Sprawy organizacyjne

Literatura

Wykład będzie w zasadzie „samowystarczalny”. Oto kilka pozycji przydatnej literatury uzupełniającej (wszystkie pozycje zostały wydane przez PWN):

Andrzej Birkholc, *Analiza matematyczna*.
Grigorij Michajłowicz Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. I–III.
Franciszek Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy*.
Witold Kołodziej, *Analiza matematyczna*.
Kazimierz Kuratowski, *Rachunek różniczkowy i całkowy*.
Stanisław Łojasiewicz, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*.
Krzysztof Maurin, *Analiza*, t. I–II.
Walter Rudin, *Podstawy analizy matematycznej*.
Walter Rudin, *Analiza rzeczywista i zespolona*.
Laurent Schwartz, *Kurs analizy matematycznej*, t. I–II.

Program wykładu

(1) Szeregi w przestrzeniach Banacha.
(2) Iloczyny szeregów.
(3) Iloczyny nieskończone.
(4) Szeregi funkcyjne.
(5) Operator odwracania w algebrach Banacha.
(6) Szeregi potęgowe.
(7) Funkcje e^z, $sinz$, $cosz$, $\ldots$.
(8) Przeliczalne rodziny sumowalne.
(9) Funkcje analityczne I.
(10) Różniczkowanie szeregu wyraz po wyrazie.
(11) Funkcje analityczne II.
(12) Szereg Taylora.
(13) Całka Riemanna.
(14) Pierwotne.
(15) Podstawowe twierdzenie rachunku całkowego.
(16) Długość krzywej.
(17) Przykłady zastosowania całek.
(18) Całka niewłaściwa.
(19) Całki krzywoliniowe.
(20) Twierdzenie Riemanna-Lebesgue’a.
(21) Kryterium Diniego.
(22) Twierdzenie Fejéra.
(23) Szeregi Fouriera — abstrakcyjny punkt widzenia.
(24) Kryteria zbieżności jednostajnej.
(25) Funkcje o wahaniu ograniczonym.
(26) Kryterium Jordana.
(27) Funkcje ciągłe o rozbieżnym szeregu Fouriera.

Kontynuacje

W przyszłym roku akademickim będą wykłady z Analizy Matematycznej 3 (60 godzin) i 4 (60 godzin).

Zaliczanie ćwiczeń

W semestrze jest 60 godz. ćwiczeń. Limit nieobecności to 20 godzin, w tym limit nieobecności nieusprawiedliwionych to 8 godzin.

W przypadku przekroczenia któregokolwiek z tych limitów student otrzymuje ocenę NZAL i nie jest dopuszczony do egzaminów.

Egzaminy

Ze względu na pandemię koronawirusa egzaminy będą się odbywać według następujących wyjątkowych zasad:

(1) Student, który uzyskał z zaliczenia ocenę $\geqslant 3,0$ otrzymuje automatycznie taką samą ocenę końcową z egzaminu, z tym że student, który ma ocenę $< 5,0$ może z własnej woli zdawać zdalnie egzamin ustny, aby poprawić ocenę.

(2) Studenci z zaliczeniem 2,0 będą zdawać zdalnie egzamin ustny.

(3) Egzaminy poprawkowe będą zdalnymi egzaminami ustnymi.

ROZDZIAŁ 6

Szeregi

6.1. Szeregi w przestrzeniach Banacha

W tym rozdziale $(E, \| \,\|)$ będzie ustaloną przestrzenią Banacha nad $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $E \neq \{0\}$.

Definicja 6.1.1. Dla $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset E$ definiujemy $S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}_0$. Parę $((a_n)_{n=0}^{\infty}, (S_n)_{n=0}^{\infty})$ nazywamy *szeregiem*. Zwykle, zamiast powyższej pary, piszemy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Element a_n nazywamy *n-tym wyrazem szeregu*, zaś S_n nazywamy *n-tą sumą częściową szeregu*. Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nazywamy:

- *zbieżnym*, jeżeli $S_n \longrightarrow S \in E$. Element S nazywamy wtedy *sumą szeregu* i oznaczamy przez $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$; szeregi, które nie są zbieżne nazywamy *rozbieżnymi*;
- *bezwzględnie zbieżnym*, jeżeli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|$ jest zbieżny;
- *bezwarunkowo zbieżnym*, dla dowolnej bijekcji $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ jest zbieżny oraz $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$;
- *warunkowo zbieżnym*, jeżeli jest zbieżny, ale nie jest bezwarunkowo zbieżny.

Oczywiście można również rozważać szeregi $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, gdzie $n_0 \in \mathbb{Z}$.

Obserwacja 6.1.2. (a) Następujące warunki są równoważne:

(i) szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny;

(ii) dla dowolnego $n_0 \in \mathbb{N}_0$ szereg $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny;

(iii) istnieje $n_0 \in \mathbb{N}_0$ takie, że szereg $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

(b) Zob. Przykład 5.6.11:

- $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$, $x \in \mathbb{R}$;
- $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$, $x \in \mathbb{R}$;
- $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$, $x \in \mathbb{R}$;
- $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$, $|x| < \frac{1}{2}$;
- $(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$, $|x| < \frac{1}{2}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

(c) Jeżeli $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$, to następujące warunki są równoważne:

(i) szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny;

(ii) ciąg $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ jest ograniczony;

(iii) pewien podciąg ciągu $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ jest zbieżny;

(iv) pewien podciąg ciągu $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ jest ograniczony.

W przypadku, gdy $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$,

- zamiast pisać, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny będziemy pisać $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$,
- zamiast pisać, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny będziemy pisać $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$.

(d) Jeżeli szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ są zbieżne, to dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ szereg $\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ jest zbieżny oraz $\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

(e) Pojęcie bezwzględnej zbieżności nie zależy od wyboru norm równoważnych.

(f) Niech $L \in \mathcal{L}(E, F)$ (F jest przestrzenią Banacha nad $\mathbb{K}$). Jeżeli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny do sumy S (odp. bezwzględnie zbieżny, odp. bezwarunkowo zbieżny), to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} L(a_n)$ jest zbieżny do sumy $L(S)$ (odp. bezwzględnie zbieżny, odp. bezwarunkowo zbieżny).

W konsekwencji, jeżeli $L \in \operatorname{Isom}(E, F)$, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny (odp. bezwzględnie zbieżny, odp. bezwarunkowo zbieżny) wtedy i tylko wtedy, gdy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} L(a_n)$ jest zbieżny (odp. bezwzględnie zbieżny, odp. bezwarunkowo zbieżny).

Przykład 6.1.3 (Szereg harmoniczny)**.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. Istotnie,

$$S_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \Big(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\Big) + \dots + \Big(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n}\Big) \geqslant 1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + \dots + 2^{n-1}\frac{1}{2^n} = 1 + \frac{n}{2} \longrightarrow +\infty.$$

Ćwiczenie: $S_{10^3} = 7{,}485$, $S_{10^6} = 14{,}393$, $S_{10^9} = 21{,}301$ z dokładnością do $0{,}001$.

Twierdzenie 6.1.4 (Warunek konieczny zbieżności szeregów)**.** *Jeżeli szereg* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny, to* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Dowód. Niech $S := \lim_{n\to+\infty} S_n$. Wtedy $a_n = S_n - S_{n-1} \longrightarrow S - S = 0$. □

Przykład 6.1.5. *Szereg geometryczny* $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, gdzie $q \in \mathbb{C}$ ($0^0 := 1$), jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $|q| < 1$. Wtedy $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, $|q| < 1$. Istotnie, jeżeli $|q| < 1$, to $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \longrightarrow \frac{1}{1-q}$. Gdy $|q| \geqslant 1$, to nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregów.

Twierdzenie 6.1.6 (Warunek Cauchy'ego zbieżności szeregów)**.** *Szereg* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}_0}\ \forall_{m>n\geqslant n_0} :\ \|a_{n+1} + \dots + a_m\| \leqslant \varepsilon.$$

Dowód. Ponieważ $S_m - S_n = a_{n+1} + \dots + a_m$ wystarczy skorzystać z zupełności E.

□

Twierdzenie 6.1.7 (Twierdzenie o tasowaniu szeregów bezwzględnie zbieżnych)**.** *Każdy szereg bezwzględnie zbieżny jest bezwarunkowo zbieżny (w szczególności, jest zbieżny).*

Dowód. Niech $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ będzie dowolną bijekcją i niech $\varepsilon > 0$. Z warunku Cauchy'ego dla szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|$ wynika, że istnieje $N_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla dowolnego zbioru skończonego $I \subset \mathbb{N}_{N_0+1}$ mamy $\sum_{n\in I} \|a_n\| \leqslant \varepsilon$. Niech $N \geqslant N_0$ będzie takie, że $\{0, \dots, N_0\} \subset \{\sigma(0), \dots, \sigma(N)\}$. Wtedy dla dowolnych $m > n \geqslant N$ mamy $\{\sigma(n+1), \dots, \sigma(m)\} \subset \mathbb{N}_{N_0+1}$ a stąd $\sum_{k=n+1}^{m} \|a_{\sigma(k)}\| \leqslant \varepsilon$. W takim razie szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ spełnia warunek Cauchy'ego, a więc jest zbieżny.

Niech $S_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, $S_n^\sigma := \sum\limits_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)}$. Niech $\varepsilon > 0$ i niech N_0, N będą jak powyżej. Wtedy dla $n \geqslant N$ mamy

$$\|S_n - S_n^\sigma\| \leqslant \sum_{k\in\{N_0+1,\dots,n\}} \|a_k\| + \sum_{k\in\{\sigma(0),\dots,\sigma(n)\}\setminus\{0,\dots,N_0\}} \|a_k\| \leqslant 2\varepsilon. \qquad \square$$

Twierdzenie 6.1.8 (Kryterium porównawcze)**.** (a) *Jeżeli* $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$*,* $n \in \mathbb{N}_0$*, oraz* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty$*, to* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$*.*

(b) *Jeżeli* $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$*,* $n \in \mathbb{N}_0$*, oraz* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$*, to* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$*.*

(c) *Jeżeli* $a_n, b_n > 0$*,* $n \in \mathbb{N}_0$*, oraz* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$ *dla* $n \geqslant N$*, to ze zbieżności szeregu* $(b_n)_{n=0}^\infty$ *wynika zbieżność szeregu* $(a_n)_{n=0}^\infty$ *oraz z rozbieżności szeregu* $(a_n)_{n=0}^\infty$ *wynika rozbieżność szeregu* $(b_n)_{n=0}^\infty$*.*

Dowód. (a) $a_0 + \dots + a_n \leqslant b_0 + \dots + b_n$.

(b) $b_0 + \dots + b_n \geqslant a_0 + \dots + a_n \longrightarrow +\infty$.

(c) Możemy założyć, że $N = 0$. Wtedy $\frac{a_n}{a_0} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_1}{a_0} \leqslant \frac{b_n}{b_0}$. $\square$

Twierdzenie 6.1.9 (Kryterium asymptotyczne)**.** *Niech* $(a_n)_{n=0}^\infty \subset \mathbb{R}_+$*,* $(b_n)_{n=0}^\infty \subset \mathbb{R}_{>0}$*.*

(a) *Jeżeli* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty$ *oraz* $\limsup\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} < +\infty$*, to* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$*.*

(b) *Jeżeli* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$ *oraz* $\liminf\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$*, to* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$*.*

(c) *Jeżeli* $(a_n)_{n=0}^\infty, (b_n)_{n=0}^\infty \subset \mathbb{R}_{>0}$ *oraz* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0, +\infty)$*, to* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \iff \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty$*.*

Dowód. (a) Wobec Obserwacji 2.4.1(e), wnioskujemy, że istnieje $M > 0$ takie, że $a_n \leqslant M b_n$, $n \gg 1$. Możemy więc skorzystać z kryterium porównawczego.

(b) Wobec Obserwacji 2.4.1(f), wnioskujemy, że istnieje $M > 0$ takie, że $a_n \geqslant M b_n$, $n \gg 1$, i znów możemy skorzystać z kryterium porównawczego.

(c) wynika z (a) i (b). $\square$

Twierdzenie 6.1.10 (Kryterium kondensacyjne)**.** *Jeżeli* $0 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n$*,* $n \in \mathbb{N}_0$*, to*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \iff \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} < +\infty.$$

Dowód. Niech $S_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, $S_n' := \sum\limits_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k}$. Wtedy

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}S_n' = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}(a_1 + 2a_2 + 2^2 a_{2^2} + \dots + 2^n a_{2^n}) = a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \dots + 2^{n-1} a_{2^n} \\
&\leqslant a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \dots + (a_{2^{n-1}+1} + \dots + a_{2^n}) = S_{2^n} - a_0 \\
&= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \dots + (a_{2^{n-1}} + a_{2^{n-1}+1} + \dots + a_{2^n - 1}) + a_{2^n} \\
&\leqslant a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^{n-1} a_{2^{n-1}} + 2^n a_{2^n} = S_n'.
\end{aligned} \qquad \square$$

Ćwiczenie 6.1.11. Udowodnić, że dla dowolnego $p \in \mathbb{N}_2$, jeżeli $0 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, to

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \iff \sum_{n=0}^{\infty} p^n a_{p^n} < +\infty.$$

Przykład 6.1.12 (Szereg harmoniczny rzędu α)**.** Dla $\alpha \in \mathbb{R}$ mamy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < +\infty \iff \alpha > 1$.

Rzeczywiście, jeżeli $\alpha \leqslant 1$, to $\frac{1}{n^\alpha} \geqslant \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Jeżeli $\alpha > 1$, to stosujemy kryterium kondensacyjne $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (2^{1-\alpha})^n$.

Ćwiczenie 6.1.13. Dla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$.

Obserwacja 6.1.14. Korzystając z Przykładu 5.6.11(d), wiemy się, że dla dowolnego $h > -1$ istnieje $\theta = \theta(h) \in (0,1)$ taka, że $\ln(1+h) = h - \frac{1}{2}\frac{h^2}{(1+\theta h)^2}$. Wynika stąd, że $0 < h - \ln(1+h) < \frac{1}{2}h^2$, $h > 0$. W szczególności,

$$0 < \frac{1}{n} - \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) < \frac{1}{2n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zatem szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n} - \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)\Big)$$

jest zbieżny. Zauważmy, że

$$\sum_{n=1}^{N} \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) = \ln\Big(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{N+1}{N}\Big) = \ln(N+1).$$

W szczególności, ciąg

$$\Big(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\Big) - \ln N = \sum_{n=1}^{N} \Big(\frac{1}{n} - \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)\Big) + \ln\frac{N+1}{N}$$

jest zbieżny do granicy skończonej zwanej stałą Eulera (1) $\gamma \simeq 0,5772$.

Twierdzenie 6.1.15 (Kryterium Cauchy'ego zbieżności szeregów)**.** *Niech* $\alpha := \limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} \in [0, \infty]$. *Wtedy:*

(a) *Jeżeli* $\alpha < 1$, *to* $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| < +\infty$.

(b) *Jeżeli* $\alpha > 1$, *to szereg* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny (nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregów).*

(c) *Jeżeli* $\alpha = 1$, *to nic nie wiadomo.*

Dowód. (a) Niech $q \in (\alpha, 1)$. Na podstawie Obserwacji 2.4.1(e) mamy $\sqrt[n]{\|a_n\|} \leqslant q$ dla $n \geqslant N$, czyli $\|a_n\| \leqslant q^n$, $n \geqslant N$, i stosujemy kryterium porównawcze.

(b) Niech $q \in (1, \alpha)$. Istnieje podciąg $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ taki, że $\sqrt[n_k]{\|a_{n_k}\|} \geqslant q$, $k \in \mathbb{N}_0$, a zatem $\|a_{n_k}\| \geqslant q^{n_k} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Nie jest więc spełniony warunek konieczny zbieżności szeregów.

(c) $a_n := \frac{1}{n}$, $a_n := \frac{1}{n^2}$. □

Twierdzenie 6.1.16 (Kryterium d'Alemberta (2) zbieżności szeregów)**.** *Niech* $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset E_*$.

(a) *Jeżeli* $\limsup_{n \to +\infty} \frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} < 1$, *to* $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| < +\infty$.

(b) *Jeżeli* $\frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} \geqslant 1$ *dla* $n \geqslant n_0$, *to szereg* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny (nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregów).*

(c) *Jeżeli* $\lim_{n \to +\infty} \frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} > 1$, *to szereg* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny (nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregów).*

Dowód. (a) Wystarczy zastosować Twierdzenie 2.4.2 i kryterium Cauchy'ego.

(b) $\|a_m\| \geqslant \|a_{n_0}\| > 0$ dla $m \geqslant n_0$.

(c) wynika z (b). □

Przykład 6.1.17. Dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$ szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ jest zbieżny.

---

(1) Leonhard Euler (1707–1783).
(2) Jean d'Alembert (1717–1783).

Definicja 6.1.18. Definiujemy *funkcję eksponens* $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$e^z = \exp z = \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Funkcja ta jest rozszerzeniem na całe $\mathbb{C}$ znanej nam funkcji $\mathbb{R} \ni x \longmapsto e^x$, co uzasadnia użycie symbolu e^z.

Funkcja exp zostanie szczegółowo omówiona w § 6.7.

Obserwacja 6.1.19. (a) W Twierdzeniu 6.1.16(c) nie można zastąpić $\lim\limits_{n\to+\infty}$ przez $\limsup\limits_{n\to+\infty}$. Dla przykładu, niech $a_n := \frac{2+(-1)^n}{2^n}$. Wtedy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$, ale $\limsup\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{2} > 1$.

(b) Kryterium Cauchy'ego jest istotnie mocniejsze niż kryterium d'Alemberta.
Np. w powyższym przykładzie mamy $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1$.

Oprócz poznanych dotychczas kryteriów zbieżności szeregów jest bardzo wiele innych użytecznych kryteriów. Na przykład:

Twierdzenie 6.1.20. *Niech* $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}_{>0}$.

(a) *(Kryterium Kummera* (3)*) Niech* $(b_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}_{>0}$ *i* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b_n} = +\infty$. *Połóżmy* $K_n := b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1}$.

Jeżeli $K_n \geqslant c > 0$ *dla* $n \geqslant N$, *to* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$.

Jeżeli $K_n \leqslant 0$ *dla* $n \geqslant N$, *to* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$.

(b) *(Kryterium Raabego* (4)*) Niech* $R_n := n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1)$.

Jeżeli $R_n \geqslant c > 1$ *dla* $n \geqslant N$, *to* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$.

Jeżeli $R_n \leqslant 1$ *dla* $n \geqslant N$, *to* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$.

(c) *(Kryterium Bertranda* (5)*) Niech* $B_n := (\ln n)\big(n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) - 1\big)$.

Jeżeli $B_n \geqslant c > 1$ *dla* $n \geqslant N$, *to* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$.

Jeżeli $B_n \leqslant c < 1$ *dla* $n \geqslant N$, *to* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$.

(d) *(Kryterium Gaussa* (6)*). Przypuśćmy, że* $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$, *gdzie* $\lambda, \mu > 0$, *a ciąg* $(\theta_n)_{n=0}^{\infty}$ *jest ograniczony.*

Jeżeli $\lambda > 1$ *lub* ($\lambda = 1$ *i* $\mu > 1$), *to* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$.

Jeżeli $\lambda < 1$ *lub* ($\lambda = 1$ *i* $\mu \leqslant 1$), *to* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$.

Zauważmy, że dla $b_n := 1$, $n \in \mathbb{N}_0$, kryterium Kummera redukuje się do kryterium d'Alemberta.

Dowód. (a) Możemy założyć, że $N = 0$. W pierwszym przypadku mamy: $c(a_1 + \dots + a_{n+1}) \leqslant a_0 b_0 - a_1 b_1 + \dots + a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1} = a_0 b_0 - a_{n+1} b_{n+1} < a_0 b_0$, a stąd $\sum\limits_{=1}^{\infty} a_k \leqslant \frac{1}{c} a_0 b_0 < +\infty$.

W drugim przypadku mamy: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{\frac{1}{b_{n+1}}}{\frac{1}{b_n}}$ i korzystamy z Twierdzenia 6.1.8(c).

(b) Stosujemy kryterium Kummera dla $b_n := n$.

---

(3) Ernst Eduard Kummer (1810–1893).
(4) Joseph Ludwig Raabe (1801–1859).
(5) Joseph Louis François Bertrand (1822–1900).
(6) Carl Friedrich Gauss (1777–1855).

(c) Zastosujemy kryterium Kummera dla $b_n := n\ln n$. Mamy $n\ln n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)-(n+1)\ln(n+1) = (\ln n)\big(n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)-1\big)-\ln(1+\frac{1}{n})^{n+1} = B_n - \ln(1+\frac{1}{n})^{n+1} \approx B_n - 1$.

(d) Mamy $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{\lambda}$, a stąd przypadki, gdy $\lambda\neq 1$ wynikają z kryterium d'Alemberta. Dalej zakładamy, że $\lambda=1$. Mamy $\lim\limits_{n\to+\infty}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=\mu$, a stąd przypadki, gdy $\mu\neq 1$ wynikają z kryterium Raabego. Dalej zakładamy, że $\lambda=\mu=1$. Zastosujemy kryterium Bertranda. Mamy $B_n=\frac{\ln n}{n}\theta_n \longrightarrow 0$. □

Przykład 6.1.21. (a) Korzystając z kryterium Raabego pokażemy, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\big(\frac{n}{e}\big)^n=+\infty$. Zauważmy, że $\frac{n}{e\sqrt[n]{n!}}\longrightarrow 1$ (Przykład 2.4.3(b)) więc kryterium Cauchy'ego nie rozstrzyga. Udowodnimy, że $\lim\limits_{n\to+\infty}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=\lim\limits_{n\to+\infty}n\big(\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}-1\big)=\frac{1}{2}$. Istotnie,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}\Big(\frac{e}{(1+x)^{1/x}}-1\Big) &\overset{H(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to 0+}\Big(\frac{e}{(1+x)^{1/x}}-1\Big)' = \lim_{x\to 0+}\Big(e^{1-\frac{1}{x}\ln(1+x)}-1\Big)' \\ &= \lim_{x\to 0+}\frac{e}{(1+x)^{1/x}}\Big(\frac{1}{x^2}\ln(1+x)-\frac{1}{x(1+x)}\Big) \\ &\overset{\text{Peano}}{=} \lim_{x\to 0+}\frac{e}{(1+x)^{1/x}}\frac{(x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2))-(x-x^2+o(x^2))}{x^2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(b) Korzystając z kryterium Gaussa pokażemy, że szereg

$$1+\Big(\frac{1}{2}\Big)^p+\Big(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\Big)^p+\dots+\Big(\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n-2)\cdot(2n)}\Big)^p+\dots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\Big)^p$$

jest zbieżny dla $p>2$ i rozbieżny dla $0<p\leqslant 2$. Istotnie,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\Big(\frac{2n}{2n-1}\Big)^p=\Big(1-\frac{1}{2n}\Big)^{-p}\overset{\text{Peano}}{=}1+\frac{p}{2n}+\frac{p(p+1)}{2}\frac{1}{(2n)^2}+o\Big(\frac{1}{(2n)^2}\Big)=1+\frac{\frac{p}{2}}{n}+\frac{\theta_n}{n^2},$$

gdzie ciąg $(\theta_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony.

Zauważmy, że $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\big(\frac{2n+1}{2n+2}\big)^p\longrightarrow 1$, a więc kryterium d'Alemberta nie rozstrzyga.

Twierdzenie 6.1.22 (Twierdzenie Riemanna o tasowaniu szeregu warunkowo zbieżnego)**.** *Jeżeli szereg rzeczywisty* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ *jest zbieżny, ale nie jest bezwzględnie zbieżny, to dla dowolnych* $-\infty\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant+\infty$ *istnieje bijekcja* $\sigma:\mathbb{N}_0\longrightarrow\mathbb{N}_0$ *taka, że jeżeli* $S_n':=\sum\limits_{k=0}^{n}a_{\sigma(k)}$, *to* $\liminf\limits_{n\to+\infty}S_n'=\alpha$ *i* $\limsup\limits_{n\to+\infty}S_n'=\beta$.

Oznacza to, że szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ *jest warunkowo zbieżny, a nawet więcej, dla dowolnego* $x\in\overline{\mathbb{R}}$ *istnieje bijekcja* $\sigma:\mathbb{N}_0\longrightarrow\mathbb{N}_0$ *taka, że* $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_{\sigma(k)}=x$.

Dowód. Można założyć, że $a_n\neq 0$, $n\in\mathbb{N}_0$ (Ćwiczenie). Ustalmy α,β oraz ciągi $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$, $(\beta_n)_{n=0}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ takie, że $\alpha_n\longrightarrow\alpha$, $\beta_n\longrightarrow\beta$, $\beta_0>0$ oraz $\alpha_n<\beta_n$, $n\in\mathbb{N}_0$.

Niech $a_n^+:=\max\{a_n,0\}$, $a_n^-:=\max\{-a_n,0\}$. Oczywiście, $|a_n|=a_n^++a_n^-$, $a_n=a_n^+-a_n^-$. Gdyby $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n^+<+\infty$ (odp. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n^-<+\infty$), to wtedy $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n^-<+\infty$ (odp. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n^+<+\infty$), co daje $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|<+\infty$ — sprzeczność. Wynika stąd, że $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n^+=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n^-=+\infty$.

Niech $A:=\{n\in\mathbb{N}_0: a_n>0\}=\{k_0,k_1,\dots\}$, gdzie $k_0<k_1<\dots$, i analogicznie $B:=\{n\in\mathbb{N}_0: a_n<0\}=\{\ell_0,\ell_1,\dots\}$, gdzie $\ell_0<\ell_1<\dots$. Oczywiście $A\cap B=\varnothing$, $A\cup B=\mathbb{N}_0$. Szereg $\sum\limits_{s=0}^{\infty}a_{k_s}$ (odp. $\sum\limits_{s=0}^{\infty}(-a_{\ell_s})$) różni się od szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n^+$ (odp. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n^-$) tylko wyrazami zerowymi, więc jest również rozbieżny.

Rozpoczynamy konstrukcję bijekcji σ:

Krok 0: Niech $p_0 \in \mathbb{N}_0$ będzie najmniejszą liczbą taką, że $T_0 := a_{k_0} + \dots + a_{k_{p_0}} > \beta_0$ i niech $q_0 \in \mathbb{N}_0$ będzie najmniejszą liczbą taką, że $U_0 := T_0 + a_{\ell_0} + \dots + a_{\ell_{q_0}} < \alpha_0$.

Krok 1: Niech $p_1 > p_0$ będzie najmniejszą liczbą taką, że $T_1 := U_0 + a_{k_{p_0+1}} + \dots + a_{k_{p_1}} > \beta_1$ i niech $q_1 > q_0$ będzie najmniejszą liczbą taką, że $U_1 := T_1 + a_{\ell_{q_0+1}} + \dots + a_{\ell_{q_1}} < \alpha_1$.

Rozbieżność szeregów gwarantuje to, że procedura może być dowolnie kontynuowana.

Teraz definiujemy

$$(\sigma(0), \sigma(1), \dots) := (k_0, \dots, k_{p_0}, \ell_0, \dots, \ell_{q_0}, k_{p_0+1}, \dots, k_{p_1}, \ell_{q_0+1}, \dots, \ell_{q_1}, \dots).$$

Zauważmy, że $0 < T_s - \beta_s \leqslant a_{k_{p_s}}$ oraz $a_{\ell_{q_s}} \leqslant U_s - \alpha_s < 0$. Wynika stąd, że $T_s \longrightarrow \beta$, $U_s \longrightarrow \alpha$. W szczególności, $\limsup\limits_{n\to+\infty} S'_n \geqslant \limsup\limits_{s\to+\infty} T_s = \beta$ oraz $\liminf\limits_{n\to+\infty} S'_n \leqslant \liminf\limits_{s\to+\infty} U_s = \alpha$.

Na koniec wystarczy jeszcze zauważyć, że sumy pośrednie przy przechodzeniu od U_{s-1} do T_s leżą pomiędzy U_{s-1} i T_s, zaś sumy pośrednie przy przechodzeniu od T_s do U_s leżą pomiędzy U_s i T_s. $\square$

Wniosek 6.1.23. *Jeżeli* $1 \leqslant d := \dim_{\mathbb{R}} E < +\infty$, *to szereg* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *jest bezwarunkowo zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest bezwzględnie zbieżny. W szczególności, szereg liczb zespolonych jest bezwarunkowo zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest bezwzględnie zbieżny.*

Dowód. Implikacja ($\Longleftarrow$) wynika z Twierdzenia 6.1.7. Implikacja ($\Longrightarrow$) dla szeregów rzeczywistych ($d = 1$) wynika z Twierdzenia 6.1.20. Z Twierdzenia 5.11.11 wynika, że dowód sprowadza się do przypadku $E = \mathbb{R}^d$. Jeżeli szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_{n,1}, \dots, a_{n,d})$ jest bezwarunkowo zbieżny, to szeregi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{n,j}$, $j = 1, \dots, d$, są bezwarunkowo zbieżne, a stąd $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|a_n\|_1 \leqslant \sum\limits_{j=1}^{d} \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_{n,j}| < +\infty$. $\square$

Twierdzenie* 6.1.24 (Lévy-Steinitz [7][8]). *Niech* $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}^d$ *będzie ciągiem takim, że* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. *Zdefiniujmy:*

$$\mathfrak{X}(\boldsymbol{a}) := \Big\{x \in \mathbb{R}^d : \exists_{\sigma:\mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0} : \sigma \textit{ jest bijekcją, szereg } \sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} \textit{ jest zbieżny oraz } x = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}\Big\}.$$

Jeśli $\mathfrak{X}(\boldsymbol{a}) \neq \varnothing$, *to* $\mathfrak{X}(\boldsymbol{a})$ *jest rzeczywistą podprzestrzenią afiniczną* $\mathbb{R}^d$.

Zauważmy, że zbiór $\mathfrak{X}(\boldsymbol{a})$ jest punktem wtedy i tylko wtedy, gdy szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ jest bezwarunkowo (a więc bezwzględnie) zbieżny.

Prawdziwe jest następujące ogólne twierdzenie.

Twierdzenie* 6.1.25. [9] *Niech E będzie przestrzenią Banacha. Wówczas E jest skończenie wymiarowa wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu* $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset E$, *jeżeli szereg* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *jest bezwarunkowo zbieżny, to jest bezwzględnie zbieżny.*

W szczególności, jeżeli $\dim E = \infty$, *to istnieje szereg bezwarunkowo zbieżny, który nie jest bezwzględnie zbieżny.*

6.2. Iloczyny szeregów

Twierdzenie 6.2.1. *Niech* $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, $(b_n)_{n=0}^{\infty} \subset E$, $B_n := \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$, $n \in \mathbb{N}_0$. *Wtedy:*

(a) *(Kryterium Dirichleta) Jeżeli ciąg* $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *jest monotoniczny,* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ *oraz ciąg* $(B_n)_{n=0}^{\infty}$ *jest ograniczony, to szereg* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ *jest zbieżny.*

---

[7] Paul Pierre Lévy (1886–1971).

[8] Ernst Steinitz (1871–1928).

[9] Zob. A. Dvoretzky, C.A. Rogers, *Absolute and unconditional convergence in linear normed spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 36 (1950), 192—197.

(b) *(Kryterium Abela [10]) Jeżeli ciąg $(a_n)_{n=0}^\infty$ jest monotoniczny i ograniczony oraz szereg $\sum_{n=0}^\infty b_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=0}^\infty a_n b_n$ jest zbieżny.*

(c) *(Kryterium Leibniza) Jeżeli ciąg $(b_n)_{n=0}^\infty \subset \mathbb{R}_{>0}$ jest malejący, to szereg $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n b_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$.*

Dowód. (a) Niech $\|B_n\| \leqslant M$, $n \in \mathbb{N}_0$. Zdefiniujmy dodatkowo $B_{-1} := 0 \in E$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^m a_n b_n &= \sum_{n=0}^m a_n(B_n - B_{n-1}) = \sum_{n=0}^m a_n B_n - \sum_{n=0}^m a_n B_{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^m a_n B_n - \sum_{n=0}^{m-1} a_{n+1} B_n = \Big(\sum_{n=0}^{m-1} (a_n - a_{n+1}) B_n\Big) + a_m B_m. \qquad (*)\end{aligned}$$

Powyższe przekształcenie nosi nazwę *transformacji Abela*. Ponieważ $a_m B_m \longrightarrow 0$, wystarczy pokazać, że $\sum_{n=0}^\infty \|(a_n - a_{n+1})B_n\| < +\infty$. Istotnie, wobec monotoniczności ciągu $(a_n)_{n=0}^\infty$ mamy

$$\sum_{n=0}^m |a_n - a_{n+1}| \|B_n\| \leqslant M|a_0 - a_{m+1}|, \quad m \in \mathbb{N}_0,$$

a ciąg $(M|a_0 - a_{m+1}|)_{m=0}^\infty$ jest oczywiście ograniczony.

(b) Ciągi $(a_m)_{m=0}^\infty$ i $(B_m)_{m=0}^\infty$ mają granice, $a_m \longrightarrow a$, $B_m \longrightarrow B$. Stąd $a_m B_m \longrightarrow aB$. Teraz korzystamy z (*) i rozumujemy jak w (a).

(c) Wynika z (a) i warunku koniecznego zbieżności szeregów. □

Przykład 6.2.2. (a) Na mocy kryterium Dirichleta szereg $\sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n}$ jest zbieżny dla $|z| \leqslant 1$, $z \neq 1$.

Istotnie, dla $|z| < 1$ mamy $|\frac{z^n}{n}| \leqslant |z|^n$, a ostatni szereg to zbieżny szereg geometryczny. Dla $z \in \mathbb{T}\setminus\{1\}$ mamy $|\sum_{k=1}^n z^k| = |z\frac{1-z^n}{1-z}| \leqslant \frac{2}{|1-z|}$.

(b) Na mocy kryterium Leibniza, dla dowolnego $\alpha > 0$ szereg $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ jest zbieżny.

(c) Dla dowolnego $\alpha \in (0, 1]$ szereg $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ jest warunkowo zbieżny.

Definicja 6.2.3 (Iloczyn Cauchy'ego szeregów)**.** Niech $\Phi \in \mathcal{L}(E, F; G)$ i niech $(a_n)_{n=0}^\infty \subset E$, $(b_n)_{n=0}^\infty \subset F$, $c_n := \sum_{k=0}^n \Phi(a_k, b_{n-k})$, $n \in \mathbb{N}_0$. Szereg $\sum_{n=0}^\infty c_n$ nazywamy *iloczynem Cauchy'ego szeregów* $\sum_{n=0}^\infty a_n$ *i* $\sum_{n=0}^\infty b_n$ *względem odwzorowania* Φ. W przypadku, gdy $\Phi : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E$, $(\alpha, x) \longmapsto \alpha x$ mówimy po prostu o iloczynie Cauchy'ego szeregów.

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

$$A_n := \sum_{k=0}^n a_k, \quad B_n := \sum_{k=0}^n b_k, \quad C_n := \sum_{k=0}^n c_k, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

$$A := \lim_{n\to+\infty} A_n = \sum_{n=0}^\infty a_n, \quad B := \lim_{n\to+\infty} B_n = \sum_{n=0}^\infty b_n, \quad C := \lim_{n\to+\infty} C_n = \sum_{n=0}^\infty c_n,$$

oczywiście przy założeniu, że odpowiednie szeregi są zbieżne.

Twierdzenie 6.2.4 (Twierdzenie Mertensa [11])**.** (a) *Jeżeli* $\sum_{n=0}^\infty \|a_n\| < +\infty$ *oraz szereg* $\sum_{n=0}^\infty b_n$ *jest zbieżny, to szereg* $\sum_{n=0}^\infty c_n$ *jest zbieżny oraz* $C = \Phi(A, B)$.

---

[10] Niels Abel (1802–1829).

(b) *Jeżeli* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|a_n\| < +\infty$ *oraz* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|b_n\| < +\infty$, *to* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|c_n\| < +\infty$.

Dowód. (a) Zauważmy, że zawsze możemy założyć, że $\|\Phi\| \leqslant 1$ (Ćwiczenie). Niech $M > 0$ będzie takie, że $\|B_n\| \leqslant M$, $\|a_0\| + \dots + \|a_n\| \leqslant M$, $n \in \mathbb{N}_0$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Niech $n_0 \in \mathbb{N}_0$ będzie takie, że $\sum\limits_{k=n_0+1}^{n} \|a_k\| \leqslant \frac{\varepsilon}{8M}$ dla $n \geqslant n_0 + 1$. Niech dalej $n_1 > n_0$ będzie takie, że $\|B_{n-n_0} - B\| \leqslant \frac{\varepsilon}{4M}$ oraz $\|A_n - A\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M}$ dla $n \geqslant n_1$. Teraz dla $n \geqslant n_1$ mamy $\|C_n - \Phi(A, B)\| \leqslant \|C_n - \Phi(A_n, B)\| + \|A_n - A\|\|B\| \leqslant \|C_n - \Phi(A_n, B)\| + \frac{\varepsilon}{2}$. Pozostaje oszacować pierwszy składnik. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} C_n &= \Phi(a_0, b_0) + \Phi(a_0, b_1) + \Phi(a_1, b_0) + \dots + \Phi(a_0, b_n) + \dots + \Phi(a_n, b_0) \\ &= \Phi(a_0, b_0 + \dots + b_n) + \Phi(a_1, b_0 + \dots + b_{n-1}) + \dots + \Phi(a_{n-1}, b_0 + b_1) + \Phi(a_n, b_0) = \sum_{k=0}^{n} \Phi(a_k, B_{n-k}). \end{aligned}$$

Stąd dla $n \geqslant n_1$ dostajemy:

$$\begin{aligned} \|C_n - \Phi(A_n, B)\| &= \Big\| \sum_{k=0}^{n} \Phi(a_k, B_{n-k} - B) \Big\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \|a_k\| \|B_{n-k} - B\| \\ &= \sum_{k=0}^{n_0} \|a_k\| \|B_{n-k} - B\| + \sum_{k=n_0+1}^{n} \|a_k\| \|B_{n-k} - B\| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n_0} \|a_k\| \|B_{n+n_0-k-n_0} - B\| + \sum_{k=n_0+1}^{n} \|a_k\| 2M \leqslant \sum_{k=0}^{n_0} \|a_k\| \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{4} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

(b) Na podstawie (a) szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \|a_k\| \|b_{n-k}\|$ jest zbieżny. Ponadto,

$$\sum_{n=0}^{m} \|c_n\| \leqslant \|\Phi\| \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} \|a_k\| \|b_{n-k}\|.$$

□

Przykład 6.2.5. Jeżeli oba szeregi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ są tylko zbieżne, to szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ nie musi być zbieżny.

Dla przykładu: $a_0 = b_0 := 0$, $a_n = b_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$. Szeregi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ są zbieżne na podstawie kryterium Leibniza i nie są bezwzględnie zbieżne (Przykład 6.1.12). Mamy $|c_n| = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} > \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$.

Obserwacja 6.2.6. (a) $\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b)$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{C}$.

Istotnie, korzystamy z iloczynu Cauchy'ego szeregów. Mamy

$$\exp(a)\exp(b) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \frac{b^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{n=0} \frac{1}{n!} (a + b)^n = \exp(a + b).$$

(b) $\exp(0) = 1$, $\exp z \neq 0$, $\exp(-z) = \frac{1}{\exp z}$, $z \in \mathbb{C}$.

Przykład 6.2.7. W przypadku p-szeregów liczb zespolonych $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{j,n}$, $j = 1, \dots, p$, ich iloczyn Cauchy'ego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ ma postać

$$c_n = \sum_{\substack{s_1, \dots, s_p \in \mathbb{N}_0 \\ s_1 + \dots + s_p = n}} a_{1,s_1} \cdots a_{p,s_p}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Na podstawie Twierdzenia 6.2.4, jeżeli $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_{j,n}| < +\infty$, $j = 1, \dots, p$, to $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n| < +\infty$ oraz $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = \prod_{j=1}^{p} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{j,n}$. W szczególności, jeżeli $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$, to $\big(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\big)^p = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{\substack{s_1, \dots, s_p \in \mathbb{N}_0 \\ s_1 + \dots + s_p = n}} a_{s_1} \cdots a_{s_p}$, przy czym ostatni szereg jest zbieżny bezwzględnie.

6.3. Iloczyny nieskończone

Oprócz szeregów liczb zespolonych rozważane są również nieskończone iloczyny liczb zespolonych.

Definicja 6.3.1. Niech $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$. Powiemy, że *iloczyn nieskończony* $\prod\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, jeżeli dla pewnego $p \in \mathbb{N}_0$ ciąg iloczynów częściowych $I_k := \prod\limits_{n=p}^{k} a_n$, $k \in \mathbb{N}_p$, jest zbieżny do granicy skończonej i różnej od zera. W szczególności, musi być $a_n \neq 0$, $n \geqslant p$. Oczywiście, badając zbieżność iloczynu nieskończonego, zawsze możemy przyjąć, że $p = 0$. Pełny sens definicji ujawni się, gdy będziemy badać iloczyny funkcyjne $x \longmapsto \prod\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ (zob. Twierdzenie 6.4.13).

Zgodnie z tradycją wyrazy iloczynu nieskończonego zapisujemy w postaci $a_n = 1 + c_n$. Mówimy, że iloczyn nieskończony $\mathcal{I} : \prod\limits_{n=0}^{\infty}(1 + c_n)$ jest *bezwzględnie zbieżny*, jeżeli iloczyn $\prod\limits_{n=0}^{\infty}(1 + |c_n|)$ jest zbieżny. Iloczyn $\mathcal{I}$ nazywamy *bezwarunkowo zbieżnym*, jeżeli dla dowolnej bijekcji $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$, iloczyn nieskończony $\prod\limits_{n=0}^{\infty}(1 + c_{\sigma(n)})$ jest zbieżny i jego wartość nie zależy od σ. Iloczyn zbieżny, który nie jest bezwarunkowo zbieżny nazywamy *zbieżnym warunkowo*.

Przykład 6.3.2. (a) $\prod\limits_{n=2}^{\infty}(1 - \frac{1}{n^2}) = \frac{1}{2}$.

Istotnie, $I_k = \prod\limits_{n=2}^{k}(1 - \frac{1}{n^2}) = \prod\limits_{n=2}^{k} \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{1\cdot3}{2^2} \cdot \frac{2\cdot4}{3^2} \cdots \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{k+1}{2k} \longrightarrow \frac{1}{2}$.

(b) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 + \frac{1}{n})$ jest rozbieżny. Istotnie, $I_k = \prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 + \frac{1}{n}) = \prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{k+1}{k} = k + 1 \longrightarrow +\infty$.

(c) $\prod\limits_{n=2}^{\infty}(1 - \frac{1}{n})$ jest rozbieżny. Istotnie, $I_k = \prod\limits_{n=2}^{\infty}(1 - \frac{1}{n}) = \prod\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{k-1}{k} = \frac{1}{k} \longrightarrow 0$.

Obserwacja 6.3.3 (Warunek konieczny zbieżności iloczynu nieskończonego)**.** Jeżeli iloczyn $\mathcal{I}$ jest zbieżny, to $c_n \longrightarrow 0$. Istotnie, $1 + c_n = \frac{I_n}{I_{n-1}} \longrightarrow 1$.

Twierdzenie 6.3.4 (Warunek konieczny i dostateczny zbieżności iloczynu nieskończonego)**.** *Iloczyn $\mathcal{I}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geqslant N}\ \forall_{k\in\mathbb{N}} : |(1 + c_{n+1}) \cdots (1 + c_{n+k}) - 1| \leqslant \varepsilon$.* (*)

Dowód. Jeżeli iloczyn jest zbieżny, to ciąg $(I_k)_{k=1}^{\infty}$ spełnia warunek Cauchy'ego. Ponieważ $I_k \longrightarrow I \neq 0$, możemy założyć, że $|I_k| \geqslant c > 0$ dla $k \geqslant N_0$ przy pewnym $c > 0$. Dobierzmy teraz $N \geqslant N_0$ takie, że $|I_{n+k} - I_k| \leqslant c\varepsilon$ dla $n \geqslant N$ i $k \in \mathbb{N}$. Wtedy $|(1 + c_{n+1}) \cdots (1 + c_{n+k}) - 1| = \frac{|I_{n+k}-I_k|}{|I_k|} \leqslant \frac{c\varepsilon}{c} = \varepsilon$.

Jeżeli warunek (*) zachodzi, to biorąc $\varepsilon = \frac{1}{2}$ dostajemy $\frac{1}{2} \leqslant |(1 + c_{n+1}) \cdots (1 + c_{n+k})| \leqslant \frac{3}{2}$, $n \geqslant N$, $k \in \mathbb{N}$. W szczególności, $\frac{1}{2} \leqslant |\frac{I_k}{I_{k_0}}| \leqslant \frac{3}{2}$ dla $k > k_0 = N$.

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Na postawie (*) mamy $|\frac{I_{n+k}}{I_n} - 1| = |(1 + a_{n+1}) \cdots (1 + c_{n+k}) - 1| \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon\frac{1}{|I_{k_0}|}$ dla $n \geqslant N > k_0$ i $k \in \mathbb{N}$. Wynika stąd, że $|I_{n+k} - I_n| \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon\frac{|I_n|}{|I_{k_0}|} \leqslant \varepsilon$ dla $n \geqslant N$ i $k \in \mathbb{N}$. Oznacza to, że ciąg $(I_k)_{k=1}^{\infty}$ spełnia warunek Cauchy'ego. Jest więc zbieżny do pewnej granicy skończonej I. Pozostaje pokazać, że $I \neq 0$, co wynika z oszacowania $\frac{1}{2} \leqslant |\frac{I_k}{I_{k_0}}|$ dla $k > k_0$. $\square$

Twierdzenie 6.3.5. *Jeżeli iloczyn $\prod\limits_{n=0}^{\infty}(1 + c_n)$ jest bezwzględnie zbieżny, to jest zbieżny.*

Dowód. Skorzystamy z Twierdzenia 6.3.4. Wystarczy zauważyć (Ćwiczenie), że

$$|(1 + c_{n+1}) \cdots (1 + c_{n+k}) - 1| \leqslant \big((1 + |c_{n+1}|) \cdots (1 + |c_{n+k}|) - 1\big). \qquad \square$$

Twierdzenie 6.3.6. *Niech $(c_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$, $\tau \in \{-1, 1\}$. Wtedy iloczyn $\prod\limits_{n=0}^{\infty}(1 + \tau c_n)$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$. W szczególności, dla dowolnego ciągu $(c_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, iloczyn $\prod\limits_{n=0}^{\infty}(1 + c_n)$ jest bezwzględnie zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n| < +\infty$.*

Dowód. W przypadku $\tau = 1$ niech $S_k := \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$. Zauważmy, że ciąg $(I_k)_{k=1}^{\infty}$ jest rosnący. Mamy $S_k \leqslant I_k$, co daje implikację ($\Longrightarrow$). W drugą stronę mamy $1 + x \leqslant e^x$, $x \geqslant 0$, a stąd $I_k \leqslant e^{S_k}$.

W przypadku, gdy $\tau = -1$ możemy założyć, $c_n < 1$, $n \in \mathbb{N}_0$. Mamy $1 - c_n = \frac{1}{1+\frac{c_n}{1-c_n}}$. Pozostaje udowodnić, że $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n < +\infty \iff \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{1-c_n} < +\infty$ (Ćwiczenie). $\square$

Twierdzenie 6.3.7. (a) *Jeżeli iloczyn $\mathfrak{I}$ jest bezwzględnie zbieżny, to jest bezwarunkowo zbieżny.*

(b) *Niech $(z_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, $z_n \longrightarrow 0$. Wtedy szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy iloczyn $\prod\limits_{n=0}^{\infty} e^{z_n}$ jest zbieżny.*

(c) *Niech $(c_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, $c_n \longrightarrow 0$. Wtedy iloczyn $\mathfrak{I}$ jest bezwzględnie zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest bezwarunkowo zbieżny.*

Dowód. (a) Niech $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ będzie dowolną bijekcją. Na podstawie Twierdzenia 6.3.6 i twierdzenia o tasowaniu szeregów, iloczyn $\prod\limits_{n=0}^{\infty}(1 + c_{\sigma(n)})$ jest bezwzględnie zbieżny. Pozostaje wykazać równość wartości. Niech $I'_k := \prod\limits_{n=0}^{k}(1 + c_{\sigma(n)}) \longrightarrow I'$. Chcemy pokazać, że $\frac{I_k}{I'_k} \longrightarrow 1$. Skracając podobne czynniki mamy $\frac{I_k}{I'_k} = \frac{\prod_{n\in A_k}(1+c_n)}{\prod_{n\in A'_k}(1+c_n)} =: \frac{J_k}{J'_k}$, gdzie $A_k \subset \{0, \dots, k\}$ i $A'_k \subset \{\sigma(0), \dots, \sigma(k)\}$. Pokażemy, że $J_k \longrightarrow 1$ i $J'_k \longrightarrow 1$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Na podstawie Twierdzenia 6.3.4 istnieje $N_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $|\big(\prod\limits_{n\in A}(1 + c_n)\big) - 1| \leqslant \big(\prod\limits_{n\in A}(1 + |c_n|)\big) - 1 \leqslant \varepsilon$ dla dowolnego zbioru skończonego $A \subset \mathbb{N}_{N_0}$. Dobierzmy $N \geqslant N_0$ takie, że $\{0, \dots, N_0\} \subset \{\sigma(0), \dots, \sigma(N)\}$. Wtedy dla $k > N$ mamy $A_k \subset \{N_0 + 1, \dots, k\}$, $A'_k \subset \{\sigma(0), \dots, \sigma(k)\} \setminus \{0, \dots, N_0\}$. Wynika stąd, że $|J_k - 1| \leqslant \varepsilon$ oraz $|J'_k - 1| \leqslant \varepsilon$ dla $k > N$.

(b) Niech $S_n := \sum\limits_{k=0}^{n} z_k$, $I_n := \prod\limits_{k=0}^{n} e^{z_k}$, $S := \sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$, $I := \prod\limits_{n=0}^{\infty} e^{z_n}$, o ile szereg (odp. iloczyn) jest zbieżny. Mamy $e^{S_n} = I_n$, skąd natychmiast wynika, że jeżeli szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ jest zbieżny, to iloczyn $\prod\limits_{n=0}^{\infty} e^{z_n}$ jest zbieżny.

Załóżmy, że iloczyn $\prod\limits_{n=0}^{\infty} e^{z_n}$ jest zbieżny. Niech $z_n = x_n + iy_n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Mamy $|I_n| = e^{\operatorname{Re} S_n}$, czyli $\operatorname{Re} S_k = \ln |I_n|$. Skąd wynika, że szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ jest zbieżny. Pozostaje wykazać, że szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ jest zbieżny. Zauważmy, że iloczyn $\prod\limits_{n=0}^{\infty} e^{iy_n}$ jest zbieżny do $I/|I|$ ([12]). Problem sprowadza się więc do przypadku $x_n = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$ (wtedy $|I| = 1$). Przypuśćmy, że szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ jest rozbieżny. Niech $T_n := \sum\limits_{k=0}^{n} y_k$ ($S_n = iT_n$). Z warunku Cauchy'ego wynika, że istnieje $0 < \varepsilon < \pi/4$ takie, że $\forall_{n\in\mathbb{N}_0} \exists_{m>n} : |T_{n,m}| > \varepsilon$, gdzie $T_{n,m} := T_m - T_n = \sum\limits_{k=n+1}^{m} y_k$. Niech $0 < \lambda < \sin\varepsilon$. Istnieje $n_0 \in \mathbb{N}_0$ takie, że $|y_n| < \varepsilon$ i $|I_n - I| < \lambda$ dla $n \geqslant n_0$. Ustalmy najmniejsze $m_0 > n_0$ takie, że $|T_{n_0,m_0}| > \varepsilon$. Zauważmy, że $\varepsilon < |T_{n_0,m_0}| < 2\varepsilon$ (Ćwiczenie). Oczywiście, $|I_{m_0} - I_{n_0}| < 2\lambda$, a stąd $|I_{m_0}/I_{n_0} - 1| < 2\lambda$, czyli $|e^{iT_{n_0,m_0}} - 1| < 2\lambda$. Biorąc pod uwagę to, że $\varepsilon < |T_{n_0,m_0}| < 2\varepsilon$, dostajemy $|e^{iT_{n_0,m_0}} - 1| > 2\sin\varepsilon$ — sprzeczność.

(c) Implikacja ($\Longrightarrow$) wynika z (a). Dla dowodu przeciwnej implikacji Możemy założyć, że $|c_n| < 1/2$, $n \in \mathbb{N}_0$. Niech $z_n := \operatorname{Log} z_n = \ln|1 + c_n| + i \operatorname{Arg}(1 + c_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$ ([13]). Na podstawie (a), jeżeli iloczyn $\prod\limits_{n=0}^{\infty}(1 + c_n) = \prod\limits_{n=0}^{\infty} e^{z_n}$ jest bezwarunkowo zbieżny, to szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ jest bezwarunkowo zbieżny, a więc

([12]) W tym miejscu korzystamy w rzeczywistości z ciągłości zespolonej funkcji eksponens, który to fakt udowodnimy w niedalekiej przyszłości — zob. Przykład 6.4.12(b).

([13]) Dla $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ definiujemy *logarytm główny* $\operatorname{Log} z$ wzorem $\operatorname{Log} z := \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$. Oczywiście $e^{\operatorname{Log} z} = z$. Zauważmy, że funkcja Log jest ciągła (Ćwiczenie). Ponadto, $\lim\limits_{\mathbb{C}\ni z\to 0} \frac{\operatorname{Log}(1+z)}{z} = 1$ (Ćwiczenie).

bezwzględnie zbieżny (Wniosek 6.1.23). Pozostaje wykazać, że jeżeli $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |z_n| < +\infty$, to $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n| < +\infty$ i skorzystać z Twierdzenia 6.3.6. Wystarczy pokazać, że $|c_n| \leqslant C|z_n|$ dla pewnej stałej $C > 0$ przy $n \gg 1$, a to wynika z tego, że $\lim\limits_{\mathbb{C}\ni z\to 0} \frac{\operatorname{Log}(1+z)}{z} = 1$. □

6.4. Ciągi i szeregi funkcyjne

Definicja 6.4.1. Niech X będzie dowolnym niepustym zbiorem. Rozważmy ciąg funkcji $f_n : X \longrightarrow E$, $n \in \mathbb{N}$. Przypomnijmy, że:

- Ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny punktowo do funkcji $f : X \longrightarrow E$, jeżeli $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ dla dowolnego $x \in X$. W przypadku, gdy $X = \{x_0\}$, pojęcie ciągu funkcyjnego redukuje się do ciągu elementów przestrzeni E.
- Ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji f (por. Twierdzenie 3.3.2(i)), jeżeli

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geqslant n_0}\ \forall_{x\in X} :\ \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon. \tag{†}$$

Przyjmijmy dodatkowo, że (X, ϱ) jest przestrzenią metryczną. Mówimy, że ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest:

- *zbieżny lokalnie jednostajnie* do funkcji f, jeżeli dowolny punkt $a \in X$ posiada otoczenie $U \subset X$ takie, że $f_n|_U \longrightarrow f|_U$ jednostajnie;
- *zbieżny niemal jednostajnie* do funkcji f, jeżeli dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset X$ mamy $f_n|_K \longrightarrow f|_K$ jednostajnie;

Obserwacja 6.4.2. (a) $f_n \longrightarrow f$ jednostajnie na X wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} \|f_n(x) - f(x)\| = 0.$$

(b) ($f_n \longrightarrow f$ jednostajnie) $\Longrightarrow$ ($f_n \longrightarrow f$ lokalnie jednostajnie) $\Longrightarrow$ ($f_n \longrightarrow f$ niemal jednostajnie) $\Longrightarrow$ ($f_n \longrightarrow f$ punktowo).

(c) Jeżeli X jest przestrzenią zwartą, to zbieżność jednostajna, lokalnie jednostajna i niemal jednostajna są równoważne.

(d) Jeżeli przestrzeń X jest *lokalnie zwarta* (tzn. każdy punkt $a \in X$ posiada otoczenie $U \subset X$ takie, że $\overline{U}$ jest zbiorem zwartym (np. $X \subset \mathbb{R}^n$)), to zbieżność lokalnie jednostajna i niemal jednostajna są równoważne.

Przykład 6.4.3. (a) Niech $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy:

- $f_n \longrightarrow f$ punktowo, gdzie $f(x) := \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } x \in [0,1) \\ 1, & \text{jeżeli } x = 1 \end{cases}$.
- $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0,1]\} = \sup\{x^n : x \in [0,1)\} = 1$; w szczególności, zbieżność nie jest jednostajna (nie jest również jednostajna na $[0,1)$).
- Dla dowolnego $\theta \in (0,1)$ mamy $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0,\theta]\} = \theta^n$; w szczególności, $f_n \longrightarrow f$ lokalnie jednostajnie na $[0,1)$.

(b) Niech $f_n : \mathbb{R} \to [-1,1]$, $f_n(x) := \frac{2nx}{n^2+x^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy:

- $f_n \longrightarrow 0$ punktowo na $\mathbb{R}$.
- $f_n(n) = 1$; w szczególności, ciąg nie jest zbieżny jednostajnie.
- Dla dowolnego $M > 0$ mamy $\sup\{|f_n(x)| : |x| \leqslant M\} = \frac{2nM}{n^2+M^2}$; w szczególności, $f_n \longrightarrow 0$ lokalnie jednostajnie.

(c) Niech $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) := \frac{nx}{1+n^2x^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy:

- $f_n \longrightarrow 0$ punktowo na $\mathbb{R}$.
- $\sup\{|f_n(x)| : x \in \mathbb{R}\} = |f_n(\pm\frac{1}{n})| = \frac{1}{2}$; w szczególności, ciąg nie jest zbieżny jednostajnie w żadnym otoczeniu zera.

Definicja 6.4.4. Wszystkie pojęcia, wprowadzone wyżej dla ciągów funkcyjnych, przenoszą się na szeregi funkcyjne $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$. Dodatkowo, dla szeregów funkcyjnych wprowadzamy pojęcie *zbieżności bezwzględnej jednostajnej*, gdy szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|f_n\|$ jest zbieżny jednostajnie. Można też mówić o *zbieżności bezwzględnej lokalnie jednostajnej*, czy też o *zbieżności bezwzględnej niemal jednostajnej*

Dla szeregów funkcyjnych rozważamy też pojęcie *zbieżności normalnej na X*, gdy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup\{\|f_n(x)\| : x \in X\} < +\infty.$$

Zgodnie z ogólnym wzorcem możemy też mówić o *zbieżności lokalnie normalnej*, czy też o *zbieżności niemal normalnej.*

Twierdzenie 3.3.2 daje nam natychmiast

Twierdzenie 6.4.5 (Warunek Cauchy'ego zbieżności jednostajnej szeregu)**.** *Następujące warunki są równoważne:*

(i) *szereg funkcyjny* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ *jest zbieżny jednostajnie na X;*

(ii) *spełniony jest* jednostajny warunek Cauchy'ego*, tzn.*

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{m>n\geqslant n_0}\ \forall_{x\in X} : \Big\| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \Big\| \leqslant \varepsilon.$$

Twierdzenie 6.4.6. (a) *Szereg zbieżny bezwzględnie jednostajnie (odp. bezwzględnie lokalnie jednostajnie, bezwzględnie niemal jednostajnie) jest zbieżny jednostajnie (odp. lokalnie jednostajnie, niemal jednostajnie).*

(b) *(Kryterium Weierstrassa zbieżności jednostajnej szeregu funkcyjnego) Szereg zbieżny normalnie (odp. lokalnie normalnie, niemal normalnie) jest zbieżny bezwzględnie jednostajnie (odp. lokalnie jednostajnie, niemal jednostajnie).*

Obserwacja 6.4.7. (a) Niech $(f_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{B}(X,E)$. Zauważmy, że jeżeli szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ jest zbieżny jednostajnie na X, to $f := \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n \in \mathcal{B}(X,E)$. Stąd:

- (zbieżność jednostajna szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ na X) $\iff$ (zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ w $\mathcal{B}(X,E)$);
- (zbieżność bezwzględna jednostajna szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ na X) $\iff$ (zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|f_n\|$ w $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$);
- (zbieżność normalna szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ na X) $\iff$ (zbieżność bezwzględna $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ w $\mathcal{B}(X,E)$).

(b) Założenie $(f_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{B}(X,E)$ nie jest ograniczające. Jeżeli szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ jest jednostajnie zbieżny, to z jednostajnego warunku Cauchy'ego (z $\varepsilon = 1$) wynika, że istnieje $n_0 \in \mathbb{N}_0$ takie, że $\|f_k(x)\| \leqslant 1$, $x \in X$, $k > n_0$. Tak więc $f_k \in \mathcal{B}(X,E)$ dla $k > n_0$.

(c) Powyższe obserwacje pozwalają przenosić automatycznie wyniki dotyczące szeregów elementów przestrzeni Banacha E na szeregi funkcyjne. Po prostu stosujemy wyniki dotyczące szeregów o wyrazach z E do szeregów o wyrazach z $\mathcal{B}(X,E)$.

W ten sposób na przykład dostajemy:

Twierdzenie 6.4.8 (Twierdzenie o tasowaniu szeregów bezwzględnie jednostajnie zbieżnych)**.** *Przypuśćmy, że szereg* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ *jest zbieżny jednostajnie bezwzględnie na X. Niech $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ będzie dowolną bijekcją. Wtedy szereg* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_{\sigma(n)}$ *jest zbieżny jednostajnie bezwzględnie na X* (14).

Przykład 6.4.9. Szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1 - z^{2n}}, \quad z \in X := \mathbb{C} \setminus \mathbb{T},$$

---

(14) Oczywiście, na podstawie Twierdzenia 6.1.7 mamy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_{\sigma(n)}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, $x \in X$.

jest zbieżny lokalnie normalnie.

Istotnie dla dowolnego $\theta \in (0,1)$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n \geqslant N$ mamy

$$\sup\Big\{\Big|\frac{z^n}{1-z^{2n}}\Big| : |z| \leqslant \theta\Big\} \leqslant 2\theta^n, \quad \sup\Big\{\Big|\frac{z^n}{1-z^{2n}}\Big| : |z| \geqslant \frac{1}{\theta}\Big\} \leqslant 2\theta^n \quad (\text{Ćwiczenie}).$$

Ćwiczenie 6.4.10. Niech $g_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$g_n(x) := \begin{cases} 1 - \frac{1}{n}, & \text{jeżeli } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \frac{n+1}{2}x, & \text{jeżeli } \frac{1}{n+1} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ 1 - \frac{1}{2n}, & \text{jeżeli } \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}.$$

Zdefiniujmy $f_n := g_n - g_{n-1}$, $k \in \mathbb{N}_2$. Wtedy szereg $\sum\limits_{n=2}^{\infty} f_n$ jest zbieżny bezwzględnie jednostajnie, ale nie jest zbieżny normalnie.

Twierdzenie 6.4.11. *Załóżmy, że szereg funkcyjny* $f := \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ *jest lokalnie jednostajnie zbieżny. Wtedy:*

(a) *Jeżeli dla pewnego* $a \in X$ *mamy* $f_n \in \mathcal{C}(X,\mathbb{C};a)$, $n \in \mathbb{N}$, *to* $f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{C};a)$.

(b) *Jeżeli* $f_n \in \mathcal{C}(X,\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$, *to* $f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{C})$.

Dowód. Wystarczy skorzystać z Twierdzenia 4.4.1. □

Przykład 6.4.12. (a) Suma szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^{2n}}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{T}$, jest funkcją ciągłą.

(b) Funkcja eksponens jest ciągła.

Zagadnienia dotyczące szeregów mają swoje odpowiedniki dla iloczynów funkcyjnych.

Twierdzenie 6.4.13. *Niech* (X,ϱ) *będzie przestrzenią lokalnie zwartą i niech* $(f_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{C}(X,\mathbb{C})$. *Jeżeli szereg* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |f_n|$ *jest zbieżny niemal jednostajnie w* X, *to iloczyn* $I := \prod\limits_{n=0}^{\infty} (1+f_n)$ *jest zbieżny niemal jednostajnie w* X *(w szczególności,* $I \in \mathcal{C}(X,\mathbb{C})$*).*

Dowód. Na podstawie Twierdzeń 6.3.5 i 6.3.6, dla dowolnego $x \in X$, iloczyn $I(x) := \prod\limits_{n=0}^{\infty}(1+f_n(x))$ jest zbieżny bezwzględnie. Pozostaje wykazać, że $I_k \longrightarrow I$ niemal jednostajnie. Ustalmy zbiór zwarty $K \subset X$. Ponieważ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |f_n| \in \mathcal{C}(X)$, zatem istnieje $C > 0$ takie, że $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |f_n(x)| \leqslant C$, $x \in K$. Stąd dla $x \in K$ dostajemy $|I_k(x)| \leqslant (1+|f_1(x)|)\cdots(1+|f_k(x)|) \leqslant e^{|f_1(x)|+\dots+|f_k(x)|} \leqslant e^C$.

Mamy $I_n - I_{n-1} = I_{n-1}f_n$. Stąd $I_k = I_0 + \sum\limits_{n=1}^{k}(I_n - I_{n-1}) = I_0 + \sum\limits_{n=1}^{k} I_{n-1}f_n$. Wystarczy więc pokazać, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |I_{n-1}f_n|$ jest zbieżny jednostajnie na K. Wynika to z oszacowania $|I_{n-1}(x)f_n(x)| \leqslant e^C|f_n(x)|$, $x \in K$. □

6.5. Operator odwracania w algebrach Banacha

Definicja 6.5.1. Mówimy, że $(A, \|\ \|)$ jest *algebrą Banacha* z jedynką, jeżeli:

- A jest algebrą z jedynką e,
- $(A, \|\ \|)$ jest przestrzenią Banacha,
- $\|xy\| \leqslant \|x\|\|y\|$, $x, y \in A$,
- $\|e\| = 1$.

Niech $O(A)$ oznacza zbiór elementów odwracalnych algebry A i niech $O(A) \ni x \overset{\varLambda}{\longmapsto} x^{-1} \in O(A)$. Odnotujmy, że $\varLambda$ jest bijekcją; $\varLambda^{-1} = \varLambda$.

Obserwacja 6.5.2. (a) Niech $X \neq \varnothing$ będzie zwartą przestrzenią topologiczną i niech $A := \mathcal{C}(X,\mathbb{K})$. Wtedy A z normą Czebyszewa (supremową) jest algebrą Banacha z jedynką. Ponadto, $O(A) = \{f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{K}) : f(x) \neq 0,\ x \in X\}$ oraz $\varLambda(f) = 1/f$.

(b) Niech $E \neq \{0\}$ będzie przestrzenią Banacha nad $\mathbb{K}$ i niech $A := \mathcal{L}(E, E)$. Wtedy A z normą z $\mathcal{L}(E, E)$ i składaniem jako mnożeniem wewnętrznym jest algebrą Banacha z jedynką id_E. Ponadto, $O(A) = \mathrm{Isom}(E, E)$ oraz $\Lambda(L) = L^{-1}$.

(c) Niech $A := \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n) \simeq \mathbb{M}(n \times n; \mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^{n^2}$ (z normą operatorową z $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$). Wtedy $O(A)$ to zbiór macierzy odwracalnych, tzn. $O(A) = \{L \in \mathbb{M}(n \times n; \mathbb{K}) : \det L \neq 0\}$. Zauważmy, że jest to zbiór otwarty w $\mathbb{M}(n \times n; \mathbb{K})$. Ponadto, odwzorowanie $O(A) \ni L \xmapsto{\Lambda} L^{-1} \in O(A)$ jest homeomorfizmem.

Powyższa sytuacja (w (c)) nie jest przypadkowa. Mamy bowiem następujący ogólny wynik.

Twierdzenie 6.5.3. *Niech A będzie algebrą Banacha z jedynką e. Wtedy:*

(a) *$B(e, 1) \subset O(A)$ oraz $(e - x)^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu$, $\|x\| < 1$, gdzie $x^0 := e$.*

(b) *Ogólniej, jeżeli $a \in O(A)$, to $B(a, 1/\|a^{-1}\|) \subset O(A)$ oraz $(a - x)^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (a^{-1}x)^\nu a^{-1}$, $\|x\| < 1/\|a^{-1}\|$. W szczególności, $O(A)$ jest otwarty w A.*

(c) *Odwzorowanie $O(A) \ni x \xmapsto{\Lambda} x^{-1} \in O(A)$ jest homeomorfizmem.*

Dowód. (a) Ustalmy $x \in A$, $\|x\| < 1$. Na wstępie zauważmy, że ponieważ $\|x^\nu\| \leqslant \|x\|^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, zatem szereg jest zbieżny do pewnego elementu a. Mamy:

$$(e - x)a = a - xa = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu - \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu+1} = e, \quad a(e - x) = a - ax = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu - \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu+1} = e.$$

(b) Niech $a \in O(A)$. Ustalmy $x \in A$, $\|x\| < 1/\|a^{-1}\|$. Wtedy $\|a^{-1}x\| < 1$. Ponieważ $a - x = a(e - a^{-1}x)$, wystarczy skorzystać z (a).

(c) Niech $a \in O(A)$, $\|x\| < 1/\|a^{-1}\|$. Na podstawie (b) mamy:

$$\|\Lambda(a - x) - \Lambda(a)\| = \|(a - x)^{-1} - a^{-1}\| = \|\sum_{\nu=1}^{\infty} (a^{-1}x)^\nu a^{-1}\| \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} \|a^{-1}\|^{\nu+1} \|x\|^\nu = \frac{\|a^{-1}\|^2 \|x\|}{1 - \|a^{-1}\| \|x\|}. \quad \square$$

Korzystając z poprzednich rozważań łatwo dostajemy następujący wynik.

Twierdzenie 6.5.4. *Dla dowolnego $L_0 \in \mathrm{Isom}(E, F)$ i $X \in \mathcal{L}(E, F)$ takich, że $\|X\| < 1/\|L_0^{-1}\|$ mamy*

$$L_0 - X \in \mathrm{Isom}(E, F), \quad (L_0 - X)^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (L_0^{-1} \circ X)^\nu \circ L_0^{-1}.$$

W szczególności, zbiór $\mathrm{Isom}(E, F)$ jest otwarty w $\mathcal{L}(E, F)$, a odwzorowanie

$$\mathrm{Isom}(E, F) \ni L \xmapsto{\Lambda} L^{-1} \in \mathrm{Isom}(F, E)$$

jest homeomorfizmem.

6.6. Szeregi potęgowe

Niech E będzie ustaloną przestrzenią Banacha nad $\mathbb{K}$.

Definicja 6.6.1. *Szeregiem potęgowym o środku w punkcie $a \in \mathbb{K}$* nazywamy szereg funkcyjny postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n, \tag{*}$$

gdzie $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset E$, $z \in \mathbb{K}$ $(0^0 := 1)$. Oczywiście wszystkie własności szeregu (*) można odczytać badając szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, czyli zakładając, że $a = 0$. Tak też zawsze będziemy czynić. Liczbę

$$R := \frac{1}{\limsup\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|}} \in [0, +\infty]$$

nazywamy *promieniem zbieżności szeregu potęgowego*.

Twierdzenie 6.6.2. *Rozważmy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.*

(a) *Jeżeli $R>0$, to dla dowolnego $0<r<R$ istnieją $\theta\in(0,1)$ oraz $M>0$ takie, że $\|a_nz^n\|\leqslant M\theta^n$ dla dowolnego $n\in\mathbb{N}$ oraz $z\in K(r)$.* (15)

(b) *Jeżeli $R>0$, to szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ jest zbieżny lokalnie normalnie w $K(R)$.*

(c) *Jeżeli $R>0$ i $f(z):=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$, $z\in K(R)$, to $f\in\mathcal{C}(K(R),E)$ (Twierdzenie 6.4.11(b)).*

(d) *Jeżeli $R<+\infty$, to dla $z\notin\overline{K(R)}\cap\mathbb{K}$ szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ jest rozbieżny.*

(e) $R=\sup\Big\{|z|:\sum\limits_{n=0}^{\infty}\|a_nz^n\|<+\infty\Big\}=\sup\Big\{|z|:\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0}\|a_nz^n\|<+\infty\Big\}$.

(f) *Jeżeli $0<R<+\infty$, to o zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ dla $\in\mathbb{K}\cap\partial K(R)$ nic nie można powiedzieć.*

Dowód. (a) Dla $|z|\leqslant r$ mamy $\|a_nz^n\|\leqslant\|a_n\|r^n$. Ponadto, $\limsup\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\|a_n\|r^n}=\frac{r}{R}<1$. Biorąc $\frac{r}{R}<\theta<1$ wnioskujemy, że istnieje $N\in\mathbb{N}$ takie, że $\|a_n\|r^n\leqslant\theta^n$ dla $n>N$. Teraz wystarczy tylko wziąć $M:=\max\{1,\|a_n\|(r/\theta)^n:n=1,\dots,N\}$.

(b) wynika z (a).

(c) wynika z (b) i Twierdzenia 6.4.11.

(d) Ponieważ $\limsup\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\|a_nz^n\|}=\frac{|z|}{R}>1$, wystarczy skorzystać z kryterium Cauchy'ego.

(e) Niech $R_1:=\sup\{|z|:\sum\limits_{n=0}^{\infty}\|a_nz^n\|<+\infty\}$, $R_2:=\sup\{|z|:\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0}\|a_nz^n\|<+\infty\}$. Na podstawie (b) i (d) mamy $R=R_1\leqslant R_2$. Jeżeli $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0}\|a_nz^n\|<+\infty$, to dla dowolnego $\theta\in(0,1)$ szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\|a_n(\theta z)^n\|$ jest zbieżny, a więc $R_2\leqslant R_1$.

(f) Rozważmy następujące przykłady ($R=1$):

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}z^n$: dla dowolnego $z\in\mathbb{T}$ szereg jest rozbieżny.
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$: dla dowolnego $z\in\mathbb{T}$ szereg jest bezwzględnie zbieżny.
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$: dla $z=1$ szereg jest rozbieżny; dla $z\in\mathbb{T}\setminus\{1\}$ szereg jest zbieżny na mocy kryterium Dirichleta (Przykład 6.2.2(a)). $\square$

Obserwacja 6.6.3. Jeżeli $f(z):=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$, $z\in K(R)$ ($R>0$), to $a_1=f'(0):=\lim\limits_{z\to0}\frac{f(z)-f(0)}{z}$ (16).

Istotnie, $\frac{f(z)-f(0)}{z}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nz^{n-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{n+1}z^n$, $z\in K(R)\setminus\{0\}$. Szereg potęgowy $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{n+1}z^n$ ma ten sam promień zbieżności: $\limsup\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_{n+1}|}=\limsup\limits_{n\to+\infty}\big(\sqrt[n+1]{\|a_{n+1}\|}\big)^{\frac{n+1}{n}}=\limsup\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n+1]{\|a_{n+1}\|}$. W szczególności, funkcja $g(z):=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{n+1}z^n$, $z\in K(R)$, jest ciągła. Mamy więc $a_1=g(0)=\lim\limits_{z\to0}g(z)=\lim\limits_{z\to0}\frac{f(z)-f(0)}{z}$.

6.7. Funkcje e^z, $\sin z$, $\cos z$, ...

Głównym celem tego podrozdziału jest formalne zdefiniowanie liczby π i funkcji trygonometrycznych.

Przypomnijmy (Definicja 6.1.18), że funkcję eksponens $\exp:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ definiujmy wzorem

$$e^z=\exp z=\exp(z):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\quad z\in\mathbb{C}.$$

(15) Uwaga: Tu i dalej, jeżeli $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, to $K(a,r)$, $K(r)$ oznaczają koła na płaszczyźnie. Jeżeli zaś $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ to oznaczają one przedziały $(a-r,a+r)$, $(-r,r)$.

(16) Oczywiście, jeżeli $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, to $f'(0)$ pokrywa się ze znaną nam pochodną. Jeżeli $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, to jest to coś nowego — *pochodna zespolona*

Jest to funkcja ciągła. Ponadto, Na podstawie Obserwacji 6.6.3 mamy $(e^z)'(0) = 1$.

Definicja 6.7.1. *Definiujemy* funkcje trygonometryczne (*wzory Eulera*):
$$\sin z := \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}, \quad \cos z := \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Obserwacja 6.7.2. (a) sin i cos są funkcjami ciągłymi.

(b) $\exp(iz) = \cos z + i \sin z$, $z \in \mathbb{C}$.

(c) $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, $\cos(-z) = \cos z$, $\sin(-z) = -\sin z$, $z \in \mathbb{C}$.

(d) $\sin z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$, $z \in \mathbb{C}$.

Istotnie,
$$\sin z = \frac{1}{2i}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!}\Big) = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$
$$\cos z = \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!}\Big) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(iz)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

(e) $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ oraz $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, $a, b \in \mathbb{C}$. W szczególności, $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$, $z \in \mathbb{C}$ (*jedynka trygonometryczna*).

Istotnie,
$$\sin a \cos b + \sin b \cos a = \frac{1}{4i}\Big((e^{ia} - e^{-ia})(e^{ib} + e^{-ib}) + (e^{ib} - e^{-ib})(e^{ia} + e^{-ia})\Big)$$
$$= \frac{1}{2i}(e^{ia}e^{ib} - e^{-ia}e^{-ib}) = \frac{1}{2i}(e^{i(a+b)} - e^{-i(a+b)}) = \sin(a+b).$$

Drugi wzór pozostawiamy jako Ćwiczenie.

(f) $\sin(\mathbb{R}) \subset [-1, 1]$, $\cos(\mathbb{R}) \subset [-1, 1]$.

(g) Na podstawie Obserwacji 6.6.3 mamy $\lim\limits_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$, $\lim\limits_{z \to 0} \frac{\cos z - 1}{z} = 0$.

Zauważmy, że
$$\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} < -1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!} < -1 + \frac{2^4}{4!}\Big(1 + \frac{2^2}{5^2} + \frac{2^4}{5^4} + \dots\Big)$$
$$= -1 + \frac{16}{24}\frac{1}{1 - \frac{4}{25}} = -1 + \frac{50}{63} < 0.$$

W takim razie, z własności Darboux funkcji ciągłych wynika, że funkcja cos musi mieć zero w przedziale $(0, 2)$.

Definicja 6.7.3. $\pi := 2 \inf\{x > 0 : \cos x = 0\}$.

Obserwacja 6.7.4. (a) $0 < \pi < 4$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

(b) $0 < \cos x < 1$ dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Ustalmy $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Oczywiście $0 < \cos x \leqslant 1$. Dla uzyskania ostrej nierówności zauważmy, że
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!}\Big(1 - \frac{x^2}{3 \cdot 4}\Big) - \frac{x^6}{6!}\Big(1 - \frac{x^2}{7 \cdot 8}\Big) - \dots < 1.$$

(c) $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ oraz $0 < \sin x < 1$ dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Ustalmy $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Oczywiście $\sin \frac{\pi}{2} \in \{-1, +1\}$. Wystarczy pokazać, że $\sin x > 0$. Mamy
$$\sin x = x\Big(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3}\Big) + \frac{x^5}{5!}\Big(1 - \frac{x^2}{6 \cdot 7}\Big) + \dots > 0.$$

(d) $\cos \pi = \cos 2\frac{\pi}{2} = \cos^2 \frac{\pi}{2} - \sin^2 \frac{\pi}{2} = -1$,
$\sin \pi = 2 \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 0$,
$\cos(2\pi) = \cos^2 \pi - \sin^2 \pi = 1$,
$\sin(2\pi) = 2 \sin \pi \cos \pi = 0$.

(e) $\cos(z+2(k+1)\pi) = \cos(z+2k\pi)\cos 2\pi - \sin(z+2k\pi)\sin 2\pi = \cos(z+2k\pi)$, a stąd $\cos(z+2k\pi) = \cos z$,

$\sin(z+2k\pi) = \sin z$, $z \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$ (korzystamy z Obserwacji 6.7.2(e)).

(f) $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, $x, y \in \mathbb{R}$. W szczególności, $e^{\pi i} = -1$.

(g) $e^{z+2k\pi i} = e^z$, $z \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Istotnie, $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z$.

Twierdzenie 6.7.5. (a) *Odwzorowanie* $[0, 2\pi) \ni t \overset{\Phi}{\longmapsto} e^{it} \in \mathbb{T}$ *jest bijektywne.*

(b) $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(c) $e^a = e^b \iff \frac{a-b}{2\pi i} \in \mathbb{Z}$.

(d) *Dla* $x \in \mathbb{R}$ *funkcje* $\sin x$ *i* $\cos x$ *pokrywają się z funkcjami znanymi z trygonometrii.*

Dowód. (a) Wiemy, że $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1) \in \Phi([0, 2\pi))$. Ponadto, wiemy, że

$$\{(x + iy) \in \mathbb{T} : x > 0,\ y > 0\} = \Phi((0, \tfrac{\pi}{2})).$$

Z okresowości wnioskujemy, że $\mathbb{T} \subset \Phi([0, 2\pi))$. Pozostaje injektywność. Przypuśćmy, że $\Phi(t') = \Phi(t'')$, $t' < t''$. Niech $4t := t'' - t'$, $t \in (0, \frac{\pi}{2})$, $x + iy := e^{it} \in \mathbb{T}$ $(x, y \in (0, 1))$. Mamy $e^{i4t} = 1$, czyli $1 = (x+iy)^4 = (x^2-y^2+2ixy)^2 = (x^2-y^2)^2 - 4x^2y^2 + 8ixy(x^2-y^2)$. Stąd $x^2 = y^2$, a więc $x^2 = y^2 = \frac{1}{2}$. Ostatecznie dostajemy $1 = (x + iy)^4 = -1$ — sprzeczność.

(b) Mamy $z = |z| \cdot \frac{z}{|z|}$. Na podstawie (a) istnieje $y \in [0, 2\pi)$ takie, że $e^{iy} = \frac{z}{|z|}$. Oczywiście istnieje $x \in \mathbb{R}$ takie, że $e^x = |z|$. Ostatecznie wiec mamy $z = e^x(\cos y + i \sin y) = e^{x+iy}$.

(c) Niech $c := a - b = \alpha + i\beta$. Mamy $1 = e^c = e^\alpha(\cos\beta + i \sin\beta)$, Stąd $\sin\beta = 0$, a więc, wobec (a), $\frac{\beta}{2\pi} \in \mathbb{Z}$. W konsekwencji $1 = e^\alpha$, skąd wynika, że $\alpha = 0$.

(d) Ćwiczenie. □

Definicja 6.7.6 (Funkcje hiperboliczne)**.** Funkcje hiperboliczne cosh i sinh (zob. Ćwiczenie 4.4.23) mogą być rozszerzone na całą płaszczyznę zespoloną. Definiujemy:

- *cosinus hiperboliczny*: $\mathbb{C} \ni z \overset{\cosh}{\longmapsto} \frac{e^z+e^{-z}}{2} \in \mathbb{C}$;
- *sinus hiperboliczny*: $\mathbb{C} \ni z \overset{\sinh}{\longmapsto} \frac{e^z-e^{-z}}{2} \in \mathbb{C}$;
- *tangens hiperboliczny*: $\mathbb{C} \setminus \{(\frac{1}{2} + k)\pi i : k \in \mathbb{Z}\} \ni z \overset{\mathrm{tgh}}{\longmapsto} \frac{\sinh z}{\cosh z} \in \mathbb{C}$.

6.8. Przeliczalne rodziny sumowalne

Poznane wcześnie pojęcie szeregu bezwarunkowo zbieżnego będziemy chcieli przenieść na szeregi funkcyjne postaci $\sum_{i \in I} f_i$, gdzie I jest dowolnym zbiorem przeliczalnym, X jest dowolnym zbiorem niepustym, zaś $f_i : X \longrightarrow E$, $i \in I$, gdzie E jest przestrzenią Banacha nad ciałem $\mathbb{K}$, $E \neq \{0\}$. Oznaczmy przez $\mathcal{F}(I)$ rodzinę wszystkich niepustych skończonych podzbiorów I. Rozważmy rodzinę funkcji $f_i : X \longrightarrow E$, $i \in I$. Dla $A \in \mathcal{F}(I)$ zdefiniujmy $f_A := \sum_{i \in A} f_i : X \longrightarrow E$. Oczywiście $f_{\{i\}} = f_i$. Przyjmujemy, że $f_\varnothing := 0$.

Obserwacja 6.8.1. (a) W przypadku, gdy $X = \{x_0\}$ szereg $\sum_{i \in I} f_i$ redukuje się do szeregu elementów przestrzeni Banacha E.

(b) Istnieje też możliwość badania szeregów $\sum_{i \in I} f_i$, gdzie I jest dowolnym zbiorem nieskończonym (zob. Definicja 6.8.6).

Twierdzenie 6.8.2. *Następujące warunki są równoważne:*

(i) *rodzina* $(f_i)_{i \in I}$ *jest* jednostajnie sumowalna na X*, tzn. istnieje funkcja* $f_I : X \longrightarrow E$ *taka, że*

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{S(\varepsilon) \in \mathcal{F}(I)}\ \forall_{A \in \mathcal{F}(I):\ S(\varepsilon) \subset A}\ \forall_{x \in X} : \|f_A(x) - f_I(x)\| \leqslant \varepsilon;$$

(ii) *rodzina* $(f_i)_{i \in I}$ *spełnia* jednostajny warunek Cauchy'ego*, tzn.*

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{C(\varepsilon) \in \mathcal{F}(I)} \forall_{A \in \mathcal{F}(I \setminus C(\varepsilon))}\ \forall_{x \in X} : \|f_A(x)\| \leqslant \varepsilon;$$

(iii) *rodzina* $(f_i)_{i \in I}$ *jest* jednostajnie bezwarunkowo sumowalna*, tzn. dla dowolnej bijekcji* $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow I$ *szereg* $\sum_{n=0}^{\infty} f_{\sigma(n)}$ *jest zbieżny jednostajnie na* X *i jego suma nie zależy od* σ*, przy czym tą sumą jest funkcja* f_I *z warunku* (i)*;*

(iv) *dla dowolnej bijekcji* $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow I$ *szereg* $\sum_{n=0}^{\infty} f_{\sigma(n)}$ *jest zbieżny jednostajnie na* X.

Obserwacja 6.8.3. (a) Funkcja f_I w warunku (i) jest wyznaczona jednoznacznie. Nazywamy ją *sumą* rodziny $(f_i)_{i\in I}$ i oznaczamy przez $f_I = \sum_{i\in I} f_i$.

(b) Jeżeli $X = \{x_0\}$ słowo „jednostajnie" pomijamy i mówimy o *sumowalnej* rodzinie elementów przestrzeni E.

(c) Zauważmy, że w warunku (i) (odp. (ii)) zbiór $S(\varepsilon)$ (odp. $C(\varepsilon)$) może być powiększony bez szkody dla zachodzenia warunku.

(d) Jednostajna sumowalność to nic innego jak jednostajna bezwarunkowa zbieżność szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} f_{\sigma(n)}$ dla pewnej dowolnie ustalonej bijekcji $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow I$.

(e) Jeżeli rodzina $(f_i)_{i\in I} \subset \mathcal{B}(X, E)$ jest jednostajnie sumowalna na X, to istnieje stała $M > 0$ taka, że $\|f_A(x)\| \leqslant M$, $x \in X$, $A \in \mathcal{F}(I)$. W szczególności, $\|f_I(x)\| \leqslant M$, $x \in X$.

Istotnie, dla $A \in \mathcal{F}(I \setminus S(1))$ mamy $\|f_A(x)\| = \|f_{A\cup S(1)}(x) - f_{S(1)}(x)\| \leqslant \|\|f_{A\cup S(1)}(x) - f_I(x)\| + \|f_{S(1)}(x) - f_I(x)\| \leqslant 2$. Teraz wystarczy przyjąć $M := \max\{2, \|f_i\|_X : i \in S(1)\}$.

Dowód Twierdzenia 6.8.2. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Niech $C(\varepsilon) := S(\varepsilon/2) := S$. Wtedy dla $A \in \mathcal{F}(I \setminus S)$ i $x \in X$ mamy:

$$\|f_A(x)\| = \|f_{A\cup S}(x) - f_S(x)\| \leqslant \|f_{A\cup S}(x) - f_I(x)\| + \|f_S(x) - f_I(x)\| \leqslant \varepsilon.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Możemy założyć, że $C(\frac{1}{n}) \subsetneq C(\frac{1}{n+1})$, $n \in \mathbb{N}$. Niech $s_n := f_{C(\frac{1}{n})}$, $n \in \mathbb{N}$. Mamy

$$\|s_{n+k}(x) - s_n(x)\| = \|f_{C(\frac{1}{n+k})\setminus C(\frac{1}{n})}(x)\| \leqslant \frac{1}{n}, \quad n, k \in \mathbb{N},\ x \in X.$$

Oznacza to, że ciąg funkcji $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego na X. Ponieważ E jest przestrzenią Banacha, zatem $s_n \longrightarrow s$ jednostajnie na X (dla pewnej funkcji $s : X \longrightarrow E$). Pokażemy, że rodzina $(f_i)_{i\in I}$ jest jednostajnie sumowalna do s.

Z poprzedniej nierówności wynika, że $\|s_n(x) - s(x)\| \leqslant \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$. Jeżeli teraz $A \in \mathcal{F}(I)$ i $C(\frac{1}{n}) \subset A$, to

$$\|f_A(x) - s(x)\| \leqslant \|f_A(x) - f_{C(\frac{1}{n})}(x)\| + \|f_{C(\frac{1}{n})}(x) - s(x)\| \leqslant \|f_{A\setminus C(\frac{1}{n})}(x)\| + \frac{1}{n} \leqslant \frac{2}{n},\ x \in X.$$

(i) $\Longrightarrow$ (iii): Ustalmy bijekcję $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow I$ oraz $\varepsilon > 0$. Niech $N_0 \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $S(\varepsilon) \subset \{\sigma(0), \dots, \sigma(N_0)\}$ Wtedy dla dowolnego $N \geqslant N_0$ mamy $S(\varepsilon) \subset \{\sigma(0), \dots, \sigma(N)\} =: A$, a stąd

$$\Big\|\sum_{n=0}^{N} f_{\sigma(n)}(x) - f_I(x)\Big\| = \|f_A(x) - f_I(x)\| \leqslant \varepsilon, \quad x \in X.$$

Implikacja (iii) $\Longrightarrow$ (iv) jest oczywista.

(iv) $\Longrightarrow$ (ii): Przypuśćmy, że dla pewnego $\varepsilon > 0$ warunek (ii) nie zachodzi. Ustalmy dowolne $i_0 \in I$. Zbiór $C(\varepsilon) := \{i_0\}$ nie może być dobry. W takim razie istnieje zbiór $F(1) \in \mathcal{F}(I \setminus \{i_0\})$ taki, że $\sup_{x\in X} \|f_{F(1)}(x)\| > \varepsilon$. Zbiór $C(\varepsilon) := F(1)$ też nie może być dobry. Znajdziemy więc $F(2) \in \mathcal{F}(I \setminus F(1))$ taki, że $\sup_{x\in X} \|f_{F(2)}(x)\| > \varepsilon$. Teraz bierzemy $C(\varepsilon) := F(1) \cup F(2)$ i znajdujemy $F(3) \in \mathcal{F}(I \setminus (F(1) \cup F(2)))$ taki, że $\sup_{x\in X} \|f_{F(3)}(x)\| > \varepsilon$. Rozumując dalej znajdziemy ciąg $(F(k))_{k=1}^{\infty}$ parami rozłącznych skończonych podzbiorów I taki, że $\sup_{x\in X} \|f_{F(k)}(x)\| > \varepsilon$, $k \in \mathbb{N}$.

Teraz skonstruujemy pewną bijekcję $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow I$, którą będziemy utożsamiać z permutacją zbioru I.

Jeżeli zbiór $F(0) := I \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} F(k)$ jest skończony, to na początku ustawimy elementy zbioru $F(0)$ w dowolnej kolejności, potem elementy zbioru $F(1)$ (też w dowolnej kolejności), potem $F(2)$ itd.

Niech $N(k) := \#F(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Zdefiniujmy $S_N := \sum_{n=0}^{N} f_{\sigma(n)}$. Wtedy $S_{N(0)+\dots+N(k)} - S_{N(0)+\dots+N(k-1)} = f_{F(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, a więc ciąg $(S_N)_{N=0}^{\infty}$ nie spełnia warunku Cauchy'ego; sprzeczność.

W przypadku gdy zbiór $F(0)$ jest nieskończony, ustawiamy jego elementy w ciąg $i_1, i_2, \dots$, a następnie budujemy permutację σ następująco: stawiamy i_1, potem elementy zbioru $F(1)$, potem i_2, potem $F(2)$, itd. Podobnie jak poprzednio, bez trudu widzimy, że $(S_N)_{N=0}^{\infty}$ nie może spełniać warunku Cauchy'ego bowiem $S_{N(0)+\cdots+N(k)+k}-S_{N(0)+\cdots+N(k-1)+k}=f_{F(k)}$, $k\in\mathbb{N}$, a więc $(S_N)_{N=0}^{\infty}$ nie może spełniać warunku Cauchy'ego; sprzeczność. $\square$

Twierdzenie 6.8.4 (Twierdzenie o grupowaniu wyrazów)**.** *Niech* $I=\bigcup\limits_{j\in J}I(j)$*, gdzie* $I(j)\neq\varnothing$ *i* $I(j)\cap I(k)=\varnothing$ *dla* $j\neq k$ ([17])([18])*. Jeżeli rodzina* $(f_i)_{i\in I}$ *jest jednostajnie sumowalna na* X*, to rodzina* $(f_{I(j)})_{j\in J}$ *jest jednostajnie sumowalna na* X ([19])*. Ponadto,*

$$\sum_{j\in J}f_{I(j)}=f_I,\ \ \textit{czyli}\ \ \sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in I(j)}f_i\Big)=\sum_{i\in I}f_i.$$

Odnotujmy, że oczywiście twierdzenie odwrotne nie zachodzi, np. $E:=\mathbb{R}$, $I=J:=\mathbb{N}$, $I(j):=\{2j-1,2j\}$, $f_i:=(-1)^i$. Wtedy $f_{I(j)}=0$ dla dowolnego $j\in\mathbb{N}$, ale rodzina $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ nie jest sumowalna.

Dowód. Ustalmy $\varepsilon>0$ i niech $B(\varepsilon):=\{j\in J: I(j)\cap S(\frac{\varepsilon}{2})\neq\varnothing\}$, gdzie $S(\frac{\varepsilon}{2})\in\mathcal{F}(I)$ jest takie, jak w Twierdzeniu 6.8.2(i). Ponieważ zbiory $I(j)$, $j\in J$, są parami rozłączne mamy $B(\varepsilon)\in\mathcal{F}(J)$. Pokażemy, że z punktu widzenia rodziny $(f_{I(j)})_{j\in J}$ zbiór $B(\varepsilon)$ będzie pełnić rolę zbioru $S(\varepsilon)$, tzn. $\|f_I(x)-\sum\limits_{j\in B}f_{I(j)}(x)\|\leqslant\varepsilon$, $x\in X$, dla dowolnego $B\in\mathcal{F}(J)$ takiego, że $B(\varepsilon)\subset B$.

Ustalmy B i niech $N:=\#B$. Dla dowolnego $j\in J$ niech $D(j)\in\mathcal{F}(I(j))$ będzie takie, że

$$A\in\mathcal{F}(I(j)),\ D(j)\subset A\Longrightarrow\|f_A(x)-f_{I(j)}(x)\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2N},\quad x\in X.\quad ([20])$$

Możemy oczywiście założyć, że $S(\frac{\varepsilon}{2})\cap I(j)\subset D(j)$. Niech $A:=\bigcup\limits_{j\in B}D(j)$. Zauważmy, $S(\frac{\varepsilon}{2})\subset A$, a więc $\|f_A(x)-f_I(x)\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$, $x\in X$. Mamy:

$$\begin{aligned}\Big\|f_I(x)-\sum_{j\in B}f_{I(j)}(x)\Big\|&\leqslant\Big\|f_I(x)-\sum_{j\in B}f_{D(j)}(x)\Big\|+\sum_{j\in B}\|f_{D(j)}(x)-f_{I(j)}(x)\|\\&\leqslant\|f_I(x)-f_A(x)\|+\varepsilon/2\leqslant\varepsilon,\quad x\in X.\end{aligned}$$

$\square$

Twierdzenie 6.8.5 (Twierdzenie o mnożeniu rodzin sumowalnych)**.** *Niech* $\varPhi\in\mathcal{L}(E,F;G)$*. Niech* $(f_i)_{i\in I}$ *będzie jednostajnie sumowalną rodziną odwzorowań ograniczonych* $f_i:X\longrightarrow E$*,* $i\in I$*, i niech* $(g_j)_{j\in J}$ *będzie jednostajnie sumowalną rodziną odwzorowań ograniczonych* $g_j:X\longrightarrow F$*,* $j\in J$*. Jeżeli co najmniej jedna z tych rodzin jest bezwzględnie jednostajnie sumowalna, to rodzina* $(\varPhi(f_i,g_j))_{(i,j)\in I\times J}$ *jest jednostajnie sumowalna oraz* $\sum\limits_{(i,j)\in I\times J}\varPhi(f_i,g_j)=\varPhi(f_I,g_J)$*. Jeżeli obie rodziny są bezwzględnie jednostajnie sumowalne, to rodzina* $(\varPhi(f_i,g_j))_{(i,j)\in I\times J}$ *jest bezwzględnie jednostajnie sumowalna.*

Dowód. Załóżmy, że rodzina $(g_j)_{j\in J}$ jest bezwzględnie jednostajnie sumowalna. Pozostały przypadek pozostawiamy jako Ćwiczenie. Jeżeli już będziemy wiedzieć, że rodzina $(\varPhi(f_ig_j))_{(i,j)\in I\times J}$ jest jednostajnie sumowalna, to wzór na sumę będzie natychmiast wynikać z twierdzenia o grupowaniu rodzin sumowalnych. Istotnie, biorąc $I(j):=I\times\{j\}$, dostajemy

$$\sum_{(i,j)\in I\times J}\varPhi(f_i,g_j)=\sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in I}\varPhi(f_i,g_j)\Big)=\sum_{j\in J}\varPhi\Big(f_i,\sum_{i\in I}g_j\Big)=\sum_{j\in J}\varPhi(f_i,g_J)=\varPhi(f_I,g_J).$$

Przechodzimy do dowodu jednostajnej sumowalności rodziny $(\varPhi(f_ig_j))_{(i,j)\in I\times J}$. Możemy założyć, że $\|\varPhi\|\leqslant1$. Wiemy, że istnieje stała $M>0$ taka, że dla dowolnych $A\in\mathcal{F}(I)$, $B\in\mathcal{F}(J)$ mamy: $\|f_A(x)\|\leqslant M$, $\sum\limits_{j\in B}\|g_j(x)\|\leqslant M$, $x\in X$. W szczególności, $\|f_I(x)\|\leqslant M$ oraz $\sum\limits_{j\in J}\|g_j(x)\|\leqslant M$, $x\in X$ (zob. Obserwacja 6.8.3(e)).

Weźmy $\varepsilon>0$ i niech zbiory $S(\varepsilon)\in\mathcal{F}(I)$, $C(\varepsilon)\in\mathcal{F}(J)$ będą takie, że $|f_A(x)-f_I(x)|\leqslant\varepsilon$, $x\in X$, dla dowolnego $A\in\mathcal{F}(I)$ takiego, że $S(\varepsilon)\subset A$ oraz $\sum\limits_{j\in B}\|g_j(x)\|\leqslant\varepsilon$, $x\in X$, dla dowolnego $B\in\mathcal{F}(J\setminus C(\varepsilon))$.

([17]) Pewne rodziny $I(j)$ mogą być skończone.

([18]) Zauważmy, że $\#J\leqslant\aleph_0$. Zbiór J może być skończony.

([19]) Na podstawie Twierdzenia 6.8.2(ii) każda z rodzin $(f_i)_{i\in I(j)}$ jest sumowalna.

([20]) Tzn. zbiór $D(j)$ pełni względem rodziny $(f_i)_{i\in I(j)}$ rolę zbioru $S(\frac{\varepsilon}{2N})$. W przypadku, gdy rodzina $I(j)$ jest skończona przyjmujemy $D(j):=I(j)$.

Niech teraz $D \in \mathcal{F}(I \times J)$ będzie taki, że $S(\varepsilon) \times C(\varepsilon) \subset D$. Dla dowolnego $j \in J$ niech $D(j) := \{i \in I : (i,j) \in D\}$ ([21]). Mamy

$$\sum_{(i,j)\in D} \Phi(f_i, g_j) - \Phi(f_I, g_J) = \sum_{(i,j)\in D} \Phi(f_i, g_j) - \sum_{j\in J} \Phi(f_I, g_j) = \sum_{j\in J} \Phi(f_{D(j)} - f_I, g_j)$$

($f_\varnothing := 0$). Wynika stąd, że

$$\Big\| \sum_{(i,j)\in D} \Phi(f_i, g_j) - \Phi(f_I, g_J) \Big\| \leqslant \sum_{j\in C(\varepsilon)} \|f_{D(j)} - f_I\| \|g_j\| + \sum_{j\notin C(\varepsilon)} \|f_{D(j)} - f_I\| \|g_j\|$$
$$\leqslant \varepsilon \sum_{j\in C(\varepsilon)} \|g_j\| + 2M \sum_{j\notin C(\varepsilon)} \|g_j\| \leqslant 3M\varepsilon.$$

Jeżeli obie rodziny są bezwzględnie jednostajnie sumowalne, to na podstawie pierwszej części dowodu rodzina $(\|f_i\|\|g_j\|)_{(i,j)\in I\times J}$ jest jednostajnie sumowalna, co oznacza, że rodzina $(\Phi(f_i, g_j))_{(i,j)\in I\times J}$ jest bezwzględnie jednostajnie sumowalna. □

Na koniec rozważymy przypadek, gdy I jest dowolnym nieskończonym zbiorem, niekoniecznie przeliczalnym. Niech X i I będą dowolnymi niepustymi zbiorami i niech E będzie ustaloną przestrzenią Banacha nad $\mathbb{K}$. Tak jak poprzednio, oznaczmy przez $\mathcal{F}(I)$ rodzinę wszystkich niepustych skończonych podzbiorów I. Rozważmy rodzinę funkcji $f_i : X \longrightarrow E$, $i \in I$. Tak, jak poprzednio zdefiniujmy $f_A := \sum_{i\in A} f_i$, $A \in \mathcal{F}(I)$.

Definicja 6.8.6. Powiemy, że rodzina funkcji $(f_i)_{i\in I}$ jest *jednostajnie sumowalna na* X, jeżeli istnieje funkcja $f_I : X \longrightarrow E$ taka, że

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{S(\varepsilon)=S(\varepsilon,I)\in\mathcal{F}(I)}\ \forall_{A\in\mathcal{F}(I):S(\varepsilon)\subset A} : \|f_A(x) - f_I(x)\| \leqslant \varepsilon, \quad x \in X;$$

(por. Twierdzenie 6.8.2(i)). Funkcja f_I jest wyznaczona jednoznacznie (Ćwiczenie). Nazywamy ją *sumą* rodziny f i oznaczamy przez $\sum_{i\in I} f_i$

Następujące twierdzenie pozwala zredukować przypadek dowolnego I do przypadku, gdy I jest przeliczalny.

Twierdzenie 6.8.7. *Jeżeli rodzina* $(f_i)_{i\in I}$ *jest jednostajnie sumowalna na* X, *to* $\#\{i \in I : f_i \not\equiv 0\} \leqslant \aleph_0$.

Dowód. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i $i \in I \setminus S(\varepsilon)$ mamy:

$$\|f_i(x)\| = \|f_{\{i\}\cup S(\varepsilon)}(x) - f_{S(\varepsilon)}(x)\| \leqslant \|f_{\{i\}\cup S(\varepsilon)}(x) - f_I(x)\| + \|f_{S(\varepsilon)}(x) - f_I(x)\| \leqslant 2\varepsilon, \quad x \in X.$$

Innymi słowy: $\{i \in I : \exists_{x\in X} : \|f_i(x)\| > 2\varepsilon\} \subset S(\varepsilon)$ dla dowolnego $\varepsilon > 0$. W takim razie

$$\{i \in I : f_i \not\equiv 0\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} S\Big(\frac{1}{n}\Big).$$ □

6.9. Funkcje analityczne I

Niech $\Omega \subset \mathbb{K}$ będzie otwarty i niech E będzie przestrzenią Banacha nad $\mathbb{K}$.

Definicja 6.9.1. Powiemy, że funkcja $f : \Omega \longrightarrow E$ jest *analityczna* na Ω ($f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, E)$), jeżeli dla dowolnego $a \in \Omega$ istnieje szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$, $a_n \in E$, $n \in \mathbb{N}_0$, o dodatnim promieniu zbieżności taki, że $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ dla z z pewnego otoczenia punktu a.

W przypadku, gdy $\Omega \subset \mathbb{C}$ będziemy równoważnie mówić o *funkcji holomorficznej* i będziemy pisać $f \in \mathcal{O}(\Omega, E)$.

Obserwacja 6.9.2. (a) $\mathcal{C}^\omega(\Omega, E)$ jest przestrzenią wektorową.

([21]) Odnotujmy, że $S(\varepsilon) \subset D(j)$ dla $j \in C(\varepsilon)$.

(b) Przypomnijmy, że każdy szereg potęgowy jest zbieżny niemal normalnie w swoim kole zbieżności (Twierdzenie 6.6.2). W szczególności, $\mathcal{C}^\omega(\Omega, E) \subset \mathcal{C}(\Omega, E)$.

(c) Jeżeli $f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{K})$, $g \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, E)$, to $fg \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, E)$. Istotnie, jeżeli $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ oraz $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$, $z \in K(a,r)$, to korzystając z iloczynu Cauchy'ego szeregów (Twierdzenie 6.2.4) mamy:

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\Big)(z-a)^n, \quad z \in K(a,r).$$

(d) Funkcja $\mathbb{C}_* \ni z \longmapsto \frac{1}{z}$ jest holomorficzna.

Istotnie, dla $a \neq 0$ i dla $|z-a| < |a|$ mamy

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a}\frac{1}{1+\frac{z-a}{a}} = \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{z-a}{a}\Big)^n.$$

(e) Jeżeli $f \in \mathcal{O}(\Omega, E)$, to $f|_{\Omega\cap\mathbb{R}} \in \mathcal{C}^\omega(\Omega \cap \mathbb{R}, E)$.

Twierdzenie 6.9.3 (Zasada identyczności dla funkcji analitycznych)**.** *Jeżeli $f, g \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, E)$, gdzie $\Omega \subset \mathbb{K}$ jest* obszarem *(tzn. zbiorem otwartym i spójnym) i $f = g$ na pewnym niepustym zbiorze mającym punkt skupienia w Ω, to $f \equiv g$.*

Dowód. Zastępując f, g przez $f-g, 0$, sprowadzamy dowód do przypadku $g \equiv 0$. Wiemy, że istnieje punkt $a \in \Omega$ oraz ciąg $(z_s)_{s=1}^{\infty} \subset \Omega \setminus \{a\}$ taki, że $z_s \longrightarrow a$ i $f(z_s) = 0$, $s \in \mathbb{N}$. Wiemy, że $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$, $x \in K(a,r) \subset \Omega$. Oczywiście, $f(a) = a_0 = 0$. Gdyby $f \not\equiv 0$ w $K(a,r)$, to dla pewnego $p \in \mathbb{N}$ mielibyśmy $f(z) = \sum_{n=p}^{\infty} a_n(z-a)^n$, $z \in K(a,r)$, przy czym $a_p \neq 0$. Wynika stąd, że $f(z) = (z-a)^p \sum_{n=p}^{\infty} a_n(z-a)^{n-p} =: (z-a)^p h(z)$ i $h(a) = a_p \neq 0$. Funkcja h jako dana szeregiem potęgowym musi być ciągła w $K(a,r)$. Ponieważ $z_s \neq a$, wnioskujemy, że $h(z_s) = 0$, $s \gg 1$ — sprzeczność. Tak więc $f = 0$ w $K(a,r)$.

Niech $\Omega_0 := \{z_0 \in \Omega : f = 0 \text{ w pewnym otoczeniu otwartym punktu } z_0\}$. Wiemy, że $\Omega_0 \neq \varnothing$. Wprost z definicji wynika, że Ω_0 jest otwarty. Pierwsza część dowodu pokazuje, że każdy punkt skupienia zbioru Ω_0 w Ω należy do Ω_0. Znaczy to, że Ω_0 jest domknięty w Ω. Ponieważ Ω jest spójny, musi być $\Omega_0 = \Omega$. □

Twierdzenie 6.9.4. *Niech $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset E$ i załóżmy, że promień zbieżności R szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ jest dodatni. Niech*

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n, \quad z \in K(a,R).$$

Wtedy $f \in \mathcal{O}(K(R), E)$.

Dowód. Ustalmy $b \in K(a,R)$. Niech $0 < r < R - |b-a|$ i niech $z \in K(b,r)$. Policzmy formalnie:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-b+b-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s} a_n(z-b)^s(b-a)^{n-s}$$
$$= \sum_{s=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=s}^{\infty} a_n\binom{n}{s} a_n(b-a)^{n-s}\Big)(z-b)^s.$$

Niech $I := \{(n,s) \in \mathbb{N}_0^2,\ n \geqslant s\}$ i niech $c_{n,s} := a_n\binom{n}{s}(z-b)^s(b-a)^{n-s}$, $(n,s) \in I$. Aby powyższy rachunek formalny był poprawny wystarczy (na podstawie twierdzenia o grupowaniu wyrazów w rodzinach sumowalnych), aby rodzina $(c_{n,s})_{(n,s)\in I}$ była sumowalna. Wiemy, że wystarczy znaleźć bijekcję $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow I$ taką, że $\sum_{k=0}^{\infty} |c_{\sigma(k)}| < +\infty$. Jako σ przyjmijmy następujące ustawienie zbioru I w ciąg: $(c_{0,0}, c_{1,0}, c_{0,1}, \dots, c_{n,0}, c_{n,1}, \dots, c_{n,n}, \dots)$. Wtedy

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_{\sigma(k)}| = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{n} \|a_n\|\binom{n}{s}|z-b|^s|b-a|^{n-s} = \sum_{n=0}^{\infty}\|a_n\|(|z-b|+|b-a|)^n < +\infty$$

(korzystamy tu z tego, że $|b-a|+|z-b|<R$). $\square$

Wniosek 6.9.5. (a) *Każdy wielomian $f : \mathbb{K} \longrightarrow E$ jest funkcją analityczną na $\mathbb{K}$.*
(b) $\exp, \sin, \cos, \sinh, \cosh \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$.

Twierdzenie 6.9.6 (Twierdzenie o złożeniu funkcji analitycznych)**.** *Niech $\Omega, U \subset \mathbb{K}$ będą otwarte i niech $f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, E)$, $\varphi \in \mathcal{C}^\omega(U, \mathbb{K})$ będą takie, że $\varphi(U) \subset \Omega$. Wtedy $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^\omega(U, E)$.*

Obserwacja 6.9.7. W przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ powyższe twierdzenie zostanie później udowodnione innymi metodami (Twierdzenie 6.11.4).

Dowód Twierdzenia 6.9.6. Ustalmy $t_0 \in U$ i niech $a := \varphi(t_0)$. Aby uprościć zapis, zauważmy, iż dokonując stosownych translacji, możemy założyć, że $t_0 = 0$, $a = 0$ i $f(a) = 0$ (Ćwiczenie). Niech $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, $z \in K(r) \subset \Omega$, oraz $\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k t^k$, $t \in K(\tau) \subset U$. Możemy założyć, że $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k||t|^k < r$ dla $t \in K(\tau)$. W szczególności, $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\| \big(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k||t|^k\big)^n < +\infty$, $t \in K(\tau)$.

Cały problem polega na poprawności następującego rachunku formalnego dla $t \in K(\tau)$:

$$f(\varphi(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Big(\sum_{k=1}^{\infty} b_k t^k\Big)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{s \in \mathbb{N}^n:\ |s|=k} b_{s_1} \cdots b_{s_n}\Big) t^k = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{n=1}^{k} a_n \sum_{s \in \mathbb{N}^n:\ |s|=k} b_{s_1} \cdots b_{s_n}\Big) t^k.$$

Aby wykazać poprawność tego grupowania wyrazów wystarczy sprawdzić, że rodzina

$$\big(a_n b_{s_1} \cdots b_{s_n} t^k\big)_{k,n \in \mathbb{N},\ n \leqslant k,\ s \in \mathbb{N}^n:\ |s|=k}$$

jest sumowalna. Tak jest, bowiem (por. metoda dowodu Twierdzenia 6.9.4):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} \sum_{s \in \mathbb{N}^n:\ |s|=k} \|a_n b_{s_1} \cdots b_{s_n}\| |t|^k \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\| \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k||t|^k\Big)^n < +\infty. \qquad \square$$

Wniosek 6.9.8. *Niech $f, g \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{K})$, $M := g^{-1}(0)$. Wtedy $\frac{f}{g} \in \mathcal{C}^\omega(\Omega \setminus M, \mathbb{K})$. W szczególności:*
- *funkcje wymierne są analityczne,*
- *funkcje* tg, ctg, tgh *są holomorficzne.*

Dowód. Korzystając z analityczności funkcji $z \longmapsto \frac{1}{z}$ i z Twierdzenia 6.9.6, wnioskujemy, że $\frac{1}{g} \in \mathcal{C}^\omega(\Omega \setminus M, \mathbb{K})$. Teraz wystarczy już tylko skorzystać z analityczności iloczynu funkcji analitycznych. $\square$

Twierdzenie 6.9.9 (Twierdzenie o funkcji odwrotnej do funkcji analitycznej)**.** *Niech $\Omega, U \subset \mathbb{K}$ będą otwarte i niech $f : \Omega \longrightarrow U$ będzie bijekcją taką, że $f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega)$. Przypuśćmy, że dla pewnego $a \in \Omega$ mamy $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$, $z \in K(a,r) \subset \Omega$, przy czym $a_1 \neq 0$. Niech $a := g(t_0)$. Wtedy funkcja $g := f^{-1}$ jest analityczna w otoczeniu t_0.*

Cały czas pamiętajmy o bijekcji $\mathbb{R} \ni x \longmapsto x^3 \in \mathbb{R}$, dla której odwzorowanie odwrotne nie jest analityczne.

Obserwacja 6.9.10. W przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ powyższe twierdzenie zostanie później udowodnione innymi metodami (Twierdzenie 6.11.5).

Dowód Twierdzenia 6.9.9. Bez szkody dla ogólności, po stosownych translacjach, możemy założyć, że $a = 0 = t_0$ (stąd $a_0 = 0$). Zastępując funkcję f funkcją $z \longmapsto f(\frac{z}{a_1})$, możemy założyć, że $a_1 = 1$. Zmieniając znak przy współczynnikach a_n, $n \geqslant 2$, możemy założyć, że $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n =: \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$.

Przypuśćmy, że $g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n t^n$, $t \in K(\tau)$. Mamy $f(g(t)) = t$, $\in K(\tau)$. A stąd:

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s \in \mathbb{N}^n:\ |s|=k} b_{s_1} \cdots b_{s_n}\Big) t^k = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{n=1}^{k} \sum_{s \in \mathbb{N}^n:\ |s|=k} c_n b_{s_1} \cdots b_{s_n}\Big) t^k,$$

czyli $b_1 = 1$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{k} \sum\limits_{s\in\mathbb{N}^n\colon |s|=k} c_n b_{s_1}\cdots b_{s_n} = 0$ dla $k \geqslant 2$. Zapiszmy ostatnie równanie w innej postaci:

$$b_k = \sum_{n=2}^{k} \sum_{s\in\mathbb{N}^n\colon |s|=k} a_n b_{s_1}\cdots b_{s_n} =: P_k(a_2,\dots,a_k,b_1,\dots,b_{k-1}), \quad k=2,3,\dots,$$

co daje rekurencyjny wzór na współczynniki b_k, $k \geqslant 2$. Zauważmy, że współczynniki wielomianu P_k są naturalne oraz, że $b_k = P_k(a_2,\dots,a_k,b_1,\dots,b_{k-1}) \geqslant 0$ dla $a_n \geqslant 0$, $n \geqslant 2$.

Umiemy więc wyznaczyć formalnie współczynniki szeregu funkcji g. Pozostaje sprawdzić, że szereg ten jest zbieżny w pewnym otoczeniu zera. Zastosujemy *metodę majoranty analitycznej*.

Ustalmy $C > 1$ takie, że $|a_n| \leqslant C^n$, $n \in \mathbb{N}$ (por. Twierdzenie 6.6.2) i niech $F(z) := z - \sum_{n=2}^{\infty} C^n z^n = z - \frac{C^2z^2}{1-Cz}$, $|z| < 1/C$. Mamy $F(0) = 0$. Równanie $F(z) = t$, tzn. $(C^2 + C)z^2 - (1 + Ct)z + t = 0$ ma dla małych $|t|$ jednoznaczne rozwiązanie $G(t) = \frac{(1+Ct)-\sqrt{(1+Ct)^2-4t(C^2+C)}}{2(C^2+C)}$ takie, że $G(0) = 0$. Przypuśćmy na chwilę, że wiemy, że G jest analityczna, $G(t) = B_1t + \sum\limits_{n=2}^{\infty} B_n t^n$, $|t| < \tau$. Powtarzając poprzednie formalne rozumowanie, mamy $B_1 = 1$ oraz

$$B_k = \sum_{n=2}^{k} \sum_{s\in\mathbb{N}^n\colon |s|=k} C^n B_{s_1}\cdots B_{s_n} = P_k(C^2,\dots,C^k,B_1,\dots,B_{k-1}), \quad k=2,3,\dots,$$

przy czym $B_k \geqslant 0$ oraz $|b_k| \leqslant B_k$, $k \geqslant 2$. W konsekwencji, szereg $z - \sum\limits_{k=2}^{\infty} b_k t^k$ jest zbieżny dla $|t| < \tau$. Wracamy do problemu analityczności G. Zapiszmy $G(t) = \frac{(1+Ct)\left(1-\sqrt{1-\frac{4t(C^2+C)}{(1+Ct)^2}}\right)}{2(C^2+C)}$. Pamiętając o twierdzeniu o składaniu funkcji analitycznych, wnioskujemy, że problem leży w pokazaniu, że funkcja $u \longmapsto \sqrt{1+u}$ jest analityczna w otoczeniu $u = 0$. Przypadek $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ znamy (Przykład 5.6.11(d)).

Pokażemy, że $\sqrt{1+u} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\frac12}{n} u^n$ dla $u \in K(1)$. Istotnie, wiemy, że $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\binom{\frac12}{n}\right|} = 1$ (Przykład 2.4.3(c)). W szczególności, szereg potęgowy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\frac12}{n} u^n$ jest zbieżny w kole $K(1)$.

Pozostaje wykazać, że $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{\frac12}{k}\binom{\frac12}{n-k} = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } n \leqslant 1 \\ 0, & \text{jeżeli } n \geqslant 2 \end{cases}$. Wynika to natychmiast z *identyczności Chu–Vandermonde'a* (22)(23)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k} = \binom{\alpha+\beta}{n}, \quad \alpha,\beta \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}_0. \tag{*}$$

W naszym przypadku $\alpha = \beta = \frac12$, a więc $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{\frac12}{k}\binom{\frac12}{n-k} = \binom{1}{n} = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } n \leqslant 1 \\ 0, & \text{jeżeli } n \geqslant 2 \end{cases}$.

W przypadku, gdy $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ powyższa identyczność (*) jest elementarna (Ćwiczenie). W przypadku ogólnym niech

$$W(\alpha,\beta) := \Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k}\Big) - \binom{\alpha+\beta}{n}, \quad \alpha,\beta \in \mathbb{C}.$$

Wiemy, że $W(\alpha,\beta) = 0$ dla $\alpha,\beta \in \mathbb{N}$. Dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{N}$ funkcja $W(\alpha,\cdot)$ jest wielomianem jednej zmiennej, który zeruje się na $\mathbb{N}$. W takim razie $W(\alpha,\beta) = 0$ dla $(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}\times\mathbb{C}$. Dla dowolnego $\beta \in \mathbb{C}$ funkcja $W(\cdot,\beta)$ jest wielomianem jednej zmiennej, który zeruje się na $\mathbb{N}$. Stąd $W(\alpha,\beta) = 0$ dla $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$. □

(22) Chu Shih–chieh (1260–1320).

(23) Alexandre–Théophile Vandermonde (1735–1796).

6.10. Różniczkowanie szeregu wyraz po wyrazie

Twierdzenie 6.10.1 (Twierdzenie o różniczkowaniu szeregu wyraz po wyrazie)**.** *Niech $P \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem ograniczonym nieredukującym się do punktu, $k \in \mathbb{N}$ i niech $f_n \in \mathcal{D}^k(P, E)$, $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że:*

- *szereg $g_k := \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ jest zbieżny jednostajnie na P,*
- *istnieją punkty $c_0, \dots, c_{k-1} \in P$ takie, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(j)}(c_j)$ jest zbieżny.*

Wtedy:

- *szereg $g_j := \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(j)}$ jest zbieżny jednostajnie na P, $j = 0, \dots, k-1$,*
- *$g_0 \in \mathcal{D}^k(P, E)$,*
- *$g_0^{(j)} \equiv g_j$, czyli $\big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n\big)^{(j)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(j)}$, $j = 1, \dots, k$.*

Dowód. Wystarczy skorzystać z Twierdzenia 5.7.1. □

Korzystając z metody dowodu Twierdzenia 5.7.1 łatwo wykazać (Ćwiczenie) następujące

Twierdzenie 6.10.2 (Twierdzenie o różniczkowaniu rodziny sumowalnej wyraz po wyrazie)**.** *Niech $P \subset \mathbb{R}$ będzie ograniczonym przedziałem nieredukującym się do punktu, $k \in \mathbb{N}$ i niech $f_i \in \mathcal{D}^k(P, E)$, $i \in I$. Załóżmy, że:*

- *szereg rodzina $(f_i^{(k)})_{i \in I}$ jest jednostajnie sumowalna na P i $g_k := \sum\limits_{i \in I} f_i^{(k)}$,*
- *istnieją punkty $c_0, \dots, c_{k-1} \in P$ takie, że rodzina $(f_i^{(j)}(c_j))_{i \in I}$ jest sumowalna.*

Wtedy:

- *rodzina $(f_i^{(j)})_{i \in I}$ jest jednostajnie sumowalna na P, $g_j := \sum\limits_{i \in I} f_i^{(j)}$, $j = 0, \dots, k-1$,*
- *$g_0 \in \mathcal{D}^k(P, E)$,*
- *$g_0^{(j)} \equiv g_j$, czyli $\big(\sum\limits_{i \in I} f_i\big)^{(j)} = \sum\limits_{i \in I} f_i^{(j)}$, $j = 1, \dots, k$.*

6.11. Funkcje analityczne II

Niech $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ będzie szeregiem potęgowym o współczynnikach z przestrzeni Banacha E nad $\mathbb{R}$ i niech R oznacza jego promień zbieżności (zob. podrozdział 6.6).

Twierdzenie 6.11.1. *Załóżmy, że $R > 0$ i niech $f(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-R, R) =: P$. Wtedy:*

(a) *dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$, promień zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=k}^{\infty} k!\binom{n}{k} a_n x^{n-k}$ jest równy R,*

(b) $f^{(k)}(x) = \sum\limits_{n=k}^{\infty} k!\binom{n}{k} a_n x^{n-k}, \quad x \in P,$

(c) $f \in \mathcal{C}^\infty(P, E)$,

(d) $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)$, $k \in \mathbb{N}_0$,

(e) *dla dowolnego $0 < r < R$ istnieją $C, \varrho > 0$ takie, że*

$$\frac{1}{k!} \sup_{|x| \leqslant r} \|f^{(k)}(x)\| \leqslant \frac{C}{\varrho^k}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Dowód. (a) Szereg $\sum\limits_{n=k}^{\infty} k!\binom{n}{k} a_n x^{n-k}$ powstaje przez k-krotne zróżniczkowanie wyraz po wyrazie. Wystarczy więc zbadać przypadek $k = 1$, czyli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$. Mamy

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)\|a_{n+1}\|} = \limsup_{n\to\infty} \Big(\sqrt[n+1]{(n+1)\|a_{n+1}\|} \Big)^{(n+1)/n} = \tfrac{1}{R}.$$

(b) Z (a) wynika, że szereg $\sum\limits_{n=k}^{\infty} k!\binom{n}{k}a_n x^{n-k}$ jest zbieżny lokalnie normalnie w P. Teraz wystarczy zastosować twierdzenie o różniczkowaniu szeregu wyraz po wyrazie.

(c) i (d) wynika z (b).

(e) Zdefiniujmy

$$\varphi(t) := \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \quad |t| < 1.$$

Na podstawie dotychczasowego dowodu wiemy, że:

$$\frac{k!}{(1-t)^{k+1}} = \varphi^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{\infty} k!\binom{n}{k} t^{n-k}.$$

Ustalmy $0 < r < s < R$ i niech $M := \sup\{\|a_n\|s^n : n \in \mathbb{N}_0\}$. Wobec (b), dla $|x| \leqslant r$ mamy:

$$\begin{aligned}\|f^{(k)}(x)\| &= \Big\|\sum_{n=k}^{\infty} k!\binom{n}{k} a_n x^{n-k}\Big\| \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} k!\binom{n}{k}\frac{M}{s^n} r^{n-k}\\ &= \frac{M}{s^k}\sum_{n=k}^{\infty} k!\binom{n}{k}\Big(\frac{r}{s}\Big)^{n-k} = \frac{M}{s^k}\varphi^{(k)}\Big(\frac{r}{s}\Big) = \frac{M}{s^k}\frac{k!}{(1-\frac{r}{s})^{k+1}} = k!\frac{\frac{M}{1-\frac{r}{s}}}{(s-r)^k}.\end{aligned}$$

□

Wniosek 6.11.2. *Niech $\Omega \in \operatorname{top}\mathbb{R}$.*

(a) $\mathcal{C}^\omega(\Omega, E) \subset \mathcal{C}^\infty(\Omega, E)$.

(b) $f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, E) \Longrightarrow f' \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, E)$.

Twierdzenie 6.11.3. *Niech $\Omega \in \operatorname{top}\mathbb{R}$ i niech $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, E)$. Wtedy*

$$f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, E) \Longleftrightarrow \forall_{K \subset\subset \Omega}\ \exists_{C>0}\ \exists_{\varrho>0}\ \forall_{k\in\mathbb{N}_0} : \ \frac{1}{k!}\sup_{x\in K}\|f^{(k)}(x)\| \leqslant \frac{C}{\varrho^k}.$$

Dowód. ($\Longleftarrow$): Niech $a \in \Omega$ i niech $[a-r, a+r] \subset \Omega$. Niech C i ϱ będą takie, jak w warunku dla $K := [a-r, a+r]$. Bez trudu widzimy, że promień zbieżności szeregu Taylora $T_a f$ musi być co najmniej ϱ. Dalej, korzystając ze wzoru Taylora dla $\mathcal{D}^{n+1}$, dla $|x-a| < \min\{r, \varrho\}$ mamy:

$$\begin{aligned}&\Big\|f(x) - \sum_{n=0}^{k}\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n\Big\| = \|R_k(f, a, x)\|\\ &\qquad \leqslant \frac{\sup_{|\xi-a|\leqslant r}\|f^{(k+1)}(\xi)\|}{(k+1)!}|x-a|^{k+1} \leqslant C\Big(\frac{|x-a|}{\varrho}\Big)^{k+1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

($\Longrightarrow$): Rozumujemy lokalnie. Wystarczy wykorzystać Twierdzenie 6.11.1(e). □

Twierdzenie 6.11.3 pozwala w przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ w łatwy sposób udowodnić twierdzenia o składaniu i odwracaniu odwzorowań analitycznych (zob. Twierdzenia 6.9.6 i 6.9.9).

Twierdzenie 6.11.4 (Twierdzenie o składaniu funkcji analitycznych dla $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)**.** *Niech P, $Q \subset \mathbb{R}$ będą przedziałami otwartymi. Jeżeli $f \in \mathcal{C}^\omega(P, E)$, $\varphi \in \mathcal{C}^\omega(Q, \mathbb{R})$ oraz $\varphi(Q) \subset P$, to $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^\omega(Q)$.*

Dowód. Oczywiście $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^\infty(Q, F)$. Niech $K \subset\subset Q$. Ponieważ, φ i f są analityczne, zatem na podstawie Twierdzenia 6.11.3 istnieją stałe $C > 1$, $0 < \varrho < 1$ takie, że

$$\frac{1}{k!}\sup_{t\in K}|\varphi^{(k)}(t)| \leqslant \frac{C}{\varrho^k}, \quad \frac{1}{k!}\sup_{x\in\varphi(K)}\|f^{(k)}(x)\| \leqslant \frac{C}{\varrho^k}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Teraz skorzystamy z Twierdzenia 5.6.12

$$\begin{aligned}\frac{1}{k!}\sup_{t\in K}\|(f\circ\varphi)^{(k)}(t)\| &= \sup_{t\in K}\Big\|\sum_{\alpha\in\Pi_k}\frac{1}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}f^{(\alpha_1+\cdots+\alpha_k)}(\varphi(t))\Big(\frac{\varphi'(t)}{1!}\Big)^{\alpha_1}\cdots\Big(\frac{\varphi^{(k)}(t)}{k!}\Big)^{\alpha_k}\Big\|\\ &\leqslant \sum_{\alpha\in\Pi_k}\frac{(\alpha_1+\cdots+\alpha_k)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}\frac{C}{\varrho^{\alpha_1+\cdots+\alpha_k}}\Big(\frac{C}{\varrho}\Big)^{\alpha_1}\cdots\Big(\frac{C}{\varrho^k}\Big)^{\alpha_k}\end{aligned}$$

$$= \frac{C}{\varrho^k} \sum_{\alpha \in \Pi_k} \frac{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)!}{\alpha_1! \cdots \alpha_k!} \Big(\frac{C}{\varrho}\Big)^{\alpha_1+\cdots+\alpha_k} \leqslant \frac{C}{\varrho^k} 2^{k-1} \Big(\frac{C}{\varrho}\Big)^k = \frac{C/2}{(\frac{\varrho^2}{2C})^k},$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z następującego wzoru:

$$\sum_{\alpha \in \Pi_k} \frac{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)!}{\alpha_1! \cdots \alpha_k!} = 2^{k-1}.$$

Dla dowodu tego wzoru, niech

$$f(x) := \frac{1}{2-x} = \frac{1}{1-(x-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(1)(x-1)^n, \quad |x-1| < 1,$$

$$\varphi(t) := \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \varphi^{(n)}(0) t^n, \quad |t| < 1.$$

Wtedy

$$f(\varphi(t)) = \frac{1}{2 - \frac{1}{1-t}} = \frac{1-t}{1-2t} = \sum_{n=0}^{\infty} (2t)^n - t \sum_{n=0}^{\infty} (2t)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (f \circ \varphi)^{(n)}(0) t^n, \quad |t| < \tfrac{1}{2}.$$

Teraz, korzystając ze wzoru na pochodną złożenia, dostajemy

$$2^{k-1} = \frac{1}{k!} (f \circ \varphi)^{(k)}(0) = \sum_{\alpha \in \Pi_k} \frac{1}{\alpha_1! \cdots \alpha_k!} f^{(\alpha_1+\cdots+\alpha_k)}(1) \Big(\frac{\varphi'(0)}{1!}\Big)^{\alpha_1} \cdots \Big(\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\Big)^{\alpha_k}$$

$$= \sum_{\alpha \in \Pi_k} \frac{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)!}{\alpha_1! \cdots \alpha_k!}. \quad \square$$

Twierdzenie 6.11.5 (Twierdzenie o funkcji odwrotnej do funkcji analitycznej dla $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)**.** *Niech $U, V \subset \mathbb{R}$ będą przedziałami otwartymi i niech $f : U \longrightarrow V$ będzie bijekcją klasy $\mathcal{C}^\omega(U)$. Wtedy jeżeli $f'(a) \neq 0$ dla pewnego $a \in U$, to funkcja $g := f^{-1}$ jest klasy $\mathcal{C}^\omega$ w pewnym otoczeniu punktu $b := f(a)$.*

Dowód. [24] Możemy założyć, że $f'(x) \neq 0$ dla $x \in U$. Skorzystamy z Twierdzenia 6.11.3. Ustalmy $K \subset\subset V$. Wiemy, że $g \in \mathcal{C}^\infty(V)$ (Twierdzenie 5.5.6). Na podstawie Obserwacji 6.9.2(d) oraz Twierdzenia 6.9.6 wnioskujemy, że $h := \frac{1}{f'} \in \mathcal{C}^\omega(U)$. Istnieją więc stałe C, $\varrho > 0$ takie, że

$$\frac{1}{s!} \sup_{y \in K} |h^{(s)}(g(y))| \leqslant \frac{C}{\varrho^s}, \quad s \in \mathbb{N}_0. \tag{†}$$

Teraz udowodnimy indukcyjnie, że

$$\frac{1}{k!} \sup_{y \in K} |g^{(k)}(y)| \leqslant \frac{C_k}{\varrho^{k-1}}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{‡}$$

gdzie

$$C_k := (2C)^k (-1)^{k-1} \binom{\frac{1}{2}}{k} = (2C)^k (-1)^{k-1} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1) \cdots (\frac{1}{2}-k+1)}{k!} > 0.$$

Zauważmy, że $\lim\limits_{k \to +\infty} \sqrt[k]{C_k} = 2C$ (Ćwiczenie), a więc (‡) zakończy dowód.

Ponieważ, $g' = h \circ g$, przypadek $k = 1$ wynika natychmiast z (†) (z $s = 0$). Teraz $k \rightsquigarrow k+1$. Korzystamy z Twierdzenia 5.6.12:

$$\frac{1}{(k+1)!} \sup_{y \in K} |g^{(k+1)}(y)| = \frac{1}{(k+1)!} \sup_{y \in K} |(h \circ g)^{(k)}(y)|$$

$$= \frac{1}{k+1} \sup_{y \in K} \Big| \sum_{\alpha \in \Pi_k} \frac{1}{\alpha_1! \cdots \alpha_k!} h^{(\alpha_1+\cdots+\alpha_k)}(g(y)) \Big(\frac{g'(y)}{1!}\Big)^{\alpha_1} \cdots \Big(\frac{g^{(k)}(y)}{k!}\Big)^{\alpha_k} \Big|$$

$$\leqslant \frac{1}{k+1} \sum_{\alpha \in \Pi_k} \frac{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)!}{\alpha_1! \cdots \alpha_k!} \frac{C}{\varrho^{\alpha_1+\cdots+\alpha_k}} \Big(\frac{C_1}{\varrho^{1-1}}\Big)^{\alpha_1} \cdots \Big(\frac{C_k}{\varrho^{k-1}}\Big)^{\alpha_k}$$

---

[24] Zob. S. G. Krantz, H. R. Parks, *A primer of real analytic functions*, Birkhäuser, 2002.

$$= \frac{C}{\varrho^k}\frac{1}{k+1}\sum_{\alpha\in\Pi_k}\frac{(\alpha_1+\dots+\alpha_k)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}\Big((2C)^1(-1)^{1-1}\binom{\frac12}{1}\Big)^{\alpha_1}\cdots\Big((2C)^k(-1)^{k-1}\binom{\frac12}{k}\Big)^{\alpha_k}$$
$$= \frac{(2C)^{k+1}}{\varrho^k}\frac{(-1)^k}{2(k+1)}\sum_{\alpha\in\Pi_k}\frac{(-1)^{\alpha_1+\dots+\alpha_k}(\alpha_1+\dots+\alpha_k)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}\binom{\frac12}{1}^{\alpha_1}\cdots\binom{\frac12}{k}^{\alpha_k}$$
$$\overset{(*)}{=} \frac{(2C)^{k+1}}{\varrho^k}\frac{(-1)^k}{2(k+1)}2(k+1)\binom{\frac12}{k+1} = \frac{C_{k+1}}{\varrho^k},$$

gdzie (*) wynika ze wzoru
$$\sum_{\alpha\in\Pi_k}\frac{(-1)^{\alpha_1+\dots+\alpha_n}(\alpha_1+\dots+\alpha_k)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}\binom{\frac12}{1}^{\alpha_1}\cdots\binom{\frac12}{k}^{\alpha_k} = 2(k+1)\binom{\frac12}{k+1}.$$

Powyższy wzór udowodnimy korzystając ponownie z Twierdzenia 5.6.12 dla funkcji
$$f(x) := \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, \quad x\in(-1,1),$$
$$\varphi(t) := 1-\sqrt{1-2t} = -\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\frac12}{n}(-2t)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}t^n, \quad t\in(-\tfrac12,\tfrac12). \quad [25]$$

Niech $h := f\circ\varphi$. Mamy
$$h(t) = f(\varphi(t)) = \frac{1}{\sqrt{1-2t}} = \varphi'(t),$$

a stąd
$$-(k+1)!\binom{\frac12}{k+1}(-2)^{k+1} = \varphi^{(k+1)}(0) = h^{(k)}(0)$$
$$= \sum_{\alpha\in\Pi_k}\frac{k!}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}f^{(\alpha_1+\dots+\alpha_k)}(0)\Big(\frac{\varphi'(0)}{1!}\Big)^{\alpha_1}\cdots\Big(\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\Big)^{\alpha_k}$$
$$= k!\sum_{\alpha\in\Pi_k}\frac{(\alpha_1+\dots+\alpha_k)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}\Big(-\binom{\frac12}{1}(-2)^1\Big)^{\alpha_1}\cdots\Big(-\binom{\frac12}{k}(-2)^k\Big)^{\alpha_k}$$
$$= (-2)^k k!\sum_{\alpha\in\Pi_k}\frac{(-1)^{\alpha_1+\dots+\alpha_n}(\alpha_1+\dots+\alpha_k)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}\binom{\frac12}{1}^{\alpha_1}\cdots\binom{\frac12}{k}^{\alpha_k}. \qquad \square$$

Wniosek 6.11.6. $\log_a \in \mathcal{C}^\omega(\mathbb{R}_{>0})$ *($a>0$, $a\neq 1$),* $\arcsin\in\mathcal{C}^\omega((-1,1))$*,* $\arccos\in\mathcal{C}^\omega((-1,1))$*,* $\operatorname{arctg}\in\mathcal{C}^\omega(\mathbb{R})$*,* $\operatorname{arcctg}\in\mathcal{C}^\omega(\mathbb{R})$*.*

6.12. Szereg Taylora

Definicja 6.12.1. Niech $P\subset\mathbb{R}$ będzie przedziałem otwartym, $a\in P$. Niech E będzie przestrzenią Banacha nad $\mathbb{R}$ i niech $f\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{D}^n(P,E;a)$. Wtedy definiujemy *szereg Taylora funkcji f w punkcie a* jako szereg potęgowy postaci
$$(T_af)(x) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n.$$

Obserwacja 6.12.2. (a) (Ćwiczenie*) Istnieje funkcja $f:(-1,1)\longrightarrow\mathbb{R}$ taka, że:
- dla dowolnego $n\in\mathbb{N}$ istnieje otwarte otoczenie zera U_n takie, że $f|_{U_n}\in\mathcal{C}^n(U_n)$,
- nie istnieje otwarte otoczenie zera U takie, że $f|_U\in\mathcal{C}^\infty(U)$.

(b) Promień zbieżności szeregu Taylora nie musi być dodatni (zob. Twierdzenie Borela [26] 6.12.3), ani też, jeżeli jest dodatni, to wcale nie musi zachodzić równość $T_af=f$ w jakimś otoczeniu punktu a.

Klasyczny przykład to: $f(x):=0$ dla $x\leqslant 0$ i $f(x):=\exp(-1/x)$ dla $x>0$, $a:=0$. Wtedy $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ i $T_0f=0$ (por. Obserwacja 5.5.2(g)).

---

[25] korzystamy tu z rozwinięcia $(1+t)^\alpha=\sum_{n=0}^\infty\binom{\alpha}{n}t^n$, $t\in(-\frac12,\frac12)$, $\alpha\in\mathbb{R}$ (Przykład 5.6.11(d)).

[26] Émile Borel (1871–1956).

(c) Jeżeli $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $|x| < R$, jak w Twierdzeniu 6.11.1, to $T_0 f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. W szczególności, jeżeli $f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, E)$ ($\Omega \in \operatorname{top} \mathbb{R}$), to dla dowolnego punktu $a \in \Omega$ mamy $T_a f(x) = f(x)$ dla x z pewnego otoczenia punktu a.

Twierdzenie 6.12.3 (Borel)**.** *Dla dowolnego ciągu $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset E$ istnieje funkcja $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, E)$ taka, że $T_0 f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, czyli $\frac{1}{n!} f^{(n)}(0) = a_n$, $n \in \mathbb{N}_0$.*

Dowód. Zasadniczym etapem dowodu będzie pokazanie, że dla dowolnego $N \in \mathbb{N}_0$ istnieje funkcja $g_N \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, E)$ taka, że $g_N = 0$ w pewnym otoczeniu zera oraz

$$\sum_{n=0}^{N} \sup_{x \in \mathbb{R}} \|(a_{N+1} x^{N+1} - g_N)^{(n)}(x)\| \leqslant \frac{1}{2^N}. \tag{†}$$

Przypuśćmy, że (†) zachodzi. Wtedy definiujemy

$$f(x) := a_0 + \sum_{N=0}^{\infty} (a_{N+1} x^{N+1} - g_N(x)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Warunek (†) gwarantuje, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ szereg $\sum\limits_{N=k}^{\infty} (a_{N+1} x^{N+1} - g_N)^{(k)}$ jest normalnie zbieżny w $\mathbb{R}$. Stąd, wobec Twierdzenia 6.10.1, funkcja f jest poprawnie zdefiniowana, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, E)$ oraz

$$f^{(n)}(0) = \sum_{N=0}^{\infty} (a_{N+1} x^{N+1} - g_N)^{(n)}(0) = \sum_{N=0}^{\infty} (a_{N+1} x^{N+1})^{(n)}(0) = n! a_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

co zakończy dowód.

Przystępujemy do realizacji (†). Niech $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$, $\varphi(x) = 0$ dla $|x| \leqslant 1/2$, $\varphi(x) = 1$ dla $|x| \geqslant 1$. Niech $C_n := \sup\{|\varphi^{(n)}(x)| : x \in \mathbb{R}\}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Zauważmy, że $C_0 = 1$ oraz $C_n < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$. Połóżmy

$$h_\varepsilon(x) := \varphi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) x^{N+1}, \quad x \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0.$$

Wtedy dla $0 < \varepsilon \leqslant 1$ mamy

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{N} \sup_{x \in \mathbb{R}} |(x^{N+1} - h_\varepsilon)^{(n)}(x)| = \sum_{n=0}^{N} \sup_{|x| \leqslant \varepsilon} \Big| \Big(x^{N+1} \Big(1 - \varphi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big)\Big)^{(n)} \Big| \\
&= \sum_{n=0}^{N} \sup_{|x| \leqslant \varepsilon} \Big| \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} (x^{N+1})^{(s)} \Big(1 - \varphi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big)^{(n-s)} \Big| \\
&= \sum_{n=0}^{N} \sup_{|x| \leqslant \varepsilon} \Big| - \sum_{s=0}^{n-1} \binom{n}{s} \binom{N+1}{s} s! x^{N+1-s} \varepsilon^{s-n} \varphi^{(n-s)}\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) + \binom{N+1}{n} n! x^{N+1-n} \Big(1 - \varphi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big) \Big| \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{N} \Big(\sum_{s=0}^{n-1} \binom{n}{s} \binom{N+1}{s} s! \varepsilon^{N+1-s} \varepsilon^{s-n} C_{n-s} + \binom{N+1}{n} n! \varepsilon^{N+1-n} \Big) \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{N} \varepsilon^{N+1-n} \Big(\sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} \binom{N+1}{s} s! C_{n-s} \Big) \leqslant \varepsilon \sum_{n=0}^{N} \Big(\sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} \binom{N+1}{s} s! C_{n-s} \Big) = \varepsilon \operatorname{const}(N).
\end{aligned}$$

Teraz jako g_N wystarczy wziąć $a_{N+1} h_\varepsilon$ ze stosownie małym ε. □

ROZDZIAŁ 7

Całka

7.1. Całka Riemanna

Ustalamy przedział $P := [a,b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$. Niech $|P| := b - a$.

Definicja 7.1.1. *Podziałem* przedziału P nazywamy dowolny ciąg punktów $\pi = (x_0, \dots, x_m)$, gdzie $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ ($m \in \mathbb{N}$). *Średnicą podziału* $\pi = (x_0, \dots, x_m)$ nazywamy liczbę $\operatorname{diam} \pi := \max\{x_j - x_{j-1} : j = 1, \dots, m\}$.

Ciąg $(\pi_k)_{k=1}^{\infty}$ podziałów przedziału P nazywamy *normalnym*, jeżeli $\operatorname{diam} \pi_k \longrightarrow 0$.

Niech $\pi = (x_0, \dots, x_m)$, $\pi' = (x'_0, \dots, x'_n)$ będą podziałami P. Powiemy, że π' *jest wpisany w* π lub też, że π' *jest zagęszczeniem* π, jeżeli $\{x_0, \dots, x_m\} \subset \{x'_0, \dots, x'_n\}$. W tej sytuacji piszemy $\pi' \preccurlyeq \pi$.

Obserwacja 7.1.2. (a) Relacja $\preccurlyeq$ jest przechodnia.

(b) Dla dowolnych podziałów π_1, π_2 przedziału P istnieje podział π taki, że $\pi \preccurlyeq \pi_j$, $j = 1, 2$; π jest *wspólnym zagęszczeniem podziałów* π_1 *i* π_2.

Definicja 7.1.3. Niech $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją ograniczoną. Dla dowolnego przedziału $Q := [p,q] \subset P$ zdefiniujmy $m(f,Q) := \inf f(Q)$, $M(f,Q) := \sup f(Q)$.

Dla dowolnego podziału $\pi = (x_0, \dots, x_m)$ przedziału P połóżmy:

$$L(f,\pi) := \sum_{j=1}^{m} m(f, [x_{j-1}, x_j])(x_j - x_{j-1}), \quad U(f,\pi) := \sum_{j=1}^{m} M(f, [x_{j-1}, x_j])(x_j - x_{j-1}).$$

Czasami, dla uproszczenia zapisu, będziemy pisać $m_j(f) := m(f, [x_{j-1}, x_j])$, $M_j(f) := M(f, [x_{j-1}, x_j])$, $\Delta x_j := x_j - x_{j-1}$, $j = 1, \dots, m$. Liczbę $L(f,\pi)$ nazywamy *sumą aproksymacyjną dolną dla funkcji f przy podziale* π. Analogicznie, $U(f,\pi)$ nazywamy *sumą aproksymacyjną górną*. Sumy te nazywamy o *sumami Darboux*. Zauważmy, że $m(f,P)(b-a) \leqslant L(f,\pi) \leqslant U(f,\pi) \leqslant M(f,P)(b-a)$. Niech

$$\int_{*P} f = \int_{*a}^{b} f := \sup_{\pi} L(f,\pi), \quad \int_{P}^{*} f = \int_{a}^{*b} f := \inf_{\pi} U(f,\pi),$$

gdzie supremum i infimum bierzemy po wszystkich podziałach P. Liczbę $\int_{*P} f$ nazywamy *całką dolną z funkcji* f. Analogicznie, liczbę $\int_P^*$ nazywamy *całką górną*. Powiemy, że funkcja f jest *całkowalna w sensie Riemanna na przedziale* P ($f \in \mathcal{R}(P,\mathbb{R}) = \mathcal{R}(P)$), jeżeli $\int_{*P} f = \int_P^* f$. Wtedy wspólną wartość tych całek oznaczamy przez $\int_P f \big(= \int_a^b f \big)$ i nazywamy *całką Riemanna z funkcji f po przedziale* P.

Dla funkcji ograniczonych $f = u + iv : P \longrightarrow \mathbb{C}$ mówimy, że f jest *całkowalna w sensie Riemanna* ($f \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$), jeżeli $u, v \in \mathcal{R}(P)$. Wtedy przyjmujemy $\int_P f = \int_a^b f := \int_P u + i \int_P v$.

Obserwacja 7.1.4. Zauważmy, że $M(f,Q) - m(f,Q) = \sup\limits_{x',x'' \in Q} (f(x') - f(x'')) = \sup\limits_{x',x'' \in Q} |f(x') - f(x'')|$. W szczególności,

$$U(f,\pi) - L(f,\pi) = \sum_{j=1}^{m} \Big(\sup_{x',x'' \in [x_{j-1},x_j]} |f(x') - f(x'')| \Big) \Delta x_j.$$

Przykład 7.1.5. (a) Każda funkcja stała $c \in \mathbb{C}$ jest całkowalna w sensie Riemanna i $\int_P c = c|P|$.

(b) Niech $f := \chi_{P \cap \mathbb{Q}, P}$ (1) będzie funkcją Dirichleta. Wtedy $L(f,\pi) = 0$ oraz $U(f,\pi) = |P|$ dla dowolnego podziału π. Tak więc $\int_{*P} f = 0$ oraz $\int_P^* f = |P|$, czyli $f \notin \mathcal{R}(P)$.

Obserwacja 7.1.6 (Własności całki Riemanna I)**.** Niech $f, g : P \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi, \psi : P \longrightarrow \mathbb{C}$ będą ograniczone i niech π, π_1, π_2 będą podziałami przedziału P.

---

(1) Przypomnijmy, że $\chi_{A,P}$ oznacza funkcję charakterystyczną zbioru $A \subset P$.

(a) Dla dowolnego $c \in \mathbb{R}$ mamy $L(f+c,\pi) = L(f,\pi) + c|P|$, $U(f+c,\pi) = U(f,\pi) + c|P|$. W konsekwencji,

$$\int_{*P} (f+c) = \Big(\int_{*P} f\Big) + c|P|, \quad \int_P^* (f+c) = \Big(\int_P^* f\Big) + c|P|.$$

W szczególności, dla dowolnego $c \in \mathbb{C}$,

$$\varphi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C}) \iff \varphi + c \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C}) \text{ oraz } \int_P (\varphi + c) = \int_P \varphi + \int_P c.$$

(b) Jeżeli $f \leqslant g$, to $L(f,\pi) \leqslant L(g,\pi)$, $U(f,\pi) \leqslant U(g,\pi)$. Stąd $\int_{*P} f \leqslant \int_{*P} g$ i $\int_P^* f \leqslant \int_P *$. Jeżeli ponadto $f, g \in \mathcal{R}(P)$, to $\int_P f \leqslant \int_P g$ *(monotoniczność całki)*.

(c) $L(-f,\pi) = -U(f,\pi)$. W szczególności,

- $\int_{*P}(-f) = -\int_P^* f$,
- $\varphi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C}) \iff -\varphi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$ oraz $\int_P(-\varphi) = -\int_P \varphi$.
- $\varphi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C}) \iff \overline{\varphi} \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$ oraz $\int_P \overline{\varphi} = \overline{\int_P \varphi}$.

(d) Jeżeli $\pi_1 \preccurlyeq \pi_2$, to $L(f,\pi_1) \geqslant L(f,\pi_2)$, $U(f,\pi_1) \leqslant U(f,\pi_2)$. W szczególności,

- $L(f,\pi_1) \leqslant U(f,\pi_2)$ dla dowolnych π_1, π_2 (wystarczy wykorzystać poprzednie nierówności dla π i π_j, gdzie π jest wspólnym zagęszczeniem podziałów π_1 i π_2),
- $\int_{*P} f \leqslant \int_P^* f$.

Istotnie, niech $\pi_2 = (x_0,\dots,x_m)$. Wystarczy rozważyć przypadek, gdy $\pi_1 = (x_0,\dots,x_{k-1},x'_k,x_k,\dots,x_m)$. Wtedy

$$L(f,\pi_2) = \sum_{j=1}^{k-1} m_j(f)\varDelta x_j + m_k(f)\varDelta x_k + \sum_{j=k+1}^{m} m_j(f)\varDelta x_j$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{k-1} m_j(f)\varDelta x_j + m(f,[x_{k-1},x'_k])(x'_k - x_{k-1}) + m(f,[x'_k,x_k])(x_k - x'_k) + \sum_{j=k+1}^{m} m_j(f)\varDelta x_j = L(f,\pi_1).$$

Analogicznie postępujemy dla sum górnych.

(e) $f \in \mathcal{R}(P) \iff \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_\pi : U(f,\pi) - L(f,\pi) \leqslant \varepsilon$. Istotnie, jeżeli $f \in \mathcal{R}(P)$, to dla $\varepsilon > 0$ niech π_1, π_2 będą podziałami takimi, że

$$U(f,\pi_2) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \int_P f \leqslant L(f,\pi_1) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Teraz wystarczy jako π wziąć wspólne zagęszczenie π_1 i π_2 i skorzystać z (d).

Jeżeli spełniony jest warunek po prawej stronie, to ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech π będzie podziałem takim jak w warunku. Wtedy

$$\int_P^* f - \int_{*P} f \leqslant U(f,\pi) - L(f,\pi) \leqslant \varepsilon,$$

co, wobec dowolności ε, daje całkowalność.

(f) Dla każdego normalnego ciągu podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ mamy:

$$L(f,\pi_k) \longrightarrow \int_{*P} f, \quad U(f,\pi_k) \longrightarrow \int_P^* f.$$

Ograniczymy się do sum górnych. Można założyć, że $f \geqslant 0$ (zastępując f przez $f + c$). Weźmy $\varepsilon > 0$ i niech $\pi = (x'_0,\dots,x'_m)$ będzie podziałem takim, że $U(f,\pi) - \int_a^{*b} f \leqslant \varepsilon$. Niech $\pi_k = (x_{k,0},\dots,x_{k,m_k})$, $k \geqslant 1$. Wtedy

$$U(f,\pi_k) = \sum_{\substack{j\in\{1,\dots,m_k\}:\ \exists_{i\in\{1,\dots,m\}}:\\ [x_{k,j-1},x_{k,j}]\subset[x'_{i-1},x'_i]}} M(f,[x_{k,j-1},x_{k,j}])(x_{k,j} - x_{k,j-1})$$
$$+ \sum_{\substack{j\in\{1,\dots,m_k\}:\ \forall_{i\in\{1,\dots,m\}}:\\ [x_{k,j-1},x_{k,j}]\not\subset[x'_{i-1},x'_i]}} M(f,[x_{k,j-1},x_{k,j}])(x_{k,j} - x_{k,j-1}) \leqslant U(f,\pi) + M(f,P)\eta_k, \text{ gdzie}$$
$$\eta_k := \sum_{\substack{j\in\{1,\dots,m_k\}:\ \exists_{i\in\{1,\dots,m-1\}}:\\ x'_i\in(x_{k,j-1},x_{k,j})}} (x_{k,j} - x_{k,j-1}) \leqslant m \operatorname{diam} \pi_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ostatecznie
$$\int_P^* f \leqslant \liminf_{k\to+\infty} U(f,\pi_k) \leqslant \limsup_{k\to+\infty} U(f,\pi_k) \leqslant \int_P^* f + \varepsilon,$$
co, wobec dowolności $\varepsilon > 0$, kończy dowód.

Definicja 7.1.7. Niech $\pi = (x_0,\dots,x_m)$ będzie podziałem P i niech $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_m)$, $\xi_j \in [x_{j-1},x_j]$, $j=1,\dots,m$. Dla dowolnej funkcji $\varphi : P \longrightarrow \mathbb{C}$ sumę
$$M(f,\pi,\xi) := \sum_{j=1}^m \varphi(\xi_j)\varDelta x_j$$
nazywamy *sumą aproksymacyjną pośrednią dla funkcji φ przy podziale π i punktach pośrednich ξ*. Czasami mówimy o *sumie Cauchy'ego–Riemanna*.

Obserwacja 7.1.8. (a) $M(\alpha\varphi+\beta\psi,\pi,\xi) = \alpha M(\varphi,\pi,\xi) + \beta M(\psi,\pi,\xi)$, $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$.
(b) $|M(\varphi,\pi,\xi)| \leqslant M(|\varphi|,\pi,\xi)$.
(c) Dla funkcji ograniczonej $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ mamy: $L(f,\pi) \leqslant M(f,\pi,\xi) \leqslant U(f,\pi)$.

Twierdzenie 7.1.9. *Dla funkcji ograniczonej $\varphi = u+iv : P \longrightarrow \mathbb{C}$ następujące warunki są równoważne:*
(i) *$\varphi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$;*
(ii) *istnieje $c \in \mathbb{C}$ takie, że dla dowolnego normalnego ciągu podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ oraz dla dowolnego wyboru punktów pośrednich $(\xi_k)_{k=1}^\infty$ (tzn. ξ_k jest zbiorem punktów pośrednich dla π_k) mamy $M(\varphi,\pi_k,\xi_k) \longrightarrow c$;*

równoważnie: dla dowolnego normalnego ciągu podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ oraz dla dowolnego wyboru punktów pośrednich $(\xi_k)_{k=1}^\infty$ istnieje $c \in \mathbb{C}$ takie, że $M(\varphi,\pi_k,\xi_k) \longrightarrow c$;
(iii) *istnieje $c \in \mathbb{C}$ takie, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla dowolnego podziału π o średnicy $\leqslant \delta$ oraz dla dowolnego wyboru punktów pośrednich ξ mamy $|M(\varphi,\pi,\xi) - c| \leqslant \varepsilon$;*
(iv) *istnieje $c \in \mathbb{C}$ oraz normalny ciąg podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ takie, że dla dowolnego wyboru punktów pośrednich $(\xi_k)_{k=1}^\infty$, mamy $M(\varphi,\pi_k,\xi_k) \longrightarrow c$;*

równoważnie: istnieje normalny ciąg podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ takie, że dla dowolnego wyboru punktów pośrednich $(\xi_k)_{k=1}^\infty$, istnieje $c \in \mathbb{C}$ takie, że $M(\varphi,\pi_k,\xi_k) \longrightarrow c$.

Dowód. (i) $\Longrightarrow$ (ii) wynika z Obserwacji 7.1.8(c) i 7.1.6(f): $M(\varphi,\pi_k,\xi_k) = M(u,\pi_k,\xi_k)+iM(v,\pi_k,\xi_k) \longrightarrow \int_P u + i\int_P v = \int_P \varphi$.

Równoważność (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) jest elementarna (Ćwiczenie).

Implikacja (ii) $\Longrightarrow$ (iv) jest trywialna.

Dla dowodu implikacji (iv) $\Longrightarrow$ (i) wystarczy zauważyć, że istnieją ciągi punktów pośrednich $(\xi'_k)_{k=1}^\infty$, $(\xi''_k)_{k=1}^\infty$ takie, że
$$M(u,\pi_k,\xi'_k) - L(u,\pi_k) \leqslant \tfrac{1}{k}, \qquad U(u,\pi_k) - M(u,\pi_k,\xi''_k) \leqslant \tfrac{1}{k}, \quad k \geqslant 1.$$
Wtedy, na podstawie Obserwacji 7.1.6(f),
$$M(u,\pi_k,\xi'_k) = \operatorname{Re}(M(\varphi,\pi_k,\xi'_k)) \longrightarrow \operatorname{Re} c = \int_{*P} u, \quad M(u,\pi_k,\xi''_k) = \operatorname{Re}(M(\varphi,\pi_k,\xi''_k)) \longrightarrow \operatorname{Re} c = \int_P^* u,$$
a zatem $\int_{*P} u = \int_P^* u$, czyli $u \in \mathcal{R}(P)$. Podobnie rozumujemy dla v. □

Obserwacja 7.1.10. Sumy aproksymacyjne pośrednie można zdefiniować dla dowolnego odwzorowania $\varphi : P \longrightarrow E$, gdzie E jest przestrzenią Banacha. Pozwala to przenieść pojęcie całki Riemanna: odwzorowanie $\varphi : P \longrightarrow F$ nazywamy *całkowalnym w sensie Riemanna* ($\varphi \in \mathcal{R}(P,E)$), jeżeli istnieje $c \in E$ takie, że dla dowolnego normalnego ciągu podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ oraz dla dowolnego wyboru punktów pośrednich mamy $M(\varphi,\pi_k,\xi_k) \longrightarrow c$. Element c nazywamy wtedy *całką Riemanna odwzorowania φ po P* i oznaczamy $\int_P \varphi$. Twierdzenie 7.1.9 gwarantuje zgodność definicji dla $E = \mathbb{C}$.

Pojawia się tu pewna subtelność: nowa definicja całki obejmuje formalnie funkcje nieograniczone, a Twierdzenie 7.1.9 dotyczy tylko funkcji ograniczonych. Dla usunięcia tego problemu wystarczy zauważyć, że jeżeli funkcja $\varphi : P \longrightarrow E$ jest całkowalna w nowym sensie, to musi być ograniczona. Istotnie, przypuśćmy, że $\sup_P \|\varphi\| = +\infty$ i niech $P \ni a_\nu \longrightarrow a_0 \in P$ będzie ciągiem takim, że $\|\varphi(a_\nu)\| \longrightarrow +\infty$. Weźmy normalny ciąg podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$, $\pi_k = (x_{k,0},\dots,x_{k,m_k})$, taki, że $a_0 \in (x_{k,s_k-1},x_{k,s_k})$. Ustalmy k. Wybierzmy w sposób dowolny punkty pośrednie $\xi_{k,j}$ $j \neq s_k$. Ponieważ $\sup_{(x_{k,s_k-1},x_{k,s_k})} \|\varphi\| = +\infty$, to zawsze znajdziemy punkt ξ_{k,s_k} taki, że $\|M(\varphi,\pi_k,\xi_k)\| \geqslant k$. Mamy więc $\|M(\varphi,\pi_k,\xi_k)\| \longrightarrow +\infty$, czyli φ nie może być całkowalna w nowym sensie.

Ćwiczenie* 7.1.11. Proszę na bieżąco sprawdzać, które z poznawanych własności funkcji klasy $\mathcal{R}(P,\mathbb{C})$ przenoszą się na $\mathcal{R}(P,E)$.

Obserwacja 7.1.12 (Własności całki Riemanna II)**.** (a) Niech $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją monotoniczną. Wtedy $f \in \mathcal{R}(P)$.

Istotnie, możemy założyć, że f jest rosnąca. Wtedy $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$, $x \in P$, a zatem f jest ograniczona. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zdefiniujmy podział $\pi_n = (x_{n,0},\dots,x_{n,n})$, $x_{n,j} := a + \frac{j}{n}(b-a)$, $j = 0,1,\dots,n$. Mamy

$$U(f,\pi_n) - L(f,\pi_n) = \sum_{j=1}^{n}(f(x_{n,j}) - f(x_{n,j-1}))\frac{b-a}{n} = (f(b)-f(a))\frac{b-a}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

i korzystamy z Obserwacji 7.1.6(e).

(b) $\mathcal{R}(P,\mathbb{K})$ jest $\mathbb{K}$-przestrzenią wektorową, a operator $\mathcal{R}(P,\mathbb{K}) \ni \varphi \longmapsto \int_P \varphi \in \mathbb{K}$ jest $\mathbb{K}$-liniowy.

(c) Jeżeli $\psi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$, $\varphi : P \longrightarrow \mathbb{C}$ jest ograniczona oraz $|\varphi(x')-\varphi(x'')| \leqslant |\psi(x')-\psi(x'')|$, $x', x'' \in P$, to $\varphi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$. Istotnie, korzystając z Obserwacji 7.1.4 mamy

$$\begin{aligned} U(\operatorname{Re}\varphi,\pi) - L(\operatorname{Re}\varphi,\pi) &= \sum_{j=1}^{m}\big(\sup_{x',x''\in[x_{j-1},x_j]} |\operatorname{Re}\varphi(x') - \operatorname{Re}\varphi(x'')|\big)\varDelta x_j \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{m}\big(\sup_{x',x''\in[x_{j-1},x_j]} |\varphi(x') - \varphi(x'')|\big)\varDelta x_j \leqslant \sum_{j=1}^{m}\big(\sup_{x',x''\in[x_{j-1},x_j]} |\psi(x') - \psi(x'')|\big)\varDelta x_j \\ &\leqslant \big(U(\operatorname{Re}\psi,\pi) - L(\operatorname{Re}\psi,\pi)\big) + \big(U(\operatorname{Im}\psi,\pi) - L(\operatorname{Im}\psi,\pi)\big). \end{aligned}$$

Teraz możemy skorzystać z Obserwacji 7.1.6(e). Podobnie postępujemy dla $\operatorname{Im}\varphi$.

(d) Jeżeli $\varphi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$, to $|\varphi| \in \mathcal{R}(P)$ oraz $\big|\int_P \varphi\big| \leqslant \int_P |\varphi|$.

Istotnie, całkowalność $|\varphi|$ wynika z (c). Jeżeli $\varphi : P \longrightarrow \mathbb{R}$, to nierówność wynika natychmiast z monotoniczności całki. W przypadku zespolonym niech $\alpha \in \mathbb{T}$ będzie takie, że $\alpha\int_P \varphi = |\int_P \varphi|$. Wtedy

$$\Big|\int_P \varphi\Big| = \alpha\int_P \varphi = \int_P (\alpha\varphi) = \int_P \operatorname{Re}(\alpha\varphi) \leqslant \int_P |\varphi|.$$

(e) Jeżeli φ, $\psi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$, to $\varphi\psi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$.

Istotnie, niech $|\varphi|, |\psi| \leqslant C$. Wtedy:

$$|\varphi(x')\psi(x') - \varphi(x'')\psi(x'')| \leqslant C(|\varphi(x') - \varphi(x'')| + |\psi(x') - \psi(x'')|), \quad x', x'' \in P.$$

Teraz możemy użyć rozumowania takiego, jak w (c).

(f) Operator $\mathcal{R}(P,\mathbb{K}) \times \mathcal{R}(P,\mathbb{K}) \ni (\varphi,\psi) \longmapsto \int_P \varphi\overline{\psi} \in \mathbb{K}$ jest semi-iloczynem skalarnym. W konsekwencji (zob. Twierdzenie 5.11.22), zachodzi nierówność Schwarza dla całek Riemanna:

$$\Big|\int_P \varphi\overline{\psi}\Big| \leqslant \sqrt{\int_P |\varphi|^2}\sqrt{\int_P |\psi|^2}, \quad \varphi,\psi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C}).$$

(g) Funkcja $\mathcal{R}(P,\mathbb{C}) \ni \varphi \overset{\|\ \|_{\mathcal{R}}}{\longmapsto} \sqrt{\int_a^b |\varphi|^2}$ jest seminormą (Twierdzenie 5.11.23).

(h) $\mathcal{C}(P,\mathbb{C}) \subset \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$.

Istotnie, możemy założyć, że $\varphi : P \longrightarrow \mathbb{R}$. Dla $\varepsilon > 0$, wobec jednostajnej ciągłości funkcji φ na P, istnieje $\delta > 0$ takie, że $|\varphi(x') - \varphi(x'')| \leqslant \varepsilon$ o ile $|x' - x''| \leqslant \delta$. Niech π będzie podziałem P o średnicy $\leqslant \delta$. Wtedy $U(\varphi,\pi) - L(\varphi,\pi) \leqslant \varepsilon|P|$.

(i) Jeżeli $0 \leqslant f \in \mathcal{C}(P)$ i $\int_P f = 0$, to $f \equiv 0$.

(j) $\|\ \|_{\mathcal{R}}$ jest normą na przestrzeni $\mathcal{C}(P,\mathbb{C})$.

(k) Niech $a < c < b$. Wtedy $\varphi \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{C}) \iff \varphi|_{[a,c]} \in \mathcal{R}([a,c],\mathbb{C})$, $\varphi|_{[c,b]} \in \mathcal{R}([c,b],\mathbb{C})$. Ponadto,

$$\int_a^b \varphi = \int_a^c \varphi + \int_c^b \varphi.$$

Istotnie, jeżeli $\varphi|_{[a,c]} \in \mathcal{R}([a,c],\mathbb{C})$, $\varphi|_{[c,b]} \in \mathcal{R}([c,b],\mathbb{C})$, to niech $(\pi'_k)_{k=1}^\infty$ (odp. $(\pi''_k)_{k=1}^\infty$) będzie normalnym ciągiem podziałów $[a,c]$ (odp. $[c,b]$) takim, że przy dowolnym wyborze punktów pośrednich $(\xi'_k)_{k=1}^\infty$ (odp. $(\xi''_k)_{k=1}^\infty$) mamy $M(\varphi,\pi'_k,\xi'_k) \longrightarrow \int_a^c \varphi$ (odp. $M(\varphi,\pi''_k,\xi''_k) \longrightarrow \int_c^b \varphi$. Zestawiając podziały π'_k i π''_k, $k \in \mathbb{N}$, dostajemy normalny ciąg podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ przedziału $[a,b]$ taki, że dla dowolnego wyboru punktów pośrednich $(\xi_k)_{k=1}^\infty$ mamy: $M(\varphi,\pi_k,\xi_k) \longrightarrow \int_a^c \varphi + \int_c^b \varphi$. Oznacza to, że $\varphi \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{C})$ oraz $\int_a^b \varphi = \int_a^c \varphi + \int_c^b \varphi$.

Dla dowodu implikacji przeciwnej, wystarczy rozważyć przypadek, gdy $\varphi = f \in \mathcal{R}([a,b])$. Dla $\varepsilon > 0$ niech π będzie podziałem $[a,b]$ takim, że $U(f,\pi) - L(f,\pi) \leqslant \varepsilon$. Zauważmy, że zawsze możemy założyć, że $c \in \pi$. Istotnie, jeżeli $\widetilde{\pi}$ jest podziałem powstałym przed dołożenie c, to na podstawie Obserwacji 7.1.6(d), $U(f,\widetilde{\pi}) - L(f,\widetilde{\pi}) \leqslant U(f,\pi) - L(f,\pi)$.

Jeżeli $c \in \pi$, to π rozpada się na podział π' przedziału $[a,c]$ i podział $[\pi'']$ przedziału $[c,b]$. Stąd $\varepsilon \geqslant U(f,\pi) - L(f,\pi) = \big(U(f,\pi') - L(f,\pi')\big) + \big(U(f,\pi'') - L(f,\pi'')\big)$, co dowodzi całkowalności φ na obu przedziałach.

(l) Przestrzeń $\mathcal{C}(P,\mathbb{C}), \|\ \|_{\mathcal{R}}$) nie jest zupełna.

Istotnie, niech $f_n : [0,1] \longrightarrow [0,1]$,

$$f_n(x) := \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ \frac{n}{2}(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}), & \text{jeżeli } \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 1, & \text{jeżeli } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}, \quad f := \chi_{(1/2,1]}.$$

Oczywiście $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{C}(P)$. Łatwo sprawdzić, że $\|f_n - f\|_{\mathcal{R}} \longrightarrow 0$ (Ćwiczenie). W szczególności, $(f_n)_{n=1}^\infty$ jest ciągiem Cauchy'ego w $(\mathcal{C}(P,\mathbb{C}), \|\ \|_{\mathcal{R}})$. Przypuśćmy, że $\|f_n - g\|_{\mathcal{R}} \longrightarrow 0$ dla pewnej funkcji $g \in \mathcal{C}(P,\mathbb{C})$. Wtedy $\int_P |f-g|^2 = 0$. Stąd $g = 0$ na $[0,\frac{1}{2})$ i $g = 1$ na $(\frac{1}{2},1]$; sprzeczność.

(m) Jeżeli $\varphi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$, to dla dowolnego $[p,q] \subset P$ mamy $\varphi|_{[p,q]} \in \mathcal{R}([p,q],\mathbb{C})$.

(n) (Twierdzenie o wartości średniej.) Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{C}(P)$ istnieje $\xi \in P$ taki, że

$$f(\xi) = \frac{1}{|P|}\int_P f.$$

Istotnie, $\min f(P) \leqslant \frac{1}{|P|}\int_P f \leqslant \max f(P)$ i teraz wystarczy skorzystać z zasady Darboux.

(o) Jeżeli $\mathcal{R}(P,\mathbb{C}) \ni \varphi_n \longrightarrow \varphi$ jednostajnie na P, to $\varphi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$ i $\int_P \varphi_n \longrightarrow \int_P \varphi$.

Istotnie, możemy założyć, że $\varphi_n = f_n : P \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, oraz $\varphi = f : P \longrightarrow \mathbb{R}$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech n_0 będzie takie, że

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant \varepsilon + |f_{n_0}(x') - f_{n_0}(x'')|, \quad x', x'' \in P.$$

Niech π będzie podziałem P takim, że $U(f_{n_0},\pi) - L(f_{n_0},\pi) \leqslant \varepsilon$. Wtedy $U(f,\pi) - L(f,\pi) \leqslant \varepsilon(b-a) + \varepsilon$. Wynika stąd całkowalność funkcji f. Zbieżność całek wynika bezpośrednio z nierówności

$$\Big|\int_P \varphi_n - \int_P \varphi\Big| \leqslant \int_P |\varphi_n - \varphi| \leqslant |P|(\sup_P |\varphi_n - \varphi|).$$

(p) Niech $\varphi_n \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}_0$. Załóżmy, że szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=0}^\infty \varphi_n$ jest zbieżny jednostajnie. Wtedy suma szeregu funkcyjnego $\sum\limits_{n=0}^\infty \varphi_n$ jest funkcją całkowalną oraz

$$\int_P \sum_{n=0}^\infty \varphi_n = \sum_{n=0}^\infty \int_P \varphi_n.$$

(q) Niech $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_1, q_2, \dots\}$ i niech $f_n := \chi_{\{q_1,\dots,q_n\},[0,1]}$, $f := \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1],[0,1]}$ (funkcja Dirichleta). Wtedy $\int_0^1 f_n = 0$, $f_n \longrightarrow f$ punktowo, ale $f \notin \mathcal{R}([0,1])$.

(r) Niech $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) := \begin{cases} n^2 x, & \text{jeżeli } x \in [0,\frac{1}{n}) \\ -n^2 x + 2n, & \text{jeżeli } x \in [\frac{1}{n},\frac{2}{n}) \\ 0, & \text{jeżeli } x \in [\frac{2}{n},1] \end{cases}, \quad n \geqslant 2.$$

Wtedy $f_n \in \mathcal{C}([0,1])$, $f_n \longrightarrow 0$ punktowo, ale $\int_0^1 f_n = 1$, $\int_0^1 f = 0$.

Definicja 7.1.13. Mówimy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}$ ma *miarę Jordana zero* ($|A| = 0$), jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje skończona rodzina przedziałów $P_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \dots, m$, taka że $A \subset \bigcup_{j=1}^m P_j$ i $\sum_{j=1}^m (b_j - a_j) \leqslant \varepsilon$.

Obserwacja 7.1.14. (a) Zawsze możemy założyć, że $P_1, \dots, P_m$ są parami rozłączne.
(b) Jeżeli $|A| = 0$, to A jest ograniczony.
(c) Jeżeli A jest skończony, to $|A| = 0$.
(d) Jeżeli $|A| = 0$ i $B \subset A$, to $|B| = 0$.
(e) Jeżeli $|A_1| = \dots = |A_m| = 0$, to $|A_1 \cup \dots \cup A_m| = 0$.
(f) Jeżeli $\mathbb{R} \ni a_n \longrightarrow a_0 \in \mathbb{R}$, to zbiór $\{a_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ ma miarę Jordana zero.
(g) Jeżeli $|A| = 0$, to $|\overline{A}| = 0$.

Przykład 7.1.15. Zbiór Cantora $C \subset [0, 1]$ ma miarę Jordana zero (zob. Przykład 3.2.4).

Istotnie, wiemy, że $C = \bigcap_{n=0}^\infty C_n$, gdzie $C_n = \bigcup_{j=1}^{2^n} C_{n,j}$, gdzie $C_{n,j}$, $j = 1, \dots, 2^n$, są przedziałami domkniętymi, parami rozłącznymi, każdy o długości $\frac{1}{3^n}$. Oznacza to, że suma długości przedziałów wchodzących w skład C_n jest równa $(\frac{2}{3})^n$.

Obserwacja 7.1.16 (Własności całki Riemanna III). (a) Niech $\varphi : P \longrightarrow \mathbb{C}$ będzie ograniczona i niech

$$N_P(\varphi) := \{a \in P : \varphi \text{ nie jest ciągła w punkcie } a\}$$

ma miarę Jordana zero. Wtedy $\varphi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$.

Istotnie, możemy założyć, że $f = \varphi : P \longrightarrow \mathbb{R}$. Niech $|f| \leqslant C$ i ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech $[a_j, b_j]$, $j = 1, \dots, m$, będą przedziałami parami rozłącznymi takimi, że $N_P(f) \subset \bigcup_{j=1}^m (a_j, b_j)$ oraz $\sum_{j=1}^m (b_j - a_j) \leqslant \varepsilon$. Niech $K := P \setminus \bigcup_{j=1}^m (a_j, b_j)$. Zbiór K jest zwarty i f jest ciągła na K. Zatem jest jednostajnie ciągła. Niech $\delta > 0$ będzie takie, że $|f(x') - f(x'')| \leqslant \varepsilon$ dla $x', x'' \in K$, $|x' - x''| \leqslant \delta$. Rozważmy podział $\pi = (x_0, \dots, x_r)$ przedziału P taki, że $\operatorname{diam} \pi \leqslant \delta$ oraz $\{a_1, b_1, \dots, a_m, b_m\} \cap P \subset \{x_0, \dots, x_r\}$. Wtedy

$$\begin{aligned} U(f, \pi) - L(f, \pi) &= \sum_{\substack{j \in \{1,\dots,r\}: \\ [x_{j-1}, x_j] \subset K}} (M_j(f) - m_j(f)) \varDelta x_j + \sum_{\substack{j \in \{1,\dots,r\}: \\ (x_{j-1}, x_j) \subset P \setminus K}} (M_j(f) - m_j(f)) \varDelta x_j \\ &\leqslant \sum_{\substack{j \in \{1,\dots,r\}: \\ [x_{j-1}, x_j] \subset K}} \varepsilon \varDelta x_j + \sum_{\substack{j \in \{1,\dots,r\}: \\ (x_{j-1}, x_j) \subset P \setminus K}} 2C \varDelta x_j \leqslant \varepsilon(|P| + 2C). \end{aligned}$$

(b) Niech $\varphi, \psi : P \longrightarrow \mathbb{C}$ będą ograniczone. Jeżeli zbiór $D_P(\varphi, \psi) := \{a \in P : \varphi(a) \neq \psi(a)\}$ ma miarę Jordana zero, to $\varphi \in \mathcal{R}(P) \iff \psi \in \mathcal{R}(P)$. Ponadto, $\int_P \varphi = \int_P \psi$.

Istotnie, możemy założyć, że $f = \varphi, g = \psi : P \longrightarrow \mathbb{R}$. Przypuśćmy, że $|f|$, $|g| \leqslant C$ oraz $g \in \mathcal{R}(P)$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech $[a_j, b_j]$, $j = 1, \dots, m$, będą przedziałami parami rozłącznymi takimi, że $D_P(f, g) \subset \bigcup_{j=1}^m (a_j, b_j)$ oraz $\sum_{j=1}^m (b_j - a_j) \leqslant \varepsilon$. Niech $K := P \setminus \bigcup_{j=1}^m (a_j, b_j)$. Rozważmy podział $\pi = (x_0, \dots, x_r)$ przedziału P taki, że $\{a_1, b_1, \dots, a_m, b_m\} \cap P \subset \{x_0, \dots, x_r\}$. Wtedy

$$\begin{aligned} U(f, \pi) - L(f, \pi) &= \sum_{\substack{j \in \{1,\dots,r\}: \\ [x_{j-1}, x_j] \subset K}} (M_j(f) - m_j(f)) \varDelta x_j + \sum_{\substack{j \in \{1,\dots,r\}: \\ (x_{j-1}, x_j) \subset P \setminus K}} (M_j(f) - m_j(f)) \varDelta x_j \\ &\leqslant U(g, \pi) - L(g, \pi) + 2C\varepsilon, \end{aligned}$$

skąd łatwo wynika, że $f \in \mathcal{R}(P)$. Ponadto,

$$\Big| \int_P f - \int_P g \Big| \leqslant \sum_{\substack{j \in \{1,\dots,r\}: \\ [x_{j-1}, x_j] \subset P \setminus K}} \int_{[x_{j-1}, x_j]} |f - g| \leqslant 2C\varepsilon,$$

co dowodzi równości obu całek.

(c) Relacja $\varphi \sim \psi :\iff D_P(\varphi,\psi)$ ma miarę Jordana zero, jest relacją równoważnościową w $\mathcal{R}(P,\mathbb{C})$; całka Riemanna jest dobrze określonym operatorem liniowym $\mathcal{R}(P,\mathbb{C})/\sim \longrightarrow \mathbb{C}$.

(d) Jeżeli $0 \leqslant f \in \mathcal{R}(P)$ i $\int_P f = 0$, to zbiór $Z_f := \{x \in P : f(x) > 0\}$ jest przeliczalną sumą zbiorów miary Jordana zero.

Wystarczy pokazać, że dla dowolnego $c > 0$ zbiór $A := \{x \in P : f(x) \geqslant c\}$ ma miarę Jordana zero. Weźmy $\varepsilon > 0$ i podział $\pi = (x_0, \dots, x_m)$ taki, że $U(f,\pi) \leqslant \varepsilon$. Wtedy

$$\varepsilon \geqslant U(f,\pi) \geqslant c \sum_{\substack{j\in\{1,\dots,m\}:\\ A\cap[x_{j-1},x_j]\neq\varnothing}} (x_j - x_{j-1}).$$

Wynika stąd, że A można pokryć skończoną liczbą przedziałów o łącznej długości $\leqslant \varepsilon/c$.

(e) Zbiór Z_f w (d) może nie mieć miary Jordana zero. Dla przykładu, niech $P \cap \mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \dots\}$ i niech $f : P \longrightarrow [0,1]$, $f(x) := \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{j}, & \text{jeżeli } x = r_j \end{cases}$. Oczywiście, zbiór $Z_f = P \cap \mathbb{Q}$ nie ma objętości zero, ale $\int_P f = 0$. Istotnie, dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ rozważmy podział $\pi = (x_0, \dots, x_m)$ $(m \geqslant k)$ taki, że $\sum_{j\in I}(x_j - x_{j-1}) \leqslant \frac{1}{k}$, gdzie $I := \{j \in \{1,\dots,m\} : [x_{j-1}, x_j] \cap \{r_1,\dots,r_k\} \neq \varnothing\}$. Wtedy

$$U(f,\pi) = \sum_{j\in I} M_j(f)\varDelta x_j + \sum_{j\notin I} M_j(f)\varDelta x_j \leqslant \sum_{j\in I}\varDelta x_j + \sum_{j\notin I}\frac{1}{k+1}\varDelta x_j \leqslant \frac{1}{k} + \frac{|P|}{k+1}.$$

Obserwacja 7.1.17. (a) W przyszłości poznamy następujące ważne twierdzenie: $\varphi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C}) \iff$ *$N_P(\varphi)$ ma miarę Lebesgue'a zero, tzn. dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje co najwyżej przeliczalna rodzina przedziałów $P_j = [a_j, b_j]$, $j \in I$, taka że $N_P(\varphi) \subset \bigcup_{j\in I} P_j$ i $\sum_{j\in I}(b_j - a_j) \leqslant \varepsilon$.*

(b) Oczywiście, każdy zbiór miary Jordana zero ma miarę Lebesgue'a zero.

(c) Zauważmy, że jeżeli $A_k \subset \mathbb{R}$ jest zbiorem o mierze Lebesgue'a zero, $k \in \mathbb{N}$, to zbiór $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ ma miarę Lebesgue'a zero.

Istotnie, niech $\varepsilon > 0$ i niech $P_{k,j} = [a_{k,j}, b_{k,j}]$, $j \in I(k)$, będzie co najwyżej przeliczalną rodziną przedziałów takich, że $A_k \subset \bigcup_{j\in I(k)} P_{k,j}$ oraz $\sum_{j\in I(k)}(b_{k,j} - a_{k,j}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^k}$. Wtedy $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j\in I(k)} P_{k,j}$ oraz $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j\in I(k)}(b_{k,j} - a_{k,j}) \leqslant \varepsilon$.

7.2. Pierwotne

W tym podrozdziale $P = [a,b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$.

Definicja 7.2.1. Powiemy, że funkcja $F : P \longrightarrow \mathbb{R}$ jest *pierwotną* lub *całką nieoznaczoną* funkcji $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ jeżeli:

- F jest ciągła,
- istnieje co najwyżej przeliczalny zbiór $S \subset P$ taki, że $F'(x)$ istnieje oraz $F'(x) = f(x)$ dla dowolnego $x \in P \setminus S$.

Piszemy wtedy $F(x) = \int f(x)dx + C$, lub też $F(x) = \int f(x)dx$ pamiętając, że do F zawsze można dodać stałą. Będziemy pisać $S = S_F$, choć oczywiście zbiór S nie jest wyznaczony jednoznacznie.

Przykład 7.2.2. Funkcja $F(x) := \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$, jest pierwotną funkcji $f(x) := \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } x = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}, & \text{jeżeli } x \neq 0 \end{cases}$ $(S_F = \{0\})$.

Obserwacja 7.2.3. (a) Jeżeli F_j jest pierwotną funkcji f_j, $j = 1,2$, to $\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2$ $(\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R})$ jest pierwotną funkcji $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ $(S_{\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2} \subset S_{F_1} \cup S_{F_2})$.

(b) Jeżeli F_1, F_2 są pierwotnymi funkcji f, to $F_1 - F_2 \equiv \text{const}$ (por. Wniosek 5.4.3).

(c) Równość $\int f(x)dx = \int g(x)dx$, $x \in P$, będziemy zawsze rozumieć z dokładnością do stałej.

(d) Jeżeli $f, g : P \longrightarrow \mathbb{R}$ różnią się na zbiorze co najwyżej przeliczalnym i F jest pierwotną f, to F jest również pierwotną g.

Twierdzenie 7.2.4. *Niech F będzie pierwotną funkcji f. Załóżmy, że funkcja f jest ciągła w pewnym punkcie $c \in P$. Wtedy $F'(c)$ istnieje oraz $F'(c) = f(c)$. W szczególności, jeżeli $f \in \mathcal{C}(P)$, to $F \in \mathcal{D}(P)$ oraz $F'(x) = f(x)$, $x \in P$.*

Dowód. Niech $S := S_F$. Na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych (Wniosek 5.4.4) mamy

$$\Big|\frac{F(c+h)-F(c)}{h} - f(c)\Big| \leqslant \frac{1}{|h|}\big(\sup\{|F'(\xi)-f(c)| : \xi \in [c, c+h] \setminus S\}\big)|h| \\ \leqslant \sup\{|f(\xi)-f(c)| : \xi \in [c, c+h]\} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0. \quad \square$$

Obserwacja 7.2.5 (Pierwotne funkcji elementarnych)**.** Uwaga: W każdym przedziale, z którego składa się zbiór po prawej stronie wzoru, do wzoru na pierwotną można dodać dowolną stałą.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \neq 0,\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}; \qquad \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\};$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x|, \quad x \neq 0; \qquad \int e^x dx = e^x, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\int \sin x dx = -\cos x, \quad x \in \mathbb{R}; \qquad \int \cos x dx = \sin x, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}; \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\};$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x, \quad x \in (-1,1); \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Twierdzenie 7.2.6 (Wzór na całkowanie przez części I)**.** *Jeżeli $f, g \in \mathcal{C}^1(P)$, to*

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx, \quad x \in P,$$

w tym sensie, że $\int f'(x)g(x)dx$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $\int f(x)g'(x)dx$ istnieje i ponadto zachodzi powyższa równość (z dokładnością do stałej).

Dowód. Przypuśćmy, że $H'(x) = f(x)g'(x)$, $x \in P$ (korzystamy z Twierdzenia 7.2.4). Wtedy $(fg - H)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f(x)g'(x) = f'(x)g(x)$, $x \in P$. Podobnie, jeżeli $\int f'(x)g(x)$ istnieje. $\square$

Przykład 7.2.7. (a) $\int x\cos x dx = \int x(\sin x)' dx = x\sin x - \int x' \sin x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x$.

Uwaga: Jeżeli źle zaczniemy stosować wzór na całkowanie przez części, to sytuacja, zamiast się uprościć, może się skomplikować, np. $\int x\cos x dx = \int (\frac{x^2}{2})' \cos x dx = \frac{x^2}{2}\cos x + \int \frac{x^2}{2}\sin x dx$.

(b) $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = (x-1)e^x$.

(c) $\int \ln x dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x(\ln x - 1)$.

(d) $\int x^\alpha \ln x dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln x - \int \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\frac{1}{x}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\big(\ln x - \frac{1}{\alpha+1}\big)$, $\alpha \neq -1$.

(e) $I := \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - (-e^x\cos x + \int e^x \cos x dx) = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$. Stąd $I = e^x(\sin x + \cos x) - I$, a więc $I = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x)$. Przykład ten ilustruje ważną technikę obliczania całek nieoznaczonych, w której problem obliczenia całki nieoznaczonej $I = \int f(x)dx$ sprowadza się do ułożenia pewnego równania funkcyjnego spełnianego przez tę całkę.

(f) $\int e^x \sin x dx =$ĆWICZENIE.

(g) Niech $I_n := \int \sin^n x dx$, $x \in \mathbb{R}$. Dla $n = 2$ mamy: $I_2 = \int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$. Wzór rekurencyjny $I_n \rightsquigarrow I_{n-2}$:

$$I_n = \int \sin^{n-1} x(-\cos x)' dx = -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\cos^2 x dx \\ = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)(I_{n-2} - I_n).$$

Wynika stąd, że $I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n}I_{n-2}$.

Twierdzenie 7.2.8 (Wzór na całkowanie przez podstawienie I)**.** *Niech $f \in \mathcal{C}(P)$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(Q)$, $\varphi(Q) \subset P$. Wtedy*

$$\Big(\int f(t)dt\Big)\Big|_{t=\varphi(x)} = \int f(\varphi(x)\varphi'(x)dx, \quad x \in Q,$$

w tym sensie, że:

- *jeżeli $\int f(t)dt$ istnieje, to $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ istnieje i zachodzi powyższa równość;*
- *jeżeli $\varphi : Q \longrightarrow P$ jest bijekcją, $\varphi'(x) \neq 0$, $x \in Q$, oraz $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ istnieje, to $\int f(t)dt$ istnieje i zachodzi powyższa równość.*

Dowód. Niech $F'(t) = f(t)$, $t \in P$ (korzystamy z Twierdzenia 7.2.4). Wtedy $(F\circ\varphi)'(x) = F'(\varphi(x))\varphi'(x)$, $x \in Q$.

Niech $H'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$, $x \in Q$. Wtedy $(H\circ\varphi^{-1})'(t) = H'(\varphi^{-1}(t))(\varphi^{-1})'(t) = H'(\varphi^{-1}(t))\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))} = f(t)\varphi'(\varphi^{-1}(t))\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))} = f(t)$. □

Przykład 7.2.9. (a) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx \underset{\substack{t=\sqrt{x}\\ dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx}}{=} \int 2e^t dt = 2e^{\sqrt{x}}$.

(b) $\int e^{\sin x}\cos x dx \underset{\substack{t=\sin x\\ dt=\cos x\ dx}}{=} \int e^t\ dt = e^t = e^{\sin x}$.

(c) $\int x^2\sqrt{1+x^3}dx \underset{\substack{t=1+x^3\\ dt=3x^2\ dx}}{=} \frac{1}{3}\int \sqrt{t}\ dt = \frac{2}{9}t^{3/2} = \frac{2}{9}(\sqrt{1+x^3})^3$.

Przykład 7.2.10 (Całka z pochodnej logarytmicznej)**.** Niech $\varphi : P \longrightarrow \mathbb{R}_*$ będzie funkcją różniczkowalną. Wtedy $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx = (\int \frac{1}{t}dt)|_{t=\varphi(x)} = \ln|\varphi(x)|$, $x \in P$.

Dla przykładu: $\int \operatorname{tg} x dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}dx = -\ln|\cos x|$, $\int \operatorname{ctg} x dx =$Ćwiczenie.

Obserwacja 7.2.11. Istnieje wiele klas funkcji f, dla których są znane efektywne metody obliczania całki nieoznaczonej $\int f(x)dx$. Jest tak np. gdy f jest funkcją wymierną. Jest jednak wiele *całek nieelementarnych*, np. $\int \frac{e^x}{x}dx$. Przypomnijmy sobie, że całka $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2e^{\sqrt{x}}$ jest elementarna.

Inne całki nieelementarne to np.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}dx, \quad \int e^{-x^2}dx, \quad \int \frac{1}{\ln x}dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}\ dx, \quad \int \frac{\cos x}{x}dx.$$

7.3. Podstawowe twierdzenie rachunku całkowego

W tym podrozdziale $P = [a,b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$.

Twierdzenie 7.3.1. *Niech $f \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$, $a \in P$. Wtedy funkcja*

$$F : P \longrightarrow \mathbb{C}, \quad F(x) := \int_a^x f, \quad x \in P,$$

spełnia warunek Lipschitza. W szczególności, $F \in \mathcal{C}(P,\mathbb{C})$.

Przyjmujemy, że $\int_a^x f := -\int_x^a f$ dla $x < a$ oraz $\int_a^a f = 0$.

Dowód. Odnotujmy, że F jest poprawnie określona. Niech $|f| \leqslant C$ i niech $x', x'' \in P$, $x' < x''$. Wtedy

$$|F(x') - F(x'')| = \Big|\int_a^{x'} f - \int_a^{x''} f\Big| = \Big|\int_{x'}^{x''} f\Big| \leqslant C(x'' - x'). \qquad \square$$

Twierdzenie 7.3.2. *Dla $f \in \mathcal{C}(P)$ niech*

$$F(x) := \int_a^x f, \quad x \in P.$$

Wtedy F jest pierwotną funkcji f.

Dowód. Ustalmy $x_0 \in P$ oraz $h \neq 0$ takie, że $x_0 + h \in P$. Wtedy, na podstawie twierdzenia o średniej całkowej mamy

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f}{h} = f(x_0 + \theta(h)h),$$

gdzie $\theta(h) \in [0,1]$. Wobec ciągłości funkcji f w punkcie x_0 mamy $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+\theta(h)h) = f(x_0)$. $\square$

Twierdzenie 7.3.3 (Podstawowe twierdzenie rachunku całkowego I)**.** *Niech $f \in \mathcal{C}(P)$ i niech F będzie pierwotną funkcji f. Wtedy*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) =: F|_a^b.$$

Dowód. Niech $G(x) := \int_a^x f$, $x \in P$. Na mocy poprzedniej propozycji G jest pierwotną funkcji f, a zatem istnieje stała $c \in \mathbb{R}$ taka, że $F(x) = G(x) + c$, $x \in P$. W szczególności, $F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \int_a^b f$. $\square$

Przykład 7.3.4 (Zastosowania)**.** (a) $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x|_1^2 = \ln 2$. Z drugiej strony $M(\frac{1}{x}, \pi_n, \xi_n) \longrightarrow \int_1^2 \frac{dx}{x}$, gdzie $\pi_n := (1, 1+\frac{1}{n}, 1+\frac{2}{n}, \dots, 1+\frac{n}{n})$, $\xi_n := (1+\frac{1}{n}, \dots, 1+\frac{n}{n})$. W taki razie:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j} \longrightarrow \ln 2.$$

(b) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x|_0^1 = \frac{\pi}{4}$. Z drugiej strony: $M(\frac{1}{1+x^2}, \pi_n, \xi_n) \longrightarrow \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, gdzie $\pi_n := (0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n})$, $\xi_n := (\frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n})$. Stąd:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{n}{n^2+j^2} \longrightarrow \frac{\pi}{4}.$$

(c) (Zob. Przykład 5.6.11(d)) Niech $f(x) := \ln(1+x)$, $x > -1$. Wtedy $f'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$, przy czym szereg jest zbieżny lokalnie normalnie w $(-1,1)$. Korzystając z Twierdzenia 7.3.2 oraz z Obserwacji 7.1.12(p), dostajemy

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x \Big(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n\Big) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}, \quad |x| < 1.$$

(d) Korzystając z tych samych metod dostajemy dla $|x| < 1$:

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Definicja 7.3.5. Powiemy, że funkcja $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ jest:

- *schodkowa* ($f \in \mathcal{S}(P)$), jeżeli istnieje podział $\pi = (x_0, \dots, x_m)$ przedziału P taki, że funkcja $f|_{(x_{j-1}, x_j)} \equiv \text{const} =: c_j$, $j = 1, \dots, m$;
- *prosta* ($f \in \mathcal{P}(P)$), jeżeli dla dowolnego $x \in P$ istnieją skończone granice jednostronne $f(x+)$ i $f(x-)$ (przy czym, jak zwykle, na końcach przedziału jedną z granic pomijamy).
- *kawałkami klasy $\mathcal{C}^k$* ($f \in \mathcal{C}'^k(P)$), gdzie $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty, \omega\}$), jeżeli istnieje podział $\pi = (x_0, \dots, x_m)$ przedziału P taki, że $f|_{(x_{j-1}, x_j)}$ przedłuża się do pewnej funkcji klasy $\mathcal{C}^k([x_{j-1}, x_j])$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Kładziemy $\mathcal{C}' := \mathcal{C}'^0$.

Obserwacja 7.3.6. (a) Jeżeli $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to $f \in \mathcal{C}'^k([a,b])$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje podział $\pi = (x_0, \dots, x_m)$ odcinka $[a,b]$ taki, że $f|_{[x_{j-1}, x_j]} \in \mathcal{C}^k([x_{j-1}, x_j])$, $1 \leqslant j \leqslant m$.

(b) Jeżeli $f \in \mathcal{C}'^1(P)$, to $f' \in \mathcal{C}'(P)$. Istotnie, jeżeli podział $\pi = (x_0, \dots, x_m)$ jest taki, jak w Definicji 7.3.5, to f' jest poprawnie określona w zbiorze $P \setminus \{x_0, \dots, x_m\}$ oraz $f|_{(x_{j-1}, x_j)}$ przedłuża się do funkcji ciągłej na $[x_{j-1}, x_j]$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Wartości f' w punktach $x_0, \dots, x_m$ możemy ustalić dowolnie.

(c) $\mathcal{C}(P) \subsetneq \mathcal{C}'(P) \subsetneq \mathcal{B}(P)$.

(d) Każda funkcja monotoniczna jest prosta.

(e) $\mathcal{S}(P) \subsetneq \mathcal{C}'(P) \subsetneq \mathcal{P}(P)$.

(f) $\mathcal{S}(P)$, $\mathcal{C}'^k(P)$ i $\mathcal{P}(P)$ są $\mathbb{R}$-przestrzeniami wektorowymi.

(g) Jeżeli $f \in \mathcal{C}(P)$, $g \in \mathcal{P}(P)$, to $fg \in \mathcal{P}(P)$.

Twierdzenie 7.3.7. *Niech $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) *$f \in \mathcal{P}(P)$;*

(ii) *istnieje ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}(P)$ taki, że $f_n \longrightarrow f$ jednostajnie na P.*

Dowód. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Wystarczy pokazać, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja $g \in \mathcal{S}(P)$ taka, że $|f(t) - g(t)| \leqslant \varepsilon$, $t \in P$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Dla dowolnego $c \in P$ istnieje liczba $\delta = \delta(c) > 0$ taka, że $|f(t) - f(u)| \leqslant \varepsilon$ dla $t, u \in (c - \delta, c) \cap P$ lub $t, u \in (c, c + \delta) \cap P$ (Ćwiczenie). Wobec zwartości przedziału P istnieją punkty $c_1, \dots, c_r \in P$, $a = c_1 < \dots < c_r = b$ takie że $P \subset \bigcup_{i=1}^{r} (c_i - \delta(c_i), c_i + \delta(c_i))$. Połóżmy dla uproszczenia $\delta_i := \delta(c_i)$, $i = 1, \dots, r$. Niech $\pi = (x_0, \dots, x_m)$, będzie takim podziałem P, że $\{x_0, \dots, x_m\} = \{c_i, c_i - \delta_i, c_i + \delta_i : i = 1, \dots, r\} \cap P$. Zdefiniujmy $g : P \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$g(t) := \begin{cases} f(\frac{x_{j-1}+x_j}{2}), & \text{jeżeli } t \in (x_{j-1}, x_j),\ j = 1, \dots, m \\ f(x_j), & \text{jeżeli } t = x_j,\ j = 0, \dots, m \end{cases}.$$

Oczywiście $g \in \mathcal{S}(P)$. Jeżeli $x_{j-1} \in (c_i - \delta_i, c_i + \delta_i)$, to $(x_{j-1}, x_j) \subset (c_i - \delta_i, c_i) \cap P$ lub $(x_{j-1}, x_j) \subset (c_i, c_i + \delta_i) \cap P$. Stąd $|f(t) - f(\frac{x_{j-1}+x_j}{2})| \leqslant \varepsilon$, $t \in (x_{j-1}, x_j)$. W konsekwencji, $|f(t) - g(t)| \leqslant \varepsilon$, $t \in P$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Niech teraz $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$, gdzie $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}(P)$ i zbieżność jest jednostajna. Niech $c \in [a, b)$ i rozważymy granicę prawostronną (granicę lewostronną pozostawiamy jako Ćwiczenie). Niech $g_n : [c, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g_n(x) := \begin{cases} f_n(c+), & \text{jeżeli } x = c \\ f_n(x), & \text{jeżeli } x \in (c, b] \end{cases}$. Funkcja g_n jest ciągła w punkcie c. Ponieważ ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego, zatem ciąg $(f_n(c+))_{n=1}^{\infty}$ spełnia zwykły warunek Cauchy'ego (Ćwiczenie). Zdefiniujmy $g : [c, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) := \begin{cases} \lim_{n\to+\infty} f_n(c+), & \text{jeżeli } x = c \\ f(x), & \text{jeżeli } x \in (c, b] \end{cases}$. Wtedy $g_n \longrightarrow g$ jednostajnie na $[c, b]$. Stąd na podstawie twierdzenia o zachowaniu ciągłości przy przejściu do granicy jednostajnej (por. Twierdzenie 4.4.1), mamy $\lim_{x\to c} g(x) = g(c)$, co oznacza w szczególności, że $f'(c+)$ istnieje (i równa się $\lim_{n\to+\infty} f_n(c+)$). $\square$

Wniosek 7.3.8. $\mathcal{P}(P) \subset \mathcal{B}(P)$.

Twierdzenie 7.3.9. (a) *Każda funkcja z $\mathcal{S}(P)$ ma pierwotną.*

(b) *Każda funkcja z $\mathcal{P}(P)$ ma pierwotną.*

Przykład 7.3.10. Funkcja $F(x) := \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$, jest pierwotną funkcji $f(x) := \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } x = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}, & \text{jeżeli } x \neq 0 \end{cases}$, ale $\lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty$. Zatem f ma pierwotną, ale $f \notin \mathcal{P}(P)$.

Dowód Twierdzenia 7.3.9. (a) Niech $f \in \mathcal{S}(P)$ i niech $\pi = (x_0, \dots, x_m)$, $c_1, \dots, c_m$ będą jak w definicji przestrzeni $\mathcal{S}(P)$. Mamy $f = f_1 + \dots + f_m$ na $P \setminus \{x_0 \dots, x_m\}$, gdzie $f_j := c_j \chi_{(x_{j-1}, x_j), P}$. Wystarczy teraz zauważyć, że każda funkcja f_j ma pierwotną. Istotnie, wystarczy wziąć $F_j(x) := c_j \begin{cases} x_{j-1}, & \text{jeżeli } x \in [a, x_{j-1}] \\ x, & \text{jeżeli } x \in (x_{j-1}, x_j) \\ x_j, & \text{jeżeli } x \in [x_j, b] \end{cases}$.

(b) Niech $f \in \mathcal{P}(P)$. Na podstawie Twierdzenia 7.3.7 istnieje ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}(P)$ taki, że $f_n \longrightarrow f$ jednostajnie na P. Na podstawie (a) każda z funkcji f_n ma pierwotną F_n. Możemy założyć, że $F_n(a) = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Niech S_{F_n} będzie zbiorem osobliwym dla F_n. Wtedy zbiór $S := \bigcup_{n=1}^{\infty} S_{F_n}$ jest co najwyżej przeliczalny. Pokażemy, że $F_n \longrightarrow F$ jednostajnie na P oraz, że $F'(x) = f(x)$ dla $x \in P \setminus S$. Dowód będzie analogiczny do dowodu twierdzenia o różniczkowaniu ciągu wyraz po wyrazie (Twierdzenie 5.7.1).

Dla dowodu jednostajnej zbieżności ciągu $(F_n)_{n=1}^\infty$ pokażemy, że spełnia on jednostajny warunek Cauchy'ego. Niech $f_{m,n} := f_m - f_n$, $F_{m,n} := F_m - F_n$, $m > n$. Wiemy, że $F'_{m,n} = f_{m,n}$ na $P \setminus S$ oraz $\sup\{|f_{m,n}(\xi)| : \xi \in P\} \underset{n>m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Na podstawie Wniosku 5.4.4, dla $x \in P$ mamy

$$\begin{aligned}|F_{m,n}(x)| = |(F_{m,n}(x) - F_{m,n}(a)| &\leqslant (\sup\{|F'_{m,n}(\xi)| : \xi \in [a,x] \setminus S\})|x-a| \\ &\leqslant (\sup\{|f_{m,n}(\xi)| : \xi \in P\})(b-a) \underset{n>m\to+\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Niech $F := \lim_{n\to+\infty} F_n$. Dla dowodu tego, że F jest pierwotną f ustalmy $c \in (a,b) \setminus S$. Chcemy pokazać, że $F'(c) = f(c)$. Niech $\varphi_n, \varphi : P - c \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_n(h) := \begin{cases} \frac{F_n(c+h)-F_n(c)}{h} - f_n(c), & \text{jeżeli } h \neq 0 \\ 0, & \text{jeżeli } h = 0 \end{cases}$, $\varphi(h) := \begin{cases} \frac{F(c+h)-F(c)}{h} - f(c), & \text{jeżeli } h \neq 0 \\ 0, & \text{jeżeli } h = 0 \end{cases}$. Zauważmy, że φ_n jest ciągła w punkcie 0 oraz $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ punktowo na $P - c$. Jeżeli pokażemy, że ta zbieżność jest jednostajna, to na podstawie twierdzenia o zachowaniu ciągłości przy przejściu do granicy jednostajnej wnioskujemy, że φ jest ciągła w punkcie 0, a to oznacza, że $F'(c) = f(c)$. Liczymy

$$\begin{aligned}|\varphi_m(h) - \varphi_n(h)| &= \frac{1}{|h|}\Big|F_{m,n}(c+h) - F_{m,n}(h) - F'_{m,n}(c)h\Big| \\ &\leqslant \sup\{|F'_{m,n}(\xi) - F'_{m,n}(c)| : \xi \in [c,c+h] \setminus S\} \leqslant 2\sup\{|f_{m,n}(\xi)| : \xi \in P\} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \quad \square\end{aligned}$$

Twierdzenie 7.3.11 (Podstawowe twierdzenie rachunku całkowego II)**.** (a) *Jeżeli $f \in \mathcal{S}(P)$, to $f \in \mathcal{R}(P)$ oraz $\int_P f = F(b) - F(a)$, gdzie F jest dowolną pierwotną f.*

(b) *Jeżeli $f \in \mathcal{P}(P)$, to $f \in \mathcal{R}(P)$ oraz $\int_P f = F(b) - F(a)$, gdzie F jest dowolną pierwotną f. W szczególności, wynik jest prawdziwy dla $f \in \mathcal{C}(P)$ (co daje Twierdzenie 7.3.3).*

Obserwacja 7.3.12. Dla funkcji $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ mającej pierwotną F definiuje się *całkę Cauchy'ego* $\int_P f(x)dx := F(b) - F(a)$. Twierdzenie 7.3.11(b) mówi, że dla $f \in \mathcal{P}(P)$ całka Cauchy'ego pokrywa się z całką Riemanna — zob. Obserwacja 7.6.2(f).

Dowód Twierdzenia 7.3.11. Zauważmy, że liczba $F(b) - F(a)$ nie zależy od wyboru pierwotnej funkcji f.

(a) Niech x_j, c_j, f_j, F_j, $j = 1, \dots, m$, będą jak w dowodzie Twierdzenia 7.3.9(a). Wystarczy udowodnić wynik dla każdej funkcji f_j z osobna. Całkowalność funkcji f_j jest oczywista. Ponadto, $\int_P f_j = c_j(x_j - x_{j-1})$. Z drugiej strony, $F_j(b) - F_j(a) = c_jx_j - c_jx_{j-1} = c_j(x_j - x_{j-1}) = \int_P f$.

(b) Na podstawie Twierdzenia 7.3.7 istnieje ciąg $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{S}(P)$ taki, że $f_n \longrightarrow f$ jednostajnie na P. Na podstawie (a) $f_n \in \mathcal{R}(P)$ oraz $\int_P f_n = F_n(b) - F_n(a)$, gdzie F_n jest pierwotną f_n. Możemy założyć, że $F_n(a) = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Z własności całki Riemanna wiemy, że wtedy $f \in \mathcal{R}(P)$ oraz $\int_P f_n \longrightarrow \int_P f$.

Z dowodu Twierdzenia 7.3.11 wiemy, że $F_n \longrightarrow F$ jednostajnie na P oraz, że F jest pierwotną f. W takim razie $\int_P f = \lim_{n\to+\infty} \int_P f_n = \lim_{n\to+\infty}(F_n(b) - F_n(a)) = F(b) - F(a)$. $\square$

Twierdzenie 7.3.13 (Wzór na całkowanie przez części II)**.** *Niech $u, v \in \mathcal{P}(P)$ i niech U (odp. V) będzie pierwotną dla u (odp. v). Wtedy*

$$\int_a^b U(x)v(x)dx = (UV)|_a^b - \int_a^b u(x)V(x)dx.$$

W szczególności, jeżeli $u = f'$, $v = g'$, gdzie $f, g \in \mathcal{C}^1(P)$, to dostajemy klasyczny wzór na całkowanie przez części (Twierdzenie 7.2.6)

$$\int_a^b f'g = (fg)|_a^b - \int_a^b fg'.$$

Dowód. Na wstępie zauważmy, że $Uv, uV, UV \in \mathcal{P}(P)$ (ponieważ U i V są ciągłe), a zatem obie całki istnieją. Mamy $(UV)' = U'V + UV' = uV + Uv$ na $P \setminus (S_U \cup S_V)$. Stąd

$$\int_a^b u(x)V(x)dx + \int_a^b U(x)v(x)dx = \int_a^b (u(x)V(x) + U(x)v(x))dx = (UV)|_a^b. \quad \square$$

Twierdzenie 7.3.14 (Wzór na całkowanie przez podstawienie II)**.** *Niech $f \in \mathcal{C}(P)$, $u \in \mathcal{P}(Q)$, gdzie $Q = [p, q] \subset \mathbb{R}$, $p < q$. Niech U będzie pierwotną funkcji u. Załóżmy, że $U(Q) \subset P$. Wtedy*

$$\int_{U(p)}^{U(q)} f(x)dx = \int_p^q f(U(t))u(t)dt.$$

W szczególności, jeżeli $u = \varphi'$, gdzie $\varphi \in \mathcal{C}^1(Q)$, $\varphi(Q) \subset P$, to dostajemy klasyczny wzór na całkowanie przez podstawienie (Twierdzenie 7.2.8)

$$\int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f = \int_p^q (f \circ \varphi) \cdot \varphi'.$$

Dowód. Zauważmy, że $(f \circ U)u \in \mathcal{P}(Q)$ (ponieważ $f \circ U$ jest ciągła), a zatem całka po prawej stronie jest dobrze określona. Niech F będzie pierwotną funkcji f. Przypomnijmy, że $F \in \mathcal{D}(P)$ (Twierdzenie 7.2.4). Mamy $(F \circ U)'(t) = F'(U(t))U'(t) = f(U(t))u(t)$, $t \in Q \setminus S_U$. Stąd

$$\int_p^q f(U(t))u(t)dt = (F \circ U)|_p^q = \int_{U(p)}^{U(q)} f(x)dx. \qquad \square$$

7.4. Długość krzywej

Definicja 7.4.1. *Długością krzywej* $\gamma : [a, b] \longrightarrow X$ w przestrzeni metrycznej (X, ϱ) nazywamy liczbę $L(\gamma) \in [0, +\infty]$ daną wzorem: $L(\gamma) := \sup_\pi\{S(\gamma, \pi)\}$, gdzie $S(\gamma, \pi) := \sum\limits_{j=1}^{m} \varrho(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j))$, a supremum jest brane po wszystkich podziałach $\pi = (t_0, \dots, t_m)$ przedziału $[a, b]$. Zauważmy, że jeżeli $\pi' \preccurlyeq \pi$, to $S(\gamma, \pi') \geqslant S(\gamma, \pi)$. Krzywą γ nazywamy *prostowalną*, gdy $L(\gamma) < +\infty$.

Obserwacja 7.4.2. (a) $L(\gamma)$ nie zależy od parametryzacji γ (i dlatego możemy zawsze ograniczyć się do krzywych $\gamma : [0, 1] \longrightarrow X$) (2),

(b) $L(\ominus\gamma) = L(\gamma)$, tzn. długość krzywej nie zależy od orientacji (3),

(c) $L(\gamma_1 \oplus \gamma_2) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$ (4).

Lemat 7.4.3. *Dla każdego normalnego ciągu podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ przedziału $[0, 1]$ mamy:*

$$S(\gamma, \pi_k) \longrightarrow L(\gamma).$$

Dowód. (Por. Obserwacja 7.1.6(f).) Weźmy $\ell < L(\gamma)$ i niech $\pi' = (t'_0, \dots, t'_{m_0})$ będzie podziałem przedziału $[a, b]$ takim, że $S(\gamma, \pi') > \ell$. Dla $0 < \delta < \operatorname{diam} \pi'$ weźmy dowolny podział $\pi = (t_0, \dots, t_m)$ odcinka $[a, b]$ o średnicy $\leqslant \delta$. Punkty $t_0, \dots, t_m$ dzielimy na m_0-grup, zaliczając do i-tej grupy te punkty t_j, dla których $t'_{i-1} \leqslant t_j < t'_i$, $i = 1, \dots, m_0 - 1$, a do grupy m_0 — pozostałą „końcówkę" punktów. Punkty i-tej grupy numerujemy kolejno $t_{n_i}, \dots, t_{n_{i+1}-1}$, gdzie $n_1 = 0$, $n_{m_0+1} = m + 1$. Wobec nierówności trójkąta mamy:

$$\begin{aligned} L \geqslant S(\gamma, \pi) &= \sum_{i=1}^{m_0} \sum_{j=n_i}^{n_{i+1}-1} \varrho(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j)) \\ &\geqslant \sum_{i=1}^{m_0} \Big(\varrho(\gamma(t'_i, \gamma(t'_{i-1})) - \varrho(\gamma(t'_{i-1}), \gamma(t_{n_i})) - \varrho(\gamma(t_{n_{i+1}-1}), \gamma(t'_i))\Big) \\ &\geqslant S(\gamma, \pi') - 2m_0\omega_\gamma(\delta) > \ell - 2m_0\omega_\gamma(\delta). \end{aligned}$$

Zauważmy, że z jednostajnej ciągłości odwzorowania γ wynika, że $\omega_\gamma(\delta) \longrightarrow 0$ przy $\delta \longrightarrow 0$. W konsekwencji, dla dowolnego normalnego ciągu podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ mamy

$$L \geqslant \limsup_{k \to +\infty} S(\gamma, \pi_k) \geqslant \liminf_{k \to +\infty} S(\gamma, \pi_k) \geqslant \ell,$$

co przy $\ell \nearrow L$ daje tezę. $\square$

---

(2) Przypomnijmy, że zmiana parametryzacji krzywej $\gamma : [a, b] \longrightarrow X$ polega na zastąpieniu jej przez krzywą $\gamma \circ \sigma : [c, d] \longrightarrow X$, gdzie $\sigma : [c, d] \longrightarrow [a, b]$ jest pewną bijekcją rosnącą.

(3) Przypomnijmy, że dla krzywej $\gamma : [0, 1] \longrightarrow X$ kładziemy: $(\ominus\gamma)(t) := \gamma(1 - t)$.

(4) Przypomnijmy, że dla krzywych $\gamma_j : [0, 1] \longrightarrow X$, $j = 1, 2$, takich, że $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ definiujemy: $(\gamma_1 \oplus \gamma_2)(t) := \gamma_1(2t)$ dla $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$ i $(\gamma_1 \oplus \gamma_2)(t) := \gamma_2(2t - 1)$ dla $\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1$.

W dalszym ciągu będziemy zainteresowani krzywymi $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ i sytuacją, gdy na $\mathbb{R}^n$ rozważamy odległość euklidesową.

Definicja 7.4.4. *Droga* to krzywa $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ taka, że $\gamma_j \in \mathcal{C}'([a,b])$, $j = 1, \dots, n$ (zob. Definicja 7.3.5).

Twierdzenie 7.4.5. *Dowolna droga* $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *jest prostowalna (względem odległości euklidesowej) oraz*

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^1 \Big(\sum_{j=1}^n (\gamma_j'(t))^2 \Big)^{1/2} dt.$$

Zauważmy, że całka po prawej stronie istnieje (funkcja podcałkowa jest kawałkami ciągła — Obserwacja 7.3.6(b)).

Dowód. Możemy założyć, że γ jest klasy $\mathcal{C}^1$. Dla podziału $\pi = (t_0, \dots, t_m)$ niech $\xi := (t_0, \dots, t_{m-1})$. Wtedy, korzystając z twierdzenia o przyrostach skończonych, dostajemy:

$$|S(\gamma, \pi) - M(\|\gamma'\|, \pi, \xi)| = \Big| \sum_{j=1}^m \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| - \sum_{j=1}^m \|\gamma'(t_{j-1})\|(t_j - t_{j-1}) \Big|$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^m \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) - \gamma'(t_{j-1})(t_j - t_{j-1})\| \leqslant \sum_{j=1}^m \big(\sup\{\|\gamma'(\eta) - \gamma'(t_{j-1})\| : \eta \in [t_{j-1}, t_j]\} \big)(t_j - t_{j-1})$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^m \omega_{\gamma'}(\operatorname{diam}\pi)(t_j - t_{j-1}) = \omega_{\gamma'}(\operatorname{diam}\pi).$$

Pozostaje wykorzystać Lemat 7.4.3, Twierdzenie 7.1.9 i skorzystać z jednostajnej ciągłości odwzorowania γ'. □

Wniosek 7.4.6. *Niech* $\gamma_s : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{N}_0$, *będą krzywymi klasy* $\mathcal{C}^1$ *oraz* $\gamma_s' \longrightarrow \gamma_0'$ *jednostajnie. Wtedy* $L(\gamma_s) \longrightarrow L(\gamma_0)$.

Dowód. Na postawie Twierdzenia 7.4.5: $|L(\gamma_s) - L(\gamma_0)| \leqslant \int_0^1 \big|\|\gamma_s'\| - \|\gamma_0'\|\big| dt \leqslant \int_0^1 \|\gamma_s' - \gamma_0'\| dt \longrightarrow 0$. □

Obserwacja 7.4.7. Zauważmy, że jeżeli $\gamma_s \longrightarrow \gamma_0$ jednostajnie, to nie musi być $L(\gamma_s) \longrightarrow L(\gamma_0)$.

Niech $\gamma_0 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma_0(t) := (t, 0)$. Niech $\delta_n \searrow 0$. Przybliżamy krzywą γ_0 przy pomocy łamanych $\gamma_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ wyznaczonych przez punkty $(0,0)$, $(\frac{1}{2n}, \delta_n)$, $(\frac{1}{n}, 0)$, $(\frac{3}{2n}, \delta_n)$, $(\frac{2}{n}, 0), \dots, (1 - \frac{1}{2n}, \delta_n)$, $(1, 0)$. Oczywiście, $\gamma_n \longrightarrow \gamma$ jednostajnie. Z drugiej strony $L(\gamma_n) = 2n\sqrt{(\frac{1}{2n})^2 + \delta_n^2} = \sqrt{1 + (2n\delta_n)^2}$. Dobierając stosownie $(\delta_n)_{n=1}^\infty$ możemy łatwo dostać $L(\gamma_n) \longrightarrow +\infty$.

7.5. Przykłady zastosowania całek

Przykład 7.5.1. W przykładach poniżej pewne pojęcia (np. pole powierzchni) będą rozumiane w sposób intuicyjny — precyzyjne definicje zostaną podane w przyszłości w ramach Analizy Matematycznej 3 i 4.

(1) Niech $A = \{(x,y) : x \in [a,b],\ g(x) \leqslant y \leqslant f(x)\}$, gdzie $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ oraz $g \leqslant f$. Wtedy *pole* $|A|$ zbioru A wyraża się wzorem $|A| = \int_a^b (f - g)$.

Intuicja: $|A| \approx \sum_{i=1}^n (f(\xi_i) - g(\xi_i))(x_i - x_{i-1})$, gdzie $(x_0, \dots, x_n)$ jest podziałem odcinka $[a,b]$, zaś $\xi_i \in [x_{i-i}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$.

(2) Niech $A = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) : \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta,\ 0 \leqslant r \leqslant R(\varphi)\}$, gdzie $\beta - \alpha \leqslant 2\pi$, $R \in \mathcal{R}([\alpha,\beta])$, $R : [\alpha,\beta] \longrightarrow \mathbb{R}_+$. Wtedy $|A| = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta R^2(\varphi)\, d\varphi$.

Intuicja: $|A| \approx \sum_{i=1}^n \pi R^2(\xi_i) \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{2\pi}$, gdzie $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ jest podziałem odcinka $[\alpha,\beta]$, zaś $\xi_i \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i]$, $i = 1, \dots, n$.

(3) Niech $B = \{(x, r\cos\varphi, r\sin\varphi) : x \in [a,b],\ \varphi \in [0, 2\pi],\ 0 \leqslant r \leqslant R(x)\}$, gdzie $R \in \mathcal{R}([a,b])$, $R : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$. Wtedy *objętość* $|B|$ bryły B wyraża się wzorem

$$|B| = \pi \int_a^b R^2(x)\, dx.$$

Intuicja: $|B| \approx \sum\limits_{i=1}^{n} \pi R^2(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, gdzie $(x_0, \dots, x_n)$ jest podziałem odcinka $[a, b]$, zaś $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$.

(4) Niech $S = \{(x, R(x)\cos\varphi, R(x)\sin\varphi) : x \in [a, b],\ \varphi \in [0, 2\pi]\}$, gdzie $R \in \mathcal{C}^1([a, b])$, $R : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$. Wtedy *pole powierzchni* $|S|$ powierzchni S wyraża się wzorem

$$|S| = 2\pi \int_a^b R(x)\sqrt{1 + (R'(x))^2}\, dx.$$

Intuicja:

$$\begin{aligned}
|S| &\approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi R(\xi_i)\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (R(x_i) - R(x_{i-1}))^2} \\
&= \sum_{i=1}^{n} 2\pi R(\xi_i)\sqrt{1 + \Big(\frac{R(x_i) - R(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\Big)^2}(x_i - x_{i-1}) \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi R(\xi_i)\sqrt{1 + (R'(\xi_i))^2}(x_i - x_{i-1}).
\end{aligned}$$

(5) Warto pamiętać o następującym przykładzie. Niech

$$\begin{aligned}
B_c &= \{(x, r\cos\varphi, r\sin\varphi) : x \in [1, c],\ \varphi \in [0, 2\pi],\ r \leqslant \tfrac{1}{x}\}, \\
S_c &= \{(x, \tfrac{1}{x}\cos\varphi, \tfrac{1}{x}\sin\varphi) : x \in [1, c],\ \varphi \in [0, 2\pi]\}.
\end{aligned}$$

Wtedy

$$|B_c| = \pi \int_1^c \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^c = \pi\Big(1 - \frac{1}{c}\Big), \quad |S_c| = 2\pi \int_1^c \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}dx \geqslant 2\pi \int_1^c \frac{1}{x}dx = 2\pi \ln c.$$

Stąd $\lim_{c \to +\infty} |B_c| = \lim\limits_{c \to +\infty} \pi(1 - \frac{1}{c}) = \pi$, ale $\lim\limits_{c \to +\infty} |S_c| \geqslant \lim_{c \to +\infty} 2\pi \ln c = +\infty$.

W przyszłości (Analiza Matematyczna 4) spojrzymy na powyższe wzory z wyższego punktu widzenia. W tej chwili przedstawimy tylko pewną ogólną ideę.

Niech $U \subset \mathbb{R}^m$ będzie zbiorem otwartym i niech $f = (f_1, \dots, f_n) : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $m \leqslant n$, będzie odwzorowaniem klasy $\mathcal{C}^1$ ze względu na każdą zmienną osobno, tzn. dla dowolnych $j \in \{1, \dots, n\}$, $k \in \{1, \dots, m\}$ i $c = (c_1, \dots, c_m) \in U$, odwzorowanie $x_k \overset{\varphi_{j,k,c}}{\longmapsto} f_j(c_1, \dots, c_{k-1}, x_k, c_{k+1}, \dots, c_m)$ jest klasy $\mathcal{C}^1$ w otoczeniu punktu c_k. Niech $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(c) := \varphi'_{j,k,c}(c_k)$ oznacza *k-tą pochodną cząstkową funkcji f_j w punkcie c*. Zdefiniujmy

$$J_m f(x) := \Big(\sum_{1 \leqslant j_1 < \dots < j_m \leqslant n} \Big(\det\Big[\frac{\partial f_{j_i}}{\partial x_k}(x)\Big]_{i,k=1,\dots,m} \Big)^2 \Big)^{1/2}, \quad x \in U. \tag{*}$$

Twierdzenie* 7.5.2. *Przy powyższych oznaczeniach, dla „regularnych" zbiorów $A \subset U$ takich, że $f|_A$ jest injektywne,* m-wymiarowa miara Hausdorffa *zbioru $f(A)$ wyraża się wzorem*

$$\mathcal{H}^m(f(A)) = \int_A J_m f(x)dx,$$

gdzie całka po prawej stronie to wielowymiarowa całka Riemanna.

Obserwacja 7.5.3. (a) $m = 1$, $f = (f_1, \dots, f_n) : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $A = [a, b] \subset U$,

$$J_1 f(x) = \Big(\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} (f_j'(x))^2 \Big)^{1/2} = \|f'(x)\|, \quad x \in U.$$

Wzór (*) to wzór na długość krzywej $f|_{[a,b]}$.

(b) $m = n = 2$, $f(x, t) := (x, \varphi(x) + t(\psi(x) - \varphi(x)))$, $(x, t) \in U \subset \mathbb{R}^2$, $A = [a, b] \times [0, 1] \subset U$, gdzie $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^1$, $\varphi(x) < \psi(x)$, $x \in [a, b]$. Wtedy

$$J_2 f(x, t) = \Big| \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varphi'(x) + t(\psi'(x) - \varphi'(x)) & \psi(x) - \varphi(x) \end{bmatrix} \Big| = |\psi(x) - \varphi(x)|.$$

Pole zbioru $f(A)$ wyraża się wzorem (5)

$$\mathcal{H}^2(f(A)) = \int_A (\psi(x) - \varphi(x))dxdt = \int_{[a,b]} \Big(\int_{[0,1]} (\psi(x) - \varphi(x))dt \Big) dx \overset{(*)}{=} \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))dx,$$

gdzie (*) wynika ze wzoru na iterację całek Riemanna: Jeżeli $C \subset \mathbb{R}^k$, $D \subset \mathbb{R}^\ell$ są zbiorami regularnymi i $F : C \times D \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą ograniczoną, to $\int_{C\times D} F(x,y)d(x,y) = \int_C \big(\int_D F(x,y)dy \big) dx$.

(c) $m = n = 2$, $f(t,\varphi) = (tR(\varphi)\cos\varphi, tR(\varphi)\sin\varphi)$, $(t,\varphi) \in U \subset \mathbb{R}^2$, $A = (0,1] \times [\alpha,\beta) \subset U$, $\beta - \alpha \leqslant 2\pi$, gdzie $R \in \mathcal{C}^1([\alpha,\beta), \mathbb{R}_{>0})$. Wtedy

$$J_2 f(t,\varphi) = \Big| \det \begin{bmatrix} R(\varphi)\cos\varphi & tR'(\varphi)\cos\varphi - tR(\varphi)\sin\varphi \\ R(\varphi)\sin\varphi & tR'(\varphi)\sin\varphi + tR(\varphi)\cos\varphi \end{bmatrix} \Big| = |t|R^2(\varphi).$$

Pole zbioru $f(A)$ wyraża się wzorem

$$\mathcal{H}^2(f(A)) = \int_A tR^2(\varphi)dtd\varphi = \tfrac{1}{2} \int_\alpha^\beta R^2(\varphi)d\varphi.$$

(d) $m = n = 3$, $f(x,t,\varphi) = (x, tR(x)\cos\varphi, tR(x)\sin\varphi)$, $(x,t,\varphi) \in U \subset \mathbb{R}^3$, $A := [a,b] \times (0,1] \times [0,2\pi) \subset U$, gdzie $R \in \mathcal{C}^1$ oraz $R > 0$ na A. Wtedy

$$J_3 f(x,t,\varphi) = \left| \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ tR'(x)\cos\varphi & R(x)\cos\varphi & -tR(x)\sin\varphi \\ tR'(x)\sin\varphi & R(x)\sin\varphi & tR(x)\cos\varphi \end{bmatrix} \right| = |t|R^2(x).$$

Objętość zbioru $f(A)$ wyraża się wzorem

$$\mathcal{H}^3(f(A)) = \int_A tR^2(x)dxdtd\varphi = \pi \int_a^b R^2(x)dx.$$

(e) $m = 2$, $n = 3$, $f(x,\varphi) = (x, R(x)\cos\varphi, R(x)\sin\varphi)$, $(x,\varphi) \in U \subset \mathbb{R}^2$, $A := [a,b] \times [0,2\pi) \subset U$, gdzie $R \in \mathcal{C}^1$ oraz $R > 0$ na A. Wtedy

$$\begin{aligned} J_2 f(x,\varphi) &= \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ R'(x)\cos\varphi & -R(x)\sin\varphi \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ R'(x)\sin\varphi & R(x)\cos\varphi \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} R'(x)\cos\varphi & -R(x)\sin\varphi \\ R'(x)\sin\varphi & R(x)\cos\varphi \end{vmatrix}^2 \right)^{1/2} \\ &= \big(R^2(x) + R^2(x)(R'(x))^2 \big)^{1/2} = |R(x)|\sqrt{1 + (R'(x))^2}. \end{aligned}$$

Pole powierzchni zbioru $f(A)$ wyraża się wzorem

$$\mathcal{H}^2(f(A)) = \int_A R(x)\sqrt{1 + (R'(x))^2}dxd\varphi = 2\pi \int_a^b R(x)\sqrt{1 + (R'(x))^2}dx.$$

7.6. Całka niewłaściwa

Definicja 7.6.1. Niech $\varphi : [a,b) \longrightarrow \mathbb{C}$, gdzie $-\infty < a < b \leqslant \infty$, będzie taka, że $\varphi|_{[a,\beta]} \in \mathcal{R}([a,\beta],\mathbb{C})$ dla dowolnego $a < \beta < b$. Zdefiniujmy $F_\varphi(\beta) := \int_a^\beta \varphi$. Mówimy, że *całka niewłaściwa* $\int_a^b \varphi$ jest *zbieżna*, jeżeli granica $\int_a^b \varphi := \lim\limits_{\beta \to b-} F_\varphi(\beta)$ istnieje i jest skończona. Piszemy wtedy $\varphi \in \mathcal{R}([a,b),\mathbb{C})$. Jak zwykle, jeżeli $\varphi([a,b)) \subset \mathbb{R}$, to piszemy $\varphi \in \mathcal{R}([a,b))$. Jeżeli dodatkowo $f : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}_+$, to zamiast $f \in \mathcal{R}([a,b))$ będziemy również pisać $\int_a^b f < +\infty$.

Jeżeli $|\varphi| \in \mathcal{R}([a,b))$, to mówimy, że *całka niewłaściwa* $\int_a^b \varphi$ jest *bezwzględnie zbieżna*.

Analogiczne pojęcie całki niewłaściwej możemy zdefiniować dla funkcji $\varphi : (a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, gdzie $-\infty \leqslant a < b < \infty$. Piszemy wtedy $\varphi \in \mathcal{R}((a,b],\mathbb{C})$.

Jeżeli $\varphi : (a,b) \longrightarrow \mathbb{C}$, gdzie $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, jest funkcją taką, że $\varphi|_{[\alpha,\beta]} \in \mathcal{R}([\alpha,\beta],\mathbb{C})$ dla dowolnego przedziału $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$, to mówimy, że *całka niewłaściwa* $\int_a^b \varphi$ *jest zbieżna*, jeżeli istnieje $c \in (a,b)$ takie, że $\varphi|_{(a,c]} \in \mathcal{R}((a,c],\mathbb{C})$ oraz $\varphi|_{[c,b)} \in \mathcal{R}([c,b),\mathbb{C})$. Piszemy wtedy $\varphi \in \mathcal{R}((a,b),\mathbb{C})$ i definiujemy

$$\int_a^b \varphi := \int_a^c \varphi + \int_c^b \varphi. \tag{*}$$

---

(5) We wszystkich przykładach sprawdzenie injektywności odwzorowania $f|_A$ pozostawiamy jako Ćwiczenie.

Obserwacja 7.6.2. (a) Definicja (*) nie zależy od wyboru punktu pośredniego $c \in (a, b)$.

(b) Dalsze rozważania będą prowadzone dla przedziału $[a, b)$. Przypadki $(a, b]$ i (a, b) pozostawiamy jako Ćwiczenie.

(c) $\varphi \in \mathcal{R}([a, b), \mathbb{C}) \iff \operatorname{Re}\varphi, \operatorname{Im}\varphi \in \mathcal{R}([a, b))$. Ponadto, $\int_a^b \varphi = \int_a^b \operatorname{Re}\varphi + i\int_a^b \operatorname{Im}\varphi$.

(d) Jeżeli $\varphi \in \mathcal{R}([a, b])$, gdzie $-\infty < a < b < \infty$, to $\varphi|_{[a,b)} \in \mathcal{R}([a, b), \mathbb{C})$ i $\int_a^b \varphi|_{[a,b)} = \int_a^b \varphi$.

Istotnie, niech $|\varphi| \leqslant C$. Wtedy dla $\beta \in (a, b)$ mamy

$$\Big|F_\varphi(\beta) - \int_a^b \varphi\Big| = \Big|\int_\beta^b \varphi\Big| \leqslant \int_\beta^b |\varphi| \leqslant (b-\beta)C \underset{\beta \to b-}{\longrightarrow} 0.$$

(e) Jeżeli $\varphi \in \mathcal{R}([a, b))$, gdzie $-\infty < a < b < \infty$, oraz istnieje skończona granica $g := \lim\limits_{x \to b-} \varphi(x)$, to po położeniu $\varphi(b) := g$ mamy $\varphi \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{C})$

Istotnie, możemy założyć, $f = \varphi : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$ i niech $\beta \in (a, b)$ będzie taka, że $b - \beta < 1$ oraz $|f(x) - g| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$ dla $\beta \leqslant x < b$. Ponieważ $f \in \mathcal{R}([a, \beta])$, zatem istnieje podział $\pi' = (t_0, \dots, t_m)$ przedziału $[a, \beta]$ taki, że $U(f, \pi') - L(f, \pi') \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Niech $\pi := (t_0, \dots, t_m, b)$. Jest to podział przedziału $[a, b]$ oraz

$$U(f, \pi) - L(f, \pi) = U(f, \pi') - L(f, \pi') + (M(f, [\beta, b]) - m(f, [\beta, b]))(b - \beta) \leqslant \varepsilon.$$

(f) Jeżeli funkcja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $b < +\infty$, ma pierwotną F oraz $f \in \mathcal{P}([a, b))$, to $f \in \mathcal{R}([a, b))$ oraz $\int_a^b f = F(b) - F(a)$. Oznacza to, że w tym przypadku całka Cauchy'ego pokrywa się z niewłaściwą całką Riemanna.

Dla przykładu: $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(F(x) = \sqrt{x})$.

Istotnie, wobec Twierdzenia 7.3.11(b), $\lim\limits_{\beta \to b-} \int_a^\beta f = \lim\limits_{\beta \to b-} (F(\beta) - F(a)) = F(b) - F(a)$.

Przykład 7.6.3. (a) Dla $0 < \gamma < 1$:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\gamma} dx = \lim_{\alpha \to 0+} \int_\alpha^1 \frac{1}{x^\gamma} dx = \lim_{\alpha \to 0+} \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}\Big|_\alpha^1 = \frac{1}{1-\gamma}.$$

(b) Dla $\gamma > 1$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\gamma} dx = \lim_{\beta \to +\infty} \int_1^\beta \frac{1}{x^\gamma} dx = \lim_{\beta \to +\infty} \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}\Big|_1^\beta = \frac{1}{\gamma - 1}.$$

(c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\beta \to +\infty} \int_0^\beta \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{\alpha \to -\infty} \int_\alpha^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\beta \to +\infty} \operatorname{arctg} x\big|_0^\beta + \lim_{\alpha \to -\infty} \operatorname{arctg} x\big|_\alpha^0 = \pi.$$

Twierdzenie 7.6.4. *Jeżeli $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ i $f|_{[a,\beta]} \in \mathcal{R}([a, \beta])$ dla dowolnego $a < \beta < b$, to*

$$\int_a^b f < +\infty \iff \exists_{(\beta_n)_{n=0}^\infty \subset [a,b)} : a = \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_n \nearrow b : \sum_{n=1}^\infty \int_{\beta_{n-1}}^{\beta_n} f < +\infty.$$

Dowód. W naszym przypadku funkcja F_f jest rosnąca oraz $F_f(\beta_n) = \sum\limits_{k=1}^n \int_{\beta_{k-1}}^{\beta_k} f$. □

Twierdzenie 7.6.5 (Warunek Cauchy'ego zbieżności całek niewłaściwych)**.** *Niech $\varphi : [a, b) \longrightarrow \mathbb{C}$ będzie taka, $\varphi|_{[a,\beta]} \in \mathcal{R}([a, \beta], \mathbb{C})$ dla dowolnego $a < \beta < b$. Wtedy całka niewłaściwa $\int_a^b \varphi$ jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $c \in (a, b)$ takie, że dla dowolnych $c < \beta_1 < \beta_2 < b$ mamy $|\int_{\beta_1}^{\beta_2} \varphi| < \varepsilon$.*

Dowód. ($\Longrightarrow$): $\int_{\beta_1}^{\beta_2} \varphi = F_\varphi(\beta_2) - F_\varphi(\beta_1)$.

($\Longleftarrow$): Niech $a \leqslant \beta_n < b$, $n \in \mathbb{N}$, $\beta_n \longrightarrow b$. Wtedy nasz warunek gwarantuje, że ciąg liczbowy $(F_\varphi(\beta_n))_{n=1}^\infty$ spełnia warunek Cauchy'ego. Jest więc zbieżny do granicy skończonej. □

Twierdzenie 7.6.6 (Kryterium porównawcze)**.** *Niech $\varphi : [a, b) \longrightarrow \mathbb{C}$, $g : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ będą takie, że:*

- $\varphi|_{[a,\beta]}$, $g|_{[a,\beta]} \in \mathcal{R}([a, \beta], \mathbb{C})$ *dla dowolnego* $\beta \in (a, b)$,
- $|\varphi(x)| \leqslant g(x)$, $x \in [a, b)$,
- $g \in \mathcal{R}([a, b))$.

Wtedy $\varphi \in \mathcal{R}([a,b))$ *oraz* $|\int_a^b \varphi| \leqslant \int_a^b g$.

W szczególności, jeżeli $|\varphi| \in \mathcal{R}([a,b))$*, to* $\varphi \in \mathcal{R}([a,b))$ *oraz* $|\int_a^b \varphi| \leqslant \int_a^b |\varphi|$.

Przykład 7.6.7. (a) Całka $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x dx}{1+x^2}$ jest bezwzględnie zbieżna.

(b) Całka $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x}$ jest zbieżna.

Istotnie, ponieważ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ osobliwość jest tylko w $+\infty$ i wystarczy zbadać zbieżność całki $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x}$. Całkując przez części mamy $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x} = \frac{-\cos x}{x}\big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2} = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2}$ i wystarczy zauważyć, że ostatnia całka jest bezwzględnie zbieżna.

(c) Całka $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x}$ nie jest zbieżna bezwzględnie.

Istotnie,

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x| dx}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin x| dx}{x} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin x| dx = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} = +\infty.$$

Twierdzenie 7.6.8 (Kryterium całkowe zbieżności szeregów)**.** *Niech* $f : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ *będzie funkcją malejącą,* $S_n := \sum\limits_{k=0}^{n} f(k)$*,* $I_n := \int_0^n f$*,* $n \in \mathbb{N}_0$*. Wtedy:*

(a) $S_n - I_n \longrightarrow g \in [0, f(0)]$.

(b) $\int_0^{\infty} f < +\infty \iff \sum\limits_{n=0}^{\infty} f(n) < +\infty$.

Dowód. (a) Zauważmy, że $f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f \leqslant f(k-1)$, $k \in \mathbb{N}$. Stąd $S_n - f(0) \leqslant I_n \leqslant S_n - f(n)$, a więc $f(n) \leqslant S_n - I_n \leqslant f(0)$. Wystarczy jeszcze pokazać, że ciąg $(S_n - I_n)_{n=0}^{\infty}$ jest malejący:

$$S_n - I_n - (S_{n+1} - I_{n+1}) = -f(n+1) + \int_n^{n+1} f \geqslant 0.$$

(b) wynika z (a). □

Przykład 7.6.9. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} < +\infty \iff \alpha > 1$. W takim razie szereg $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy $\alpha > 1$.

7.7. Funkcje dane całką

Twierdzenie 7.7.1 (Twierdzenie o funkcjach danych całką)**.** *Niech* $\Omega \in \operatorname{top} \mathbb{R}$*, niech* $P = [a,b] \subset\subset \mathbb{R}$ *i niech* $f : \Omega \times P \longrightarrow \mathbb{R}$ *będzie odwzorowaniem takim, że dla pewnego* $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ *mamy:*

- $f(\cdot, t) \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ *dla dowolnego* $t \in P$*,*
- *odwzorowanie* $\Omega \times P \ni (x,t) \longmapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t) \in \mathbb{R}$*, gdzie* $\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t) := (f(\cdot,t))^{(j)}(x)$*, jest ciągłe dla* $j \leqslant k$*.* (6)

Wtedy odwzorowanie $\Omega \ni x \overset{\varphi}{\longmapsto} \int_a^b f(x,t)dt$ *jest klasy* $\mathcal{C}^k(\Omega)$ *oraz* $\varphi^{(j)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)dt$*,* $x \in \Omega$*,* $j \leqslant k$ (7)*.*

Dowód. Wystarczy rozważyć przypadki $k = 0$ i $k = 1$ (a następnie iterować rozumowanie).

$k = 0$: Ustalmy $a \in \Omega$, $r > 0$ takie, że $[a-r, a+r] \subset \Omega$ i $\varepsilon > 0$. Odwzorowanie f jest jednostajnie ciągłe na $[a-r, a+r] \times P$. Zatem istnieje $0 < \delta < r$ taka, że $|f(x,t) - f(a,t)| \leqslant \varepsilon$ dla $(x,t) \in (a-\delta, a+\delta) \times P$. Otrzymujemy stąd:

$$|\varphi(x) - \varphi(a)| \leqslant \int_a^b |f(x,t) - f(a,t)| dt \leqslant \varepsilon(b-a), \quad x \in (a-\delta, a+\delta).$$

$k = 1$: Wystarczy wykazać, że $\varphi'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$, $x \in \Omega$ (ciągłość φ' zapewnia przypadek $k = 0$). Ustalmy $a \in \Omega$, $r > 0$ takie, że $[a-r, a+r] \subset \Omega$ i $\varepsilon > 0$. Odwzorowanie $\frac{\partial f}{\partial x}$ jest jednostajnie ciągłe na

(6) Dla $k = 0$ warunek ten oznacza po prostu ciągłość f.
(7) Tzn. możemy różniczkować pod znakiem całki.

$[a-r, a+r] \times P$. Zatem istnieje $0 < \delta < r$ taka, że $|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)| \leqslant \varepsilon$ dla $(x,t) \in (a-\delta, a+\delta) \times P$. Stąd, na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych, otrzymujemy:

$$\Big|\frac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)dt\Big| \leqslant \int_a^b \Big|\frac{f(a+h,t)-f(a,t)}{h} - \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\Big|dt \leqslant \varepsilon(b-a),\ 0<|h|<\delta. \ \square$$

Twierdzenie 7.7.2 (Twierdzenie o funkcjach danych całką niewłaściwą)**.** *Niech $\Omega \in \operatorname{top}\mathbb{R}$, niech $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ i niech $f : \Omega \times [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie odwzorowaniem takim, że dla pewnego $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ mamy:*

- *$f(\cdot,t) \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ dla dowolnego $t \in [a,b)$,*
- *odwzorowanie $\Omega \times [a,b) \ni (x,t) \longmapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j} \in \mathbb{R}$ jest ciągłe dla $j \leqslant k$,*
- *dla dowolnego $j \leqslant k$ istnieje odwzorowanie $g_j \in \mathcal{R}([a,b))$ takie, że $|\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)| \leqslant g_j(t)$ dla $(x,t) \in \Omega \times [a,b)$.*

Wtedy odwzorowanie $\Omega \ni x \overset{\varphi}{\longmapsto} \int_a^b f(x,t)dt$ jest klasy $\mathcal{C}^k(\Omega)$ oraz $\varphi^{(j)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)dt$, $x \in \Omega$, $j \leqslant k$ (8).

Odnotujmy, że analogiczny wynik zachodzi, gdy przedział $[a,b)$ zastąpimy przedziałem $(a,b]$ ($-\infty \leqslant a < b < +\infty$) lub też przedziałem (a,b) ($-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$).

Dowód. Ustalmy ciąg $a < \beta_\nu < b$, $\beta_\nu \nearrow b$ i niech $\varphi_\nu(x) := \int_a^{\beta_\nu} f(x,t)dt$, $x \in \Omega$. Na podstawie poprzedniego twierdzenia wnioskujemy, że $\varphi_\nu \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ oraz $\varphi_\nu^{(j)}(x) = \int_a^{\beta_\nu} \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)dt$, $x \in \Omega$, $j \leqslant k$. Zauważmy, że $\varphi_\nu \longrightarrow \varphi$ jednostajnie na Ω. Istotnie, $|\varphi_\nu(x) - \varphi(x)| \leqslant \int_{\beta_\nu}^b g_0(t)dt \longrightarrow 0$. Wynika stąd, że φ jest ciągła. Analogicznie, dla dowolnego $j \leqslant k$ ciąg $(\varphi_\nu^{(j)})_{\nu=1}^\infty$ jest zbieżny jednostajnie. Teraz wystarczy już tylko wykorzystać twierdzenie o różniczkowaniu ciągu wyraz po wyrazie. $\square$

Przykład 7.7.3 (Funkcja Γ Eulera)**.** Niech $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$, $x > 0$. Wtedy:

- $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_{>0})$,
- $\Gamma(1) = 1$, $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$, $x > 0$.

W szczególności, $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Dowód. Niech $f(x,t) := t^{x-1}e^{-t}$, $x,t > 0$. Wtedy $\Gamma(x) = \int_0^1 f(x,t)dt + \int_1^\infty f(x,t)dt$, $x > 0$. Zauważmy, że $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = t^{x-1}(\ln t)^k e^{-t}$. Wobec poprzedniego twierdzenia, dla dowodu, że Γ jest klasy $\mathcal{C}^\infty$ wystarczy pokazać, że dla dowolnego przedziału $[\alpha,\beta] \subset (0,+\infty)$ i dla dowolnego $k \in \mathbb{N}_0$ istnieją funkcje $g_k \in \mathcal{R}((0,1])$, $h_k \in \mathcal{R}([1,+\infty))$ takie, że:

- $|t^{x-1}(\ln t)^k e^{-t}| \leqslant g_k(t)$, $x \in [\alpha,\beta]$, $t \in (0,1]$,
- $|t^{x-1}(\ln t)^k e^{-t}| \leqslant h_k(t)$, $x \in [\alpha,\beta]$, $t \in [1,\infty)$.

Zdefiniujmy:

- $g_k(t) := t^{\alpha-1}|\ln t|^k e^{-t}$, $0 < t \leqslant 1$,
- $h_k(t) := N!t^{\beta-1+k-N}$, gdzie $N > \beta + k$.

Dla $0 < \varepsilon < \alpha$ mamy $\int_0^1 g_k(t)dt \leqslant \operatorname{const}(\varepsilon)\int_0^1 t^{\alpha-1-\varepsilon}dt = \frac{\operatorname{const}(\varepsilon)}{\alpha-\varepsilon}$. Całkowalność h_k jest oczywista. Ponadto,

$$t^{\beta-1}(\ln t)^k e^{-t} \leqslant t^{\beta-1+k}\frac{1}{\sum\limits_{s=0}^\infty \frac{t^s}{s!}} \leqslant N!t^{\beta-1+k-N}.$$

Jest widoczne, że $\Gamma(1) = 1$. Ponadto, dla $x > 0$ mamy:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}dt = -t^x e^{-t}\Big|_0^{+\infty} + x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = x\Gamma(x). \qquad \square$$

7.8. Całki krzywoliniowe

Będziemy kontynuować rozważania z § 7.4. Na wstępie przypomnijmy Twierdzenie 7.4.5.

---

(8) Zauważmy, że nasze założenia gwarantują zbieżność wszystkich występujących w tezie całek niewłaściwych.

Twierdzenie 7.8.1. *Dowolna droga $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ jest prostowalna* (9) *oraz*

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt. \quad (^{10})$$

Niech $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie krzywą i niech $f : \gamma^* \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją ograniczoną (11). Dla podziału $\pi = (t_0, \dots, t_m)$ przedziału $[a,b]$ i dla punktów pośrednich $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ niech

$$M(f, \gamma, \pi, \xi) := \sum_{j=1}^m f(\gamma(\xi_j)) \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|.$$

Powiemy, że funkcja f jest *całkowalna wzdłuż krzywej* γ ($f \in \mathcal{R}(\gamma)$), jeżeli istnieje $c \in \mathbb{R}$ takie, że dla dowolnego normalnego ciągu podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ przedziału $[a,b]$ oraz dla dowolnego wyboru punktów pośrednich $(\xi_k)_{k=1}^\infty$ mamy $M(f, \gamma, \pi_k, \xi_k) \longrightarrow c$. Liczbę c nazywamy *całką krzywoliniową niezorientowaną z funkcji f po krzywej γ* i oznaczamy $c = \int_\gamma f dl$.

Obserwacja 7.8.2. (a) Całkowalność i całka są niezależne od parametryzacji krzywej.

Istotnie, wystarczy tylko zauważyć, że jeżeli $\tau : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ jest ściśle rosnącą bijekcją, to jest to odwzorowanie jednostajnie ciągłe, a w szczególności obraz normalnego ciągu podziałów jest normalnym ciągiem podziałów.

(b) γ jest prostowalna wtedy i tylko wtedy, gdy $1 \in \mathcal{R}(\gamma)$. Ponadto $L(\gamma) = \int_\gamma 1 dl$.

(c) $f \in \mathcal{R}(\gamma) \iff f \in \mathcal{R}(\ominus\gamma)$. Ponadto, $\int_{\ominus\gamma} f dl = \int_\gamma f dl$ (12).

(d) Jeżeli $\gamma_j : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $j = 1,2$, są krzywymi takimi, że $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ oraz $f : \gamma_1^* \cup \gamma_2^* \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją taka, że $f|_{\gamma_j^*} \in \mathcal{R}(\gamma_j)$, $j = 1,2$, to $f \in \mathcal{R}(\gamma_1 \oplus \gamma_2)$ oraz

$$\int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} f dl = \int_{\gamma_1} f dl + \int_{\gamma_2} f dl.$$

Istotnie, wystarczy rozważyć normalny ciąg podziałów będący „sumą” normalnych ciągów podziałów dla poszczególnych krzywych i udowodnić, że w definicji całki krzywoliniowej niezorientowanej możemy brać tylko takie normalne ciągi podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$, dla których $\widetilde{t} \in \pi_k$, $k \geqslant 1$, gdzie $\widetilde{t}$ jest ustalonym punktem z (a,b).

Rozważmy bowiem dowolny podział $\pi = (t_0, \dots, t_m)$ i ciąg punktów pośrednich $\xi = (\xi_1, \dots \xi_m)$. Przypuśćmy, że $\widetilde{t} \in (t_{s-1}, t_s)$. Niech $\pi' := (t_0, \dots, t_{s-1}, \widetilde{t}, t_s, \dots, t_m)$ i niech ξ' będzie uzupełnionym ciągiem punktów pośrednich (zachowujemy wszystkie dotychczasowe punkty pośrednie). Wtedy (por. dowód Lematu 7.4.3) mamy:

$$\begin{aligned}|M(f, \gamma, \pi, \xi) - M(f, \gamma, \pi', \xi')| &= \big|f(\xi_s)\|\gamma(t_s) - \gamma(t_{s-1})\| - f(\xi'_s)\|\gamma(\widetilde{t}) - \gamma(t_{s-1})\| - f(\xi'_{s+1})\|\gamma(t_s) - \gamma(\widetilde{t})\|\big| \\ &\leqslant 3\big(\sup_{\gamma^*} |f|\big)\omega_\gamma(\operatorname{diam} \pi);\end{aligned}$$

dalej rozumujemy standardowo.

(e) Operator $\mathcal{R}(\gamma) \ni f \longmapsto \int_\gamma f dl \in \mathbb{R}$ jest liniowy.

Twierdzenie 7.8.3. *Niech $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie drogą. Wtedy mamy $\mathcal{C}(\gamma^*) \subset \mathcal{R}(\gamma)$ oraz*

$$\int_\gamma f dl = \int_0^1 f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt, \quad f \in \mathcal{C}(\gamma^*). \quad (^{13})$$

---

(9) Względem odległości euklidesowej.

(10) Tu i dalej $\| \ \|$ oznacza normę Euklidesową w $\mathbb{R}^n$.

(11) Przypomnijmy, że $\gamma^* := \gamma([a,b])$ jest obrazem geometrycznym krzywej γ.

(12) Uzasadnia to nazwę „całka niezorientowana”.

(13) Zauważmy, że całka po prawej stronie istnieje. Twierdzenie daje praktyczny sposób obliczania całek niezorientowanych.

Dowód. Możemy założyć, że γ jest klasy $\mathcal{C}^1$. Ustalmy podział $\pi = (t_0,\dots,t_m)$ oraz punkty pośrednie $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$. Wtedy na postawie twierdzenia o przyrostach skończonych mamy:

$$|M(f,\gamma,\pi,\xi) - M((f\circ\gamma)\|\gamma'\|,\pi,\xi)| \leqslant \sum_{j=1}^{m} |f(\gamma(\xi_j))| \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) - \gamma'(\xi_j)(t_j - t_{j-1})\|$$

$$\leqslant (\max_{\gamma^*}|f|) \sum_{j=1}^{m} \big(\sup\{\|\gamma'(\eta) - \gamma'(\xi_j)\| : \eta \in [t_{j-1}, t_j]\}\big)(t_j - t_{j-1}) \leqslant \big(\max_{\gamma^*}|f|\big)\omega_{\gamma'}(\operatorname{diam}\pi);$$

dalej standardowo. $\square$

Niech teraz $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie dowolną krzywą i niech $V = (V_1,\dots,V_n) : \gamma^* \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie dowolnym odwzorowaniem (*polem wektorowym*) ograniczonym. Dla podziału $\pi = (t_0,\dots,t_m)$ przedziału $[a,b]$ i dla punktów pośrednich $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ niech

$$M(V,\gamma,\pi,\xi) := \sum_{j=1}^{m} \langle V(\gamma(\xi_j)), \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\rangle. \quad (^{14})$$

Powiemy, że pole V jest *całkowalne wzdłuż krzywej* γ, jeżeli istnieje $c \in \mathbb{R}$ takie, że dla dowolnego normalnego ciągu podziałów $(\pi_k)_{k=1}^{\infty}$ przedziału $[a,b]$ oraz dla dowolnego wyboru punktów pośrednich $(\xi_k)_{k=1}^{\infty}$ mamy $M(V,\gamma,\pi_k,\xi_k) \longrightarrow c$. Liczbę c nazywamy *całką krzywoliniową zorientowaną z pola V po krzywej* γ i oznaczamy $c = \int_\gamma V dx = \int_\gamma V_1 dx_1 + \dots + V_n dx_n$.

Obserwacja 7.8.4 (Ćwiczenie). (a) Całkowalność i całka są niezależne od parametryzacji krzywej.

(b) Pole V jest całkowalne na γ wtedy i tylko wtedy, gdy jest całkowalne na $\ominus\gamma$. Ponadto,

$$\int_{\ominus\gamma} V dx = -\int_\gamma V dx \quad (^{15})$$

.

(c) Jeżeli $\gamma_j : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $j = 1,2$, są krzywymi takimi, że $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ oraz $V : \gamma_1^* \cup \gamma_2^* \longrightarrow \mathbb{R}^n$ jest odwzorowaniem takim, że V jest całkowalne osobno na γ_1 i γ_2, to V jest całkowalne na $\gamma_1 \oplus \gamma_2$ oraz

$$\int_{\gamma_1\oplus\gamma_2} V dx = \int_{\gamma_1} V dx + \int_{\gamma_2} V dx.$$

(d) Całka zorientowana po krzywej γ jest operatorem liniowym.

Twierdzenie 7.8.5. *Niech $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie drogą. Wtedy każde pole ciągłe V jest całkowalne na γ oraz*

$$\int_\gamma V dx = \int_0^1 \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt. \quad (^{16})$$

Dowód. Możemy założyć, że γ jest klasy $\mathcal{C}^1$. Ustalmy podział $\pi = (t_0,\dots,t_m)$ oraz punkty pośrednie $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$. Wtedy wobec nierówności Schwarza mamy

$$|M(V,\gamma,\pi,\xi) - M(\langle V\circ\gamma, \gamma'\rangle,\pi,\xi)| \leqslant \sum_{j=1}^{m} \Big|\Big\langle V(\gamma(\xi_j)), \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) - \gamma'(\xi_j)(t_j - t_{j-1})\Big\rangle\Big|$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{m} \|V(\gamma(\xi_j))\| \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) - \gamma'(\xi_j)(t_j - t_{j-1})\| \leqslant \big(\max_{\gamma^*}\|V\|\big)\omega_{\gamma'}(\operatorname{diam}\pi);$$

dalej standardowo. $\square$

---

(14) $\langle\ ,\ \rangle$ oznacza standardowy iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n$, $\langle x,y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$.

(15) Uzasadnia to nazwę „całka zorientowana".

(16) Zauważmy, że całka po prawej stronie istnieje. Twierdzenie daje praktyczny sposób obliczania całek zorientowanych.

ROZDZIAŁ 8

Szeregi Fouriera

8.1. Twierdzenie Riemanna-Lebesgue'a

Do tematyki związanej z szeregami Fouriera powrócimy w wykładzie z Analizy Matematycznej 4. Niech

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R}) &:= \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : f|_{[-\pi,\pi]} \in \mathcal{R}([-\pi,\pi]),\ \forall_{x\in\mathbb{R}} : f(x+2\pi) = f(x)\},\\ \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}) &:= \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : \forall_{x\in\mathbb{R}} : f(x+2\pi) = f(x)\}.\end{aligned}$$

Definicja 8.1.1. Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R})$ definiujemy jej *współczynniki szeregu Fouriera* (1):

$$a_n = a_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\, dt, \quad b_n = b_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\, dt, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Szeregiem Fouriera funkcji f nazywamy szereg funkcyjny:

$$S(x) = S(f;x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n \sin nx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Jego *sumy częściowe* oznaczamy przez:

$$S_k(x) = S_k(f;x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k}(a_n\cos nx + b_n \sin nx), \quad x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}_0.$$

Obserwacja 8.1.2. (a) Jeżeli szereg $S(f;x_0)$ jest zbieżny, to zbieżny jest też szereg $S(f;x_0+2k\pi)$ oraz $S(f;x_0+2k\pi) = S(f;x_0)$, $k \in \mathbb{Z}$. W tym sensie funkcja $S(f;\cdot)$ jest okresowa o okresie 2π.

(b) Jeżeli funkcja f jest parzysta, to $b_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy szereg Fouriera funkcji f ma postać $S(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ i jest nazywany *szeregiem kosinusów*.

Istotnie,

$$b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\, dt \overset{u=-t}{=} \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi} f(-u)\sin(-nu)\,(-du) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin nu\, du = -b_n.$$

(c) Jeżeli funkcja f jest nieparzysta, to $a_n = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$. Wtedy szereg Fouriera funkcji f ma postać $S(f;x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ i jest nazywany *szeregiem sinusów* — Ćwiczenie.

(d) $a_n(1) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, $a_0(1) = 2$. Stąd $S_k(1;x) = 1$, $k \in \mathbb{N}_0$, oraz $S(1;x) = 1$.

(e) Niech

$$\varphi_0 := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \varphi_{2n-1}(x) := \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad \varphi_{2n}(x) := \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Wtedy układ $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$ jest *ortonormalny*, tzn.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_j(t)\varphi_k(t)\, dt = \delta_{j,k}, \quad j,k \in \mathbb{N}_0 \text{ — Ćwiczenie.}$$

(1) Jean Fourier (1768–1830).

Twierdzenie 8.1.3 (Riemanna–Lebesgue'a)**.** *Niech $P \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem i niech $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie taka, że $f|_{[a,b]} \in \mathcal{R}([a,b])$ dla dowolnego $[a,b] \subset P$ oraz $|f| \in \mathcal{R}(P)$ $(^2)$. Wtedy*

$$\lim_{|\alpha|\to+\infty} \int_P f(t)\cos\alpha t\, dt = \lim_{|\alpha|\to+\infty} \int_P f(t)\sin\alpha t\, dt = 0.$$

W szczególności, dla $f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R})$ mamy $a_n(f) \longrightarrow 0$, $b_n(f) \longrightarrow 0$ przy $n \longrightarrow +\infty$.

W rzeczywistości Twierdzenie 8.1.3 jest prawdziwe dla obszerniejszej klasy funkcji.

Dowód. Dowód przeprowadzimy dla $\cos\alpha t$. Przypadek $\sin\alpha t$ pozostawiamy jako Ćwiczenie.

Krok 1^o. Jeżeli $f = \chi_{[p,q],P}$, to

$$\int_P f(t)\cos\alpha t\, dt = \int_p^q \cos\alpha t\, dt = \frac{1}{\alpha}\sin\alpha t\Big|_p^q = \frac{1}{\alpha}(\sin\alpha q - \sin\alpha p) \underset{|\alpha|\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Krok 2^o. Dla dowolnego przedziału $[a,b] \subset P$ oraz dla dowolnego jego podziału $\pi = (x_0, \dots, x_m)$, jeżeli

$$f = \sum_{j=1}^m c_j \chi_{[x_{j-1},x_j],P},$$

gdzie $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$, to twierdzenie zachodzi.

Krok 3^o. Jeżeli $(f_s)_{s=1}^\infty \subset \mathcal{R}(P)$, $\int_P |f_s(t) - f(t)|dt \longrightarrow 0$ oraz twierdzenie zachodzi dla każdej z funkcji f_s, to zachodzi dla f.

Istotnie, niech $\varepsilon > 0$ i niech $s \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $\int_P |f_s(t) - f(t)|dt \leqslant \varepsilon/2$. Niech $|\int_P f_s(t)\cos\alpha t\, dt| \leqslant \varepsilon/2$ dla $|\alpha| \geqslant C$. Wtedy dla $|\alpha| \geqslant C$ mamy

$$\Big|\int_P f(t)\cos\alpha t\, dt\Big| \leqslant \Big|\int_P f_s(t)\cos\alpha t\, dt\Big| + \int_P |f_s(t) - f(t)||\cos\alpha t|dt \leqslant \varepsilon.$$

Krok 4^o. Dla dowolnego przedziału $[a,b] \subset P$ twierdzenie zachodzi dla funkcji $f\chi_{[a,b],P}$.

Istotnie, wystarczy pokazać, że istnieje ciąg $(f_s)_{s=1}^\infty$ funkcji „schodkowych" takich, jak w Kroku 2^o, dla którego $\int_P |f_s(t) - f(t)\chi_{[a,b],P}(t)|dt \longrightarrow 0$. Niech $\varepsilon > 0$ i niech $\pi = (x_0, \dots, x_m)$ będzie podziałem przedziału $[a,b]$, takim że $U(f,\pi) - L(f,\pi) \leqslant \varepsilon$. Zdefiniujmy $c_j := M(f, [x_{j-1}, x_j])$, $j = 1, \dots, m$, $g := \sum_{j=1}^m c_j\chi_{[x_{j-1},x_j],P}$. Wtedy

$$\int_P |g(t) - f(t)\chi_{[a,b],P}(t)|dt = \int_a^b (g(t) - f(t))dt = \int_a^b g(t)dt - \int_a^b f(t)dt \leqslant U(f,\pi) - L(f,\pi) \leqslant \varepsilon.$$

Krok 5^o. Niech $[a_s, b_s] \nearrow P$. Wobec Kroków 3^o i 4^o, do zakończenia dowodu wystarczy zauważyć, że $\int_P |f - f\chi_{[a_s,b_s],P}| = \int_P |f| - \int_{a_s}^{b_s} |f| \longrightarrow 0$. $\square$

8.2. Kryterium Diniego

Zdefiniujmy pomocniczą funkcję:

$$\Phi_k(x) := \frac{\sin\frac{(2k+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}, \quad x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}_0.$$

Obserwacja 8.2.1 (Ćwiczenie)**.** (a) $\Phi_k(-x) = \Phi_k(x)$.

(b) $\Phi_k(x + 2\pi) = \Phi_k(x)$.

(c) $\frac{1}{2}\Phi_k(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^k \cos nx$.

Lemat 8.2.2. *Dla $f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R})$ mamy:*

$$S_k(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2}\Phi_k(t)dt, \quad x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}_0.$$

W szczególności, $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Phi_k(t)dt = 1$, $k \in \mathbb{N}_0$.

$(^2)$ Wobec kryterium porównawczego (Twierdzenie 7.6.6) wiemy, że $f \in \mathcal{R}(P)$. Zauważmy, że jeżeli $P = [a,b]$, to powyższe założenia są równoważne temu, że $f \in \mathcal{R}([a,b])$.

Dowód. Liczymy:

$$\begin{aligned}S_k(f;x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Big(\tfrac{1}{2}+\sum_{n=1}^{k}(\cos nt\cos nx+\sin nt\sin nx)\Big)dt\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Big(\tfrac{1}{2}+\sum_{n=1}^{k}\cos n(t-x)\Big)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{1}{2}\Phi_k(t-x)dt\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t)\frac{1}{2}\Phi_k(t)dt \overset{(*)}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\tfrac{1}{2}\Phi_k(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\,\Phi_k(t)dt,\end{aligned}$$

gdzie $(*)$ wynika z tego, że funkcja podcałkowa ma okres 2π. □

Twierdzenie 8.2.3. *Dla $f\in\mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R})$ i dla dowolnego $0<\delta<\pi$ mamy:*

$$\lim_{k\to+\infty} S_k(f;x) = \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\Phi_k(t)dt,\quad x\in\mathbb{R}$$

(w tym sensie, że obie granice jednocześnie istnieją i są równe). W szczególności, prawdziwa jest następująca zasada lokalizacji*:*

O zbieżności i wartości $S(f;x_0)$ szeregu Fouriera funkcji f w punkcie x_0 decydują wyłącznie wartości funkcji f w dowolnie małym otoczeniu punktu x_0.

Dowód. Ustalmy x. Funkcja

$$[\delta,\pi]\ni t\longmapsto\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\sin\frac{t}{2}}$$

jest całkowalna. Zatem, na podstawie twierdzenia Riemanna–Lebesgue'a, mamy:

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\sin\frac{t}{2}}\ \sin\frac{(2k+1)t}{2}dt=0.$$

Teraz wystarczy skorzystać z Lematu 8.2.2. □

Twierdzenie 8.2.4 (Kryterium Diniego)**.** *Niech $f\in\mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R})$ i $x_0,A\in\mathbb{R}$ będą takie, że funkcja*

$$(0,\pi]\ni t\overset{\psi}{\longmapsto}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2A}{t}$$

jest bezwzględnie całkowalna. Wtedy $S(f;x_0)=\lim_{k\to+\infty}S_k(f;x_0)=A$.

Dowód. Na podstawie Lematu 8.2.2 mamy:

$$S_k(f;x_0)-A=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\Big(\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2}-A\Big)\Phi_k(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\Big(\psi(t)\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\Big)\sin\frac{(2k+1)t}{2}\ dt.$$

Ponieważ funkcja $(0,\pi]\ni t\longmapsto\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$ przedłuża się do funkcji ciągłej na $[0,\pi]$, zatem funkcja $(0,\pi]\ni t\longmapsto\psi(t)\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$ jest bezwzględnie całkowalna (kryterium porównawcze) i możemy skorzystać z twierdzenia Riemanna–Lebesgue'a. □

Obserwacja 8.2.5 (Przykłady użycia kryterium Diniego)**.** (a) Jeżeli funkcja

$$(0,\pi]\ni t\overset{\psi}{\longmapsto}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0)}{t}$$

jest bezwzględnie całkowalna, to $S_k(f;x_0)\longrightarrow f(x_0)$.

(b) W szczególności, jeżeli istnieje skończona granica

$$\lim_{t\to0+}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0)}{t},$$

to $S(f;x_0)=f(x_0)$.

(c) W szczególności, jeżeli granice jednostronne $f(x_0\pm):=\lim_{t\to0\pm}f(x_0+t)$ istnieją i są skończone, $2f(x_0)=f(x_0+)+f(x_0-)$ oraz istnieją skończone granice $\lim_{t\to0+}\frac{f(x_0\pm t)-f(x_0\pm)}{t}$, to $S(f;x_0)=f(x_0)$.

(d) W szczególności, jeżeli $f'(x_0)$ istnieje, to $S(f;x_0)=f(x_0)$.

(e) Jeżeli granice jednostronne $f(x_0\pm)$ istnieją i są skończone, $2f(x_0) = f(x_0+) + f(x_0-)$ oraz

$$|f(x_0 \pm t) - f(x_0\pm)| \leqslant Ct^\alpha, \quad 0 \leqslant t \leqslant \delta,$$

dla pewnych $C, \alpha, \delta > 0$, to funkcja ψ (z $A := f(x_0)$) jest bezwzględnie całkowalna, a zatem $S(f; x_0) = f(x_0)$.

Przykład 8.2.6. Niech $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją okresową o okresie 2π taką, że

$$h(x) = \begin{cases} -x - \pi, & \text{jeżeli } -\pi \leqslant x < 0 \\ 0, & \text{jeżeli } x = 0 \\ -x + \pi, & \text{jeżeli } 0 < x \leqslant \pi \end{cases}.$$

Wtedy

$$h(x) = S(h; x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ponadto, szereg jest zbieżny niemal jednostajnie na przedziale $(0, 2\pi)$ $\left({}^3\right)$.

Istotnie, funkcja h jest nieparzysta, więc $a_n(h) = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$. Ponadto

$$b_n(h) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi - t)\sin nt\, dt = -\frac{2}{n}\cos nt\Big|_0^\pi + \frac{2}{\pi}\frac{1}{n}t\cos nt\Big|_0^\pi - \frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}\sin nt\Big|_0^\pi = \frac{2}{n}\Big(\frac{t}{\pi} - 1\Big)\cos nt\Big|_0^\pi = \frac{2}{n}.$$

Zauważmy, że funkcja h spełnia w każdym punkcie warunek z kryterium Diniego bo jest różniczkowalna w $[-\pi, 0) \cup (0, \pi]$ (dla $x_0 = 0$ zbieżność jest trywialna). Zbieżność niemal jednostajna wynika z kryterium Dirichleta jednostajnej zbieżności. Istotnie, na podstawie Przykładu 6.2.2(a) wiemy, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ jest zbieżny niemal jednostajnie na $\mathbb{T} \setminus \{1\}$. W szczególności, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \operatorname{Im}\big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(e^{ix})^n}{n}\big)$ jest zbieżny niemal jednostajnie na $[-\pi, 0) \cup (0, \pi]$.

8.3. Twierdzenie Fejéra

Twierdzenie 8.3.1 (Twierdzenie Fejéra $\left({}^4\right)$)**.** *Dla $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ zdefiniujmy:*

$$\sigma_k(f; x) := \frac{S_0(f; x) + \dots + S_{k-1}(f; x)}{k}, \quad x \in \mathbb{R},\ k = 1, 2, \dots.$$

Wtedy $\sigma_k(f; \cdot) \longrightarrow f$ jednostajnie na $\mathbb{R}$.

Dowód. Korzystając z Lematu 8.2.2 i wzoru

$$\sum_{j=0}^{k-1} \sin(2j+1)\alpha = \frac{\sin^2 k\alpha}{\sin\alpha} \quad (\text{Ćwiczenie}),$$

dostajemy

$$\begin{aligned}\sigma_k(f; x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \cdot \frac{1}{k\sin\frac{t}{2}} \sum_{j=0}^{k-1} \sin(2j+1)\frac{t}{2} dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \cdot \frac{\sin^2 k\frac{t}{2}}{k\sin^2\frac{t}{2}}\, dt, \quad x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Niech

$$\Psi_k(x) := \frac{\sin^2 k\frac{x}{2}}{k\sin^2\frac{x}{2}}, \quad x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}.$$

Zauważmy, że $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Psi_k(t)dt = 1$, $k \in \mathbb{N}$. Niech $C > 0$ będzie takie, że $|f(x)| \leqslant C$, $x \in \mathbb{R}$. Dla $0 < \delta < \pi$ liczymy:

$$|\sigma_k(f; x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Big|\frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{2}\Big|\Psi_k(t)dt$$

$\left({}^3\right)$ Tzn. jest zbieżny jednostajnie na dowolnym zbiorze zwartym $K \subset (0, 2\pi)$.

$\left({}^4\right)$ Lipót Fejér (1880–1959).

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\omega_f(\delta)\Psi_k(t)dt + \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} 2C\Psi_k(t)dt \leqslant \omega_f(\delta) + \frac{2C}{k\sin^2\frac{\delta}{2}}, \quad x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}. \quad \square$$

Definicja 8.3.2. *Wielomianem trygonometrycznym* nazywamy dowolną funkcję postaci

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto \alpha_0 + \sum_{n=1}^{k}(\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx).$$

Jako natychmiastowy wniosek z twierdzenia Fejéra dostajemy następujący wynik.

Wniosek 8.3.3. *Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ istnieje ciąg wielomianów trygonometrycznych $(w_k)_{k=1}^{\infty}$ taki, że $w_k \longrightarrow f$ jednostajnie na $\mathbb{R}$.*

Twierdzenie 8.3.4 (Twierdzenie aproksymacyjne Weierstrassa)**.** *Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{C}([a,b])$ istnieje ciąg wielomianów $(P_k)_{k=1}^{\infty}$ taki, że $P_k \longrightarrow f$ jednostajnie na $[a,b]$.*

Dowód. Istotnie, problem sprowadza się do udowodnienia, że każda funkcja $f \in \mathcal{C}([0,\pi])$ daje się jednostajnie aproksymować wielomianami (Ćwiczenie). Ustalmy f. Funkcję tę możemy oczywiście przedłużyć do funkcji ciągłej na $\mathbb{R}$ i okresowej o okresie 2π. Na podstawie Wniosku 8.3.3, dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje wielomian trygonometryczny w taki, że $|w(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, $x \in \mathbb{R}$. W takim razie problem sprowadza się do aproksymacji na $[0,\pi]$ wielomianów trygonometrycznych zwykłymi wielomianami. Wobec postaci wielomianu trygonometrycznego, wystarczy umieć aproksymować funkcje $x \longmapsto \cos nx$ i $x \longmapsto \sin nx$, $n \in \mathbb{N}$. To zaś wynika bezpośrednio z faktu, że funkcje te są rozwijalne w szeregi potęgowe zbieżne na $\mathbb{R}$. $\square$

8.4. Szeregi Fouriera — abstrakcyjny punkt widzenia

Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią z semi-iloczynem skalarnym $\langle\ ,\ \rangle$ (zob. § 5.11.3). Od tej chwili zakładamy, że $\dim \mathcal{H} = \infty$. Przypuśćmy, że $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ jest *układem ortonormalnym* w $\mathcal{H}$, tzn. $\langle \varphi_j, \varphi_k\rangle = \delta_{j,k}$, $j,k = 0,1,2,\dots$.

Obserwacja 8.4.1. Niech $\mathcal{H} = \mathcal{R}([-\pi,\pi])$. Wtedy układ trygonometryczny

$$\varphi_0 := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \varphi_{2n-1}(x) := \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad \varphi_{2n}(x) := \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \quad n = 1,2,\dots.$$

jest ortonormalny, tzn. $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_j(t)\varphi_k(t)\, dt = \delta_{j,k}$, $j,k \in \mathbb{N}_0$.

Obserwacja 8.4.2. (a) Jeżeli $f = \lambda_0\varphi_0 + \dots + \lambda_k\varphi_k$, to $\lambda_j = \langle f, \varphi_j\rangle$, $j = 0,\dots,k$, oraz $\|f\|^2 = |\lambda_0|^2 + \dots + |\lambda_k|^2$.

(b) Układ $(\varphi_j)_{j=0}^{\infty}$ jest liniowo niezależny.

(c) (*Ortonormalizacja*) Niech $(\psi_j)_{j=0}^{\infty}$ będzie dowolnym układem liniowo niezależnym. Wtedy istnieje taki układ ortonormalny $(\varphi_j)_{j=0}^{\infty}$, że dla dowolnego $k = 0,1,2,\dots$ mamy

$$\mathbb{K}\psi_0 + \dots + \mathbb{K}\psi_k = \mathbb{K}\varphi_0 + \dots + \mathbb{K}\varphi_k. \tag{$*$}$$

Istotnie, definiujemy $\varphi_0 := \psi_0/\|\psi_0\|$ i jeżeli już $\varphi_0,\dots,\varphi_\ell$ są zdefiniowane i spełniają $(*)$ dla $k = 0,\dots,\ell$, to kładziemy $\varphi_{\ell+1} := \vartheta_{\ell+1}/\|\vartheta_{\ell+1}\|$, gdzie $\vartheta_{\ell+1} := \psi_{\ell+1} - \sum_{j=0}^{\ell}\langle\psi_{\ell+1},\varphi_j\rangle\varphi_j$. Sprawdzamy, że $\varphi_0,\dots,\varphi_{\ell+1}$ spełniają wszystkie wymagane warunki:

$$\langle\vartheta_{\ell+1},\varphi_k\rangle = \langle\psi_{\ell+1},\varphi_k\rangle - \sum_{j=0}^{\ell}\langle\psi_{\ell+1},\varphi_j\rangle\langle\varphi_j,\varphi_k\rangle = 0, \quad k = 1,\dots,\ell.$$

Niech $V_k := \mathbb{K}\varphi_0 + \dots + \mathbb{K}\varphi_k$. Oczywiście $V_k \subset V_{k+1}$ oraz $\dim_{\mathbb{K}} V_k = k+1$, $k = 0,1,2,\dots$. Zdefiniujmy $S_k : \mathcal{H} \longrightarrow V_k$, $S_k(f) := \langle f,\varphi_0\rangle\varphi_0 + \dots + \langle f,\varphi_k\rangle\varphi_k$, $k = 0,1,2,\dots$. Wiemy, że $\|S_k(f)\|^2 = \sum_{j=0}^{k}|\langle f,\varphi_j\rangle|^2$.

Obserwacja 8.4.3. (a) S_k jest operacją $\mathbb{K}$–liniową.

(b) $S_k = \mathrm{id}$ na V_k.

(c) $\langle f - S_k(f), g\rangle = 0$, $g \in V_k$.

Istotnie, $\langle f - S_k(f),\varphi_j\rangle = \langle f,\varphi_j\rangle - \langle S_k(f),\varphi_j\rangle = \langle f,\varphi_j\rangle - \langle f,\varphi_j\rangle = 0$, $j = 0,\dots,k$.

(d) $\|f - S_k(f)\|^2 = \|f\|^2 - \|S_k(f)\|^2$, $f \in \mathcal{H}$, $k = 0, 1, 2, \dots$.
Istotnie, $\|f\|^2 = \|S_k(f) + (f - S_k(f))\|^2 = \|S_k(f)\|^2 + \|f - S_k(f)\|^2$.

(e) (Nierówność Bessela (5)) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\langle f, \varphi_n\rangle|^2 \leqslant \|f\|^2$, $f \in \mathcal{H}$.

(f) Jeżeli $\mathcal{H} = \mathcal{R}_{2\pi}([-\pi, \pi])$, zaś $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$ jest układem trygonometrycznym, to nierówność Bessela ma postać:

$$\tfrac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)dt.$$

Istotnie, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\langle f, \varphi_n\rangle|^2 = \big(\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}a_0\big)^2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\big((\sqrt{\pi}a_n)^2 + (\sqrt{\pi}b_n)^2\big)$.

(g) $S_k(f)$ realizuje semi-odległość elementu f od przestrzeni V_k, tzn. $\|f - S_k(f)\| = \operatorname{dist}(f, V_k) := \inf\{\|f - g\| : g \in V_k\}$, $f \in \mathcal{H}$, $k = 0, 1, 2, \dots$.
Istotnie,

$$\|f - \sum_{j=0}^{k}\lambda_j\varphi_j\|^2 - \|f - S_k(f)\|^2 = -2\operatorname{Re}\Big(\sum_{j=0}^{k}\lambda_j\overline{\langle f, \varphi_j\rangle}\Big) + \sum_{j=0}^{k}|\lambda_j|^2 + \sum_{j=0}^{k}|\langle f, \varphi_j\rangle|^2 = \sum_{j=0}^{k}|\lambda_j - \langle f, \varphi_j\rangle|^2.$$

(h) $S_k(f)$ jest jedynym elementem o własności (g).

Od tej chwili zakładamy, że $\langle\ ,\ \rangle$ jest iloczynem skalarnym, z którym $\mathcal{H}$ jest przestrzenią Hilberta.

Twierdzenie 8.4.4. *Dla dowolnego $f \in \mathcal{H}$, szereg $S(f) := \sum\limits_{n=0}^{\infty}\langle f, \varphi_n\rangle\varphi_n$ jest zbieżny.*

Dowód. Pokażemy, że szereg $S(f)$ spełnia warunek Cauchy'ego. Mamy

$$\Big\|\sum_{j=n}^{m}\langle f, \varphi_j\rangle\varphi_j\Big\|^2 = \sum_{j=n}^{m}|\langle f, \varphi_j\rangle|^2, \quad m > n.$$

Teraz wystarczy skorzystać z nierówności Bessela). $\square$

Zauważmy, że $(k+1)$-sza suma częściowa szeregu $S(f)$ jest równa $S_k(f)$. Szereg $S(f)$ nazywamy *szeregiem Fouriera* elementu f (w bazie ortonormalnej $(\varphi_j)_{j=0}^{\infty}$). Jest widoczne, że operacja $\mathcal{H} \ni f \longmapsto S(f) \in \mathcal{H}$ jest liniowa. Ponadto, $\|f - S(f)\|^2 = \|f\|^2 - \|S(f)\|^2$. W szczególności, $\|S(f)\| \leqslant \|f\|$, $f \in \mathcal{H}$.

Niech $V := \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} V_k$. Odnotujmy, że V jest podprzestrzenią wektorową $\mathcal{H}$.

Twierdzenie 8.4.5. *Następujące warunki są równoważne:*

(i) $S = \mathrm{id}$*;*

(ii) $\|S(f)\| = \|f\|$, $f \in \mathcal{H}$*, tzn. S jest izometrią;*

(iii) *zachodzi* tożsamość Parsevala (6) $\langle f, g\rangle = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\langle f, \varphi_n\rangle\overline{\langle g, \varphi_n\rangle}$, $f, g \in \mathcal{H}$*;*

(iv) $V^{\perp} = \{0\}$*, tzn. jeżeli $\langle f, \varphi_j\rangle = 0$ dla $j = 0, 1, 2, \dots$, to $f = 0$;*

(v) $\overline{V} = \mathcal{H}$.

Dowód. (i) $\Longrightarrow$ (iii): $\langle f, g\rangle = \langle S(f), S(g)\rangle$.
(iii) $\Longrightarrow$ (ii): $f = g$.
(ii) $\Longrightarrow$ (i): Wynika z równości $\|f - S(f)\|^2 = \|f\|^2 - \|S(f)\|^2$.
(i) $\Longrightarrow$ (iv): Jeżeli $f \perp \varphi_j$ dla dowolnego j, to $S(f) = 0$.
(iv) $\Longrightarrow$ (i): $\langle f - S(f), \varphi_j\rangle = 0$ dla dowolnego j.
(i) $\Longrightarrow$ (v): $V \ni S_k(f) \longrightarrow f \in \overline{V}$.
(v) $\Longrightarrow$ (i): Przypuśćmy, że $V \supset V_{k_\nu} \ni f_\nu \longrightarrow f$. Wtedy

$$\|f - S_{k_\nu}(f)\| = \operatorname{dist}(f, V_{k_\nu}) \leqslant \|f - f_\nu\| \longrightarrow 0.$$

---

(5) Friedrich Bessel (1784–1846).
(6) Marc–Antoine Parseval (1755–1836).

Ponieważ ciąg $(\|f - S_k(f)\|)_{k=0}^{\infty}$ jest monotoniczny (7), zatem $\|f - S_k(f)\| \longrightarrow 0$, a stąd $\|f - S(f)\| = 0$, czyli $S(f) = f$. □

Definicja 8.4.6. Jeżeli jest spełniony którykolwiek z równoważnych warunków z Twierdzenia 8.4.5, to mówimy, że układ ortonormalny $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$ jest *zupełny*.

Twierdzenie 8.4.7. *Dla nieskończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ następujące warunki są równoważne:*

(i) *w $\mathcal{H}$ istnieje układ ortonormalny zupełny;*

(ii) *$\mathcal{H}$ jest przestrzenią* ośrodkową*, tzn. posiada przeliczalny podzbiór gęsty.*

Dowód. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Niech $(\varphi_j)_{j=0}^{\infty}$ będzie układem ortonormalnym zupełnym. Wtedy, na podstawie Twierdzenia 8.4.5, zbiór $A := \{\lambda_0\varphi_0 + \dots + \lambda_k\varphi_k : k \in \mathbb{N}_0,\ \lambda_0, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K} \cap (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})\}$ jest gęsty w $\mathcal{H}$ (i oczywiście przeliczalny).

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Wobec Obserwacji 8.4.2(c) wystarczy znaleźć układ liniowo niezależny $(\psi_j)_{j=0}^{\infty}$ taki, że przestrzeń $V := \bigcup_{k=0}^{\infty} (\mathbb{K}\psi_0 + \dots + \mathbb{K}\psi_k)$ jest gęsta w $\mathcal{H}$. Niech $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ będzie zbiorem przeliczalnym gęstym i niech $\psi_0 := a_{k_0}$ będzie pierwszym niezerowym wektorem w tym ciągu. Niech dalej $\psi_1 := a_{k_1}$ będzie pierwszym wektorem liniowo niezależnym z a_{k_0}. Jeżeli już określimy $\psi_j = a_{k_j}$ dla $j = 0, \dots, \ell$, to chcemy by $\psi_{\ell+1} := a_{k_{\ell+1}}$ był pierwszym wektorem liniowo niezależnym z $a_{k_0}, \dots, a_{k_\ell}$. Gdyby ta procedura się zacinała na pewnym ℓ, to wtedy $A \subset W := \mathbb{K}a_{k_0} + \dots + \mathbb{K}a_{k_\ell}$. Przestrzeń W, jako przestrzeń skończenie wymiarowa jest domknięta (zob. Wniosek 5.11.12). Wynika stąd, że $\mathcal{H} = \overline{A} = W$, a więc $\mathcal{H}$ musi być przestrzenią skończenie wymiarową; sprzeczność.

Tak więc nasza procedura daje liniowo niezależny układ $(\psi_j)_{j=0}^{\infty}$ taki, że $A \subset V$, gdzie V jest jak powyżej. W szczególności, $\mathcal{H} = \overline{A} = \overline{V}$. □

Obserwacja 8.4.8. Przypomnijmy raz jeszcze, że przestrzeń $\mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R})$ *nie* jest przestrzenią Hilberta i nie możemy dla niej skorzystać z Twierdzenia 8.4.7. Będzie do możliwe dla przestrzeni $L^2_{2\pi}(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : f|_{[-\pi,\pi]} \in L^2([-\pi,\pi]),\ \forall_{x\in\mathbb{R}} : f(x + 2\pi) = f(x)\}$, gdzie $L^2([-\pi,\pi])$ oznacza przestrzeń funkcji całkowalnych z kwadratem w sensie Lebesgue'a. Do tematu wrócimy w trakcie wykładu z Analizy Matematycznej 4.

8.5. Kryteria zbieżności jednostajnej

Twierdzenie 8.5.1 (Kryterium zbieżności jednostajnej)**.** *Niech $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ będzie taka, że $f|_{[-\pi,\pi]} \in \mathcal{C}'^1([-\pi,\pi])$. Wtedy $S_k(f;\cdot) \longrightarrow f$ jednostajnie na $\mathbb{R}$.*

Dowód. Wobec Kryterium Diniego wiemy, że $S_k(f;x) \longrightarrow f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Wystarczy więc pokazać, że ciąg $(S_k(f))_{k=0}^{\infty}$ jest zbieżny jednostajnie. Zastosujemy kryterium Weierstrassa i wykażemy, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)| + |b_n(f)| < +\infty.$$

Zauważmy, że $f' \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R})$. W szczególności, na podstawie nierówności Bessela, mamy:

$$\tfrac{1}{2}a_0^2(f') + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2(f') + b_n^2(f')) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'^2(t)\,dt.$$

Całkując przez części dostajemy: $a_n(f') = nb_n(f)$, $b_n(f') = -na_n(f)$, $n = 1, 2, \dots$ (8). Teraz, na podstawie nierówności Schwarza, mamy:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n(f)| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|b_n(f')| \leqslant \Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\Big)^{1/2}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2(f')\Big)^{1/2} < +\infty.$$

Zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n(f)|$ sprawdzamy analogicznie. □

---

(7) $\|f - S_{k+1}(f)\| = \operatorname{dist}(f, V_{k+1}) \leqslant \operatorname{dist}(f, V_k) = \|f - S_k(f)\|$.

(8) Dla przykładu: $a_n(f') = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}f(t)\cos nt|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt = nb_n(f)$.

Twierdzenie 8.5.2 (Kryterium zbieżności niemal jednostajnej)**.** *Niech $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ będzie funkcją okresową o okresie 2π, taką, że $f|_{[-\pi,\pi]}\in\mathcal{C}'^1([-\pi,\pi])$. Wtedy*

$$S_k(f;x)\longrightarrow\frac{f(x+)+f(x-)}{2},\quad x\in\mathbb{R}.$$

Ponadto, $S_k(f;\cdot)\longrightarrow f$ niemal jednostajnie w dowolnym przedziale otwartym, w którym f jest klasy $\mathcal{C}^1$.

Dowód. Przypomnijmy Przykład 8.2.6. Niech $h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ będzie funkcją okresową o okresie 2π taką, że

$$h(x)=\begin{cases}-x-\pi, & \text{jeżeli } -\pi\leqslant x<0\\ 0, & \text{jeżeli } x=0\\ -x+\pi, & \text{jeżeli } 0<x\leqslant\pi\end{cases}.$$

Wtedy

$$h(x)=S(h;x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},\quad x\in\mathbb{R}.$$

Ponadto, szereg jest zbieżny niemal jednostajnie na przedziale $(0,2\pi)$.

Bez zmiany szeregu Fouriera możemy zmodyfikować funkcję f tak, by

$$2f(x)=f(x+)+f(x-),\quad x\in\mathbb{R}.$$

Po takiej zmianie, pierwsza część tezy sprowadza się do udowodnienia, że

$$S_k(f;\cdot)\longrightarrow f \text{ punktowo na } \mathbb{R}.$$

Założenie, że f jest kawałkami klasy $\mathcal{C}^1$ gwarantuje, że w każdym punkcie $x\in\mathbb{R}$, spełniony jest warunek z kryterium Diniego, tzn. istnieje skończona granica

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{f(x+h)-f(x+)}{h}+\lim_{h\to 0+}\frac{f(x-h)-f(x-)}{h},$$

co daje zbieżność punktową.

Problemem jest zbieżność niemal jednostajna. Niech $-\pi=\xi_0<\dots<\xi_N=\pi$ będą punktami „osobliwymi" funkcji f, tzn. dla dowolnego $j\in\{1,\dots,N\}$ funkcja

$$[\xi_{j-1},\xi_j]\ni x\longmapsto\begin{cases}f(\xi_{j-1}+), & \text{jeżeli } x=\xi_{j-1}\\ f(x), & \text{jeżeli } \xi_{j-1}<x<\xi_j\\ f(\xi_j-), & \text{jeżeli } x=\xi_j\end{cases}$$

jest klasy $\mathcal{C}^1$. Niech

$$c_j:=\begin{cases}\frac14(f(\xi_j+)-f(\xi_j-)), & \text{jeżeli } j\in\{0,N\}\\ \frac12(f(\xi_j+)-f(\xi_j-)), & \text{jeżeli } j=1,\dots,N-1\end{cases}.$$

Odnotujmy, że $c_0=c_N$. Zdefiniujmy

$$g(x):=f(x)-\frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{N}c_jh(x-\xi_j),\quad x\in\mathbb{R}.$$

Jest to oczywiście funkcja okresowa o okresie 2π i kawałkami klasy $\mathcal{C}^1$ (o co najwyżej tych samych punktach osobliwych w $[-\pi,\pi]$). Pokażemy, że g jest ciągła.

Istotnie, dla $\ell\in\{0,N\}$ mamy:

$$g(\xi_\ell+)-g(\xi_\ell-)=4c_\ell-\frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{N}c_j\Big(h\big((\xi_\ell-\xi_j)+\big)-h\big((\xi_\ell-\xi_j)-\big)\Big)$$
$$=4c_\ell-2\sum_{\substack{j\in\{0,\dots,N\}:\\(\xi_\ell-\xi_j)/(2\pi)\in\mathbb{Z}}}c_j=4c_\ell-2c_\ell-2c_\ell=0,$$

zaś dla $\ell \in \{1, \dots, N-1\}$ mamy:

$$g(\xi_\ell+) - g(\xi_\ell-) = 2c_\ell - \frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{N} c_j\Big(h\big((\xi_\ell - \xi_j)+\big) - h\big((\xi_\ell - \xi_j)-\big)\Big) = 2c_\ell - 2c_\ell = 0.$$

Na podstawie Twierdzenia 8.5.1, $S_k(g,\cdot) \longrightarrow g$ jednostajnie na $\mathbb{R}$. Zauważmy, że

$$S_k(g;x) = S_k(f;x) - \frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{N} c_j S_k(h(\cdot - \xi_j);x), \quad k = 0,1,2,\dots.$$

Teraz pozostaje już tylko skorzystać z Przykładu 8.2.6, z którego wynika, że $S_k(h(\cdot-\xi_j);x) \longrightarrow h(x-\xi_j)$ niemal jednostajnie w każdym z przedziałów (ξ_{j-1},ξ_j), $j = 1,\dots,N$. □

8.6. Funkcje o wahaniu ograniczonym

Definicja 8.6.1. Dla dowolnej funkcji $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ zdefiniujmy

$$\mathbb{V}(f) = \mathbb{V}_{[a,b]}(f) := \sup\Big\{\sum_{j=1}^{N} |f(t_{j-1}) - f(t_j)| : N \in \mathbb{N},\ a = t_0 < \dots < t_N = b\Big\}.$$

Liczbę $\mathbb{V}(f) \in [0,+\infty]$ nazywamy *wahaniem* funkcji f na przedziale $[a,b]$. Jeżeli $\mathbb{V}(f) < +\infty$, to mówimy, że funkcja f ma *wahanie ograniczone*. Zbiór funkcji o wahaniu ograniczonym na przedziale $[a,b]$ oznaczamy przez $\mathcal{BV}([a,b])$.

Obserwacja 8.6.2 (Odwzorowania o wahaniu ograniczonym)**.** (a) $\mathbb{V}(\alpha f) = |\alpha|\mathbb{V}(f)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbb{V}(f+g) \leqslant \mathbb{V}(f) + \mathbb{V}(g)$. W szczególności, $\mathcal{BV}([a,b])$ jest przestrzenią wektorową.

(b) $\mathbb{V}_{[a,b]}(f) = \mathbb{V}_{[a,c]}(f) + \mathbb{V}_{[c,b]}(f)$, $a \leqslant c \leqslant b$. W szczególności, $\mathbb{V}_{[c,d]}(f) \leqslant \mathbb{V}_{[a,b]}(f)$ dla $[c,d] \subset [a,b]$.

(c) $|f(x') - f(x'')| \leqslant \mathbb{V}_{[x',x'']}(f)$, $x', x'' \in [a,b]$. W szczególności, $\mathcal{BV}([a,b]) \subset \mathcal{B}([a,b])$.

(d) Dla $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mamy: $\mathbb{V}(fg) \leqslant (\sup_{[a,b]}|f|)\cdot\mathbb{V}(g) + \mathbb{V}(f)\cdot(\sup_{[a,b]}|g|)$. W szczególności, $\mathcal{BV}([a,b])$ jest algebrą.

(e) Jeżeli $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest monotoniczna, to $\mathbb{V}(f) = |f(a) - f(b)|$. W szczególności, $f \in \mathcal{BV}([a,b])$.

(f) Jeżeli $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą L, to $\mathbb{V}(f) \leqslant L(b-a)$. Dla przykładu, jeżeli f jest różniczkowalna i ma ograniczoną pochodną, to $f \in \mathcal{BV}([a,b])$. W szczególności, $\mathcal{C}^1([a,b]) \subset \mathcal{BV}([a,b])$.

(g) Niech $f(x) := \begin{cases} x\sin\frac{\pi}{x}, & \text{jeżeli } 0 < x \leqslant 2 \\ 0, & \text{jeżeli } x = 0 \end{cases}$ (f jest oczywiście ciągła). Mamy:

$$\mathbb{V}_{[0,2]}(f) \geqslant \sum_{j=1}^{n-1}\Big|f\Big(\frac{2}{2n-2j+3}\Big) - f\Big(\frac{2}{2n-2j+1}\Big)\Big|$$
$$= \sum_{j=1}^{n-1}\Big(\frac{2}{2n-2j+3} + \frac{2}{2n-2j+1}\Big) \geqslant 4\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{2n-2j+3} \xrightarrow{\text{Ćwiczenie}} +\infty.$$

(h) Dla $f \in \mathcal{BV}([a,b]$ mamy: $f \in \mathcal{C}([a,b]) \iff$ funkcja $[a,b] \ni x \overset{\varphi}{\longmapsto} \mathbb{V}_{[a,x]}(f)$ jest ciągła.

Istotnie, implikacja ($\Longleftarrow$) wynika (b) i (c): $|f(x') - f(x'')| \leqslant |\mathbb{V}_{[a,x']}(f) - \mathbb{V}_{[a,x'']}(f)|$, $x', x'' \in [a,b]$.

Dla dowodu implikacji ($\Longrightarrow$) zauważmy, że, wobec (b), funkcja φ jest niemalejąca, a więc jej nieciągłość oznacza istnienie skoku, np. $\varphi(x) > \varphi(x_0) + \delta$ dla dowolnych $a \leqslant x_0 < x \leqslant b$, gdzie $\delta > 0$. Wobec (b) mamy: $\mathbb{V}_{[x_0,x]}(f) > \delta$, $x_0 < x$. W szczególności, $\mathbb{V}_{[x_0,b]}(f) > \delta$, co oznacza istnienie podziału $x_0 = t_0 < \dots < t_N = b$ takiego, że $\sum\limits_{j=1}^{N} |f(t_j) - f(t_{j-1})| > \delta$. Korzystając z ciągłości funkcji f wnioskujemy, że istnieje punkt $x_0 < x_1 < t_1$ taki, że $|f(x_1) - f(t_1)| + \sum\limits_{j=2}^{N} |f(t_j) - f(t_{j-1})| > \delta$, skąd wynika, że $\mathbb{V}_{[x_1,b]}(f) > \delta$. Powtarzając to samo rozumowanie dla przedziału $[x_0,x_1]$, wnioskujemy, że istnieje $x_0 < x_2 < x_1$ taki, że $\mathbb{V}_{[x_2,x_1]}(f) > \delta$. Po k krokach dostajemy ciąg $x_0 < x_k < \dots < x_1 < b$ taki, że $\mathbb{V}_{[x_j,x_{j-1}]}(f) > \delta$, $j = k,\dots,2$. Teraz, korzystając z (b), mamy:

$$\mathbb{V}_{[x_0,b]}(f) = \mathbb{V}_{[x_0,x_k]}(f) + \mathbb{V}_{[x_k,x_{k-1}]}(f) + \dots + \mathbb{V}_{[x_2,x_1]}(f) + \mathbb{V}_{[x_1,b]}(f) \geqslant (k+1)\delta \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty;$$

sprzeczność.

W przypadku skoku: $\varphi(x) < \varphi(x_0) - \delta$ dla dowolnych $a \leqslant x < x_0 \leqslant b$, postępujemy analogicznie.

Twierdzenie 8.6.3 (Rozkład Jordana)**.** *Funkcja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ma wahanie ograniczone wtedy i tylko wtedy, gdy $f = f_1 - f_2$, gdzie $f_1, f_2 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ są niemalejące* (9)*. W szczególności, zbiór punktów nieciągłości funkcji o wahaniu ograniczonym może być co najwyżej przeliczalny oraz każda funkcja o wahaniu ograniczonym ma w każdym punkcie skończone granice jednostronne.*

Ponadto, jeżeli f jest ciągła, to funkcje f_1 i f_2 można wybrać w klasie funkcji ciągłych.

Dowód. Dostateczność warunku wynika z Obserwacji 8.6.2(a)(e).

Dla dowodu konieczności, niech $f_1(x) := \mathbb{V}_{[a,x]}(f) + |f(a)|$, $x \in [a,b]$. Na podstawie Obserwacji 8.6.2(b), funkcja f_1 jest niemalejąca. Ponadto, na podstawie Obserwacji 8.6.2(h), jeżeli f jest ciągła, to f_1 jest ciągła. Pozostaje wykazać, że funkcja $f_2 := f_1 - f$ jest niemalejąca (ponieważ $f_2(a) = f_1(a) - f(a) = |f(a)| - f(a) \geqslant 0$, będzie ona automatycznie nieujemna). Korzystając z Obserwacji 8.6.2(b)(c), dla $a \leqslant x' < x'' \leqslant b$, mamy:

$$f_2(x'') - f_2(x') = \mathbb{V}_{[a,x'']}(f) - \mathbb{V}_{[a,x']}(f) - (f(x'') - f(x')) = \mathbb{V}_{[x',x'']}(f) - (f(x'') - f(x')) \geqslant 0. \qquad \square$$

8.7. Kryterium Jordana

Twierdzenie 8.7.1 (Kryterium Jordana)**.** *Niech $f \in \mathcal{R}^1_{2\pi}(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}$ i $0 < \delta \leqslant \pi$ będą takie, że $\mathbb{V}_{[x_0-\delta,x_0+\delta]}(f) < +\infty$ oraz $2f(x_0) = f(x_0+) + f(x_0-)$* (10)*. Wtedy $S_k(f;x_0) \longrightarrow f(x_0)$.*

Lemat 8.7.2 (Twierdzenie o wartości średniej)**.** *Niech $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ będzie funkcją monotoniczną i niech $\psi \in \mathcal{R}([a,b])$. Wtedy istnieje punkt $\xi \in [a,b]$ taki, że*

$$\int_a^b \varphi(t)\psi(t)\,dt = \begin{cases} \varphi(b-)\int_\xi^b \psi(t)\,dt, & \text{jeżeli } \varphi \text{ jest rosnąca} \\ \varphi(a+)\int_a^\xi \psi(t)\,dt, & \text{jeżeli } \varphi \text{ jest malejąca} \end{cases}.$$

Dowód. Podstawienie $t := a + b - u$ redukuje przypadek malejący do rosnącego. Dla $n \in \mathbb{N}$, niech

$$t_{n,j} := a + \frac{b-a}{n}j, \quad j = 0, \dots, n.$$

Mamy $\int_a^b \varphi(t)\psi(t)\,dt = s_n^{(1)} + s_n^{(2)}$, gdzie

$$s_n^{(1)} := \sum_{j=1}^n \varphi(t_{n,j-1}) \int_{t_{n,j-1}}^{t_{n,j}} \psi(t)\,dt, \quad s_n^{(2)} := \sum_{j=1}^n \int_{t_{n,j-1}}^{t_{n,j}} \Big(\varphi(t) - \varphi(t_{n,j-1})\Big)\psi(t)\,dt.$$

Niech

$$g(x) := \int_x^b \psi(t)\,dt, \quad x \in [a,b].$$

Przypomnijmy (Twierdzenie 7.3.1), że g jest funkcją ciągłą. Niech $m := \min\limits_{[a,b]} g$, $M := \max\limits_{[a,b]} g$. Przekształcamy:

$$s_n^{(1)} = \sum_{j=1}^n \varphi(t_{n,j-1})\Big(g(t_{n,j-1}) - g(t_{n,j})\Big) = \varphi(a)g(a) + \sum_{j=1}^{n-1} g(t_{n,j})\Big(\varphi(t_{n,j}) - \varphi(t_{n,j-1})\Big).$$

Wynika stąd, że

$$m\varphi(t_{n,n-1}) \leqslant s_n^{(1)} \leqslant M\varphi(t_{n,n-1}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dalej mamy:

$$|s_n^{(2)}| \leqslant (\varphi(b) - \varphi(a)) \max_{j=1,\dots,n} \int_{t_{n,j-1}}^{t_{n,j}} |\psi(t)|dt \leqslant (\varphi(b) - \varphi(a))C\frac{b-a}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

gdzie $|\psi| \leqslant C = \text{const}$. Ostatecznie, przechodząc z n do $+\infty$ dostajemy:

$$m\varphi(b-) \leqslant \int_a^b \varphi(t)\psi(t)\,dt \leqslant M\varphi(b-).$$

Teraz wystarczy już tylko skorzystać z własności Darboux (dla funkcji g). $\square$

(9) Jest to tzw. *rozkład Jordana*. Oczywiście nie jest on jednoznaczny: $f = (f_1 + c) - (f_2 + c)$, $c \geqslant 0$.

(10) Przypomnijmy, że (wobec rozkładu Jordana) granice jednostronne istnieją.

Dowód Twierdzenia 8.7.1. Na podstawie rozkładu Jordana mamy:

$$f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0)=\varphi_1(t)-\varphi_2(t),$$

gdzie $\varphi_1,\varphi_2:[0,\delta]\longrightarrow\mathbb{R}_+$ są niemalejące. Ponieważ

$$\varphi_1(0+)-\varphi_2(0+)=f(x_0+)+f(x_0-)-2f(x_0)=0,$$

możemy założyć, że $\varphi_1(0+)=\varphi_2(0+)=0$ (zastępując φ_j przez $\varphi_j-\varphi_j(0+)$). Teraz, wobec zasady lokalizacji (Twierdzenie 8.2.3 zastosowane do funkcji $f-f(x_0)$), wystarczy pokazać, że dla dowolnej funkcji niemalejącej $\varphi:[0,\delta]\longrightarrow\mathbb{R}_+$ takiej, że $\varphi(0+)=0$ mamy:

$$\int_0^\delta\frac{\varphi(t)}{2}\frac{\sin\frac{(2k+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}dt\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Zauważmy, że

$$\int_0^\delta\frac{\varphi(t)}{2}\frac{\sin\frac{(2k+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}dt-\int_0^\delta\frac{\varphi(t)}{t}\sin\frac{(2k+1)t}{2}dt=\int_0^\delta\varphi(t)\Big(\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{t}\Big)\sin\frac{(2k+1)t}{2}dt.$$

Ponieważ $\lim\limits_{t\to0}(\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{t})=0$ (Ćwiczenie), zatem funkcja

$$(0,\delta]\ni t\overset{\psi}{\longmapsto}\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{t},\quad\psi(0):=0,$$

jest całkowalna (por. Obserwacja 7.6.2(e)). W takim razie, na podstawie twierdzenia Riemanna–Lebesgue'a, wystarczy pokazać, że

$$\int_0^\delta\frac{\varphi(t)}{t}\sin\frac{(2k+1)t}{2}dt\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Korzystając z Lematu 8.7.2, dla $0<\eta\leqslant\delta$, mamy:

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^\delta\frac{\varphi(t)}{t}\sin\frac{(2k+1)t}{2}dt\overset{\text{Tw.R-L}}{=}\lim_{k\to+\infty}\int_0^\eta\frac{\varphi(t)}{t}\sin\frac{(2k+1)t}{2}dt$$
$$\overset{\text{Lemat 8.7.2}}{=}\lim_{k\to+\infty}\varphi(\eta-)\int_{\xi(\eta,k)}^\eta\frac{\sin\frac{(2k+1)t}{2}}{t}dt,$$

gdzie $\xi(\eta,k)\in[0,\eta]$. Wobec założenia, że $\varphi(0+)=0$, pozostaje oszacować ostatnią całkę niezależnie od η i k. Mamy:

$$\Big|\int_{\xi(\eta,k)}^\eta\frac{\sin\frac{(2k+1)t}{2}}{t}dt\Big|=\Big|\int_{\frac{(2k+1)\xi(\eta,k)}{2}}^{\frac{(2k+1)\eta}{2}}\frac{\sin u}{u}du\Big|\leqslant C\Big(\frac{(2k+1)\xi(\eta,k)}{2}\Big)+C\Big(\frac{(2k+1)\eta}{2}\Big),$$

gdzie

$$C(x):=\Big|\int_1^x\frac{\sin u}{u}du\Big|,\quad x\geqslant0.$$

Korzystając jeszcze raz z Lematu 8.7.2 (z $\varphi(u):=\frac{1}{u}$), mamy:

$$C(x)=\Big|\int_1^\xi\sin u\,du\Big|\leqslant2,\quad x\geqslant1,$$

(gdzie $\xi=\xi(x)\in[1,x]$). Tak więc $C(x)\leqslant\max\{2,C(0)\}$, $x\geqslant0$. □

Przykład 8.7.3. Funkcja

$$f(x):=\begin{cases}\frac{1}{\ln\frac{|x|}{2\pi}}, & \text{jeżeli } 0<|x|\leqslant\pi\\ 0, & \text{jeżeli } x=0\end{cases}$$

(po okresowym przedłużeniu na $\mathbb{R}$) spełnia w punkcie $x_0:=0$ warunki kryterium Jordana (Ćwiczenie), ale nie spełnia warunków kryterium Diniego bowiem:

$$\int_0^\pi\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0)}{t}dt=2\int_0^\pi\frac{1}{t\ln\frac{t}{2\pi}}dt=2\int_{-\infty}^{-\ln2}\frac{du}{u}=-\infty.$$

Przykład 8.7.4. Funkcja

$$f(x) := \begin{cases} |x| \cos \frac{\pi}{2x}, & \text{jeżeli } 0 < |x| \leqslant \pi \\ 0, & \text{jeżeli } x = 0 \end{cases}$$

(po okresowym przedłużeniu na $\mathbb{R}$) spełnia w punkcie $x_0 := 0$ warunki kryterium Diniego (na podstawie Obserwacji 8.2.5(e)), ale nie spełnia warunków kryterium Jordana (Ćwiczenie — por. Obserwacja 8.6.2(g)).

8.8. Funkcje ciągłe o rozbieżnym szeregu Fouriera

Niech $\mathcal{E} := \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$. Przestrzeń ta wraz normą supremową

$$\|f\| := \sup\{|f(t)| : t \in \mathbb{R}\} = \sup\{|f(t)| : t \in [-\pi, \pi]\}$$

jest przestrzenią Banacha.

Dla dowolnego ustalonego $x_0 \in \mathbb{R}$ niech $\mathcal{E} \ni f \overset{L_k}{\longmapsto} S_k(f; x_0) \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Każdy operator L_k jest liniowy. Niech $\|L_k\| := \sup\{|L_k(f)| : \|f\| \leqslant 1\}$. Korzystając ze wzoru

$$S_k(f; x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t)}{2} \frac{\sin \frac{2k+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} dt,$$

dostajemy

$$\|L_k\| \leqslant \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{|\sin \frac{2k+1}{2} t|}{\sin \frac{t}{2}} dt =: d_k, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Lemat 8.8.1. (a) $\|L_k\| = d_k$, $k \in \mathbb{N}_0$.
(b) $\sup\{d_k : k \in \mathbb{N}_0\} = +\infty$.

Dowód. (a) Ustalmy $k \in \mathbb{N}_0$. Przypadek $k = 0$ jest oczywisty ($S_0(1; x_0) = 1 = d_0$). Niech więc $k \geqslant 1$. Skonstruujemy ciąg $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{E}$ taki, że $\|f_n\| \leqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$, oraz $L_k(f) \longrightarrow d_k$. Niech

$$g_0(t) := \operatorname{sgn}\Big(\frac{\sin \frac{(2k+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}\Big), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Najpierw konstruujemy (Ćwiczenie) ciąg parzystych funkcji ciągłych i okresowych $g_n : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, taki że $g_n \longrightarrow g_0$ punktowo oraz

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi g_n(t) \frac{\sin \frac{2k+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} dt \longrightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g_0(t) \frac{\sin \frac{2k+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} dt = d_k.$$

Następnie kładziemy $f_n(t) := g_n(t - x_0)$, $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $\frac{f_n(x_0+t)+f_n(x_0-t)}{2} = g_n(t)$, a zatem $L_k(f_n) \longrightarrow d_k$.

(b) Mamy

$$\begin{aligned} d_k &\geqslant \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{|\sin \frac{2k+1}{2} t|}{t} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{(2k+1)\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin u|}{u} du \geqslant \frac{2}{\pi} \int_0^{k\pi} \frac{|\sin u|}{u} du \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{s=1}^k \int_{(s-1)\pi}^{s\pi} \frac{|\sin u|}{u} du \geqslant \frac{2}{\pi} \sum_{s=1}^k \frac{1}{s\pi} \int_{(s-1)\pi}^{s\pi} |\sin u| \, du = \frac{4}{\pi^2} \sum_{s=1}^k \frac{1}{s} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty. \end{aligned}$$

□

Twierdzenie 8.8.2 (Szczególny przypadek twierdzenia Banacha–Steinhausa ([11]))**.** *Istnieje zbiór gęsty $A \subset \mathcal{E}$, typu $\mathcal{G}_\delta$ ([12]), taki że*

$$\sup\{|S_k(f; x_0))| : k \in \mathbb{N}_0\} = \sup\{|L_k(f)| : k \in \mathbb{N}_0\} = +\infty, \quad f \in A. \tag{$\dagger$}$$

([11]) Hugo Steinhaus (1887–1972).

([12]) Tzn. $A = \bigcap_{n=1}^\infty A_n$, gdzie A_n jest otwarty w $\mathcal{E}$, $n \in \mathbb{N}$.

Dowód. Niech $B_n := \{f \in \mathcal{E} : |L_k(f)| \leqslant n,\ k \geqslant 0\}$, $A_n := \mathcal{E} \setminus B_n$, $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Widać, że:

- B_n jest domknięty w $\mathcal{E}$ (Ćwiczenie),
- A jest typu $\mathcal{G}_\delta$,
- spełniony jest warunek (†).

Pozostaje sprawdzić, że A jest gęsty. Przypuśćmy, że $\overline{B}(f_0, r_0) \subset \mathcal{E} \setminus A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Ponieważ przestrzeń $\overline{B}(f_0, r_0)$ jest zupełna, zatem Twierdzenie Baire'a 5.11.28(ii) daje istnienie n_0 takiego, że $\operatorname{int}_{\overline{B}(f_0,r_0)}(B_{n_0} \cap \overline{B}(f_0, r_0)) \neq \varnothing$. Niech $\overline{B}(g_0, r) \subset B_{n_0}$. Wynika stąd, że dla dowolnego $k \geqslant 0$ mamy:

$$d_k = \|L_k\| = \sup\{\|L_k(f)\| : \|f\| = 1\} \leqslant \sup\left\{\frac{1}{r}(\|L_k(g_0)\| + \|L_k(g_0 + rf)\|) : \|f\| = 1\right\} \leqslant \frac{2n_0}{r},$$

co daje sprzeczność. □

Twierdzenie 8.8.3. *Dla dowolnego zbioru przeliczalnego $B \subset [-\pi, \pi]$ (13), istnieje zbiór gęsty $A \subset E$, typu $\mathcal{G}_\delta$, taki że*

$$\sup\{|S_k(f; x)| : k \geqslant 0\} = +\infty, \quad (f, x) \in A \times B.$$

W szczególności, dla dowolnej funkcji $f \in A$ jej szereg Fouriera $S(f; x)$ jest rozbieżny dla dowolnego $x \in B$.

Dowód. Wobec Twierdzenia 8.8.2 dla dowolnego punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ istnieje zbiór gęsty $A_{x_0} \subset \mathcal{E}$, typu $\mathcal{G}_\delta$, taki że $\sup\{|S_k(f; x_0)| : k \geqslant 0\} = +\infty$ dla $f \in A_{x_0}$. Zdefiniujmy $A := \bigcap_{x \in B} A_x$. Jest to oczywiście zbiór typu $\mathcal{G}_\delta$. Gęstość wynika z Twierdzenia Baire'a 5.11.28(i). □

(13) Odnotujmy, że zbiór B może być gęsty w $[-\pi, \pi]$.