i})) - \varrho(\gamma(t_{n_{i+1}-1}), \gamma(t'_i)) \right) \\ &\geq S(\gamma, \pi') - 2m_0\omega_\gamma(\delta) > \ell - 2m_0\omega_\gamma(\delta). \end{aligned}$$

Zauważmy, że z jednostajnej ciągłości odwzorowania γ wynika, że $\omega_\gamma(\delta) \rightarrow 0$ przy $\delta \rightarrow 0$. W konsekwencji, dla dowolnego normalnego ciągu podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ mamy

$$L \geq \limsup_{k \rightarrow +\infty} S(\gamma, \pi_k) \geq \liminf_{k \rightarrow +\infty} S(\gamma, \pi_k) \geq \ell,$$

co przy $\ell \nearrow L$ daje tezę. $\square$

⁽²⁾ Przypomnijmy, że zmiana parametryzacji krzywej $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ polega na zastąpieniu jej przez krzywą $\gamma \circ \sigma : [c, d] \rightarrow X$, gdzie $\sigma : [c, d] \rightarrow [a, b]$ jest pewną bijekcją rosnącą.

⁽³⁾ Przypomnijmy, że dla krzywej $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ kładziemy: $(\ominus \gamma)(t) := \gamma(1 - t)$.

⁽⁴⁾ Przypomnijmy, że dla krzywych $\gamma_j : [0, 1] \rightarrow X$, $j = 1, 2$, takich, że $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ definiujemy: $(\gamma_1 \oplus \gamma_2)(t) := \gamma_1(2t)$ dla $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ i $(\gamma_1 \oplus \gamma_2)(t) := \gamma_2(2t - 1)$ dla $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$.

W dalszym ciągu będziemy zainteresowani krzywymi $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ i sytuacją, gdy na $\mathbb{R}^n$ rozważamy odległość euklidesową.

Definicja 7.4.4. Droga to krzywa $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ taka, że $\gamma_j \in \mathcal{C}'([a, b])$, $j = 1, \dots, n$ (zob. Definicja 7.3.5).

Twierdzenie 7.4.5. Dowolna droga $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest prostowalna (względem odległości euklidesowej) oraz

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^n (\gamma'_j(t))^2 \right)^{1/2} dt.$$

Zauważmy, że całka po prawej stronie istnieje (funkcja podcałkowa jest kawałkami ciągła — Obserwacja 7.3.6(b)).

Dowód. Możemy założyć, że γ jest klasy $\mathcal{C}^1$. Dla podziału $\pi = (t_0, \dots, t_m)$ niech $\xi := (t_0, \dots, t_{m-1})$. Wtedy, korzystając z twierdzenia o przyrostach skończonych, dostajemy:

$$\begin{aligned} |S(\gamma, \pi) - M(\|\gamma'\|, \pi, \xi)| &= \left| \sum_{j=1}^m \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| - \sum_{j=1}^m \|\gamma'(t_{j-1})\| (t_j - t_{j-1}) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^m \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) - \gamma'(t_{j-1})(t_j - t_{j-1})\| \leq \sum_{j=1}^m \left(\sup\{\|\gamma'(\eta) - \gamma'(t_{j-1})\| : \eta \in [t_{j-1}, t_j]\} \right) (t_j - t_{j-1}) \\ &\leq \sum_{j=1}^m \omega_{\gamma'}(\text{diam } \pi)(t_j - t_{j-1}) = \omega_{\gamma'}(\text{diam } \pi). \end{aligned}$$

Pozostaje wykorzystać Lemat 7.4.3, Twierdzenie 7.1.9 i skorzystać z jednostajnej ciągłości odwzorowania γ' . $\square$

Wniosek 7.4.6. Niech $\gamma_s : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{N}_0$, będą krzywymi klasy $\mathcal{C}^1$ oraz $\gamma'_s \rightarrow \gamma'_0$ jednostajnie. Wtedy $L(\gamma_s) \rightarrow L(\gamma_0)$.

Dowód. Na postawie Twierdzenia 7.4.5: $|L(\gamma_s) - L(\gamma_0)| \leq \int_0^1 \|\gamma'_s - \gamma'_0\| dt \leq \int_0^1 \|\gamma'_s - \gamma'_0\| dt \rightarrow 0$. $\square$

Obserwacja 7.4.7. Zauważmy, że jeżeli $\gamma_s \rightarrow \gamma_0$ jednostajnie, to nie musi być $L(\gamma_s) \rightarrow L(\gamma_0)$.

Niech $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma_0(t) := (t, 0)$. Niech $\delta_n \searrow 0$. Przybliżamy krzywą γ_0 przy pomocy łamanych $\gamma_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ wyznaczonych przez punkty $(0, 0)$, $(\frac{1}{2n}, \delta_n)$, $(\frac{1}{n}, 0)$, $(\frac{3}{2n}, \delta_n)$, $(\frac{2}{n}, 0)$, $\dots$, $(1 - \frac{1}{2n}, \delta_n)$, $(1, 0)$. Oczywiście, $\gamma_n \rightarrow \gamma_0$ jednostajnie. Z drugiej strony $L(\gamma_n) = 2n\sqrt{(\frac{1}{2n})^2 + \delta_n^2} = \sqrt{1 + (2n\delta_n)^2}$. Dobierając stosownie $(\delta_n)_{n=1}^\infty$ możemy łatwo dostać $L(\gamma_n) \rightarrow +\infty$.

7.5. Przykłady zastosowania całek

Przykład 7.5.1. W przykładach poniżej pewne pojęcia (np. pole powierzchni) będą rozumiane w sposób intuicyjny — precyzyjne definicje zostaną podane w przyszłości w ramach Analizy Matematycznej 3 i 4.

(1) Niech $A = \{(x, y) : x \in [a, b], g(x) \leq y \leq f(x)\}$, gdzie $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ oraz $g \leq f$. Wtedy pole $|A|$ zbioru A wyraża się wzorem $|A| = \int_a^b (f - g)$.

Intuicja: $|A| \approx \sum_{i=1}^n (f(\xi_i) - g(\xi_i))(x_i - x_{i-1})$, gdzie $(x_0, \dots, x_n)$ jest podziałem odcinka $[a, b]$, zaś $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$.

(2) Niech $A = \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi) : \alpha \leq \varphi \leq \beta, 0 \leq r \leq R(\varphi)\}$, gdzie $\beta - \alpha \leq 2\pi$, $R \in \mathcal{R}([\alpha, \beta])$, $R : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}_+$. Wtedy $|A| = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta R^2(\varphi) d\varphi$.

Intuicja: $|A| \approx \sum_{i=1}^n \pi R^2(\xi_i) \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{2\pi}$, gdzie $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ jest podziałem odcinka $[\alpha, \beta]$, zaś $\xi_i \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i]$, $i = 1, \dots, n$.

(3) Niech $B = \{(x, r \cos \varphi, r \sin \varphi) : x \in [a, b], \varphi \in [0, 2\pi], 0 \leq r \leq R(x)\}$, gdzie $R \in \mathcal{R}([a, b])$, $R : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$. Wtedy objętość $|B|$ bryły B wyraża się wzorem

$$|B| = \pi \int_a^b R^2(x) dx.$$

Intuicja: $|B| \approx \sum_{i=1}^n \pi R^2(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, gdzie $(x_0, \dots, x_n)$ jest podziałem odcinka $[a, b]$, zaś $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$.

(4) Niech $S = \{(x, R(x) \cos \varphi, R(x) \sin \varphi) : x \in [a, b], \varphi \in [0, 2\pi]\}$, gdzie $R \in \mathcal{C}^1([a, b])$, $R : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$. Wtedy pole powierzchni $|S|$ powierzchni S wyraża się wzorem

$$|S| = 2\pi \int_a^b R(x) \sqrt{1 + (R'(x))^2} dx.$$

Intuicja:

$$\begin{aligned} |S| &\approx \sum_{i=1}^n 2\pi R(\xi_i) \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (R(x_i) - R(x_{i-1}))^2} \\ &= \sum_{i=1}^n 2\pi R(\xi_i) \sqrt{1 + \left(\frac{R(x_i) - R(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2} (x_i - x_{i-1}) \approx \sum_{i=1}^n 2\pi R(\xi_i) \sqrt{1 + (R'(\xi_i))^2} (x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

(5) Warto pamiętać o następującym przykładzie. Niech

$$\begin{aligned} B_c &= \{(x, r \cos \varphi, r \sin \varphi) : x \in [1, c], \varphi \in [0, 2\pi], r \leq \frac{1}{x}\}, \\ S_c &= \{(x, \frac{1}{x} \cos \varphi, \frac{1}{x} \sin \varphi) : x \in [1, c], \varphi \in [0, 2\pi]\}. \end{aligned}$$

Wtedy

$$|B_c| = \pi \int_1^c \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^c = \pi \left(1 - \frac{1}{c}\right), \quad |S_c| = 2\pi \int_1^c \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx \geq 2\pi \int_1^c \frac{1}{x} dx = 2\pi \ln c.$$

Stąd $\lim_{c \rightarrow +\infty} |B_c| = \lim_{c \rightarrow +\infty} \pi(1 - \frac{1}{c}) = \pi$, ale $\lim_{c \rightarrow +\infty} |S_c| \geq \lim_{c \rightarrow +\infty} 2\pi \ln c = +\infty$.

W przyszłości (Analiza Matematyczna 4) spojrzymy na powyższe wzory z wyższego punktu widzenia. W tej chwili przedstawimy tylko pewną ogólną ideę.

Niech $U \subset \mathbb{R}^m$ będzie zbiorem otwartym i niech $f = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $m \leq n$, będzie odwzorowaniem klasy $\mathcal{C}^1$ ze względu na każdą zmienną osobno, tzn. dla dowolnych $j \in \{1, \dots, n\}$, $k \in \{1, \dots, m\}$ i $c = (c_1, \dots, c_m) \in U$, odwzorowanie $x_k \xrightarrow{\varphi_{j,k,c}} f_j(c_1, \dots, c_{k-1}, x_k, c_{k+1}, \dots, c_m)$ jest klasy $\mathcal{C}^1$ w otoczeniu punktu c_k . Niech $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(c) := \varphi'_{j,k,c}(c_k)$ oznacza k -tą pochodną cząstkową funkcji f_j w punkcie c . Zdefiniujemy

$$J_m f(x) := \left(\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n} \left(\det \left[\frac{\partial f_{j_i}}{\partial x_k}(x) \right]_{i,k=1,\dots,m} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad x \in U. \quad (*)$$

Twierdzenie* 7.5.2. Przy powyższych oznaczeniach, dla „regularnych” zbiorów $A \subset U$ takich, że $f|_A$ jest iniektywne, m -wymiarowa miara Hausdorffa zbioru $f(A)$ wyraża się wzorem

$$\mathcal{H}^m(f(A)) = \int_A J_m f(x) dx,$$

gdzie całka po prawej stronie to wielowymiarowa całka Riemanna.

Obserwacja 7.5.3. (a) $m = 1$, $f = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $A = [a, b] \subset U$,

$$J_1 f(x) = \left(\sum_{1 \leq j \leq n} (f'_j(x))^2 \right)^{1/2} = \|f'(x)\|, \quad x \in U.$$

Wzór (*) to wzór na długość krzywej $f|_{[a,b]}$.

(b) $m = n = 2$, $f(x, t) := (x, \varphi(x) + t(\psi(x) - \varphi(x)))$, $(x, t) \in U \subset \mathbb{R}^2$, $A = [a, b] \times [0, 1] \subset U$, gdzie $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^1$, $\varphi(x) < \psi(x)$, $x \in [a, b]$. Wtedy

$$J_2 f(x, t) = \left| \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varphi'(x) + t(\psi'(x) - \varphi'(x)) & \psi(x) - \varphi(x) \end{bmatrix} \right| = |\psi(x) - \varphi(x)|.$$

Pole zbioru $f(A)$ wyraża się wzorem ⁽⁵⁾

$$\mathcal{H}^2(f(A)) = \int_A (\psi(x) - \varphi(x)) dx dt = \int_{[a,b]} \left(\int_{[0,1]} (\psi(x) - \varphi(x)) dt \right) dx \stackrel{(*)}{=} \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x)) dx,$$

gdzie ^(*) wynika ze wzoru na iterację całek Riemanna: Jeżeli $C \subset \mathbb{R}^k$, $D \subset \mathbb{R}^\ell$ są zbiorami regularnymi i $F : C \times D \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą ograniczoną, to $\int_{C \times D} F(x, y) d(x, y) = \int_C \left(\int_D F(x, y) dy \right) dx$.

(c) $m = n = 2$, $f(t, \varphi) = (tR(\varphi) \cos \varphi, tR(\varphi) \sin \varphi)$, $(t, \varphi) \in U \subset \mathbb{R}^2$, $A = (0, 1] \times [\alpha, \beta] \subset U$, $\beta - \alpha \leq 2\pi$, gdzie $R \in \mathcal{C}^1([\alpha, \beta], \mathbb{R}_{>0})$. Wtedy

$$J_2 f(t, \varphi) = \left| \det \begin{bmatrix} R(\varphi) \cos \varphi & tR'(\varphi) \cos \varphi - tR(\varphi) \sin \varphi \\ R(\varphi) \sin \varphi & tR'(\varphi) \sin \varphi + tR(\varphi) \cos \varphi \end{bmatrix} \right| = |t|R^2(\varphi).$$

Pole zbioru $f(A)$ wyraża się wzorem

$$\mathcal{H}^2(f(A)) = \int_A tR^2(\varphi) dt d\varphi = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta R^2(\varphi) d\varphi.$$

(d) $m = n = 3$, $f(x, t, \varphi) = (x, tR(x) \cos \varphi, tR(x) \sin \varphi)$, $(x, t, \varphi) \in U \subset \mathbb{R}^3$, $A := [a, b] \times (0, 1] \times [0, 2\pi) \subset U$, gdzie $R \in \mathcal{C}^1$ oraz $R > 0$ na A . Wtedy

$$J_3 f(x, t, \varphi) = \left| \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ tR'(x) \cos \varphi & R(x) \cos \varphi & -tR(x) \sin \varphi \\ tR'(x) \sin \varphi & R(x) \sin \varphi & tR(x) \cos \varphi \end{bmatrix} \right| = |t|R^2(x).$$

Objętość zbioru $f(A)$ wyraża się wzorem

$$\mathcal{H}^3(f(A)) = \int_A tR^2(x) dx dt d\varphi = \pi \int_a^b R^2(x) dx.$$

(e) $m = 2$, $n = 3$, $f(x, \varphi) = (x, R(x) \cos \varphi, R(x) \sin \varphi)$, $(x, \varphi) \in U \subset \mathbb{R}^2$, $A := [a, b] \times [0, 2\pi) \subset U$, gdzie $R \in \mathcal{C}^1$ oraz $R > 0$ na A . Wtedy

$$\begin{aligned} J_2 f(x, \varphi) &= \left(\left| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ R'(x) \cos \varphi & -R(x) \sin \varphi \end{bmatrix} \right|^2 + \left| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ R'(x) \sin \varphi & R(x) \cos \varphi \end{bmatrix} \right|^2 + \left| \begin{bmatrix} R'(x) \cos \varphi & -R(x) \sin \varphi \\ R'(x) \sin \varphi & R(x) \cos \varphi \end{bmatrix} \right|^2 \right)^{1/2} \\ &= (R^2(x) + R^2(x)(R'(x))^2)^{1/2} = |R(x)| \sqrt{1 + (R'(x))^2}. \end{aligned}$$

Pole powierzchni zbioru $f(A)$ wyraża się wzorem

$$\mathcal{H}^2(f(A)) = \int_A R(x) \sqrt{1 + (R'(x))^2} dx d\varphi = 2\pi \int_a^b R(x) \sqrt{1 + (R'(x))^2} dx.$$

7.6. Całka niewłaściwa

Definicja 7.6.1. Niech $\varphi : [a, b) \rightarrow \mathbb{C}$, gdzie $-\infty < a < b \leq \infty$, będzie taka, że $\varphi|_{[a, \beta]} \in \mathcal{R}([a, \beta], \mathbb{C})$ dla dowolnego $a < \beta < b$. Zdefiniujmy $F_\varphi(\beta) := \int_a^\beta \varphi$. Mówimy, że *całka niewłaściwa* $\int_a^b \varphi$ jest *zbieżna*, jeżeli granica $\int_a^b \varphi := \lim_{\beta \rightarrow b-} F_\varphi(\beta)$ istnieje i jest skończona. Piszemy wtedy $\varphi \in \mathcal{R}([a, b), \mathbb{C})$. Jak zwykle, jeżeli $\varphi([a, b)) \subset \mathbb{R}$, to piszemy $\varphi \in \mathcal{R}([a, b))$. Jeżeli dodatkowo $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}_+$, to zamiast $f \in \mathcal{R}([a, b))$ będziemy również pisać $\int_a^b f < +\infty$.

Jeżeli $|\varphi| \in \mathcal{R}([a, b))$, to mówimy, że *całka niewłaściwa* $\int_a^b \varphi$ jest *bezwzględnie zbieżna*.

Analogiczne pojęcie całki niewłaściwej możemy zdefiniować dla funkcji $\varphi : (a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, gdzie $-\infty \leq a < b < \infty$. Piszemy wtedy $\varphi \in \mathcal{R}((a, b], \mathbb{C})$.

Jeżeli $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$, gdzie $-\infty \leq a < b \leq \infty$, jest funkcją taką, że $\varphi|_{[\alpha, \beta]} \in \mathcal{R}([\alpha, \beta], \mathbb{C})$ dla dowolnego przedziału $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, to mówimy, że *całka niewłaściwa* $\int_a^b \varphi$ jest *zbieżna*, jeżeli istnieje $c \in (a, b)$ takie, że $\varphi|_{(a, c]} \in \mathcal{R}((a, c], \mathbb{C})$ oraz $\varphi|_{[c, b)} \in \mathcal{R}([c, b), \mathbb{C})$. Piszemy wtedy $\varphi \in \mathcal{R}((a, b), \mathbb{C})$ i definiujemy

$$\int_a^b \varphi := \int_a^c \varphi + \int_c^b \varphi. \quad (*)$$

⁽⁵⁾ We wszystkich przykładach sprawdzenie injektywności odwzorowania $f|_A$ pozostawiamy jako ĆWICZENIE.

Obserwacja 7.6.2. (a) Definicja (*) nie zależy od wyboru punktu pośredniego $c \in (a, b)$.

(b) Dalsze rozważania będą prowadzone dla przedziału $[a, b]$. Przypadki $(a, b]$ i (a, b) pozostawiamy jako ĆWICZENIE.

(c) $\varphi \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{C}) \iff \operatorname{Re} \varphi, \operatorname{Im} \varphi \in \mathcal{R}([a, b])$. Ponadto, $\int_a^b \varphi = \int_a^b \operatorname{Re} \varphi + i \int_a^b \operatorname{Im} \varphi$.

(d) Jeżeli $\varphi \in \mathcal{R}([a, b])$, gdzie $-\infty < a < b < \infty$, to $\varphi|_{[a, b]} \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{C})$ i $\int_a^b \varphi|_{[a, b]} = \int_a^b \varphi$.

Istotnie, niech $|\varphi| \leq C$. Wtedy dla $\beta \in (a, b)$ mamy

$$\left| F_\varphi(\beta) - \int_a^\beta \varphi \right| = \left| \int_\beta^b \varphi \right| \leq \int_\beta^b |\varphi| \leq (b - \beta)C \xrightarrow{\beta \rightarrow b-} 0.$$

(e) Jeżeli $\varphi \in \mathcal{R}([a, b])$, gdzie $-\infty < a < b < \infty$, oraz istnieje skończona granica $g := \lim_{x \rightarrow b-} \varphi(x)$, to po położeniu $\varphi(b) := g$ mamy $\varphi \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{C})$

Istotnie, możemy założyć, $f = \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$ i niech $\beta \in (a, b)$ będzie taka, że $b - \beta < 1$ oraz $|f(x) - g| \leq \frac{\varepsilon}{4}$ dla $\beta \leq x < b$. Ponieważ $f \in \mathcal{R}([a, \beta])$, zatem istnieje podział $\pi' = (t_0, \dots, t_m)$ przedziału $[a, \beta]$ taki, że $U(f, \pi') - L(f, \pi') \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Niech $\pi := (t_0, \dots, t_m, b)$. Jest to podział przedziału $[a, b]$ oraz

$$U(f, \pi) - L(f, \pi) = U(f, \pi') - L(f, \pi') + (M(f, [\beta, b]) - m(f, [\beta, b]))(b - \beta) \leq \varepsilon.$$

(f) Jeżeli funkcja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $b < +\infty$, ma pierwotną F oraz $f \in \mathcal{P}([a, b])$, to $f \in \mathcal{R}([a, b])$ oraz $\int_a^b f = F(b) - F(a)$. Oznacza to, że w tym przypadku całka Cauchy'ego pokrywa się z niewłaściwą całką Riemanna.

Dla przykładu: $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ($F(x) = \sqrt{x}$).

Istotnie, wobec Twierdzenia 7.3.11(b), $\lim_{\beta \rightarrow b-} \int_a^\beta f = \lim_{\beta \rightarrow b-} (F(\beta) - F(a)) = F(b) - F(a)$.

Przykład 7.6.3. (a) Dla $0 < \gamma < 1$:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\gamma} dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \int_\alpha^1 \frac{1}{x^\gamma} dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma} \Big|_\alpha^1 = \frac{1}{1-\gamma}.$$

(b) Dla $\gamma > 1$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\gamma} dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_1^\beta \frac{1}{x^\gamma} dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma} \Big|_1^\beta = \frac{1}{\gamma-1}.$$

(c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_0^\beta \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_\alpha^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \arctg x|_0^\beta + \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \arctg x|_\alpha^0 = \pi.$$

Twierdzenie 7.6.4. Jeżeli $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ i $f|_{[a, \beta]} \in \mathcal{R}([a, \beta])$ dla dowolnego $a < \beta < b$, to

$$\int_a^b f < +\infty \iff \exists (\beta_n)_{n=0}^\infty \subset [a, b] : a = \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_n \nearrow b : \sum_{n=1}^\infty \int_{\beta_{n-1}}^{\beta_n} f < +\infty.$$

Dowód. W naszym przypadku funkcja F_f jest rosnąca oraz $F_f(\beta_n) = \sum_{k=1}^n \int_{\beta_{k-1}}^{\beta_k} f$. □

Twierdzenie 7.6.5 (Warunek Cauchy'ego zbieżności całek niewłaściwych). Niech $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ będzie taka, $\varphi|_{[a, \beta]} \in \mathcal{R}([a, \beta], \mathbb{C})$ dla dowolnego $a < \beta < b$. Wtedy całka niewłaściwa $\int_a^b \varphi$ jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $c \in (a, b)$ takie, że dla dowolnych $c < \beta_1 < \beta_2 < b$ mamy $|\int_{\beta_1}^{\beta_2} \varphi| < \varepsilon$.

Dowód. ($\implies$): $\int_{\beta_1}^{\beta_2} \varphi = F_\varphi(\beta_2) - F_\varphi(\beta_1)$.

($\impliedby$): Niech $a \leq \beta_n < b$, $n \in \mathbb{N}$, $\beta_n \rightarrow b$. Wtedy nasz warunek gwarantuje, że ciąg liczbowy $(F_\varphi(\beta_n))_{n=1}^\infty$ spełnia warunek Cauchy'ego. Jest więc zbieżny do granicy skończonej. □

Twierdzenie 7.6.6 (Kryterium porównawcze). Niech $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ będą takie, że:

- $\varphi|_{[a, \beta]}, g|_{[a, \beta]} \in \mathcal{R}([a, \beta], \mathbb{C})$ dla dowolnego $\beta \in (a, b)$,
- $|\varphi(x)| \leq g(x)$, $x \in [a, b]$,
- $g \in \mathcal{R}([a, b])$.

Wtedy $\varphi \in \mathcal{R}([a, b))$ oraz $|\int_a^b \varphi| \leq \int_a^b g$.

W szczególności, jeżeli $|\varphi| \in \mathcal{R}([a, b))$, to $\varphi \in \mathcal{R}([a, b))$ oraz $|\int_a^b \varphi| \leq \int_a^b |\varphi|$.

Przykład 7.6.7. (a) Całka $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x dx}{1+x^2}$ jest bezwzględnie zbieżna.

(b) Całka $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x}$ jest zbieżna.

Istotnie, ponieważ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ osobliwość jest tylko w $+\infty$ i wystarczy zbadać zbieżność całki $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x}$. Całkując przez części mamy $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x} = \frac{-\cos x}{x} \Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2} = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2}$ i wystarczy zauważyć, że ostatnia całka jest bezwzględnie zbieżna.

(c) Całka $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x}$ nie jest zbieżna bezwzględnie.

Istotnie,

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x| dx}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin x| dx}{x} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin x| dx = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} = +\infty.$$

Twierdzenie 7.6.8 (Kryterium całkowe zbieżności szeregów). Niech $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ będzie funkcją malejącą, $S_n := \sum_{k=0}^n f(k)$, $I_n := \int_0^n f$, $n \in \mathbb{N}_0$. Wtedy:

(a) $S_n - I_n \rightarrow g \in [0, f(0)]$.

(b) $\int_0^{\infty} f < +\infty \iff \sum_{n=0}^{\infty} f(n) < +\infty$.

Dowód. (a) Zauważmy, że $f(k) \leq \int_{k-1}^k f \leq f(k-1)$, $k \in \mathbb{N}$. Stąd $S_n - f(0) \leq I_n \leq S_n - f(n)$, a więc $f(n) \leq S_n - I_n \leq f(0)$. Wystarczy jeszcze pokazać, że ciąg $(S_n - I_n)_{n=0}^{\infty}$ jest malejący:

$$S_n - I_n - (S_{n+1} - I_{n+1}) = -f(n+1) + \int_n^{n+1} f \geq 0.$$

(b) wynika z (a). □

Przykład 7.6.9. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} < +\infty \iff \alpha > 1$. W takim razie szereg $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy $\alpha > 1$.

7.7. Funkcje dane całką

Twierdzenie 7.7.1 (Twierdzenie o funkcjach danych całką). Niech $\Omega \in \text{top } \mathbb{R}$, niech $P = [a, b] \subset \subset \mathbb{R}$ i niech $f : \Omega \times P \rightarrow \mathbb{R}$ będzie odwzorowaniem takim, że dla pewnego $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ mamy:

- $f(\cdot, t) \in C^k(\Omega)$ dla dowolnego $t \in P$,
- odwzorowanie $\Omega \times P \ni (x, t) \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t) \in \mathbb{R}$, gdzie $\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t) := (f(\cdot, t))^{(j)}(x)$, jest ciągłe dla $j \leq k$. ⁽⁶⁾

Wtedy odwzorowanie $\Omega \ni x \mapsto \int_a^b f(x, t) dt$ jest klasy $C^k(\Omega)$ oraz $\varphi^{(j)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t) dt$, $x \in \Omega$, $j \leq k$ ⁽⁷⁾.

Dowód. Wystarczy rozważyć przypadki $k = 0$ i $k = 1$ (a następnie iterować rozumowanie).

$k = 0$: Ustalmy $a \in \Omega$, $r > 0$ takie, że $[a-r, a+r] \subset \Omega$ i $\varepsilon > 0$. Odwzorowanie f jest jednostajnie ciągłe na $[a-r, a+r] \times P$. Zatem istnieje $0 < \delta < r$ taka, że $|f(x, t) - f(a, t)| \leq \varepsilon$ dla $(x, t) \in (a-\delta, a+\delta) \times P$. Otrzymujemy stąd:

$$|\varphi(x) - \varphi(a)| \leq \int_a^b |f(x, t) - f(a, t)| dt \leq \varepsilon(b-a), \quad x \in (a-\delta, a+\delta).$$

$k = 1$: Wystarczy wykazać, że $\varphi'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$, $x \in \Omega$ (ciągłość φ' zapewnia przypadek $k = 0$). Ustalmy $a \in \Omega$, $r > 0$ takie, że $[a-r, a+r] \subset \Omega$ i $\varepsilon > 0$. Odwzorowanie $\frac{\partial f}{\partial x}$ jest jednostajnie ciągłe na

⁽⁶⁾ Dla $k = 0$ warunek ten oznacza po prostu ciągłość f .

⁽⁷⁾ Tzn. możemy różniczkować pod znakiem całki.

7.8. Całki krzywoliniowe

$[a-r, a+r] \times P$. Zatem istnieje $0 < \delta < r$ taka, że $|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, t)| \leq \varepsilon$ dla $(x, t) \in (a-\delta, a+\delta) \times P$. Stąd, na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych, otrzymujemy:

$$\left| \frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(a, t) dt \right| \leq \int_a^b \left| \frac{f(a+h, t) - f(a, t)}{h} - \frac{\partial f}{\partial x}(a, t) \right| dt \leq \varepsilon(b-a), \quad 0 < |h| < \delta. \quad \square$$

Twierdzenie 7.7.2 (Twierdzenie o funkcjach danych całką niewłaściwą). Niech $\Omega \in \text{top } \mathbb{R}$, niech $-\infty < a < b \leq +\infty$ i niech $f : \Omega \times [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie odwzorowaniem takim, że dla pewnego $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ mamy:

- $f(\cdot, t) \in C^k(\Omega)$ dla dowolnego $t \in [a, b)$,
- odwzorowanie $\Omega \times [a, b) \ni (x, t) \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j} \in \mathbb{R}$ jest ciągłe dla $j \leq k$,
- dla dowolnego $j \leq k$ istnieje odwzorowanie $g_j \in \mathcal{R}([a, b))$ takie, że $|\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t)| \leq g_j(t)$ dla $(x, t) \in \Omega \times [a, b)$.

Wtedy odwzorowanie $\Omega \ni x \mapsto \int_a^b f(x, t) dt$ jest klasy $\mathcal{C}^k(\Omega)$ oraz $\varphi^{(j)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t) dt$, $x \in \Omega$, $j \leq k$ ⁽⁸⁾.

Odnajdujemy, że analogiczny wynik zachodzi, gdy przedział $[a, b)$ zastąpimy przedziałem $(a, b]$ ($-\infty \leq a < b < +\infty$) lub też przedziałem (a, b) ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$).

Dowód. Ustalmy ciąg $a < \beta_\nu < b$, $\beta_\nu \nearrow b$ i niech $\varphi_\nu(x) := \int_a^{\beta_\nu} f(x, t) dt$, $x \in \Omega$. Na podstawie poprzedniego twierdzenia wnioskujemy, że $\varphi_\nu \in C^k(\Omega)$ oraz $\varphi_\nu^{(j)}(x) = \int_a^{\beta_\nu} \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t) dt$, $x \in \Omega$, $j \leq k$. Zauważmy, że $\varphi_\nu \rightarrow \varphi$ jednostajnie na Ω . Istotnie, $|\varphi_\nu(x) - \varphi(x)| \leq \int_{\beta_\nu}^b g_0(t) dt \rightarrow 0$. Wynika stąd, że φ jest ciągła. Analogicznie, dla dowolnego $j \leq k$ ciąg $(\varphi_\nu^{(j)})_{\nu=1}^\infty$ jest zbieżny jednostajnie. Teraz wystarczy już tylko wykorzystać twierdzenie o różniczkowaniu ciągu wyraz po wyrazie. $\square$

Przykład 7.7.3 (Funkcja Γ Eulera). Niech $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$, $x > 0$. Wtedy:

- $\Gamma \in C^\infty(\mathbb{R}_{>0})$,
- $\Gamma(1) = 1$, $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$, $x > 0$.

W szczególności, $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Dowód. Niech $f(x, t) := t^{x-1} e^{-t}$, $x, t > 0$. Wtedy $\Gamma(x) = \int_0^1 f(x, t) dt + \int_1^\infty f(x, t) dt$, $x > 0$. Zauważmy, że $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) = t^{x-1} (\ln t)^k e^{-t}$. Wobec poprzedniego twierdzenia, dla dowodu, że Γ jest klasy $\mathcal{C}^\infty$ wystarczy pokazać, że dla dowolnego przedziału $[\alpha, \beta] \subset (0, +\infty)$ i dla dowolnego $k \in \mathbb{N}_0$ istnieją funkcje $g_k \in \mathcal{R}((0, 1])$, $h_k \in \mathcal{R}([1, +\infty))$ takie, że:

- $|t^{x-1} (\ln t)^k e^{-t}| \leq g_k(t)$, $x \in [\alpha, \beta]$, $t \in (0, 1]$,
- $|t^{x-1} (\ln t)^k e^{-t}| \leq h_k(t)$, $x \in [\alpha, \beta]$, $t \in [1, \infty)$.

Zdefiniujmy:

- $g_k(t) := t^{\alpha-1} |\ln t|^k e^{-t}$, $0 < t \leq 1$,
- $h_k(t) := N! t^{\beta-1+k-N}$, gdzie $N > \beta + k$.

Dla $0 < \varepsilon < \alpha$ mamy $\int_0^1 g_k(t) dt \leq \text{const}(\varepsilon) \int_0^1 t^{\alpha-1-\varepsilon} dt = \frac{\text{const}(\varepsilon)}{\alpha-\varepsilon}$. Całkowalność h_k jest oczywista. Ponadto,

$$t^{\beta-1} (\ln t)^k e^{-t} \leq t^{\beta-1+k} \frac{1}{\sum_{s=0}^\infty \frac{t^s}{s!}} \leq N! t^{\beta-1+k-N}.$$

Jest widoczne, że $\Gamma(1) = 1$. Ponadto, dla $x > 0$ mamy:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = -t^x e^{-t} \Big|_0^{+\infty} + x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x). \quad \square$$

7.8. Całki krzywoliniowe

Będziemy kontynuować rozważania z § 7.4. Na wstępie przypomnijmy Twierdzenie 7.4.5.

⁽⁸⁾ Zauważmy, że nasze założenia gwarantują zbieżność wszystkich występujących w tezie całek niewłaściwych.

Twierdzenie 7.8.1. Dowolna droga $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest prostowalna ⁽⁹⁾ oraz

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt. \quad (10)$$

Niech $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie krzywą i niech $f : \gamma^* \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją ograniczoną ⁽¹¹⁾. Dla podziału $\pi = (t_0, \dots, t_m)$ przedziału $[a, b]$ i dla punktów pośrednich $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ niech

$$M(f, \gamma, \pi, \xi) := \sum_{j=1}^m f(\gamma(\xi_j)) \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|.$$

Powiemy, że funkcja f jest *całkowalna wzdłuż krzywej* γ ($f \in \mathcal{R}(\gamma)$), jeżeli istnieje $c \in \mathbb{R}$ takie, że dla dowolnego normalnego ciągu podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ przedziału $[a, b]$ oraz dla dowolnego wyboru punktów pośrednich $(\xi_k)_{k=1}^\infty$ mamy $M(f, \gamma, \pi_k, \xi_k) \rightarrow c$. Liczbę c nazywamy *całką krzywoliniową nieorientowaną z funkcji f po krzywej γ* i oznaczamy $c = \int_\gamma f dl$.

Obserwacja 7.8.2. (a) Całkowalność i całka są niezależne od parametryzacji krzywej.

Istotnie, wystarczy tylko zauważyć, że jeżeli $\tau : [c, d] \rightarrow [a, b]$ jest ściśle rosnącą bijekcją, to jest to odwzorowanie jednostajnie ciągłe, a w szczególności obraz normalnego ciągu podziałów jest normalnym ciągiem podziałów.

(b) γ jest prostowalna wtedy i tylko wtedy, gdy $1 \in \mathcal{R}(\gamma)$. Ponadto $L(\gamma) = \int_\gamma 1 dl$.

(c) $f \in \mathcal{R}(\gamma) \iff f \in \mathcal{R}(\ominus \gamma)$. Ponadto, $\int_{\ominus \gamma} f dl = \int_\gamma f dl$ ⁽¹²⁾.

(d) Jeżeli $\gamma_j : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2$, są krzywymi takimi, że $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ oraz $f : \gamma_1^* \cup \gamma_2^* \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją taka, że $f|_{\gamma_j^*} \in \mathcal{R}(\gamma_j)$, $j = 1, 2$, to $f \in \mathcal{R}(\gamma_1 \oplus \gamma_2)$ oraz

$$\int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} f dl = \int_{\gamma_1} f dl + \int_{\gamma_2} f dl.$$

Istotnie, wystarczy rozważyć normalny ciąg podziałów będący „sumą” normalnych ciągów podziałów dla poszczególnych krzywych i udowodnić, że w definicji całki krzywoliniowej nieorientowanej możemy brać tylko takie normalne ciągi podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$, dla których $\tilde{t} \in \pi_k$, $k \geq 1$, gdzie $\tilde{t}$ jest ustalonym punktem z (a, b) .

Rozważmy bowiem dowolny podział $\pi = (t_0, \dots, t_m)$ i ciąg punktów pośrednich $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$. Przypuśćmy, że $\tilde{t} \in (t_{s-1}, t_s)$. Niech $\pi' := (t_0, \dots, t_{s-1}, \tilde{t}, t_s, \dots, t_m)$ i niech ξ' będzie uzupełnionym ciągiem punktów pośrednich (zachowujemy wszystkie dotychczasowe punkty pośrednie). Wtedy (por. dowód Lematu 7.4.3) mamy:

$$\begin{aligned} |M(f, \gamma, \pi, \xi) - M(f, \gamma, \pi', \xi')| &= |f(\xi_s) \|\gamma(t_s) - \gamma(t_{s-1})\| - f(\xi'_s) \|\gamma(\tilde{t}) - \gamma(t_{s-1})\| - f(\xi'_{s+1}) \|\gamma(t_s) - \gamma(\tilde{t})\|| \\ &\leq 3 \left(\sup_{\gamma^*} |f| \right) \omega_\gamma(\text{diam } \pi); \end{aligned}$$

dalej rozumujemy standardowo.

(e) Operator $\mathcal{R}(\gamma) \ni f \mapsto \int_\gamma f dl \in \mathbb{R}$ jest liniowy.

Twierdzenie 7.8.3. Niech $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie drogą. Wtedy mamy $\mathcal{C}(\gamma^*) \subset \mathcal{R}(\gamma)$ oraz

$$\int_\gamma f dl = \int_0^1 f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt, \quad f \in \mathcal{C}(\gamma^*). \quad (13)$$

⁽⁹⁾ Względem odległości euklidesowej.

⁽¹⁰⁾ Tu i dalej $\|\cdot\|$ oznacza normę Euklidesową w $\mathbb{R}^n$.

⁽¹¹⁾ Przypomnijmy, że $\gamma^* := \gamma([a, b])$ jest obrazem geometrycznym krzywej γ .

⁽¹²⁾ Uzasadnia to nazwę „całka nieorientowana”.

⁽¹³⁾ Zauważmy, że całka po prawej stronie istnieje. Twierdzenie daje praktyczny sposób obliczania całek nieorientowanych.

Dowód. Możemy założyć, że γ jest klasy $\mathcal{C}^1$. Ustalmy podział $\pi = (t_0, \dots, t_m)$ oraz punkty pośrednie $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$. Wtedy na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych mamy:

$$\begin{aligned} |M(f, \gamma, \pi, \xi) - M((f \circ \gamma) \|\gamma'\|, \pi, \xi)| &\leq \sum_{j=1}^m |f(\gamma(\xi_j))| \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) - \gamma'(\xi_j)(t_j - t_{j-1})\| \\ &\leq (\max_{\gamma^*} |f|) \sum_{j=1}^m (\sup\{\|\gamma'(\eta) - \gamma'(\xi_j)\| : \eta \in [t_{j-1}, t_j]\})(t_j - t_{j-1}) \leq (\max_{\gamma^*} |f|) \omega_{\gamma'}(\text{diam } \pi); \end{aligned}$$

dalej standardowo. $\square$

Niech teraz $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie dowolną krzywą i niech $V = (V_1, \dots, V_n) : \gamma^* \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie dowolnym odwzorowaniem (polem wektorowym) ograniczonym. Dla podziału $\pi = (t_0, \dots, t_m)$ przedziału $[a, b]$ i dla punktów pośrednich $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ niech

$$M(V, \gamma, \pi, \xi) := \sum_{j=1}^m \langle V(\gamma(\xi_j)), \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) \rangle. \quad (14)$$

Powiemy, że pole V jest *całkowalne wzdłuż krzywej* γ , jeżeli istnieje $c \in \mathbb{R}$ takie, że dla dowolnego normalnego ciągu podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ przedziału $[a, b]$ oraz dla dowolnego wyboru punktów pośrednich $(\xi_k)_{k=1}^\infty$ mamy $M(V, \gamma, \pi_k, \xi_k) \rightarrow c$. Liczbę c nazywamy *całką krzywoliniową zorientowaną z pola V po krzywej γ* i oznaczamy $c = \int_\gamma V dx = \int_\gamma V_1 dx_1 + \dots + V_n dx_n$.

Obserwacja 7.8.4 (ĆWICZENIE). (a) Całkowalność i całka są niezależne od parametryzacji krzywej.

(b) Pole V jest całkowalne na γ wtedy i tylko wtedy, gdy jest całkowalne na $\ominus\gamma$. Ponadto,

$$\int_{\ominus\gamma} V dx = - \int_\gamma V dx \quad (15)$$

(c) Jeżeli $\gamma_j : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2$, są krzywymi takimi, że $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ oraz $V : \gamma_1^* \cup \gamma_2^* \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest odwzorowaniem takim, że V jest całkowalne osobno na γ_1 i γ_2 , to V jest całkowalne na $\gamma_1 \oplus \gamma_2$ oraz

$$\int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} V dx = \int_{\gamma_1} V dx + \int_{\gamma_2} V dx.$$

(d) Całka zorientowana po krzywej γ jest operatorem liniowym.

Twierdzenie 7.8.5. Niech $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie drogą. Wtedy każde pole ciągłe V jest całkowalne na γ oraz

$$\int_\gamma V dx = \int_0^1 \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt. \quad (16)$$

Dowód. Możemy założyć, że γ jest klasy $\mathcal{C}^1$. Ustalmy podział $\pi = (t_0, \dots, t_m)$ oraz punkty pośrednie $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$. Wtedy wobec nierówności Schwarza mamy

$$\begin{aligned} |M(V, \gamma, \pi, \xi) - M(\langle V \circ \gamma, \gamma' \rangle, \pi, \xi)| &\leq \sum_{j=1}^m \left| \langle V(\gamma(\xi_j)), \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) - \gamma'(\xi_j)(t_j - t_{j-1}) \rangle \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^m \|V(\gamma(\xi_j))\| \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) - \gamma'(\xi_j)(t_j - t_{j-1})\| \leq (\max_{\gamma^*} \|V\|) \omega_{\gamma'}(\text{diam } \pi); \end{aligned}$$

dalej standardowo. $\square$

(14) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ oznacza standardowy iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n$, $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j$.

(15) Uzasadnia to nazwę „całka zorientowana”.

(16) Zauważmy, że całka po prawej stronie istnieje. Twierdzenie daje praktyczny sposób obliczania całek zorientowanych.

Szeregi Fouriera

8.1. Twierdzenie Riemanna-Lebesgue’a

Do tematyki związanej z szeregami Fouriera powrócimy w wykładzie z Analizy Matematycznej 4. Niech

$$\mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : f|_{[-\pi, \pi]} \in \mathcal{R}([-\pi, \pi]), \forall x \in \mathbb{R} : f(x+2\pi) = f(x)\},$$

$$\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}) := \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : \forall x \in \mathbb{R} : f(x+2\pi) = f(x)\}.$$

Definicja 8.1.1. Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R})$ definiujemy jej *współczynniki szeregu Fouriera* ⁽¹⁾:

$$a_n = a_n(f) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt, \quad b_n = b_n(f) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Szeregiem Fouriera funkcji f nazywamy szereg funkcyjny:

$$S(x) = S(f; x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Jego sumy częściowe oznaczamy przez:

$$S_k(x) = S_k(f; x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Obserwacja 8.1.2. (a) Jeżeli szereg $S(f; x_0)$ jest zbieżny, to zbieżny jest też szereg $S(f; x_0 + 2k\pi)$ oraz $S(f; x_0 + 2k\pi) = S(f; x_0)$, $k \in \mathbb{Z}$. W tym sensie funkcja $S(f; \cdot)$ jest okresowa o okresie 2π .

(b) Jeżeli funkcja f jest parzysta, to $b_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy szereg Fouriera funkcji f ma postać $S(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ i jest nazywany *szeregiem kosinusów*.

Istotnie,

$$b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt \stackrel{u=-t}{=} \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{-\pi} f(-u) \sin(-nu) (-du) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin nu \, du = -b_n.$$

(c) Jeżeli funkcja f jest nieparzysta, to $a_n = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$. Wtedy szereg Fouriera funkcji f ma postać $S(f; x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ i jest nazywany *szeregiem sinusów* — ĆWICZENIE.

(d) $a_n(1) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, $a_0(1) = 2$. Stąd $S_k(1; x) = 1$, $k \in \mathbb{N}_0$, oraz $S(1; x) = 1$.

(e) Niech

$$\varphi_0 := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \varphi_{2n-1}(x) := \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad \varphi_{2n}(x) := \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Wtedy układ $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$ jest *ortonormalny*, tzn.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_j(t) \varphi_k(t) \, dt = \delta_{j,k}, \quad j, k \in \mathbb{N}_0 \text{ — ĆWICZENIE.}$$

Twierdzenie 8.1.3 (Riemanna–Lebesgue’a). Jeżeli $|f| \in \mathcal{R}(P)$, gdzie $P \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem, to

$$\lim_{|\alpha| \rightarrow +\infty} \int_P f(t) \cos \alpha t \, dt = \lim_{|\alpha| \rightarrow +\infty} \int_P f(t) \sin \alpha t \, dt = 0.$$

W szczególności, dla $f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R})$ mamy $a_n(f) \longrightarrow 0$, $b_n(f) \longrightarrow 0$ przy $n \longrightarrow +\infty$.

⁽¹⁾ Jean Fourier (1768–1830).

W rzeczywistości Twierdzenie 8.1.3 jest prawdziwe dla obszerniejszej klasy funkcji.

Dowód. Dowód przeprowadzimy dla $\cos \alpha t$. Przypadek $\sin \alpha t$ pozostawiamy jako ĆWICZENIE.

Krok 1°. Jeżeli $f = \chi_{[p,q],P}$, to

$$\int_P f(t) \cos \alpha t \, dt = \int_p^q \cos \alpha t \, dt = \frac{1}{\alpha} \sin \alpha t \Big|_p^q = \frac{1}{\alpha} (\sin \alpha q - \sin \alpha p) \xrightarrow{|\alpha| \rightarrow +\infty} 0.$$

Krok 2°. Dla dowolnego przedziału $[a, b] \subset P$ oraz dla dowolnego jego podziału $\pi = (x_0, \dots, x_m)$, jeżeli

$$f = \sum_{j=1}^m c_j \chi_{[x_{j-1}, x_j], P},$$

gdzie $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$, to twierdzenie zachodzi.

Krok 3°. Jeżeli $(f_s)_{s=1}^\infty \subset \mathcal{R}(P)$, $\int_P |f_s(t) - f(t)| \, dt \rightarrow 0$ oraz twierdzenie zachodzi dla każdej z funkcji f_s , to zachodzi dla f .

Istotnie, niech $\varepsilon > 0$ i niech $s \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $\int_P |f_s(t) - f(t)| \, dt \leq \varepsilon/2$. Niech $|\int_P f_s(t) \cos \alpha t \, dt| \leq \varepsilon/2$ dla $|\alpha| \geq C$. Wtedy dla $|\alpha| \geq C$ mamy

$$\left| \int_P f(t) \cos \alpha t \, dt \right| \leq \left| \int_P f_s(t) \cos \alpha t \, dt \right| + \int_P |f_s(t) - f(t)| \, dt \leq \varepsilon.$$

Krok 4°. Dla dowolnego przedziału $[a, b] \subset P$ twierdzenie zachodzi dla funkcji $f \chi_{[a,b],P}$.

Istotnie, wystarczy pokazać, że istnieje ciąg $(f_s)_{s=1}^\infty$ funkcji „schodkowych” takich, jak w Kroku 2°, dla którego $\int_P |f_s(t) - f(t) \chi_{[a,b],P}(t)| \, dt \rightarrow 0$. Niech $\varepsilon > 0$ i niech $\pi = (x_0, \dots, x_m)$ będzie podziałem przedziału $[a, b]$, takim że $U(f, \pi) - L(f, \pi) \leq \varepsilon$. Zdefiniujmy $c_j := M(f, [x_{j-1}, x_j])$, $j = 1, \dots, m$, $g := \sum_{j=1}^m c_j \chi_{[x_{j-1}, x_j], P}$. Wtedy

$$\int_P |g(t) - f(t) \chi_{[a,b],P}(t)| \, dt = \int_a^b (g(t) - f(t)) \, dt = \int_a^b g(t) \, dt - \int_a^b f(t) \, dt \leq U(f, \pi) - L(f, \pi) \leq \varepsilon.$$

Krok 5°. Niech $[a_s, b_s] \nearrow P$. Wobec Kroków 3° i 4°, do zakończenia dowodu wystarczy zauważyć, że $\int_P |f - f \chi_{[a_s, b_s],P}| = \int_P |f| - \int_{a_s}^{b_s} |f| \rightarrow 0$. $\square$

8.2. Kryterium Diniego

Zdefiniujmy pomocniczą funkcję:

$$\Phi_k(x) := \frac{\sin \frac{(2k+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Obserwacja 8.2.1 (ĆWICZENIE). (a) $\Phi_k(-x) = \Phi_k(x)$.

(b) $\Phi_k(x + 2\pi) = \Phi_k(x)$.

(c) $\frac{1}{2} \Phi_k(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^k \cos nx$.

Lemat 8.2.2. Dla $f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R})$ mamy:

$$S_k(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \Phi_k(t) \, dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

W szczególności, $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi_k(t) \, dt = 1$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Dowód. Liczymy:

$$\begin{aligned} S_k(f; x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^k (\cos nt \cos nx + \sin nt \sin nx) \right) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^k \cos n(t-x) \right) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(t) \frac{1}{2} \Phi_k(t-x) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t) \frac{1}{2} \Phi_k(t) dt \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x+t) \frac{1}{2} \Phi_k(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \Phi_k(t) dt, \end{aligned}$$

gdzie (*) wynika z tego, że funkcja podcałkowa ma okres 2π . $\square$

Twierdzenie 8.2.3. Dla $f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R})$ i dla dowolnego $0 < \delta < \pi$ mamy:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} S_k(f; x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \Phi_k(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

(w tym sensie, że obie granice jednocześnie istnieją i są równe). W szczególności, prawdziwa jest następująca zasada lokalizacji:

O zbieżności i wartości $S(f; x_0)$ szeregu Fouriera funkcji f w punkcie x_0 decydują wyłącznie wartości funkcji f w dowolnie małym otoczeniu punktu x_0 .

Dowód. Ustalmy x . Funkcja

$$[\delta, \pi] \ni t \mapsto \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2 \sin \frac{t}{2}}$$

jest całkowalna. Zatem, na podstawie twierdzenia Riemanna–Lebesgue’a, mamy:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \frac{(2k+1)t}{2} dt = 0.$$

Teraz wystarczy skorzystać z Lematu 8.2.2. $\square$

Twierdzenie 8.2.4 (Kryterium Diniego). Niech $f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R})$ i $x_0, A \in \mathbb{R}$ będą takie, że funkcja

$$(0, \pi] \ni t \mapsto \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2A}{t}$$

jest całkowalna. Wtedy $S(f; x_0) = \lim_{k \rightarrow +\infty} S_k(f; x_0) = A$.

Dowód. Na podstawie Lematu 8.2.2 mamy:

$$S_k(f; x_0) - A = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{f(x_0+t) + f(x_0-t)}{2} - A \right) \Phi_k(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\psi(t) \frac{\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right) \sin \frac{(2k+1)t}{2} dt.$$

Ponieważ funkcja $(0, \pi] \ni t \mapsto \frac{\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}$ przedłuża się do funkcji ciągłej na $[0, \pi]$, zatem funkcja $(0, \pi] \ni t \mapsto \psi(t) \frac{\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}$ jest całkowalna i możemy skorzystać z twierdzenia Riemanna–Lebesgue’a. $\square$

Obserwacja 8.2.5 (Przykłady użycia kryterium Diniego). (a) Jeżeli funkcja

$$(0, \pi] \ni t \mapsto \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2f(x_0)}{t}$$

jest całkowalna, to $S_k(f; x_0) \rightarrow f(x_0)$.

(b) W szczególności, jeżeli istnieje skończona granica

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2f(x_0)}{t},$$

to $S(f; x_0) = f(x_0)$.

(c) W szczególności, jeżeli granice jednostronne $f(x_0 \pm) := \lim_{t \rightarrow 0 \pm} f(x_0 \pm t)$ istnieją i są skończone, $2f(x_0) = f(x_0+) + f(x_0-)$ oraz istnieją skończone granice $\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 \pm t) - f(x_0 \pm)}{t}$, to $S(f; x_0) = f(x_0)$.

(d) W szczególności, jeżeli $f'(x_0)$ istnieje, to $S(f; x_0) = f(x_0)$.

(e) Jeżeli granice jednostronne $f(x_0 \pm)$ istnieją i są skończone, $2f(x_0) = f(x_0+) + f(x_0-)$ oraz

$$|f(x_0 \pm t) - f(x_0 \pm)| \leq Ct^\alpha, \quad 0 \leq t \leq \delta,$$

dla pewnych $C, \alpha, \delta > 0$, to funkcja ψ (z $A := f(x_0)$) jest całkowalna, a zatem $S(f; x_0) = f(x_0)$.

Przykład 8.2.6. Niech $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją okresową o okresie 2π taką, że

$$h(x) = \begin{cases} -x - \pi, & \text{jeżeli } -\pi \leq x < 0 \\ 0, & \text{jeżeli } x = 0 \\ -x + \pi, & \text{jeżeli } 0 < x \leq \pi \end{cases}.$$

Wtedy

$$h(x) = S(h; x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ponadto, szereg jest zbieżny niemal jednostajnie na przedziale $(0, 2\pi)$ ⁽²⁾.

Istotnie, funkcja h jest nieparzysta, więc $a_n(h) = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$. Ponadto

$$b_n(h) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - t) \sin nt \, dt = -\frac{2}{n} \cos nt \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi} \frac{1}{n} \cos nt \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \frac{1}{n^2} \sin nt \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n} \left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) \cos nt \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n}.$$

Zauważmy, że funkcja h spełnia w każdym punkcie warunek z kryterium Diniego bo jest różniczkowalna w $[-\pi, 0) \cup (0, \pi]$ (dla $x_0 = 0$ zbieżność jest trywialna). Zbieżność niemal jednostajna wynika z kryterium Dirichleta jednostajnej zbieżności. Istotnie, na podstawie Przykładu 6.2.2(a) wiemy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ jest zbieżny niemal jednostajnie na $\mathbb{T} \setminus \{1\}$. W szczególności, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \operatorname{Im} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^{ix})^n}{n} \right)$ jest zbieżny niemal jednostajnie na $[-\pi, 0) \cup (0, \pi]$.

8.3. Twierdzenie Fejéra

Twierdzenie 8.3.1 (Twierdzenie Fejéra ⁽³⁾). Dla $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ zdefiniujemy:

$$\sigma_k(f; x) := \frac{S_0(f; x) + \cdots + S_{k-1}(f; x)}{k}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Wtedy $\sigma_k(f; \cdot) \rightarrow f$ jednostajnie na $\mathbb{R}$.

Dowód. Korzystając z Lematu 8.2.2 i wzoru

$$\sum_{j=0}^{k-1} \sin(2j+1)\alpha = \frac{\sin^2 k\alpha}{\sin \alpha} \quad (\text{ĆWICZENIE}),$$

dostajemy

$$\begin{aligned} \sigma_k(f; x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \cdot \frac{1}{k \sin \frac{t}{2}} \sum_{j=0}^{k-1} \sin(2j+1) \frac{t}{2} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \cdot \frac{\sin^2 k \frac{t}{2}}{k \sin^2 \frac{t}{2}} dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Niech

$$\Psi_k(x) := \frac{\sin^2 k \frac{x}{2}}{k \sin^2 \frac{x}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Zauważmy, że $\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \Psi_k(t) dt = 1$, $k \in \mathbb{N}$. Niech $C > 0$ będzie takie, że $|f(x)| \leq C$, $x \in \mathbb{R}$. Dla $0 < \delta < \pi$ liczymy:

$$\begin{aligned} |\sigma_k(f; x) - f(x)| &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{2} \right| \Psi_k(t) dt \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \omega_f(\delta) \Psi_k(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} 2C \Psi_k(t) dt \leq \omega_f(\delta) + \frac{2C}{k \sin^2 \frac{\delta}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad \square \end{aligned}$$

Definicja 8.3.2. Wielomianem trygonometrycznym nazywamy dowolną funkcję postaci

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha_0 + \sum_{n=1}^k (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx).$$

Jako natychmiastowy wniosek z twierdzenia Fejéra dostajemy następujący wynik.

Wniosek 8.3.3. Dla dowolnej funkcji $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ istnieje ciąg wielomianów trygonometrycznych $(w_k)_{k=1}^{\infty}$ taki, że $w_k \rightarrow f$ jednostajnie na $\mathbb{R}$.

⁽²⁾ Tzn. jest zbieżny jednostajnie na dowolnym zbiorze zwartym $K \subset (0, 2\pi)$.
⁽³⁾ Lipót Fejér (1880–1959).

Twierdzenie 8.3.4 (Twierdzenie aproksymacyjne Weierstrassa). *Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{C}([a, b])$ istnieje ciąg wielomianów $(P_k)_{k=1}^\infty$ taki, że $P_k \rightarrow f$ jednostajnie na $[a, b]$.*

Dowód. Istotnie, problem sprowadza się do udowodnienia, że każda funkcja $f \in \mathcal{C}([0, \pi])$ daje się jednostajnie aproksymować wielomianami (ĆWICZENIE). Ustalmy f . Funkcję tę możemy oczywiście przedłużyć do funkcji ciągłej na $\mathbb{R}$ i okresowej o okresie 2π . Na podstawie Wniosku 8.3.3, dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje wielomian trygonometryczny w taki, że $|w(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $x \in \mathbb{R}$. W takim razie problem sprowadza się do aproksymacji na $[0, \pi]$ wielomianów trygonometrycznych zwykłymi wielomianami. Wobec postaci wielomianu trygonometrycznego, wystarczy umieć aproksymować funkcje $x \mapsto \cos nx$ i $x \mapsto \sin nx$, $n \in \mathbb{N}$. To zaś wynika bezpośrednio z faktu, że funkcje te są rozwijalne w szeregi potęgowe zbieżne na $\mathbb{R}$. $\square$

8.4. Szeregi Fouriera — abstrakcyjny punkt widzenia

Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią z semi-iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (zob. § 5.11.3). Od tej chwili zakładamy, że $\dim \mathcal{H} = \infty$. Przypuśćmy, że $(\varphi_n)_{n=0}^\infty \subset \mathcal{H}$ jest *układem ortonormalnym* w $\mathcal{H}$, tzn. $\langle \varphi_j, \varphi_k \rangle = \delta_{j,k}$, $j, k = 0, 1, 2, \dots$.

Obserwacja 8.4.1. Niech $\mathcal{H} = \mathcal{R}([-\pi, \pi])$. Wtedy układ trygonometryczny

$$\varphi_0 := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \varphi_{2n-1}(x) := \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad \varphi_{2n}(x) := \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

jest ortonormalny, tzn. $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_j(t) \varphi_k(t) dt = \delta_{j,k}$, $j, k \in \mathbb{N}_0$.

Obserwacja 8.4.2. (a) Jeżeli $f = \lambda_0 \varphi_0 + \dots + \lambda_k \varphi_k$, to $\lambda_j = \langle f, \varphi_j \rangle$, $j = 0, \dots, k$, oraz $\|f\|^2 = |\lambda_0|^2 + \dots + |\lambda_k|^2$.

(b) Układ $(\varphi_j)_{j=0}^\infty$ jest liniowo niezależny.

(c) (*Ortonormalizacja*) Niech $(\psi_j)_{j=0}^\infty$ będzie dowolnym układem liniowo niezależnym. Wtedy istnieje taki układ ortonormalny $(\varphi_j)_{j=0}^\infty$, że dla dowolnego $k = 0, 1, 2, \dots$ mamy

$$\mathbb{K}\psi_0 + \dots + \mathbb{K}\psi_k = \mathbb{K}\varphi_0 + \dots + \mathbb{K}\varphi_k. \quad (*)$$

Istotnie, definiujemy $\varphi_0 := \psi_0 / \|\psi_0\|$ i jeżeli już $\varphi_0, \dots, \varphi_\ell$ są zdefiniowane i spełniają (*) dla $k = 0, \dots, \ell$, to kładziemy $\varphi_{\ell+1} := \vartheta_{\ell+1} / \|\vartheta_{\ell+1}\|$, gdzie $\vartheta_{\ell+1} := \psi_{\ell+1} - \sum_{j=0}^{\ell} \langle \psi_{\ell+1}, \varphi_j \rangle \varphi_j$. Sprawdzamy, że $\varphi_0, \dots, \varphi_{\ell+1}$ spełniają wszystkie wymagane warunki:

$$\langle \vartheta_{\ell+1}, \varphi_k \rangle = \langle \psi_{\ell+1}, \varphi_k \rangle - \sum_{j=0}^{\ell} \langle \psi_{\ell+1}, \varphi_j \rangle \langle \varphi_j, \varphi_k \rangle = 0, \quad k = 1, \dots, \ell.$$

Niech $V_k := \mathbb{K}\varphi_0 + \dots + \mathbb{K}\varphi_k$. Oczywiście $V_k \subset V_{k+1}$ oraz $\dim_{\mathbb{K}} V_k = k + 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Zdefiniujmy $S_k : \mathcal{H} \rightarrow V_k$, $S_k(f) := \langle f, \varphi_0 \rangle \varphi_0 + \dots + \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Wiemy, że $\|S_k(f)\|^2 = \sum_{j=0}^k |\langle f, \varphi_j \rangle|^2$.

Obserwacja 8.4.3. (a) S_k jest operacją $\mathbb{K}$ -liniową.

(b) $S_k = \text{id}$ na V_k .

(c) $\langle f - S_k(f), g \rangle = 0$, $g \in V_k$.

Istotnie, $\langle f - S_k(f), \varphi_j \rangle = \langle f, \varphi_j \rangle - \langle S_k(f), \varphi_j \rangle = \langle f, \varphi_j \rangle - \langle f, \varphi_j \rangle = 0$, $j = 0, \dots, k$.

(d) $\|f - S_k(f)\|^2 = \|f\|^2 - \|S_k(f)\|^2$, $f \in \mathcal{H}$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Istotnie, $\|f\|^2 = \|S_k(f) + (f - S_k(f))\|^2 = \|S_k(f)\|^2 + \|f - S_k(f)\|^2$.

(e) (Nierówność Bessela ⁽⁴⁾) $\sum_{n=0}^{\infty} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2 \leq \|f\|^2$, $f \in \mathcal{H}$.

(f) Jeżeli $\mathcal{H} = \mathcal{R}_{2\pi}([-\pi, \pi])$, zaś $(\varphi_n)_{n=0}^\infty$ jest układem trygonometrycznym, to nierówność Bessela ma postać:

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt.$$

⁽⁴⁾ Friedrich Bessel (1784–1846).

Istotnie, $\sum_{n=0}^{\infty} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2 = (\sqrt{\frac{\pi}{2}} a_0)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} ((\sqrt{\pi} a_n)^2 + (\sqrt{\pi} b_n)^2)$.

(g) $S_k(f)$ realizuje semi-odległość elementu f od przestrzeni V_k , tzn. $\|f - S_k(f)\| = \text{dist}(f, V_k) := \inf\{\|f - g\| : g \in V_k\}$, $f \in \mathcal{H}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Istotnie,

$$\|f - \sum_{j=0}^k \lambda_j \varphi_j\|^2 - \|f - S_k(f)\|^2 = -2 \operatorname{Re} \left(\sum_{j=0}^k \lambda_j \overline{\langle f, \varphi_j \rangle} \right) + \sum_{j=0}^k |\lambda_j|^2 + \sum_{j=0}^k |\langle f, \varphi_j \rangle|^2 = \sum_{j=0}^k |\lambda_j - \langle f, \varphi_j \rangle|^2.$$

(h) $S_k(f)$ jest jedynym elementem o własności (g).

Od tej chwili zakładamy, że $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jest iloczynem skalarnym, z którym $\mathcal{H}$ jest przestrzenią Hilberta.

Twierdzenie 8.4.4. Dla dowolnego $f \in \mathcal{H}$, szereg $S(f) := \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n$ jest zbieżny.

Dowód. Pokażemy, że szereg $S(f)$ spełnia warunek Cauchy'ego. Mamy

$$\left\| \sum_{j=n}^m \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j \right\|^2 = \sum_{j=n}^m |\langle f, \varphi_j \rangle|^2, \quad m > n.$$

Teraz wystarczy skorzystać z nierówności Bessela). □

Zauważmy, że $(k+1)$ -sza suma częściowa szeregu $S(f)$ jest równa $S_k(f)$. Szereg $S(f)$ nazywamy *szeregiem Fouriera* elementu f (w bazie ortonormalnej $(\varphi_j)_{j=0}^{\infty}$). Jest widoczne, że operacja $\mathcal{H} \ni f \mapsto S(f) \in \mathcal{H}$ jest liniowa. Ponadto, $\|f - S(f)\|^2 = \|f\|^2 - \|S(f)\|^2$. W szczególności, $\|S(f)\| \leq \|f\|$, $f \in \mathcal{H}$.

Niech $V := \bigcup_{k=0}^{\infty} V_k$. Odnajdujemy, że V jest podprzestrzenią wektorową $\mathcal{H}$.

Twierdzenie 8.4.5. Następujące warunki są równoważne:

- (i) $S = \text{id}$;
- (ii) $\|S(f)\| = \|f\|$, $f \in \mathcal{H}$, tzn. S jest izometrią;
- (iii) zachodzi tożsamość Parsevala ⁽⁵⁾ $\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \overline{\langle g, \varphi_n \rangle}$, $f, g \in \mathcal{H}$;
- (iv) $V^{\perp} = \{0\}$, tzn. jeżeli $\langle f, \varphi_j \rangle = 0$ dla $j = 0, 1, 2, \dots$, to $f = 0$;
- (v) $\overline{V} = \mathcal{H}$.

Dowód. (i) $\implies$ (iii): $\langle f, g \rangle = \langle S(f), S(g) \rangle$.

(iii) $\implies$ (ii): $f = g$.

(ii) $\implies$ (i): Wynika z równości $\|f - S(f)\|^2 = \|f\|^2 - \|S(f)\|^2$.

(i) $\implies$ (iv): Jeżeli $f \perp \varphi_j$ dla dowolnego j , to $S(f) = 0$.

(iv) $\implies$ (i): $\langle f - S(f), \varphi_j \rangle = 0$ dla dowolnego j .

(i) $\implies$ (v): $V \ni S_k(f) \longrightarrow f \in \overline{V}$.

(v) $\implies$ (i): Przypuśćmy, że $V \supset V_{k_\nu} \ni f_{k_\nu} \longrightarrow f$. Wtedy

$$\|f - S_{k_\nu}(f)\| = \text{dist}(f, V_{k_\nu}) \leq \|f - f_{k_\nu}\| \longrightarrow 0.$$

Ponieważ ciąg $(\|f - S_k(f)\|)_{k=0}^{\infty}$ jest monotoniczny ⁽⁶⁾, zatem $\|f - S_k(f)\| \longrightarrow 0$, a stąd $\|f - S(f)\| = 0$, czyli $S(f) = f$. □

Definicja 8.4.6. Jeżeli jest spełniony którykolwiek z równoważnych warunków z Twierdzenia 8.4.5, to mówimy, że układ ortonormalny $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$ jest *zupełny*.

Twierdzenie 8.4.7. Dla nieskończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ następujące warunki są równoważne:

- (i) w $\mathcal{H}$ istnieje układ ortonormalny zupełny;
- (ii) $\mathcal{H}$ jest przestrzenią ośrodkową, tzn. posiada przeliczalny podzbiór gęsty.

⁽⁵⁾ Marc-Antoine Parseval (1755–1836).

⁽⁶⁾ $\|f - S_{k+1}(f)\| = \text{dist}(f, V_{k+1}) \leq \text{dist}(f, V_k) = \|f - S_k(f)\|$.

Dowód. (i) $\implies$ (ii): Niech $(\varphi_j)_{j=0}^\infty$ będzie układem ortonormalnym zupełnym. Wtedy, na podstawie Twierdzenia 8.4.5, zbiór $A := \{\lambda_0\varphi_0 + \dots + \lambda_k\varphi_k : k \in \mathbb{N}_0, \lambda_0, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K} \cap (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})\}$ jest gęsty w $\mathcal{H}$ (i oczywiście przeliczalny).

(ii) $\implies$ (i): Wobec Obserwacji 8.4.2(c) wystarczy znaleźć układ liniowo niezależny $(\psi_j)_{j=0}^\infty$ taki, że przestrzeń $V := \bigcup_{k=0}^\infty (\mathbb{K}\psi_0 + \dots + \mathbb{K}\psi_k)$ jest gęsta w $\mathcal{H}$. Niech $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ będzie zbiorem przeliczalnym gęstym i niech $\psi_0 := a_{k_0}$ będzie pierwszym niezerowym wektorem w tym ciągu. Niech dalej $\psi_1 := a_{k_1}$ będzie pierwszym wektorem liniowo niezależnym z a_{k_0} . Jeżeli już określimy $\psi_j = a_{k_j}$ dla $j = 0, \dots, \ell$, to chcemy by $\psi_{\ell+1} := a_{k_{\ell+1}}$ był pierwszym wektorem liniowo niezależnym z $a_{k_0}, \dots, a_{k_\ell}$. Gdyby ta procedura się zacięła na pewnym ℓ , to wtedy $A \subset W := \mathbb{K}a_{k_0} + \dots + \mathbb{K}a_{k_\ell}$. Przestrzeń W , jako przestrzeń skończenie wymiarowa jest domknięta (zob. Wniosek 5.11.12). Wynika stąd, że $\mathcal{H} = \overline{A} = W$, a więc $\mathcal{H}$ musi być przestrzenią skończenie wymiarową; sprzeczność.

Tak więc nasza procedura daje liniowo niezależny układ $(\psi_j)_{j=0}^\infty$ taki, że $A \subset V$, gdzie V jest jak powyżej. W szczególności, $\mathcal{H} = \overline{A} = \overline{V}$. $\square$

Obserwacja 8.4.8. Przypomnijmy raz jeszcze, że przestrzeń $\mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R})$ *nie* jest przestrzenią Hilberta i nie możemy dla niej skorzystać z Twierdzenia 8.4.7. Będzie to możliwe dla przestrzeni $L^2_{2\pi}(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f|_{[-\pi, \pi]} \in L^2([-\pi, \pi]), \forall x \in \mathbb{R} : f(x+2\pi) = f(x)\}$, gdzie $L^2([-\pi, \pi])$ oznacza przestrzeń funkcji całkowalnych z kwadratem w sensie Lebesgue'a. Do tematu wrócimy w trakcie wykładu z Analizy Matematycznej 4.

8.5. Kryteria zbieżności jednostajnej

Twierdzenie 8.5.1 (Kryterium zbieżności jednostajnej). *Niech $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ będzie taka, że $f|_{[-\pi, \pi]} \in \mathcal{C}^1([-\pi, \pi])$. Wtedy $S_k(f; \cdot) \rightarrow f$ jednostajnie na $\mathbb{R}$.*

Dowód. Wobec Kryterium Diniego wiemy, że $S_k(f; x) \rightarrow f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Wystarczy więc pokazać, że ciąg $(S_k(f))_{k=0}^\infty$ jest zbieżny jednostajnie. Zastosujemy kryterium Weierstrassa i wykażemy, że

$$\sum_{n=1}^\infty |a_n(f)| + |b_n(f)| < +\infty.$$

Zauważmy, że $f' \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R})$. W szczególności, na podstawie nierówności Bessela, mamy:

$$\frac{1}{2}a_0^2(f') + \sum_{n=1}^\infty (a_n^2(f') + b_n^2(f')) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f'^2(t) dt.$$

Całkując przez części dostajemy: $a_n(f') = nb_n(f)$, $b_n(f') = -na_n(f)$, $n = 1, 2, \dots$ ⁽⁷⁾. Teraz, na podstawie nierówności Schwarz'a, mamy:

$$\sum_{n=1}^\infty |a_n(f)| = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} |b_n(f')| \leq \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^\infty b_n^2(f') \right)^{1/2} < +\infty.$$

Zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^\infty |b_n(f)|$ sprawdzamy analogicznie. $\square$

Twierdzenie 8.5.2 (Kryterium zbieżności niemal jednostajnej). *Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją okresową o okresie 2π , taką, że $f|_{[-\pi, \pi]} \in \mathcal{C}^1([-\pi, \pi])$. Wtedy*

$$S_k(f; x) \rightarrow \frac{f(x+) + f(x-)}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ponadto, $S_k(f; \cdot) \rightarrow f$ niemal jednostajnie w dowolnym przedziale otwartym, w którym f jest klasy $\mathcal{C}^1$.

Dowód. Przypomnijmy Przykład 8.2.6. Niech $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją okresową o okresie 2π taką, że

$$h(x) = \begin{cases} -x - \pi, & \text{jeżeli } -\pi \leq x < 0 \\ 0, & \text{jeżeli } x = 0 \\ -x + \pi, & \text{jeżeli } 0 < x \leq \pi \end{cases}.$$

⁽⁷⁾ Dla przykładu: $a_n(f') = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f'(t) \cos nt dt = \frac{1}{\pi} f(t) \cos nt|_{-\pi}^\pi + \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(t) \sin nt dt = nb_n(f)$.

Wtedy

$$h(x) = S(h; x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ponadto, szereg jest zbieżny niemal jednostajnie na przedziale $(0, 2\pi)$.

Bez zmiany szeregu Fouriera możemy zmodyfikować funkcję f tak, by

$$2f(x) = f(x+) + f(x-), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Po takiej zmianie, pierwsza część tezy sprowadza się do udowodnienia, że

$$S_k(f; \cdot) \longrightarrow f \text{ punktowo na } \mathbb{R}.$$

Założenie, że f jest kawałkami klasy $\mathcal{C}^1$ gwarantuje, że w każdym punkcie $x \in \mathbb{R}$, spełniony jest warunek z kryterium Diniego, tzn. istnieje skończona granica

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x-h) - f(x)}{h},$$

co daje zbieżność punktową.

Problemem jest zbieżność niemal jednostajna. Niech $-\pi = \xi_0 < \dots < \xi_N = \pi$ będą punktami „osobliwymi” funkcji f , tzn. dla dowolnego $j \in \{1, \dots, N\}$ funkcja

$$[\xi_{j-1}, \xi_j] \ni x \mapsto \begin{cases} f(\xi_{j-1}+), & \text{jeżeli } x = \xi_{j-1} \\ f(x), & \text{jeżeli } \xi_{j-1} < x < \xi_j \\ f(\xi_j-), & \text{jeżeli } x = \xi_j \end{cases}$$

jest klasy $\mathcal{C}^1$. Niech

$$c_j := \begin{cases} \frac{1}{4}(f(\xi_j+) - f(\xi_j-)), & \text{jeżeli } j \in \{0, N\} \\ \frac{1}{2}(f(\xi_j+) - f(\xi_j-)), & \text{jeżeli } j = 1, \dots, N-1 \end{cases}.$$

Odnótujmy, że $c_0 = c_N$. Zdefiniujmy

$$g(x) := f(x) - \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^N c_j h(x - \xi_j), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Jest to oczywiście funkcja okresowa o okresie 2π i kawałkami klasy $\mathcal{C}^1$ (o co najwyżej tych samych punktach osobliwych w $[-\pi, \pi]$). Pokażemy, że g jest ciągła.

Istotnie, dla $\ell \in \{0, N\}$ mamy:

$$\begin{aligned} g(\xi_\ell+) - g(\xi_\ell-) &= 4c_\ell - \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^N c_j \left(h((\xi_\ell - \xi_j) +) - h((\xi_\ell - \xi_j) -) \right) \\ &= 4c_\ell - 2 \sum_{\substack{j \in \{0, \dots, N\}: \\ (\xi_\ell - \xi_j)/(2\pi) \in \mathbb{Z}}} c_j = 4c_\ell - 2c_\ell - 2c_\ell = 0, \end{aligned}$$

zaś dla $\ell \in \{1, \dots, N-1\}$ mamy:

$$g(\xi_\ell+) - g(\xi_\ell-) = 2c_\ell - \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^N c_j \left(h((\xi_\ell - \xi_j) +) - h((\xi_\ell - \xi_j) -) \right) = 2c_\ell - 2c_\ell = 0.$$

Na podstawie Twierdzenia 8.5.1, $S_k(g, \cdot) \longrightarrow g$ jednostajnie na $\mathbb{R}$. Zauważmy, że

$$S_k(g; x) = S_k(f; x) - \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^N c_j S_k(h(\cdot - \xi_j); x), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Teraz pozostaje już tylko skorzystać z Przykładu 8.2.6, z którego wynika, że $S_k(h(\cdot - \xi_j); x) \longrightarrow h(x - \xi_j)$ niemal jednostajnie w każdym z przedziałów (ξ_{j-1}, ξ_j) , $j = 1, \dots, N$. $\square$

8.6. Funkcje o wahanu ograniczonym

Definicja 8.6.1. Dla dowolnej funkcji $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniujemy

$$\mathbb{V}(f) = \mathbb{V}_{[a,b]}(f) := \sup \left\{ \sum_{j=1}^N |f(t_{j-1}) - f(t_j)| : N \in \mathbb{N}, a = t_0 < \dots < t_N = b \right\}.$$

Liczbę $\mathbb{V}(f) \in [0, +\infty]$ nazywamy *wahaniem* funkcji f na przedziale $[a, b]$. Jeżeli $\mathbb{V}(f) < +\infty$, to mówimy, że funkcja f ma *wahanie ograniczone*. Zbiór funkcji o wahanu ograniczonym na przedziale $[a, b]$ oznaczamy przez $\mathcal{BV}([a, b])$.

Obserwacja 8.6.2 (Odwzorowania o wahanu ograniczonym). (a) $\mathbb{V}(\alpha f) = |\alpha| \mathbb{V}(f)$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

$\mathbb{V}(f + g) \leq \mathbb{V}(f) + \mathbb{V}(g)$. W szczególności, $\mathcal{BV}([a, b])$ jest przestrzenią wektorową.

(b) $\mathbb{V}_{[a,b]}(f) = \mathbb{V}_{[a,c]}(f) + \mathbb{V}_{[c,b]}(f)$, $a \leq c \leq b$. W szczególności, $\mathbb{V}_{[c,d]}(f) \leq \mathbb{V}_{[a,b]}(f)$ dla $[c, d] \subset [a, b]$.

(c) $|f(x') - f(x'')| \leq \mathbb{V}_{[x', x'']}(f)$, $x', x'' \in [a, b]$. W szczególności, $\mathcal{BV}([a, b]) \subset \mathcal{B}([a, b])$.

(d) Dla $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mamy: $\mathbb{V}(fg) \leq (\sup_{[a,b]} |f|) \cdot \mathbb{V}(g) + \mathbb{V}(f) \cdot (\sup_{[a,b]} |g|)$. W szczególności, $\mathcal{BV}([a, b])$ jest algebrą.

(e) Jeżeli $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest monotoniczna, to $\mathbb{V}(f) = |f(a) - f(b)|$. W szczególności, $f \in \mathcal{BV}([a, b])$.

(f) Jeżeli $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą L , to $\mathbb{V}(f) \leq L(b - a)$. Dla przykładu, jeżeli f jest różniczkowalna i ma ograniczoną pochodną, to $f \in \mathcal{BV}([a, b])$. W szczególności, $\mathcal{C}^1([a, b]) \subset \mathcal{BV}([a, b])$.

(g) Niech $f(x) := \begin{cases} x \sin \frac{\pi}{x}, & \text{jeżeli } 0 < x \leq 2 \\ 0, & \text{jeżeli } x = 0 \end{cases}$ (f jest oczywiście ciągła). Mamy:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_{[0,2]}(f) &\geq \sum_{j=1}^{n-1} \left| f\left(\frac{2}{2n-2j+3}\right) - f\left(\frac{2}{2n-2j+1}\right) \right| \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{2}{2n-2j+3} + \frac{2}{2n-2j+1} \right) \geq 4 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2n-2j+3} \xrightarrow{\text{ĆWICZENIE}} +\infty. \end{aligned}$$

(h) Dla $f \in \mathcal{BV}([a, b])$ mamy: $f \in \mathcal{C}([a, b]) \iff$ funkcja $[a, b] \ni x \mapsto \mathbb{V}_{[a,x]}(f)$ jest ciągła.

Istotnie, implikacja $(\Leftarrow)$ wynika (b) i (c): $|f(x') - f(x'')| \leq |\mathbb{V}_{[a,x']}(f) - \mathbb{V}_{[a,x'']}(f)|$, $x', x'' \in [a, b]$.

Dla dowodu implikacji $(\Rightarrow)$ zauważmy, że, wobec (b), funkcja φ jest niemalejąca, a więc jej nieciągłość oznacza istnienie skoku, np. $\varphi(x) > \varphi(x_0) + \delta$ dla dowolnych $a \leq x_0 < x \leq b$, gdzie $\delta > 0$. Wobec (b) mamy: $\mathbb{V}_{[x_0,x]}(f) > \delta$, $x_0 < x$. W szczególności, $\mathbb{V}_{[x_0,b]}(f) > \delta$, co oznacza istnienie podziału

$x_0 = t_0 < \dots < t_N = b$ takiego, że $\sum_{j=1}^N |f(t_j) - f(t_{j-1})| > \delta$. Korzystając z ciągłości funkcji f wnioskujemy, że istnieje punkt $x_0 < x_1 < t_1$ taki, że $|f(x_1) - f(t_1)| + \sum_{j=2}^N |f(t_j) - f(t_{j-1})| > \delta$, skąd wynika,

że $\mathbb{V}_{[x_1,b]}(f) > \delta$. Powtarzając to samo rozumowanie dla przedziału $[x_0, x_1]$, wnioskujemy, że istnieje $x_0 < x_2 < x_1$ taki, że $\mathbb{V}_{[x_2,x_1]}(f) > \delta$. Po k krokach dostajemy ciąg $x_0 < x_k < \dots < x_1 < b$ taki, że $\mathbb{V}_{[x_j, x_{j-1}]}(f) > \delta$, $j = k, \dots, 2$. Teraz, korzystając z (b), mamy:

$$\mathbb{V}_{[x_0,b]}(f) = \mathbb{V}_{[x_0,x_k]}(f) + \mathbb{V}_{[x_k,x_{k-1}]}(f) + \dots + \mathbb{V}_{[x_2,x_1]}(f) + \mathbb{V}_{[x_1,b]}(f) \geq (k+1)\delta \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty;$$

sprzeczność.

W przypadku skoku: $\varphi(x) < \varphi(x_0) - \delta$ dla dowolnych $a \leq x < x_0 \leq b$, postępujemy analogicznie.

Twierdzenie 8.6.3 (Rozkład Jordana). Funkcja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ma wahanie ograniczone wtedy i tylko wtedy, gdy $f = f_1 - f_2$, gdzie $f_1, f_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ są niemalejące ⁽⁸⁾. W szczególności, zbiór punktów nieciągłości funkcji o wahanu ograniczonym może być co najwyżej przeliczalny oraz każda funkcja o wahanu ograniczonym ma w każdym punkcie skończone granice jednostronne.

Ponadto, jeżeli f jest ciągła, to funkcje f_1 i f_2 można wybrać w klasie funkcji ciągłych.

⁽⁸⁾ Jest to tzw. rozkład Jordana. Oczywiście nie jest on jednoznaczny: $f = (f_1 + c) - (f_2 + c)$, $c \geq 0$.

Dowód. Dostateczność warunku wynika z Obserwacji 8.6.2(a)(e).

Dla dowodu konieczności, niech $f_1(x) := \mathbb{V}_{[a,x]}(f) + |f(a)|$, $x \in [a, b]$. Na podstawie Obserwacji 8.6.2(b), funkcja f_1 jest niemalejąca. Ponadto, na podstawie Obserwacji 8.6.2(h), jeżeli f jest ciągła, to f_1 jest ciągła. Pozostaje wykazać, że funkcja $f_2 := f_1 - f$ jest niemalejąca (ponieważ $f_2(a) = f_1(a) - f(a) = |f(a)| - f(a) \geq 0$, będzie ona automatycznie nieujemna). Korzystając z Obserwacji 8.6.2(b)(c), dla $a \leq x' < x'' \leq b$, mamy:

$$f_2(x'') - f_2(x') = \mathbb{V}_{[a,x'']}(f) - \mathbb{V}_{[a,x']}(f) - (f(x'') - f(x')) = \mathbb{V}_{[x',x'']}(f) - (f(x'') - f(x')) \geq 0. \quad \square$$

8.7. Kryterium Jordana

Twierdzenie 8.7.1 (Kryterium Jordana). Niech $f \in \mathcal{R}_{2\pi}^1(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}$ i $0 < \delta \leq \pi$ będą takie, że $\mathbb{V}_{[x_0-\delta, x_0+\delta]}(f) < +\infty$ oraz $2f(x_0) = f(x_0+) + f(x_0-)$ ⁽⁹⁾. Wtedy $S_k(f; x_0) \rightarrow f(x_0)$.

Lemat 8.7.2 (Twierdzenie o wartości średniej). Niech $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ będzie funkcją monotoniczną i niech $\psi \in \mathcal{R}([a, b])$. Wtedy istnieje punkt $\xi \in [a, b]$ taki, że

$$\int_a^b \varphi(t)\psi(t) dt = \begin{cases} \varphi(b-) \int_a^b \psi(t) dt, & \text{jeżeli } \varphi \text{ jest rosnąca} \\ \varphi(a+) \int_a^b \psi(t) dt, & \text{jeżeli } \varphi \text{ jest malejąca} \end{cases}.$$

Dowód. Podstawienie $t := a + b - u$ redukuje przypadek malejący do rosnącego. Dla $n \in \mathbb{N}$, niech

$$t_{n,j} := a + \frac{b-a}{n}j, \quad j = 0, \dots, n.$$

Mamy $\int_a^b \varphi(t)\psi(t) dt = s_n^{(1)} + s_n^{(2)}$, gdzie

$$s_n^{(1)} := \sum_{j=1}^n \varphi(t_{n,j-1}) \int_{t_{n,j-1}}^{t_{n,j}} \psi(t) dt, \quad s_n^{(2)} := \sum_{j=1}^n \int_{t_{n,j-1}}^{t_{n,j}} (\varphi(t) - \varphi(t_{n,j-1})) \psi(t) dt.$$

Niech

$$g(x) := \int_x^b \psi(t) dt, \quad x \in [a, b].$$

Przypomnijmy (Twierdzenie 7.3.1), że g jest funkcją ciągłą. Niech $m := \min_{[a,b]} g$, $M := \max_{[a,b]} g$. Przekształcamy:

$$s_n^{(1)} = \sum_{j=1}^n \varphi(t_{n,j-1}) (g(t_{n,j-1}) - g(t_{n,j})) = \varphi(a)g(a) + \sum_{j=1}^{n-1} g(t_{n,j}) (\varphi(t_{n,j}) - \varphi(t_{n,j-1})).$$

Wynika stąd, że

$$m\varphi(t_{n,n-1}) \leq s_n^{(1)} \leq M\varphi(t_{n,n-1}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dalej mamy:

$$|s_n^{(2)}| \leq (\varphi(b) - \varphi(a)) \max_{j=1, \dots, n} \int_{t_{n,j-1}}^{t_{n,j}} |\psi(t)| dt \leq (\varphi(b) - \varphi(a)) C \frac{b-a}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

gdzie $|\psi| \leq C = \text{const}$. Ostatecznie, przechodząc z n do $+\infty$ dostajemy:

$$m\varphi(b-) \leq \int_a^b \varphi(t)\psi(t) dt \leq M\varphi(b-).$$

Teraz wystarczy już tylko skorzystać z własności Darboux (dla funkcji g). $\square$

Dowód Twierdzenia 8.7.1. Na podstawie rozkładu Jordana mamy:

$$f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2f(x_0) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t),$$

gdzie $\varphi_1, \varphi_2 : [0, \delta] \rightarrow \mathbb{R}_+$ są niemalejące. Ponieważ

$$\varphi_1(0+) - \varphi_2(0+) = f(x_0+) + f(x_0-) - 2f(x_0) = 0,$$

⁽⁹⁾ Przypomnijmy, że (wobec rozkładu Jordana) granice jednostronne istnieją.

możemy założyć, że $\varphi_1(0+) = \varphi_2(0+) = 0$ (zastępując φ_j przez $\varphi_j - \varphi_j(0+)$). Teraz, wobec zasady lokalizacji (Twierdzenie 8.2.3 zastosowane do funkcji $f - f(x_0)$), wystarczy pokazać, że dla dowolnej funkcji niemalejącej $\varphi : [0, \delta] \rightarrow \mathbb{R}_+$ takiej, że $\varphi(0+) = 0$ mamy:

$$\int_0^\delta \frac{\varphi(t)}{2} \frac{\sin \frac{(2k+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} dt \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

Zauważmy, że

$$\int_0^\delta \frac{\varphi(t)}{2} \frac{\sin \frac{(2k+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} dt - \int_0^\delta \frac{\varphi(t)}{t} \sin \frac{(2k+1)t}{2} dt = \int_0^\delta \varphi(t) \left(\frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right) \sin \frac{(2k+1)t}{2} dt.$$

Ponieważ $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right) = 0$ (ĆWICZENIE), zatem funkcja

$$(0, \delta] \ni t \mapsto \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{t}, \quad \psi(0) := 0,$$

jest całkowalna (por. Obserwacja 7.6.2(e)). W takim razie, na podstawie twierdzenia Riemanna–Lebesgue’a, wystarczy pokazać, że

$$\int_0^\delta \frac{\varphi(t)}{t} \sin \frac{(2k+1)t}{2} dt \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

Korzystając z Lematu 8.7.2, dla $0 < \eta \leq \delta$, mamy:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^\delta \frac{\varphi(t)}{t} \sin \frac{(2k+1)t}{2} dt &\stackrel{\text{Tw. R-L}}{=} \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^\eta \frac{\varphi(t)}{t} \sin \frac{(2k+1)t}{2} dt \\ &\stackrel{\text{Lemat 8.7.2}}{=} \lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi(\eta-) \int_{\xi(\eta, k)}^\eta \frac{\sin \frac{(2k+1)t}{2}}{t} dt, \end{aligned}$$

gdzie $\xi(\eta, k) \in [0, \eta]$. Wobec założenia, że $\varphi(0+) = 0$, pozostaje oszacować ostatnią całkę niezależnie od η i k . Mamy:

$$\left| \int_{\xi(\eta, k)}^\eta \frac{\sin \frac{(2k+1)t}{2}}{t} dt \right| = \left| \int_{\frac{(2k+1)\xi(\eta, k)}{2}}^{\frac{(2k+1)\eta}{2}} \frac{\sin u}{u} du \right| \leq C \left(\frac{(2k+1)\xi(\eta, k)}{2} \right) + C \left(\frac{(2k+1)\eta}{2} \right),$$

gdzie

$$C(x) := \left| \int_1^x \frac{\sin u}{u} du \right|, \quad x \geq 0.$$

Korzystając jeszcze raz z Lematu 8.7.2 (z $\varphi(u) := \frac{1}{u}$), mamy:

$$C(x) = \left| \int_1^\xi \sin u \, du \right| \leq 2, \quad x \geq 1,$$

(gdzie $\xi = \xi(x) \in [1, x]$). Tak więc $C(x) \leq \max\{2, C(0)\}$, $x \geq 0$. □

Przykład 8.7.3. Funkcja

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{\ln \frac{|x|}{2\pi}}, & \text{jeżeli } 0 < |x| \leq \pi \\ 0, & \text{jeżeli } x = 0 \end{cases}$$

(po okresowym przedłużeniu na $\mathbb{R}$) spełnia w punkcie $x_0 := 0$ warunki kryterium Jordana (ĆWICZENIE), ale nie spełnia warunków kryterium Diniego bowiem:

$$\int_0^\pi \frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2f(x_0)}{t} dt = 2 \int_0^\pi \frac{1}{t \ln \frac{t}{2\pi}} dt = 2 \int_{-\infty}^{-\ln 2} \frac{du}{u} = -\infty.$$

Przykład 8.7.4. Funkcja

$$f(x) := \begin{cases} |x| \cos \frac{\pi}{2x}, & \text{jeżeli } 0 < |x| \leq \pi \\ 0, & \text{jeżeli } x = 0 \end{cases}$$

(po okresowym przedłużeniu na $\mathbb{R}$) spełnia w punkcie $x_0 := 0$ warunki kryterium Diniego (na podstawie Obserwacji 8.2.5(e)), ale nie spełnia warunków kryterium Jordana (ĆWICZENIE — por. Obserwacja 8.6.2(g)).

8.8. Funkcje ciągłe o rozbieżnym szeregu Fouriera

Niech $\mathcal{E} := C_{2\pi}(\mathbb{R})$. Przestrzeń ta wraz normą supremową

$$\|f\| := \sup\{|f(t)| : t \in \mathbb{R}\} = \sup\{|f(t)| : t \in [-\pi, \pi]\}$$

jest przestrzenią Banacha.

Dla dowolnego ustalonego $x_0 \in \mathbb{R}$ niech $\mathcal{E} \ni f \xrightarrow{L_k} S_k(f; x_0) \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Każdy operator L_k jest liniowy. Niech $\|L_k\| := \sup\{|L_k(f)| : \|f\| \leq 1\}$. Korzystając ze wzoru

$$S_k(f; x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t)}{2} \frac{\sin \frac{2k+1}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} dt,$$

dostajemy

$$\|L_k\| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{|\sin \frac{2k+1}{2}t|}{\sin \frac{t}{2}} dt =: d_k, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Lemat 8.8.1. (a) $\|L_k\| = d_k$, $k \in \mathbb{N}_0$.

(b) $\sup\{d_k : k \in \mathbb{N}_0\} = +\infty$.

Dowód. (a) Ustalmy $k \in \mathbb{N}_0$. Przypadek $k = 0$ jest oczywisty ($S_0(1; x_0) = 1 = d_0$). Niech więc $k \geq 1$. Skonstruujemy ciąg $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{E}$ taki, że $\|f_n\| \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$, oraz $L_k(f) \rightarrow d_k$. Niech

$$g_0(t) := \operatorname{sgn}\left(\frac{\sin \frac{(2k+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Najpierw konstruujemy (ĆWICZENIE) ciąg parzystych funkcji ciągłych i okresowych $g_n : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, taki że $g_n \rightarrow g_0$ punktowo oraz

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi g_n(t) \frac{\sin \frac{2k+1}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} dt \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g_0(t) \frac{\sin \frac{2k+1}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} dt = d_k.$$

Następnie kładziemy $f_n(t) := g_n(t - x_0)$, $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $\frac{f_n(x_0+t) + f_n(x_0-t)}{2} = g_n(t)$, a zatem $L_k(f_n) \rightarrow d_k$.

(b) Mamy

$$\begin{aligned} d_k &\geq \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{|\sin \frac{2k+1}{2}t|}{t} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{(2k+1)\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin u|}{u} du \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{k\pi} \frac{|\sin u|}{u} du \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{s=1}^k \int_{(s-1)\pi}^{s\pi} \frac{|\sin u|}{u} du \geq \frac{2}{\pi} \sum_{s=1}^k \frac{1}{s\pi} \int_{(s-1)\pi}^{s\pi} |\sin u| du = \frac{4}{\pi^2} \sum_{s=1}^k \frac{1}{s} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty. \quad \square \end{aligned}$$

Twierdzenie 8.8.2 (Szczególny przypadek twierdzenia Banacha–Steinhaus⁽¹⁰⁾). *Istnieje zbiór gęsty $A \subset \mathcal{E}$, typu $\mathcal{G}_\delta$ ⁽¹¹⁾, taki że*

$$\sup\{|S_k(f; x_0)| : k \in \mathbb{N}_0\} = \sup\{|L_k(f)| : k \in \mathbb{N}_0\} = +\infty, \quad f \in A. \quad (\dagger)$$

Dowód. Niech $B_n := \{f \in \mathcal{E} : |L_k(f)| \leq n, k \geq 0\}$, $A_n := \mathcal{E} \setminus B_n$, $A := \bigcap_{n=1}^\infty A_n$. Widać, że:

- B_n jest domknięty w $\mathcal{E}$ (ĆWICZENIE),
- A jest typu $\mathcal{G}_\delta$,
- spełniony jest warunek $(\dagger)$.

Pozostaje sprawdzić, że A jest gęsty. Przypuśćmy, że $\overline{B}(f_0, r_0) \subset \mathcal{E} \setminus A = \bigcup_{n=1}^\infty B_n$. Ponieważ przestrzeń $\overline{B}(f_0, r_0)$ jest zupełna, zatem Twierdzenie Baire'a 5.11.28(ii) daje istnienie n_0 takiego, że $\operatorname{int}_{\overline{B}(f_0, r_0)}(B_{n_0} \cap \overline{B}(f_0, r_0)) \neq \emptyset$. Niech $\overline{B}(g_0, r) \subset B_{n_0}$. Wynika stąd, że dla dowolnego $k \geq 0$ mamy:

$$d_k = \|L_k\| = \sup\{\|L_k(f)\| : \|f\| = 1\} \leq \sup\left\{\frac{1}{r}(\|L_k(g_0)\| + \|L_k(g_0 + rf)\|) : \|f\| = 1\right\} \leq \frac{2n_0}{r},$$

⁽¹⁰⁾ Hugo Steinhaus (1887–1972).

⁽¹¹⁾ Tzn. $A = \bigcap_{n=1}^\infty A_n$, gdzie A_n jest otwarty w $\mathcal{E}$, $n \in \mathbb{N}$.

co daje sprzeczność. □

Twierdzenie 8.8.3. *Dla dowolnego zbioru przeliczalnego $B \subset [-\pi, \pi]$ ⁽¹²⁾, istnieje zbiór gęsty $A \subset E$, typu $\mathcal{G}_\delta$, taki że*

$$\sup\{|S_k(f; x)| : k \geq 0\} = +\infty, \quad (f, x) \in A \times B.$$

W szczególności, dla dowolnej funkcji $f \in A$ jej szereg Fouriera $S(f; x)$ jest rozbieżny dla dowolnego $x \in B$.

Dowód. Wobec Twierdzenia 8.8.2 dla dowolnego punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ istnieje zbiór gęsty $A_{x_0} \subset \mathcal{E}$, typu $\mathcal{G}_\delta$, taki że $\sup\{|S_k(f; x_0)| : k \geq 0\} = +\infty$ dla $f \in A_{x_0}$. Zdefiniujmy $A := \bigcap_{x \in B} A_x$. Jest to oczywiście zbiór typu $\mathcal{G}_\delta$. Gęstość wynika z Twierdzenia Baire'a 5.11.28(i). □

⁽¹²⁾ Odnótujemy, że zbiór B może być gęsty w $[-\pi, \pi]$.