Sprawy organizacyjne

Literatura

Wykład będzie w zasadzie „samowystarczalny”. Oto kilka pozycji przydatnej literatury uzupełniającej (wszystkie pozycje zostały wydane przez PWN, z wyjątkiem książek H. Cartana i H. Federera):

Andrzej Birkholc, *Analiza matematyczna.*
Henri Cartan, *Calcul différentiel. Formes différentielles*, Herman, Paris.
Ryszard Engelking, *Topologia ogólna.*
Herbert Federer, *Geometric measure theory*, Springer Verlag, Berlin.
Grigorij Michajłowicz Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. I–III.
Franciszek Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy.*
Witold Kołodziej, *Analiza matematyczna.*
Kazimierz Kuratowski, *Rachunek różniczkowy i całkowy.*
Stanisław Łojasiewicz, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych.*
Krzysztof Maurin, *Analiza*, t. I–II.
Walter Rudin, *Podstawy analizy matematycznej.*
Walter Rudin, *Analiza rzeczywista i zespolona.*
Laurent Schwartz, *Kurs analizy matematycznej*, t. I–II.

Program wykładu

(1) Pochodne kierunkowe.
(2) Różniczkowanie odwzorowań zmiennej wektorowej.
(3) Twierdzenia o przyrostach skończonych.
(4) Różniczki cząstkowe.
(5) Druga pochodna.
(6) Pochodne wyższych rzędów.
(7) Twierdzenie o różniczkowaniu szeregu wyraz po wyrazie.
(8) Wzór Taylora.
(9) Szereg Taylora.
(10) Rozkład jedności I.
(11) Twierdzenie Whitneya.
(12) Ekstrema lokalne.
(13) Odwzorowania analityczne.
(14) Dyfeomorfizmy.
(15) Twierdzenie o odwzorowaniu odwrotnym i twierdzenie o odwzorowaniu uwikłanym.
(16) Twierdzenie o rzędzie.
(17) Twierdzenie Morse’a.
(18) Rachunek wariacyjny II.
(19) Podrozmaitości lokalne.
(20) Twierdzenia o retrakcji.
(21) Ekstrema warunkowe.
(22) Orientacja.
(23) Całka Riemanna na kostce.
(24) Całka Riemanna na zbiorze mierzalnym w sensie Jordana.
(25) Własności całki Riemanna.

(26) Funkcje dane całką.
(27) Całki krzywoliniowe II.
(28) Rachunek wariacyjny III.
(29) Wzór Greena.

Kontynuacje

W przyszłym semestrze będą wykłady z Analizy Matematycznej 4T (60 godzin).

Zaliczanie ćwiczeń

Sposób zaliczania ćwiczeń ustala prowadzący ćwiczenia.

Egzaminy

Egzamin będzie ustny.

W ciągu całego semestru, aż do rozpoczęcia zimowej sesji egzaminacyjnej, można zdawać w trybie zdalnym egzaminy częściowe, po wcześniejszym umówieniu terminu przy pomocy emaila. Egzamin częściowy może obejmować dowolny fragment wykładu. Zdane fragmenty wykładu nie obowiązują podczas głównego egzaminu w sesji egzaminacyjnej.

ROZDZIAŁ 10

Różniczkowanie odwzorowań

10.1. Pochodne kierunkowe

Definicja 10.1.1. Niech E i F będą przestrzeniami unormowanymi nad $\mathbb{R}$, niech $\Omega \in \operatorname{top} E$ i niech $f : \Omega \longrightarrow F$. Dla $a \in \Omega$ i $\xi \in E$, niech $\Omega_{a,\xi} := \{t \in \mathbb{R} : a + t\xi \in \Omega\}$. Oczywiście $\Omega_{a,0} = \mathbb{R}$ i $0 \in \Omega_{a,\xi}$. Dla $\xi \neq 0$, zbiór $\Omega_{a,\xi}$ jest izomorficzny z $\Omega \cap (a + \mathbb{R}\xi)$. Łatwo widać, że $\Omega_{a,\xi} \in \operatorname{top} \mathbb{R}$. Niech

$$\Omega_{a,\xi} \ni t \overset{f_{a,\xi}}{\longmapsto} f(a + t\xi) \in F.$$

Oczywiście $f_{a,0} \equiv f(a)$, $f_{a,\xi}(0) = f(a)$. Dla $\xi \neq 0$, funkcję $f_{a,\xi}$ możemy utożsamiać z $f|_{\Omega \cap (a+\mathbb{R}\xi)}$.

Jeżeli $f'_{a,\xi}(0)$ istnieje, to mówimy że f ma *pochodną kierunkową w punkcie a w kierunku wektora ξ* i definiujemy

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(a) := f'_{a,\xi}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\xi) - f(a)}{t}.$$

Obserwacja 10.1.2. (a) $\frac{\partial f}{\partial 0}(a)$ zawsze istnieje i $\frac{\partial f}{\partial 0}(a) = 0$.

(b) $\alpha \in \mathbb{R}_*$ mamy

$$\frac{\partial f}{\partial(\alpha\xi)}(a) \text{ istnieje } \iff \frac{\partial f}{\partial \xi}(a) \text{ istnieje; ponadto, } \frac{\partial f}{\partial(\alpha\xi)}(a) = \alpha \frac{\partial f}{\partial \xi}(a).$$

(c) Dla $E = \mathbb{R}$ i $\xi \neq 0$ mamy: $\frac{\partial f}{\partial \xi}(a)$ istnieje $\iff f'(a)$ istnieje; ponadto, $\frac{\partial f}{\partial \xi}(a) = f'(a)\xi$.

(d) Ponieważ różniczkowanie „kierunkowe" sprowadza się do różniczkowania pewnej pomocniczej funkcji jednej zmiennej rzeczywistej, wiele reguł różniczkowania kierunkowego wynika natychmiast z odpowiednich własności różniczkowania funkcji jednej zmiennej rzeczywistej, np. (przy oczywistych założeniach o f i g) mamy:

- Niech $f, g : \Omega \longrightarrow F$, $a \in \Omega$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Jeżeli $\frac{\partial f}{\partial \xi}(a)$ i $\frac{\partial g}{\partial \xi}(a)$ istnieją, to $\frac{\partial(\alpha f + \beta g)}{\partial \xi}(a)$ istnieje oraz $\frac{\partial(\alpha f + \beta g)}{\partial \xi}(a) = \alpha \frac{\partial f}{\partial \xi}(a) + \beta \frac{\partial g}{\partial \xi}(a)$.
- Niech $f : \Omega \longrightarrow F$, $g : \Omega \longrightarrow G$, $a \in \Omega$. Jeżeli $\frac{\partial f}{\partial \xi}(a)$ i $\frac{\partial g}{\partial \xi}(a)$ istnieją oraz $B \in \mathcal{L}(F, G; H)$, to $\frac{\partial(B(f,g))}{\partial \xi}(a)$ istnieje oraz $\frac{\partial(B(f,g))}{\partial \xi}(a) = B\big(\frac{\partial f}{\partial \xi}(a), g(a)\big) + B\big(f(a), \frac{\partial g}{\partial \xi}(a)\big)$.

Przykład 10.1.3. Niech

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{x_1^4 x_2^2}{x_1^8 + x_2^4}, & \text{jeżeli } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{jeżeli } (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}.$$

Wtedy $\frac{\partial f}{\partial \xi}(0, 0) = 0$ dla dowolnego $\xi \in \mathbb{R}^2$. Istotnie, dla $\xi \neq (0, 0)$ mamy $\frac{f(t\xi) - f(0)}{t} = \frac{t\xi_1^4 \xi_2^2}{t^4 \xi_1^8 + \xi_2^4}$.

Z drugiej strony, $f(t, t^2) = \frac{1}{2}$, a więc w szczególności, f nie jest ciągła w $(0, 0)$.

Definicja 10.1.4. Mówimy, że f ma w punkcie a *różniczkę Gateaux (różniczkę słabą)* $\binom{1}{}$, jeżeli $\frac{\partial f}{\partial \xi}(a)$ istnieje dla dowolnego $\xi \in E$ oraz odwzorowanie $E \ni \xi \overset{\delta_a f}{\longmapsto} \frac{\partial f}{\partial \xi}(a) \in F$ jest liniowe $\binom{2}{}$ i ciągłe; odwzorowanie to nazywamy *różniczką Gateaux odwzorowania f w punkcie a*.

Obserwacja 10.1.5. (a) Przykład 10.1.3 pokazuje, że istnienie różniczki Gateaux nie implikuje nawet ciągłości odwzorowania w punkcie (o ile $\dim E \geqslant 2$).

$\binom{1}{}$ René Gateaux (1880–1914).

$\binom{2}{}$ Wiemy, że odwzorowanie to jest zawsze jednorodne. Zatem liniowość oznacza tu addytywność.

(b) Jeżeli $L : E \longrightarrow F$ jest operatorem liniowym, to $\frac{\partial L}{\partial \xi}(0) = L(\xi)$ dla dowolnego $\xi \in E$. Jeżeli L nie jest odwzorowaniem nieciągłym (np. takim jak w Obserwacji 4.8.2), to odwzorowanie $E \ni \xi \longmapsto \frac{\partial L}{\partial \xi}(a) \in F$ jest liniowe, ale nieciągłe.

(c) Dla $E = \mathbb{R}$ mamy: $\delta_a f$ istnieje $\iff f'(a)$ istnieje.

(d) Niech

$$f(x_1,x_2) := \begin{cases} \frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}, & \text{jeżeli } (x_1,x_2) \neq (0,0) \\ 0, & \text{jeżeli } (x_1,x_2) = (0,0) \end{cases}.$$

Wtedy $\frac{\partial f}{\partial (1,0)}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial (0,1)}(0,0) = 0$, ale $\frac{\partial f}{\partial ((1,0)+(0,1))}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial (1,1)}(0,0)$ nie istnieje.

(e) Niech

$$f(x_1,x_2) := \begin{cases} \frac{x_1x_2(x_1-x_2)}{x_1^2+x_2^2}, & \text{jeżeli } (x_1,x_2) \neq (0,0) \\ 0, & \text{jeżeli } (x_1,x_2) = (0,0) \end{cases}.$$

Wtedy $\frac{\partial f}{\partial \xi}(0,0) = f(\xi)$ dla dowolnego $\xi \in \mathbb{R}^2$, ale odwzorowanie $\mathbb{R}^2 \ni \xi \longmapsto \frac{\partial f}{\partial \xi}(0,0) \in \mathbb{R}$ nie jest liniowe.

(f) Jeżeli E jest skończenie wymiarowa, to dla istnienia różniczki Gateaux istotna jest tylko liniowość odwzorowania $\xi \longmapsto \frac{\partial f}{\partial \xi}(a)$.

(g) Jeżeli $F = F_1 \times \cdots \times F_N$, $f = (f_1, \ldots, f_N)$, to $\delta_a f$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $\delta_a f_1, \ldots, \delta_a f_N$ istnieją. Ponadto, $\delta_a f = (\delta_a f_1, \ldots, \delta_a f_N)$.

Definicja 10.1.6. (a) Jeżeli $E = \mathbb{R}^n$ i $(e_1, \ldots, e_n)$ jest bazą kanoniczną w $\mathbb{R}^n$, to $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) := \frac{\partial f}{\partial e_j}(a)$ nazywamy j-tą *pochodną cząstkową* (o ile istnieje).

(b) Jeżeli ponadto $F = \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$, to macierz

$$Jf(a) := \left[\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a)\right]_{\substack{j=1,\ldots,m \\ k=1,\ldots,n}} \in \mathbb{M}(m \times n; \mathbb{R})$$

(o ile wszystkie pochodne cząstkowe istnieją) nazywamy *macierzą Jacobiego odwzorowania f w punkcie a* [3].

(c) Jeżeli $m = 1$, to macierz Jacobiego nazywamy *gradientem* funkcji f w punkcie a:

$$\operatorname{grad} f(a) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right] \in \mathbb{M}(1 \times n; \mathbb{R}).$$

(d) Jeżeli $m = n$, to $\det Jf(a)$ nazywamy *jakobianem* odwzorowania f w punkcie a.

10.1.1. Jakobian rzędu d. Poniższy podrozdział ma charakter dygresji. To pojęcie będzie wykorzystywane w Analizie 4.

Definicja 10.1.7. Dla dowolnej macierzy $A \in \mathbb{M}(n \times m; \mathbb{R})$ i $1 \leqslant d \leqslant \min\{m,n\}$ niech

$$J_d(A) := \Big(\sum_{I \in \Lambda_d^n,\ J \in \Lambda_d^m} (\det A_{I,J})^2 \Big)^{1/2},$$

gdzie $A_{I,J}$ oznacza podmacierz macierzy A powstałą przez wybranie wierszy o numerach $i_1, \ldots, i_d$ i kolumn $j_1, \ldots, j_d$, zaś $\Lambda_r^s := \{(k_1, \ldots, k_r) : 1 \leqslant k_1 < \cdots < k_r \leqslant s\}$. Będziemy korzystać wyłącznie z przypadku, gdy $d = \min\{m,n\}$.

Jeżeli $\Omega \in \operatorname{top} \mathbb{R}^m$, $a \in \Omega$ i $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ jest odwzorowaniem takim, że $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a)$, $j = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, m$, istnieje, to przyjmujemy $J_d f(a) := J_d(Jf(a))$ i nazywamy *jakobianem rzędu d* odwzorowania f w punkcie a.

Zauważmy, że:

- dla $m = 1$ mamy $J_1 f(a) = \sqrt{\sum_{j=1}^n (f_j'(a))^2} = \| \operatorname{grad} f(a) \|$;
- dla $d = n = m$ mamy $J_m f(a) = |\det Jf(a)|$.

Twierdzenie 10.1.8 (Wzór Cauchy'ego–Bineta [4])**.** *Jeżeli $n \geqslant m$, $P \in \mathbb{M}(m \times n; \mathbb{C})$, $Q \in \mathbb{M}(n \times m; \mathbb{C})$, to*

$$\det(PQ) = \sum_{K \in \Lambda_m^n} (\det P_{(1,\ldots,m),K})(\det Q_{K,(1,\ldots,m)}).$$

---

[3] Carl Jacobi (1804–1851).

[4] Jacques Philippe Marie Binet (1786–1856).

Dowód.

$$\begin{aligned}\det(PQ) &= \sum_{\sigma\in S_m}(\operatorname{sgn}\sigma)\Big(\sum_{i_1=1}^{n}P_{1,i_1}Q_{i_1,\sigma(1)}\Big)\cdots\Big(\sum_{i_m=1}^{n}P_{m,i_m}Q_{i_m,\sigma(m)}\Big)\\ &= \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n}P_{1,i_1}\cdots P_{m,i_m}\sum_{\sigma\in S_m}(\operatorname{sgn}\sigma)Q_{i_1,\sigma(1)}\cdots Q_{i_m,\sigma(m)}\\ &= \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n}P_{1,i_1}\cdots P_{m,i_m}\det Q_{(i_1,\dots,i_m),(1,\dots,m)}\\ &= \sum_{K\in\Lambda_m^n}\sum_{\tau\in S_m}P_{1,k_{\tau(1)}}\cdots P_{m,k_{\tau(m)}}(\operatorname{sgn}\tau)\det Q_{(k_1,\dots,k_m),(1,\dots,m)}\\ &= \sum_{K\in\Lambda_m^n}(\det P_{(1,\dots,m),K})(\det Q_{K,(1,\dots,m)}).\end{aligned}$$

□

Twierdzenie 10.1.9. *Niech $A\in\mathbb{M}(n\times m;\mathbb{R})$. Wtedy:*

(a) *Jeżeli $n\geqslant m$, to $(J_m(A))^2=\det(A^tA)$.*

(b) *Jeżeli $n\leqslant m$, to $(J_n(A))^2=\det(AA^t)$.*

Dowód. Na podstawie Twierdzenia 10.1.8 mamy

$$\det(A^tA)=\sum_{K\in\Lambda_m^n}\det(A^t)_{(1,\dots,m),K}\det A_{K,(1,\dots,m)}=\sum_{K\in\Lambda_m^n}(\det A_{K,(1,\dots,m)})^2=(J_m(A))^2,$$

$$\det(AA^t)=\sum_{K\in\Lambda_n^m}\det A_{(1,\dots,n),K}\det(A^t)_{K,(1,\dots,n)}=\sum_{K\in\Lambda_n^m}(\det A_{(1,\dots,n),K})^2=(J_n(A))^2.$$

□

Wracamy do głównego wykładu.

Obserwacja 10.1.10. (a) Jeżeli $E=\mathbb{R}^n$, $F=\mathbb{R}^m$ i δ_af istnieje, to $Jf(a)$ jest reprezentacją macierzową δ_af, czyli

$$(\delta_af)(\xi)=\frac{\partial f}{\partial\xi}(a)=Jf(a).\xi,\quad \xi\in\mathbb{R}^n.$$

(b) W szczególności, jeżeli $m=1$, to

$$(\delta_af)(\xi)=\frac{\partial f}{\partial\xi}(a)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\xi_1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\xi_n=\operatorname{grad}f(a).\xi,\quad \xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n.$$

(c) Przykład 10.1.5(d) pokazuje, że może być tak, że $\operatorname{grad}f(a)$ ma sens, ale $\frac{\partial f}{\partial\xi}(a)$ nie istnieje dla pewnych ξ.

Definicja 10.1.11. Niech $\xi_1,\dots,\xi_k\in E$. Jeżeli pochodna kierunkowa $\frac{\partial^{k-1}f}{\partial\xi_{k-1}\dots\partial\xi_1}(x)$ rzędu $(k-1)$ w kierunku wektorów $\xi_1,\dots,\xi_{k-1}$ istnieje dla x z pewnego otoczenia punktu a, to definiujemy *pochodną kierunkową rzędu k w kierunku wektorów $\xi_1,\dots,\xi_k$* jako

$$\frac{\partial^k f}{\partial\xi_k\dots\partial\xi_1}(a)=\frac{\partial}{\partial\xi_k}\Big(\frac{\partial^{k-1}f}{\partial\xi_{k-1}\dots\partial\xi_1}\Big)(a).$$

W szczególności, dla $E=\mathbb{R}^n$ definiujemy n^k *pochodnych cząstkowych rzędu k*:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k}\dots\partial x_{i_1}}(a),\quad i_1,\dots,i_k\in\{1,\dots,n\}.$$

Obserwacja 10.1.12 (Ćwiczenie)**.**

$$\frac{\partial^{k+\ell}f}{\partial\xi_{k+\ell}\dots\partial\xi_1}(a)=\frac{\partial^\ell}{\partial\xi_{k+\ell}\dots\partial\xi_{k+1}}\Big(\frac{\partial^k f}{\partial\xi_k\dots\partial\xi_1}\Big)(a).$$

Przykład 10.1.13. Niech

$$f(x_1,x_2):=\begin{cases}\frac{x_1x_2(x_1^2-x_2^2)}{x_1^2+x_2^2}, & \text{jeżeli } (x_1,x_2)\neq(0,0)\\ 0, & \text{jeżeli } (x_1,x_2)=(0,0)\end{cases}.$$

Wtedy $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$ i $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)$ istnieją dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = 0$ oraz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0,0) = 1.$$

Istotnie, wobec związku $f(x_2,x_1) = -f(x_1,x_2)$, wystarczy pokazać, że $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0) = 1$. Dla $(x_1,x_2) \neq (0,0)$ mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) = \frac{(x_1(x_1^2-x_2^2)+x_1x_2(-2x_2))(x_1^2+x_2^2) - x_1x_2(x_1^2-x_2^2)2x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2}.$$

Wynika stąd, że $\frac{\partial f}{\partial x_2}(t,0) = t$ i w konsekwencji $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0)}{t} = 1$.

Twierdzenie 10.1.14 (Twierdzenie o równości pochodnych mieszanych)**.** *Załóżmy, że pochodne $\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}(x)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi}(x)$ istnieją dla x z otoczenia punktu a i są ciągłe w punkcie a. Wtedy $\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi}(a)$.*

Dowód. Możemy założyć, że $\xi, \eta \neq 0$, a następnie, że $\|\xi\| = \|\eta\| = 1$. Niech kula $B(a,3r) \subset \Omega$ będzie taka, że pochodne mieszane istnieją dla dowolnego punktu $x \in B(a,3r)$. Zdefiniujmy

$$\Phi(t) := f(a+t\xi+t\eta) - f(a+t\xi) - f(a+t\eta) + f(a) - t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}(a), \quad |t| \leqslant r.$$

Pokażemy, że $\Phi(t)/t^2 \longrightarrow 0$ przy $t \longrightarrow 0+$, co wobec symetrii wyrażenia $f(a+t\xi+t\eta) - f(a+t\xi) - f(a+t\eta) + f(a)$, da żądany wynik. Wystarczy pokazać, że

$$\|\Phi(t)\| \leqslant t^2 \sup\Big\{\Big\| \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}(a+x\xi+y\eta) - \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}(a)\Big\| : 0 \leqslant x,y \leqslant t\Big\}, \quad 0 \leqslant t \leqslant r. \tag{†}$$

Ustalmy $0 < t \leqslant r$ i niech

$$g(y) := f(a+t\xi+y\eta) - f(a+y\eta) - ty\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}(a), \quad 0 \leqslant y \leqslant r.$$

Mamy $\Phi(t) = g(t) - g(0)$. Ponadto,

$$g'(y) = \frac{\partial f}{\partial \eta}(a+t\xi+y\eta) - \frac{\partial f}{\partial \eta}(a+y\eta) - t\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}(a).$$

Na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych, mamy:

$$\|\Phi(t)\| \leqslant t \sup\{\|g'(y)\| : 0 \leqslant y \leqslant t\}. \tag{‡}$$

Ustalmy teraz $0 < y \leqslant t$ i niech

$$h(x) := \frac{\partial f}{\partial \eta}(a+x\xi+y\eta) - x\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}(a), \quad 0 \leqslant x \leqslant r.$$

Mamy $g'(y) = h(t) - h(0)$. Ponadto,

$$h'(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}(a+x\xi+y\eta) - \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}(a).$$

Na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych, dostajemy

$$\|g'(y)\| \leqslant t \sup\{\|h'(x)\| : 0 \leqslant x \leqslant t\},$$

co łącznie z (‡) daje (†). □

Twierdzenie 10.1.15 (Twierdzenie o równości pochodnych mieszanych)**.** *Niech $\xi_1, \dots, \xi_k \in E$ $(k \geqslant 2)$. Załóżmy, że dla dowolnej permutacji $\sigma \in S_k$:*

- *pochodna kierunkowa $\frac{\partial^k f}{\partial \xi_{\sigma(k)} \dots \partial \xi_{\sigma(1)}}(x)$ istnieje dla dowolnego $x \in \Omega$,*
- *funkcja $\Omega \ni x \longmapsto \frac{\partial^k f}{\partial \xi_{\sigma(k)} \dots \partial \xi_{\sigma(1)}}(x)$ jest ciągła w punkcie a.*
- *funkcja $\Omega \ni x \longmapsto \frac{\partial^\ell f}{\partial \xi_{\sigma(\ell)} \dots \partial \xi_{\sigma(1)}}(x)$ jest globalnie ciągła, $\ell = 2, \dots k-1$.*

Wtedy dla dowolnej permutacji $\sigma \in S_k$ mamy:

$$\frac{\partial^k f}{\partial \xi_{\sigma(k)} \dots \partial \xi_{\sigma(1)}}(a) = \frac{\partial^k f}{\partial \xi_k \dots \partial \xi_1}(a).$$

Dowód. Zastosujemy indukcję ze względu na k. Przypadek $k = 2$ to poprzednie twierdzenie. Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla $k-1 \geqslant 2$ i niech $\sigma \in S_k$.

- Przypadek $\sigma(j) = j$, $j = 1, \dots, k-2$, $\sigma(k-1) = k$, $\sigma(k) = k-1$ redukuje się do przypadku $k = 2$:

$$\frac{\partial^k f}{\partial \xi_{\sigma(k)} \dots \partial \xi_{\sigma(1)}}(a) = \frac{\partial^2}{\partial \xi_{k-1} \partial \xi_k}\Big(\frac{\partial^{k-2} f}{\partial \xi_{k-2} \dots \partial \xi_1}\Big)(a) = \frac{\partial^2}{\partial \xi_k \partial \xi_{k-1}}\Big(\frac{\partial^{k-2} f}{\partial \xi_{k-2} \dots \partial \xi_1}\Big)(a) = \frac{\partial^k f}{\partial \xi_k \dots \partial \xi_1}(a).$$

- Przypadek $\sigma(k) = k$ wynika z założenia indukcyjnego:

$$\frac{\partial^k f}{\partial \xi_{\sigma(k)} \dots \partial \xi_{\sigma(1)}}(a) = \frac{\partial}{\partial \xi_k}\Big(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial \xi_{\sigma(k-1)} \dots \partial \xi_{\sigma(1)}}\Big)(a) = \frac{\partial}{\partial \xi_k}\Big(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial \xi_{k-1} \dots \partial \xi_1}\Big)(a) = \frac{\partial^k f}{\partial \xi_k \dots \partial \xi_1}(a).$$

Pozostałe przypadki wynikają z faktu, iż każda permutacja jest złożeniem pewnej liczby permutacji powyższych dwóch typów. □

10.2. Różniczkowanie odwzorowań zmiennej wektorowej

Niech E i F będą przestrzeniami unormowanymi nad $\mathbb{R}$, niech $\Omega \in \operatorname{top} E$, $f : \Omega \longrightarrow F$ i niech $a \in \Omega$.

Definicja 10.2.1. Powiemy, że odwzorowanie f jest *różniczkowalne* w punkcie a (ma w punkcie a *różniczkę Frécheta (mocną)*), jeżeli istnieje odwzorowanie $L \in \mathcal{L}(E, F)$ takie, że

$$\begin{aligned} &f(a+h) = f(a) + L(h) + o(\|h\|) \text{ gdy } h \longrightarrow 0, \\ &\iff f(a+h) = f(a) + L(h) + \|h\|\alpha(h),\ h \in \Omega - a, \text{ przy czym } \lim_{h \longrightarrow 0} \alpha(h) = 0, \\ &\iff \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0. \end{aligned}$$

Odnotujmy, że oczywiście definicja ta nie zależy od wyboru normy w klasie norm równoważnych. Zbiór wszystkich odwzorowań $f : \Omega \longrightarrow F$ różniczkowalnych w punkcie a będziemy oznaczać roboczo przez $\mathcal{D}(\Omega, F; a)$.

Obserwacja 10.2.2. (a) Oczywiście każde odwzorowanie stałe jest różniczkowalne ($L = 0$).

(b) Jeżeli f jest różniczkowalne w punkcie a, to f jest ciągłe w punkcie a.

(c) Każde odwzorowanie liniowe i ciągłe $L \in \mathcal{L}(E, F)$ jest różniczkowalne w każdym punkcie $a \in E$. Istotnie, $L(a+h) = L(a) + L(h)$.

(d) Jeżeli f jest różniczkowalne w punkcie a, to f ma różniczkę Gateaux w punkcie a i $\delta_a f = L$, gdzie L jest odwzorowaniem występującym w definicji różniczkowalności w sensie Frécheta. Istotnie, dla dowolnego $\xi \in E$ mamy

$$f(a + t\xi) = f(a) + L(t\xi) + o(\|t\xi\|) = f(a) + tL(\xi) + o(t), \quad \text{gdy } t \longrightarrow 0.$$

(e) Jeżeli $E = \mathbb{R}^n$ i $f'(a)$ istnieje, to istnieją pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$ oraz $f'(a)(h) = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j$, $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$.

(f) Jak wiemy, istnieją odwzorowania nieciągłe mające różniczkę Gateaux, a więc różniczkowalność w sensie Frécheta jest istotnie mocniejsza.

(g) Jeżeli $E = \mathbb{R}^n$, to f jest różniczkowalne w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, F)$ oraz odwzorowania $g_1, \dots, g_n : \Omega - a \longrightarrow F$ takie, że

$$\lim_{h \to 0} g_j(h) = 0 = g_j(0),\ j = 1, \dots, n, \quad f(a+h) = f(a) + L(h) + \sum_{j=1}^{n} h_j g_j(h),\ h = (h_1, \dots, h_n) \in \Omega - a.$$

Istotnie, jest widoczne, że powyższy warunek jest wystarczający. Przypuśćmy teraz, że $f(a+h) = f(a) + L(h) + o(\|h\|)$, gdzie $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, F)$. Definiujemy

$$g_j(h) := \frac{h_j}{\|h\|^2}\Big(f(a+h) - f(a) - L(h)\Big), \quad h \in (\Omega - a)_*, \quad g_j(0) := 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Definicja 10.2.3. Z Obserwacji 10.2.2(d) wynika, że jeżeli f jest różniczkowalne w punkcie a, to odwzorowanie L występujące w definicji jest jednoznacznie wyznaczone. Oznaczamy je przez $f'(a)$ i nazywamy *pochodną (różniczką Frécheta)* odwzorowania f w punkcie a. Mamy więc

$$f'(a) \in \mathcal{L}(E, F), \qquad f'(a)(h) = (\delta_a f)(h) = \frac{\partial f}{\partial h}(a), \quad h \in E.$$

Obserwacja 10.2.4. (a) Jeżeli $E=\mathbb{R}$, to f jest różniczkowalne w sensie Frécheta w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(a)$ istnieje w zwykłym sensie. Ponadto, $f'(a)(h)=f'(a)h$ dla dowolnego $h\in\mathbb{R}$.

(b) Jeżeli $F=F_1\times\cdots\times F_N$, $f=(f_1,\dots,f_N)$, to

$$f\in\mathcal{D}(\Omega,F;a)\iff f_j\in\mathcal{D}(\Omega,F_j;a),\ j=1,\dots,N;\ \text{ponadto, } f'(a)=(f_1'(a),\dots,f_N'(a)).$$

(c) Jeżeli $f,g\in\mathcal{D}(\Omega,F;a)$, to $\mu f+\nu g\in\mathcal{D}(\Omega,F;a)$ oraz $(\mu f+\nu g)'(a)=\mu f'(a)+\nu g'(a)$, $\mu,\nu\in\mathbb{R}$. Innymi słowy, $\mathcal{D}(\Omega,F;a)$ jest $\mathbb{R}$–przestrzenią wektorową, a operator $\mathcal{D}(\Omega,F;a)\ni f\longmapsto f'(a)\in\mathcal{L}(E,F)$ jest $\mathbb{R}$–liniowy.

(d) Jeżeli $L\in\mathcal{L}(F,G)$ (gdzie G jest przestrzenią unormowaną) i $f\in\mathcal{D}(\Omega,F;a)$, to $L\circ f\in\mathcal{D}(\Omega,G;a)$ i $(L\circ f)'(a)=L\circ f'(a)$.

(e) Jeżeli $B\in\mathcal{L}(E,F;G)$, to $B'(a,b)(h,k)=B(h,b)+B(a,k)$, $(a,b),(h,k)\in E\times F$.

Istotnie, odwzorowanie $E\times F\ni(h,k)\overset{L}{\longmapsto}B(h,b)+B(a,k)\in G$ jest liniowe i ciągłe. Ponadto,

$$B(a+h,b+k)-B(a,b)-(B(h,b)+B(a,k))=B(h,k)\ \text{oraz}$$
$$\frac{\|B(h,k)\|}{\|h\|+\|k\|}\leqslant\frac{\|B\|\|h\|\|k\|}{\|h\|+\|k\|}\leqslant\|B\|(\|h\|+\|k\|).$$

Twierdzenie 10.2.5. (a) *Jeżeli $f\in\mathcal{D}(\Omega,F;a)$, $g\in\mathcal{D}(\Omega,G;a)$, $B\in\mathcal{L}(F,G;H)$, gdzie F, G i H są przestrzeniami unormowanymi, to $B(f,g)\in\mathcal{D}(\Omega,H;a)$ oraz*

$$(B(f,g))'(a)(h)=B(f'(a)(h),g(a))+B(f(a),g'(a)(h)),\quad h\in E.$$

(b) *W szczególności, jeżeli $f\in\mathcal{D}(\Omega;a)$ i $g\in\mathcal{D}(\Omega,F;a)$, to $f\cdot g\in\mathcal{D}(\Omega,F;a)$ oraz*

$$(f\cdot g)'(a)(h)=f'(a)(h)\cdot g(a)+f(a)\cdot g'(a)(h),\quad h\in E.$$

(c) *Jeżeli $(\mathcal{H},\langle\ ,\ \rangle)$ jest $\mathbb{R}$-przestrzenią unitarną (zob. Definicja 4.10.1), $f,g\in\mathcal{D}(\Omega,\mathcal{H};a)$, to $\langle f,g\rangle\in\mathcal{D}(\Omega;a)$ i $(\langle f,g\rangle)'(a)=\langle f'(a),g(a)\rangle+\langle f(a),g'(a)\rangle$.*

Dowód. (a) Operator $E\ni h\overset{L}{\longmapsto}B(f'(a)(h),g(a))+B(f(a),g'(a)(h))$ jest oczywiście liniowy i ciągły. Wobec dwuliniowości B, dostajemy:

$$\frac{B(f(a+h),g(a+h))-B(f(a),g(a))-L(h)}{\|h\|}=B\Big(\frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)(h)}{\|h\|},g(a+h)\Big)$$
$$+B\Big(f(a),\frac{g(a+h)-g(a)-g'(a)(h)}{\|h\|}\Big)+B\Big(\frac{f'(a)(h)}{\|h\|},g(a+h)-g(a)\Big)=A_1(h)+A_2(h)+A_3(h).$$

Ciągłość B oraz różniczkowalność f i g w punkcie a (w szczególności, ciągłość g w punkcie a) implikują, że $A_1(h)\longrightarrow 0$ i $A_2(h)\longrightarrow 0$ oraz $\|A_3(h)\|\leqslant\|B\|\|f'(a)\|\|g(a+h)-g(a)\|\longrightarrow 0$, gdy $h\longrightarrow 0$.

Oczywiście (a) $\Longrightarrow$ (b), (c). □

Twierdzenie 10.2.6 (Różniczkowanie złożenia)**.** *Niech G będzie przestrzenią unormowaną, niech $U\subset G$ będzie zbiorem otwartym, niech $\varphi:U\longrightarrow E$ i niech $t_0\in U$. Załóżmy, że $\varphi\in\mathcal{D}(U,E;t_0)$, $f\in\mathcal{D}(\Omega,F;\varphi(t_0))$ i $\varphi(U)\subset\Omega$. Wtedy $f\circ\varphi\in\mathcal{D}(U,F;t_0)$ oraz $(f\circ\varphi)'(t_0)=f'(\varphi(t_0))\circ\varphi'(t_0)$.*

Dowód. Niech $a:=\varphi(t_0)$, $B:=\varphi'(t_0)$, $A:=f'(a)$,

$$\varphi(t_0+t)=\varphi(t_0)+B(t)+\beta(t)\|t\|,\quad f(a+h)=f(a)+A(h)+\alpha(h)\|h\|,$$

gdzie $\lim\limits_{t\to0}\beta(t)=0$, $\lim\limits_{h\to0}\alpha(h)=0$. Oczywiście $A\circ B\in\mathcal{L}(G,F)$. Dla małych $t\in G$ niech

$$h(t):=\varphi(t_0+t)-\varphi(t_0)=B(t)+\beta(t)\|t\|.$$

Zauważmy, że $h(t)\longrightarrow 0$, gdy $t\longrightarrow 0$. Mamy:

$$\begin{aligned}(f\circ\varphi)(t_0+t)&=f(a+h(t))=f(a)+A(B(t)+\beta(t)\|t\|)+\alpha(h(t))\|B(t)+\beta(t)\|t\|\|\\&=(f\circ\varphi)(t_0)+A(B(t))+\gamma(t)\|t\|,\ \text{gdzie}\\\gamma(t)&:=A(\beta(t))+\alpha(h(t))\Big\|\frac{B(t)}{\|t\|}+\beta(t)\Big\|.\end{aligned}$$

Pozostaje jeszcze zauważyć, że $\gamma(t)\longrightarrow 0$, gdy $t\longrightarrow 0$. □

Obserwacja 10.2.7. Twierdzenie 10.2.5 wynika z Twierdzenia 10.2.6 i Obserwacji 10.2.4(b)(e). Istotnie,

$$\begin{aligned}(B(f,g))'(a)(h) &= (B\circ(f,g))'(a)(h) = (B'((f,g)(a))\circ((f,g)'(a)))(h)\\ &= B'(f(a),g(a))(f'(a)(h),g'(a)(h)) = B(f'(a)(h),g(a)) + B(f(a),g'(a)(h)).\end{aligned}$$

Twierdzenie 10.2.8 (Por. Twierdzenie 5.1.8)**.** *Niech $U\subset E$, $V\subset F$ będą zbiorami otwartymi i niech $f: U\longrightarrow V$ będzie odwzorowaniem bijektywnym, niech $g:=f^{-1}$ i niech $a\in U$ będzie taki, że $f'(a)$ istnieje. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) *$g'(f(a))$ istnieje;*

(ii) *$f'(a)\in \mathrm{Isom}(E,F)$ i g jest ciągłe w punkcie $f(a)$.*

Ponadto, $g'(f(a)) = (f'(a))^{-1}$.

Dowód. Niech $b:=f(a)$. Na podstawie Twierdzenia 10.2.6, z równości $g\circ f = \mathrm{id}_U$ i $f\circ g = \mathrm{id}_V$ wynika, że $g'(b)\circ f'(a) = \mathrm{id}_E$ i $f'(a)\circ g'(b) = \mathrm{id}_F$, czyli $f'(a)\in\mathrm{Isom}(E,F)$ i $g'(b) = (f'(a))^{-1}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Niech $A:=f'(a)$. Chcemy sprawdzić, że $g(f(a)+k) = g(f(a)) + A^{-1}(k) + \|k\|\beta(k)$, gdzie $\beta(k)\longrightarrow 0$ przy $k\longrightarrow 0$. Niech $B(f(a),r)\subset V$. Dla $\|k\|<r$ zdefiniujmy $h(k):=g(f(a)+k)-a$. Ciągłość odwzorowania g w punkcie $f(a)$ implikuje, że $h(k)\longrightarrow 0$ przy $k\longrightarrow 0$. Nasz problem sprowadza się więc do równości $h(k) = A^{-1}(f(a+h(k))-f(a)) + \|f(a+h(k))-f(a)\|\beta(k)$ i dalej, korzystając z równości $f(a+h) = f(a)+A(h)+\|h\|\alpha(h)$, $\alpha(h)\longrightarrow 0$ przy $h\longrightarrow 0$, mamy

$$0 = A^{-1}(\|h(k)\|\alpha(h(k))) + \|A(h(k)) + \|h(k)\|\alpha(h(k))\|\beta(k).$$

Wystarczy więc pokazać, że $\frac{A^{-1}(\|h\|\alpha(h))}{\|A(h)+\|h\|\alpha(h)\|}$ dąży do zera przy $h\longrightarrow 0$. Ponieważ operator A^{-1} jest ograniczony, wystarczy więc pokazać, że wyrażenie $\frac{\|h\|\alpha(h)}{\|A(h)+\|h\|\alpha(h)\|}$ dąży do zera przy $h\longrightarrow 0$. Ponieważ $\alpha(h)\longrightarrow 0$ przy $h\longrightarrow 0$, wystarczy oszacować od dołu wyrażenie $\|A(\frac{h}{\|h\|})+\alpha(h)\|$. Odnotujmy, że $\|h\| = \|A^{-1}(A(h))\|\leqslant \|A^{-1}\|\|A(h)\|$. Mamy więc $\|A(\frac{h}{\|h\|})+\alpha(h)\|\geqslant \frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|\alpha(h)\|$. □

10.3. Twierdzenia o przyrostach skończonych

Twierdzenie 10.3.1 (Twierdzenie o przyrostach skończonych)**.** *Załóżmy, że $D\subset E$ jest obszarem, $[a,b]\subset D$. Niech $f: D\longrightarrow F$ będzie odwzorowaniem ciągłym takim, że $f'(x)$ istnieje dla $x\in[a,b]\setminus S$, gdzie $S\subset[a,b]$ jest co najwyżej przeliczalny. Wtedy dla dowolnego $L\in\mathcal{L}(E,F)$ mamy:*

$$\|f(b)-f(a)-L(b-a)\|\leqslant \big(\sup\{\|f'(\xi)-L\| : \xi\in[a,b]\setminus S\}\big)\|b-a\|.$$

W szczególności, $\|f(b)-f(a)\|\leqslant \big(\sup\{\|f'(\xi)\| : \xi\in[a,b]\setminus S\}\big)\|b-a\|$.

Dowód. Zastępując odwzorowanie f przez $f-L$ redukujemy dowód do przypadku $L=0$. Niech

$$g(t):=f(a+t(b-a)),\ t\in[0,1],\quad S':=\{t\in[0,1] : a+t(b-a)\in S\}.$$

Wtedy $g:[0,1]\longrightarrow F$ jest odwzorowaniem ciągłym i $g'(t)$ istnieje dla $t\in[0,1]\setminus S'$. Ponadto, na podstawie twierdzenia o różniczkowaniu złożenia, $g'(t) = f'(a+t(b-a))(x-a)$. Stąd, na podstawie klasycznego twierdzenia o przyrostach skończonych (zob. Wniosek 5.4.4), mamy:

$$\begin{aligned}\|f(b)-f(a)\| = \|g(1)-g(0)\| &\leqslant \sup\{\|g'(t)\| : t\in[0,1]\setminus S'\}\\ &= \sup\{\|f'(a+t(b-a))(x-a)\| : t\in[0,1]\setminus S'\}\\ &\leqslant \sup\{\|f'(\xi)\| : \xi\in[a,b]\setminus S\}\|b-a\|.\end{aligned}$$

□

Jako natychmiastowy wniosek dostajemy

Twierdzenie 10.3.2 (Twierdzenie o przyrostach skończonych)**.** *Załóżmy, że $D\subset E$ jest obszarem gwiaździstym względem punktu a (tzn. $[a,x]\subset D$ dla dowolnego $x\in D$). Niech $f: D\longrightarrow F$ będzie odwzorowaniem ciągłym takim, że $f'(x)$ istnieje dla $x\in D\setminus S$, gdzie $S\subset D$ jest zbiorem takim, że $\#(S\cap[a,x])\leqslant\aleph_0$ dla dowolnego $x\in D$. Wtedy dla dowolnego $L\in\mathcal{L}(E,F)$ mamy:*

$$\|f(x)-f(a)-L(x-a)\|\leqslant \big(\sup\{\|f'(\xi)-L\| : \xi\in[a,x]\setminus S\}\big)\|x-a\|,\quad x\in D.$$

W szczególności, $\|f(x)-f(a)\|\leqslant \big(\sup\{\|f'(\xi)\| : \xi\in[a,x]\setminus S\}\big)\|x-a\|$, $x\in D$.

Twierdzenie 10.3.3. *Niech $D\subset E$ będzie dowolnym obszarem i niech $f: D\longrightarrow F$ będzie odwzorowaniem ciągłym takim, że $f'(x)=0$ dla $x\in D\setminus S$, gdzie $S\subset D$ jest zbiorem takim, że $\#(S\cap[a,b])\leqslant\aleph_0$ dla dowolnego odcinka $[a,b]\subset D$. Wtedy $f=\mathrm{const}$.*

Dowód. Na podstawie Twierdzenia 10.3.2 wnioskujemy, że dla dowolnej kuli $B(a,r) \subset D$ odwzorowanie $f|_{B(a,r)}$ jest stałe. Stąd, wobec spójności D, odwzorowanie f musi być globalnie stałe. □

Twierdzenie 10.3.4. *Niech $f : \Omega \longrightarrow F$ będzie funkcją ciągłą i różniczkowalną w $\Omega \setminus \{a\}$ dla pewnego $a \in \Omega$. Jeżeli $L := \lim\limits_{x\to a} f'(x)$ istnieje (granica w $\mathcal{L}(E,F)$), to $f'(a)$ istnieje i $f'(a) = L$.*

Dowód. Na podstawie Twierdzenia 10.3.2 mamy $f(a+h) = f(a)+L(h)+\alpha(h)\|h\|$, gdzie $\|\alpha(h)\| \leqslant \sup\{\|f'(\xi)-L\| : \xi \in (a,a+h]\} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$. □

Twierdzenie 10.3.5 (Twierdzenie o przyrostach skończonych)**.** *Niech $D \subset E$ będzie dowolnym obszarem i niech $f : D \longrightarrow F$ będzie odwzorowaniem ciągłym takim, że $f'(x)$ istnieje dla $x \in D \setminus S$, gdzie $S \subset D$ jest zbiorem takim, że $\#(S \cap [a,b]) \leqslant \aleph_0$ dla dowolnego odcinka $[a,b] \subset D$. Wtedy*

$$\|f(x)-f(y)\| \leqslant \big(\sup\{\|f'(\xi)\| : \xi \in D \setminus S\}\big)\varrho^i_D(x,y), \quad x,y \in D.$$

W szczególności, $\|f(x)-f(y)\| \leqslant \big(\sup\{\|f'(\xi)\| : \xi \in D \setminus S\}\big)\|a-b\|$ o ile $[a,b] \subset D$.

Przypomnijmy (zob. Obserwacja 4.6.8), że

$$\varrho^i_D(x,y) := \inf\Big\{\sum_{j=1}^N \|x_j - x_{j-1}\| : [x_0,\dots,x_n] \subset D,\ x_0 = x,\ x_N = y\Big\}, \quad x,y \in D.$$

Dowód. Na podstawie Twierdzenia 10.3.1 dla dowolnej łamanej $[x_0,\dots,x_N] \subset D$, $x_0 = x$, $x_N = y$, mamy

$$\begin{aligned}\|f(x)-f(y)\| &\leqslant \sum_{j=1}^N \|f(x_j)-f(x_{j-1})\| \leqslant \big(\sup\{\|f'(\xi)\| : \xi \in [x_{j-1},x_j] \setminus S\}\big)\|x_j - x_{j-1}\| \\ &\leqslant \big(\sup\{\|f'(\xi)\| : \xi \in D \setminus S\}\big)\sum_{j=1}^N \|x_j - x_{j-1})\|.\end{aligned}$$

□

10.4. Różniczki cząstkowe

Definicja 10.4.1. Jeżeli $E = E_1 \times \cdots \times E_N$, $a = (a_1,\dots,a_N)$, to definiujemy

$$\Omega_{a,j} := \{x_j \in E_j : (a_1,\dots,a_{j-1},x_j,a_{j+1},\dots,a_n) \in \Omega\},$$
$$f_{a,j}(x_j) := f(a_1,\dots,a_{j-1},x_j,a_{j+1},\dots,a_n), \quad x_j \in \Omega_{a,j},\ j = 1,\dots,N;$$

zauważmy, że $\Omega_{a,j}$ jest zbiorem otwartym w E_j. Powiemy, że f ma w punkcie a *różniczkę cząstkową w kierunku przestrzeni* E_j, jeżeli różniczka $f'_{a,j}(a_j) \in \mathcal{L}(E_j,F)$ istnieje. Oznaczamy ją wtedy przez $\frac{\partial f}{\partial E_j}(a)$.

Obserwacja 10.4.2. Jeżeli $\dim E_j = 1$ i $E_j = \mathbb{R}\xi$ (dla pewnego j), to $\frac{\partial f}{\partial E_j}(a)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{\partial f}{\partial \xi}(a)$ istnieje. Ponadto, $\frac{\partial f}{\partial E_j}(a)(h_j) = \frac{\partial f}{\partial h_j}(a)$, $h_j \in E_j$.

Twierdzenie 10.4.3. (a) *Jeżeli $f'(a)$ istnieje, to $\frac{\partial f}{\partial E_1}(a),\dots,\frac{\partial f}{\partial E_N}(a)$ istnieją oraz*

$$f'(a)(h) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial E_j}(a)(h_j), \quad h = (h_1,\dots,h_N) \in E_1 \times \cdots \times E_N, \text{ czyli}$$
$$\frac{\partial f}{\partial E_j}(a)(h_j) = f'(a)(0,\dots,0,h_j,0,\dots,0), \quad h_j \in E_j, \quad j = 1,\dots,N.$$

(b) *Niech $\varphi \in \mathcal{D}(U,E;t_0)$ i $f \in \mathcal{D}(\Omega,F;\varphi(t_0))$ będą takie, jak w Twierdzeniu 10.2.6 (o różniczkowaniu złożenia). Załóżmy, że $G = G_1 \times \cdots \times G_p$, $E = E_1 \times \cdots \times E_n$, $\varphi = (\varphi_1,\dots,\varphi_n)$. Wtedy:*

$$(f\circ\varphi)'(t_0)(X) = \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^n \Big(\frac{\partial f}{\partial E_j}(\varphi(t_0)) \circ \frac{\partial \varphi_j}{\partial G_k}(t_0)\Big)(X_k), \quad X = (X_1,\dots,X_p) \in G_1 \times \cdots \times G_p, \text{ czyli}$$
$$\frac{\partial (f\circ\varphi)}{\partial G_k}(t_0)(X_k) = \sum_{j=1}^n \Big(\frac{\partial f}{\partial E_j}(\varphi(t_0)) \circ \frac{\partial \varphi_j}{\partial G_k}(t_0)\Big)(X_k), \quad k = 1,\dots,p.$$

W szczególności, dla $G=\mathbb{R}^p$, $E=\mathbb{R}^n$, dostajemy

$$\frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial t_k}(t_0)=\sum_{j=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_j}(\varphi(t_0))\frac{\partial\varphi_j}{\partial t_k}(t_0),\quad k=1,\dots,p.$$

Jeżeli ponadto $F=\mathbb{R}^m$, to powyższy wzór ma następującą interpretację macierzową:

$$J(f\circ\varphi)(t_0)=Jf(\varphi(t_0)).J\varphi(t_0). \tag{*}$$

Obserwacja 10.4.4. Podkreślmy, że wzór (*) jest prawdziwy przy założeniu, że $\varphi'(t_0)$ i $f'(\varphi(t_0))$ istnieją. Jeżeli istnieją tylko pochodne cząstkowe (tak, że wszystkie występujące obiekty mają sens), to wzór nie musi zachodzić. Dla przykładu, niech $\varphi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2$, $\varphi(t):=(t,t^2)$ (odnotujmy, że φ jest klasy $\mathcal{C}^\infty$), $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(t,t^2):=0$, $f(t,0)=f(0,t):=t$, a poza tym f jest określona dowolnie, $t_0:=0$. Wtedy $\varphi(0)=(0,0)$, $f\circ\varphi\equiv 0$, $J\varphi(0)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $Jf(0,0)=[1,1]$, $Jf(0,0).J\varphi(0)=1$.

Dowód Twierdzenia 10.4.3. (a) Zauważmy, że $f_{a,j}=f\circ\psi_{a,j}$, gdzie

$$\Omega_{a,j}\ni x_j\overset{\psi_{a,j}}{\longmapsto}(a_1,\dots,a_{j-1},x_j,a_{j+1},\dots,a_n)\in E_1\times\dots\times E_N.$$

Wystarczy teraz skorzystać z twierdzenia o różniczkowaniu złożenia:

$$f'_{a,j}(a_j)(h_j)=(f\circ\psi_{a,j})'(a_j)(h_j)=(f'(\psi_{a,j}(a_j))\circ\psi'_{a,j}(a_j))(h_j)=f'(a)(0,\dots,0,h_j,0,\dots,0).$$

(b) Na podstawie (a) mamy:

$$\begin{aligned}(f\circ\varphi)'(t_0)(X)&=f'(\varphi(t_0))(\varphi'(t_0)(X))=f'(\varphi(t_0))\Big(\sum_{k=1}^p\frac{\partial\varphi}{\partial G_k}(t_0)(X_k)\Big)\\&=\sum_{j=1}^n\frac{\partial f}{\partial E_j}(\varphi(t_0))\Big(\sum_{k=1}^p\frac{\partial\varphi_j}{\partial G_k}(t_0)(X_k)\Big)=\sum_{k=1}^p\sum_{j=1}^n\Big(\frac{\partial f}{\partial E_j}(\varphi(t_0))\circ\frac{\partial\varphi_j}{\partial G_k}(t_0)\Big)(X_k).\quad\square\end{aligned}$$

Twierdzenie 10.4.5. *Załóżmy, że $E=E_1\times\dots\times E_N$ i $f:\Omega\longrightarrow F$ jest odwzorowaniem takim, że*

- *różniczka cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial E_j}(x)$ istnieje dla x z pewnego otoczenia punktu a i jest ciągła w punkcie a dla dowolnego $j\in\{1,\dots,N\}\setminus\{j_0\}$,*
- *$\frac{\partial f}{\partial E_{j_0}}(a)$ istnieje.*

Wtedy $f'(a)$ istnieje.

Dowód. Zastosujemy indukcję ze względu na N.

$N=2$. Możemy założyć, że $a=0$ oraz $j_0=2$. Wiemy, że jedynym kandydatem na $f'(0)$ jest odwzorowanie $E_1\times E_2\ni(h_1,h_2)\longmapsto\frac{\partial f}{\partial E_1}(0)(h_1)+\frac{\partial f}{\partial E_2}(0)(h_2)\in F$. Jest to oczywiście odwzorowanie liniowe ciągłe. Dla małych $h=(h_1,h_2)$ szacujemy korzystając z twierdzenia o przyrostach skończonych oraz definicji różniczki cząstkowej:

$$\begin{aligned}&\Big\|f(h_1,h_2)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial E_1}(0)(h_1)-\frac{\partial f}{\partial E_2}(0)(h_2)\Big\|\\&\qquad\leqslant\Big\|f(h_1,h_2)-f(0,h_2)-\frac{\partial f}{\partial E_1}(0)(h_1)\Big\|+\Big\|f(0,h_2)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial E_2}(0)(h_2)\Big\|\\&\qquad\leqslant\sup\Big\{\Big\|\frac{\partial f}{\partial E_1}(\xi_1,h_2)-\frac{\partial f}{\partial E_1}(0)\Big\|:\xi_1\in[0,h_1]\Big\}\,\|h_1\|+o(\|h_2\|)=o(\|(h_1,h_2)\|).\end{aligned}$$

$N-1\rightsquigarrow N$. Możemy założyć, że $j_0=N$. Wobec założenia indukcyjnego różniczka cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial(E_2\times\dots\times E_N)}(a)$ istnieje. Teraz wystarczy wykorzystać przypadek $N=2$. $\square$

Definicja 10.4.6. (a) Niech $\mathcal{D}(\Omega,F):=\bigcap\limits_{x\in\Omega}\mathcal{D}(\Omega,F;x)$. Oczywiście $\mathcal{D}(\Omega,F)$ jest $\mathbb{R}$–przestrzenią wektorową. Połóżmy $\mathcal{D}_b(\Omega,F):=\{f\in\mathcal{D}(\Omega,F)\cap\mathcal{B}(\Omega,F):f'\in\mathcal{B}(\Omega,\mathcal{L}(E,F))\}$. Widać, że $\mathcal{D}_b(\Omega,F)$ jest przestrzenią wektorową, zaś funkcja

$$\mathcal{D}_b(\Omega,F)\ni f\longmapsto\|f\|_{\Omega,1}:=\|f\|_\Omega+\|f'\|_\Omega=\sup\{\|f(x)\|:x\in\Omega\}+\sup\{\|f'(x)\|:x\in\Omega\}$$

jest normą na $\mathcal{D}_b(\Omega,F)$.

(b) Niech $\mathcal{C}^1(\Omega,F):=\{f\in\mathcal{D}(\Omega,F):f'\in\mathcal{C}(\Omega,\mathcal{L}(E,F))\}$. Połóżmy $\mathcal{C}^1_b(\Omega,F):=\mathcal{C}^1(\Omega,F)\cap\mathcal{D}_b(\Omega,F)$.

Zgodnie z ogólną umową, we wszystkich powyższych oznaczeniach pomijamy F jeżeli $F=\mathbb{R}$ i piszemy $\mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{D}_b(\Omega)$, $\mathcal{C}^1(\Omega)$, $\mathcal{C}^1_b(\Omega)$.

Twierdzenie 10.4.7. *Załóżmy, że odwzorowanie $f:\Omega\longrightarrow F$ ma w każdym punkcie $x\in\Omega$ różniczkę Gateaux $\delta_x f$.*

(a) *Jeżeli odwzorowanie $\Omega\ni x\longmapsto\delta_x f\in\mathcal{L}(E,F)$ jest ciągłe w punkcie $a\in\Omega$, to $f'(a)$ istnieje (i oczywiście $f'(a)=\delta_a f$).*

(b) *$f\in\mathcal{C}^1(\Omega,F)$ wtedy i tylko wtedy, gdy odwzorowanie $\Omega\ni x\longmapsto\delta_x f\in\mathcal{L}(E,F)$ jest ciągłe.*

Dowód. (a) Zauważmy, że dla małych $h\in E$ funkcja $[0,1]\ni t\overset{f_{a,h}}{\longmapsto}f(a+th)\in F$ jest różniczkowalna oraz $f'_{a,h}(t)=\frac{\partial f}{\partial h}(a+th)=\delta_{a+th}f(h)$. Teraz, na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych dla jednej zmiennej, mamy

$$\begin{aligned}&\|f(a+h)-f(a)-\delta_a f(h)\|=\|f_{a,h}(1)-f_{a,h}(0)-f'_{a,h}(0)(1-0)\|\\&\leqslant\sup\{\|f'_{a,h}(t)-f'_{a,h}(0)\|:t\in[0,1]\}=\sup\{\|\delta_{a+th}f(h)-\delta_a f(h)\|:t\in[0,1]\}\\&\leqslant\big(\sup\{\|\delta_{a+th}f-\delta_a f\|_{\mathcal{L}(E,F)}:t\in[0,1]\}\big)\|h\|=o(\|h\|).\end{aligned}$$

(b) wynika natychmiast z (a). □

Obserwacja 10.4.8. (a) Jeżeli $f\in\mathcal{C}^1(\Omega,F)$, $g\in\mathcal{C}^1(\Omega,G)$ i $B\in\mathcal{L}(F,G;H)$, to $B(f,g)\in\mathcal{C}^1(\Omega,H)$.

Istotnie, na podstawie Twierdzenia 10.2.5(a), mamy $(B(f,g))'=B(f',g)+B(f,g')$.

(b) Jeżeli $\mathcal{H}$ jest przestrzenią unitarną, $f\in\mathcal{C}^1(\Omega,\mathcal{H})$, $g\in\mathcal{C}^1(\Omega,\mathcal{H})$, to $\langle f,g\rangle\in\mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$.

(c) Jeżeli $\varphi\in\mathcal{C}^1(U,E)$, $f\in\mathcal{C}^1(\Omega,F)$ i $\varphi(U)\subset\Omega$, to $f\circ\varphi\in\mathcal{C}^1(U,F)$.

Istotnie, na podstawie Twierdzenia 10.2.6, mamy $(f\circ\varphi)'=(f'\circ\varphi)\circ\varphi'$.

(d) Jeżeli $E=E_1\times\cdots\times E_N$ i $\frac{\partial f}{\partial E_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial E_N}$ istnieją, to $f\in\mathcal{C}^1(\Omega,F)\iff\frac{\partial f}{\partial E_j}\in\mathcal{C}(\Omega,\mathcal{L}(E_j,F)),\ j=1,\ldots,N$. W szczególności, dla $E=\mathbb{R}^n$, jeżeli $\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}$ istnieją, to

$$f\in\mathcal{C}^1(\Omega,F)\iff\frac{\partial f}{\partial x_j}\in\mathcal{C}(\Omega,F),\ j=1,\ldots,n.$$

Istotnie, implikacja ($\Longrightarrow$) wynika z faktu, że (Twierdzenie 10.4.3) $\frac{\partial f}{\partial E_j}(x)(h_j)=f'(x)(0,\ldots,0,\underset{j}{h_j},0,\ldots,0)$, $x\in\Omega,\ h_j\in E_j$, a stąd $\big\|\frac{\partial f}{\partial E_j}(x)-\frac{\partial f}{\partial E_j}(x_0)\big\|\leqslant\|f'(x)-f'(x_0)\|$, $j=1,\ldots,N$, przy czym w $E_1\times\cdots\times E_N$ wybieramy normę maksimum.

Dla dowodu implikacji ($\Longleftarrow$) zauważmy najpierw, że na podstawie Twierdzenia 10.4.5 wiemy, że $f\in\mathcal{D}(\Omega,F)$. Dalej mamy

$$\begin{aligned}\|f'(x)-f'(x_0)\|&=\sup\Big\{\Big\|\sum_{j=1}^N\Big(\frac{\partial f}{\partial E_j}(x)(h_j)-\frac{\partial f}{\partial E_j}(x_0)(h_j)\Big)\Big\|:\|h_j\|\leqslant1,\ j=1,\ldots,N\Big\}\\&\leqslant\sum_{j=1}^N\Big\|\frac{\partial f}{\partial E_j}(x)-\frac{\partial f}{\partial E_j}(x_0)\Big\|\underset{x\to x_0}{\longrightarrow}0.\end{aligned}$$

Twierdzenie 10.4.9 (Twierdzenie o różniczkowaniu wyraz po wyrazie (por. Twierdzenia 5.7.1, 6.8.1, 6.8.2))**.** *Niech $D\subset E$ będzie ograniczonym obszarem ϱ^i_D-ograniczonym (np. ograniczonym obszarem gwiaździstym), niech $x_0\in D$ i niech F będzie przestrzenią Banacha.*

(a) *Załóżmy, że mamy rodzinę $(f_i)_{i\in I}\subset\mathcal{D}(D,F)$ taką, że:*

- *$(f'_i)_{i\in I}$ jest rodziną jednostajnie sumowalną na D,*
- *$(f_i(x_0))_{i\in I}$ jest rodziną sumowalną.*

Wtedy $(f_i)_{i\in I}$ jest rodziną jednostajnie sumowalną na D, funkcja $f:=\sum\limits_{i\in I}f_i$ jest różniczkowalna na D oraz $f'=\sum\limits_{i\in I}f'_i$, czyli $\big(\sum\limits_{i\in I}f_i\big)'=\sum\limits_{i\in I}f'_i$.

(b) *Załóżmy, że mamy ciąg $(f_n)_{n=0}^\infty\subset\mathcal{D}(D,F)$ taki, że:*

- *szereg $\sum\limits_{n=0}^\infty f'_n$ jest zbieżny jednostajnie na D,*

- *szereg* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)$ *jest zbieżny.*

Wtedy szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ *jest zbieżny jednostajnie na* D*, funkcja* $f := \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ *jest różniczkowalna na* D *oraz* $f' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n'$*, czyli* $\big(\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n\big)' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n'$.

(c) *Załóżmy, że mamy ciąg* $(f_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{D}(D,F)$ *taki, że:*

- *ciąg* $(f_n')_{n=0}^{\infty}$ *jest zbieżny jednostajnie na* D*,*
- *ciąg* $(f_n(x_0))_{n=0}^{\infty}$ *jest zbieżny.*

Wtedy ciąg $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ *jest zbieżny jednostajnie na* D*, funkcja* $f := \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ *jest różniczkowalna na* D *oraz* $f' = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'$*, czyli* $\big(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\big)' = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'$.

Dowód. (a) Niech $g_i := f_i' : D \longrightarrow \mathcal{L}(E,F),\ i \in I$. Niech $f_A := \sum\limits_{i\in A} f_i$, $A \in \mathcal{F}(I)$[5]. Zauważmy, że f_A jest funkcją różniczkowalną oraz $(f_A)' = g_A$. Weźmy $\varepsilon > 0$ i niech $C(\varepsilon) \in \mathcal{F}(I)$ będzie takie, że dla $A \in \mathcal{F}(I\setminus C(\varepsilon))$ mamy $\|f_A(x_0)\| \leqslant \varepsilon$ i $\|g_A(x)\| \leqslant \varepsilon$, $x \in D$. Na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych (Twierdzenie 10.3.5), dla $A \in \mathcal{F}(I \setminus C(\varepsilon))$ i $x \in D$ mamy:

$$\|f_A(x)\| \leqslant \|f_A(x_0)\| + \|f_A(x) - f_A(x_0)\| \leqslant \varepsilon + \big(\sup\{\|g_A(\xi)\| : \xi \in D\}\big)\varrho_D^i(x,x_0) \leqslant \varepsilon\big(1 + \sup_{x,y\in D} \varrho_D^i(x,y)\big).$$

Wynika stąd, na podstawie kryterium Cauchy'ego (Twierdzenie 6.2.6(iv)), że $(f_i)_{i\in I}$ jest rodziną jednostajnie sumowalną.

Ustalmy $a \in D$ i niech

$$h_i(x) := \begin{cases} \frac{f_i(x)-f_i(a)-f_i'(a)(x-a)}{\|x-a\|}, & \text{jeżeli } x \neq a \\ 0, & \text{jeżeli } x = a \end{cases}, \quad x \in D, \quad i \in I.$$

Zauważmy, że każde z odwzorowań h_i jest ciągłe w punkcie a. Rodzina $(h_i)_{i\in I}$ jest jednostajnie sumowalna na D. Istotnie, mamy

$$h_A(x) = \frac{f_A(x) - f_A(a) - g_A(a)(x-a)}{\|x-a\|}, \quad x \neq a,$$

a stąd, na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych (Twierdzenie 10.3.2), dla x bliskich a, dostajemy

$$\|h_A(x)\| \leqslant \sup\{\|g_A(\xi) - g_A(a)\| : \xi \in [x,a]\} \leqslant 2\sup\{\|g_A(\xi)\| : \xi \in D\},$$

co, na podstawie kryterium Cauchy'ego, daje jednostajną sumowalność.

Teraz, na podstawie własności rodzin jednostajnie sumowalnych (Twierdzenia 6.2.18, 6.2.6), mamy

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - g(a)(x-a)}{\|x-a\|} = \lim_{x\to a} \sum_{i\in I} h_i(x) = \sum_{i\in I} \lim_{x\to a} h_i(x) = 0,$$

co kończy dowód.

(b) Dowód jest analogiczny — Ćwiczenie.

(c) wynika z (b). □

Twierdzenie 10.4.10. *Załóżmy, że* F *jest przestrzenią Banacha. Niech* $D \subset E$ *będzie obszarem. Wtedy:*

(a) $(\mathcal{D}_b(D,F), \|\ \|_{D,1})$ *jest przestrzenią Banacha,*

(b) $(\mathcal{C}_b^1(D,F), \|\ \|_{D,1})$ *jest przestrzenią Banacha,*

Dowód. (a) Niech $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem Cauchy'ego w $(\mathcal{D}_b(D,F), \|\ \|_{D,1})$. Wtedy $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $\mathcal{B}(D,F)$, a $(f_n')_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $\mathcal{B}(D,\mathcal{L}(E,F))$. Ponieważ przestrzenie $\mathcal{B}(D,F)$ i $\mathcal{B}(D,\mathcal{L}(E,F))$ są zupełne (Obserwacja 4.6.10), zatem $f_n \longrightarrow g_0 \in \mathcal{B}(D,F)$ jednostajnie na D i $f_n' \longrightarrow g_1 \in \mathcal{B}(D,\mathcal{L}(E,F))$ jednostajnie na D. Teraz pozostaje już tylko skorzystać lokalnie z Twierdzenia 10.4.9, aby stwierdzić, że $g_0 \in \mathcal{D}(D,F)$ i $g_1 = g_0'$.

(b) Wobec (a), wystarczy tylko zauważyć, że $\mathcal{C}_b^1(D,F)$ jest podprzestrzenią domkniętą w $\mathcal{D}_b(D,F)$ (korzystamy z Twierdzenia 10.4.9). □

---

[5] Przypomnijmy, że $\mathcal{F}(I) = \{A \subset I : A \neq \varnothing,\ \#A \leqslant \aleph_0\}$.

10.5. Druga pochodna

Niech E i F będą przestrzeniami unormowanymi nad $\mathbb{R}$. Niech $\Omega \in \operatorname{top} E$, $f : \Omega \longrightarrow F$ i $a \in \Omega$. Będziemy chcieli zdefiniować pojęcie drugiej pochodnej funkcji f w punkcie a.

Definicja 10.5.1. Mówimy, że f ma *drugą pochodną (różniczkę Frécheta, różniczkę mocną) w punkcie* a, jeżeli $f'(x)$ istnieje dla $x \in V$, gdzie $V \subset \Omega$ jest pewnym otoczeniem otwartym punktu a, oraz odwzorowanie $f' : V \longrightarrow \mathcal{L}(E,F)$ ma pochodną w punkcie a. Definiujemy *drugą pochodną (drugą różniczkę Frécheta, drugą różniczkę mocną)* odwzorowania f w punkcie a:

$$f''(a) := (f')'(a) \in \mathcal{L}(E,\mathcal{L}(E,F)) \simeq \mathcal{L}^2(E,F);$$

aby uniknąć nieporozumień ustalamy identyfikację

$$\mathcal{L}(E,\mathcal{L}(E,F)) \ni A \longmapsto (E\times E \ni (\xi_1,\xi_2) \longmapsto A(\xi_1)(\xi_2) \in F) \in \mathcal{L}^2(E,F),$$
$$f''(a)(\xi_1,\xi_2) \simeq f''(a)(\xi_1)(\xi_2), \quad \xi_1,\xi_2 \in E.$$

Zbiór wszystkich odwzorowań $f : \Omega \longrightarrow F$, dla których $f''(a)$ istnieje oznaczamy przez $\mathcal{D}^2(\Omega,F;a)$.

Oczywiście, dla $E = \mathbb{R}$ powyższa definicja jest równoważna istnieniu $f''(a)$ (w sensie klasycznym) oraz $f''(a)(\xi_1,\xi_2) = f''(a)\xi_1\xi_2$, $\xi_1,\xi_2 \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 10.5.2. *Jeżeli $f''(a)$ istnieje, to dla dowolnego $\eta \in E$ odwzorowanie $x \longmapsto f'(x)(\eta)$ ma pochodną w punkcie a oraz $f''(a)(\xi,\eta) = (x \longmapsto f'(x)(\eta))'(a)(\xi)$, $\xi,\eta \in E$. W szczególności:*

- *dla dowolnych $\xi,\eta \in E$ pochodna kierunkowa $\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}(a)$ istnieje oraz $f''(a)(\xi,\eta) = \frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}(a)$;*
- *jeżeli $E = \mathbb{R}^n$, to wszystkie drugie pochodne cząstkowe $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(a)$, $i,j = 1,\dots,n$, istnieją oraz*

$$f''(a)(\xi,\eta) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(a)\xi_j\eta_i, \quad \xi = (\xi_1,\dots,\xi_n),\ \eta = (\eta_1,\dots,\eta_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Dowód. Wiemy, że $f'(a+\xi) = f'(a) + f''(a)(\xi) + \|\xi\|\alpha(\xi)$ (równość w $\mathcal{L}(E,F)$), gdzie $\lim\limits_{\xi\to 0}\alpha(\xi) = 0$. Stąd: $f'(a+\xi)(\eta) = f'(a)(\eta) + f''(a)(\xi,\eta) + \|\xi\|\alpha(\xi)(\eta)$, co daje żądany wynik. □

Obserwacja 10.5.3. Pojawia się naturalne pytanie, czy jeżeli $f \in \mathcal{D}(\Omega,F)$ i dla dowolnego $\eta \in E$ odwzorowanie $x \longmapsto f'(x)(\eta)$ ma pochodną w punkcie a, to $f''(a)$ istnieje.

Twierdzenie 10.5.4. *Jeżeli $E = \mathbb{R}^n$, to odpowiedź na pytanie z Obserwacji 10.5.3 jest pozytywna.*

Dowód. Wiemy, że $f'(x)(h) = \sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)h_i$, a stąd $f'(x)(\boldsymbol{e}_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, $i = 1,\dots,n$. Korzystając z naszych założeń wnioskujemy, że $(\frac{\partial f}{\partial x_i})'(a)$ istnieje. Ponieważ $f'(x) = \sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\operatorname{pr}_i$, gdzie $\operatorname{pr}_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ oznacza projekcję na i-tą oś, dostajemy istnienie $f''(a)$. □

Definicja 10.5.5. Niech $\mathcal{L}^2_s(E,F)$ oznacza zbiór wszystkich odwzorowań symetrycznych z $\mathcal{L}^2(E,F)$.

Odnotujmy, że $\mathcal{L}^2_s(E,F)$ jest podprzestrzenią domkniętą $\mathcal{L}^2(E,F)$. W szczególności, jeżeli F jest Banacha, to przestrzeń $\mathcal{L}^2_s(E,F)$ jest Banacha.

Twierdzenie 10.5.6 (Twierdzenie o symetrii drugiej różniczki)**.** *$f''(a) \in \mathcal{L}^2_s(E,F)$. W szczególności (por. Twierdzenie 10.5.2), dla $E = \mathbb{R}^n$ dostajemy $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)$, $i,j = 1,\dots,n$.*

Dowód. (Por. dowód Twierdzenia 10.1.14.) Ustalmy $\xi,\eta \in E$. Chcemy pokazać, że $f''(a)(\xi,\eta) = f''(a)(\eta,\xi)$. Możemy założyć, że $\|\xi\|{=}\|\eta\|{=}1$. Niech kula $B(a,3r) \subset \Omega$ będzie taka, że $f'(x)$ istnieje dla dowolnego punktu $x \in B(a,3r)$. Zdefiniujmy

$$\Phi(t) := f(a+t\xi+t\eta) - f(a+t\xi) - f(a+t\eta) + f(a) - t^2 f''(a)(\xi,\eta), \quad |t| \leqslant r.$$

Pokażemy, że $\Phi(t)/t^2 \longrightarrow 0$ przy $t \longrightarrow 0+$, co wobec symetrii wyrażenia

$$f(a+t\xi+t\eta) - f(a+t\xi) - f(a+t\eta) + f(a),$$

da żądany wynik. Ustalmy $0 < t \leqslant r$ i niech

$$g(y) := f(a+t\xi+y\eta) - f(a+y\eta) - ty f''(a)(\xi,\eta), \quad 0 \leqslant y \leqslant r.$$

Mamy $\Phi(t)=g(t)-g(0)$. Ponadto, $g'(y)=f'(a+t\xi+y\eta)(\eta)-f'(a+y\eta)(\eta)-tf''(a)(\xi,\eta)$. Na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych, mamy $\|\Phi(t)\|\leqslant t\sup\{\|g'(y)\|:0\leqslant y\leqslant t\}$. Niech

$$f'(a+h)=f'(a)+f''(a)(h)+\alpha(h)\|h\|,\quad \|h\|<3r$$

(równość w $\mathcal{L}(E,F)$), gdzie $\lim\limits_{h\to 0}\alpha(h)=0$. Wynika stąd, że dla $0\leqslant y\leqslant t$ mamy

$$\begin{aligned}g'(y)&=f'(a)(\eta)+f''(a)(t\xi+y\eta)(\eta)+\alpha(t\xi+y\eta)(\eta)\|t\xi+y\eta\|\\&\quad-f'(a)(\eta)-f''(a)(y\eta)(\eta)-\alpha(y\eta)(\eta)\|y\eta\|-tf''(a)(\xi)(\eta)\\&=\alpha(t\xi+y\eta)(\eta)\|t\xi+y\eta\|-\alpha(y\eta)(\eta)\|y\eta\|,\text{ a stąd}\\&\sup\{\|g'(y)\|:0\leqslant y\leqslant t\}\leqslant 3t\sup\{\|\alpha(\mu\xi+\nu\eta)\|:0\leqslant\mu,\nu\leqslant t\}.\end{aligned}$$

Ostatecznie, $\frac{\|\Phi(t)\|}{t^2}\leqslant 3\sup\{\|\alpha(\mu\xi+\nu\eta)\|:0\leqslant\mu,\nu\leqslant t\}\underset{t\to 0}{\longrightarrow}0$. □

Twierdzenie 10.5.7. *Załóżmy, że $f\in\mathcal{D}^2(\Omega,F;a)$, $g\in\mathcal{D}^2(\Omega,G;a)$, $B\in\mathcal{L}(F,G;H)$. Wtedy $B(f,g)\in\mathcal{D}^2(\Omega,H;a)$ oraz*

$$\begin{aligned}(B(f,g))''(a)(\xi,\eta)&=B(f''(a)(\xi,\eta),g(a))+B(f'(a)(\eta),g'(a)(\xi))\\&\quad+B(f'(a)(\xi),g'(a)(\eta))+B(f(a),g''(a)(\xi,\eta)),\quad(\xi,\eta)\in E\times E.\end{aligned}$$

W szczególności,

$$(B(f,g))''(a)(h)=B(f''(a)(h),g(a))+2B(f'(a)(h),g'(a)(h))+B(f(a),g''(a)(h)),\quad h\in E.$$

Oczywiście, tak jak poprzednio, możemy sformułować analogiczne wyniki dla mnożenia i iloczynu skalarnego — Ćwiczenie.

Dowód. Możemy założyć, że $f\in\mathcal{D}(\Omega,F)$, $g\in\mathcal{D}(\Omega,G)$. Wiemy, że $(B(f,g))'=B_1(f',g)+B_2(f,g')$, gdzie

$$\begin{aligned}B_1&:\mathcal{L}(E,F)\times G\longrightarrow\mathcal{L}(E,H),\quad B_1(L,y)(h):=B(L(h),y),\\B_2&:F\times\mathcal{L}(E,G)\longrightarrow\mathcal{L}(E,H),\quad B_2(x,L)(h):=B(x,L(h)).\end{aligned}$$

Widać, że są to operatory dwuliniowe i ciągłe. Teraz wystarczy już tylko skorzystać z Twierdzenia 10.2.5:

$$\begin{aligned}(B(f,g))''(a)(\xi)&=B_1(f''(a)(\xi),g(a))+B_1(f'(a),g'(a)(\xi))+B_2(f'(a)(\xi),g'(a))+B_2(f(a),g''(a)(\xi)),\\&\qquad\xi\in E\text{ (równość w }\mathcal{L}(E,\mathcal{L}(E,H))).\end{aligned}$$

Po podstawieniu argumentów dostajemy szukany wzór. □

Twierdzenie 10.5.8 (Różniczkowanie złożenia)**.** *Niech G będzie przestrzenią unormowaną, niech $U\subset G$ będzie zbiorem otwartym, niech $\varphi:U\longrightarrow E$ i niech $t_0\in U$. Załóżmy, że $\varphi\in\mathcal{D}^2(U,E;t_0)$, $f\in\mathcal{D}^2(\Omega,F;\varphi(t_0))$ i $\varphi(U)\subset\Omega$. Wtedy $f\circ\varphi\in\mathcal{D}^2(U,F;t_0)$ oraz*

$$(f\circ\varphi)''(t_0)(\xi,\eta)=f''(\varphi(t_0))(\varphi'(t_0)(\xi),\varphi'(t_0)(\eta))+f'(\varphi(t_0))(\varphi''(t_0)(\xi,\eta)),\quad\xi,\eta\in G.$$

W szczególności,

$$(f\circ\varphi)''(t_0)(h)=f''(\varphi(t_0))(\varphi'(t_0)(h))+f'(\varphi(t_0))(\varphi''(t_0)(h)),\quad h\in G.$$

Dowód. Możemy założyć, że $\varphi\in\mathcal{D}(U,E)$ i $f\in\mathcal{D}(\Omega,F)$. Wiemy, że $(f\circ\varphi)'=B(f'\circ\varphi,\varphi')$, gdzie

$$B:\mathcal{L}(E,F)\times\mathcal{L}(G,E)\longrightarrow\mathcal{L}(G,F),\quad B(P,Q):=P\circ Q.$$

Wiadomo, że B jest operatorem dwuliniowym i ciągłym. Stąd, na podstawie Twierdzenia 10.2.5, mamy:

$$\begin{aligned}(f\circ\varphi)''(t_0)(\xi)&=B((f'\circ\varphi)'(t_0)(\xi),\varphi'(t_0))+B(f'(\varphi(t_0)),\varphi''(t_0)(\xi))\\&=B(f''(\varphi(t_0))(\varphi'(t_0)(\xi)),\varphi'(t_0))+B(f'(\varphi(t_0)),\varphi''(t_0)(\xi))\text{ (równość w }\mathcal{L}(G,F)).\end{aligned}$$ □

Definicja 10.5.9 (Ćwiczenie)**.** W standardowy sposób definiujemy przestrzenie $\mathcal{D}^2(\Omega,F),\mathcal{D}^2_b(\Omega,F),\mathcal{C}^2(\Omega,F)$, $\mathcal{C}^2_b(\Omega,F)$ oraz normę $\|f\|_{\Omega,2}:=\|f\|_\Omega+\|f'\|_\Omega+\|f''\|_\Omega$, $f\in\mathcal{D}^2_b(\Omega,F)$.

Obserwacja 10.5.10 (Ćwiczenie)**.** (a) $f'\in\mathcal{C}^1(\Omega,\mathcal{L}(E,F))\iff f\in\mathcal{C}^2(\Omega,F)$.

(b) Jeżeli $f\in\mathcal{C}^2(\Omega,F)$, $g\in\mathcal{C}^2(\Omega,G)$ i $B\in\mathcal{L}(F,G;H)$, to $B(f,g)\in\mathcal{C}^2(\Omega,H)$.

(c) Jeżeli $\varphi\in\mathcal{C}^2(U,E)$ i $f\in\mathcal{C}^2(\Omega,F)$, to $f\circ\varphi\in\mathcal{C}^2(U,F)$.

(d) Teraz przychodzi kolej na uogólnienie twierdzenia o różniczkowaniu szeregu wyraz po wyrazie (por. Twierdzenie 6.8.1).

(e) Jeżeli F jest Banacha, to $\mathcal{D}^2_b(\Omega,F)$, $\mathcal{C}^2_b(\Omega,F)$ są Banacha.

Twierdzenie 10.5.11. (a) *Jeżeli* $W\in\mathcal{L}(E_1,\dots,E_k;F)$, *to* $W'(a)\in\mathcal{L}(E_1\times\cdots\times E_k,F)$,

$$W'(a)(h)=W(h_1,a_2,\dots,a_k)+W(a_1,h_2,a_3,\dots,a_k)+\cdots+W(a_1,\dots,a_{k-1},h_k),$$
$$a=(a_1,\dots,a_k),\ h=(h_1,\dots,h_k)\in E_1\times\cdots\times E_k.$$

W szczególności, $W'=W_1+\cdots+W_k$, *gdzie* $W_j\in\mathcal{L}(E_1,\dots,E_{j-1},E_{j+1},\dots,E_k;\mathcal{L}(E_j,F))$, $j=1,\dots,k$. *W konsekwencji,*

$$W''(a)(h^1,h^2)=\sum_{\substack{1\leqslant j_1<j_2\leqslant k\\ \sigma\in S_2}} W(a_1,\dots,a_{j_1-1},h^{\sigma(1)}_{j_1},a_{j_1+1},\dots,a_{j_2-1},h^{\sigma(2)}_{j_2},a_{j_2+1},\dots,a_k),$$
$$a=(a_1,\dots,a_k),\ h^j=(h^j_1,\dots,h^j_k)\in E_1\times\cdots\times E_k,\ j=1,2.$$

(b) *Jeżeli* $Q\in\mathcal{H}^k(E,F)$, *to* $Q'(a)(h)=k\widehat{Q}(a,\dots,a,h)$, $a,h\in E$. *W szczególności,* $Q'\in\mathcal{H}^{k-1}(E,\mathcal{L}(E,F))$. *W konsekwencji,* $Q''(a)(h,h)=k(k-1)\widehat{Q}(a,\dots,a,h,h)$, $a,h\in E$.

(c) *Jeżeli* $Q\in\mathcal{P}_k(E,F)$, *to* $Q'\in\mathcal{P}_{k-1}(E,\mathcal{L}(E,F))$.

Dowód. (a) — zob. dowód Obserwacji 10.2.4(e).

(b) $Q=\widehat{Q}\circ\pi$, gdzie $\pi:E\longrightarrow E^k$, $\pi(x):=(x,\dots,x)$. Stąd $Q'(a)=\widehat{Q}'(\pi(a))\circ\pi'(a)$ i możemy skorzystać z (a).

(c) wynika z (b). □

10.6. Pochodne wyższych rzędów

Definicja 10.6.1. Niech E i F będą przestrzeniami unormowanymi nad $\mathbb{R}$, niech $\Omega\in\mathrm{top}(E)$, $f:\Omega\longrightarrow F$, $a\in\Omega$ i załóżmy, że $f^{(k-1)}(x)\in\mathcal{L}^{k-1}(E,F)$ istnieje dla $x\in V$, gdzie V jest pewnym otoczeniem a (wiemy już co to oznacza dla $k=2,3$). Mamy więc odwzorowanie $f^{(k-1)}:V\longrightarrow\mathcal{L}^{k-1}(E,F)$. Definiujemy *$k$-tą pochodną ($k$-tą różniczkę Frécheta)* odwzorowania f w punkcie a:

$$f^{(k)}(a):=(f^{(k-1)})'(a)\in\mathcal{L}(E,\mathcal{L}^{k-1}(E,F))\simeq\mathcal{L}^k(E,F).$$

Aby uniknąć nieporozumień ustalamy identyfikację

$$\mathcal{L}(E,\mathcal{L}^{k-1}(E,F))\ni A\longmapsto\widehat{A}\in\mathcal{L}^k(E,F),\quad E\times E^{k-1}\ni(\xi,\eta)\overset{\widehat{A}}{\longmapsto}A(\xi)(\eta)\in F,\ \text{tzn.}$$
$$f^{(k)}(a)(\xi,\eta)\simeq f^{(k)}(a)(\xi)(\eta),\quad(\xi,\eta)\in E\times E^{k-1}.$$

Zbiór wszystkich odwzorowań $f:\Omega\longrightarrow F$, dla których $f^{(k)}(a)$ istnieje oznaczamy przez $\mathcal{D}^k(\Omega,F;a)$. Jak zwykle $\mathcal{D}^k(\Omega,F):=\bigcap\limits_{x\in\Omega}\mathcal{D}(\Omega,F;x)$.

Obserwacja 10.6.2 (Ćwiczenie, por. Twierdzenie 10.5.11)**.** (a) Jeżeli $W\in\mathcal{L}(E_1,\dots,E_k;F)$, to dla $1\leqslant\ell\leqslant k$ mamy

$$W^{(\ell)}(a)(h^1,\dots,h^\ell)=\sum_{\substack{1\leqslant j_1<\cdots<j_\ell\leqslant k\\ \sigma\in S_\ell}} W(a_1,\dots,a_{j_1-1},h^{\sigma(1)}_{j_1},a_{j_1+1},\dots,a_{j_\ell-1},h^{\sigma(\ell)}_{j_\ell},a_{j_\ell+1},\dots,a_k).$$

Ponadto, $W^{(\ell)}=0$ dla $\ell\geqslant k+1$.

(b) Jeżeli $Q\in\mathcal{H}^k(E,F)$, to dla $1\leqslant\ell\leqslant k$ mamy

$$Q^{(\ell)}(a)(\underbrace{h,\dots,h}_{\ell\times})=\ell!\binom{k}{\ell}\widehat{Q}(\underbrace{a,\dots,a}_{(k-\ell)\times},\underbrace{h,\dots,h}_{\ell\times}),\quad a,h\in E,\ \ell=0,\dots,k;$$

w szczególności, $Q^{(k)}(a)=k!Q$, $a\in E$, a stąd $Q^{(\ell)}=0$ dla $\ell\geqslant k+1$.

(c) Jeżeli $Q\in\mathcal{P}_k(E,F)$, to $Q^{(\ell)}=0$ dla $\ell\geqslant k+1$.

(d) Załóżmy, że $D\subset E$ jest obszarem i $f\in\mathcal{D}^k(D,F)$. Wtedy $f\in\mathcal{P}_{k-1}(E,F)\iff f^{(k)}\equiv 0$.

Twierdzenie 10.6.3. (a) *Jeżeli* $f^{(k)} \in \mathcal{D}^\ell(\Omega, \mathcal{L}^k(E,F); a)$, *to* $f \in \mathcal{D}^{k+\ell}(\Omega, F; a)$ *oraz* $(f^{(k)})^{(\ell)}(a) = f^{(k+\ell)}(a)$ *(po utożsamieniu* $\mathcal{L}^\ell(E, \mathcal{L}^k(E,F)) \simeq \mathcal{L}^{k+\ell}(E,F)$*).*

(b) *Jeżeli* $f \in \mathcal{D}^{k+\ell}(\Omega, F; a)$, *to dla dowolnych* $h_{\ell+1}, \dots, h_{k+\ell} \in E$ *odwzorowanie*

$$x \longmapsto f^{(k)}(x)(h_{\ell+1}, \dots, h_{k+\ell})$$

ma ℓ*-tą pochodną w punkcie* a *oraz*

$$f^{(k+\ell)}(a)(h_1, \dots, h_{k+\ell}) = (x \longmapsto f^{(k)}(x)(h_{\ell+1}, \dots, h_{k+\ell}))^{(\ell)}(a)(h_1, \dots, h_\ell), \quad h_1, \dots, h_\ell \in E.$$

(c) *Jeżeli* $f \in \mathcal{D}^k(\Omega, F; a)$, *to dla dowolnych* $h_1, \dots, h_k \in E$ *pochodna kierunkowa* $\frac{\partial^k f}{\partial h_1 \dots \partial h_k}(a)$ *istnieje oraz* $\frac{\partial^k f}{\partial h_1 \dots \partial h_k}(a) = f^{(k)}(a)(h_1, \dots, h_k)$.

(d) *Dla* $E = \mathbb{R}$ *mamy:* $f \in \mathcal{D}^k(\Omega, F; a)$ *(w sensie Frécheta) wtedy i tylko wtedy, gdy* $f^{(k)}(a)$ *istnieje w sensie klasycznym oraz* $f^{(k)}(a)(h_1, \dots, h_k) = f^{(k)}(a) h_1 \cdots h_k$, $h_1, \dots, h_k \in \mathbb{R}$.

(e) *Jeżeli* $E = \mathbb{R}^n$ *i* $f \in \mathcal{D}^k(\Omega, F; a)$, *to*

$$f^{(k)}(a)(h_1, \dots, h_k) = \sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a) h_{1,i_1} \cdots h_{k,i_k}, \quad h_j = (h_{j,1}, \dots, h_{j,n}) \in \mathbb{R}^n,\ j = 1, \dots, k.$$

Dowód. We wszystkich dowodach będziemy rozumować indukcyjnie.

(a) Dla $\ell = 1$ wystarczy skorzystać z definicji.

$\ell \rightsquigarrow \ell + 1$: $(f^{(k)})^{(\ell+1)}(a) = \big((f^{(k)})^{(\ell)}\big)'(a) = (f^{(k+\ell)})'(a) = f^{(k+\ell+1)}(a)$.

(b) $\ell = 1$ (por. Twierdzenie 10.5.2): Wiemy, że

$$f^{(k)}(a + h_1) = f^{(k)}(a) + f^{(k+1)}(a)(h_1) + o(\|h_1\|) \text{ przy } h_1 \longrightarrow 0 \text{ (równość w } \mathcal{L}^k(E,F)).$$

Podstawiając $h_2, \dots, h_{k+1}$ dostajemy:

$$f^{(k)}(a + h_1)(h_2, \dots, h_{k+1}) = f^{(k)}(a)(h_2, \dots, h_{k+1}) + f^{(k+1)}(a)(h_1, h_2, \dots, h_{k+1}) + o(\|h_1\|) \text{ przy } h_1 \longrightarrow 0,$$

co daje żądany wynik.

$\ell \rightsquigarrow \ell + 1$: Załóżmy, że $f \in \mathcal{D}^{k+\ell}(U, F)$ dla pewnego otoczenia U punktu a. Ustalmy $h_{\ell+2}, \dots, h_{k+\ell+1} \in E$. Na podstawie założenia indukcyjnego odwzorowanie $U \ni x \overset{g}{\longmapsto} f^{(k)}(x)(h_{\ell+2}, \dots, h_{k+\ell+1})$ jest ℓ–krotnie różniczkowalne w U oraz

$$g^{(\ell)}(x)(h_2, \dots, h_{\ell+1}) = f^{(k+\ell)}(x)(h_2, \dots, h_{k+\ell+1}), \quad x \in U,\ h_2, \dots, h_{\ell+1} \in E.$$

Z drugiej strony, ponieważ $f^{(k+\ell+1)}(a)$ istnieje, więc

$$f^{(k+\ell)}(a + h_1) = f^{(k+\ell)}(a) + f^{(k+\ell+1)}(a)(h_1) + o(\|h_1\|) \text{ przy } h_1 \longrightarrow 0 \text{ (równość w } \mathcal{L}^{k+\ell}(E,F)).$$

Podstawiając $h_{\ell+2}, \dots, h_{k+\ell+1}$, dostajemy

$$g^{(\ell)}(a + h_1) = g^{(\ell)}(a) + f^{(k+\ell+1)}(a)(h_1, \cdot, \dots, \cdot, h_{\ell+2}, \dots, h_{k+\ell+1}) + o(\|h_1\|)$$
$$\text{przy } h_1 \longrightarrow 0 \text{ (równość w } \mathcal{L}^\ell(E,F) \text{ po stosownym utożsamieniu).}$$

Wynika stąd, że $g^{(\ell+1)}(a)$ istnieje oraz $g^{(\ell+1)}(a) = f^{(k+\ell+1)}(a)(\cdot, \dots, \cdot, h_{\ell+2}, \dots, h_{k+\ell+1})$, co kończy dowód.

(c) Przypadek $k = 1$ jest oczywisty.

$k \rightsquigarrow k + 1$: Na podstawie (b) mamy

$$\frac{\partial^{k+1} f}{\partial h_1 \dots \partial h_{k+1}}(a) = \frac{\partial}{\partial h_1} \frac{\partial^k f}{\partial h_2 \dots \partial h_{k+1}}(a) = \frac{\partial}{\partial h_1}\Big(x \longmapsto f^{(k)}(x)(h_2, \dots, h_{k+1})\Big)(a)$$
$$= (x \longmapsto f^{(k)}(x)(h_2, \dots, h_{k+1}))'(a)(h_1) = f^{(k+1)}(a)(h_1, \dots, h_{k+1}).$$

(d) Przypadek $k = 1$ jest oczywisty.

$k \rightsquigarrow k + 1$: Na podstawie (b) mamy

$$f^{(k+1)}(a)(h_1, \dots, h_{k+1}) = (x \longmapsto f^{(k)}(x)(h_2, \dots, h_{k+1}))'(a)(h_1)$$
$$= (x \longmapsto f^{(k)}(x) h_2 \cdots h_{k+1})'(a)(h_1) = f^{(k+1)}(a) h_1 \cdots h_{k+1}.$$

(e) Ćwiczenie. □

Twierdzenie 10.6.4 (Twierdzenie o symetrii wyższych różniczek). *$f^{(k)}(a) \in \mathcal{L}^k_s(E,F)$. W szczególności, jeżeli $E=\mathbb{R}^n$, to*

$$f^{(k)}(a)(h) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n:\ |\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(a) h^\alpha, \quad h\in\mathbb{R}^n,$$

gdzie dla $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{N}_0^n$ i $h=(h_1,\dots,h_n)\in\mathbb{R}^n$: $h^\alpha := h_1^{\alpha_1}\cdots h_n^{\alpha_n}$ ($0^0:=1$),

$$D^\alpha f(a) := \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)^{\alpha_1}\circ\cdots\circ\Big(\frac{\partial}{\partial x_n}\Big)^{\alpha_n} f(a).$$

Zauważmy, że wobec symetrii różniczki, operator $\mathcal{D}^k(\Omega,F;a)\ni f\longmapsto D^\alpha f(a)$ jest poprawnie określony.

Dowód. Zastosujemy indukcję ze względu na k. Przypadek $k=2$ został rozwiązany w Twierdzeniu 10.5.6. Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla $k-1$ i niech σ będzie dowolną permutacją k elementową.

Przypadek $\sigma(1)=2, \sigma(2)=1, \sigma(j)=j$, $j=3,\dots,k$, redukuje się do przypadku $k=2$:

$$\begin{aligned} f^{(k)}(a)(h_2,h_1,h_3,\dots,h_k) &= (x\longmapsto f^{(k-2)}(x)(h_3,\dots,h_k))''(a)(h_2,h_1)\\ &= (x\longmapsto f^{(k-2)}(x)(h_3,\dots,h_k))''(a)(h_1,h_2) = f^{(k)}(a)(h_1,h_2,h_3,\dots,h_k). \end{aligned}$$

Przypadek $\sigma(1)=1$ wynika z założenia indukcyjnego:

$$\begin{aligned} f^{(k)}(a)(h_1,h_{\sigma(2)},\dots,h_{\sigma(k)}) &= (x\longmapsto f^{(k-1)}(x)(h_{\sigma(2)},\dots,h_{\sigma(k)}))'(a)(h_1)\\ &= (x\longmapsto f^{(k-1)}(x)(h_2,\dots,h_k))'(a)(h_1) = f^{(k)}(a)(h_1,h_2,\dots,h_k). \end{aligned}$$

Pozostałe przypadki wynikają z faktu, iż każda permutacja jest złożeniem pewnej liczby permutacji powyższych dwóch typów (por. dowód Twierdzenia 10.1.15). □

Twierdzenie 10.6.5 (Wzór Leibniza). *Niech $f\in\mathcal{D}^k(\Omega,F;a)$, $g\in\mathcal{D}^k(\Omega,G;a)$ i $B\in\mathcal{L}(F,G;H)$. Wtedy $B(f,g)\in\mathcal{D}^k(\Omega,H;a)$ oraz*

(†) $(B(f,g))^{(k)}(a)(h) = \sum\limits_{j=0}^k \binom{k}{j} B(f^{(j)}(a)(h), g^{(k-j)}(a)(h))$, $h\in E$;

(‡) $(B(f,g))^{(k)}(a)(h_1,\dots,h_k) = \sum\limits_{j=0}^k \sum\limits_{\sigma\in S_{j,k-j}} B\big(f^{(j)}(a)(h_{\sigma(1)},\dots,h_{\sigma(j)}), g^{(k-j)}(a)(h_{\sigma(j+1)},\dots,h_{\sigma(k)})\big)$, $h_1,\dots,h_k\in E$, *gdzie* $S_{j,k-j} = \{\sigma\in S_k : \sigma(1)<\dots<\sigma(j),\ \sigma(j+1)<\dots<\sigma(k)\}$ *(por. Obserwacja 9.1.6).*

Dowód. Rozumujemy indukcyjnie. Przypadek $k=1$ jest dobrze znany.

$k\rightsquigarrow k+1$: Wiemy, że $(B(f,g))' = B_1(f',g)+B_2(f,g')$, gdzie B_1 i B_2 są operatorami dwuliniowymi i ciągłymi takimi, jak w dowodzie Twierdzenia 10.5.7. W takim razie, na podstawie założenia indukcyjnego, $(B(f,g))'\in\mathcal{D}^k(\Omega,\mathcal{L}(E,H);a)$, a stąd $B(f,g)\in\mathcal{D}^{k+1}(\Omega,H;a)$. Indukcyjny dowód pierwszego z wzorów pozostawiamy jako Ćwiczenie.

Aby dostać (‡) możemy zastosować Obserwację 9.1.6 do odwzorowania

$$W(h_1,\dots,h_k) := \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} B\big(f^{(j)}(a)(h_1,\dots,h_j), g^{(k-j)}(a)(h_{j+1},\dots,h_k)\big),$$

przy $\beta_1:=j$, $\beta_2:=k-j$ — Ćwiczenie. □

Twierdzenie 10.6.6. *Niech G będzie przestrzenią unormowaną, niech $U\subset G$ będzie zbiorem otwartym, niech $\varphi: U\longrightarrow E$ i niech $t_0\in U$. Załóżmy, że $\varphi\in\mathcal{D}^k(U,E;t_0)$, $f\in\mathcal{D}^k(\Omega,F;\varphi(t_0))$ i $\varphi(U)\subset\Omega$. Wtedy $f\circ\varphi\in\mathcal{D}^k(U,F;t_0)$.*

Dowód. Przypadek $k=1$ jest dobrze znany.

$k\rightsquigarrow k+1$: Korzystamy ze wzoru $(f\circ\varphi)' = B(f'\circ\varphi,\varphi')$, gdzie B jest operatorem składania odwzorowań tak, jak w dowodzie Twierdzenia 10.5.8. Dalej rozumujemy standardowo. □

Definicja 10.6.7 (Ćwiczenie). W standardowy sposób definiujemy przestrzenie $\mathcal{D}^k(\Omega,F)$, $\mathcal{D}^k_b(\Omega,F)$, $\mathcal{C}^k(\Omega,F)$, $\mathcal{C}^k_b(\Omega,F)$ oraz normę $\|f\|_{\Omega,k} := \sum\limits_{j=0}^k \|f^{(j)}\|_\Omega$, $f\in\mathcal{D}^k_b(\Omega,F)$,

Obserwacja 10.6.8 (Ćwiczenie). (a) $f'\in\mathcal{C}^{k-1}(\Omega,\mathcal{L}(E,F)) \iff f\in\mathcal{C}^k(\Omega,F)$.

(b) Jeżeli $f \in \mathcal{C}^k(\Omega, F)$, $g \in \mathcal{C}^k(\Omega, G)$ i $B \in \mathcal{L}(F, G; H)$, to $B(f, g) \in \mathcal{C}^k(\Omega, H)$.
(c) Jeżeli $\varphi \in \mathcal{C}^k(U, E)$ i $f \in \mathcal{C}^k(\Omega, F)$, to $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^k(U, F)$.

Teraz przychodzi kolej na uogólnienie twierdzenia o różniczkowaniu szeregu wyraz po wyrazie (por. Twierdzenie 6.8.1).

Twierdzenie 10.6.9 (Twierdzenie o różniczkowaniu szeregu wyraz po wyrazie)**.** *Niech $D \subset E$ będzie obszarem takim, że ϱ_D^i jest funkcją ograniczoną (np. D jest ograniczonym obszarem gwiaździstym) i niech F będzie przestrzenią Banacha.*

(a) *Załóżmy, że mamy rodzinę $(f_i)_{i\in I} \subset \mathcal{D}^k(D, F)$ taką, że:*
- *$(f_i^{(k)})_{i\in I}$ jest rodziną jednostajnie sumowalną na D,*
- *dla dowolnego $j \in \{0, \dots, k-1\}$ istnieje punkt $c_j \in D$ taki, że rodzina $(f_i^{(j)}(c_j))_{i\in I}$ jest sumowalna.*

Wtedy dla dowolnego $j \in \{0, \dots, k-1\}$ rodzina $(f_i^{(j)})_{i\in I}$ jest jednostajnie sumowalna na D i jeżeli $g_j := \sum\limits_{i\in I} f_i^{(j)}$, to $g_0 \in \mathcal{D}^k(D, F)$ oraz $g_0^{(j)} = g_j$, $j = 1, \dots, k$, czyli $\big(\sum\limits_{i\in I} f_i\big)^{(j)} = \sum\limits_{i\in I} f_i^{(j)}$, $j = 1, \dots, k$.

(b) *Załóżmy, że ciąg $(f_n)_{n=0}^\infty \subset \mathcal{D}^k(D, F)$ jest taki, że:*
- *szereg $\sum\limits_{n=0}^\infty f_n^{(k)}$ jest zbieżny jednostajnie na D,*
- *dla dowolnego $j \in \{0, \dots, k-1\}$ istnieje punkt $c_j \in D$ taki, że szereg $\sum\limits_{n=0}^\infty f_n^{(j)}(c_j)$ jest zbieżny.*

Wtedy dla dowolnego $j \in \{0, \dots, k-1\}$ szereg $\sum\limits_{n=0}^\infty f_n^{(j)}$ jest zbieżny jednostajnie na D i jeżeli $g_j := \sum\limits_{n=0}^\infty f_n^{(j)}$, to $g_0 \in \mathcal{D}^k(D, F)$ oraz $g_0^{(j)} = g_j$, $j = 1, \dots, k$, czyli $\big(\sum\limits_{n=0}^\infty f_n\big)^{(j)} = \sum\limits_{n=0}^\infty f_n^{(j)}$, $j = 1, \dots, k$.

(c) *Załóżmy, że ciąg $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{D}^k(D, F)$ jest taki, że:*
- *ciąg $(f_n^{(k)})_{n=1}^\infty$ jest zbieżny jednostajnie na D,*
- *dla dowolnego $j \in \{0, \dots, k-1\}$ istnieje punkt $c_j \in D$ taki, że ciąg $(f_n^{(j)}(c_j))_{n=1}^\infty$ jest zbieżny.*

Wtedy dla dowolnego $j \in \{0, \dots, k-1\}$ ciąg $(f_n^{(j)})_{n=1}^\infty$ jest zbieżny jednostajnie na D i jeżeli $g_j := \lim\limits_{n\to+\infty} f_n^{(j)}$, to $g_0 \in \mathcal{D}^k(D, F)$ oraz $g_0^{(j)} = g_j$, $j = 1, \dots, k$, czyli $\big(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\big)^{(j)} = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n^{(j)}$, $j = 1, \dots, k$.

Dowód. Ćwiczenie. □

Twierdzenie 10.6.10. *Jeżeli F jest Banacha, to $\mathcal{D}_b^k(\Omega, F)$ i $\mathcal{C}_b^k(\Omega, F)$ są Banacha.*

Dowód. Ćwiczenie. □

10.7. Wzór Taylora

Niech E i F będą przestrzeniami unormowanymi nad $\mathbb{R}$, niech $\Omega \in \operatorname{top} E$, $f : \Omega \longrightarrow F$, $a \in \Omega$ i załóżmy, że $f \in \mathcal{D}^k(\Omega, F; a)$ (dla pewnego $k \in \mathbb{N}$).

Definicja 10.7.1. Definiujemy *k-tą resztę odwzorowania f w punkcie a*:

$$R_k(f, a, x) := f(x) - \Big(f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)\Big), \quad x \in \Omega.$$

Ponadto przyjmujemy $R_0(f, a, x) := f(x) - f(a)$.

Obserwacja 10.7.2. (a) $f(a+h) = f(a) + f'(a)(h) + \frac{1}{2}f''(a)(h) + \cdots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(h) + R_k(f, a, a+h)$, $h \in \Omega - a$.

(b) Dla $k \geqslant 2$, funkcja $R_k(f, a, \cdot)$ jest różniczkowalna w pewnym otoczeniu U punktu a oraz

$$R_k(f, a, \cdot)'(x) = R_{k-1}(f', a, x), \quad x \in U.$$

Istotnie, jeżeli $f \in \mathcal{D}(U, F)$, to na podstawie Obserwacji 10.6.2 mamy:

$$\begin{aligned} R_k(f, a, \cdot)'(x)(h) &= f'(x)(h) - \Big(f'(a)(h) + 2 \cdot \tfrac{1}{2}f''(a)(x-a, h) + \cdots + k \cdot \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a, \dots, x-a, h)\Big) \\ &= R_{k-1}(f', a, x)(h), \quad x \in U. \end{aligned}$$

Twierdzenie 10.7.3 (Wzór Taylora). (a) (Wzór Taylora z resztą Peano.) *Jeżeli $f^{(k)}(a)$ istnieje, to*

$$\lim_{h\to 0}\frac{R_k(f,a,a+h)}{\|h\|^k}=0.$$

(b) (Wzór Taylora dla funkcji klasy $\mathcal{C}^k$) *Jeżeli $f\in\mathcal{C}^k(\Omega,F)$, to dla dowolnego zbioru zwartego $K\subset\Omega$ mamy:*

$$\lim_{\delta\to 0}\sup\Big\{\frac{\|R_k(f,a,a+h)\|}{\|h\|^k}:a\in K,\ 0<\|h\|\leqslant\delta\Big\}=0.$$

(c) (Wzór Taylora dla funkcji klasy $\mathcal{D}^{k+1}$) *Załóżmy, że Ω jest gwiaździsty względem a, $f\in\mathcal{D}^{k+1}(\Omega,F)$ oraz $\|f^{(k+1)}(x)\|\leqslant M$, $x\in\Omega$. Wtedy*

$$\|R_k(f,a,a+h)\|\leqslant\frac{M\|h\|^{k+1}}{(k+1)!},\quad h\in\Omega-a,\quad k\in\mathbb{N}_0.$$

Dowód. We wszystkich przypadkach zastosujemy indukcję względem k (przy dowolnych pozostałych elementach).

(a) Przypadek $k=1$ jest oczywisty.

$k\rightsquigarrow k+1$: Na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych, dla małych $0\neq h\in\Omega-a$ mamy:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\|h\|^{k+1}}\|R_{k+1}(f,a,a+h)\|&=\frac{1}{\|h\|^{k+1}}\|R_{k+1}(f,a,a+h)-R_{k+1}(f,a,a)\|\\&\leqslant\frac{1}{\|h\|^k}\sup\{\|R_{k+1}(f,a,\cdot)'(x)\|:x\in[a,a+h]\}=\frac{1}{\|h\|^k}\sup\{\|R_k(f',a,a+\xi)\|:\xi\in[0,h]\}\\&\leqslant\sup\Big\{\frac{1}{\|\xi\|^k}\|R_k(f',a,a+\xi)\|:\xi\in(0,h]\Big\}\underset{h\to 0}{\longrightarrow}0.\end{aligned}$$

(b) Przypadek $k=1$ wynika z twierdzenia o przyrostach skończonych. Istotnie, dla $0<\delta<\operatorname{dist}(K,\partial\Omega)$ mamy:

$$\begin{aligned}&\sup\Big\{\frac{\|R_1(f,a,a+h)\|}{\|h\|}:a\in K,\ 0<\|h\|\leqslant\delta\Big\}\\&=\sup\Big\{\frac{\|f(a+h)-f(a)-f'(a)(h)\|}{\|h\|}:a\in K,\ 0<\|h\|\leqslant\delta\Big\}\\&\leqslant\sup\{\|f'(x)-f'(a)\|:a\in K,\ x\in[a,a+h],\ 0<\|h\|\leqslant\delta\}\underset{\delta\to 0}{\longrightarrow}0\end{aligned}$$

(ostatni fakt wynika z jednostajnej ciągłości funkcji f' na K — por. Twierdzenie 4.4.10).

$k\rightsquigarrow k+1$: Na podstawie dowodu (a), dla małych $\delta>0$, mamy:

$$\begin{aligned}&\sup\Big\{\frac{\|R_{k+1}(f,a,a+h)\|}{\|h\|^{k+1}}:a\in K,\ 0<\|h\|\leqslant\delta\Big\}\\&\qquad\leqslant\sup\Big\{\frac{\|R_k(f',a,a+\xi)\|}{\|\xi\|^k}:a\in K,\ 0<\|\xi\|\leqslant\delta\Big\}\underset{\delta\to 0}{\longrightarrow}0.\end{aligned}$$

(c) Przypadek $k=0$ wynika z twierdzenia o przyrostach skończonych.

$k\rightsquigarrow k+1$: Mamy $\|R_k(f',a,a+h)\|\leqslant\frac{M\|h\|^{k+1}}{(k+1)!}$, $h\in\Omega-a$. Ustalmy $h\in\Omega-a$ i niech

$$g(t):=R_{k+1}(f,a,a+th),\quad\varphi(t):=\frac{M\|h\|^{k+2}t^{k+2}}{(k+2)!},\quad t\in[0,1].$$

Wobec poprzedniej nierówności mamy

$$\|g'(t)\|=\|R_{k+1}(f,a,\cdot)'(a+th)(h)\|=\|R_k(f',a,a+th)(h)\|\leqslant\frac{M\|th\|^{k+1}}{(k+1)!}\|h\|=\varphi'(t),\quad t\in[0,1].$$

Stąd, na podstawie zwykłego twierdzenia o przyrostach skończonych,

$$\|R_{k+1}(f,a,a+h)\|=\|g(1)-g(0)\|\leqslant\varphi(1)-\varphi(0)=\frac{M\|h\|^{k+2}}{(k+2)!}.$$

□

Twierdzenie 10.7.4 (Jednoznaczność wzoru Taylora). *Jeżeli $f^{(k)}(a)$ istnieje, $Q = Q_0 + \cdots + Q_k \in \underline{\mathcal{P}}_k(E,F)$ oraz $f(a+h) = Q(h) + o(\|h\|^k)$, przy $\longrightarrow 0$, to $Q_j = \frac{1}{j!} f^{(j)}(a)$, $j = 0, \ldots, k$.*

Dowód. Na podstawie wzoru Taylora z resztą Peano, mamy:

$$f(a) + f'(a)(h) + \tfrac{1}{2} f''(a)(h) + \cdots + \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(h)$$
$$= Q_0(h) + Q_1(h) + Q_2(h) + \cdots + Q_k(h) + o(\|h\|^k), \quad \text{przy } h \longrightarrow 0.$$

Ustalmy $h \in E$. Zastępując w powyższym wzorze h przez th ($t \in \mathbb{R}$) dostajemy

$$f(a) + f'(a)(h)t + \tfrac{1}{2} f''(a)(h)t^2 + \cdots + \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(h)t^k$$
$$= Q_0(h) + Q_1(h)t + Q_2(h)t^2 + \cdots + Q_k(h)t^k + o(t^k), \quad \text{przy } t \longrightarrow 0,$$

skąd natychmiast wynika, że $Q_j(h) = \frac{1}{j!} f^{(j)}(a)(h)$, $j = 0, \ldots, k$ (por. dowód Twierdzenia 5.6.5). □

Obserwacja 10.7.5. Jeżeli $f : \Omega \longrightarrow F$ jest taka, że $f(a+h) = Q(h) + o(\|h\|^k)$, przy $\longrightarrow 0$, pewnego wielomianu $Q = Q_0 + \cdots + Q_k \in \mathcal{P}_k(E,F)$ ($k \geqslant 1$), to Q_j nazywamy *j-tą różniczką Peano odwzorowania f w punkcie a*, $j = 0, \ldots, k$. Oczywiście, wtedy $Q_0 = f(a)$, $f'(a)$ istnieje i $Q_1 = f'(a)$. Wiemy również, $f^{(j)}(a)$ dla $1 \leqslant j \leqslant k$ nie musi istnieć (Obserwacja 5.6.6).

Twierdzenie 10.7.6 (Wzór na k–tą pochodną złożenia). *Niech E, F, G będą przestrzeniami unormowanymi, niech $U \subset G$, $\Omega \subset E$ będą zbiorami otwartymi i niech $t_0 \in U$. Załóżmy, że $\varphi \in \mathcal{D}^k(U, E; t_0)$, $\varphi(U) \subset \Omega$, $f \in \mathcal{D}^k(\Omega, F; \varphi(t_0))$. Wtedy (por. Twierdzenie 5.6.12):*

$$(f \circ \varphi)^{(k)}(t_0)(\xi) = \sum_{\alpha \in \Pi_k} \frac{k!}{\alpha!} f^{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)}(\varphi(t_0)) \Big(\underbrace{\frac{\varphi'(t_0)(\xi)}{1!}}_{\alpha_1 \times}, \ldots, \underbrace{\frac{\varphi^{(k)}(t_0)(\xi)}{k!}}_{\alpha_k \times} \Big), \quad \xi \in G.$$

Dowód. Skorzystamy z Twierdzenia 10.7.4 (podobnie, jak dla jednej zmiennej). Przyjmijmy oznaczenia:

$$\varphi_j := \frac{1}{j!} \varphi^{(j)}(t_0),\ a := \varphi(t_0),\ f_j := \frac{1}{j!} f^{(j)}(a), \quad j = 0, \ldots, k.$$

Mamy: $f(a+h) = \sum\limits_{i=0}^{k} f_i(h) + \alpha(h)\|h\|^k$, $\varphi(t_0+\xi) = \sum\limits_{j=0}^{k} \varphi_j(\xi) + \beta(\xi)\|\xi\|^k$, gdzie $\lim\limits_{h \to 0} \alpha(h) = 0$, $\lim\limits_{\xi \to 0} \beta(\xi) = 0$. Korzystając z Twierdzenia 10.7.4 wystarczy wyznaczyć wielomian jednorodny stopnia k w rozwinięciu $(f \circ \varphi)(t_0 + \xi)$. Liczymy:

$$(f \circ \varphi)(t_0 + \xi) = \sum_{i=0}^{k} f_i\Big(\sum_{j=1}^{k} \varphi_j(\xi) + \beta(\xi)\|\xi\|^k \Big) + \alpha\big(\varphi(t_0+\xi) - \varphi(t_0)\big) \Big\| \sum_{j=1}^{k} \varphi_j(\xi) + \beta(\xi)\|\xi\|^k \Big\|^k$$
$$= \sum_{i=0}^{k} f_i\Big(\sum_{j=1}^{k} \varphi_j(\xi) \Big) + o(\|\xi\|^k) = \sum_{i=0}^{k} \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}_0 \alpha_1 + \cdots + \alpha_k = i} \frac{i!}{\alpha_1! \cdots \alpha_k!} f_i\Big(\underbrace{\varphi_1(\xi)}_{\alpha_1 \times}, \ldots, \underbrace{\varphi_k(\xi)}_{\alpha_k \times} \Big) + o(\|\xi\|^k)$$
$$= \sum_{\nu=0}^{k} \Big(\sum_{\substack{\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}_0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + k\alpha_k = \nu}} \frac{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)!}{\alpha_1! \cdots \alpha_k!} f_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_k} \Big(\underbrace{\varphi_1(\xi)}_{\alpha_1 \times}, \ldots, \underbrace{\varphi_k(\xi)}_{\alpha_k \times} \Big) + o(\|\xi\|^k).$$

□

10.8. Szereg Taylora

Definicja 10.8.1. Niech F będzie przestrzenią Banacha i niech $f : \Omega \longrightarrow F$. Załóżmy, że dla pewnego $a \in \Omega$ pochodna $f^{(k)}(a)$ istnieje dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$. Wtedy definiujemy *szereg Taylora funkcji f w punkcie a*

$$(T_a f)(x) := \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(a)(x-a);$$

$(T_a f)(a+h)$ jest szeregiem wielomianów jednorodnych zmiennej h.

Twierdzenie 10.8.2 (Borel, por. Twierdzenie 6.10.3)**.** *Niech $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ będzie rzeczywistą przestrzenią unitarną (np. $\mathbb{R}^n$ ze zwykłym iloczynem skalarnym), zaś F — przestrzenią Banacha. Wtedy, dla dowolnego ciągu wielomianów jednorodnych $Q_\nu\in\mathcal{H}^\nu(E,F)$, $\nu\in\mathbb{N}_0$, istnieje funkcja $f\in\mathcal{C}^\infty(E,F)$ taka, że*

$$T_0f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}Q_\nu(x),\ \textit{czyli}\ \frac{1}{\nu!}f^{(\nu)}(0)=Q_\nu,\ \nu\in\mathbb{N}_0.$$

Dowód. Na wstępie zauważmy, że

(*) wystarczy udowodnić, że dla dowolnego $N\in\mathbb{N}_0$ istnieje funkcja $g_N\in\mathcal{C}^\infty(E,F)\cap\mathcal{D}^N_b(E,F)$ taka, że $g_N=0$ w pewnym otoczeniu zera oraz $\|Q_{N+1}-g_N\|_{E,N}\leqslant\frac{1}{2^N}$ ((*) pozostaje prawdziwa dla dowolnej przestrzeni unormowanej E).

Istotnie, jeżeli g_N, $N\in\mathbb{N}_0$, są takie jak w (*), to definiujemy, $f:=Q_0+\sum\limits_{N=0}^{\infty}(Q_{N+1}-g_N)$. Szereg jest zbieżny normalnie w $\mathcal{C}^k(E,F)$ dla dowolnego k. W takim razie $f\in\mathcal{C}^\infty(E,F)$. Oczywiście, $f(0)=Q_0$.

Dla dowolnego ν szereg $\sum\limits_{N=0}^{\infty}(Q_{N+1}-g_N)^{(\nu)}$ jest zbieżny jednostajnie na E. Na podstawie twierdzenia o różniczkowaniu szeregu wyraz po wyrazie, wynika stąd w szczególności, że

$$f^{(\nu)}(0)=\sum_{N=0}^{\infty}(Q_{N+1}-g_N)^{(\nu)}(0)=\sum_{N=0}^{\infty}Q^{(\nu)}_{N+1}(0)=\nu!Q_\nu,\quad \nu\in\mathbb{N}\ \text{ por. Obserwacja 10.6.2(b).}$$

Teraz pokażemy, że dla znalezienia funkcji g_N wystarczy mieć funkcję $\varphi\in\mathcal{C}^\infty_b(E,[0,1])$ taką, że $\varphi(x)=0$ dla $\|x\|\leqslant 1/2$, $\varphi(x)=1$ dla $\|x\|\geqslant 1$ (ta część dowodu również pozostaje prawdziwa dla dowolnej przestrzeni unormowanej).

Istotnie, niech $C_k:=\sup\{\|\varphi^{(k)}(x)\|:\|x\|\leqslant 1\}$, $k\in\mathbb{N}_0$. Ustalmy $N\in\mathbb{N}_0$. Przypomnijmy, że

$$Q^{(\mu)}_{N+1}(a)(X)=\mu!\binom{N+1}{\mu}\widehat{Q}_{N+1}(\underbrace{a,\dots,a}_{(N+1-\mu)\times},\underbrace{X,\dots,X}_{\mu\times}).$$

W szczególności, $\|Q^{(\mu)}_{N+1}(a)\|\leqslant\mu!\binom{N+1}{\mu}\|\widehat{Q}_{N+1}\|\|a\|^{N+1-\mu}$. Niech $M_\mu:=\mu!\binom{N+1}{\mu}\|\widehat{Q}_{N+1}\|$, $\mu=0,\dots,N+1$. Połóżmy $h_\varepsilon(x):=\varphi(x/\varepsilon)Q_{N+1}(x)$, $x\in E$, $\varepsilon>0$. Wtedy dla $0<\varepsilon\leqslant 1$, korzystając ze wzoru Leibniza (por. Twierdzenie 10.6.5), mamy

$$\begin{aligned}
&\|Q_{N+1}-h_\varepsilon\|_{E,N}=\|Q_{N+1}-h_\varepsilon\|_{B(\varepsilon),N}=\sum_{\nu=0}^{N}\sup_{\|x\|\leqslant\varepsilon}\Big\|\Big((1-\varphi(\cdot/\varepsilon))Q_{N+1}\Big)^{(\nu)}(x)\Big\|\\
&=\sum_{\nu=0}^{N}\sup_{\|x\|\leqslant\varepsilon,\ \|\xi\|\leqslant 1}\Big\|\sum_{\mu=0}^{\nu}\binom{\nu}{\mu}(1-\varphi(\cdot/\varepsilon))^{(\nu-\mu)}(x)(\xi)Q^{(\mu)}_{N+1}(x)(\xi)\Big\|\\
&=\sum_{\nu=0}^{N}\sup_{\|x\|\leqslant\varepsilon,\ \|\xi\|\leqslant 1}\Big\|-\sum_{\mu=0}^{\nu-1}\binom{\nu}{\mu}\varphi^{(\nu-\mu)}(x/\varepsilon)(\xi)\varepsilon^{\mu-\nu}Q^{(\mu)}_{N+1}(x)(\xi)+(1-\varphi(x/\varepsilon))Q^{(\nu)}_{N+1}(x)(\xi)\Big\|\\
&\leqslant\sum_{\nu=0}^{N}\Big(\sum_{\mu=0}^{\nu-1}\binom{\nu}{\mu}C_{\nu-\mu}\varepsilon^{\mu-\nu}M_\mu\varepsilon^{N+1-\mu}+M_\nu\varepsilon^{N+1-\nu}\Big)\leqslant\varepsilon\sum_{\nu=0}^{N}\sum_{\mu=0}^{\nu}\binom{\nu}{\mu}C_{\nu-\mu}M_\mu=\varepsilon\,\mathrm{const}(N).
\end{aligned}$$

Teraz jako g_N wystarczy wziąć h_ε ze stosownie małym ε.

Do znalezienia funkcji φ skorzystamy z unitarności przestrzeni E. Niech $E\ni x\overset{\Phi}{\longmapsto}\|x\|^2=\langle x,x\rangle\in\mathbb{R}$. Mamy $\Phi'(a)(X)=2\langle a,X\rangle$, $\Phi''(a)(X,X)=2\langle X,X\rangle$, $\Phi^{(k)}(a)=0$, $k\geqslant 3$. Niech $\psi\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+,[0,1])$, $\psi(t)=0$ dla $t\leqslant 1/4$, $\psi(t)=1$ dla $t\geqslant 1$. Zdefiniujmy $\varphi(x):=\psi(\langle x,x\rangle)=\psi\circ\Phi(x)$, $x\in E$. Wtedy $\varphi(x)=0$ dla $\|x\|\leqslant 1/2$, $\varphi(x)=1$ dla $\|x\|\geqslant 1$ oraz $\varphi\in\mathcal{C}^\infty(E,[0,1])$. Niech $C_k:=\sup\{\|\varphi^{(k)}(x)\|:\|x\|\leqslant 1\}$, $k\in\mathbb{N}_0$. Zauważmy, że $C_0=1$ oraz $C_k<+\infty$, $k\in\mathbb{N}$. Istotnie, niech $c_\ell:=\sup\{|\psi^{(\ell)}(t)|:t\in\mathbb{R}\}<+\infty$. Dla $x,h\in E$, $\|x\|\leqslant 1$, $\|h\|\leqslant 1$, mamy

$$|\varphi^{(k)}(x)(h)|=|(\psi\circ\Phi)^{(k)}(x)(h)|=\Big|\sum_{\alpha\in\Pi_k}\frac{k!}{\alpha!}\psi^{(\alpha_1+\dots+\alpha_k)}(\Phi(x))\Big(\frac{\Phi'(x)(h)}{1!}\Big)^{\alpha_1}\cdots\Big(\frac{\Phi^{(k)}(x)(h)}{k!}\Big)^{\alpha_k}\Big|$$

$$= \Big| \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{N}_0\\ \alpha_1+2\alpha_2=k}} \frac{k!}{\alpha_1!\alpha_2!}\psi^{(\alpha_1+\alpha_2)}(\Phi(x))\Big(\frac{2\langle x,h\rangle}{1!}\Big)^{\alpha_1}\Big(\frac{2\langle h,h\rangle}{2!}\Big)^{\alpha_2}\Big| \leqslant \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{N}_0\\ \alpha_1+2\alpha_2=k}} \frac{k!}{\alpha_1!\alpha_2!}c_{\alpha_1+\alpha_2}2^{\alpha_1} < +\infty. \quad \square$$

Twierdzenie 10.8.3 (Twierdzenie Whitneya [6]). *Niech $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ będzie dowolną ośrodkową przestrzenią unitarną (np. $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym). Wtedy dla dowolnego zbioru domkniętego $S\subset E$ istnieje funkcja $f\in\mathcal{C}^\infty(E,\mathbb{R}_+)$ taka, że $S=f^{-1}(0)$ oraz $f^{(j)}=0$ na S dla dowolnego $j\in\mathbb{N}_0$.*

Dowód. Możemy założyć, że $\varnothing\neq S\neq E$. Niech $\Phi(x):=\langle x,x\rangle$, $x\in E$ i niech $\psi\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+,[0,1])$ będzie dowolną funkcją taką $\psi=1$ na $[0,1/2]$ oraz $[0,1)=\{x\in\mathbb{R}_+:\psi(x)>0\}$. Zdefiniujmy $\varphi:=\psi\circ\Phi$ (por. dowód Twierdzenia 10.8.2). Niech $C_j:=\sup\{\|\varphi^{(j)}(x)\|:\|x\|\leqslant 1\}$, $j\in\mathbb{N}_0$. Ponieważ E jest ośrodkowa, zbiór $E\setminus S$ zawiera podzbiór przeliczalny gęsty, powiedzmy $\{q_1,q_2,\dots\}$. Niech $d_k:=\operatorname{dist}(q_k,S)$, $k\in\mathbb{N}$.

$$a_k:=\frac{1}{2^k}\min\Big\{\frac{d_k^j}{C_j}:j\leqslant k\Big\},\quad f(x):=\sum_{k=1}^\infty a_k\,\varphi\Big(\frac{x-q_k}{d_k}\Big),\quad x\in E.$$

Sprawdzamy, że f spełnia wszystkie wymagane warunki:

- $f\in\mathcal{C}^\infty(E,\mathbb{R}_+)$: Wystarczy pokazać, że dla dowolnego $j\in\mathbb{N}_0$, szereg $\sum\limits_{k=1}^\infty a_k\Big|\Big(\varphi\Big(\frac{\cdot-q_k}{d_k}\Big)\Big)^{(j)}\Big|$ jest zbieżny jednostajnie w E. Mamy

$$\sum_{k=1}^\infty a_k\Big|\Big(\varphi\Big(\frac{\cdot-q_k}{d_k}\Big)\Big)^{(j)}(x)\Big| = \sum_{k=1}^\infty a_k\frac{1}{d_k^j}\Big|\varphi^{(j)}\Big(\frac{x-q_k}{d_k}\Big)\Big| \leqslant \sum_{k=1}^\infty a_k\frac{C_j}{d_k^j} \leqslant \sum_{k=1}^{j-1} a_k\frac{C_j}{d_k^j}+\sum_{k=j}^\infty\frac{1}{2^k},\quad x\in E.$$

- $f(x)>0$ dla $x\in E\setminus S$: Ustalmy punkt $x_0\in E\setminus S$ i niech $B(x_0,2r)\subset E\setminus S$ dla pewnego $0<r<1$. Weźmy dowolny punkt $q_{k_0}\in B(x_0,r)$. Wtedy $d_{k_0}>r$, a stąd $x_0\in B(q_{k_0},d_{k_0})$, a więc $f(x_0)\geqslant a_{k_0}\,\varphi(\frac{x_0-q_{k_0}}{d_{k_0}})>0$.
- $f^{(j)}=0$ na S dla dowolnego j: Jeżeli $x_0\in S$, to $\|x_0-q_k\|\geqslant d_k$, a więc $\varphi^{(j)}(\frac{x_0-q_k}{d_k})=0$ dla dowolnego k, a stąd $f^{(j)}(x_0)=0$. $\square$

10.9. Rozkład jedności I

Twierdzenie 10.9.1 (Twierdzenie o pokryciu). *Niech $\mathcal{F}$ będzie dowolną rodziną niepustych podzbiorów $\mathbb{R}^n$ taką, że*

$$\sup_{B\in\mathcal{F}}\operatorname{diam}B<+\infty. \tag{†}$$

Wtedy dla dowolnego $\tau_0>1$ istnieje podrodzina $\mathcal{F}_0$ rodziny $\mathcal{F}$, składająca się ze zbiorów parami rozłącznych i taka, że dla dowolnego $B\in\mathcal{F}$ istnieje $B_0\in\mathcal{F}_0$ taki, że $B\cap B_0\neq\varnothing$ i $\operatorname{diam}B\leqslant\tau_0\operatorname{diam}B_0$.

Dowód. Niech $\mathcal{A}$ oznacza rodzinę wszystkich podrodzin $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$, które są złożone ze zbiorów parami rozłącznych i takich, że

$$\forall_{B\in\mathcal{F}}:\Big(B\cap\bigcup\mathcal{G}=\varnothing\Big)\vee\Big(\exists_{B_0\in\mathcal{G}}:B\cap B_0\neq\varnothing,\ \operatorname{diam}B\leqslant\tau_0\operatorname{diam}B_0\Big).$$

Oczywiście, $\varnothing\in\mathcal{A}$, a więc $\mathcal{A}\neq\varnothing$. Na podstawie Lematu Kuratowskiego–Zorna, rodzina $\mathcal{A}$ ma element maksymalny $\mathcal{F}_0$ (ze względu na inkluzję). Niech $\mathcal{H}:=\{B\in\mathcal{F}:B\cap\bigcup\mathcal{F}_0=\varnothing\}$. Wystarczy pokazać, że $\mathcal{H}=\varnothing$. Przypuśćmy, że $\mathcal{H}\neq\varnothing$ i niech $C\in\mathcal{H}$ będzie taki, że $\tau_0\operatorname{diam}C\geqslant\sup_{B\in\mathcal{H}}\operatorname{diam}B$ (skorzystaliśmy z (†)). Ponieważ zbiory rodziny $\mathcal{F}$ są niepuste, mamy $C\notin\mathcal{F}_0$. Rozważmy rodzinę $\mathcal{G}:=\mathcal{F}_0\cup\{C\}$. Pokażemy, że należy ona do $\mathcal{A}$, co da sprzeczność.

Oczywiście jest to rodzina zbiorów parami rozłącznych. Weźmy dowolne $B\in\mathcal{F}$ takie, że $B\cap B_0\neq\varnothing$ dla pewnego $B_0\in\mathcal{G}$. Jeżeli istnieje zbiór $B_0\in\mathcal{F}_0$ o tej własności, to oczywiście $\operatorname{diam}B\leqslant\tau_0\operatorname{diam}B_0$. W przeciwnym przypadku, $B_0=C$ i $B\in\mathcal{H}$, a stąd ponownie $\operatorname{diam}B\leqslant\tau_0\operatorname{diam}B_0$. $\square$

Lemat 10.9.2. *Niech $S\subset\Omega\in\operatorname{top}\mathbb{R}^n$ i niech $h:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}_{>0}$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $L>0$ (w normie euklidesowej). Załóżmy, że*

$$\overline{\mathbb{B}}(s',h(s'))\cap\overline{\mathbb{B}}(s'',h(s''))=\varnothing,\quad s',s''\in S,\ s'\neq s''. \tag{Σ}$$

Dla $\alpha:=\frac{1}{2L}$ niech $S(x):=\{s\in S:\overline{\mathbb{B}}(x,\alpha h(x))\cap\overline{\mathbb{B}}(s,\alpha h(s))\neq\varnothing\}$, $x\in\Omega$. Wtedy:

[6] Hassler Whitney (1907–1989).

(a) $\frac{1}{3} \leqslant \frac{h(x)}{h(s)} \leqslant 3,\ s \in S(x)$,
(b) $\#S(x) \leqslant (9+\frac{6}{L})^n,\ x \in \Omega$.

Dowód. Dla $s \in S(x)$ i $z \in \overline{\mathbb{B}}(x,\alpha h(x)) \cap \overline{\mathbb{B}}(s,\alpha h(s))$ mamy $|h(x)-h(s)| \leqslant L\|x-s\| \leqslant L(\|z-x\|+\|z-s\|) \leqslant L\alpha(h(x)+h(s)) = \frac{1}{2}(h(x)+h(s))$, co daje (a).

Warunek (Σ) implikuje, że zbiór S może być co najwyżej przeliczalny. Istotnie, wystarczy pokazać, że $S \cap K$ jest zbiorem skończonym dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset \Omega$. W przeciwnym przypadku, istniałby ciąg $(s_\nu)_{\nu=1}^{\infty} \subset S$, zawierający nieskończenie wiele różnych wyrazów, taki, że $s_\nu \longrightarrow s_0 \in \Omega$. Wtedy, dla $\nu, \mu \gg 1$, mamy $\|s_\nu - s_\mu\| \leqslant h(s_0) < h(s_\nu) + h(s_\mu)$, co wyklucza ($\Sigma$).

Teraz, dla $s \in S(x)$ i $z \in \overline{\mathbb{B}}(s,h(s))$ mamy:

$$\|z-x\| \leqslant \|z-s\| + \|s-x\| \leqslant h(s) + \alpha(h(x)+h(s)) = \alpha h(x) + (\alpha+1)h(s) \leqslant (4\alpha+3)h(x) =: rh(x),$$

skąd wynika, że $\overline{\mathbb{B}}(s,h(s)) \subset \overline{\mathbb{B}}(x,rh(x)),\ s \in S(x)$. Korzystając z ($\Sigma$), szacujemy: $(\#S(x))|\mathbb{B}_n|(\frac{1}{3}h(x))^n = \sum\limits_{s\in S(x)} |\mathbb{B}(s,h(s))| \overset{(\dagger)}{\leqslant} |\mathbb{B}(x,rh(x)))| = |\mathbb{B}_n| r^n h^n(x)$, co daje $\#S(x) \leqslant (3r)^n = 3(4\alpha+3)^n = (9+\frac{6}{L})^n$.
Brakująca wiedza potrzebna do formalnego wykazania (†) zostanie podana w Rozdziale 12. □

Konstrukcja 10.9.3 (Specjalny rozkład jedności)**.** Niech $\{\Omega_i : i \in I\}$ będzie pokryciem otwartym zbioru otwartego $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Niech $0 < L < \frac{1}{8}$ i niech $h(x) := L \sup\limits_{i\in I} \min\{1, \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega_i)\},\ x \in \Omega$ ($\operatorname{dist}(x,\varnothing) := +\infty$). Zauważmy, że $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą L (Ćwiczenie) oraz $h \leqslant L$. Wobec definicji funkcji h mamy:

$$\forall_{\gamma\in(0,\frac{1}{L})}\ \forall_{x\in\Omega}\ \exists_{i\in I} : \overline{\mathbb{B}}(x,\gamma h(x)) \subset \Omega_i. \tag{*}$$

Niech $\mathcal{F} := \{\overline{\mathbb{B}}(x,h(x)) : x \in \Omega\}$ i niech $\tau := \frac{1}{4L} - 1 > 1$. Oczywiście $\sup_{B\in\mathcal{F}} \operatorname{diam} B \leqslant 2$. Połóżmy $\alpha := \frac{1}{2L} = 2(1+\tau)$. Na podstawie Twierdzenia o pokryciu 10.9.1 (zastosowanego do $\tau_0 \in (1,\tau)$), istnieje zbiór $S \subset \Omega$ taki, że spełniony jest warunek (Σ) oraz dla dowolnego $x \in \Omega$ istnieje $s \in S$ taki, że:

- $\|x-s\| \leqslant h(x)+h(s)$ (przecinanie się kul),
- $h(x) < \tau h(s)$ (warunek ze średnicami); w szczególności, $x \in \mathbb{B}(s,(1+\tau)h(s))$.

Rodzina $\{\mathbb{B}(s,(1+\tau)h(s)) : s \in S\}$ stanowi pokrycie Ω. Ponadto, na podstawie (*), rodzina $\{\overline{\mathbb{B}}(s,\alpha h(s)) : s \in S\}$ jest pokryciem wpisanym w pokrycie $\{\Omega_i : i \in I\}$.

Ustalmy funkcję $\eta_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+,[0,1])$ taką, że $\eta_0(t) = 1$ dla $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$, $\eta_0(t) = 0$ dla $t \geqslant 1$. Zdefiniujmy

$$\eta(x) := \eta_0(\|x\|), \quad x \in \mathbb{R}^n, \qquad \psi_s(x) := \eta\Big(\frac{x-s}{\alpha h(s)}\Big), \quad s \in S,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Oczywiście, $\psi_s \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n,[0,1])$, $\psi_s(x) = 1$ dla $x \in \overline{\mathbb{B}}(s,(1+\tau)h(s))$ oraz $\operatorname{supp}\psi_s \subset \overline{\mathbb{B}}(s,\alpha h(s))$. Na podstawie Lematu 10.9.2 mamy $\#S(x) \leqslant (9+\frac{6}{L})^n, \quad x \in \Omega$. W szczególności, pokrycie $\{\operatorname{supp}\psi_s : s \in S\}$ jest lokalnie skończone. W takim razie funkcja $\psi(x) := \sum\limits_{s\in S} \psi_s(x),\ x \in \Omega$, jest poprawnie określona, $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ i $\psi \geqslant 1$.

Funkcje $\varphi_s := \psi_s/\psi$, $s \in S$, dają więc $\mathcal{C}^\infty$ rozkład jedności wpisany w pokrycie $\{\Omega_i : i \in I\}$.

„Specjalność" tego rozkładu polega również na tym, że dodatkowo mamy kontrolę wzrostu pochodnych wszystkich funkcji $f \in \{\psi_s, \varphi, \varphi_s, s \in S\}$ w postaci oszacowania $|D^\mu f| \leqslant \frac{\operatorname{const}(\mu)}{h^{|\mu|}}$, $\mu \in \mathbb{N}_0^n$.

Dokładniej, na podstawie Lematu 10.9.2 mamy

$$|D^\mu \psi_s(x)| \leqslant \frac{c_1(\mu)}{(\alpha h(s))^{|\mu|}} \leqslant \frac{c_2(\mu)}{h^{|\mu|}(x)}, \quad x \in \Omega,\ \mu \in \mathbb{N}_0^n,$$

gdzie $c_1(\mu) := \sup\limits_{\mathbb{R}_+} |\eta_0^{(|\mu|)}|,\ c_2(\mu) := c_1(\mu)(6L)^{|\mu|}$. Teraz, korzystając z oszacowania $\#S(x) \leqslant (9+\frac{6}{L})^n$, wnioskujemy, że

$$|D^\mu \psi| \leqslant (9+\tfrac{6}{L})^n \frac{c_2(\mu)}{h^{|\mu|}} =: \frac{c_3(\mu)}{h^{|\mu|}}, \quad \mu \in \mathbb{N}_0^n.$$

Stąd, bez trudu otrzymujemy:

$$|D^\mu(\tfrac{1}{\psi})| \leqslant \frac{c_4(\mu)}{h^{|\mu|}}, \quad \mu \in \mathbb{N}_0^n.$$

Ostatecznie, stosując wzór Leibniza, dostajemy:

$$|D^\mu\varphi_s| \leqslant \sum_{\tau\leqslant\mu}\binom{\mu}{\tau}\left|D^\tau\psi_s\right|\left|D^{\mu-\tau}(1/\psi)\right| \leqslant \sum_{\tau\leqslant\mu}\binom{\mu}{\tau}\frac{c_2(\tau)}{h^{|\tau|}}\frac{c_4(\mu-\tau)}{h^{|\mu-\tau|}} =: \frac{c(\mu)}{h^{|\mu|}}, \quad \mu\in\mathbb{N}_0^n.$$

Z powyższa konstrukcja daje natychmiast następujące ważne twierdzenie.

Twierdzenie 10.9.4 (Rozkład jedności). *Niech $\{\Omega_i : i\in I\}$ będzie pokryciem otwartym zbioru otwartego $\Omega\subset\mathbb{R}^n$. Niech $0<L<\frac{1}{8}$ i niech $h(x) := L\sup\limits_{i\in I}\min\{1,\operatorname{dist}(x,\mathbb{R}^n\setminus\Omega_i)\}$, $x\in\Omega$. Wtedy istnieje co najwyżej przeliczalny zbiór $S\subset\Omega$ oraz rodzina funkcji $(\varphi_s)_{s\in S}\subset\mathcal{C}_0(\Omega,[0,1])$, która $\mathcal{C}^\infty$ rozkładem jedności wpisanym w pokrycie $\{\Omega_i : i\in I\}$, przy czym:*

- *rodzina $\{\overline{\mathbb{B}}(s,\frac{\alpha}{2}h(s)) : s\in S\}$ jest pokryciem Ω,*
- *dla dowolnego $s\in S$ istnieje $i\in I$ takie, że $\operatorname{supp}\varphi_s\subset\overline{\mathbb{B}}(s,\alpha h(s))\subset\Omega_i$,*
- *rodzina $\{\overline{\mathbb{B}}(s,\alpha h(s)) : s\in S\}$ jest lokalnie skończonym pokryciem Ω o krotności $\leqslant(9+\frac{6}{L})^n$,*
- *$\sum\limits_{s\in S}\varphi_s\equiv 1$ w Ω,*
- *$h^{|\mu|}|D^\mu\varphi_s|\leqslant\operatorname{const}(n,L,\mu)$, $\mu\in\mathbb{N}_0^n$.*

10.10. Twierdzenie Whitneya

Definicja 10.10.1. Niech $\Omega\in\operatorname{top}\mathbb{R}^n$ i niech $f\in\mathcal{C}^k(\Omega,F)$ ($k\in\mathbb{N}_0$), gdzie F jest przestrzenią unormowaną. Zdefiniujmy

$$T_a^j f(x) := \sum_{\nu=0}^{j}\frac{1}{\nu!}f^{(\nu)}(a)(x-a), \quad a\in\Omega,\ x\in\mathbb{R}^n,\ j\leqslant k.$$

Odwzorowanie $T_a^j f$ nosi nazwę j-tego dżetu funkcji f w punkcie a.

Obserwacja 10.10.2. (a) $T_a^j f\in\mathcal{P}_j(\mathbb{R}^n,F)$.

(b) $T_a^k f(a)=f(a)$.

(c) $f(x)-T_a^j(x)=R_j(f,a,x)=j$-ta reszta we wzorze Taylora w punkcie a ($x\in\Omega$).

(d) Wiemy, że $R_k(f,a,\cdot)^{(j)}(x)=R_{k-j}(f^{(j)},a,x)$, $x\in\Omega$. Wynika stąd, że $(T_a^k)^{(j)}=T_a^{k-j}f^{(j)}$ na Ω.

Korzystając ze wzoru Taylora dla funkcji klasy $\mathcal{C}^k$ (Twierdzenie 10.7.3(b)), dostajemy.

Twierdzenie 10.10.3. *Dla dowolnego zbioru zwartego $K\subset\Omega$ mamy*

$$\sup\left\{\frac{\|(T_x^k f)^{(j)}(x)-(T_a^k f)^{(j)}(x)\|}{\|x-a\|^{k-j}} : a,x\in K,\ 0<\|x-a\|\leqslant\delta,\quad j=0,\dots,k\right\}\underset{\delta\to 0+}{\longrightarrow}0.$$

Twierdzenie 10.10.3 można odwrócić.

Twierdzenie 10.10.4. *Niech $\Omega\in\operatorname{top}\mathbb{R}^n$ i niech $\Omega\ni a\overset{P}{\longmapsto}P_a\in\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n,F)$ będzie odwzorowaniem takim, że dla dowolnego zbioru zwartego $K\subset\Omega$ mamy:*

$$\tau(P;K,\delta) := \sup\left\{\frac{\|P_x^{(j)}(x)-P_a^{(j)}(x)\|}{\|x-a\|^{k-j}} : a,x\in K,\ 0<\|x-a\|\leqslant\delta,\ j=0,\dots,k\right\}\underset{\delta\to 0+}{\longrightarrow}0. \tag{W}$$

Wtedy odwzorowanie $f:\Omega\longrightarrow F$ dane wzorem $f(x):=P_x(x)$, $x\in\Omega$, jest klasy $\mathcal{C}^k$ i $T_a^k f=P_a$, $a\in\Omega$.

Dowód. Przypuśćmy, że już wiemy, że $f^{(j)}(x)=P_x^{(j)}(x)$, $x\in\Omega$, $j=0,\dots,\ell$, dla pewnego $\ell\in\{0,\dots,k\}$. Dla $\ell=0$ jest to po prostu definicja odwzorowania f. Korzystając z (W), wnioskujemy, że dla dowolnego $a\in\Omega$ mamy

$$f^{(\ell)}(x)=P_x^{(\ell)}(x)=(P_x^{(\ell)}(x)-P_a^{(\ell)}(x))+P_a^{(\ell)}(x)\underset{x\to a}{\longrightarrow}0+P_a^{(\ell)}(a)=f^{(\ell)}(a).$$

Oznacza to, że $f^{(\ell)}$ jest odwzorowaniem ciągłym. Ponadto, jeżeli $\ell\leqslant k-1$, to dla dowolnego $a\in\Omega$ i $h\in(\mathbb{R}^n)_*$ mamy

$$\begin{aligned}\frac{f^{(\ell)}(a+h)-f^{(\ell)}(a)-P_a^{(\ell+1)}(a)(h)}{\|h\|} &= \frac{P_{a+h}^{(\ell)}(a+h)-P_a^{(\ell)}(a)-P_a^{(\ell+1)}(a)(h)}{\|h\|}\\ &= \frac{P_{a+h}^{(\ell)}(a+h)-P_a^{(\ell)}(a+h)}{\|h\|}+\frac{P_a^{(\ell)}(a+h)-P_a^{(\ell)}(a)-P_a^{(\ell+1)}(a)(h)}{\|h\|}.\end{aligned}$$

Na mocy (W) pierwszy składnik dąży do 0 przy $h \longrightarrow 0$. Oczywiście drugi składnik dąży również do 0 gdy $h \longrightarrow 0$. Oznacza to, że $f^{(\ell+1)}(a)$ istnieje i $f^{(\ell+1)}(a) = P_a^{(\ell+1)}(a)$. Teraz skończona indukcja względem ℓ kończy łatwo dowód. □

Twierdzenie 10.10.5 (Twierdzenie Whitneya). *Niech $\varnothing \neq A \subsetneq \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem domkniętym i niech $A \ni a \overset{P}{\longmapsto} P_a \in \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n, F)$ będzie odwzorowaniem takim, że dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset A$ spełniony jest warunek* (W). *Wtedy istnieje odwzorowanie $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n, F)$ takie, że $f^{(j)}(x) = P_x^{(j)}(x)$, $x \in A$, $j = 0, \dots, k$.*

Zauważmy, że dla $k = 0$, powyższe twierdzenie mówi, że dowolna funkcja ciągła $P : A \longrightarrow F$ przedłuża się ciągle na całe $\mathbb{R}^n$.

Rodzinę $(P_a)_{a\in A}$ spełniającą warunek (W) na dowolnym zbiorze zwartym $K \subset A$, można uznać ze definicję funkcji klasy $\mathcal{C}^k(A)$.

Warunek (W) oznacza w szczególności, że $P_x^{(j)}(x) \longrightarrow P_a^{(j)}(a)$, gdy $A \ni x \longrightarrow a \in A$, $j = 0, \dots, k$ (por. dowód Twierdzenia 10.10.4).

Dowód. Do zbioru $U := \mathbb{R}^n \setminus A$ i do jednoelementowego pokrycia tego zbioru samym sobą zastosujmy Konstrukcję 10.9.3 specjalnego rozkładu jedności z $L = \frac{1}{20}$, tzn.

$$h(x) = \frac{1}{20}\min\{1, \operatorname{dist}(x, A)\}, \quad x \in U.$$

Dostajemy zbiór przeliczalny $S \subset U$ oraz specjalny rozkład jedności $(\varphi_s)_{s\in S}$ klasy $\mathcal{C}^\infty$.

Dla $s \in S$ niech $a(s) \in A$ będzie taki, że $\operatorname{dist}(s, A) = \|s - a(s)\|$. Zdefiniujmy

$$f(x) := \begin{cases} P_x(x), & \text{jeżeli } x \in A \\ \sum\limits_{s\in S} \varphi_s(x) P_{a(s)}(x), & \text{jeżeli } x \in \mathbb{R}^n \setminus A \end{cases}.$$

Definicja jest poprawna ponieważ pokrycie $(\operatorname{supp}\varphi_s)_{s\in S}$ jest lokalnie skończone w U. Ponadto, $f \in \mathcal{C}^\infty(U, F)$. Wobec Twierdzenie 10.10.4 mamy $f \in \mathcal{C}^k(\operatorname{int} A, F)$ oraz $f^{(j)}(x) = P_x^{(j)}(x),\ x \in \operatorname{int} A,\ j = 0, \dots, k$. Kluczową sprawą będzie pokazanie, że dla dowolnego $a \in \partial A$

$$\frac{f^{(j)}(x) - P_a^{(j)}(x)}{\|x - a\|^{k-j}} \longrightarrow 0 \text{ gdy } U \ni x \longrightarrow a,\ j = 0, \dots, k. \tag{W1}$$

Warunek (W1) oznacza w szczególności, że $f^{(j)}(x) \longrightarrow P_a^{(j)}(a)$ gdy $U \ni x \longrightarrow a \in A$, $j = 0, \dots, k$. Przypuśćmy, że warunek (W1) jest spełniony. Dalej rozumujemy podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 10.10.4. Przypuśćmy, że już wiemy, że

$$f^{(j)}(x) = P_x^{(j)}(x), \quad x \in A,\ j = 0, \dots, \ell, \tag{W2}$$

dla pewnego $\ell \in \{0, \dots, k\}$ (dla $\ell = 0$ jest to po prostu definicja odwzorowania f). Teraz korzystając z (W) i (W1) wnioskujemy, że dla dowolnego $a \in A$

$$f^{(\ell)}(x) \longrightarrow P_a^{(\ell)}(a) = f^{(\ell)}(a) \text{ gdy } x \longrightarrow a.$$

Oznacza to, że $f^{(\ell)}$ jest odwzorowaniem ciągłym. Ponadto, jeżeli $\ell \leqslant k-1$, to dla dowolnego $a \in A$ i $h \in (\mathbb{R}^n)_*$ mamy

$$\begin{aligned}\frac{f^{(\ell)}(a+h) - f^{(\ell)}(a) - P_a^{(\ell+1)}(a)(h)}{\|h\|} &= \frac{f^{(\ell)}(a+h) - P_a^{(\ell)}(a) - P_a^{(\ell+1)}(a)(h)}{\|h\|} \\ &= \frac{f^{(\ell)}(a+h) - P_a^{(\ell)}(a+h)}{\|h\|} + \frac{P_a^{(\ell)}(a+h) - P_a^{(\ell)}(a) - P_a^{(\ell+1)}(a)(h)}{\|h\|}.\end{aligned}$$

Oczywiście drugi składnik dąży do 0 gdy $h \longrightarrow 0$. Jeżeli $h \longrightarrow 0$ po wartościach takich, że $a + h \in A$, to na podstawie (W2) i (W) pierwszy składnik dąży do 0. Jeżeli $h \longrightarrow 0$ po wartościach takich, że $a + h \notin A$, to na podstawie (W1) pierwszy składnik dąży do 0. Oznacza to, że $f^{(\ell+1)}(a)$ istnieje i $f^{(\ell+1)}(a) = P_a^{(\ell+1)}(a)$. Teraz skończona indukcja względem ℓ kończy łatwo dowód.

Przechodzimy do dowodu (W1). Ustalmy $a \in \partial A$. Niech $K := \overline{\mathbb{B}}(a, 2) \cap A$. Dla $c, d \in K$ mamy

$$\|P_c^{(j)}(x) - P_d^{(j)}(x)\| = \Big\| \sum_{i=0}^{k-j} \frac{1}{i!} \Big((P_c^{(j)})^{(i)}(c)(x-c) - (P_d^{(j)})^{(i)}(c)(x-c) \Big) \Big\|$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{k-j} \frac{1}{i!} \|(P_c^{(j+i)})(c) - (P_d^{(j+i)})(c)\| \|x-c\|^i \leqslant \sum_{i=0}^{k-j} \frac{1}{i!} \tau(P,K,\|c-d\|)\ \|c-d\|^{k-j-i} \|x-c\|^i$$
$$\leqslant \tau(P,K,\|c-d\|)\Big(\|c-d\| + \|x-c\|\Big)^{k-j}.$$

Ustalmy $x \in \mathbb{B}(a,\frac{1}{3}) \setminus A$ i niech $b \in A$ będzie taki, że $\|x-b\| = \operatorname{dist}(x,A)$. Wtedy

- $\operatorname{dist}(x,A) = \|x-b\| \leqslant \|x-a\| < \frac{1}{3} \Longrightarrow 20h(x) = \operatorname{dist}(x,A) < \frac{1}{3}$,
- $\|b-a\| \leqslant \|x-b\| + \|x-a\| \leqslant 2\|x-a\| < \frac{2}{3} \Longrightarrow b \in K$.

Weźmy dowolny punkt $s \in S(x)$. Wtedy, na podstawie Lematu 10.9.2 (z $\alpha = 10$) mamy

$$20h(s) \leqslant 60h(x) < 1 \Longrightarrow 20h(s) = \operatorname{dist}(s,A) = \|s-a(s)\|,$$
$$\|s-x\| \leqslant 10h(s) + 10h(x) \leqslant 40h(x) < \tfrac{2}{3},$$
$$\|a(s)-a\| \leqslant \|a(s)-s\| + \|s-x\| + \|x-a\| < 1 + \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3} = 2 \Longrightarrow a(s) \in K,$$
$$\|a(s)-b\| \leqslant \|a(s)-s\| + \|s-x\| + \|x-b\| \leqslant 20h(s) + 40h(x) + 20h(x) \leqslant 120h(x) = 6\|x-b\|,$$
$$\|x-b\| + \|a(s)-b\| \leqslant 140h(x) = 7\|x-b\|.$$

Przystępujemy do oszacowań. Ponieważ

$$f^{(j)}(x) - P_a^{(j)}(x) = \Big(f^{(j)}(x) - P_b^{(j)}(x)\Big) + \Big(P_b^{(j)}(x) - P_a^{(j)}(x)\Big),$$

oszacujemy każdy składnik osobno.

Dla $c=b$, $d=a$ dostajemy:

$$\|P_b^{(j)}(x) - P_a^{(j)}(x)\| \leqslant 3^{k-j}\tau(P,K,2\|x-a\|)\ \|x-a\|^{k-j}.$$

Korzystając z przypadku $c=b$, $d=a(s)$ oraz wzoru Leibniza, dostajemy

$$\|f^{(j)}(x) - P_b^{(j)}(x)\| = \Big\|\Big(\sum_{s\in S} \varphi_s (P_{a(s)} - P_b)\Big)^{(j)}(x)\Big\| \leqslant \text{const} \sum_{s\in S(x)} \sum_{i=0}^{j} |\varphi_s^{(j-i)}(x)| \|P_b^{(i)}(x) - P_{a(s)}^{(i)}(x)\|$$
$$\leqslant \text{const} \sum_{s\in S(x)} \sum_{i=0}^{j} h^{i-j}(x)\tau(P,K,\|b-a(s)\|)(\|b-a(s)\| + \|x-b\|)^{k-i}$$
$$\leqslant \text{const}\,\tau(P,K,6\|x-b\|) \sum_{s\in S(x)} \sum_{i=0}^{j} h^{i-j}(x)(140h(x))^{k-i}$$
$$\leqslant \text{const}\,\tau(P,K,6\|x-b\|) \sum_{s\in S(x)} h^{k-j}(x) \leqslant \text{const}\,\tau(P,K,6\|x-b\|)\|x-b\|^{k-j}$$
$$\leqslant \text{const}\,\tau(P,K,6\|x-a\|)\|x-a\|^{k-j}. \qquad \square$$

10.11. Ekstrema lokalne

Niech E będzie przestrzenią unormowaną nad $\mathbb{R}$, niech $\Omega \in \operatorname{top} E$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \Omega$. Przypomnijmy pewne definicje.

Definicja 10.11.1. Powiemy, że f ma w punkcie a *minimum lokalne* (odp. *silne minimum lokalne*), jeżeli istnieje otoczenie $U \subset \Omega$ punktu a takie, że $f(x) \geqslant f(a)$ dla $x \in U$ (odp. $f(x) > f(a)$ dla $x \in U \setminus \{a\}$).

Zmieniając kierunki nierówności definiujemy *maksimum lokalne* i *silne maksimum lokalne*. Zamieniając f na $-f$ możemy zawsze ograniczyć nasze rozważania do minimów lokalnych.

Definicja 10.11.2. Niech $Q \in \underline{\mathcal{H}}^k(E,\mathbb{R})$. Powiemy, że:

- Q jest *nieujemnie określony (półokreślony dodatnio)*, jeżeli $Q(h) \geqslant 0$, $h \in E$,
- Q jest *dodatnio określony*, jeżeli $Q(h) > 0$, $h \in E_*$,
- Q jest *silnie dodatnio określony*, jeżeli istnieje stała $c > 0$ taka, że $Q(h) \geqslant c\|h\|^k$, $h \in E$.

Zmieniając kierunki nierówności definiujemy pojęcie *niedodatniej określoności (półokreśloności ujemnej)*, *ujemnej określoności* i *silnej ujemnej określoności* [7]. Zamieniając Q na $-Q$ możemy zawsze ograniczyć nasze rozważania do dodatniej określoności.

[7] W tym ostatnim przypadku żądamy istnienia stałej $c < 0$ takiej, że $Q(h) \leqslant c\|h\|^k$ dla dowolnego $h \in E$.

Obserwacja 10.11.3. (a) Jeżeli k jest nieparzyste i $Q \neq 0$, to Q nie jest ani nieujemnie ani niedodatnio określony, czyli jest *nieokreślony*. Istotnie, jeżeli k jest nieparzyste, to $Q(-h) = -Q(h)$.

(b) Jeżeli E jest skończenie wymiarowa, to dodatnia określoność jest równoważna silnej dodatniej określoności. Tak nie musi być gdy $\dim E = \infty$ – Ćwiczenie. Istotnie, jeżeli E jest skończenie wymiarowa i Q jest dodatnio określony, to $c := \inf\{Q(h) : \|h\| = 1\} > 0$ (bo sfera jest zwarta) i dla $h \neq 0$ mamy $Q(h) = \|h\|^k Q(\frac{h}{\|h\|}) \geqslant c\|h\|^k$.

(c) Jeżeli $E = \mathbb{R}^n$, $k = 2$ i $Q = [Q_{i,j}]_{i,j=1,\dots,n}$ jest macierzą symetryczną, to następujące warunki są równoważne:

(i) forma $Q(h) = h^t Q h = \sum\limits_{i,j=1}^{n} Q_{i,j} h_i h_j$, $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ jest nieujemnie określona; odnotujmy, że $Q(h) = \widehat{Q}(h,h)$, $h \in \mathbb{R}^n$, gdzie $\widehat{Q}(x,y) := x^t Q y$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, oraz że $Q_{i,j} = \widehat{Q}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$, $i, j = 1, \dots, n$.

(ii) $D(i_1, \dots, i_s) \geqslant 0$ dla dowolnych $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_s \leqslant n$, gdzie

$$D(i_1, \dots, i_s) := \det \begin{bmatrix} Q_{i_1,i_1}, \dots, Q_{i_1,i_s} \\ \vdots \\ Q_{i_s,i_1}, \dots, Q_{i_s,i_s} \end{bmatrix}, \quad 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_s \leqslant n.$$

(iii) wszystkie wartości własne macierzy Q są nieujemne.

Minor $D(i_1, \dots, i_s)$ nosi nazwę *minora głównego rzędu* s. Minor $D(1, \dots, s)$ nosi nazwę *wiodącego minora głównego rzędu* s. Z kryterium tego wynika oczywiście, że Q jest niedodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy $(-1)^s D(i_1, \dots, i_s) \geqslant 0$ dla dowolnych $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_s \leqslant n$.

Istotnie, wiadomo, że jeżeli $Q = Q^t$, to $Q = P^t \Delta P$, gdzie P jest macierzą ortogonalną ($P P^t = \mathbb{I}_n$), zaś Δ jest macierzą diagonalną mającą na przekątnej wartości własne $d_1, \dots, d_n$ macierzy A. Wynika stąd, że forma Q jest dodatnio (nieujemnie) określona wtedy i tylko wtedy, gdy forma skojarzona z macierzą Δ jest dodatnio (nieujemnie) określona, co z kolei jest równoważne temu, że $d_1, \dots, d_n > 0$ ($d_1, \dots, d_n \geqslant 0$). W szczególności, (i) $\iff$ (iii).

Ponieważ $\det Q = \det \Delta = d_1 \cdots d_n$, wnioskujemy stąd również, że jeżeli Q jest dodatnio (nieujemnie) określona, to $\det Q > 0$ ($\det Q \geqslant 0$). Ustalmy $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_s \leqslant n$. Zauważmy, że $D(i_1, \dots, i_s)$ jest wyznacznikiem reprezentacji macierzowej formy G, gdzie $G : \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$G(t) := Q(0, \dots, 0, \underset{i_1}{t_1}, 0, \dots, 0, \underset{i_2}{t_2}, 0, \dots, 0, \underset{i_s}{t_s}, 0, \dots, 0), \quad t = (t_1, \dots, t_s) \in \mathbb{R}^s.$$

Jest jasne, że jeżeli Q jest dodatnio (nieujemnie) określona, to G jest dodatnio (nieujemnie) określona, a stąd $D(i_1, \dots, i_s) > 0$ ($D(i_1, \dots, i_s) \geqslant 0$).

Pozostaje wykazać, że (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Wiadomo, że równanie charakterystyczne $\det(A - \lambda \mathbb{I}_n) = 0$ macierzy A ma postać

$$(-\lambda)^n + \sum_{s=1}^{n} \Big(\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_s \leqslant n} D(i_1, \dots, i_s) \Big) (-\lambda)^{n-s} = 0.$$

Jeżeli więc $D(i_1, \dots, i_s) \geqslant 0$ dla dowolnych $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_s \leqslant n$, to każdy pierwiastek tego równania (czyli wartość własna) musi być $\geqslant 0$ (Ćwiczenie).

Ćwiczenie: Czy dla nieujemnej określoności formy Q wystarczy, by $D(1, \dots, s) \geqslant 0$, $s = 1, \dots, n$?

(d) Jeżeli $E = \mathbb{R}^n$, $k = 2$ i $Q = [Q_{i,j}]_{i,j=1,\dots,n}$ jest macierzą symetryczną, to następujące warunki są równoważne:

(i) forma skojarzona z macierzą Q jest dodatnio określona;

(ii) $D(1, \dots, s) > 0$, $s = 1, \dots, n$ [8];

(iii) wszystkie wartości własne macierzy Q są dodatnie.

Istotnie, wiemy już, że (i) $\iff$ (iii) $\Longrightarrow$ (ii). Pozostaje wykazać, że (ii) $\Longrightarrow$ (i). Dowód ten przeprowadzimy indukcyjnie ze względu na n. Przypadek $n = 1$ jest oczywisty. Załóżmy, że wynik zachodzi dla $n-1$. Oznacza to w szczególności, że $Q((x', 0)) > 0$ dla $x' \in (\mathbb{R}^{n-1})_*$. Niech $\widehat{Q}(x,y) := x^t Q y$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, oznacza dwuliniowe odwzorowanie symetryczne generujące formę Q. Wtedy istnieje $w^0 = (w', 1) \in \mathbb{R}^n$ takie, że $\widehat{Q}(w^0, \boldsymbol{e}_j) = 0$,

[8] Q jest ujemnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy $(-1)^s D(1, \dots, s) > 0$, $s = 1, \dots, n$.

$j = 1, \dots, n-1$. Istotnie problem polega na rozwiązaniu kwadratowego układu równań:

$$\sum_{s=1}^{n-1} Q_{s,j} w_j = -Q_{n,j}, \quad s = 1, \dots, n-1,$$

którego wyznacznik to $D(1, \dots, n-1) > 0$.

Łatwo również stwierdzić, że forma Q jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy $Q((x', 0)) > 0$ dla $x' \in (\mathbb{R}^{n-1})_*$ oraz $Q(w^0) > 0$. Istotnie, wektory $(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_{n-1}, w^0)$ tworzą bazę. Forma Q jest dodatnio określona $\iff \forall_{x' \in \mathbb{R}^{n-1}} \forall_{t \neq 0} : 0 < Q((x', 0) + tw^0) = Q((x', 0)) + 2t\widehat{Q}((x', 0), w^0) + t^2 Q(w^0) = Q((x', 0)) + t^2 Q(w^0)$.

Pozostaje więc sprawdzenie, że $Q(w^0) > 0$. Niech R oznacza reprezentację macierzową formy Q w bazie $e_1, \dots, e_{n-1}, w^0$. Wiemy, że $\det R > 0$. Pozostaje zauważyć, że $\det R = D(1, \dots, n-1) Q(w^0)$ (Ćwiczenie).

Twierdzenie 10.11.4 (Warunki konieczne na ekstrema lokalne). *Załóżmy, że f ma w punkcie a minimum lokalne i $f^{(k)}(a)$ istnieje. Wtedy:*

- *$f'(a) = 0$, tzn. a jest punktem* krytycznym *f.*
- *jeżeli $k \geqslant 2$, $f'(a) = 0, \dots, f^{(k-1)}(a) = 0$ i $f^{(k)}(a) \neq 0$, to k jest parzyste i różniczka $f^{(k)}(a)$ jest nieujemnie określona.*

Dowód. Ustalmy $h \in E_*$. Funkcja $g(t) = f(a + th)$ jest poprawnie określona dla $|t| \leqslant \delta$ (przy dostatecznie małym δ) i ma minimum lokalne w punkcie $t = 0$. Widać, że $g^{(k)}(0)$ istnieje. Stąd, na podstawie teorii dla jednej zmiennej rzeczywistej, $0 = g'(0) = f'(a)(h)$.

Jeżeli teraz $f'(a) = 0, \dots, f^{(k-1)}(a) = 0$, to $g'(0) = 0, \dots, g^{(k-1)}(0) = 0$ i $g^{(k)}(0) = f^{(k)}(a)(h)$. Z klasycznej teorii funkcji jednej zmiennej rzeczywistej dostajemy teraz, że $f^{(k)}(a)(h) \geqslant 0$ oraz, że k musi być parzyste. □

Twierdzenie 10.11.5 (Warunki dostateczne na ekstrema lokalne). (a) *Przypuśćmy, że $f^{(k)}(a)$ istnieje, $f'(a) = 0, \dots, f^{(k-1)}(a) = 0$, a różniczka $f^{(k)}(a)$ jest silnie dodatnio określona* [9]. *Wtedy f ma w punkcie a silne minimum lokalne.*

(b) *Przypuśćmy, że $f \in \mathcal{D}^k(U, \mathbb{R})$, gdzie U jest otwartym otoczeniem punktu a, $f'(a) = 0, \dots, f^{(k-1)}(a) = 0$, a różniczka $f^{(k)}(x)$ jest nieujemnie określona dla dowolnego $x \in U$. Wtedy f ma w punkcie a minimum lokalne.*

Dowód. (a) Niech $c > 0$ będzie takie, że $\frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(h) \geqslant c\|h\|^k$, $h \in E$. Wtedy, na podstawie wzoru Taylora z resztą Peano, mamy

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(h) + o(\|h\|^k) \geqslant f(a) + \frac{c}{2}\|h\|^k > f(a), \quad 0 < \|h\| \ll 1.$$

(b) Niech $\overline{B}(a, r) \subset U$. Dla dowolnego $h \in E$, $\|h\| \leqslant r$, niech $g(t) := f(a + th)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Wtedy $g^{(j)}(t) = f^{(j)}(a + th)(h)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $j = 1, \dots, k$. Korzystając z jednowymiarowego wzoru Taylora z resztą Lagrange'a, wnioskujemy, że istnieje liczba $\theta(h) \in [0, 1]$ taka, że

$$f(a+h) - f(a) = g(1) - g(0) = \frac{1}{k!} g^{(k)}(\theta(h)) = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a + \theta(h)h)(h) \geqslant 0. \qquad \square$$

Definicja 10.11.6. Powiemy, że funkcja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ jest *wypukła*, jeżeli dla dowolnego segmentu $[a, b] \subset \Omega$, funkcja $[0, 1] \ni t \longmapsto f(a + t(b - a)) \in \mathbb{R}$ jest wypukła (por. Definicja 5.8.1). Funkcję $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *wklęsłą*, jeżeli funkcja $-f$ jest wypukła.

Ćwiczenie 10.11.7 (Funkcje wypukłe). Udowodnić, że jeżeli $f \in \mathcal{D}^2(\Omega)$, to f jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $x \in \Omega$, druga różniczka $f''(x)$ jest nieujemnie określona.

10.12. Odwzorowania analityczne

Niech E, F, G będą przestrzeniami Banacha.

Definicja 10.12.1. Niech $\Omega \in \operatorname{top} E$. Powiemy, że odwzorowanie $f : \Omega \longrightarrow F$ jest *analityczne* ($f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, F)$), jeżeli dla dowolnego $a \in \Omega$ istnieją $r > 0$ i ciąg wielomianów jednorodnych $Q_k \in \mathcal{H}^k(E, F)$, $k \in \mathbb{N}_0$, taki że $B(a, r) \subset \Omega$ oraz $f(a + h) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(h)$, $h \in B(r)$.

[9] W szczególności, k musi być parzyste.

Obserwacja 10.12.2. Jeżeli $E=\mathbb{R}$, to powyższa definicja jest zgodna z Definicją 6.6.1.

Rozpoczniemy od pewnej obserwacji dotyczącej wielomianów jednorodnych.

Lemat 10.12.3. *Niech E, F będą przestrzeniami Banacha i niech $Q_k\in\mathcal{H}^k(E,F)$, $k\in\mathbb{N}_0$. Załóżmy, że dla pewnego $r>0$, szereg $\sum\limits_{k=0}^{\infty}Q_k(h)$ jest zbieżny dla dowolnego $h\in\overline{B}(r)$. Wtedy istnieją stałe $C,\varrho>0$ takie, że $\|\widehat{Q}_k\|\leqslant\frac{C}{\varrho^k}$, $k\in\mathbb{N}_0$.*

W szczególności, dla dowolnego $h\in B(\theta\varrho)$, $0<\theta<1$, mamy $\|Q_k(h)\|\leqslant C\theta^k$, $k\in\mathbb{N}_0$, skąd wynika, że szereg $\sum\limits_{k=0}^{\infty}Q_k$ jest zbieżny normalnie w każdej kuli $B(\theta\varrho)$, $0<\theta<1$.

Z powyższego lematu wynika, że w definicji odwzorowania analitycznego możemy zawsze zakładać, że istnieje stała $C>0$ taka, że $\|\widehat{Q}_k\|\leqslant\frac{C}{r^k}$, $k\in\mathbb{N}_0$.

Dowód. Niech $F_s:=\{h\in\overline{B}(r):\forall_{k\in\mathbb{N}}:\|Q_k(h)\|\leqslant s\}$. Zbiory F_s są oczywiście domknięte, $F_s\subset F_{s+1}$, oraz $\overline{B}(r)=\bigcup_{s=1}^{\infty}F_s$. Ponieważ $\overline{B}(r)$ jest przestrzenią zupełną, twierdzenie Baire'a implikuje, że istnieje $s_0\in\mathbb{N}$ takie, że $\operatorname{int}F_{s_0}\neq\varnothing$. Niech $\overline{B}(x_0,\tau)\subset F_{s_0}$. Teraz na podstawie wzoru polaryzacyjnego (Twierdzenie 9.1.5), dla $h_1,\dots,h_k\in\overline{B}(\tau/k)$, dostajemy $\|\widehat{Q}_k(h_1,\dots,h_k)\|\leqslant\frac{1}{k!}2^ks_0$, skąd wynika, że

$$\|\widehat{Q}_k\|\leqslant\frac{1}{k!}\frac{2^ks_0}{(\frac{\tau}{k})^k}=\frac{(2k)^k}{k!}\frac{s_0}{\tau^k}\leqslant e^{2k}\frac{s_0}{\tau^k}=\frac{s_0}{(e^{-2}\tau)^k},\quad k\in\mathbb{N}.$$ □

Obserwacja 10.12.4. Niech $Q_k\in\mathcal{H}^k(E,F)$, $k\in\mathbb{N}_0$. Wtedy, korzystając z Twierdzenia 9.1.12(a), wnioskujemy, że następujące warunki są równoważne:

(i) $\exists_{C,\,r>0}\,\forall_{k\in\mathbb{N}}\,\forall_{h_1,\dots,h_k\in\overline{B}(r)}:\ \|\widehat{Q}_k(h_1,\dots,h_k)\|\leqslant C$;
(ii) $\exists_{C,\,r>0}\,\forall_{k\in\mathbb{N}}:\ \|\widehat{Q}_k\|\leqslant\frac{C}{r^k}$;
(iii) $\exists_{C,\,r>0}\,\forall_{k\in\mathbb{N}}:\ \|Q_k\|\leqslant\frac{C}{r^k}$;
(iv) $\exists_{C,\,r>0}\,\forall_{k\in\mathbb{N}}\,\forall_{h\in\overline{B}(r)}:\ \|Q_k(h)\|\leqslant C$.

Twierdzenie 10.12.5. *Odwzorowanie $\operatorname{Isom}(E,F)\ni L\overset{\Lambda}{\longmapsto}L^{-1}\in\mathcal{L}(F,E)$ jest analityczne.*

Dowód. Ustalmy $L_0\in\operatorname{Isom}(E,F)$. Na podstawie Twierdzenia 6.4.4, dla dowolnego $H\in\mathcal{L}(E,F)$ takiego, że $\|H\|<1/\|L_0^{-1}\|$, mamy

$$\Lambda(L_0+H)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(L_0^{-1}\circ H)^k\circ L_0^{-1}=:\sum_{k=0}^{\infty}Q_k(H).$$

Zauważmy, że $Q_k(H)=\widetilde{Q}_k(H,\dots,H)$, gdzie

$$\widetilde{Q}_k(H_1,\dots,H_k):=(-1)^k(L_0^{-1}\circ H_1)\circ\dots\circ(L_0^{-1}\circ H_k)\circ L_0^{-1},\quad H_1,\dots,H_k\in\mathcal{L}(E,F).$$

Widać, że $\widetilde{Q}_k\in\mathcal{L}^k(\mathcal{L}(E,F),\mathcal{L}(F,E))$. □

Twierdzenie 10.12.6. *Niech $f(a+h):=\sum\limits_{k=0}^{\infty}Q_k(h)$, $h\in B(r)$, gdzie $Q_k\in\mathcal{H}^k(E,F)$, $\|\widehat{Q}_k\|\leqslant\frac{C}{r^k}$, $k\in\mathbb{N}_0$. Wtedy:*

(a) *$f\in\mathcal{C}^\omega(B(a,r),F)$;*
(b) *$f^{(j)}(a+h)=\sum\limits_{k=j}^{\infty}j!\binom{k}{j}\widehat{Q}_k(\underbrace{h,\dots,h}_{(k-j)\times},\underbrace{\cdot,\dots,\cdot}_{j\times})$, $h\in B(r)$ (równość w $\mathcal{H}^j(E,F)$), $j\in\mathbb{N}_0$; w szczególności, $\mathcal{C}^\omega(\Omega,F)\subset\mathcal{C}^\infty(\Omega,F)$;*
(c) *$Q_j=\frac{1}{j!}f^{(j)}(a)$, $j\in\mathbb{N}_0$, czyli $f(a+h)=T_af(h)$, $h\in B(r)$;*
(d) *$f^{(j)}\in\mathcal{C}^\omega(\Omega,\mathcal{H}^j(E,F))$ dla dowolnego odwzorowania $f\in\mathcal{C}^\omega(\Omega,F)$, $j\in\mathbb{N}$.*

Dowód. (a) Niech $b\in B(a,r)$ i niech $\varrho:=r-\|b-a\|$. Dla $\|h\|<\varrho$, policzmy formalnie

$$f(b+h)=f(a+(h+b-a))=\sum_{k=0}^{\infty}Q_k(h+(b-a))=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\widehat{Q}_k(\underbrace{h,\dots,h}_{j\times},\underbrace{b-a,\dots,b-a}_{(k-j)\times})$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=j}^{\infty}\binom{k}{j}\widehat{Q}_k(\underbrace{h,\dots,h}_{j\times},\underbrace{b-a,\dots,b-a}_{(k-j)\times}) =: \sum_{j=0}^{\infty} P_j(h).$$

Powyższe formalne przekształcenia staną się poprawne, jeżeli rodzina

$$\Big(\binom{k}{j}\widehat{Q}_k(\underbrace{h,\dots,h}_{j\times},\underbrace{b-a,\dots,b-a}_{(k-j)\times})\Big)_{(k,j)\in\mathbb{N}_0^2:\, j\leqslant k}$$

będzie sumowalna. Wynika to natychmiast z oszacowania

$$\Big\|\binom{k}{j}\widehat{Q}_k(\underbrace{h,\dots,h}_{j\times},\underbrace{b-a,\dots,b-a}_{(k-j)\times})\Big\| \leqslant \binom{k}{j}C\Big(\frac{\|h\|}{r}\Big)^j\Big(\frac{\|b-a\|}{r}\Big)^{k-j}.$$

Niech

$$\widehat{P}_j(h_1,\dots,h_j) := \sum_{k=j}^{\infty}\binom{k}{j}\widehat{Q}_k(h_1,\dots,h_j,\underbrace{b-a,\dots,b-a}_{(k-j)\times}),\quad h_1,\dots,h_j\in E.$$

Mamy

$$\Big\|\binom{k}{j}\widehat{Q}_k(h_1,\dots,h_j,\underbrace{b-a,\dots,b-a}_{(k-j)\times})\Big\| \leqslant \binom{k}{j}C\frac{\|h_1\|}{r}\cdots\frac{\|h_j\|}{r}\Big(\frac{\|b-a\|}{r}\Big)^{k-j},$$

a stąd

$$\Big\|\binom{k}{j}\widehat{Q}_k(\underbrace{\cdot,\dots,\cdot}_{j\times},\underbrace{b-a,\dots,b-a}_{(k-j)\times})\Big\| \leqslant C\Big(\frac{1}{r}\Big)^j\binom{k}{j}\Big(\frac{\|b-a\|}{r}\Big)^{k-j}.$$

Szereg definiujący $\widehat{P}_j$ jest zatem zbieżny w $\mathcal{L}^j_s(E,F)$, a stąd $\widehat{P}_j\in\mathcal{L}^j_s(E,F)$.

(b) W przestrzeni $\mathcal{L}(E,F)$ rozważmy szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty}Q'_k(h) = \sum_{k=1}^{\infty}k\widehat{Q}_k(\underbrace{h,\dots,h}_{(k-1)\times},\cdot)$$

(zob. Twierdzenie 10.5.11(b)). Dla $h\in\overline{B}(\theta r)$, $0<\theta<1$, mamy

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\|k\widehat{Q}_k(h,\dots,h,\cdot)\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leqslant k\theta^{k-1}\frac{C}{r}.$$

Zauważmy, że $\lim\limits_{k\to+\infty}\sqrt[k]{k\theta^{k-1}\frac{C}{r}} = \theta < 1$. Teraz wystarczy już tylko (Ćwiczenie) skorzystać z twierdzenia o różniczkowaniu szeregu wyraz po wyrazie (Twierdzenie 10.4.9) i Lematu 10.12.4.

(c) i (d) wynika z (b). □

Twierdzenie 10.12.7 (Zasada identyczności, por. Twierdzenie 6.7.3)**.** *Jeżeli Ω jest spójny, $f,g\in\mathcal{C}^\omega(\Omega,F)$ i $f=g$ na pewnym niepustym zbiorze otwartym $U\subset\Omega$, to $f\equiv g$.*

Dowód. Zastępując f,g przez $f-g,0$, sprowadzamy dowód do przypadku $g\equiv 0$. Niech $\Omega_0 := \{z_0\in\Omega : f=0 \text{ w pewnym otoczeniu otwartym punktu } z_0\}$. Wiemy, że $\Omega_0\neq\varnothing$. Wprost z definicji wynika, że Ω_0 jest otwarty. Pozostaje pokazać, że Ω_0 jest domknięty w Ω. Niech b będzie punktem skupienia Ω_0 w Ω. Wiemy, że $f\in\mathcal{C}^\infty$ oraz $f=0$ na Ω_0. Stąd $f^{(k)}(b)=0$, $k\in\mathbb{N}_0$. W takim razie $T_bf=0$, co oznacza, że $b\in\Omega_0$. □

Twierdzenie 10.12.8 (Por. Twierdzenie 6.9.3)**.** *Niech $\Omega\subset E$ będzie zbiorem otwartym i niech $f\in\mathcal{C}^\infty(\Omega,F)$. Wtedy*

$$f\in\mathcal{C}^\omega(\Omega,F) \iff \forall_{a\in\Omega}\ \exists_{C>0,\ B(a,r)\subset\Omega}\ \forall_{h\in B(r)}\ \forall_{k\in\mathbb{N}_0} :\ \frac{1}{k!}\|f^{(k)}(a+h)\| \leqslant \frac{C}{r^k}.$$

Dowód. ($\Longleftarrow$): Niech $a\in\Omega$ i niech $C,\ r>0$ będą takie, jak w warunku. Korzystając ze wzoru Taylora dla funkcji klasy $\mathcal{D}^{k+1}$ (Twierdzenie 10.7.3(c)), dla $h\in B(r)$ mamy:

$$\Big\|f(a+h)-\sum_{\nu=0}^{k}\frac{1}{\nu!}f^{(\nu)}(a)(h)\Big\| = \|R_k(f,a,a+h)\| \leqslant \frac{\sup_{x\in B(a,r)}\|f^{(k+1)}(x)\|}{(k+1)!}\|h\|^{k+1}$$

$$\leqslant C\Big(\frac{\|h\|}{r}\Big)^{k+1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

($\Longrightarrow$): Niech $a\in\Omega$. Przypuśćmy, że $f(a+h):=\sum\limits_{k=0}^{\infty} Q_k(h)$, $h\in B(2r)$, gdzie $Q_k\in\mathcal{H}^k(E,F)$, $\|\widehat{Q}_k\|\leqslant \frac{C}{(2r)^k}$, $k\in\mathbb{N}_0$, $B(a,2r)\subset\Omega$. Niech $\varphi(t):=\frac{1}{1-t}$. Korzystając z Twierdzenia 10.12.6(b) oraz z dowodu Twierdzenia 6.9.1(e), dostajemy dla $h\in B(r)$:

$$\|f^{(j)}(a+h)\|\leqslant \Big\|\sum_{k=j}^{\infty} j!\binom{k}{j}\widehat{Q}_k(\underbrace{h,\dots,h}_{(k-j)\times},\underbrace{\cdot,\dots,\cdot}_{j\times})\Big\|\leqslant C\sum_{k=j}^{\infty} j!\binom{k}{j}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{k-j}\Big(\frac{1}{2r}\Big)^{j}$$
$$= C\Big(\frac{1}{2r}\Big)^{j}\varphi^{(j)}(\tfrac{1}{2}) = C\Big(\frac{1}{2r}\Big)^{j} j!2^{j+1} = j!\frac{2C}{r^j},\quad j\in\mathbb{N}. \qquad \square$$

Twierdzenie 10.12.9 (Twierdzenie o składaniu odwzorowań analitycznych (por. Twierdzenie 6.9.4)). *Niech $U\in\operatorname{top}G$, $\Omega\in\operatorname{top}E$, niech $\varphi\in\mathcal{C}^\omega(U,E)$, $\varphi(U)\subset\Omega$, $f\in\mathcal{C}^\omega(\Omega,F)$. Wtedy $f\circ\varphi\in\mathcal{C}^\omega(U,F)$.*

Dowód. Oczywiście $f\circ\varphi\in\mathcal{C}^\infty(Q,F)$. Skorzystamy z Twierdzenia 10.12.8. Ustalmy $t_0\in U$. Dla uproszczenia zapisu możemy założyć, że $t_0=0$ i $\varphi(t_0)=0$. Niech $r,R,C,\varrho>0$, $\varrho<1$, będą takie, że $B(r)\subset U$, $\varphi(B(r))\subset B(R)$, $\frac{1}{k!}\|\varphi^{(k)}(t)\|\leqslant\frac{C}{\varrho^k}$, $\|t\|<r$, $\frac{1}{k!}\|f^{(k)}(x)\|\leqslant\frac{C}{\varrho^k}$, $\|x\|<R$, $k\in\mathbb{N}_0$, przy czym normę $\|f^{(k)}(x)\|$ rozumiemy w sensie odwzorowania k-liniowego. Teraz skorzystamy z Twierdzenia 10.7.6. Dla $\|t\|<r$ i $\|\xi\|\leqslant 1$ mamy:

$$\frac{1}{k!}\|(f\circ\varphi)^{(k)}(t)(\xi)\| = \Big\|\sum_{\alpha\in\Pi_k}\frac{1}{\alpha!}f^{(\alpha_1+\dots+\alpha_k)}(\varphi(t))\Big(\underbrace{\frac{\varphi'(t)(\xi)}{1!}}_{\alpha_1\times},\dots,\underbrace{\frac{\varphi^{(k)}(t)(\xi)}{k!}}_{\alpha_k\times}\Big)\Big\|$$
$$\leqslant \sum_{\alpha\in\Pi_k}\frac{(\alpha_1+\dots+\alpha_k)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}\frac{C}{\varrho^{\alpha_1+\dots+\alpha_k}}\Big(\frac{C}{\varrho}\Big)^{\alpha_1}\cdots\Big(\frac{C}{\varrho^k}\Big)^{\alpha_k}$$
$$= \frac{C}{\varrho^k}\sum_{\alpha\in\Pi_k}\frac{(\alpha_1+\dots+\alpha_k)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}\Big(\frac{C}{\varrho}\Big)^{\alpha_1+\dots+\alpha_k}\leqslant\frac{C}{\varrho^k}2^{k-1}\Big(\frac{C}{\varrho}\Big)^{k}=\frac{C/2}{(\frac{\varrho^2}{2C})^k},$$

gdzie ostatnia nierówność wynika ze wzoru $\sum\limits_{\alpha\in\Pi_k}\frac{(\alpha_1+\dots+\alpha_k)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}=2^{k-1}$ (zob. dowód Twierdzenia 6.9.4). $\square$

Twierdzenie 10.12.10 (Twierdzenie o odwzorowaniu odwrotnym do odwzorowania analitycznego (por. Twierdzenie 6.9.5)). *Niech $U\in\operatorname{top}E$, $V\operatorname{top}F$ i niech $f:U\longrightarrow V$ będzie bijekcją klasy $\mathcal{C}^\omega(U,F)$. Wtedy jeżeli $f'(a)\in\operatorname{Isom}(E,F)$ dla pewnego $a\in U$, to funkcja $g:=f^{-1}$ jest klasy $\mathcal{C}^\omega$ w pewnym otoczeniu punktu $b:=f(a)$.*

Dowód. Możemy założyć, że $f'(x)\in\operatorname{Isom}(E,F)$ dla $x\in U$. Wiemy, że $g\in\mathcal{C}^\infty(V,E)$ (Twierdzenie 10.2.8). Pokażemy, ze $g\in\mathcal{C}^\omega(V,E)$. Skorzystamy z Twierdzenia 10.12.8. Ustalmy $y_0\in V$. Możemy założyć, że $y_0=0$, $g(y_0)=0$. Ustalmy $r>0$, $R>0$ takie, że $B(r)\subset V$, $g(B(r))\subset B(R)\subset U$. Wiemy, że $f'\in\mathcal{C}^\omega(U,\mathcal{L}(E,F))$ (Twierdzenie 10.12.6(d)). Niech $h:=\Lambda\circ f'\in\mathcal{C}^\omega(U,\mathcal{L}(F,E))$ (Twierdzenia 10.12.5 i 10.12.9). Po ewentualnym zmniejszeniu r i R, istnieją zatem stałe $C>0$, $0<\varrho<1$ takie, że

$$\frac{1}{s!}\|h^{(s)}(x)\|\leqslant\frac{C}{\varrho^s},\quad x\in B(R),\ s\in\mathbb{N}_0. \tag{†}$$

Udowodnimy indukcyjnie, że

$$\frac{1}{k!}\|g^{(k)}(y)\|\leqslant\frac{C_k}{\varrho^{k-1}},\quad y\in B(r),\ k\in\mathbb{N}. \tag{‡}$$

gdzie

$$C_k:=(2C)^k(-1)^{k-1}\binom{\frac{1}{2}}{k}=(2C)^k(-1)^{k-1}\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!}>0.$$

Zauważmy, że $\lim\limits_{k\to+\infty}\sqrt[k]{C_k}=2C$ (Ćwiczenie), a więc (‡) zakończy dowód. Ponieważ, $g'=h\circ g$, przypadek $k=1$ wynika natychmiast z (†) z $s=0$. Teraz $k\rightsquigarrow k+1$. Dla $y\in B(r)$ i $\|\xi\|\leqslant 1$ mamy:

$$\frac{1}{(k+1)!}\|g^{(k+1)}(y)(\xi)\| = \frac{1}{(k+1)!}\|(h\circ g)^{(k)}(y)(\xi)\|$$

$$= \frac{1}{k+1}\Big\| \sum_{\alpha\in\Pi_k} \frac{1}{\alpha!} h^{(\alpha_1+\cdots+\alpha_k)}(g(y))\Big(\underbrace{\frac{g'(y)(\xi)}{1!}}_{\alpha_1\times},\dots,\underbrace{\frac{g^{(k)}(y)(\xi)}{k!}}_{\alpha_k\times}\Big)$$

$$\leqslant \frac{1}{k+1}\sum_{\alpha\in\Pi_k} \frac{(\alpha_1+\cdots+\alpha_k)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}\frac{C}{\varrho^{\alpha_1+\cdots+\alpha_k}}\Big(\frac{C_1}{\varrho^{1-1}}\Big)^{\alpha_1}\cdots\Big(\frac{C_k}{\varrho^{k-1}}\Big)^{\alpha_k}$$

$$= \frac{C}{\varrho^k}\frac{1}{k+1}\sum_{\alpha\in\Pi_k} \frac{(\alpha_1+\cdots+\alpha_k)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}\Big((2C)^1(-1)^{1-1}\binom{\frac12}{1}\Big)^{\alpha_1}\cdots\Big((2C)^k(-1)^{k-1}\binom{\frac12}{k}\Big)^{\alpha_k}$$

$$= \frac{(2C)^{k+1}}{\varrho^k}\frac{(-1)^k}{2(k+1)}\sum_{\alpha\in\Pi_k} \frac{(-1)^{\alpha_1+\cdots+\alpha_k}(\alpha_1+\cdots+\alpha_k)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}\binom{\frac12}{1}^{\alpha_1}\cdots\binom{\frac12}{k}^{\alpha_k}$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{(2C)^{k+1}}{\varrho^k}\frac{(-1)^k}{2(k+1)}2(k+1)\binom{\frac12}{k+1} = \frac{C_{k+1}}{\varrho^k},$$

gdzie (*) wynika ze wzoru

$$\sum_{\alpha\in\Pi_k} \frac{(-1)^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}(\alpha_1+\cdots+\alpha_k)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}\binom{\frac12}{1}^{\alpha_1}\cdots\binom{\frac12}{k}^{\alpha_k} = 2(k+1)\binom{\frac12}{k+1}.$$

(zob. dowód Twierdzenia 6.9.5). □

10.13. Dyfeomorfizmy

Definicja 10.13.1. Załóżmy, że E, F, G są przestrzeniami Banacha, $U \in \operatorname{top} E$, $V \in \operatorname{top} F$ i niech $\mathcal{F} \in \{\mathcal{D}^k, \mathcal{C}^k\}$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}\cup\{\infty,\omega\}$. Powiemy, że bijekcja $f : U \longrightarrow V$ jest *dyfeomorfizmem klasy* $\mathcal{F}$, jeżeli $f \in \mathcal{F}(U,F)$ oraz $g := f^{-1} \in \mathcal{F}(V,E)$.

Obserwacja 10.13.2. Jeżeli $f : U \longrightarrow V$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{D}^1$, to różniczkując związki $g\circ f = \mathrm{id}_U$, $f\circ g = \mathrm{id}_V$, łatwo wnioskujemy, że $f'(x) \in \operatorname{Isom}(E,F)$, $x \in U$, oraz $g'(y) = (f'(g(y))^{-1} \in \operatorname{Isom}(F,E)$, $y \in V$. Innymi słowy, $g' = \Lambda\circ f'\circ g$, gdzie $\Lambda : \operatorname{Isom}(E,F) \longrightarrow \operatorname{Isom}(F,E)$ oznacza operator odwracania (Twierdzenie 6.4.4).

Twierdzenie 10.13.3. *Załóżmy, że $U \in \operatorname{top} E$, $V \in \operatorname{top} F$ i $f : U \longrightarrow V$ jest homeomorfizmem takim, że $f \in \mathcal{D}(\Omega,F)$ i $f'(x) \in \operatorname{Isom}(E,F)$, $x \in U$. Wtedy:*

(a) *Jeżeli f jest klasy $\mathcal{D}^k$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, to f jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{D}^k$.*
(b) *Jeżeli f jest klasy $\mathcal{C}^k$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$, to f jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$.*
(c) *Jeżeli f jest klasy $\mathcal{C}^\omega$, to f jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^\omega$.*

Dowód. (a) Na podstawie Twierdzenia 10.2.8 f jest $\mathcal{D}^1$-dyfeomorfizmem oraz $g' = \Lambda\circ f'\circ g$. Przypuśćmy, że g jest klasy $\mathcal{D}^\ell$ dla $\ell \leqslant k-1$. Wtedy ze wzoru $g' = \Lambda\circ f'\circ g$ wynika, że g' jest klasy $\mathcal{D}^\ell$. Znaczy to, że g jest klasy $\mathcal{D}^{\ell+1}$.

(b) Dowód jest analogiczny jak w (a) — Ćwiczenie.

(c) wynika z Twierdzenia 10.12.10. □

10.14. Twierdzenie o odwzorowaniu odwrotnym i twierdzenie o odwzorowaniu uwikłanym

Twierdzenie 10.14.1 (Twierdzenie o odwzorowaniu odwrotnym)**.** *Załóżmy, że E, F są przestrzeniami Banacha, $\Omega \in \operatorname{top} E$ i $f \in \mathcal{C}^k(\Omega,F)$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}\cup\{\infty,\omega\}$. Załóżmy, że punkt $a \in \Omega$ jest taki, że $f'(a) \in \operatorname{Isom}(E,F)$. Wtedy istnieje otoczenie otwarte $U \subset \Omega$ punktu a takie, że:*

$V := f(U)$ jest zbiorem otwartym,

$f|_U : U \longrightarrow V$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$.

Obserwacja 10.14.2. Rozważmy dla treningu przypadek $E = F = \mathbb{R}$. Założenie $f'(a) \in \operatorname{Isom}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ oznacza oczywiście, że $f'(a) \neq 0$. Istnieje więc przedział otwarty $U \subset \Omega$ taki, że $a \in U$ oraz $f'(x) \neq 0$ dla dowolnego $x \in U$ (w szczególności, funkcja $f|_U$ jest ściśle monotoniczna). Zbiór $V := f(U)$ jest wtedy przedziałem otwartym. Na podstawie Twierdzenia 5.5.5, $f|U$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$ dla $k \leqslant +\infty$. Przypadek $k = \omega$ wynika z Twierdzenia 6.9.5.

Twierdzenie 10.14.3 (Twierdzenie o odwzorowaniu uwikłanym). *Załóżmy, że E_1, E_2, F są przestrzeniami Banacha, $\Omega \in \operatorname{top} E_1 \times E_2$ i $f \in \mathcal{C}^k(\Omega, F)$ dla pewnego $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$. Załóżmy, że punkt $a = (a_1, a_2) \in \Omega$ jest taki, że $\frac{\partial f}{\partial E_2}(a) \in \operatorname{Isom}(E_2, F)$. Wtedy istnieją otoczenia otwarte $U_1 \subset E_1, U_2 \subset E_2$ punktów a_1 i a_2 oraz odwzorowanie $\varphi : U_1 \longrightarrow U_2$ klasy $\mathcal{C}^k$ takie, że $U_1 \times U_2 \subset \Omega$, $\{x \in U_1 \times U_2 : f(x) = f(a)\} = \{(t, \varphi(t)) : t \in U_1\}$.*

Obserwacja 10.14.4. Zauważmy, że $\varphi'(t) = -\Big(\frac{\partial f}{\partial E_2}(t, \varphi(t))\Big)^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial E_1}(t, \varphi(t))$ dla $t \in U_1$ takich, że $\frac{\partial f}{\partial E_2}(t, \varphi(t)) \in \operatorname{Isom}(E_2, F)$. Istotnie, mamy $f(t, \varphi(t)) = f(a)$ dla dowolnego $t \in U_1$. Różniczkując dostajemy

$$\frac{\partial f}{\partial E_1}(t, \varphi(t)) + \frac{\partial f}{\partial E_2}(t, \varphi(t)) \circ \varphi'(t) = 0.$$

Obserwacja 10.14.5. Rozważmy dla treningu przypadek $E_1 = E_2 = F = \mathbb{R}$. Niech $(a, b) \in \Omega$ będzie ustalonym punktem takim, że $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$. Możemy założyć, że $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) > 0$ dla dowolnego $(x, y) \in \Omega$ oraz, że Ω jest prostokątem. Ustalmy $\varepsilon > 0$ takie, że $(a, b \pm \varepsilon) \in \Omega$. Oczywiście

$$f(a, b - \varepsilon) < f(a, b) < f(a, b + \varepsilon).$$

Niech $\delta > 0$ będzie takie, że $f(x, b-\varepsilon) < f(a, b) < f(x, b+\varepsilon)$, $x \in (a-\delta, a+\delta)$. Wynika stąd, że dla dowolnego $x \in (a - \delta, a + \delta)$ istnieje dokładnie jeden punkt $y = \varphi(x) \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ taki, że $f(x, \varphi(x)) = f(a, b)$.

Pozostaje sprawdzić, że $\varphi : (a - \delta, a + \delta) \longrightarrow (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ jest klasy $\mathcal{C}^k$. Na wstępie zauważmy, że powtarzając powyższe rozumowanie dla dowolnego punktu $(x_0, y_0) \in P := (a - \delta, a + \delta) \times (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ i dowolnego $0 < \varepsilon^* \ll 1$, wnioskujemy, że istnieje $\delta^* > 0$ oraz funkcja

$$\varphi^* : (x_0 - \delta^*, x_0 + \delta^*) \longrightarrow (y_0 - \varepsilon^*, y_0 + \varepsilon^*)$$

takie, że $P^* := (x_0 - \delta^*, x_0 + \delta^*) \times (y_0 - \varepsilon^*, y_0 + \varepsilon^*) \subset P$ oraz $y = \varphi^*(x)$ jest jedynym rozwiązaniem równania $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ w prostokącie P^*. Jeżeli $y_0 = \varphi(x_0)$, to oczywiście $\varphi^* = \varphi$ na $(x_0 - \delta^*, x_0 + \delta^*)$, co w szczególności, wobec dowolności ε^*, oznacza, że φ jest funkcją ciągłą.

Zauważmy, że cały problem leży w różniczkowalności φ. Jeżeli bowiem φ jest różniczkowalna, to równość $f(x, \varphi(x)) = f(a, b)$ implikuje, że

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))\ \varphi'(x) = 0, \text{ a stąd} \tag{*}$$

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}, \quad x \in (a - \delta, a + \delta),$$

co z kolei pokazuje, że φ' jest funkcją ciągłą, a więc φ jest klasy $\mathcal{C}^1$. Jeżeli już wiemy, że φ jest klasy $\mathcal{C}^\ell$ dla pewnego $\ell \in \{1, \dots, k-1\}$, to powyższa równość pokazuje, że φ jest klasy $\mathcal{C}^{\ell+1}$.

Przechodzimy do różniczkowalności. Ustalmy $x_0 \in (a - \delta, a + \delta)$. Dla małych $h \in \mathbb{R}$ mamy:

$$0 = f(x_0 + h, \varphi(x_0 + h)) - f(x_0, \varphi(x_0)) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(h), \varphi(x_0 + h))h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta(h))(\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)),$$

gdzie $\xi(h) \in [x_0, x_0 + h]$ i $\eta(h) \in [\varphi(x_0), \varphi(x_0 + h)]$. Wynika stąd, że

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(h), \varphi(x_0 + h)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta(h))\frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h}.$$

Teraz przechodząc z h do 0 (i korzystając z ciągłości φ) otrzymujemy różniczkowalność funkcji φ w punkcie x_0.

Jeżeli $k \geqslant 2$, to różniczkując (*), dostajemy

$$f''_{x,x}(x, \varphi(x)) + 2f''_{x,y}(x, \varphi(x))\ \varphi'(x) + f''_{y,y}(x, \varphi(x))(\varphi'(x))^2 + f'_y(x, \varphi(x))\ \varphi''(x) = 0;$$

stosujemy tu tradycyjne oznaczenia $f'_x := \frac{\partial f}{\partial x}$, $f''_{x,y} := \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ itd. Stąd, po uwzględnieniu (*), mamy (dla uproszczenia zapisu pomijamy argument funkcji φ):

$$\varphi''(x) = -\frac{f''_{x,x}(x, \varphi)(f'_y(x, \varphi))^2 - 2f''_{x,y}(x, \varphi)f'_x(x, \varphi)f'_y(x, \varphi) + f''_{y,y}(x, \varphi)(f'_x(x, \varphi))^2}{(f'_y(x, \varphi))^3}$$

(Ćwiczenie). W szczególności, jeżeli $\varphi'(x_0) = 0$ dla pewnego x_0, to

$$\varphi''(x_0) = -\frac{f''_{x,x}(x_0, \varphi(x_0))}{f'_y(x_0, \varphi(x_0))}.$$

Prowadzi to do następującego warunku dostatecznego na ekstrema lokalne funkcji $y = \varphi(x)$ uwikłanej równaniem $f(x,y) = 0$, gdzie $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (Ćwiczenie):

Jeżeli $f'_y(a,b) \neq 0$, $f'_x(a,b) = 0$, $f''_{x,x}(a,b) \neq 0$, to równanie $f(x,y) = 0$ da się w otoczeniu punktu (a,b) rozwikłać oraz funkcja uwikłana $y = \varphi(x)$, $\varphi(a) = b$, ma w punkcie a ekstremum lokalne; ponadto, jeżeli $f''_{x,x}(a,b)f'_y(a,b) < 0$, to jest to minimum, a w przypadku przeciwnym — maksimum.

Ćwiczenie 10.14.6. Korzystając z metody użytej w poprzedniej obserwacji, przeprowadzić dowód twierdzenia o odwzorowaniu uwikłanym w przypadku, gdy $E_1 = \mathbb{R}^n$, $E_2 = F = \mathbb{R}$. W przypadku, gdy $k \geqslant 2$, wyprowadzić wzór na $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k}$. Korzystając z tych wzorów, sformułować warunek dostateczny na ekstrema lokalne funkcji $y = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ uwikłanej równaniem $f(x_1, \dots, x_n, y) = 0$, gdzie $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Dowód tego, że twierdzenie o odwzorowaniu uwikłanym implikuje twierdzenie o odwzorowaniu odwrotnym. Niech E, F, Ω, f, a będą takie, jak w założeniach twierdzenia o odwzorowaniu odwrotnym. Zdefiniujmy

$$E_1 := F, \quad E_2 := E, \quad \widetilde{\Omega} := F \times \Omega, \quad \widetilde{a} := (f(a), a), \quad \widetilde{f} : \widetilde{\Omega} \longrightarrow F, \quad \widetilde{f}(y,x) := f(x) - y.$$

Zauważmy, że $\widetilde{f}$ jest klasy $\mathcal{C}^k$, $\widetilde{f}(\widetilde{a}) = 0$ oraz $\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial E_2}(\widetilde{a}) = f'(a) \in \mathrm{Isom}(E_2, F)$. Niech $\widetilde{U}_1, \widetilde{U}_2$ i g będą takie, jak w twierdzeniu o odwzorowaniu uwikłanym dla $E_1, E_2, F, \widetilde{\Omega}, \widetilde{f}, \widetilde{a}$, tzn. $\widetilde{U}_1 \subset F$, $\widetilde{U}_2 \subset \Omega$ są otwarte, $g : \widetilde{U}_1 \longrightarrow \widetilde{U}_2$ jest klasy $\mathcal{C}^k$ oraz

$$\{(y,x) \in \widetilde{U}_1 \times \widetilde{U}_2 : y = f(x)\} = \{(y, g(y)) : y \in \widetilde{U}_1\}. \tag{†}$$

Niech $U := \widetilde{U}_2 \cap f^{-1}(\widetilde{U}_1)$, $V := \widetilde{U}_1$. Wobec (†) wnioskujemy, że $f|_U : U \longrightarrow V$ jest bijekcją oraz $(f|_U)^{-1} = g$. □

Dowód tego, że twierdzenie o odwzorowaniu odwrotnym implikuje twierdzenie o odwzorowaniu uwikłanym. Niech $E_1, E_2, F, \Omega, f, a$ będą takie, jak w założeniach twierdzenia o odwzorowaniu uwikłanym. Zdefiniujmy

$$\widetilde{E} := E_1 \times E_2, \quad \widetilde{F} := E_1 \times F, \quad \widetilde{f} : \Omega \longrightarrow \widetilde{F}, \quad \widetilde{f}(x_1, x_2) := (x_1, f(x_1, x_2)).$$

Oczywiście, $\widetilde{f}$ jest klasy $\mathcal{C}^k$, $\widetilde{f}(a) = (a_1, f(a))$ oraz

$$\widetilde{f}'(a)(X_1, X_2) = \Big(X_1, \frac{\partial f}{\partial E_1}(a)(X_1) + \frac{\partial f}{\partial E_2}(a)(X_2)\Big) =: (X_1, A(a)(X_1) + B(a)(X_2)), \ (X_1, X_2) \in E_1 \times E_2.$$

W szczególności, $\widetilde{f}'(a) \in \mathrm{Isom}(\widetilde{E}, \widetilde{F})$ ponieważ

$$(\widetilde{f}'(a))^{-1}(Y_1, Y_2) = (Y_1, (B(a))^{-1}(Y_2 - A(a)(Y_1))), \quad (Y_1, Y_2) \in E_1 \times F.$$

Niech teraz $\widetilde{U}, \widetilde{V}$ będą takie, jak w twierdzeniu o odwzorowaniu odwrotnym dla $\widetilde{E}, \widetilde{F}, \Omega, \widetilde{f}$ i a, tzn. $\widetilde{U} \subset \Omega$ jest otwartym otoczeniem a, $\widetilde{V} \subset \widetilde{F}$ jest otwarty i $\widetilde{f}|_{\widetilde{U}} : \widetilde{U} \longrightarrow \widetilde{V}$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$. Oczywiście $\widetilde{f}'(x) \in \mathrm{Isom}(\widetilde{E}, \widetilde{F})$ dla dowolnego $x \in \widetilde{U}$. Wynika stąd, że $\frac{\partial f}{\partial E_2}(x) \in \mathrm{Isom}(E_2, F), \quad x \in \widetilde{U}$. Istotnie, ponieważ

$$\widetilde{f}'(x)(X_1, X_2) = \Big(X_1, \frac{\partial f}{\partial E_1}(x)(X_1) + \frac{\partial f}{\partial E_2}(x)(X_2)\Big) \\ =: (X_1, A(x)(X_1) + B(x)(X_2)), \quad (X_1, X_2) \in E_1 \times E_2,$$

zatem dla $x \in \widetilde{U}$ mamy: $(B(x))^{-1}(Y) = \mathrm{pr}_{E_2}((\widetilde{f}'(x))^{-1}(0, Y)), Y \in F$. Niech $\widetilde{g} := (\widetilde{f}|_{\widetilde{U}})^{-1}$. Z postaci odwzorowania $\widetilde{f}$ wynika, że $\widetilde{g}(x_1, y) = (x_1, h(x_1, y))$, $(x_1, y) \in \widetilde{V}$, gdzie $h : \widetilde{V} \longrightarrow E_2$ jest pewnym odwzorowaniem klasy $\mathcal{C}^k$, dla którego $h(a_1, f(a)) = a_2$. Zdefiniujmy

$$W := \{x_1 \in E_1 : (x_1, f(a)) \in \widetilde{V}\}, \quad \varphi(x_1) := h(x_1, f(a)).$$

Zauważmy, że $\varphi(a_1) = a_2$. Dobierzmy teraz otoczenia otwarte $U_1 \subset E_1$ i $U_2 \subset E_2$ punktów a_1 i a_2 tak, że $U_1 \times U_2 \subset \widetilde{U}$, $U_1 \subset W$ i $\varphi(U_1) \subset U_2$. Liczymy

$$\{(t, \varphi(t)) : t \in U_1\} = \{(x_1, h(x_1, f(a))) : x_1 \in U_1\} = \{\widetilde{g}(x_1, f(a)) : x_1 \in U_1\} \\ = \{(x_1, x_2) \in \widetilde{U} : x_1 \in U_1, \ f(x_1, x_2) = f(a)\} = \{x \in U_1 \times U_2 : f(x) = f(a)\}. \quad \square$$

Dowód twierdzenia o odwzorowaniu odwrotnym.

Lemat 10.14.7. *Niech E, F będą przestrzeniami Banacha, niech $\Omega \subset E$ będzie zbiorem otwartym i niech $f : \Omega \longrightarrow F$ będzie odwzorowaniem różniczkowalnym takim, że f' jest ciągła w x_0 oraz $f'(x_0) \in \mathrm{Isom}(E,F)$ dla pewnego $x_0 \in \Omega$. Wtedy, dla dostatecznie małych $\tau > 0$, zbiór $f(B(x_0,\tau))$ jest otoczeniem punktu $f(x_0)$.*

Dowód. Niech $P : \widetilde{E} \longrightarrow E$, $Q : F \longrightarrow \widetilde{F}$ będą dowolnymi dyfeomorfizmami klasy $\mathcal{C}^1$, gdzie $\widetilde{E}$ i $\widetilde{F}$ są przestrzeniami Banacha. Zdefiniujmy

$$\widetilde{\Omega} := P^{-1}(\Omega), \quad \widetilde{f} := Q \circ f \circ P : \widetilde{\Omega} \longrightarrow \widetilde{F}, \quad \widetilde{x}_0 := P^{-1}(x_0).$$

Zauważmy, że $\widetilde{f}'(\widetilde{x}_0) \in \mathrm{Isom}(\widetilde{E},\widetilde{F})$. Jest rzeczą widoczną, że wystarczy pokazać, że dla dostatecznie małych $\widetilde{\tau} > 0$ zbiór $\widetilde{f}(B(\widetilde{x}_0,\widetilde{\tau}))$ zawiera pewne otoczenie punktu $\widetilde{f}(\widetilde{x}_0)$.

Powyższa uwaga pozwala najpierw zredukować problem do przypadku $x_0 = 0$ i $f(x_0) = 0$ (poprzez translacje: $\widetilde{E} := E$, $P(x) = x + x_0$, $\widetilde{F} := F$, $Q(y) := y - f(x_0)$), a następnie do przypadku $F = E$ i $f'(0) = -\mathrm{id}_E$ (biorąc $\widetilde{E} := E$, $P := \mathrm{id}_E$, $\widetilde{F} := E$, $Q := -(f'(0))^{-1}$).

Ustalmy $\tau > 0$ takie, że $X := \overline{B}(\tau) \subset \Omega$ oraz $\|f'(x) + \mathrm{id}_E\| \leqslant \frac{1}{2}, \quad x \in X$. Pokażemy, że $B(\frac{\tau}{2}) \subset f(X)$. Ustalmy $y^* \in B(\frac{\tau}{2})$ i niech $T : X \longrightarrow E$, $T(x) := f(x) - y^* + x$. Zauważmy, że jeżeli $T(x^*) = x^*$, to $f(x^*) = y^*$. Będziemy chcieli zastosować twierdzenie Banacha o punkcie stałym Na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych, dla $x', x'' \in X$, mamy

$$\begin{aligned}\|T(x') - T(x'')\| &= \|f(x') - f(x'') + (x' - x'')\| \\ &\leqslant \sup\{\|f'(x) + \mathrm{id}_E\| : x \in [x', x'']\}\|x' - x''\| \leqslant \tfrac{1}{2}\|x' - x''\|.\end{aligned}$$

Stąd, dla $x \in X$, mamy $\|T(x)\| \leqslant \|T(x) - T(0)\| + \|T(0)\| \leqslant \frac{1}{2}\|x\| + \|y^*\| \leqslant \tau$. □

Przechodzimy do zasadniczego dowodu twierdzenia o odwzorowaniu odwrotnym. Niech E, F, Ω, f, a będą takie, jak w założeniach. Ponieważ zbiór $\mathrm{Isom}(E,F)$ jest otwarty w $\mathcal{L}(E,F)$, a operator odwracania Λ jest homeomorfizmem, możemy założyć, że $f'(x) \in \mathrm{Isom}(E,F)$ dla dowolnego $x \in \Omega$. Niech $A := f'(a)$, $\eta := 1/\|A^{-1}\|$. Ustalmy dowolną kulę $B(a,r) \subset \Omega$ tak małą, by $\|f'(x) - A\| \leqslant \frac{\eta}{2}$, $x \in B(a,r)$. Teraz, na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych, dla dowolnych $x', x'' \in B(a,r)$ mamy:

$$\begin{aligned}\|f(x') - f(x'')\| &\geqslant \|A(x' - x'')\| - \|f(x') - f(x'') - A(x' - x'')\| \\ &\geqslant \eta\|x' - x''\| - \sup\{\|f'(x) - A\| : x \in [x', x'']\}\|x' - x''\| \geqslant \frac{\eta}{2}\|x' - x''\|.\end{aligned}$$

Wynika stąd, że $f|_{B(a,r)}$ jest odwzorowaniem injektywnym oraz, że odwzorowanie

$$g := (f|_{B(a,r)})^{-1} : f(B(a,r)) \longrightarrow B(a,r)$$

jest ciągłe (spełnia warunek Lipschitza). Wobec Twierdzenia 10.2.8, pozostaje jeszcze zauważyć, że $f(B(a,r))$ jest zbiorem otwartym, co wynika z Lematu 10.14.7. □ □

W przypadku, gdy $E = F = \mathbb{R}^n$, twierdzenie o odwzorowaniu odwrotnym można istotnie wzmocnić.

Twierdzenie 10.14.8 (Twierdzenie o odwzorowaniu odwrotnym). *Załóżmy, że $\Omega \in \mathrm{top}\,\mathbb{R}^n$, $a \in \Omega$ i $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ jest odwzorowaniem różniczkowalnym takim, że:*

- *pochodna f' jest ciągła w punkcie $a \in \Omega$,*
- *$f'(a) \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ (tzn. $\det Jf(a) \neq 0$).*

Wtedy istnieje otoczenie otwarte $U \subset \Omega$ punktu a takie, że

- *$V := f(U)$ jest zbiorem otwartym,*
- *$f|_U : U \longrightarrow V$ jest $\mathcal{D}^1$-dyfeomorfizmem.*

Dowód. Zachowajmy oznaczenia z dowodu Twierdzenia 10.14.1. Tak jak poprzednio, znajdujemy $r > 0$ takie, że $\det Jf(x) \neq 0$ dla dowolnego $x \in \mathbb{B}(a,r) \subset\subset \Omega$ oraz

$$\|f(x') - f(x'')\| \geqslant \frac{\eta}{2}\|x' - x''\|, \quad x', x'' \in \mathbb{B}(a,r)$$

(wszystkie obliczenia wykonujemy w normie euklidesowej), gdzie $0 < \eta \leqslant \min\{1/\|A^{-1}\|,\ 1\}$, $A := f'(a)$. W szczególności, $f|_{\mathbb{B}(a,r)}$ jest odwzorowaniem injektywnym oraz odwzorowanie $g := (f|_{\mathbb{B}(a,r)})^{-1} : f(\mathbb{B}(a,r)) \longrightarrow \mathbb{B}(a,r)$ jest ciągłe. Podobnie jak poprzednio, pozostaje jeszcze pokazać, że zbiór $f(\mathbb{B}(a,r))$ jest otwarty. Poprzednio robiliśmy to w oparciu o Lemat 10.14.7 (którego użycie wymagało założenia, że f' jest ciągła w każdym punkcie $x_0 \in \mathbb{B}(a,r)$). Obecnie zastosujemy inną metodę.

Ustalmy punkt $x_0 \in \mathbb{B}(a,r)$. Wystarczy pokazać, że $\mathbb{B}(f(x_0),\tau) \subset f(\mathbb{B}(x_0,r_0))$, gdzie

$$r_0 := r - \|x_0 - a\|, \quad \tau := (\eta/4)r_0.$$

Ustalmy $y^* \in \mathbb{B}(f(x_0),\tau)$. Szukamy $x^* \in \mathbb{B}(x_0,r_0)$ tak, by $f(x^*) = y^*$.

Niech $T(x) := \|f(x) - y^*\|$, $x \in \Omega$. Odnotujmy, że T^2 jest odwzorowaniem różniczkowalnym oraz

$$(T^2)'(x)(X) = 2\langle f(x) - y^*, f'(x)(X)\rangle, \quad x \in \Omega,\ X \in \mathbb{R}^n.$$

Wynika stąd w szczególności, że jeżeli $(T^2)'(x) = 0$ i $\det Jf(x) \neq 0$, to $f(x) = y^*$.

Ustalmy $0 < s < r_0$ tak, by $y^* \in \mathbb{B}(f(x_0),(\eta/4)s)$. Ponieważ $\overline{\mathbb{B}}(x_0,s)$ jest zbiorem zwartym (tu korzystamy istotnie z założenia, iż $E = F = \mathbb{R}^n$), zatem istnieje punkt $x^* \in \overline{\mathbb{B}}(x_0,s)$ taki, że $T(x^*) = \min\{T(x) : x \in \overline{\mathbb{B}}(x_0,s)\}$. Zauważmy, że $T(x_0) < (\eta/4)s$, a więc $T(x^*) < (\eta/4)s$. Pokażemy, że $x^* \in \mathbb{B}(x_0,s)$. Przypuśćmy, że $\|x^* - x_0\| = s$. Wtedy

$$T(x^*) = \|f(x^*) - f(x_0) - (y^* - f(x_0))\| \geqslant \|f(x^*) - f(x_0)\| - \|y^* - f(x_0)\| > (\eta/2)\|x^* - x_0\| - (\eta/4)s = (\eta/4)s;$$

sprzeczność.

Tak więc $x^* \in \mathbb{B}(x_0,s)$, a stąd $(T^2)'(x^*) = 0$, co wobec poprzedniej obserwacji, daje $f(x^*) = y^*$. □

10.15. Twierdzenie o rzędzie

Twierdzenie 10.15.1 (Twierdzenie o rzędzie). *Niech $\Omega \in \operatorname{top}\mathbb{R}^n$ i niech $f \in \mathcal{C}^k(\Omega,\mathbb{R}^m)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty,\ \omega\}$, będzie odwzorowaniem takim, że $\operatorname{rank} f'(x) = r$, $x \in \Omega$, dla pewnego $r \in \{0,\dots,\min\{n,m\}\}$. Niech $\Delta := (-1,1) \subset \mathbb{R}$. Wtedy dla dowolnego punktu $a \in \Omega$ istnieje:*

- *otoczenie otwarte $U \subset \Omega$ punktu a,*
- *otoczenie otwarte $V \subset \mathbb{R}^m$ punktu $f(a)$, $f(U) \subset V$,*
- *dyfeomorfizm klasy $\mathcal{C}^k$ $\Phi : \Delta^n \longrightarrow U$, $\Phi(0) = a$,*
- *dyfeomorfizm klasy $\mathcal{C}^k$ $\Psi : V \longrightarrow \Delta^m$, $\Psi(f(a)) = 0$,*

takie, że $(\Psi \circ f \circ \Phi)(t_1,\dots,t_n) = (t_1,\dots,t_r,0,\dots,0)$, $(t_1,\dots,t_n) \in \Delta^n$.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\ f\ } & V \\ {\scriptstyle\Phi}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle\Psi} \\ \Delta^n & \xrightarrow{(\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^d},0)} & \Delta^m \end{array}$$

Dowód. Przypadek $r = 0$: Wtedy $f \equiv f(a) = \text{const}$ w składowej spójnej zbioru Ω, do której należy punkt a. Dobierzmy $\tau > 0$ takie, że $U := a + \tau\Delta^n \subset \Omega$ i zdefiniujmy $V := f(a) + \Delta^m$, $\Phi(t) := a + \tau t$, $\Psi(u) := u - f(a)$.

Przypadek $r \geqslant 1$: Niech $P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ i $Q : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ będą dowolnymi izomorfizmami afinicznymi. Zdefiniujmy $\widetilde{\Omega} := P^{-1}(\Omega)$, $\widetilde{f} := Q \circ f \circ P : \widetilde{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\widetilde{a} := P^{-1}(a)$. Zauważmy, że odwzorowanie $\widetilde{f}$ jest klasy $\mathcal{C}^k$ oraz $\operatorname{rank}\widetilde{f}'(x) = r$ dla dowolnego $x \in \widetilde{\Omega}$. Przypuśćmy, że twierdzenie o rzędzie zachodzi dla odwzorowania $\widetilde{f}$ w punkcie $\widetilde{a}$ i niech $\widetilde{U}$, $\widetilde{V}$, $\widetilde{\Phi}$ i $\widetilde{\Psi}$ będą dobrane do odwzorowania $\widetilde{f}$ zgodnie z tym twierdzeniem. Niech $U := P(\widetilde{U})$, $V := Q^{-1}(\widetilde{V})$, $\Phi := P \circ \widetilde{\Phi}$, $\Psi := \widetilde{\Psi} \circ Q$.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\ f\ } & V \\ {\scriptstyle P}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle Q} \\ \widetilde{U} & \xrightarrow{\ \widetilde{f}\ } & \widetilde{V} \\ {\scriptstyle\widetilde{\Phi}}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle\widetilde{\Psi}} \\ \Delta^n & \xrightarrow{(\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^d},0)} & \Delta^m \end{array}$$

Mamy $(\Psi \circ f \circ \Phi)(t) = ((\widetilde{\Psi} \circ Q) \circ f \circ (P \circ \widetilde{\Phi}))(t) = (\widetilde{\Psi} \circ \widetilde{f} \circ \widetilde{\Phi})(t) = (t_1,\dots,t_r,0,\dots,0)$, czyli twierdzenie o rzędzie zachodzi dla odwzorowania f w punkcie a.

Stosując powyższe rozumowanie do $P(x) := x + a$ i $Q(y) := y - f(a)$, redukujemy dowód do przypadku $a = 0$ i $f(0) = 0$. Z algebry liniowej wiadomo, że istnieją izomorfizmy liniowe $P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ i $Q : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ takie, że $Q \circ f'(0) \circ P = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ [10]. Dowód redukuje się więc do przypadku, gdy $f'(0) = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Niech $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $g(x) := (f_1(x),\dots,f_r(x),x_{r+1},\dots,x_n)$. Oczywiście g jest klasy $\mathcal{C}^k$, $g(0) = 0$ oraz $g'(0) = \mathbb{I}_n$.

[10] $\mathbb{I}_r$ oznacza $(r \times r)$–wymiarową macierz jednostkową.

Na podstawie twierdzenia o odwzorowaniu odwrotnym istnieje otoczenie otwarte zera $U \subset \Omega$ oraz $\tau > 0$ takie, że odwzorowanie $g|_U : U \longrightarrow \tau\Delta^n$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$. Niech $\widetilde{\Phi} := (g|_U)^{-1} : \tau\Delta^n \longrightarrow U$, $\varphi := f \circ \widetilde{\Phi} : \tau\Delta^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Zauważmy, że φ jest klasy $\mathcal{C}^k$, $\varphi(0) = 0$ oraz $\operatorname{rank} \varphi'(t) = r$ dla dowolnego $t \in \tau\Delta^n$. Ponadto, $\varphi(t) = (t_1, \dots, t_r, \varphi_{r+1}(t), \dots, \varphi_m(t))$, a więc w szczególności $\varphi(\tau\Delta^n) \subset (\tau\Delta)^r \times \mathbb{R}^{m-r}$ oraz

$$\varphi'(t) = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_r & 0_{r,n-r} \\ *_{m-r,r} & \left[\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial t_\nu}(t)\right]_{\substack{\mu=r+1,\dots,m \\ \nu=r+1,\dots,n}} \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $\operatorname{rank} \varphi'(t) = r$, wnioskujemy stąd, że $\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial t_\nu}(t) = 0$, $t \in \tau\Delta^n$, $\mu = r+1, \dots, m$, $\nu = r+1, \dots, n$. Innymi słowy, funkcje $\varphi_{r+1}, \dots, \varphi_m$ zależą jedynie od $t_1, \dots, t_r$. Niech

$$\widetilde{\Psi} : (\tau\Delta^r) \times \mathbb{R}^{m-r} \longrightarrow (\tau\Delta^r) \times \mathbb{R}^{m-r}, \quad \widetilde{\Psi}(u', u_{r+1}, \dots, u_m) := (u', u_{r+1} - \varphi_{r+1}(u'), \dots, u_m - \varphi_m(u')).$$

Widać, że $\widetilde{\Psi}$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$ [11] i $\widetilde{\Psi}(0) = 0$. Ponadto,

$$(\widetilde{\Psi} \circ \varphi)(t) = (\widetilde{\Psi} \circ f \circ \widetilde{\Phi})(t) = (t', 0), \quad t = (t', t'') \in (\tau\Delta^r) \times (\tau\Delta^{n-r}).$$

Niech teraz $\Phi : \Delta^n \longrightarrow U$, $\Phi(t) := \widetilde{\Phi}(\tau t)$, $V := \widetilde{\Psi}^{-1}(\tau\Delta^m)$, $\Psi : V \longrightarrow \Delta^m$, $\Psi(y) := \frac{1}{\tau}\widetilde{\Psi}(y)$. Odwzorowania Φ i Ψ są dyfeomorfizmami klasy $\mathcal{C}^k$ oraz

$$(\Psi \circ f \circ \Phi)(t) = \frac{1}{\tau}(\widetilde{\Psi} \circ f \circ \widetilde{\Phi})(\tau t) = \frac{1}{\tau}(\tau t', 0) = (t', 0), \quad t = (t', t'') \in \Delta^r \times \Delta^{n-r}. \qquad \square$$

10.16. Twierdzenie Morse'a

Będzie nam potrzeba następująca wersja twierdzenia o funkcjach danych całką. Ogólny wynik będzie można znaleźć w Twierdzeniu 12.3.1.

Twierdzenie 10.16.1 (Twierdzenie o funkcjach danych całką). *Niech Ω będzie zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^n$, $P := [a.b]$ i niech $f : \Omega \times P \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie odwzorowaniem takim, że dla pewnego $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ mamy:*

- *$f(\cdot, t) \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ dla dowolnego $t \in P$,*
- *odwzorowanie $\Omega \times P \ni (x,t) \longmapsto D^\alpha_x f(x,t) \in \mathbb{R}$ jest ciągłe dla $|\alpha| \leqslant k$* [12].

Wtedy odwzorowanie $\Omega \ni x \overset{\varphi}{\longmapsto} \int_a^b f(x,t)dt$ jest klasy $\mathcal{C}^k(\Omega)$ oraz $D^\alpha\varphi(x) = \int_a^b D^\alpha_x f(x,t)dt$, $x \in \Omega$, $|\alpha| \leqslant k$.

Dowód. (Por. dowód Twierdzenia 7.7.1) Wystarczy rozważyć przypadki $k = 0$ i $k = 1$.

$k = 0$: Ustalmy $c \in \Omega$, kulę $\mathbb{B}(c,r) \subset\subset \Omega$ i $\varepsilon > 0$. Odwzorowanie f jest jednostajnie ciągłe na $\mathbb{B}(c,r) \times P$. Zatem istnieje $\delta > 0$ taka, że $|f(x,t) - f(c,t)| \leqslant \varepsilon$ dla $x \in \mathbb{B}(c,\delta)$ i $t \in P$. Otrzymujemy stąd:

$$|\varphi(x) - \varphi(c)| \leqslant \int_a^b |f(x,t) - f(c,t)|dt \leqslant \varepsilon(b-a), \quad x \in \mathbb{B}(c,\delta).$$

$k = 1$: Niech $\alpha = e_j$. Wystarczy wykazać, że

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t)dt, \quad x \in \Omega,$$

bowiem ciągłość prawej strony mamy już zapewnioną. Ustalmy $c \in \Omega$, kulę $\mathbb{B}(c,r) \subset\subset \Omega$ i $\varepsilon > 0$. Odwzorowanie $(x,t) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t)$ jest jednostajnie ciągłe na $\mathbb{B}(c,r) \times P$. Zatem istnieje $\delta > 0$ taka, że $|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(c,t)| \leqslant \varepsilon$ dla $x \in \mathbb{B}(c,\delta)$ i $t \in P$. Stąd, na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych, otrzymujemy:

$$\Big|\frac{\varphi(c+he_j) - \varphi(c)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_j}(c,t)dt\Big| \leqslant \int_a^b \Big|\frac{f(c+he_j,t) - f(c,t)}{h} - \frac{\partial f}{\partial x_j}(c,t)\Big|dt \leqslant \varepsilon(b-a), \quad |h| < \delta.$$

$\square$

Twierdzenie 10.16.2 (Twierdzenie o funkcjach danych całką niewłaściwą). *Niech Ω będzie zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^n$, niech $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ i niech $f : \Omega \times [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie odwzorowaniem takim, że dla pewnego $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ mamy:*

- *$f(\cdot, t) \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ dla dowolnego $t \in [a,b)$,*
- *odwzorowanie $\Omega \times [a,b) \ni (x,t) \longmapsto D^\alpha_x f(x,t) \in \mathbb{R}$ jest ciągłe dla $|\alpha| \leqslant k$,*

---

[11] $\widetilde{\Psi}^{-1}(v', v_{r+1}, \dots, v_m) := (v', v_{r+1} + \varphi_{r+1}(v'), \dots, v_m + \varphi_m(v'))$.

[12] Dla $k = 0$ warunek ten oznacza po prostu ciągłość f.

- *dla dowolnego $|\alpha| \leqslant k$ istnieje odwzorowanie $g_\alpha \in \mathcal{R}([a,b))$ takie, że $|D_x^\alpha f(x,t)| \leqslant g_\alpha(t)$ dla $(x,t) \in \Omega \times [a,b)$.*

Wtedy odwzorowanie $\Omega \ni x \overset{\varphi}{\longmapsto} \int_a^b f(x,t)dt$ jest klasy $\mathcal{C}^k(\Omega)$ oraz $D^\alpha\varphi(x) = \int_a^b D_x^\alpha f(x,t)dt$, $x \in \Omega,\ |\alpha| \leqslant k$. [13]

Odnotujmy, że analogiczny wynik zachodzi, gdy przedział $[a,b)$ zastąpimy przedziałem $(a,b]$ ($-\infty \leqslant a < b < +\infty$) lub też przedziałem (a,b) ($-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$).

Dowód. (Por. dowód Twierdzenia 7.7.2) Ustalmy ciąg $a < b_\nu < b$, $b_\nu \nearrow b$ i niech $\varphi_\nu(x) := \int_a^{b_\nu} f(x,t)dt$, $x \in \Omega$. Na podstawie poprzedniego twierdzenia wnioskujemy, że $\varphi_\nu \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ oraz $D^\alpha\varphi_\nu(x) = \int_a^{b_\nu} D_x^\alpha f(x,t)dt$, $x \in \Omega,\ |\alpha| \leqslant k$. Zauważmy, że $\varphi_\nu \longrightarrow \varphi$ jednostajnie na Ω. Istotnie, $|\varphi_\nu(x) - \varphi(x)| \leqslant \int_{b_\nu}^b g_0(t)dt \longrightarrow 0$. Wynika stąd, że φ jest ciągła. Z tych samych powodów, dla dowolnego $|\alpha| \leqslant k$ ciąg $(D^\alpha\varphi_\nu)_{\nu=1}^\infty$ jest zbieżny jednostajnie. Teraz wystarczy już tylko wykorzystać twierdzenie o różniczkowaniu ciągu wyraz po wyrazie. □

Twierdzenie 10.16.3. *Niech $D \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem gwiaździstym względem punktu $a = (a_1,\dots,a_n) \in D$* [14] *i niech $f \in \mathcal{C}^k(D)$ ($k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$). Wtedy istnieją funkcje $f_1,\dots,f_n \in \mathcal{C}^{k-1}(D)$ takie, że*

$$f(x) - f(a) = \sum_{j=1}^n (x_j - a_j) f_j(x), \quad x = (x_1,\dots,x_n) \in D.$$

Zauważmy, że musi być $f_j(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$, $j = 1,\dots,n$. Istotnie,

$$\frac{f(a+he_j) - f(a)}{h} = f_j(a+he_j) \longrightarrow f_j(a), \quad j = 1,\dots,n.$$

Dowód Twierdzenia 10.16.3. Możemy założyć, że $a = 0$. Niech

$$f_j(x) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx)dt, \quad x \in D.$$

Mamy

$$\sum_{j=1}^n x_j f_j(x) = \int_0^1 \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx)dt = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx)dt = f(x) - f(0).$$

Pozostaje zauważyć, że z Twierdzenia 10.16.1 wynika, że $f_j \in \mathcal{C}^{k-1}(\Omega)$, $j = 1,\dots,n$. □

Twierdzenie 10.16.4. *Niech $D \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem gwiaździstym względem punktu 0 i niech $f \in \mathcal{C}^k(D)$ ($k \in \mathbb{N}_2 \cup \{\infty\}$), $f(0) = 0$, $\operatorname{grad} f(0) = 0$. Wtedy istnieją funkcje $f_{j,k} \in \mathcal{C}^{k-2}(D)$, $j,k = 1,\dots,n$, takie, że*

$$f(x) = \sum_{j,k=1}^n x_j x_k f_{j,k}(x), \quad x = (x_1,\dots,x_n) \in D, \text{ przy czym } f_{j,k} = f_{k,j}.$$

Zauważmy, że musi być $f_{j,k}(0) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(0)$, $j,k = 1,\dots,n$. Istotnie, na podstawie wzoru Taylora mamy:

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(0) x_j x_k + o(\|x\|^2) = \sum_{j,k=1}^n x_j x_k f_{j,k}(x), \quad x \longrightarrow 0, \text{ a stąd}$$

$$\sum_{j,k=1}^n x_j x_k \Big(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(0) - f_{j,k}(x)\Big) = o(\|x\|^2), \quad x \longrightarrow 0.$$

W szczególności, biorąc $x = x(t) := te_j + te_k$ dla $j \neq k$, lub też $x = x(t) := te_j$ dla $j = k$, dostajemy

$$t^2\Big(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(0) - f_{j,k}(x(t))\Big) = o(t^2), \quad t \longrightarrow 0,$$

skąd natychmiast wynika żądany wzór.

---

[13] Zauważmy, że nasze założenia gwarantują zbieżność wszystkich występujących w tezie całek niewłaściwych.

[14] Tzn. $a + t(x-a) \in D$ dla $x \in D$ i $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Dowód Twierdzenia 10.16.4. Na podstawie Twierdzenia 10.16.3 mamy $f(x)=\sum\limits_{j=1}^n x_j f_j(x)$, $x\in D$, gdzie $f_j\in \mathcal{C}^{k-1}(D)$ oraz $f_j(0)=\frac{\partial f}{\partial x_j}(0)=0$, $j=1,\dots,n$. Stosując to samo twierdzenie do funkcji f_j, dostajemy

$$f(x)=\sum_{j,k=1}^n x_j x_k f_{j,k}(x),\quad x\in D,$$

gdzie $f_{j,k}\in\mathcal{C}^{k-2}(D)$, $j,k=1,\dots,n$. Zastępując funkcję $f_{j,k}$ przez $\frac{1}{2}(f_{j,k}+f_{k,j})$ zapewniamy sobie symetrię. □

Definicja 10.16.5. Niech $\Omega\in\operatorname{top}\mathbb{R}^n$, niech $f\in\mathcal{C}^2(\Omega)$ i niech $a\in\Omega$. Załóżmy, że $f'(a)=0$ (tzn. a jest punktem krytycznym funkcji f). Powiemy, że jest to *punkt krytyczny nieosobliwy*, jeżeli odwzorowanie $f''(a)$ (rozumiane jako $n\times n$–wymiarowa macierz symetryczna) ma rząd n. W przeciwnym przypadku mówimy, że punkt krytyczny jest *osobliwy*.

Przykład 10.16.6 (Punkty krytyczne osobliwe)**.** (a) $f(x)=x^3$: $f'(x)=3x^2$, $f''(x)=6x$. Punkt $x=0$ jest jedynym punktem krytycznym; jest to punkt osobliwy.

(b) $f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2}\sin^2(1/x), & \text{jeżeli } x\neq 0\\ 0, & \text{jeżeli } x=0\end{cases}$: $f'(0)=f''(0)=0$, 0 jest punktem krytycznym nieizolowanym (Ćwiczenie).

(c) $f(x,y)=x^3-3xy^2$: $f'(x,y)=[3x^2-3y^2,-6xy]$, $f''(x,y)=\begin{bmatrix}6x & -6y\\ -6y & -6x\end{bmatrix}$; $f'(0,0)=0$, $f''(0,0)=0$.

(d) $f(x,y)=x^2$: $f'(x,y)=[2x,0]$, $f''(x,y)=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$. Zbiór punktów krytycznych to prosta $x=0$; wszystkie punkty krytyczne są osobliwe.

(e) $f(x,y)=x^2y^2$: $f'(x,y)=[2xy^2,2x^2y]$, $f''(x,y)=\begin{bmatrix}2y^2 & 4xy\\ 4xy & 2x^2\end{bmatrix}$. Zbiór punktów krytycznych to dwie proste $xy=0$; wszystkie punkty krytyczne są osobliwe.

Obserwacja 10.16.7 (Diagonalizacja form kwadratowych)**.** Rozważmy formę kwadratową $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$, $f\not\equiv 0$, postaci $f(x)=\sum\limits_{j,k=1}^n a_{j,k}x_jx_k=x^tAx$, gdzie $A:=[a_{j,k}]$ jest macierzą symetryczną. Jeżeli $x=Px'$ zadaje zmianę współrzędnych (P jest macierzą nieosobliwą), to w nowych współrzędnych macierz formy f ma postać P^tAP (jest to macierz przystająca do macierzy A). Proces *diagonalizacji* formy f polega na znalezieniu takich współrzędnych x', w których forma f ma postać

$$f(Px')={x'_1}^2+\dots+{x'_k}^2-x'^2_{k+1}-\dots-{x'_r}^2$$

dla pewnych $0\leqslant k\leqslant r\leqslant n$. Wiadomo, że taka diagonalizacja jest zawsze możliwa. Jest oczywiste, że $r=\operatorname{rank}A$ (w szczególności, $r=n$, o ile A jest nieosobliwa). Wiadomo również, że liczby k,r zależą wyłącznie od f.

Twierdzenie 10.16.8 (Twierdzenie Morse'a)**.** *Niech $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym, niech $f\in\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ i niech $a\in\Omega$ będzie punktem krytycznym nieosobliwym z $f(a)=0$. Wtedy istnieje dyfeomorfizm $\Phi:U\longrightarrow\Phi(U)\subset\Omega$ klasy $\mathcal{C}^\infty$, gdzie U jest pewnym otoczeniem zera, taki że $\Phi(0)=a$ oraz*

$$f\circ\Phi(t)=t_1^2+\dots+t_k^2-t_{k+1}^2-\dots-t_n^2,\quad t=(t_1,\dots,t_n)\in U,\ \textit{dla pewnego } k\in\{0,\dots,n\}.$$

Obserwacja 10.16.9. $\operatorname{grad}(f\circ\Phi)(t)=0\iff t=0$, skąd w szczególności wynika, że punkty krytyczne nieosobliwe odwzorowań klasy $\mathcal{C}^\infty$ są izolowane.

Dowód Twierdzenia Morse'a. Możemy założyć, że $a=0$. Zastosujemy indukcję. Pokażemy, że dla dowolnego $r\in\{1,\dots,n+1\}$ istnieje lokalna $\mathcal{C}^\infty$–dyfeomorficzna zmiana układu współrzędnych Φ_r, $\Phi_r(0)=0$, po której, dla x w pewnym otoczeniu zera, mamy:

$$f\circ\Phi_r(x)=\sum_{i=1}^{r-1}\sigma_i x_i^2+\sum_{j,k=r}^n x_jx_kf_{j,k}(x),$$

gdzie $\sigma_1,\dots,\sigma_{r-1}\in\{-1,1\}$, $f_{j,k}$ są klasy $\mathcal{C}^\infty$ oraz $f_{j,k}=f_{k,j}$, $j,k=r,\dots,n$. Zauważmy, że przypadek $r=1$, to Twierdzenie 10.16.4, zaś $r=n+1$, to teza Twierdzenia Morse'a. Przechodzimy do kroku indukcyjnego $r\rightsquigarrow r+1$.

Niech $g:=f\circ\Phi_r$. Wiemy, że $g''(0)(h)=f''(0)(\Phi_r'(0)(h))+f'(0)(\Phi_r''(0)(h))=f''(0)(\Phi_r'(0)(h))$, skąd, w szczególności, wynika, że macierz $g''(0)$ jest nieosobliwa. Zauważmy, że dla $p\in\{1,\dots,r-1\}$ i $q\in\{r,\dots,n\}$ mamy

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_p\partial x_q}(0)=\frac{\partial}{\partial x_q}\Big(2\sigma_p x_p+\sum_{j,k=r}^n x_jx_k\frac{\partial f_{j,k}}{\partial x_p}(x)\Big)\Big|_{x=0}=0.$$

Stąd

$$g''(0)=\begin{bmatrix}2\sigma_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & & & & & \\ 0 & \dots & 2\sigma_{r-1} & 0 & \dots & 0\\ 0 & \dots & 0 & f_{r,r}(0) & \dots & f_{r,n}(0)\\ \vdots & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & f_{n,r}(0) & \dots & f_{n,n}(0)\end{bmatrix}.$$

Ponieważ macierz $g''(0)$ jest nieosobliwa, zatem macierz $[f_{j,k}(0)]_{j,k=r,\dots,n}$ musi być również nieosobliwa. Po liniowej zmianie współrzędnych $x_r,\dots,x_n$ możemy uzyskać sytuację, w której $f_{r,r}(0)\neq 0$. Oznaczmy przez $\widetilde{\Phi}_r$ dyfeomorfizm powstały ze złożenia tej zmiany współrzędnych z dyfeomorfizmem Φ_r. Niech $\sigma_r:=\operatorname{sgn}(f_{r,r}(0))$ i niech U będzie otoczeniem zera takim, że $\operatorname{sgn}(f_{r,r}(x))=\sigma_r$, $x\in U$. Zdefiniujmy

$$x_r'=\Psi_r(x):=x_r\sqrt{|f_{r,r}(x)|}+\sigma_r\sum_{j=r+1}^n x_j\frac{f_{r,j}(x)}{\sqrt{|f_{r,r}(x)|}},\quad x\in U.$$

Odnotujmy, że $\Psi_r(0)=0$ oraz

$$\sigma_r{x'}_r^2=x_r^2f_{r,r}(x)+2\sum_{j=r+1}^n x_rx_jf_{r,j}(x)+\sum_{j,k=r+1}^n x_jx_kg_{j,k}(x),$$

gdzie $g_{j,k}:=\frac{f_{r,j}f_{r,k}}{|f_{r,r}|}\in\mathcal{C}^\infty(U)$. Rozważmy odwzorowanie

$$x'=\Psi(x):=(x_1,\dots,x_{r-1},\Psi_r(x),x_{r+1},\dots,x_n),\quad x\in U.$$

Mamy $\Psi(0)=0$. Ponadto,

$$\frac{\partial\Psi_r}{\partial x_s}(0)=\delta_{r,r}\sqrt{|f_{r,r}(0)|}+\sigma_r\sum_{j=r+1}^n\delta_{j,s}\frac{f_{r,j}(0)}{\sqrt{|f_{r,r}(0)|}}.$$

W szczególności, $\frac{\partial\Psi_r}{\partial x_s}(0)=0$ dla $s\leqslant r-1$, a wiec $\det\Psi_r'(0)=\frac{\partial\Psi_r}{\partial x_r}(0)=\sqrt{|f_{r,r}(0)|}\neq 0$. W konsekwencji Ψ jest $\mathcal{C}^\infty$–dyfeomorfizmem $V\longrightarrow\Psi(V)$ w pewnym otoczeniu zera $V\subset U$. Ostatecznie mamy

$$\begin{aligned}f\circ\widetilde{\Phi}_r(x)&=\sum_{i=1}^{r-1}\sigma_ix_i^2+x_r^2f_{r,r}(x)+2\sum_{j=r+1}^n x_rx_jf_{r,j}(x)+\sum_{j,k=r+1}^n x_jx_kf_{j,k}(x)\\&=\sum_{i=1}^{r-1}\sigma_ix_i^2+\sigma_r{x'}_r^2-\sum_{j,k=r+1}^n x_jx_kg_{j,k}(x)+\sum_{j=r+1}^n x_rx_jf_{r,j}(x)\\&=\sum_{i=1}^r\sigma_i{x'}_i^2+\sum_{j,k=r+1}^n x_j'x_k'h_{j,k}(x').\end{aligned}$$

□

10.17. Rachunek wariacyjny II

Zaczniemy od podania warunków koniecznych na minimum funkcjonału postaci

$$\mathcal{D} \ni u \longmapsto I(u) := \int_a^b F(x,u(x),u'(x))\,dx \in \mathbb{R}, \text{ gdzie}$$

$$\mathcal{D} := \{u \in \mathcal{C}([a,b]) \cap \mathcal{C}'^1((a,b),(c,d)) : u(a)=\alpha,\ u(b)=\beta,\ \text{ całka } I(u) \text{ jest zbieżna}\},$$

$a<b$, $c<d$, $\alpha,\beta \in (c,d)$, $F : \mathcal{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest daną funkcją klasy $\mathcal{C}^1$, gdzie $\mathcal{R} := (a,b)\times(c,d)$. Oczywiście, problem znalezienia maksimum redukuje się do minimum poprzez zmianę F na $-F$.

Twierdzenie 10.17.1. *Dla dowolnych $u \in \mathcal{D}$ i $h \in \mathcal{C}_0^1((a,b))$ istnieje $\delta>0$ taka, że $u+th \in \mathcal{D}$ dla dowolnego $t \in (-\delta,\delta)$. Odwzorowanie $(-\delta,\delta) \ni t \longmapsto I(u+th) \in \mathbb{R}$ jest klasy $\mathcal{C}^1$ oraz dla dowolnego $t \in (-\delta,\delta)$ mamy*

$$\frac{d}{dt}I(u+th) = \int_a^b \Big(F'_y(x,u+th,u'+th')h + F'_z(x,u+th,u'+th')h'\Big)dx.$$

Stosujemy uproszczony zapis: $F(x,v,v')$ zamiast $F(x,v(x),v'(x))$. Zauważmy, że ponieważ nośnik h jest zwarty, to nie ma problemów z istnieniem całki po prawej stronie. Operator

$$\mathcal{C}_0^1((a,b)) \ni h \longmapsto \frac{\partial I}{\partial h}(u) := \frac{d}{dt}I(u+th)|_{t=0} = \int_a^b \Big(F'_y(x,u,u')h + F'_z(x,u,u')h'\Big)dx$$

nazywamy *pierwszą wariacją funkcjonału I w punkcie $u \in \mathcal{D}$* (przypomnijmy sobie pojęcie pochodnej kierunkowej).

Dowód. Niech $K := \operatorname{supp} h \subset [p,q] \subset (a,b)$. Ponieważ $u(K) \subset\subset (c,d)$, istnieje $R>0$ takie, że $u(K)+(-R,R) \subset (c,d)$. Niech $M := \sup_{(a,b)}|h|$, $\delta := \frac{R}{M}$. Ustalmy $t \in (-\delta,\delta)$ i niech $v := u+th$. Oczywiście $v \in \mathcal{C}([a,b]) \cap \mathcal{C}'^1((a,b),(c,d))$ oraz $v(a)=\alpha$, $v(b)=\beta$. Pozostaje sprawdzić zbieżność całki. Mamy: $\int_a^b F(x,v,v')dx = \int_p^q F(x,v,v')dx + \int_{(a,b)\setminus[p,q]} F(x,u,u')dx$. Pierwsza całka jest to zwykła całka Riemanna z funkcji kawałkami ciągłej, druga jest zbieżna, bo całka $I(u)$ jest zbieżna.

Pozostała część twierdzenia wynika z twierdzenia o funkcjach danych całką. □

Twierdzenie 10.17.2. *Jeżeli $u \in \mathcal{D}$ realizuje minimum funkcjonału I, to $\frac{\partial I}{\partial h}(u)=0$, czyli*

$$\int_a^b \Big(F'_y(x,u,u')h + F'_z(x,u,u')h'\Big)dx = 0, \quad h \in \mathcal{C}_0^1((a,b)).$$

Całkując przez części dostajemy:

Twierdzenie 10.17.3. *Jeżeli $u \in \mathcal{D}$ realizuje minimum funkcjonału I, to dla dowolnego $x_0 \in (a,b)$*

$$\int_a^b \Big(F'_z(x,u,u') - \int_{x_0}^x F'_y(\xi,u(\xi),u'(\xi))d\xi\Big)h'dx = 0, \quad h \in \mathcal{C}_0^1((a,b)).$$

Lemat 10.17.4. *Niech $\Psi : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją kawałkami ciągłą taką, że*

$$\int_a^b \Psi(x)h'(x)\,dx = 0, \quad h \in \mathcal{C}_0^1((a,b)).$$

Wtedy, po uzupełnieniu wartości w punktach nieciągłości, $\Psi \equiv \text{const}$.

Dowód. Niech $a<\xi_1<\cdots<\xi_N<b$ będą punktami nieciągłości i niech $x_1,x_2 \in (a,b)\setminus\{\xi_1,\dots,\xi_N\}$, $x_1<x_2$ (jeżeli Ψ jest ciągła, to bierzemy dowolne $a<x_1<x_2<b$). Przypuśćmy, że $\Psi(x_1)\neq\Psi(x_2)$. Możemy założyć, że $\Psi(x_1)<\Psi(x_2)$. Ustalmy $\Psi(x_1)<\eta_1<\eta_2<\Psi(x_2)$ i niech $r>0$ będzie takie, że $2r<x_2-x_1$, $r<x_1-a$, $r<b-x_2$, $\Psi(x)<\eta_1$ dla $|x-x_1|\leqslant r$ i $\Psi(x)>\eta_2$ dla $|x-x_2|\leqslant r$. Niech g będzie funkcją kawałkami liniową odpowiadającą łamanej

$$[(a,0),(x_1-r,0),(x_1,-\tfrac{1}{r}),(x_1+r,0),(x_2-r,0),(x_2,\tfrac{1}{r}),(x_2+r,0),(b,0)].$$

Zdefiniujmy $h(x) := \int_a^x g(\xi)d\xi,\ x \in (a,b)$. Widać, że $h \in \mathcal{C}_0^1((a,b))$, $h'=g$. Mamy więc:

$$\begin{aligned} 0 = \int_a^b \Psi(x)h'(x)\,dx &= \int_{x_1-r}^{x_1+r} \Psi(x)g(x)\,dx + \int_{x_2-r}^{x_2+r} \Psi(x)g(x)\,dx \\ &\geqslant \eta_1 \int_{x_1-r}^{x_1+r} g(x)\,dx + \eta_2 \int_{x_2-r}^{x_2+r} g(x)\,dx = \eta_2-\eta_1 > 0; \text{ sprzeczność.} \quad \square \end{aligned}$$

Twierdzenie 10.17.5 (Twierdzenie Eulera). *Jeżeli $u \in \mathcal{D}$ realizuje minimum funkcjonału I, to dla dowolnego $x_0 \in (a,b)$ istnieje stała C taka, że*

$$F'_z(x,u(x),u'(x\pm)) - \int_{x_0}^{x} F'_y(\xi,u(\xi),u'(\xi))d\xi = C, \quad x \in (a,b).$$

W szczególności,

$$F'_z(x,u(x),u'(x-)) = F'_z(x,u(x),u'(x+)), \quad x \in (a,b), \quad (15)$$

funkcja $(a,b) \ni x \longmapsto F'_z(x,u(x),u'(x+))$ jest ciągła, lewo- i prawostronnie różniczkowalna oraz

$$\Big(x \longmapsto F'_z(x,u(x),u'(x+))\Big)'_{\pm}(x) = F'_y(x,u(x),u'(x\pm)), \quad x \in (a,b). \qquad (\dagger)$$

Równanie (†) nosi nazwę *równania Eulera* (lub *równania Eulera–Lagrange'a*). Równanie to dla punktów ciągłości u' ma postać

$$\frac{d}{dx}F'_z(x,u(x),u'(x)) = F'_y(x,u(x),u'(x)).$$

Obserwacja 10.17.6. Jeżeli F jest klasy $\mathcal{C}^2$ i $u \in \mathcal{C}^2((a,b))$, to równanie Eulera ma postać

$$F''_{x,z}(x,u(x),u'(x)) + F''_{y,z}(x,u(x),u'(x))u'(x) + F''_{z,z}(x,u(x),u'(x))u''(x) = F'_y(x,u(x),u'(x)),\ x \in (a,b);$$

jest to równanie różniczkowe zwyczajne rzędu drugiego. Można wyróżnić trzy szczególne przypadki.

(a) $F(x,y,z)$ nie zależy od x (np. dla funkcjonałów Fermata). Równanie Eulera ma postać

$$F''_{y,z}(u(x),u'(x))u'(x) + F''_{z,z}(u(x),u'(x))u''(x) = F'_y(u(x),u'(x)), \quad x \in (a,b).$$

Z drugiej strony

$$\frac{d}{dx}\Big(F(u,u') - u'F'_z(u,u')\Big) = u'\Big(F'_y(u,u') - F''_{y,z}(u,u')u' - F''_{z,z}(u,u')u''\Big) = 0, \quad x \in (a,b).$$

Tak więc rozwiązań równania Eulera należy poszukiwać wśród rozwiązań jednoparametrowej rodziny równań

$$F(u(x),u'(x)) - u'(x)F'_z(u(x),u'(x)) = C, \quad x \in (a,b), \quad C \in \mathbb{R};$$

równania te to równania różniczkowe zwyczajne rzędu pierwszego.

(b) $F(x,y,z)$ nie zależy od y. Równanie Eulera ma postać

$$F''_{x,z}(x,u'(x)) + F''_{z,z}(x,u'(x))u''(x) = 0, \quad x \in (a,b);$$

wprowadzamy nową funkcję niewiadomą $v := u'$ i równanie sprowadza się do równania różniczkowego zwyczajnego rzędu pierwszego.

(c) $F(x,y,z)$ nie zależy od z. Równanie Eulera ma postać $F'_y(x,u(x)) = 0,\ x \in (a,b)$; jest to po prostu równanie funkcyjne (tu wystarczy $F \in \mathcal{C}^1$, $u \in \mathcal{D}$).

Twierdzenie 10.17.7. *Dla problemu Fermata (tzn. $F(x,y,z) := \varphi(y)\sqrt{1+z^2}$), jeżeli $\varphi \in \mathcal{C}^k((c,d))$ i $u \in \mathcal{D}$ realizuje minimum funkcjonału to $u \in \mathcal{C}^{k+1}((a,b))$.*

W szczególności, rozwiązanie płaskiego problemu brachistochrony ($(c,d) = \mathbb{R}_{>0}$, $\varphi(y) := \frac{1}{\sqrt{2gy}}$) musi być klasy $\mathcal{C}^\infty((0,b))$ (o ile istnieje).

Dowód. Mamy $F'_z(y,z) = \varphi(y)\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$. Odwzorowanie $\mathbb{R} \ni z \overset{\Phi}{\longmapsto} \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \in (-1,1)$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^\infty$ ($\Phi'(z) = (1+z^2)^{-\frac{3}{2}} > 0$). Mamy $F'_z(y,z) = \varphi(y)\Phi(z)$. Wiemy, że $F'_z(u(x),u'(x-)) = F'_z(u(x),u'(x+))$, czyli $\varphi(u(x))\Phi(u'(x-)) = \varphi(u(x))\Phi(u'(x+)),\ x \in (a,b)$. Ponieważ funkcja φ jest ściśle dodatnia, zatem $\Phi(u'(x-)) = \Phi(u'(x+))$, a stąd $u'(x-) = u'(x+)$ dla dowolnego $x \in (a,b)$. Oznacza to, że u jest klasy $\mathcal{C}^1((a,b))$.

Przypuśćmy, że już wiemy, że u jest klasy $\mathcal{C}^\ell((a,b))$ dla pewnego $1 \leqslant \ell \leqslant k$. Na podstawie równania Eulera dostajemy $\frac{d}{dx}\big(\varphi(u)\Phi(u')\big) = \varphi'(u)\sqrt{1+u'^2}$. Prawa strona tego równania jest klasy $\mathcal{C}^{\ell-1}$. W takim razie $\varphi(u)\Phi(u') \in \mathcal{C}^\ell((a,b))$. Funkcja $\varphi(u) \in \mathcal{C}^\ell((a,b))$ i jest ściśle dodatnia. Stąd $\Phi(u') \in \mathcal{C}^\ell$. Ostatecznie, $u' \in \mathcal{C}^\ell((a,b))$, a więc $u \in \mathcal{C}^{\ell+1}((a,b))$. □

(15) Uwaga: nie twierdzimy, że $u'(x-) = u'(x+)$.

Przykład 10.17.8 (Płaskie zagadnienie brachistochrony)**.** Przypomnijmy, że rozważamy problem typu Fermata z funkcją $F(y,z)=\frac{1}{\sqrt{2gy}}\sqrt{1+z^2},\ y>0,\ z\in\mathbb{R}$, z warunkami brzegowymi $u(0)=0$, $u(b)=\beta$ $(b,\beta>0)$. Na podstawie Twierdzenia 10.17.7 wiemy, że poszukiwane rozwiązanie jest klasy $\mathcal{C}^\infty((0,b))$. Równanie Eulera dla naszego problemu ma postać

$$F(u,u')-u'F'_z(u,u')=\frac{1}{\sqrt{2gu}}\sqrt{1+u'^2}-u'\frac{1}{\sqrt{2gu}}\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}}=\text{const},\ \text{czyli}\ u(1+u'^2)=C_1.$$

Dokonajmy podstawienia $v=\operatorname{arcctg}u'$. Mamy

$$u=\frac{C_1}{1+\operatorname{ctg}^2 v}=C_1\sin^2 v=\frac{C_1}{2}(1-\cos 2v),$$

skąd dostajemy $\operatorname{ctg}v=u'=C_1(\sin 2v)v'$, a więc $2C_1v'\sin^2 v=1$. Ostatecznie $x=\frac{C_1}{2}(2v-\sin 2v)+C_2$. Podstawiając $w=2v$, dostajemy $x=C(w-\sin w)+C_2,\ u=C(1-\cos w)$, gdzie $C>0$. Biorąc pod uwagę warunek $u(0)=0$, dostajemy $C_2=0$, czyli

$$x=C(w-\sin w), \tag{*}$$
$$u=C(1-\cos w). \tag{**}$$

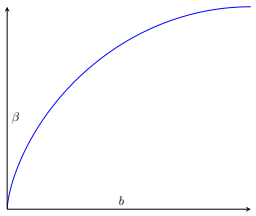
Sprawdzimy teraz, że dla dowolnego $\beta>0$ istnieje dokładnie jedna stała $C>0$ taka, że $u(b)=\beta$. Funkcja $w\longmapsto C(w-\sin w)$ jest ściśle rosnąca i jej pochodna $C(1-\cos w)$ jest różna od zera w przedziale $(0,2\pi)$. W takim razie pierwsze równanie (*) możemy rozwiązać względem $w=w(x,C)$ i jeżeli $0<x<2\pi C$, to funkcja $w(\cdot,C)$ będzie klasy $\mathcal{C}^\infty((0,b))$. Niech $\varphi(x,C):=C(1-\cos w(x,C))$. Na podstawie (**) problem sprowadza się do pokazania, że istnieje dokładnie jedna stała $C=C(\beta)\geqslant\frac{1}{2\pi}b=:C_0$ taka, że $\varphi(b,C)=\beta$. Zauważmy, że $w(b,C_0)=2\pi$, a stąd $\varphi(b,C_0)=0$. Na podstawie twierdzenia o funkcjach uwikłanych mamy

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial C}(x,C)&=1-\cos w(x,C)+C\sin w(x,C)\frac{\partial w}{\partial C}\\&=1-\cos w(x,C)+C\sin w(x,C)\Big(-\frac{w(x,C)-\sin w(x,C)}{C(1-\cos w(x,C))}\Big)=2\Big(1-\frac{\frac{1}{2}w(x,C)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}w(x,C)}\Big)>0.\end{aligned}$$

Wynika stąd, że funkcja $\varphi(b,\cdot)$ jest ściśle rosnąca (co oznacza, że istnieje co najwyżej jedna stała $C\geqslant C_0$ spełniającą nasz warunek). Pozostaje pokazać, że $\varphi(b,C)\longrightarrow+\infty$ przy $C\longrightarrow+\infty$. Mamy $w(b,C)-\sin w(b,C)=\frac{b}{C}$, a więc $w(b,C)\longrightarrow 0$, gdy $C\longrightarrow+\infty$. Korzystając z tego mamy:

$$\begin{aligned}\lim_{C\to+\infty}\varphi(b,C)&=\lim_{C\to+\infty}C(1-\cos w(b,C))=b\lim_{C\to+\infty}\frac{1-\cos w(b,C)}{w(b,C)-\sin w(b,C)}\\&=b\lim_{w\to0+}\frac{1-\cos w}{w-\sin w}\overset{H}{=}b\lim_{w\to0+}\frac{\sin w}{1-\cos w}\overset{H}{=}b\lim_{w\to0+}\frac{\cos w}{\sin w}=+\infty.\end{aligned}$$

Ostatecznie rozwiązanie równania Eulera spełniające nasze warunki brzegowe ma postać $x=C(w-\sin w),\ u=C(1-\cos w),\ 0\leqslant w\leqslant w_0$. gdzie $C=C(\beta)$ i $w_0=w_0(b,C)\in(0,2\pi)$.



Łuk cykloidy: $[0,w_0]\longmapsto C(t-\sin t,1-\cos t)$, gdzie $C=C(\beta)$, $w_0=w_0(b,\beta)$.

Powinniśmy się jeszcze upewnić, że nasze rozwiązanie należy do dziedziny funkcjonału. Brakuje nam jeszcze skończoności wartości $T_0(u)$. Liczymy (korzystając z równości $u(1+u'^2)=2C$):

$$T_0(u)=\int_0^b\frac{\sqrt{1+u'^2(x)}}{\sqrt{2gu(x)}}dx=\sqrt{\frac{C}{g}}\int_0^b\frac{dx}{u}\underset{\substack{x=C(w-\sin w)\\dx=C(1-\cos w)dw=udw}}{=}\sqrt{\frac{C}{g}}\int_0^{w_0}dw=\sqrt{\frac{C}{g}}w_0<+\infty.$$

Aby rozwiązać w pełni problem brachistochrony musimy wykazać, że problem redukuje się do problemu płaskiego. W tym celu rozważymy następujący problem wariacyjny:

$A=(a,\alpha)$, $B=(b,\beta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$, $a<b$, $G,G'\subset\mathbb{R}^m$, $G,G'-$ obszary,

$$\mathcal{D}\ni u\longmapsto I(u):=\int_a^b F(x,u(x),u'(x))\,dx\in\mathbb{R},\ \text{gdzie}$$

$\mathcal{D}:=\{u\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}^m)\cap\mathcal{C}'^1((a,b),G),\forall_{x\in(a,b)}\ u'(x-),u'(x+)\in G',\ u(a)=\alpha,\ u(b)=\beta$, całka $I(u)$ jest zbieżna$\}$, zaś $F:(a,b)\times G\times G'\longrightarrow\mathbb{R}$ jest daną funkcją klasy $\mathcal{C}^1$.

Postępując podobnie jak w Twierdzeniach 10.17.1, 10.17.2, 10.17.3 i 10.17.5 dostajemy kolejno:

Twierdzenie 10.17.9. *Dla każdych $u\in\mathcal{D}$ i $h=(h_1,\dots,h_m)\in\mathcal{C}_0^1((a,b),\mathbb{R}^m)$ istnieje $\delta>0$ taka, że $u+t\cdot h\in\mathcal{D}$ dla dowolnego $t=(t_1,\dots,t_m)\in(-\delta,\delta)^m$, gdzie $t\cdot h:=(t_1h_1,\dots,t_mh_m)$. Odwzorowanie $(-\delta,\delta)^m\ni t\longmapsto I(u+t\cdot h)\in\mathbb{R}$ jest klasy $\mathcal{C}^1$ oraz dla dowolnego $t\in(-\delta,\delta)^m$ mamy*

$$\frac{\partial}{\partial t_j}I(u+t\cdot h)=\int_a^b\Big(F'_{y_j}(x,u+t\cdot h,u'+t\cdot h')h_j+F'_{z_j}(x,u+t\cdot h,u'+t\cdot h')h'_j\Big)dx,\quad j=1,\dots,m.$$

Niech

$$\frac{\partial I}{\partial h_j}(u):=\frac{\partial}{\partial t_j}I(u+t\cdot h)\Big|_{t=0}=\int_a^b\Big(F'_{y_j}(x,u,u')h_j+F'_{z_j}(x,u,u')h'_j\Big)dx,$$
$$u\in\mathcal{D},\ h=(h_1,\dots,h_m)\in\mathcal{C}_0^1((a,b),\mathbb{R}^m),\ j=1,\dots,m.$$

Twierdzenie 10.17.10. *Jeżeli $u\in\mathcal{D}$ realizuje minimum funkcjonału I, to*

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial h_j}(u)&=\int_a^b\Big(F'_{y_j}(x,u,u')h_j+F'_z(x,u,u')h'_j\Big)dx\\&=\int_a^b\Big(F'_{z_j}(x,u,u')-\int_{x_0}^x F'_{y_j}(\xi,u(\xi),u'(\xi))d\xi\Big)h'_j dx=0,\\&\qquad h=(h_1,\dots,h_m)\in\mathcal{C}_0^1((a,b),\mathbb{R}^m),\ x_0\in(a,b),\ j=1,\dots,m.\end{aligned}$$

Ponadto, istnieją stałe $C_1,\dots,C_m$ takie, że

$$F'_{z_j}(x,u(x),u'(x\pm))-\int_{x_0}^x F'_{y_j}(\xi,u(\xi),u'(\xi))d\xi=C_j,\quad x\in(a,b),\ j=1,\dots,m.$$

W szczególności,

$$F'_{z_j}(x,u(x),u'(x-))=F'_{z_j}(x,u(x),u'(x+)),\quad x\in(a,b),$$

funkcja $(a,b)\ni x\longmapsto F'_{z_j}(x,u(x),u'(x+))$ jest ciągła, lewo- i prawostronnie różniczkowalna oraz

$$\Big(x\longmapsto F'_{z_j}(x,u(x),u'(x+))\Big)'_{\pm}(x)=F'_{y_j}(x,u(x),u'(x\pm)),\quad x\in(a,b),\ j=1,\dots,m.\qquad(\ddagger)$$

Układ równań (‡) nosi nazwę *równań Eulera* (lub *równań Eulera–Lagrange'a*). Równania te dla punktów ciągłości u' mają postać

$$\frac{d}{dx}F'_{z_j}(x,u(x),u'(x))=F'_{y_j}(x,u(x),u'(x)),\quad j=1,\dots,m.$$

Przykład 10.17.11 (Ogólny problem brachistochrony)**.**

$$\mathcal{D}\ni\gamma\longmapsto I(\gamma):=\int_0^1\frac{\|\gamma'(\tau)\|}{\sqrt{\gamma_3(\tau)}}\,d\tau\in\mathbb{R}_{>0},$$

gdzie $\mathcal{D}:=\{\gamma\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}^3)\cap\mathcal{C}'^1((0,1),\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}_{>0}):\forall_{\tau\in(0,1)}\ \gamma'(\tau)\neq0,\ \gamma(0)=(0,0,0),\ \gamma(1)=(x_0,y_0,z_0),\ I(\gamma)<+\infty\}$, $(x_0,y_0)\neq(0,0)$ i $z_0\geqslant0$. W zagadnieniu tym mamy $F(y,z)=\frac{\|z\|}{\sqrt{y_3}}$, $(y,z)\in(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}_{>0})\times(\mathbb{R}^3)_*=:G\times G'$. Zauważmy, że nie możemy wziąć $G'=\mathbb{R}^3$, bo $F\notin\mathcal{C}^1((\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}_{>0})\times\mathbb{R}^3)$.

Ponieważ $\frac{\partial F}{\partial y_j}=0$ dla $j=1,2$, zatem z równań Eulera mamy

$$\frac{\gamma'_j(\tau\pm)}{\sqrt{\gamma_3(\tau)}\|\gamma'(\tau\pm)\|}=C_j=\text{const},\quad\tau\in(0,1),\ j=1,2.$$

Jeżeli $C_1 = 0$, to $\gamma_1 = \text{const}$, a więc $x_0 = 0$ i ruch odbywa się w płaszczyźnie $x = 0$. Podobnie, jeżeli $C_2 = 0$, to ruch odbywa się w płaszczyźnie $y = 0$. Jeżeli $C_1, C_2 \neq 0$, to $\frac{\gamma_1'(\tau\pm)}{C_1} = \frac{\gamma_2'(\tau\pm)}{C_2},\ \tau \in (0,1)$. Wynika stąd, że $\frac{\gamma_1(\tau)}{C_1} - \frac{\gamma_2(\tau)}{C_2} = C = \text{const},\ \tau \in (0,1)$, a więc ruch odbywa się w płaszczyźnie $\frac{x}{C_1} - \frac{y}{C_2} = C$.

Wobec tego, że już wiemy, że ruch jest płaski, możemy założyć, że $\gamma_2 \equiv 0$, $x_0 > 0$, $y_0 = 0$ ($C_2 = 0$). Wtedy $C_1 \neq 0$ i w konsekwencji, $\gamma_1'(\tau\pm)$ jest stałego znaku dla $\tau \in (0,1)$ (i nigdzie się nie zeruje). W takim razie $\gamma_1 : [0,1] \longrightarrow [0,x_0]$ jest bijekcją ściśle rosnącą i $f := \gamma_1^{-1} : [0,x_0] \longrightarrow [0,1]$ jest funkcją kawałkami klasy $\mathcal{C}^1$ w $(0,x_0)$. Niech $u := \gamma_3 \circ f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Wtedy $u \in \mathcal{C}([0,x_0]) \cap \mathcal{C}'^1((0,x_0),\mathbb{R}_{>0})$, $u(0) = 0$, $u(x_0) = z_0$ oraz

$$\int_0^{x_0} \frac{\sqrt{1+u'^2(x)}}{\sqrt{u(x)}}dx = \int_0^{x_0} \frac{\sqrt{1+\gamma_3'^2(f(x))f'^2(x)}}{\sqrt{\gamma_3(f(x))}}\,dx$$

$$\underset{\substack{x=\gamma_1(\tau)\\ dx=\gamma_1'(\tau)d\tau}}{=} \int_0^1 \frac{\sqrt{1+\frac{\gamma_3'^2(\tau)}{\gamma_1'^2(\tau)}}}{\sqrt{\gamma_3(\tau)}}\gamma_1'(\tau)\,d\tau = \int_0^1 \frac{\sqrt{\gamma_1'^2(\tau)+\gamma_3'^2(\tau)}}{\sqrt{\gamma_3(\tau)}}\,d\tau = \int_0^1 \frac{\|\gamma'(\tau)\|}{\sqrt{\gamma_3(\tau)}}\,d\tau.$$

Warunki dostateczne na minimum funkcjonału podamy w podrozdziale 12.5.

ROZDZIAŁ 11

Podrozmaitości

11.1. Podrozmaitości lokalne

Definicja 11.1.1. Niech $\varnothing \neq M \subset \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{N}_0 \cap [0,n]$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty,\ \omega\}$. Mówimy, że zbiór M jest *d–wymiarową podrozmaitością lokalną klasy $\mathcal{C}^k$ w $\mathbb{R}^n$*, jeżeli:

– dla $d=0$: M jest co najwyżej przeliczalnym zbiorem dyskretnym (dowolny punkt $a \in M$ ma otoczenie otwarte $U \subset \mathbb{R}^n$ takie, że $M \cap U = \{a\}$). Zauważmy, że dla $d=0$ klasa $\mathcal{C}^k$ jest obojętna;

– dla $1 \leqslant d \leqslant n$: spełniony jest następujący warunek: $\forall_{a\in M}\ \exists_{P\in \operatorname{top}\mathbb{R}^d}\ \exists_{U\in \operatorname{top} M:\ a\in U}\ \exists_{p:P\to U}$:

- $p : P \longrightarrow U$ jest homeomorfizmem,
- $p \in \mathcal{C}^k(P, \mathbb{R}^n)$,
- $\operatorname{rank} p'(t) = d$, $t \in P$.

Zwykle będziemy pomijać słowo „lokalna" i będziemy mówić o *d–wymiarowej podrozmaitości klasy $\mathcal{C}^k$ w $\mathbb{R}^n$* lub też pisać krótko $M \in \mathcal{M}^k_d(\mathbb{R}^n)$ (oznaczenie to ma charakter lokalny).

W powyższej sytuacji mówimy, że $p : P \longrightarrow U$ jest *lokalną parametryzacją* (dla U), zaś $p^{-1} : U \longrightarrow P$ jest *mapą* (na U). Każdą rodzinę map $p_i^{-1} : U_i \longrightarrow P_i$, $i \in I$, taką że $\bigcup\limits_{i\in I} U_i = M$ nazywamy *atlasem na* M. Zauważmy, że na podstawie twierdzenia Lindelöfa [1], z dowolnego atlasu na M można wybrać podatlas przeliczalny.

Dla $d = n$, na podstawie twierdzenia o odwzorowaniu odwrotnym, powyższe warunki oznaczają, że $M \in \operatorname{top}\mathbb{R}^n$. W szczególności, dla $d = n$ klasa $\mathcal{C}^k$ jest obojętna.

Obserwacja 11.1.2. (a) W $\mathbb{R}$ nie ma nietrywialnych podrozmaitości.

(b) Jeżeli $M \in \mathcal{M}^k_d(\mathbb{R}^n)$ i $\varnothing \neq N \in \operatorname{top} M$, to $N \in \mathcal{M}^k_d(\mathbb{R}^n)$.

(c) Jeżeli $p : P \longrightarrow U$ jest lokalną parametryzacją, zaś $\varphi : Q \longrightarrow P$ jest dowolnym dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$ ($Q \in \operatorname{top}\mathbb{R}^d$), to $p \circ \varphi : Q \longrightarrow U$ jest również lokalną parametryzacją.

(d) Jeżeli $M \in \mathcal{M}^k_d(\mathbb{R}^n)$, $d \geqslant 1$, to dla każdego punktu $a \in M$ istnieje lokalna parametryzacja $p : \Delta^d \longrightarrow U$ ($\Delta := (-1,1)$) taka, że $p(0) = a$.

(e) Każda podrozmaitość klasy $\mathcal{C}^k$ jest klasy $\mathcal{C}^\ell$ dla dowolnego $1 \leqslant \ell \leqslant k-1$.

(f) Jeżeli $M := \{(t, \varphi(t)) : t \in P\}$, gdzie $1 \leqslant d \leqslant n-1$, $P \in \operatorname{top}\mathbb{R}^d$ i $\varphi \in \mathcal{C}^k(P, \mathbb{R}^{n-d})$, to $M \in \mathcal{M}^k_d(\mathbb{R}^n)$.

(g) Jeżeli $M \in \mathcal{M}^k_d(\mathbb{R}^n)$ oraz $\Phi : \Omega \longrightarrow \Omega'$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$, gdzie $M \subset \Omega$, to $\Phi(M) \in \mathcal{M}^k_d(\mathbb{R}^n)$.

Istotnie, przypadki $d = 0$ i $d = n$ są trywialne. Dla $1 \leqslant d \leqslant n-1$, wystarczy pokazać, że jeżeli $p : P \longrightarrow U$ jest lokalną parametryzacją dla $U \in \operatorname{top} M$, to $\Phi \circ p : P \longrightarrow \Phi(U)$ jest lokalną parametryzacją dla $\Phi(U)$. Jedyną wątpliwość może budzić ostatni warunek z rzędem. Mamy: $(\Phi \circ p)'(t) = \Phi'(p(t)) \circ p'(t)$. Ponadto, $\Phi'(x)$ jest macierzą nieosobliwą dla dowolnego $x \in \Omega$. Stąd $\operatorname{rank}(\Phi \circ p)'(t) = \operatorname{rank} p'(t) = d$ dla dowolnego $t \in P$.

(h) Każda d–wymiarowa płaszczyzna afiniczna $M \subset \mathbb{R}^n$ jest d–wymiarową podrozmaitością w $\mathbb{R}^n$ klasy $\mathcal{C}^\omega$. Istotnie, przypadki $d = 0$ i $d = n$ są trywialne. Dla $1 \leqslant d \leqslant n-1$, jeżeli $M = x_0 + V$, gdzie V jest d–wymiarową podprzestrzenią wektorową $\mathbb{R}^n$, to dla dowolnej bazy $v_1, \ldots, v_d$ przestrzeni V odwzorowanie $\mathbb{R}^d \ni (t_1, \ldots, t_d) \longmapsto x_0 + t_1 v_1 + \cdots + t_d v_d \in M$ jest (globalną) parametryzacją M klasy $\mathcal{C}^\omega$ – Ćwiczenie.

(i) $(n-1)$–wymiarowa jednostkowa sfera euklidesowa $\mathbb{S}_{n-1}$ $\mathbb{S}_{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\} = \partial\mathbb{B}_n$ jest $(n-1)$–wymiarową podrozmaitością w $\mathbb{R}^n$ klasy $\mathcal{C}^\omega$. Istotnie, jeżeli np. $U_n^+ := \{x \in \mathbb{S}_{n-1} : x_n > 0\}$, to odwzorowanie $\mathbb{B}_{n-1} \ni x' \longmapsto (x', \sqrt{1 - \|x'\|^2}) \in U_n^+$ jest lokalną parametryzacją U_n^+ klasy $\mathcal{C}^\omega$. Podobnie możemy sparametryzować każdy z $2n$ zbiorów $U_j^\pm := \{x \in \mathbb{S}_{n-1} : \pm x_j > 0\}$, $j = 1, \ldots, n$.

Zauważmy, do parametryzacji $\mathbb{S}_2$ wystarczą dwa rzuty stereograficzne z przeciwnych biegunów.

---

[1] Ernst Lindelöf (1870–1946).

(j) Zbiór $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 = y^2\}$ nie jest jednowymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$ w $\mathbb{R}^2$, ale odwzorowanie $p : \mathbb{R} \longrightarrow M$, $p(t) := (t^2, t^3)$, jest homeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^\omega$. Zauważmy, że $p'(0) = (0,0)$, a więc p nie jest lokalną parametryzacją.

Istotnie, przypuśćmy, że $q = (f,g) : \Delta \longrightarrow M$ jest odwzorowaniem różniczkowalnym w $t = 0$ takim, że $q(0) = (0,0)$. Wtedy $f^3 \equiv g^2$. Po podzieleniu przez t^2 i przejściu z t do zera dostajemy $(f'(0))^2 f(0) = (g'(0))^2$, co daje $g'(0) = 0$. Dzieląc z kolei przez t^3 mamy: $(f(t)/t)^3 = (g(t)/t)^2(\frac{1}{t})$. Przy $t \longrightarrow 0$ lewa strona zmierza do $(f'(0))^3$, zaś prawa jest $\leqslant 0$ dla $t < 0$ i $\geqslant 0$ dla $t > 0$. Stąd: $f'(0) = 0$. Tak więc $q'(0) = (0,0)$, a zatem q nie może być parametryzacją.

Twierdzenie 11.1.3. *Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i niech $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ będzie odwzorowaniem klasy $\mathcal{C}^k$ ($k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$) o stałym rzędzie d. Wtedy dowolny punkt $a \in \Omega$ ma otoczenie otwarte $U \subset \Omega$ takie, że $f(U)$ jest d–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$ w $\mathbb{R}^m$.*

Dowód. Przypadek $d = 0$ jest trywialny, bowiem wtedy f jest stałe na każdej składowej zbioru Ω. Niech $1 \leqslant d \leqslant \min\{m,n\}$. Ustalmy $a \in \Omega$. Na podstawie twierdzenia o rzędzie istnieją zbiory otwarte $U \subset \Omega$, $V \subset \mathbb{R}^m$ i dyfeomorfizmy klasy $\mathcal{C}^k$ $\alpha : \Delta^n \longrightarrow U$, $\beta : V \longrightarrow \Delta^m$ takie, że $\alpha(0) = a$, $\beta(f(a)) = 0$, $f(U) \subset V$, $\beta \circ f \circ \alpha(t_1, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_d, \underbrace{0, \dots, 0}_{(m-d)\times})$, $t = (t_1, \dots, t_n) \in \Delta^n$.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\ f\ } & V \\ {\scriptstyle\alpha}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ \Delta^n & \xrightarrow{(\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^d},0)} & \Delta^m \end{array}$$

W tej sytuacji $f(U) = \beta^{-1}(\Delta^d \times \{0\}^{m-d})$, a zatem odwzorowanie $\Delta^d \ni t \longmapsto \beta^{-1}(t_1, \dots, t_d, 0, \dots, 0)$ jest parametryzacją $f(U)$ klasy $\mathcal{C}^k$. □

Twierdzenie 11.1.4 (Opisy podrozmaitości). *Niech $M \in \mathcal{M}_d^k(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant d \leqslant n-1$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) *M jest d–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$ w $\mathbb{R}^n$;*

(ii) $\forall_{a\in M}\ \exists_{d'\geqslant d}\ \exists_{P\in \operatorname{top}\mathbb{R}^{d'}}\ \exists_{U\in \operatorname{top} M:\, a\in U}\ \exists_{p:P\to U} : p : P \longrightarrow U$ *jest odwzorowaniem otwartym (tzn. $p(\operatorname{top} P) \subset \operatorname{top} U$), $p(P) = U$, $p \in \mathcal{C}^k(P, \mathbb{R}^n)$, $\operatorname{rank} p'(t) = d$, $t \in P$;*

(iii) $\forall_{a\in M}\ \exists_{\Omega\in \operatorname{top}\mathbb{R}^n:\, a\in\Omega}\ \exists_{\Phi:\Omega\to\Delta^n} : \Phi$ *jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$, $\Phi(M\cap\Omega) = \Delta^d \times \{0\}^{n-d}$* [2];

(iv) $\forall_{a\in M}\ \exists_{\Omega\in \operatorname{top}\mathbb{R}^n:\, a\in\Omega}\ \exists_{Q\in \operatorname{top}\mathbb{R}^n}\ \exists_{V\subset\mathbb{R}^n}\ \exists_{\Phi:\Omega\to Q} : V$ *jest d–wymiarową podprzestrzenią wektorową $\mathbb{R}^n$, Φ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$, $\Phi(M\cap\Omega) = V \cap Q$;*

(v) $\forall_{a\in M}\ \exists_{\ell\geqslant n-d}\ \exists_{\Omega\in \operatorname{top}\mathbb{R}^n:\, a\in\Omega}\ \exists_{f\in\mathcal{C}^k(\Omega,\mathbb{R}^\ell)} : M\cap\Omega = f^{-1}(0)$, $\operatorname{rank} f'(x) = n-d$, $x \in \Omega$;

(vi) $\forall_{a\in M}\ \exists_{\Omega\in \operatorname{top}\mathbb{R}^n:\, a\in\Omega}\ \exists_{f\in\mathcal{C}^k(\Omega,\mathbb{R}^{n-d})} : M\cap\Omega = f^{-1}(0)$, $\operatorname{rank} f'(x) = n-d$, $x \in \Omega$;

(vii) $\forall_{a\in M}\ \exists_{\Omega\in \operatorname{top}\mathbb{R}^n:\, a\in\Omega}\ \exists_{P\in \operatorname{top}\mathbb{R}^d}\ \exists_{\varphi\in\mathcal{C}^k(P,\mathbb{R}^{n-d})}\ \exists_{\sigma\in S_n} : P$ *jest wypukły,* $\sigma(M\cap\Omega) = \{(t,\varphi(t)) : t \in P\}$, *gdzie $\sigma : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\sigma(x_1, \dots, x_n) := (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$;*

(viii) $\forall_{a\in M}\ \exists_{\Omega\in \operatorname{top}\mathbb{R}^n:\, a\in\Omega}\ \exists_{P\in \operatorname{top}\mathbb{R}^d}\ \exists_{p:P\to M\cap\Omega}\ \exists_{s:\Omega\to P} : P$ *jest wypukły, $p \in \mathcal{C}^k(P, \mathbb{R}^n)$, $s \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^d)$, $M \cap \Omega = p(P)$, $s \circ p = \mathrm{id}_P$.*

Zauważmy, że w warunku (viii) odwzorowanie $r := p \circ s : \Omega \longrightarrow M \cap \Omega$ jest retrakcją klasy $\mathcal{C}^k$.

Dowód. Implikacje (i) $\Longrightarrow$ (ii), (iii) $\Longrightarrow$ (iv) są oczywiste. Implikacja (ii) $\Longrightarrow$ (iii) wynika z dowodu Twierdzenia 11.1.3.

(iv) $\Longrightarrow$ (v): Niech $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie izomorfizmem liniowym takim, że $L(V) = \{0\}^{n-d} \times \mathbb{R}^d$. Zdefiniujmy $g := L \circ \Phi$, $f := (g_1, \dots, g_{n-d}) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{n-d} = \mathbb{R}^\ell$.

(v) $\Longrightarrow$ (vi): Na podstawie twierdzenia o rzędzie istnieją zbiory otwarte $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^\ell$ oraz dyfeomorfizmy klasy $\mathcal{C}^k$ $\alpha : \Delta^n \longrightarrow A$, $\beta : B \longrightarrow \Delta^\ell$ takie, że $a \in A \subset \Omega$, $\alpha(0) = a$, $f(A) \subset B$, $\beta(0) = 0$, $\beta \circ f \circ \alpha(t) = (t_1, \dots, t_{n-d}, 0, \dots, 0)$, $t \in \Delta^n$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\ f\ } & B \\ {\scriptstyle\alpha}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ \Delta^n & \xrightarrow{(\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^d},0)} & \Delta^\ell \end{array}$$

[2] Takie odwzorowanie Φ będziemy nazywać *odwzorowaniem rozpłaszczającym.*

Niech $g := \alpha^{-1}$, $h := (g_1, \dots, g_{n-d}) : A \longrightarrow \mathbb{R}^{n-d}$. Oczywiście $\operatorname{rank} h'(x) = n-d$, $x \in \Delta^n$, oraz $M \cap A = \{x \in A : f(x) = 0\} = \{x \in A : \beta \circ f(x) = 0\} = \{x \in A : (\operatorname{pr}_{\mathbb{R}^{n-d}}, 0) \circ \alpha^{-1}(x) = 0\} = h^{-1}(0)$.

(vi) $\Longrightarrow$ (vii): Po permutacji zmiennych, można założyć, że $\det \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_{d+j}}(a)\right]_{i,j=1,\dots,n-d} \neq 0$. Teraz wystarczy tylko skorzystać z twierdzenia o odwzorowaniu uwikłanym (zbiór U_1 w twierdzeniu o odwzorowaniu uwikłanym (a więc P w (vii)) można zawsze wybrać w klasie obszarów wypukłych).

(vii) $\Longrightarrow$ (viii): Niech $p(t) := \sigma^{-1}(t, \varphi(t)),\ t \in P$, $s(x) := \operatorname{pr}_{\mathbb{R}^d}(\sigma(x)),\ x \in \mathbb{R}^n$. Oczywiście, $M \cap \Omega = p(P)$ oraz $s \circ p = \mathrm{id}_P$. Pozostaje tylko zmodyfikować zbiór Ω i zastąpić go przez $s^{-1}(P)$.

(viii) $\Longrightarrow$ (i): Niech $U := M \cap \Omega$. Oczywiście $p : P \longrightarrow U$ jest homeomorfizmem ($p^{-1} = s|_U$). Pozostaje zauważyć, że ze związku $s'(p(t)) \circ p'(t) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d}$, $t \in P$, wynika łatwo, że $\operatorname{rank} p'(t) = d$ dla $t \in P$. □

Przykład 11.1.5. Niech $\Omega := (\mathbb{R}^n)_*$, $f(x) := \|x\|^2 - 1$, $x \in \Omega$. Wtedy $\operatorname{rank} f'(x) = 1$, $x \in \Omega$, oraz $f^{-1}(0) = \mathbb{S}_{n-1}$, a zatem na podstawie Twierdzenia 11.1.4(vi), $\mathbb{S}_{n-1}$ jest $(n-1)$–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^\omega$ (por. Obserwacja 11.1.2(i)).

Twierdzenie 11.1.6. *Niech $M \in \mathcal{M}_d^k(\mathbb{R}^n)$, $d \geqslant 1$ i niech $p : P \longrightarrow U$, $q : Q \longrightarrow V$ będą dwiema lokalnymi parametryzacjami takimi, że $U \cap V \neq \varnothing$. Wtedy odwzorowanie $\varphi := p^{-1} \circ q : q^{-1}(U \cap V) \longrightarrow p^{-1}(U \cap V)$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$; odwzorowanie φ nosi nazwę* funkcji przejścia.

Dowód. Przypadek $d = n$ jest oczywisty. Załóżmy, że $d \leqslant n-1$. Oczywiście, φ jest homeomorfizmem. Wystarczy więc sprawdzić, że jest klasy $\mathcal{C}^k$ (a następnie zamienić rolami p i q). Problem ma teraz charakter lokalny. Ustalmy $a \in U \cap V$ i niech $p(t_0) = a = q(u_0)$. Na podstawie twierdzenia o rzędzie istnieją otoczenie A_1 punktu t_0 w P, otoczenie A_2 punktu u_0 w Q, otoczenia B_1, B_2 punktu a w $\mathbb{R}^n$, dyfeomorfizmy klasy $\mathcal{C}^k$ $\alpha_j : \Delta^d \longrightarrow A_j$, $\beta_j : B_j \longrightarrow \Delta^n$, $j = 1, 2$, takie, że: $p(A_1) \subset B_1$, $q(A_2) \subset B_2$, $\alpha_1(0) = t_0$, $\alpha_2(0) = u_0$, $\beta_j(a) = 0$, $j = 1, 2$, $\beta_1 \circ p \circ \alpha_1(\xi) = (\xi, 0)$, $\xi \in \Delta^d$, $\beta_2 \circ q \circ \alpha_2(\eta) = (\eta, 0)$, $\eta \in \Delta^d$.

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & \xrightarrow{\ p\ } & B_1 B_2 & \xleftarrow{\ q\ } & A_2 \\ {\scriptstyle\alpha_1}\uparrow & & {\scriptstyle\beta_1}\downarrow{\scriptstyle\beta_2} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_2} \\ \Delta^d & \xrightarrow{(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^d},0)} & \Delta^n & \xleftarrow{(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^d},0)} & \Delta^d \end{array}$$

Stąd wynika, że na zbiorze $q^{-1}(p(A_1) \cap B_2)$ zachodzi równość

$$\varphi = p^{-1} \circ q = \alpha_1 \circ \operatorname{pr}_{\mathbb{R}^d} \circ \beta_1 \circ \beta_2^{-1} \circ (\alpha_2^{-1}, 0),$$

która dowodzi, że φ jest klasy $\mathcal{C}^k$ w otoczeniu u_0. □

Definicja 11.1.7. Niech $M \in \mathcal{M}_d^k(\mathbb{R}^n)$, $d \geqslant 1$ i niech F będzie dowolną przestrzenią unormowaną. Powiemy, że odwzorowanie $f : M \longrightarrow F$ jest *k–krotnie różniczkowalne w punkcie $a \in M$* ($f \in \mathcal{D}^k(M, F; a)$), jeżeli dla dowolnej parametryzacji lokalnej $p : P \longrightarrow U$ takiej, że $a \in U$, mamy $f \circ p \in \mathcal{D}^k(P, F; p^{-1}(a))$. Podobnie, powiemy, że odwzorowanie $f : M \longrightarrow F$ jest *klasy $\mathcal{C}^k$ na M* ($f \in \mathcal{C}^k(M, F)$), jeżeli dla dowolnej parametryzacji lokalnej $p : P \longrightarrow U$ odwzorowanie $f \circ p$ jest klasy $\mathcal{C}^k(P, F)$.

Obserwacja 11.1.8. (a) Zauważmy, że definiujemy tylko pojęcie różniczkowalności, ale nie definiujemy $f^{(k)}(a)$.

(b) Dla $d = n$ wprowadzone powyżej pojęcia są zgodne ze standardowymi definicjami.

(c) $\mathcal{D}^k(M, F; a)$ i $\mathcal{C}^k(M, F)$ są przestrzeniami wektorowymi.

(d) Jeżeli $f \in \mathcal{D}^k(M, F; a)$ i $\psi \in \mathcal{D}^k(\Omega, G; f(a))$, gdzie Ω jest zbiorem otwartym w F, G jest przestrzenią unormowaną i $f(M) \subset \Omega$, to $\psi \circ f \in \mathcal{D}^k(M, G; a)$.

(e) Jeżeli $f \in \mathcal{C}^k(M, F)$, $f(M) \subset \Omega$ i $\psi \in \mathcal{C}^k(\Omega, G)$, to $\psi \circ f \in \mathcal{C}^k(M, G)$.

Twierdzenie 11.1.9. *Dla dowolnego odwzorowania $f : M \longrightarrow F$ i punktu $a \in M$ następujące warunki są równoważne:*

(i) *$f \in \mathcal{D}^k(M, F; a)$;*

(ii) *istnieje lokalna parametryzacja $p : P \longrightarrow U$ taka, że $a \in U$ i $f \circ p \in \mathcal{D}^k(P, F; p^{-1}(a))$;*

(iii) *istnieje otoczenie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ punktu a oraz $\widetilde{f} : \Omega \longrightarrow F$ takie, że $\widetilde{f} \in \mathcal{D}^k(\Omega, F; a)$ oraz $\widetilde{f} = f$ na $M \cap \Omega$.*

Dowód. To, że (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) wynika wprost z Twierdzenia 11.1.6.

(i) $\Longrightarrow$ (iii): Niech Ω, P, p, s będą takie, jak w Twierdzeniu 11.1.4(viii). Przypomnijmy, że $p : P \longrightarrow M \cap \Omega$ jest lokalną parametryzacją (por. dowód implikacji (viii) $\Longrightarrow$ (i) w Twierdzeniu 11.1.4). Zdefiniujmy $\widetilde{f} := (f \circ p) \circ s$. Oczywiście, $\widetilde{f} = f$ na $M \cap \Omega$ oraz $\widetilde{f} \in \mathcal{D}^k(\Omega, F; a)$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): Rozważmy dowolną parametryzację lokalną $p : P \longrightarrow U$ ($a \in U$) i niech $p(t_0) = a$. Niech Ω, $\widetilde{f}$ będą jak w (iii). Możemy założyć, że $U \subset \Omega$. Wtedy $f \circ p = \widetilde{f} \circ p$, a stąd oczywiście wynika, że $f \circ p \in \mathcal{D}^k(P, F; t_0)$. □

W ten sam sposób można wykazać następujący wynik (Ćwiczenie).

Twierdzenie 11.1.10. *Dla dowolnego odwzorowania $f : M \longrightarrow F$ następujące warunki są równoważne:*

(i) $f \in \mathcal{C}^k(M, F)$;

(ii) *dla dowolnego punktu $a \in M$ istnieje lokalna parametryzacja $p : P \longrightarrow U$ taka, że $a \in U$ i $f \circ p \in \mathcal{C}^k(P, F)$;*

(iii) *dla dowolnego punktu $a \in M$ istnieje otoczenie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ oraz $\widetilde{f} \in \mathcal{C}^k(\Omega, F)$ takie, że $\widetilde{f} = f$ na $M \cap \Omega$.*

Obserwacja 11.1.11. (a) Jeżeli $p : P \longrightarrow U$ jest lokalną parametryzacją klasy $\mathcal{C}^k$, to $p^{-1} \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^d)$.

(b) Jeżeli $\varphi \in \mathcal{D}^k(\Omega, \mathbb{R}^n; u_0)$ ($\Omega \in \operatorname{top} E$, zaś E jest przestrzenią unormowaną), $\varphi(\Omega) \subset M$ i $f \in \mathcal{D}^k(M, F; \varphi(u_0))$, to $f \circ \varphi \in \mathcal{D}^k(\Omega, F; u_0)$.

Istotnie, wystarczy wykorzystać Twierdzenie 11.1.9(iii) i zauważyć, że w otoczeniu punktu u_0 mamy $f \circ \varphi = \widetilde{f} \circ \varphi$.

(c) Jeżeli $\varphi \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\varphi(\Omega) \subset M$ i $f \in \mathcal{C}^k(M, F)$, to $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^k(\Omega, F)$.

Istotnie, wystarczy wykorzystać lokalnie Twierdzenie 11.1.10(iii).

Definicja 11.1.12. Niech M będzie d–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$ w $\mathbb{R}^n$ ($1 \leqslant d \leqslant n$). Niech $a \in M$ i niech $p : P \longrightarrow U$ będzie dowolną lokalną parametryzacją taką, że $a \in U$. Przyjmijmy, że $a = p(t_0)$. Przestrzeń $T_a M := p'(t_0)(\mathbb{R}^d)$ nazywamy *przestrzenią styczną do M w punkcie a*.

Oczywiście, jeżeli $d = n$, to $T_a M = \mathbb{R}^n$.

Zauważmy, że definicja jest poprawna, bowiem na podstawie Twierdzenia 11.1.6, jeżeli $q : Q \longrightarrow V$ jest jakąś inną parametryzacją taką, że $q(u_0) = a$, to $q = p \circ \varphi$, gdzie φ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^1$, $\varphi(u_0) = t_0$. W szczególności, ponieważ $\varphi'(u_0)$ jest izomorfizmem, zatem $q'(u_0)(\mathbb{R}^d) = p'(t_0)(\varphi'(u_0)(\mathbb{R}^d)) = p'(t_0)(\mathbb{R}^d)$.

Przyjmujemy ponadto, że $T_a M := \{0\}$, jeżeli $d = 0$.

Oczywiście $\dim T_a M = d$.

Twierdzenie 11.1.13. *Niech M będzie d–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$ w $\mathbb{R}^n$ ($1 \leqslant d \leqslant n-1$), $a \in M$ i niech $\Omega \in \operatorname{top} \mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^\ell)$ będzie takie, że $a \in \Omega$, $M \cap \Omega = f^{-1}(0)$ i $\operatorname{rank} f'(x) = n - d$, $x \in \Omega$ ([3]). Wtedy $T_a M = \operatorname{Ker} f'(a)$.*

Dowód. Niech $V := \operatorname{Ker} f'(a)$. Odnotujmy, że $\dim V = d$. Niech $p : P \longrightarrow U, U \subset \Omega$, będzie dowolną lokalną parametryzacją, $p(t_0) = a$. Ponieważ $f \circ p \equiv 0$, zatem $f'(a) \circ p'(t_0) = 0$, a stąd $T_a M \subset V$, co wobec równości wymiarów, daje żądaną równość. □

Twierdzenie 11.1.14 (Równoważne opisy przestrzeni stycznej)**.** *Niech M będzie d–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$ w $\mathbb{R}^n$ ($1 \leqslant d \leqslant n-1$), $a \in M$, $X \in \mathbb{R}^n$. Następujące warunki są równoważne:*

(i) $X \in T_a M$;

(ii) *istnieje $\varepsilon > 0$ oraz odwzorowanie $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ klasy $\mathcal{C}^k$ ([4]) takie, że $\gamma(0) = a$, $\gamma'(0) = X$;*

(iii) *istnieją ciągi $(a_\nu)_{\nu=1}^\infty \subset M$, $(r_\nu)_{\nu=1}^\infty \subset (0, +\infty)$ takie, że $a_\nu \longrightarrow a$, $r_\nu(a_\nu - a) \longrightarrow X$ ([5]).*

Dowód. Dla $X = 0$ równoważność warunków jest oczywista. Przyjmujemy dalej, że $X \neq 0$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Niech $p : P \longrightarrow U$ będzie lokalną parametryzacją, $p(t_0) = a$. Niech $Y \in \mathbb{R}^d$ będzie taki, że $X = p'(t_0)(Y)$. Wtedy $X = \gamma'(0)$, gdzie $\gamma(\tau) := p(t_0 + \tau Y)$, $|\tau| < \varepsilon$ (ε małe).

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Wystarczy przyjąć $a_\nu := \gamma(\frac{1}{\nu})$, $r_\nu := \nu$, $\nu \gg 1$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): Niech $p : P \longrightarrow U$ będzie lokalną parametryzacją, $p(t_0) = a$. Możemy założyć, że $a_\nu = p(t_\nu)$, $t_\nu \in P$, $\nu \geqslant 1$. Oczywiście $t_\nu \longrightarrow t_0$ ([6]). Możemy również założyć, że $t_\nu \neq t_0$, $\nu \geqslant 1$, oraz (przechodząc do podciągu), że $Y_\nu := \frac{t_\nu - t_0}{\|t_\nu - t_0\|} \longrightarrow Y$ dla pewnego $Y \in \mathbb{R}^d$.

([3]) Por. Twierdzenie 11.1.4(v).

([4]) Jako odwzorowanie $(-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

([5]) Odnotujmy czysto geometryczny charakter warunku (iii).

([6]) Ponieważ p jest homeomorfizmem.

Zauważmy, że $r_\nu\|a_\nu - a\| \longrightarrow \|X\|$, a zatem $\frac{a_\nu - a}{\|a_\nu - a\|} \longrightarrow \frac{X}{\|X\|}$. Niech $p(t) = p(t_0) + p'(t_0)(t-t_0) + \alpha(t)\|t-t_0\|$, gdzie $\alpha(t) \longrightarrow 0$ przy $t \longrightarrow t_0$. Ostatecznie mamy:

$$\frac{X}{\|X\|} = \lim_{\nu\to+\infty} \frac{p'(t_0)(Y_\nu) + \alpha(t_\nu)}{\|p'(t_0)(Y_\nu) + \alpha(t_\nu)\|} = \frac{p'(t_0)(Y)}{\|p'(t_0)(Y)\|},$$

co kończy dowód (bo T_aM jest przestrzenią wektorową). □

Twierdzenie 11.1.15. *Niech $M \in \mathcal{M}_d^k(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant d \leqslant n-1$, $k \in \mathbb{N}\cup\{\infty,\ \omega\}$. Załóżmy, że $0 \in M$ oraz $T_0M = \mathbb{R}^d \times \{0\}^{n-d}$. Wtedy istnieją $\Omega \in \operatorname{top}\mathbb{R}^n$, $P \in \operatorname{top}\mathbb{R}^d$, $0 \in \Omega$, $0 \in P$, oraz odwzorowanie $f \in \mathcal{C}^k(P, \mathbb{R}^{n-d})$ takie, że $M \cap \Omega = \{(t, f(t)) : t \in P\}$, $f(0) = 0$ i $f'(0) = 0$.*

Z powyższego twierdzenia wynika w szczególności, że dla dowolnego $a \in M$ rozmaitość M jest lokalnie wykresem nad afiniczną przestrzenią styczną $a + T_aM$ pewnego odwzorowania klasy $\mathcal{C}^k$.

Dowód. Niech $q : Q \longrightarrow U = M \cap \Omega$ będzie dowolną lokalną parametryzacją, $0 \in Q$, $q(0) = 0 \in U$. Warunek $q'(0)(\mathbb{R}^d) = \mathbb{R}^d \times \{0\}^{n-d}$ oznacza, że $\frac{\partial q_j}{\partial u_k}(0) = 0$, $j = d+1, \dots, n$, $k = 1, \dots, d$. Wynika stąd, że $\det[\frac{\partial q_j}{\partial u_k}(0)]_{j,k=1,\dots,d} \neq 0$. Wobec twierdzenia o odwzorowaniu odwrotnym, możemy więc założyć, że $\psi := (q_1, \dots, q_d) : Q \longrightarrow P$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$. Wtedy $p := q \circ \psi^{-1} : P \longrightarrow M \cap \Omega$ jest lokalną parametryzacją, $p(t) = (t, f(t))$, przy czym $f(0) = 0$ oraz $f'(0) = 0$. □

Twierdzenie 11.1.16. *Niech M będzie d–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$ w $\mathbb{R}^n$ ($1 \leqslant d \leqslant n-1$), $a \in M$ i niech $f \in \mathcal{D}(M, F; a)$. Wtedy $\widetilde{f}'(a)|_{T_aM}$ nie zależy od wyboru lokalnego przedłużenia $\widetilde{f}$ różniczkowalnego w punkcie a* (7).

Dowód. Wystarczy pokazać, że jeżeli $g : \Omega \longrightarrow F$ jest odwzorowaniem różniczkowalnym w punkcie a i takim, że $g = 0$ na $M \cap \Omega$, to $g'(a)|_{T_aM} \equiv 0$.

Istotnie, niech $p : P \longrightarrow U$ będzie dowolną parametryzacją lokalną, $a = p(t_0) \in U \subset \Omega$. Mamy $g \circ p \equiv 0$. Zatem $g'(a) \circ p'(t_0) = 0$, co daje żądaną równość. □

Definicja 11.1.17. W powyższej sytuacji kładziemy

$$f'(a) : T_aM \longrightarrow F, \quad f'(a) := \widetilde{f}'(a)|_{T_aM}.$$

Odnotujmy, że $f'(a) \in \mathcal{L}(T_aM, F)$. Odwzorowanie $f'(a)$ nazywamy *różniczką odwzorowania f w punkcie a*.

Twierdzenie 11.1.18. *Niech M będzie d–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$ w $\mathbb{R}^n$ i niech M' będzie d'–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$ w $\mathbb{R}^{n'}$. Niech $f : M \longrightarrow M'$ będzie różniczkowalne w punkcie $a \in M$. Wtedy $f'(a)(T_aM) \subset T_{f(a)}M'$. W szczególności, $f'(a) \in \mathcal{L}(T_aM, T_{f(a)}M')$.*

Jeżeli ponadto f jest bijektywne i f^{-1} jest klasy $\mathcal{C}^1$ (tzn. f jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^1$*), to $f'(a) \in \operatorname{Isom}(T_aM, T_{f(a)}M')$.*

Dowód. Załóżmy, że $M' \cap \Omega' = g^{-1}(0)$, gdzie $\Omega' \in \operatorname{top}\mathbb{R}^{n'}$, $g \in \mathcal{C}^1(\Omega', \mathbb{R}^{n'-d'})$, $\operatorname{rank} g'(y) = n' - d'$, $y \in \Omega'$, $f(a) \in \Omega'$ (por. Twierdzenie 11.1.4(vi)). Niech $\widetilde{f}$ będzie lokalnym przedłużeniem odwzorowania f na otoczenie Ω punktu a. Możemy założyć, że $\widetilde{f}(\Omega) \subset \Omega'$. Wtedy $g \circ \widetilde{f} = 0$ na $M \cap \Omega$, zatem $(g \circ \widetilde{f})'(a) = 0$ na T_aM (por. Twierdzenie 11.1.16). Oznacza to, że $g'(f(a)) \circ \widetilde{f}'(a) = 0$ na T_aM, co wobec Twierdzenia 11.1.13, daje żądany wynik. □

Prawdziwe jest następujące fundamentalne twierdzenie

Twierdzenie* 11.1.19 (Whitney, (8)). *Dla dowolnej podrozmaitości $M \in \mathcal{M}_d^k(\mathbb{R}^n)$, gdzie $d \geqslant 1$, $k \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$, istnieje podrozmaitość $M' \in \mathcal{M}_d^\omega(\mathbb{R}^{2n+1})$ taka, że M i M' są $\mathcal{C}^k$-dyfeomorficzne.*

Obserwacja 11.1.20. Dla rozmaitości klasy $\mathcal{C}^2$ i odwzorowań $f : M \longrightarrow F$ mających drugą pochodną w punkcie a należy oprzeć się pokusie zdefiniowania drugiej różniczki w punkcie a jako odwzorowania $f''(a) : T_aM \times T_aM \longrightarrow F$ danego wzorem $f''(a) = \widetilde{f}''(a)|_{T_aM \times T_aM}$, gdzie $\widetilde{f}$ jest lokalnym przedłużeniem f takim, że $\widetilde{f}''(a)$ istnieje.

Istotnie, $\widetilde{f}''(a)|_{T_aM \times T_aM}$ może zależeć od wyboru przedłużenia.

---

(7) Przedłużenie takie istnieje na mocy Twierdzenia 11.1.9(iii).

(8) Zob. H. Whitney, *Differentiable manifolds*, Annals Math. 37 (1936), 645–680, Ch. II, § 8.

Niech np. $M := \{(t,t^2) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}$, $F := \mathbb{R}$, $f := 0$, $a := (0,0)$. Zauważmy, że $T_aM = \mathbb{R} \times \{0\}$. Niech $\widetilde{f}(x,y) := x^2 - y$. Oczywiście $\widetilde{f}$ jest przedłużeniem f, ale $\widetilde{f}''(a)((h_1,0),(h_2,0)) = 2h_1h_2$, $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$.

Lemat 11.1.21 (Lemat o jednoczesnej parametryzacji)**.** *Niech $M \in \mathcal{M}^k_d(\mathbb{R}^n)$, $M' \in \mathcal{M}^k_{d'}(\mathbb{R}^n)$ będą takie, że $M' \subset M$. Wtedy*

(a) *$d' \leqslant d$;*

(b) *jeżeli $d' = d$, to M' jest podzbiorem otwartym w M;*

(c) *jeżeli $d' < d \leqslant n$, to dla dowolnego punktu $a \in M'$ istnieje lokalna parametryzacja $p : \Delta^d \longrightarrow U$ podrozmaitości M, $a \in U$, taka, że $p(0) = a$ i $p(\Delta^{d'} \times \{0\}^{d-d'}) = M' \cap U$ ([9]).*

W szczególności, jeżeli $d' \geqslant 1$, to odwzorowanie $\widetilde{p} : \Delta^{d'} \longrightarrow M' \cap U$, $\widetilde{p}(v) := p(v,0)$, jest lokalną parametryzacją dla M' ([10]).

Dowód. Dla $d' = 0$ twierdzenie jest oczywiste. Załóżmy, że $d' \geqslant 1$. W szczególności, $d \geqslant 1$.

(a) Wobec Twierdzenia 11.1.14(ii) mamy: $T_aM' \subset T_aM$, $a \in M'$. Stąd $d' = \dim T_aM' \leqslant \dim T_aM = d$.

(b) Weźmy dowolny punkt $a \in M'$ i niech $p : P \longrightarrow U$, $q : Q \longrightarrow V$ będą parametryzacjami lokalnymi dla M i M' takimi, że $a \in U \cap V$ ($P, Q \in \operatorname{top}\mathbb{R}^d$). Możemy założyć, że $V = U \cap M'$. Rozważmy homeomorfizm $\varphi := p^{-1} \circ q : Q \longrightarrow p^{-1}(V)$. Na podstawie Obserwacji 11.1.11 jest to odwzorowanie klasy $\mathcal{C}^k$. Mamy $p \circ \varphi = q$. W szczególności, $p'(\varphi(u)) \circ \varphi'(u) = q'(u)$, skąd wynika, że $\operatorname{rank}\varphi'(u) = d$, $u \in Q$. Teraz, na podstawie np. twierdzenia o odwzorowaniu odwrotnym, $p^{-1}(V)$ jest podzbiorem otwartym w P, a więc $U \cap M'$ jest zbiorem otwartym w M.

(c) Weźmy dowolną parametryzację lokalną $p : P \longrightarrow U$ podrozmaitości M taką, że $a = p(t_0) \in U$. Niech $N := p^{-1}(M' \cap U)$. Zauważmy, że N jest d'–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$ w $\mathbb{R}^d$. Istotnie, dla dowolnego $u_0 \in N$, niech $q : Q \longrightarrow V$ będzie lokalną parametryzacją klasy $\mathcal{C}^k$ podrozmaitości M' i $p(u_0) \in V \subset M' \cap U$. Niech $\varphi := p^{-1} \circ q : Q \longrightarrow p^{-1}(V)$. Oczywiście, tak jak w (b), φ jest homeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$ i $p'(\varphi(u)) \circ \varphi'(u) = q'(u)$, $u \in Q$. Stąd $\operatorname{rank}\varphi'(u) = d'$, $u \in Q$. Tak więc φ jest lokalną parametryzacją podrozmaitości N w otoczeniu u_0.

Teraz, na podstawie Twierdzenia 11.1.4(iii) (zastosowanego do podrozmaitości N) istnieją zbiór otwarty $\Omega \in \operatorname{top} P$, $t_0 \in \Omega$, oraz $\mathcal{C}^k$–dyfeomorfizm $\Phi : \Omega \longrightarrow \Delta^d$ takie, że $\Phi(N \cap \Omega) = \Delta^{d'} \times \{0\}^{d-d'}$.

Poszukiwaną parametryzacją będzie: $p \circ \Phi^{-1} : \Delta^d \longrightarrow p(\Omega)$. □

11.2. Twierdzenia o retrakcji

Rozpoczniemy od prostszej wersji twierdzenia o globalnej retrakcji.

Twierdzenie 11.2.1. *Dla dowolnej podrozmaitości $M \in \mathcal{M}^k_d(\mathbb{R}^n)$ ($k \in \mathbb{N}_2 \cup \{\infty, \omega\}$) istnieje otoczenie otwarte $M \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ oraz globalna retrakcja $\pi : \Omega \longrightarrow M$ klasy $\mathcal{C}^{k-1}$ taka, że dla dowolnego $x \in \Omega$ mamy $\|x - \pi(x)\| = \operatorname{dist}(x, M)$, przy czy punkt $\pi(x)$ jest jedynym punktem realizującym tę odległość (norma i odległość są euklidesowe).*

Dowód. Możemy założyć, że $1 \leqslant d \leqslant n-1$. Rozpocznijmy od elementarnej obserwacji, że dla $a \in M$ oraz $x \in \mathbb{B}(a,r)$ mamy $\operatorname{dist}(x,M) = \operatorname{dist}(x, M \cap \mathbb{B}(a,3r))$. Istotnie, dla $y \in M \setminus \mathbb{B}(a,3r)$ mamy $\|y - x\| \geqslant \|y - a\| - \|x - a\| \geqslant 3r - r = 2r > r > \|x - a\| \geqslant \operatorname{dist}(x,M)$. Pozwala to na lokalizację problemu (Ćwiczenie). Ponadto, problem jest oczywiście niezmienniczy względem izometrii euklidesowych. Pozwala to dla dowolnego $a \in M$ na przejście do następującego zagadnienia lokalnego. Najpierw redukujemy sytuację do $a = 0$ oraz $T_aM = \mathbb{R}^d \times \{0\}^{n-d}$. Następnie, na podstawie Twierdzenia 11.1.15 możemy założyć, że $M := \{(t, f(t)) : t \in \Delta^d(r)\}$, gdzie $\Delta^\ell(r) := (-r,r)^\ell \subset \mathbb{R}^\ell$, $f : \Delta^d(r) \longrightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ jest klasy $\mathcal{C}^k$ oraz $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$. W konsekwencji, dla $x = (x', x'') \in \Delta^d(s) \times \Delta^{n-d}(s)$ przy $0 < s \ll 1$ mamy

$$\operatorname{dist}^2(x,M) = \min\{\|t - x'\|^2 + \|f(t) - x''\|^2 : t \in \Delta^d(r)\} =: \min\{g(x,t) : t \in \Delta^d(r)\}.$$

Jedynego punktu realizującego odległość będziemy szukać w postaci $(\varphi(x), f(\varphi(x)))$, gdzie $\varphi : \Delta^n(s) \longrightarrow \Delta^d(r)$ jest klasy $\mathcal{C}^{k-1}$ (wtedy będziemy mogli przyjąć $\pi(x) := (\varphi(x), f(\varphi(x)))$, $x \in \Delta^n(s)$, $0 < s \ll 1$). Zauważmy, że

$$\frac{\partial g}{\partial t_k}(x,t) = 2\Big(t_k - x_k + \sum_{j=1}^{n-d}(f_j(t) - x_{d+j})\frac{\partial f_j}{\partial t_k}(t)\Big) =: 2F_k(x,t), \quad k = 1, \dots, d.$$

([9]) Dla $d' = 0$ warunek ten oznacza, że $p(0) = M' \cap U$.

([10]) Uwaga na warunek: $\operatorname{rank}\widetilde{p}'(v) = d'$, $v \in \Delta^{d'}$.

Tak więc, $t=\varphi(x)$ powinno być jedynym rozwiązaniem układu równań $F_k(x,t)=0$, $k=1,\dots,d$, w otoczeniu punktu $(0,0)$. Oczywiście F_k jest klasy $\mathcal{C}^{k-1}$. Ponadto, $F(0,0)=0$ oraz

$$\frac{\partial F_k}{\partial t_\ell}(x,t)=\delta_{k,\ell}+\sum_{j=1}^{n-d}\Big(\frac{\partial f_j}{\partial t_\ell}(t)\frac{\partial f_j}{\partial t_k}(t)+(f_j(t)-x_{d+j})\frac{\partial^2 f_j}{\partial t_\ell\partial t_k}(t)\Big).$$

W szczególności, $[\frac{\partial F_k}{\partial t_\ell}(0,0)]_{k,\ell=1,\dots,d}=\mathbb{I}_d$. W takim razie, na podstawie twierdzenia o odwzorowaniu uwikłanym, istnieją $0<s_1,r_1\ll 1$ oraz odwzorowanie $\varphi:\Delta^n(s_1)\longrightarrow\Delta^d(r_1)$ klasy $\mathcal{C}^{k-1}$ takie, że $t=\varphi(x)$ jest jedynym rozwiązaniem naszego układu dla $(x,t)\in\Delta^n(s_1)\times\Delta^d(r_1)$. Teraz wystarczy jeszcze tylko dobrać $0<s<s_1$ tak by dla $x\in\Delta^n(s)$ było $\operatorname{dist}(x,M)=\operatorname{dist}(x,M\cap(\Delta^d(r_1)\times\mathbb{R}^{n-d}))$. □

Przykład 11.2.2. Twierdzenie 11.2.1 nie jest prawdziwe dla $k=1$. Niech $\theta\in(0,1)$, $M:=\{(t,|t|^{1+\theta}):t\in\mathbb{R}\}$; M jest jednowymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$, przy czym $T_0M=\mathbb{R}\times\{0\}$ (Ćwiczenie). Pokażemy, że dla dowolnego $y>0$ istnieje $t>0$ takie, że

$$\operatorname{dist}^2((0,y),M)\leqslant\|(0,y)-(t,t^{1+\theta})\|^2=t^2+(y-t^{1+\theta})^2<y^2=\|(0,y)-(0,0)\|^2.$$

Oznacza to, że istnieją co najmniej dwa punkty rozmaitości M realizujące odległość. W konsekwencji ciągła retrakcja $\pi:\Omega\longrightarrow M$ taka, jak w Twierdzeniu 11.2.1 nie może istnieć.

Istotnie, warunek $t^2+(y-t^{1+\theta})^2<y^2$ oznacza, że $y>\frac{1}{2}(t^{1-\theta}+t^{1+\theta})$, co pozwala zawsze dobrać t.

Prawdziwe jest następujące wysoce nietrywialne twierdzenie — zob. H. Federer, *Geometric measure theory*, Springer Verlag, Berlin, 1969, Theorem 3.1.20. [11]

Twierdzenie 11.2.3 (Twierdzenie o retrakcji)**.** *Niech $M\subset\mathbb{R}^n$ będzie niepustym zbiorem spójnym i niech $k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$. Wtedy M jest podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$ w $\mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją zbiór otwarty $\Omega\supset M$ oraz retrakcja $r:\Omega\longrightarrow M$ klasy $\mathcal{C}^k$.*

Dowód. ($\Longleftarrow$) Niech $d:=\max\{\operatorname{rank}r'(x):x\in\Omega\}$. Jeżeli $d=0$, to r jest odwzorowaniem stałym na składowej spójnej zbioru Ω zawierającej M, a wtedy M musi być punktem. Załóżmy więc, że $1\leqslant d\leqslant n$. Ponieważ, $r\circ r=r$, zatem $r'(r(a))\circ r'(a)=r'(a)$ dla dowolnego $a\in\Omega$. W szczególności, $r'(a)\circ r'(a)=r'(a)$ dla dowolnego $a\in M$, a stąd $r'(a)(X)=X$ dla dowolnego wektora $X\in V_a:=r'(a)(\mathbb{R}^n)$, $a\in M$. Niech $\Omega_0:=\{x\in\Omega:\operatorname{rank}r'(x)=d\}$, $M_0:=M\cap\Omega_0$. Jest jasne, że Ω_0 jest niepustym zbiorem otwartym. Na wstępie zauważmy, że $r(\Omega_0)=M_0$, czyli $\operatorname{rank}r'(r(a))=d$ dla dowolnego $a\in\Omega_0$. Istotnie, ustalmy $a\in\Omega_0$. Mamy $d\geqslant\operatorname{rank}r'(r(a))=\dim r'(r(a))(\mathbb{R}^n)\geqslant\dim r'(r(a))(r'(a)(\mathbb{R}^n))=\dim r'(a)(\mathbb{R}^n)=d$.

Na podstawie Twierdzenia 11.1.3, każdy punkt $a\in M_0$ posiada otoczenie $U\subset\Omega_0$ takie, że $r(U)\in\mathcal{M}^k_d(\mathbb{R}^n)$. Wtedy również $U\cap r(U)\in\mathcal{M}^k_d(\mathbb{R}^n)$. Ponieważ $r(\Omega_0)=M_0$, dostajemy $U\cap r(U)=U\cap M_0$, co pokazuje, że $U\cap r(U)$ jest otwarty w M_0. W takim razie $M_0\in\mathcal{M}^k_d(\mathbb{R}^n)$.

Teraz pokażemy, że $M_0=M$ (co zakończy dowód implikacji). Ponieważ M_0 jest niepustym podzbiorem otwartym M, a M jest spójne, więc wystarczy pokazać, że M_0 jest domknięte w M. Przypomnijmy, że $r'(a)(X)=X$, $a\in M$, $X\in V_a$, oraz $\dim V_a=d$, $a\in M_0$. Dla $a\in M_0$ niech $L_a:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ będzie izometrią ($L_aL_a^t=\mathbb{I}_n$) taką, że $L_a(V_a)=\mathbb{R}^d\times\{0\}^{n-d}$ i niech $W_a:=L_ar'(a)L_a^{-1}$. Wtedy $W_a(X)=X$ dla $X\in\mathbb{R}^d\times\{0\}^{n-d}$, co oznacza, że $W_a=\begin{bmatrix}\mathbb{I}_d & , & *_{d\times(n-d)}\\ 0_{(n-d)\times d} & , & *_{(n-d)\times(n-d)}\end{bmatrix}$.

Niech teraz $M_0\ni a_s\longrightarrow a_0\in M$. Ponieważ macierze L_{a_s} są ortogonalne, możemy (przechodząc do podciągu) założyć, że $L_{a_s}\longrightarrow L$, gdzie L jest ortogonalna. Wtedy $W_{a_s}=L_{a_s}r'(a_s)L_{a_s}^{-1}\longrightarrow Lr'(a)L^{-1}$, co oznacza, że $\operatorname{rank}r'(a)=d$, a więc $a\in M_0$.

($\Longrightarrow$) Niech $d:=\dim M$. Przypadki $d=0$ i $d=n$ są oczywiste. Niech więc $1\leqslant d\leqslant n-1$. Na podstawie Twierdzenia 11.1.4(viii), dla dowolnego $a\in M$ istnieją: zbiór otwarty $\Omega_a\subset\mathbb{R}^n$, $a\in\Omega_a$, wypukły zbiór otwarty $P_a\subset\mathbb{R}^d$, odwzorowania $p_a:P_a\longrightarrow\Omega_a$, $q_a:\Omega_a\longrightarrow P_a$ klasy $\mathcal{C}^k$ takie, że $M\cap\Omega_a=p_a(P_a)$, $q_a\circ p_a=\mathrm{id}_{P_a}$.

Rozważmy pokrycie $\{\Omega_a:a\in M\}$ zbioru $\Omega_0:=\bigcup\limits_{a\in M}\Omega_a$ i zastosujmy do niego konstrukcję specjalnego rozkładu jedności z $L=\frac{1}{20}$ ($\alpha=\frac{1}{2L}=2(1+\tau)=10$) (Konstrukcja 10.9.3). Otrzymujemy zbiór co najwyżej przeliczalny $S\subset\Omega_0$ oraz funkcje $\psi_s\in\mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^n,[0,1])$, $s\in S$, takie, że

$$\overline{\mathbb{B}}(s',h(s'))\cap\overline{\mathbb{B}}(s'',h(s''))=\varnothing,\ s',s''\in S,\ s'\neq s'',\ \text{ gdzie}$$

[11] Herbert Federer (1920–2010).

$$h(x) := \frac{1}{20} \sup_{a\in M} \min\{1, \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega_a)\},\ x \in \Omega_0.$$

Ponadto:

- rodzina $\{\overline{\mathbb{B}}(s, 10h(s)) : s \in S\}$ jest pokryciem wpisanym w pokrycie $\{\Omega_a : a \in M\}$,
- $\operatorname{supp}\psi_s \subset \overline{\mathbb{B}}(s, 10h(s))$, $s \in S$, (1)
- $\#\{s \in S : \overline{\mathbb{B}}(x, 10h(x)) \cap \overline{\mathbb{B}}(s, 10h(s)) \neq \varnothing\} \leqslant (9 + 6/L)^n = (129)^n$, $x \in \Omega_0$, (2)
- rodzina $\{\mathbb{B}(s, 5h(s)) : s \in S\}$ jest pokryciem Ω_0,
- $\psi_s = 1$ na $\overline{\mathbb{B}}(s, (1+\tau)h(s)) = \overline{\mathbb{B}}(s, 5h(s))$, $s \in S$. (3)

Poniżej rozważymy jedynie przypadek, gdy S jest przeliczalny. Dowód w przypadku, gdy S jest skończony przebiega analogicznie (i jest nieco prostszy). Ponumerujmy elementy zbioru $S = \{s_1, s_2, \dots\}$ i przyjmijmy oznaczenia: $\psi_i := \psi_{s_i}$, $K_i := \overline{\mathbb{B}}(s_i, 10h(s_i))$, $Q_i := \mathbb{B}(s_i, 5h(s_i))$, $i = 1, 2, \dots$. Dla dowolnego i ustalmy $a_i \in M$ takie, że $K_i \subset \Omega_{a_i}$ i przyjmijmy: $\Omega_i := \Omega_{a_i}$, $P_i := P_{a_i}$, $p_i := p_{a_i}$, $q_i := q_{a_i}$.

Na wstępie skonstruujemy indukcyjnie ciąg $(U_i, r_i)_{i=1}^{\infty}$, taki, że

- U_i jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^n$, $U_i \subset \Omega_0$,
- $r_i : U_i \longrightarrow M$ jest odwzorowaniem klasy $\mathcal{C}^k$,
- $r_i = \mathrm{id}$ na $M \cap U_i$, (4)
- $M \cap Q_j \subset M \cap U_i$ dla $j \leqslant i$, $i = 1, 2, \dots$.

Dla $i = 1$ kładziemy $U_1 := \Omega_1$, $r_1 := p_1 \circ q_1$.

Krok indukcyjny $i \rightsquigarrow i+1$: Niech $V_{i+1} := \Omega_{i+1} \cap r_i^{-1}(\Omega_{i+1}) \subset \Omega_{i+1} \cap U_i$. Zauważmy, że wobec (4) mamy $M \cap U_i \cap \Omega_{i+1} \subset V_{i+1}$. (5)

Na V_{i+1} definiujemy $\varrho_{i+1} := p_{i+1}\Big((1 - \psi_{i+1})(q_{i+1} \circ r_i) + \psi_{i+1} q_{i+1}\Big)$. Wobec wypukłości P_{i+1} funkcja ta jest poprawnie określona. Jest to funkcja klasy $\mathcal{C}^k$ oraz $\varrho_{i+1} : V_{i+1} \longrightarrow M \cap \Omega_{i+1}$.

- Wobec (4) na $M \cap V_{i+1}$ mamy $\varrho_{i+1} = p_{i+1} \circ q_{i+1} = \mathrm{id}$.
- Wobec (1) na $V_{i+1} \setminus K_{i+1}$ mamy $\varrho_{i+1} = p_{i+1} \circ q_{i+1} \circ r_i = r_i$.
- Wobec (3) na $V_{i+1} \cap Q_{i+1}$ mamy $\varrho_{i+1} = p_{i+1} \circ q_{i+1}$.

Niech $U_{i+1} := (U_i \setminus K_{i+1}) \cup V_{i+1} \cup Q_{i+1}$ i niech $r_{i+1} : U_{i+1} \longrightarrow M$ będzie dane wzorami

$$r_{i+1} := \begin{cases} r_i & \text{na } U_i \setminus K_{i+1} \\ \varrho_{i+1} & \text{na } V_{i+1} \\ p_{i+1} \circ q_{i+1} & \text{na } Q_{i+1} \end{cases}. \tag{6}$$

Z poprzednich rozważań wynika, że r_{i+1} jest poprawnie określonym odwzorowaniem klasy $\mathcal{C}^k$ oraz $r_{i+1} = \mathrm{id}$ na $M \cap U_{i+1}$. Oczywiście $U_{i+1} \subset \Omega$. Zauważmy, że wobec (5) i inkluzji $K_{i+1} \subset \Omega_{i+1}$, mamy

$$M \cap U_{i+1} = M \cap (U_i \cup Q_{i+1}).$$

Stąd i z założenia indukcyjnego wynika, że $M \cap Q_j \subset M \cap U_{i+1}$ dla $j \leqslant i+1$.

Przechodzimy do następnego etapu dowodu. Niech

$$\Omega := \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{j=i}^{\infty} U_j. \text{ Zauważmy, że } M = M \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} M \cap Q_i \subset \Omega.$$

Wykażemy, że dla dowolnego i_0 istnieje i_* takie, że

$$U_i \cap Q_{i_0} = U_{i_*} \cap Q_{i_0}, \quad i \geqslant i_*. \tag{7}$$

Ustalmy i_0. Wobec (2) istnieje i_* takie, że $K_i \cap K_{i_0} = \varnothing$ dla $i \geqslant i_*$. Dla dowodu (7) zastosujemy indukcję ze względu na $i \geqslant i_*$.

$i \rightsquigarrow i+1$: Korzystając z tego, że $K_{i+1} \cap Q_{i_0} = \varnothing$ mamy:

$$\begin{aligned} U_{i+1} \cap Q_{i_0} &= \Big((U_i \setminus K_{i+1}) \cap Q_{i_0}\Big) \cup \Big(V_{i+1} \cap Q_{i_0}\Big) \cup \Big(Q_{i+1} \cap Q_{i_0}\Big) \\ &= (U_i \setminus K_{i+1}) \cap Q_{i_0} = U_i \cap Q_{i_0} = U_{i_*} \cap Q_{i_0}. \end{aligned}$$

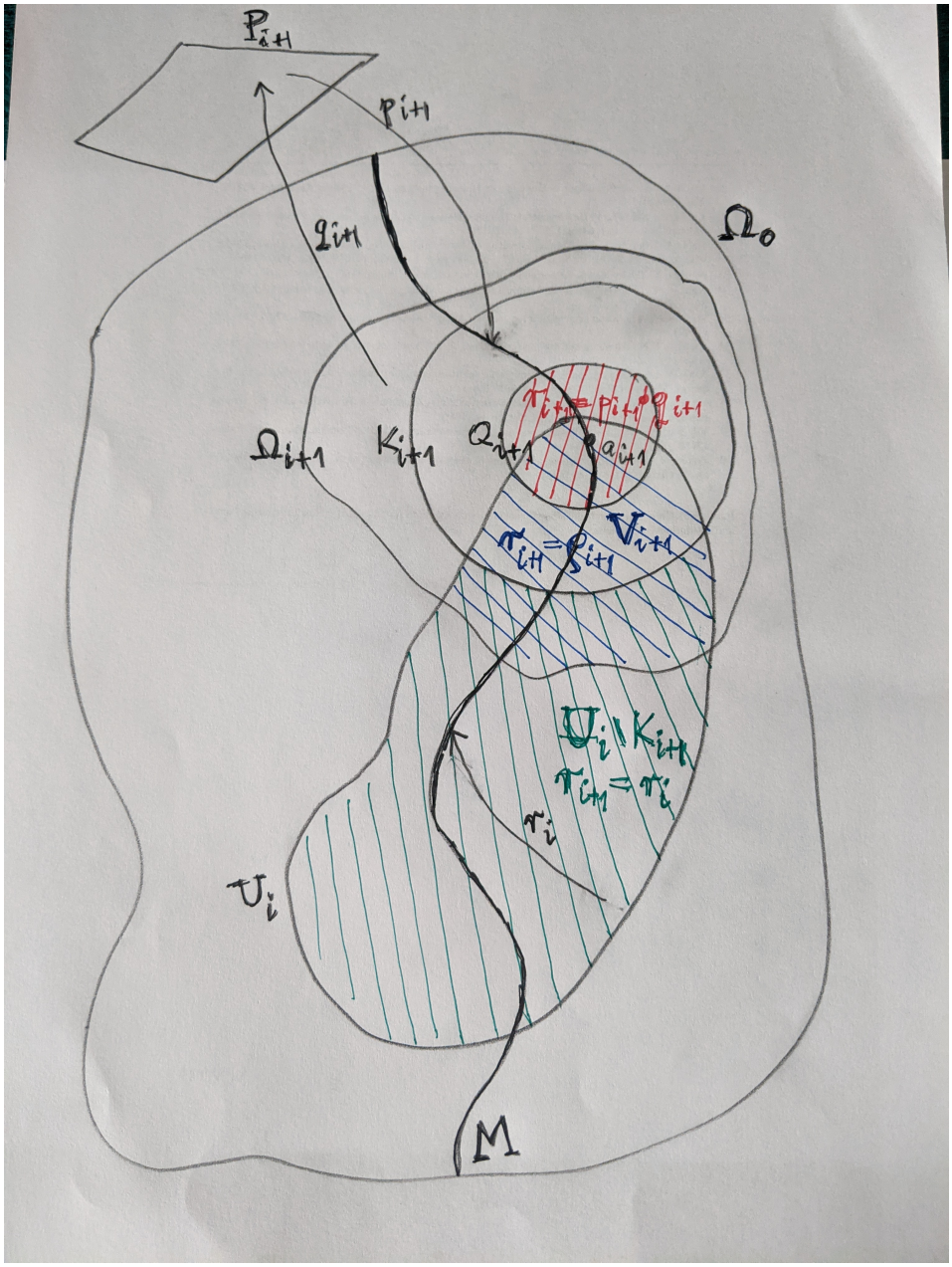
Jako wniosek dostajemy

$$\Omega \cap Q_{i_0} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{j=i}^{\infty} (U_j \cap Q_{i_0}) = \bigcup_{i=i_*}^{\infty} \bigcap_{j=i}^{\infty} (U_j \cap Q_{i_0}) = U_{i_*} \cap Q_{i_0},$$

co pokazuje, że Ω jest otwarty. Wykażemy teraz, że dla $i \geqslant i_*$ mamy $r_i = r_{i_*}$ na $\Omega \cap Q_{i_0} (= U_{i_*} \cap Q_{i_0} = U_i \cap Q_{i_0})$. Ponownie stosujemy indukcję ze względu na $i \geqslant i_*$.

$i \rightsquigarrow i+1$: Ponieważ $U_{i+1} \cap Q_{i_0} = (U_i \setminus K_{i+1}) \cap Q_{i_0}$, zatem, wobec (6) i założenia indukcyjnego, mamy $r_{i+1} = r_i = r_{i_*}$ na $U_{i+1} \cap Q_{i_0}$.

Teraz szukaną retrakcję określamy na Ω wzorem $r = \lim\limits_{i \to +\infty} r_i$. □



Obserwacja 11.2.4. Odnotujmy, że Twierdzenie 11.2.3 w porównaniu z Twierdzeniem 11.2.1 daje retrakcję lepszej klasy. Z drugiej strony, retrakcja z Twierdzenia 11.2.1 ma elegancką naturalną interpretację geometryczną.

Jako natychmiastowy wniosek z Twierdzenia 11.2.3 dostajemy możliwość globalnego definiowania funkcji klasy $\mathcal{D}^k(M,F)$ (odp. $\mathcal{C}^k(M,F)$); por. Twierdzenia 11.1.9(iii) i 11.1.10(11.1.10).

Twierdzenie 11.2.5. *Niech $M \in \mathcal{M}_d^k(\mathbb{R}^n)$ oraz $f : M \longrightarrow F$. Wtedy $f \in \mathcal{D}^k(M,F)$ (odp. $f \in \mathcal{C}^k(M,F)$) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją otoczenie otwarte $\Omega \supset M$ oraz $\widetilde{f} \in \mathcal{D}^k(\Omega,F)$ (odp. $\widetilde{f} \in \mathcal{C}^k(M,F)$) takie $\widetilde{f}|_M = f$.*

11.3. Ekstrema warunkowe

Rozważmy następujący problem. Dane są: $M \in \mathcal{M}_d^k(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leqslant d \leqslant n-1)$, punkt $a \in M$ i funkcja $f \in \mathcal{D}^k(M;a)$. Problem polega na znalezieniu (różniczkowych) warunków koniecznych i dostatecznych na to, by f miała w punkcie a ekstremum lokalne, zwane *ekstremum warunkowym*. Nazwa bierze się stąd, że ponieważ problem ma charakter lokalny, to możemy założyć (korzystając z Twierdzenia 11.1.9 i zmniejszając ewentualnie M), że $f = \widetilde{f}|_M$, gdzie $\widetilde{f} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $M \subset \Omega \in \operatorname{top}\mathbb{R}^n$ i $\widetilde{f}$ jest k–krotnie różniczkowalne w punkcie a, a zatem szukamy ekstremów lokalnych funkcji $\widetilde{f}$ przy warunku „punkt leży na M".

Twierdzenie 11.3.1 (Warunek konieczny na ekstremum warunkowe)**.** *Jeżeli f ma w punkcie a ekstremum warunkowe, to $f'(a) = 0$.*

Dowód. Niech $p : P \longrightarrow U$ będzie lokalną parametryzacją, $p(t_0) = a$. Wtedy $\widetilde{f} \circ p$ ma ekstremum lokalne w punkcie t_0, a zatem $f'(a) \circ p'(t_0) = 0$, co daje żądany wynik. □

Twierdzenie 11.3.2 (Warunek dostateczny na ekstremum warunkowe)**.** *Załóżmy, że dla pewnego $k \geqslant 2$ mamy:*

$$\widetilde{f}'(a) = 0 \text{ na } \mathbb{R}^n, \dots, \widetilde{f}^{(k-1)}(a) = 0 \text{ na } \mathbb{R}^n, \quad \widetilde{f}^{(k)}(a) \not\equiv 0 \text{ na } T_aM.$$

Wtedy:

(a) *jeżeli $\widetilde{f}^{(k)}(a)(X) > 0$ dla $X \in (T_aM)_*$ ([12]), to f ma w punkcie a silne minimum warunkowe;*

(b) *jeżeli $\widetilde{f}^{(k)}(a)(X) < 0$ dla $X \in (T_aM)_*$, to f ma w punkcie a silne maksimum warunkowe;*

(c) *jeżeli $\widetilde{f}^{(k)}(a)$ przyjmuje na T_aM wartości różnych znaków ([13]), to f nie ma w punkcie a lokalnego ekstremum warunkowego.*

Dowód. Niech $p : P \longrightarrow U$ będzie dowolną lokalną parametryzacją, $p(t_0) = a$. Niech $g := \widetilde{f} \circ p$. Musimy zbadać ekstremum lokalne (w sensie klasycznym) funkcji g w punkcie t_0. Ze wzoru na pochodną złożenia (Twierdzenie 10.7.6), dla $j = 1, \dots, k$, mamy

$$g^{(j)}(t_0)(Y) = (\widetilde{f} \circ p)^{(j)}(t_0)(Y) = \sum_{\alpha \in \Pi_j} \frac{j!}{\alpha!} \widetilde{f}^{(\alpha_1+\dots+\alpha_j)}(a)\Big(\underbrace{\frac{p'(t_0)(Y)}{1!}}_{\alpha_1 \times}, \dots, \underbrace{\frac{p^{(j)}(t_0)(Y)}{j!}}_{\alpha_j \times}\Big), \quad Y \in \mathbb{R}^d,$$

co wobec naszych założeń daje

$$g^{(j)}(t_0) = 0, \quad j = 1, \dots, k-1, \qquad g^{(k)}(t_0)(Y) = \widetilde{f}^{(k)}(a)(p'(t_0)(Y)), \quad Y \in \mathbb{R}^d.$$

Przypomnijmy, że $p'(t_0)(Y) \in (T_aM)_*$ dla $Y \in (\mathbb{R}^d)_*$, a zatem $g^{(k)}(t_0)$ zachowuje się (w sensie określoności) tak, jak $\widetilde{f}^{(k)}(a)$ na T_aM. Teraz wystarczy już tylko zastosować klasyczne twierdzenie o ekstremach lokalnych. □

Obserwacja 11.3.3. (a) Z dowodu Twierdzenia 11.3.2 wynika, że odwzorowanie $\widetilde{f}^{(k)}(a)|_{(T_aM)^k}$ nie zależy od wyboru rozszerzenia $\widetilde{f}$ (w klasie rozszerzeń spełniających założenia twierdzenia). Tak więc wystarczy zbadać określoność $\widetilde{f}^{(k)}(a)$ na T_aM dla jednego ustalonego rozszerzenia $\widetilde{f}$ funkcji f takiego, że $\widetilde{f}^{(j)}(a) = 0$, $j = 1, \dots, k-1$ (k parzyste).

(b) Niech $k = 2$. Zauważmy, że warunek $\widetilde{f}'(a) = 0$ nie może zostać zastąpiony warunkiem $f'(a) = 0$. Niech np. $n = 2$, $M := \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$, $a = (0,0)$, $f(x,x^2) := x^3$ (oczywiście f nie ma ekstremum warunkowego w punkcie a). Niech $\widetilde{f}(x,y) = x^2 - y + x^3$. Widać, że $\widetilde{f} = f$ na M. Ponadto, $f'(a) = 0$ na $T_aM = \mathbb{R} \times \{0\}$ i $\widetilde{f}''(a)((h,0)) = 2h^2$, $h \in \mathbb{R}$ (a więc spełniony jest warunek (a) z Twierdzenia 11.3.2).

([12]) W szczególności, k musi być parzyste.

([13]) W szczególności, gdy k jest nieparzyste.

(c) Patrząc na Twierdzenie 11.3.2 (i pamiętając o (a)) widzimy, iż przeszkodą w stosowaniu Twierdzenia 11.3.2 będzie następująca sytuacja: Dla pewnego $1 \leqslant m \leqslant k-1$ znaleźliśmy rozszerzenie $\widetilde{f}$ takie, że:

- $\widetilde{f}$ jest k–krotnie różniczkowalne w punkcie a,
- $\widetilde{f}^{(j)}(a)=0$, $j=1,\dots,m-1$ (warunek ten jest pusty dla $m=1$),
- $\widetilde{f}^{(m)}(a)\neq 0$,
- $\widetilde{f}^{(m)}(a)=0$ na T_aM (dla $m=1$ jest to po prostu warunek konieczny na ekstremum warunkowe).

Rozszerzenie takie na nic się nam nie przyda. Pytamy więc, czy możemy znaleźć inne rozszerzenie takie, że $\widetilde{f}^{(j)}(a)=0$, $j=1,\dots,m$. Jeżeli tak, to będziemy mieli pewną szansę, że Twierdzenie 11.3.2 rozstrzygnie o ekstremum.

Możemy zawsze założyć, że $M\cap\Omega=g^{-1}(0)$, gdzie $g\in\mathcal{C}^k(\Omega,\mathbb{R}^\ell)$ i $\operatorname{rank} g'(x)=n-d$, $x\in\Omega$. Zauważmy, że dla dowolnego odwzorowania $\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_\ell)\in\mathcal{C}^k(\Omega,\mathbb{R}^\ell)$, odwzorowanie

$$\widetilde{f}_\varphi := \widetilde{f}-\varphi_1 g_1-\dots-\varphi_\ell g_\ell$$

jest przedłużeniem f oraz, że jest ono k–krotnie różniczkowalne w punkcie a.

Twierdzenie 11.3.4 (Metoda mnożników Lagrange'a). (a) *Dla $m=1$, jeżeli $f'(a)=0$ na T_aM, to istnieje $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_\ell)\in\mathbb{R}^\ell$ takie, że dla funkcji $\widetilde{f}_\lambda := \widetilde{f}-\lambda_1 g_1-\dots-\lambda_\ell g_\ell$ spełniony jest związek $\widetilde{f}'_\lambda(a)=0$ na $\mathbb{R}^n$. Liczby $\lambda_1,\dots,\lambda_\ell$ noszą nazwę* mnożników Lagrange'a.

(b) *Dla $2\leqslant m\leqslant k-1$, jeżeli*

- *$\widetilde{f}$ jest k–krotnie różniczkowalne w punkcie a,*
- *$\widetilde{f}^{(j)}(a)=0$, $j=1,\dots,m-1$,*
- *$\widetilde{f}^{(m)}(a)=0$ na T_aM,*

to istnieją wielomiany jednorodne $Q_1,\dots,Q_\ell\in\mathcal{H}^{m-1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ takie, że dla odwzorowania

$$\widetilde{f}_Q(x) := \widetilde{f}(x)-\frac{1}{m!}\sum_{i=1}^{\ell} Q_i(x-a)g_i(x),\quad x\in\Omega,$$

mamy: $\widetilde{f}_Q^{(j)}(a)=0$, $j=1,\dots,m$.

Dowód. (a) Przypomnijmy, że $T_aM=\operatorname{Ker} g'(a)$ (Twierdzenie 11.1.13). W tej sytuacji warunek $\widetilde{f}'(a)=0$ na T_aM oznacza, że $\operatorname{Ker} g'_1(a)\cap\dots\cap\operatorname{Ker} g'_\ell(a)\subset\operatorname{Ker}\widetilde{f}'(a)$, a to, na podstawie znanych wyników z algebry, implikuje istnienie λ (zob. dowód (b)).

(b) Na wstępie zauważmy, że dla dowolnych $Q_1,\dots,Q_\ell\in\mathcal{H}^{m-1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, na podstawie wzoru Leibniza, mamy:

$$\widetilde{f}_Q^{(j)}(a)(h)=\widetilde{f}^{(j)}(a)(h)-\frac{1}{m!}\sum_{i=1}^{\ell}\sum_{s=0}^{j}\binom{j}{s}Q_i^{(s)}(0)(h)g_i^{(j-s)}(a)(h),\quad h\in\mathbb{R}^n,\ j=1,\dots,m.$$

Przypomnijmy, że $Q_i^{(s)}\in\mathcal{H}^{m-1-s}(\mathbb{R}^n,\mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}))$. W szczególności, mamy $Q_i^{(s)}(0)=0$ dla $s=0,\dots,m-2$. Z drugiej strony $g_i(a)=0$. Tak więc dla $j=1,\dots,m-1$, otrzymujemy $\widetilde{f}_Q^{(j)}(a)(h)=0$. Wiemy, że $Q_i^{(m-1)}(0)=(m-1)!Q_i$. Stąd dla $j=m$ mamy:

$$\widetilde{f}_Q^{(m)}(a)(h)=\widetilde{f}^{(m)}(a)(h)-\frac{1}{m!}\sum_{i=1}^{\ell}\binom{m}{m-1}Q_i^{(m-1)}(0)(h)g_i'(a)(h)=\widetilde{f}^{(m)}(a)(h)-\sum_{i=1}^{\ell}Q_i(h)g_i'(a)(h),$$
$$h\in\mathbb{R}^n.$$

Tak więc cały problem sprowadza się do doboru $Q_i\in\mathcal{H}^{m-1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, $i=1,\dots,\ell$, w ten sposób by

$$\widetilde{f}^{(m)}(a)(h)=\sum_{i=1}^{\ell}Q_i(h)g_i'(a)(h),\quad h\in\mathbb{R}^n.$$

Ponieważ $W:=\widetilde{f}^{(m)}(a)\in\mathcal{H}^m(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ i $W=0$ na T_aM, zatem wystarczy już tylko wykorzystać znane wyniki z algebry, aby stwierdzić, że W da się przedstawić w żądanej postaci. Możemy skorzystać np. z takiego rozumowania: Niech $L_1,\dots,L_{n-d}$ będzie dowolnym liniowo niezależnym podukładem układu $g'_1(a),\dots,g'_\ell(a)$. Wybierzmy d form liniowych $L_{n-d+1},\dots,L_n$ w ten sposób, że odwzorowanie $L:=(L_1,\dots,L_n):\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ jest izomorfizmem. Niech $V:=W\circ L^{-1}$. Wtedy $V\in\mathcal{H}^m(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ i $V=0$ na $\{0\}^{n-d}\times\mathbb{R}^d$. Oznacza to,

że wielomian V można zapisać w postaci $V(x) = x_1V_1(x) + \cdots + x_{n-d}V_{n-d}(x)$, gdzie $V_i \in \mathcal{H}^{m-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $i = 1, \dots, n-d$ (postać tę łatwo uzyskać przez zwykłe grupowanie wyrazów z wykorzystaniem warunku $V(0, \dots, 0, x_{n-d+1}, \dots, x_n) \equiv 0$). Zdefiniujmy $Q_i := V_i \circ L$, $i = 1, \dots, n-d$. Ostatecznie $W = Q_1L_1 + \cdots + Q_{n-d}L_{n-d}$. □

Przykład 11.3.5. Niech $M := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + \cdots + x_n = c,\ x_1, \dots, x_n > 0\}$, gdzie $n \geqslant 2$ i $c > 0$ jest ustaloną stałą (M jest $(n-1)$–wymiarową podrozmaitością w $\mathbb{R}^n$). Niech dalej $\widetilde{f}(x_1, \dots, x_n) := x_1 \cdots x_n$. Szukamy ekstremów warunkowych $\widetilde{f}$ na M.

Stosujemy metodę mnożników Lagrange'a. Niech $\widetilde{f}_\lambda(x) := \widetilde{f}(x) - \lambda(x_1 + \cdots + x_n - c)$. Punkt podejrzany o ekstremum warunkowe, to punkt $a \in M$ taki, że

$$\frac{\partial \widetilde{f}_\lambda}{\partial x_j}(a) = \prod_{k \neq j} a_k - \lambda = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Dostajemy stąd łatwo $a = (c/n, \dots, c/n)$ i $\lambda = (c/n)^{n-1}$. Teraz przechodzimy do badania zachowania się $\widetilde{f}''_\lambda(a)$ na T_aM. Oczywiście $T_aM = \{(X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n : X_1 + \cdots + X_n = 0\}$, zaś

$$\widetilde{f}''_\lambda(a)(X) = \sum_{j \neq k} \Big(\frac{c}{n}\Big)^{n-2} X_jX_k, \quad X \in \mathbb{R}^n.$$

Wynika stąd, że

$$\widetilde{f}''_\lambda(a)(X) = -\Big(\frac{c}{n}\Big)^{n-2} \|X\|^2 < 0, \quad X \in (T_aM)_*,$$

a więc $\widetilde{f}$ ma w punkcie a maksimum warunkowe, czyli

$$x_1 \cdots x_n \leqslant \Big(\frac{c}{n}\Big)^n = \Big(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\Big)^n, \quad x_1, \dots, x_n \geqslant 0.$$

11.4. Orientacja

Definicja 11.4.1. Niech E będzie n–wymiarową rzeczywistą przestrzenią wektorową ($1 \leqslant n < \infty$) i niech $\boldsymbol{B}(E)$ oznacza rodzinę wszystkich baz E. Dla dowolnych dwóch baz $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_n)$, $\boldsymbol{f} = (f_1, \dots, f_n) \in \boldsymbol{B}(E)$ niech $A = A(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})$ oznacza macierz przejścia od $\boldsymbol{e}$ do $\boldsymbol{f}$, tzn. $f_j = \sum\limits_{k=1}^{n} A_{k,j}e_k$, $j = 1, \dots, n$.

Oczywiście $A(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}) = \mathrm{id}$, $A(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}) = A(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})^{-1}$, $A(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{g}) = A(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}) \cdot A(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g})$. W zbiorze $\boldsymbol{B}(E)$ wprowadzamy relację $\boldsymbol{e} \sim \boldsymbol{f} :\iff \det A(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}) > 0$. Jest to relacja równoważnościowa. Niech $\mathcal{O}(E) := \boldsymbol{B}(E)/\sim$. Każdą klasę równoważności z $\mathcal{O}(E)$ nazywamy *orientacją* E.

Dla bazy $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_n)$ niech $\widehat{\boldsymbol{e}} := (-e_1, e_2, \dots e_n)$. Zauważmy, że $\det A(\boldsymbol{e}, \widehat{\boldsymbol{e}}) = -1 < 0$, a więc $\boldsymbol{e} \not\sim \widehat{\boldsymbol{e}}$, czyli $[\boldsymbol{e}]_\sim \neq [\widehat{\boldsymbol{e}}]_\sim$. Ponadto, dla dowolnej bazy $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{B}(E)$ albo $\boldsymbol{f} \sim \boldsymbol{e}$ albo $\boldsymbol{f} \sim \widehat{\boldsymbol{e}}$. Oznacza to, że na E istnieją dokładnie dwie orientacje. Żadna z nich nie jest wyróżniona. Jeżeli ustalimy jedną, np. O, to drugą oznaczamy przez $-O$.

W przypadku gdy $E = \mathbb{R}^n$, możemy wyróżnić orientację wyznaczoną przez bazę kanoniczną. Orientację tę oznaczamy przez $[\mathbb{R}^n]_+$ i nazywamy *orientacją kanoniczną*. Niech $[\mathbb{R}^n]_- := -[\mathbb{R}^n]_+$. Dla $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_n) \in \boldsymbol{B}(\mathbb{R}^n)$, $e_j = (e_{j,1}, \dots, e_{j,n})$, $j = 1, \dots, n$ mamy: $[\boldsymbol{e}]_\sim = [\mathbb{R}^n]_+ \iff \det[e_{j,k}] > 0$.

Jest oczywiste, że dowolny izomorfizm $L : E \longrightarrow F$ generuje bijekcję $\mathcal{O}(E) \longrightarrow \mathcal{O}(F)$, $[\boldsymbol{e}]_\sim \longmapsto [L(\boldsymbol{e})]_\sim$.

Jeżeli $E = F \oplus G$, $\dim F = p$, $\dim G = q$, $p, q \geqslant 1$, $p + q = n$, to mamy naturalne odwzorowanie $\Theta : \boldsymbol{B}(F) \times \boldsymbol{B}(G) \longrightarrow \boldsymbol{B}(E)$ dane wzorem $\Theta((f_1, \dots, f_p), (g_1, \dots, g_q)) := (e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q)$. Jeżeli ustalimy jakąś orientację $O_0 \in \mathcal{O}(E)$, to Θ indukuje odwzorowanie $\Phi : \mathcal{O}(F) \longrightarrow \mathcal{O}(G)$ poprzez relację $\Phi([\boldsymbol{f}]_\sim) = [\boldsymbol{g}]_\sim :\iff [\Theta(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g})]_\sim = O_0$. Zauważmy, że $A(\Theta(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}), \Theta(\boldsymbol{f}', \boldsymbol{g}')) = \begin{bmatrix} A(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}') & 0 \\ 0 & A(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{g}') \end{bmatrix}$, a więc Φ jest dobrze określone i injektywne. Ponadto, dla dowolnych $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{B}(F)$ i $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{B}(G)$ albo $\Phi([\boldsymbol{f}]_\sim) = [\boldsymbol{g}]_\sim$ albo $\Phi([\widehat{\boldsymbol{f}}]_\sim) = [\boldsymbol{g}]_\sim$, a więc Φ jest bijekcją. W tym sensie „zadać orientację F" to to samo, co „zadać orientację G" (przy ustalonej orientacji O_0).

Powyższą konstrukcję będziemy stosować do sytuacji: $E = \mathbb{R}^n$, $F = V$, $1 \leqslant \dim V = d \leqslant n-1$, $G = V^\perp := \{a \in \mathbb{R}^n : \forall_{x \in V} : \langle a, x \rangle = 0\}$, gdzie $\langle\ ,\ \rangle$ oznacza standardowy iloczyn skalarny, $O_0 = [\mathbb{R}^n]_+$. Dla $O \in \mathcal{O}(V)$ będziemy krótko pisać $O^\perp := \Phi(O)$.

Definicja 11.4.2. Niech teraz $M \in \mathcal{M}^1_d(\mathbb{R}^n)$. Jeżeli $d = 0$, to przez *orientację* M rozumiemy dowolne odwzorowanie $O : M \longrightarrow \{-1, +1\}$.

Jeżeli $d \geqslant 1$, to przez *orientację* M rozumiemy dowolne odwzorowanie $M \ni x \overset{O}{\longmapsto} O(x) \in \mathcal{O}(T_x M)$ takie, że dla dowolnego punktu $a \in M$ istnieje lokalna parametryzacja $p : P \longrightarrow U$, $a \in U$, taka, że $O(p(t)) = p'(t)([\mathbb{R}^d]_+)$, $t \in P$. W tej sytuacji mówimy, że parametryzacja $p : P \longrightarrow U$ jest *zgodna z orientacją* O.

Niech $\mathcal{O}(M)$ oznacza zbiór wszystkich orientacji M. Powiemy, że rozmaitość jest *orientowalna*, jeżeli $\mathcal{O}(M) \neq \varnothing$. Dalej zajmować się będziemy jedynie przypadkiem $d \geqslant 1$.

Obserwacja 11.4.3. (a) Niech $p : P \longrightarrow U$, $q : Q \longrightarrow U$ będą dwiema parametryzacjami i niech $\varphi := p^{-1} \circ q : Q \longrightarrow P$. Wiadomo, że $\det \varphi'(u) \neq 0$, $u \in Q$. Niech $\varepsilon(u) := \operatorname{sgn}(\det \varphi'(u))$, $u \in Q$. Ponieważ $q = p \circ \varphi$, zatem $q'(u)([\mathbb{R}^d]_+) = p'(\varphi(u))(\varphi'(u)([\mathbb{R}^d]_+)) = p'(\varphi(u))(\varepsilon(u)[\mathbb{R}^d]_+) = \varepsilon(u)p'(\varphi(u))([\mathbb{R}^d]_+)$, $u \in Q$.

(b) Dla dowolnej parametryzacji $p : P \longrightarrow U$ niech $\widehat{p} : \widehat{P} \longrightarrow U$ będzie dane wzorem: $\widehat{p} := p \circ \widehat{I}$, $\widehat{P} := \widehat{I}^{-1}(P)$, gdzie $\widehat{I} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $\widehat{I}(t) = \widehat{t} := (-t_1, t_2, \ldots, t_d)$. Widać, że $\widehat{p} : \widehat{P} \longrightarrow U$ jest również lokalną parametryzacją. Ponadto, na podstawie (a), jeżeli $p : P \longrightarrow U$ jest zgodna z O, to $\widehat{p}'(t)([\mathbb{R}^d]_+) = -p'(\widehat{t})([\mathbb{R}^d]_+) = -O(p(\widehat{t}))$, $t \in \widehat{P}$. Wynika stąd, że $-O \in \mathcal{O}(M)$, gdzie $(-O)(x) := -O(x)$, $x \in M$.

(c) Jeżeli $p : P \longrightarrow U$ jest parametryzacją zgodną z O taką, że P jest obszarem, to, na podstawie (a), dowolna parametryzacja $q : Q \longrightarrow U$ jest zgodna albo z O albo z $-O$ (bowiem funkcja ε, jako funkcja ciągła o wartościach w $\{-1, +1\}$, jest stała).

Definicja 11.4.4. Niech $\mathcal{A} = (p_i : P_i \longrightarrow U_i)_{i \in I}$ będzie dowolnym *atlasem na* M. Jeżeli każda z parametryzacji $p_i : P_i \longrightarrow U_i$ jest zgodna z orientacją O, to mówimy, że atlas $\mathcal{A}$ jest *zgodny z* O.

Na podstawie Obserwacji 11.4.3(a) otrzymujemy bez trudu następujący wynik.

Twierdzenie 11.4.5. *Jeżeli $\mathcal{A} = (p_i : P_i \longrightarrow U_i)_{i \in I}$ jest atlasem zgodnym z orientacją O, to dla odwzorowań przejścia $\varphi_{i,j} := p_i^{-1} \circ p_j : p_j^{-1}(U_i \cap U_j) \longrightarrow p_i^{-1}(U_i \cap U_j)$ mamy:*

$$\det \varphi'_{i,j}(u) > 0, \quad u \in p_j^{-1}(U_i \cap U_j), \quad i, j \in I. \tag{†}$$

Twierdzenie 11.4.6. *Niech $\mathcal{A} = (p_i : P_i \longrightarrow U_i)_{i \in I}$ będzie atlasem na M takim, że dla wszystkich odwzorowań przejścia mamy (†). Wtedy na M istnieje orientacja O taka, że atlas $\mathcal{A}$ jest zgodny z O.*

Oznacza to, że „zadać orientację M" to to samo, co „zadać atlas spełniający (†)". Takie atlasy będziemy nazywać *orientującymi*.

Dowód. Niech $O(x) := p_i'(p_i^{-1}(x))([\mathbb{R}^d]_+)$ o ile $x \in U_i$. Jedyny problem to poprawność definicji. Przypuśćmy, że $x \in U_i \cap U_j$ i $x = p_i(t) = p_j(u)$, zatem $t = \varphi_{i,j}(u)$. Wtedy

$$p_j'(u)([\mathbb{R}^d]_+) = p_i'(\varphi_{i,j}(u))(\varphi'_{i,j}(u)([\mathbb{R}^d]_+)) = p_i'(t)([\mathbb{R}^d]_+). \qquad \square$$

Twierdzenie 11.4.7. *Jeżeli M jest podrozmaitością spójną i orientowalną, to na M istnieją dokładnie dwie różne orientacje. W szczególności, jeżeli M ma s składowych spójnych i jest orientowalna, to na M istnieje dokładnie 2^s różnych orientacji.*

Dowód. Niech O będzie ustaloną orientacją M. Wtedy $-O$ jest również orientacją i $-O \neq O$. Pozostaje pokazać, że dla każdej innej orientacji O' mamy albo $O' = O$ albo $O' = -O$. Niech

$$M_+ := \{x \in M : O'(x) = O(x)\}, \quad M_- := \{x \in M : O'(x) = -O(x)\}.$$

Oczywiście $M_+ \cap M_- = \varnothing$ i $M = M_+ \cup M_-$. Na podstawie Obserwacji 11.4.3(a) oba te zbiory są otwarte. Stąd, wobec spójności, albo $M_+ = M$ albo $M_- = M$. $\square$

Twierdzenie 11.4.8. *Jeżeli $d = 1$, to M jest orientowalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje odwzorowanie ciągłe $\boldsymbol{s} : M \longrightarrow \mathbb{S}_{n-1}$ takie, że $\boldsymbol{s}(x) \in T_x M$, $x \in M$. Ponadto, dla dowolnej orientacji O rozmaitości M istnieje odwzorowanie ciągłe $\boldsymbol{s} : M \longrightarrow \mathbb{S}_{n-1}$ takie, że $\boldsymbol{s}(x) \in T_x M$ i $O(x) = [\boldsymbol{s}(x)]_\sim$, $x \in M$.*

W powyższej sytuacji mówimy, że $\boldsymbol{s}$ jest *orientującym polem wektorów stycznych*.

Można pokazać, że dowolna jednowymiarowa podrozmaitość jest orientowalna. Z tego też powodu, powyższa propozycja nie stanowi, w gruncie rzeczy, kryterium na orientowalność, ale daje jedynie opis orientacji.

Dowód. Niech O będzie pewną orientacją na podrozmaitości M. Jeżeli $\mathcal{A} = (p_i : P_i \longrightarrow U_i)_{i\in I}$ jest atlasem zgodnym z O, to definiujemy $\boldsymbol{s}(x) := \boldsymbol{v}(p_i'(p_i^{-1}(x)))$, gdy $x \in U_i$, gdzie $\boldsymbol{v}(X) := X/\|X\|$ oznacza wersor wektora $X \in (\mathbb{R}^n)_*$. Jedyny problem to, czy definicja jest poprawna. Rozumujemy lokalnie: jeżeli $p : P \longrightarrow U$ i $q : Q \longrightarrow U$ są parametryzacjami zgodnymi z O oraz $q = p \circ \varphi$, to (korzystając z tego, że $\varphi'(u) > 0$, $u \in Q$) mamy: $\boldsymbol{v}(q'(u)) = \boldsymbol{v}(p'(\varphi(u))\varphi'(u)) = \boldsymbol{v}(p'(\varphi(u)))$.

W drugą stronę: kładziemy $O(x) := [\boldsymbol{s}(x)]_\sim \in \mathcal{O}(T_xM)$, $x \in M$. Trzeba sprawdzić, że O jest orientacją. Ustalmy punkt $a \in M$ oraz dowolną parametryzację $p : P \longrightarrow U$, $a = p(t_0)$, taką, że P jest przedziałem i $p'(t_0)([\mathbb{R}]_+) = O(a)$ (taka parametryzacja zawsze istnieje — pamiętajmy, że możemy zastąpić wyjściową parametryzację przez $\widehat{p} : \widehat{P} \longrightarrow U$). Mamy $\boldsymbol{s}(p(t)) = \varepsilon(t)\boldsymbol{v}(p'(t))$, $t \in P$, gdzie $\varepsilon : P \longrightarrow \{-1, +1\}$ jest funkcją ciągłą (bo $\boldsymbol{s}$ jest odwzorowaniem ciągłym) i $\varepsilon(t_0) = +1$. Zatem $\varepsilon \equiv +1$, co kończy dowód. □

Twierdzenie 11.4.9. *Jeżeli $d = n - 1$, to M jest orientowalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje odwzorowanie ciągłe $\boldsymbol{n} : M \longrightarrow \mathbb{S}_{n-1}$ takie, że $\boldsymbol{n}(x) \in (T_xM)^\perp$, $x \in M$. Ponadto, dla dowolnej orientacji O rozmaitości M istnieje odwzorowanie ciągłe $\boldsymbol{n} : M \longrightarrow \mathbb{S}_{n-1}$ takie, że $\boldsymbol{n}(x) \in (T_xM)^\perp$ i $O(x) = ([\boldsymbol{n}(x)]_\sim)^\perp$, $x \in M$.*

W powyższej sytuacji mówimy, że $\boldsymbol{n}$ jest *orientującym polem wektorów normalnych*.

Dowód. Niech O będzie pewną orientacją na M. Ustalmy $x \in M$. Zauważmy, że układ warunków: $w \in \mathbb{R}^n$, $\|w\| = 1$, $w \perp T_xM$ i $([w]_\sim)^\perp = O(x)$ wyznacza jednoznacznie wektor w. Kładziemy $\boldsymbol{n}(x) := w$. Pozostaje sprawdzić ciągłość odwzorowania $x \longmapsto \boldsymbol{n}(x)$. Ustalmy punkt $a \in M$ oraz parametryzację $p : P \longrightarrow U$, $a = p(t_0)$, zgodną z O. Zauważmy, że dla $t \in P$ wektor $w = \boldsymbol{n}(p(t))$ jest wyznaczony (jednoznacznie) przez układ warunków $\big({}^{14}\big)$: $w \in \mathbb{R}^n$, $\|w\| = 1$, $w \perp T_{p(t)}M$, $\det\big[w, \frac{\partial p}{\partial t_1}(t), \dots, \frac{\partial p}{\partial t_{n-1}}(t)\big] > 0$. Niech teraz $t_\nu \longrightarrow t_0$ i przypuśćmy, że $w_\nu := \boldsymbol{n}(p(t_\nu)) \longrightarrow w_0$. Wtedy w_0 spełnia powyższy układ z $t = t_0$, a więc $w_0 = \boldsymbol{n}(p(t_0))$.

W drugą stronę: kładziemy $O(x) := ([\boldsymbol{n}(x)]_\sim)^\perp \in \mathcal{O}(T_xM)$, $x \in M$. Trzeba sprawdzić, że O jest orientacją. Ustalmy punkt $a \in M$ oraz dowolną parametryzację $p : P \longrightarrow U$, $a = p(t_0)$, taką, że P jest obszarem i $p'(t_0)([\mathbb{R}^{n-1}]_+) = O(a)$. Mamy $p'(t)([\mathbb{R}^{n-1}]_+) = \varepsilon(t)O(p(t))$, $t \in P$, gdzie $\varepsilon : P \longrightarrow \{-1, +1\}$ i $\varepsilon(t_0) = +1$. Pozostaje wykazać, że ε jest funkcją ciągłą. W tym celu wystarczy tylko zauważyć, że wprost z definicji $([\boldsymbol{n}(x)]_\sim)^\perp$ mamy:

$$\varepsilon(t) = \operatorname{sgn}\Big(\det\Big[\boldsymbol{n}(p(t)), \frac{\partial p}{\partial t_1}(t), \dots, \frac{\partial p}{\partial t_{n-1}}(t)\Big]\Big), \quad t \in P. \qquad \square$$

Obserwacja 11.4.10 (Iloczyn wektorowy)**.** Niech $a_j \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, n-1$. Z wektorów tych utwórzmy $(n-1) \times n$–wymiarową macierz A poprzez ustawienie ich jako wiersze. Dla $k \in \{1, \dots, n\}$ niech A_k oznacza podmacierz macierzy A powstałą poprzez opuszczenie k-tej kolumny. Niech $w_k := (-1)^{k+1} \det A_k$, $w = (w_1, \dots, w_n)$. Zauważmy, że wektory $a_1, \dots, a_{n-1}$ są liniowo zależne wtedy i tylko wtedy, gdy $w = 0$. Dla $j \in \{1, \dots, n-1\}$ niech B_j oznacza $n \times n$–wymiarową macierz powstałą z A poprzez dołożenie a_j jako pierwszego wiersza. Stosując do tej macierzy rozwinięcie Laplace'a $\big({}^{15}\big)$ (względem pierwszego wiersza) wnioskujemy, że:

$$\langle w, a_j\rangle = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_{j,k}\det A_k = \det B_j = 0,$$

tak więc $w \perp a_j$, $j = 1, \dots, n-1$. Dalej mamy:

$$\det[w, a_1, \dots, a_{n-1}] = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}w_k \det A_k = \sum_{k=1}^{n}(\det A_k)^2 = \|w\|^2.$$

Wektor w nazywamy *iloczynem wektorowym* wektorów $a_1, \dots, a_{n-1}$ i oznaczamy $a_1 \times \dots \times a_{n-1}$. Zauważmy, że operacja $(\mathbb{R}^n)^{n-1} \ni (a_1, \dots, a_{n-1}) \longmapsto a_1 \times \dots \times a_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ jest $(n-1)$–liniowa.

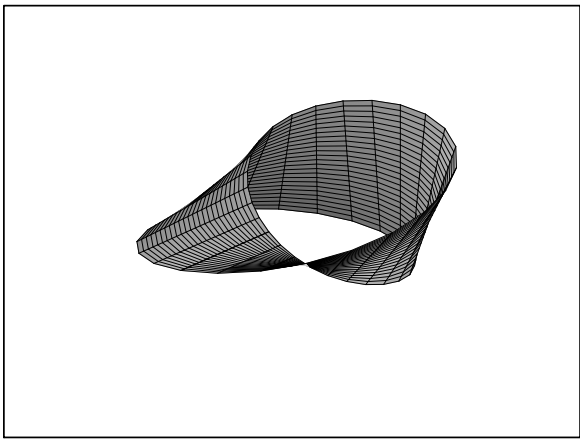
Jeżeli układ $(a_1, \dots, a_{n-1})$ jest bazą pewnej podprzestrzeni V przestrzeni $\mathbb{R}^n$, wyznaczającą na V orientację O, to $([w]_\sim)^\perp = O$. W szczególności, w sytuacji opisanej w Twierdzeniu 11.4.9 mamy:

$$\boldsymbol{n}(p(t)) = \boldsymbol{v}\Big(\frac{\partial p}{\partial t_1}(t) \times \dots \times \frac{\partial p}{\partial t_{n-1}}(t)\Big).$$

$\big({}^{14}\big)$ Uwaga: jeżeli $w \in \mathbb{R}^n$, $\|w\| = 1$, $w \perp T_{p(t)}M$, to $\det\big[w, \frac{\partial p}{\partial t_1}(t), \dots, \frac{\partial p}{\partial t_{n-1}}(t)\big] \neq 0$.

$\big({}^{15}\big)$ Pierre Simon de Laplace (1749–1827).

Obserwacja 11.4.11. Istnieją podrozmaitości nieorientowalne, np. *wstęga Möbiusa* $\big({}^{16}\big)$:
$M := p((-1,1)\times[0,\pi])$, gdzie $p:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$, $p(t,u) := \big((2+t\cos u)\cos 2u, (2+t\cos u)\sin 2u, t\sin u\big)$.



Wstęga Möbiusa.

Mamy

$$p'(t,u) = \begin{bmatrix} \cos u\cos 2u, & -4\sin 2u - t(\sin u\cos 2u + 2\cos u\sin 2u)\\ \cos u\sin 2u, & 4\cos 2u - t(\sin u\sin 2u - 2\cos u\cos 2u)\\ \sin u, & t\cos u \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial t}(t,u)\times\frac{\partial p}{\partial u}(t,u) = \Big(&\begin{vmatrix} \cos u\sin 2u, & 4\cos 2u - t(\sin u\sin 2u - 2\cos u\cos 2u)\\ \sin u, & t\cos u\end{vmatrix},\\ -&\begin{vmatrix} \cos u\cos 2u, & -4\sin 2u - t(\sin u\cos 2u + 2\cos u\sin 2u)\\ \sin u, & t\cos u\end{vmatrix},\\ &\begin{vmatrix} \cos u\cos 2u, & -4\sin 2u - t(\sin u\cos 2u + 2\cos u\sin 2u)\\ \cos u\sin 2u, & 4\cos 2u - t(\sin u\sin 2u - 2\cos u\cos 2u)\end{vmatrix}\Big)\end{aligned}$$

$$= (-4\sin u\cos 2u + t\sin 2u(1+\cos 2u), -4\sin u\sin 2u - t(\cos 2u + \sin^2 2u), 4\cos u + 2t\cos^2 u).$$

Stąd

$$\Big\|\frac{\partial p}{\partial t}(t,u)\times\frac{\partial p}{\partial u}(t,u)\Big\|^2 = 16 + 16t\cos u + 4t^2(1+\cos^2 u).$$

W szczególności, $\|\frac{\partial p}{\partial t}(t,u)\times\frac{\partial p}{\partial u}(t,u)\| > 0$, $-1<t<1$, $0\leqslant u\leqslant\pi$. Wynika stąd w szczególności, że M jest 2–wymiarową podrozmaitością w $\mathbb{R}^3$ klasy $\mathcal{C}^\infty$ (por. Twierdzenie 11.1.3). Dla $t=0$ dostajemy

$$\boldsymbol{n}(p(0,u)) = \boldsymbol{n}(2\cos 2u, 2\sin 2u, 0) := \boldsymbol{v}\Big(\frac{\partial p}{\partial t}(0,u)\times\frac{\partial p}{\partial u}(0,u)\Big) = (-\sin u\cos 2u, -\sin u\sin 2u, \cos u).$$

Zauważmy, że $(2,0,0) = p(0,0) = p(0,\pi)$, ale $\boldsymbol{n}(p(0,0)) = (0,0,1)$, zaś $\boldsymbol{n}(p(0,\pi)) = (0,0,-1)$. Oznacza to, że nie istnieje ciągłe pole wersorów normalnych $M\supset p(\{0\}\times[0,\pi])\ni(x,y,z)\longmapsto\boldsymbol{n}(x,y,z)$, a więc, na podstawie Twierdzenia 11.4.9, M nie jest orientowalna.

Lemat 11.4.12 (Lemat o jednoczesnej orientacji)**.** *Załóżmy, że $M\in\mathcal{M}^1_d(\mathbb{R}^n)$ i niech $D\subset M$ będzie obszarem (w sensie topologii indukowanej) takim, że* $\operatorname{int}_M(\operatorname{cl}_M D) = D$*, tzn. D jest* tłusty *(cały czas w sensie topologii indukowanej). Załóżmy dalej, że $M' := \partial_M D\in\mathcal{M}^1_{d-1}$. Ustalmy pewną orientację $O\in\mathcal{O}(M)$. Pokażemy, że orientacja ta indukuje w sposób naturalny pewną orientację O' rozmaitości M', zwaną* orientacją indukowaną przez O *na M'.*

Dowód. Postępujemy następująco: ustalmy punkt $a\in M'$. Na podstawie Lematu 11.1.21, istnieje parametryzacja $p:P\longrightarrow U$ podrozmaitości M, $a\in U$, taka, że P jest otwartą kostką w $\mathbb{R}^d$ i jeżeli $\widetilde{P} := \operatorname{pr}_{\mathbb{R}^{d-1}}(P)$, to $\{0\}\times\widetilde{P}\subset P$ i $p(\{0\}\times\widetilde{P}) = M'\cap U$. Dla $d=1$ oznacza to, że $P\subset\mathbb{R}$ jest przedziałem otwartym, $0\in P$ i $\{p(0)\} = M'\cap U$.

$\big({}^{16}\big)$ August Möbius (1790–1868).

Przypadek $d \geqslant 2$: Zbiór $\{0\} \times \widetilde{P}$ dzieli P na dwie składowe spójne $P_\pm := P \cap \{t_1 \gtrless 0\}$. Ponieważ p jest homeomorfizmem, zatem $M' \cap U$ dzieli U na dwie składowe $V_\pm := p(P_\pm)$. Każdy punkt składowej $V_\pm$ należy albo do $D_- := D \cap U$ albo do $D_+ := (M \setminus \operatorname{cl}_M D) \cap U$. Zauważmy, że tłustość zbioru gwarantuje, że $D_+ \neq \varnothing$. Istotnie, w przeciwnym razie mielibyśmy: $U \subset \operatorname{int}_M \operatorname{cl}_M D = D$ − sprzeczność. Teraz, wobec spójności $P_\pm$, oznacza to, że mamy jedną z dwóch możliwości:

(a) $V_- = D_-$ i $V_+ = D_+$,

(b) $V_- = D_+$ i $V_+ = D_-$: w tym przypadku zastępujemy wyjściową parametryzację przez parametryzację $t \longmapsto p(-t_1, t_2, \dots, t_d)$ i sprowadzamy sytuację do (a).

Tak więc możemy przyjąć, że $V_\pm = D_\pm$. Teraz, zastępując ewentualnie wyjściową parametryzację przez $t \longmapsto p(t_1, -t_2, t_3, \dots, t_d)$ (tu jest istotne, że $d \geqslant 2$), możemy założyć, że parametryzacja jest zgodna z O (wystarczy ją uzgodnić w jednym punkcie i skorzystać ze spójności P). Dostajemy w ten sposób pewną parametryzację $\widetilde{p} : \widetilde{P} \longrightarrow M' \cap U$, $\widetilde{p}(u) := p(0, u)$.

Przypuśćmy teraz, że analogiczną konstrukcję przeprowadziliśmy dla jakiejś innej parametryzacji $q : Q \longrightarrow U$, która spełnia te same warunki, co p i w efekcie konstrukcji dostaliśmy nową parametryzację $\widetilde{q} : \widetilde{Q} \longrightarrow M' \cap U$. Wiemy, że $q = p \circ \varphi$ i $\det \varphi'(u) > 0$, $u \in Q$ (bo obie parametryzacje są zgodne z O). Niech $\widetilde{\varphi} := \widetilde{p}^{-1} \circ \widetilde{q} : \widetilde{Q} \longrightarrow \widetilde{P}$. Pokażemy, że $\det \widetilde{\varphi}'(v) > 0$ dla $v \in \widetilde{Q}$. Mamy: $\widetilde{q}(v) = q(0, v) = p(\varphi(0, v)) = \widetilde{p}(\widetilde{\varphi}(v)) = p(0, \widetilde{\varphi}(v))$, a więc $\varphi_1(0, v) = 0$ i $\widetilde{\varphi}(v) = (\varphi_2(0, v), \dots, \varphi_d(0, v))$. Zauważmy, że $\varphi(Q_\pm) = P_\pm$, a stąd: $\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}(0, v) \geqslant 0$. Ponadto, $\varphi'(0, v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}(0, v) & 0 \\ * & \widetilde{\varphi}'(v) \end{bmatrix}$, a stąd $\det \varphi'(0, v) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}(0, v) \det \widetilde{\varphi}'(v)$, co kończy dowód.

Oznacza to, że potrafimy skonstruować rodzinę lokalnych parametryzacji $(p_i : P_i \longrightarrow U_i)_{i \in I}$ zgodną z O taką, że rodzina $(\widetilde{p}_i : \widetilde{P}_i \longrightarrow M' \cap U_i)_{i \in I}$ jest atlasem orientującym na M'. Atlas ten wprowadza na M' pewną orientację O'. Z konstrukcji wynika, że O' zależy wyłącznie od O. Orientację O' nazywamy *orientacją indukowaną przez* O.

Przypadek $d = 1$: W tej sytuacji nie zajmujemy się uzyskaniem zgodności $V_\pm = D_\pm$, ale jedynie, poprzez ewentualną zamianę parametryzacji p na parametryzację $t \longmapsto p(-t)$, uzyskujemy zgodność parametryzacji z orientacją O. Mamy dwa możliwe przypadki:

(a) $V_- = D_-$ i $V_+ = D_+$: wtedy przyjmujemy $O'(p(0)) := +1$,

(b) $V_- = D_+$ i $V_+ = D_-$: wtedy przyjmujemy $O'(p(0)) := -1$.

Musimy jeszcze sprawdzić, że O' nie zależy od wyboru parametryzacji. Niech $q : Q \longrightarrow U$ będzie inną parametryzacją zgodną z O. Wiemy, że $q = p \circ \varphi$, $\varphi : Q \longrightarrow P$, $\varphi'(u) > 0$, $u \in Q$. Oznacza to, że $\varphi(P_\pm) = Q_\pm$, skąd od razu wynika, że (a) zachodzi dla p wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi dla q. □

ROZDZIAŁ 12

Całka Riemanna

12.1. Całka Riemanna na kostce

Zasadniczym celem podrozdziałów 12.1 i 12.2 jest przeniesienie wyników przedstawionych w podrozdziale 7.1 na przypadek wielowymiarowy. Te dowody, które są prostym uogólnieniem przypadku jednowymiarowego pozostawiamy jako Ćwiczenie.

Definicja 12.1.1. *Kostką* (domkniętą) nazywamy dowolny zbiór postaci $P := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$, gdzie $a_j < b_j$, $j = 1, \ldots, n$ (rozważamy tylko kostki niezdegenerowane).

Objętością kostki P nazywamy liczbę $|P| := (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$; zauważmy, że $|P| > 0$ oraz, że $|x_0 + P| = |P|$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Podziałem kostki P nazywamy dowolną skończoną rodzinę kostek $\pi = \{P_1, \ldots, P_m\}$ taką, że $P = P_1 \cup \cdots \cup P_m$ oraz $\operatorname{int} P_j \cap \operatorname{int} P_k = \varnothing$ dla $j \neq k$; dla $n = 1$ podział kostki $P = [a, b]$ możemy utożsamiać z ciągiem $\pi = (x_0, \ldots, x_m)$, gdzie $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$.

Podziałem prostym kostki P nazywamy podział postaci $\{P_{k_1,\ldots,k_n} : 1 \leqslant k_j \leqslant m_j,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$, gdzie $P_{k_1,\ldots,k_n} = [x_{1,k_1-1}, x_{1,k_1}] \times \cdots \times [x_{n,k_n-1}, x_{n,k_n}]$, zaś $(x_{j,0}, \ldots, x_{j,m_j})$ jest podziałem $[a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$. Podział ten składa się z $m_1 \cdots m_n$ kostek. Typowym przypadkiem jest sytuacja, gdy $x_{j,k} := a_j + \frac{k}{m_j}(b_j - a_j)$ (tzn. dzielimy krawędzie na równe części).

Niech $\pi_1 = \{P_1, \ldots, P_m\}$, $\pi_2 = \{Q_1, \ldots, Q_r\}$ będą podziałami kostki P. Powiemy, że π_2 *jest wpisany w* π_1 lub też, że π_2 *jest zagęszczeniem* π_1, jeżeli dla dowolnego $j \in \{1, \ldots, m\}$ rodzina $\{Q_k : Q_k \subset P_j\}$ jest podziałem P_j; innymi słowy, jeżeli $\operatorname{int} P_j \cap \operatorname{int} Q_k \neq \varnothing$, to $Q_k \subset P_j$. W tej sytuacji piszemy $\pi_2 \preccurlyeq \pi_1$.

Średnicą podziału $\pi = \{P_1, \ldots, P_m\}$ nazywamy liczbę $\operatorname{diam} \pi := \max\{\operatorname{diam} P_1, \ldots, \operatorname{diam} P_m\}$.

Niech $(\pi_k)_{k=1}^{\infty}$ będzie ciągiem podziałów kostki P. Powiemy, że jest to *normalny ciąg podziałów kostki* P (krótko: $(\pi_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{NCP}(P)$), jeżeli $\operatorname{diam} \pi_k \longrightarrow 0$.

Obserwacja 12.1.2. (a) Relacja $\preccurlyeq$ jest przechodnia.

(b) Dla dowolnych podziałów π_1, π_2 kostki P istnieje podział prosty π taki, że $\pi \preccurlyeq \pi_j$, $j = 1, 2$, tzn. π jest *wspólnym zagęszczeniem podziałów* π_1 *i* π_2.

(c) Dla dowolnego podziału $\pi = \{P_1, \ldots, P_m\}$ mamy $|P| = |P_1| + \cdots + |P_m|$.

Istotnie, najpierw sprawdzamy przypadek podziału prostego:

$$\sum_{k_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{m_n} |P_{k_1,\ldots,k_n}| = \sum_{k_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{m_n} \prod_{j=1}^{n} (x_{j,k_j} - x_{j,k_j-1}) = \prod_{j=1}^{n} \sum_{k_j=1}^{m_j} (x_{j,k_j} - x_{j,k_j-1}) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j) = |P|.$$

Dla dowolnego podziału znajdujemy najpierw wpisany podział prosty $\pi' = \{Q_1, \ldots, Q_r\}$, a następnie rozumujemy następująco: $|P| = \sum_{k=1}^{r} |Q_k| = \sum_{j=1}^{m} \sum_{\substack{k \in \{1,\ldots,r\}: \\ Q_k \subset P_j}} |Q_k| = \sum_{j=1}^{m} |P_j|$.

Definicja 12.1.3. Niech $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją ograniczoną. Zdefiniujmy:

$$m(f, P) := \inf f(P), \quad M(f, P) := \sup f(P).$$

Niech teraz $\pi = \{P_1, \ldots, P_m\}$ będzie dowolnym podziałem kostki P. Połóżmy:

$$L(f, \pi) := \sum_{j=1}^{m} m(f, P_j)|P_j|, \quad U(f, \pi) := \sum_{j=1}^{m} M(f, P_j)|P_j|.$$

Liczbę $L(f,\pi)$ nazywamy *sumą aproksymacyjną dolną dla funkcji f przy podziale π*. Analogicznie, $U(f,\pi)$ nazywamy *sumą aproksymacyjną górną*. Czasami mówi się o *sumach Darboux* lub *sumach Riemanna*. Niech

$$\int_{*P} f := \sup_{\pi} L(f,\pi), \quad \int_P^* f := \inf_{\pi} U(f,\pi),$$

gdzie supremum i infimum bierzemy po wszystkich podziałach kostki P. Liczbę $\int_{*P} f$ nazywamy *całką dolną z funkcji f po kostce P*. Analogicznie, liczbę $\int_P^* f$ nazywamy *całką górną*.

Powiemy, że funkcja f jest *całkowalna w sensie Riemanna na kostce P* ($f \in \mathcal{R}(P)$), jeżeli $\int_{*P} f = \int_P^* f$. Wtedy wspólną wartość tych całek oznaczamy przez $\int_P f$ i nazywamy *całką Riemanna z funkcji f po kostce P*.

Niech teraz $\varphi : P \longrightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją ograniczoną. Powiemy, że φ *jest całkowalna w sensie Riemanna na* P ($\varphi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$), jeżeli $\operatorname{Re}\varphi, \operatorname{Im}\varphi \in \mathcal{R}(P)$. Kładziemy wtedy $\int_P \varphi := \int_P \operatorname{Re}\varphi + i\int_P \operatorname{Im}\varphi$ i nazywamy tę liczbę *całką Riemanna z funkcji φ po kostce P*.

Oczywiście każda funkcja stała $c \in \mathbb{C}$ jest całkowalna w sensie Riemanna i $\int_P c = c|P|$.

Przykład 12.1.4. Niech $f := \chi_{P\cap\mathbb{Q}^n}$. Przypomnijmy, że χ_A oznacza funkcję charakterystyczną zbioru $A \subset P$. Funkcję f nazywamy *funkcją Dirichleta* w kostce P. Wtedy $L(f,\pi) = 0$ oraz $U(f,\pi) = |P|$ dla dowolnego podziału π. Tak więc $\int_{*P} f = 0$ oraz $\int_P^* f = |P|$, czyli $f \notin \mathcal{R}(P)$.

Poniżej przedstawimy szereg (mniej lub bardziej elementarnych) własności całki Riemanna; $f, g : P \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi, \psi : P \longrightarrow \mathbb{C}$ oznaczają funkcje ograniczone, π, π_1, π_2 – podziały kostki P. Większość dowodów przebiega analogicznie, jak dla $n = 1$ i te pozostawiamy jako Ćwiczenie.

Obserwacja 12.1.5. (a) Dla dowolnego $c \in \mathbb{R}$ mamy: $L(f+c,\pi) = L(f,\pi) + c|P|$ oraz $U(f+c,\pi) = U(f,\pi) + c|P|$. Wynika stąd natychmiast, że $\int_{*P}(f+c) = \int_{*P} f + c|P|$ oraz $\int_P^*(f+c) = \int_P^* f + c|P|$. W szczególności, $f \in \mathcal{R}(P) \iff f + c \in \mathcal{R}(P)$ oraz $\int_P(f+c) = \int_P f + \int_P c$. Wynik przenosi się natychmiast na funkcje ograniczone $\varphi : P \longrightarrow \mathbb{C}$ i $c \in \mathbb{C}$: $\varphi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C}) \iff \varphi + c \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$ oraz $\int_P(\varphi + c) = \int_P \varphi + \int_P c$.

(b) Jeżeli $f \leqslant g$, to $L(f,\pi) \leqslant L(g,\pi)$ i $U(f,\pi) \leqslant U(g,\pi)$. W szczególności, $\int_{*P} f \leqslant \int_{*P} g$ oraz $\int_P^* f \leqslant \int_P^* g$. Jeżeli ponadto $f, g \in \mathcal{R}(P)$, to $\int_P f \leqslant \int_P g$ *(monotoniczność całki)*.

(c) $L(-f,\pi) = -U(f,\pi)$. W szczególności,

- $\int_{*P}(-f) = -\int_P^* f$,
- $\varphi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C}) \iff (-\varphi) \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$ oraz $\int_P(-\varphi) = -\int_P \varphi$,
- $\varphi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C}) \iff \overline{\varphi} \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$ i $\int_P \overline{\varphi} = \overline{\int_P \varphi}$.

(d) Jeżeli $\pi_1 \preccurlyeq \pi_2$, to $L(f,\pi_1) \geqslant L(f,\pi_2)$, $U(f,\pi_1) \leqslant U(f,\pi_2)$. W szczególności,

- $L(f,\pi_1) \leqslant U(f,\pi_2)$ dla dowolnych π_1, π_2,
- $\int_{*P} f \leqslant \int_P^* f$.

(e) $f \in \mathcal{R}(P) \iff \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_\pi : U(f,\pi) - L(f,\pi) \leqslant \varepsilon$.

(f) Dla każdego ciągu $(\pi_k)_{k=1}^\infty \in \mathcal{NCP}(P)$ mamy $L(f,\pi_k) \longrightarrow \int_{*P} f$, $U(f,\pi_k) \longrightarrow \int_P^* f$.

Ograniczymy się do sum górnych. Można założyć, że $f \geqslant 0$. Weźmy $\varepsilon > 0$ i niech $\pi = \{Q_1,\dots,Q_m\}$ będzie podziałem takim, że $U(f,\pi) - \int_P^* f \leqslant \varepsilon$. Niech $\pi_k = \{P_{k,1},\dots,P_{k,m_k}\}$. Wtedy

$$U(f,\pi_k) = \sum_{\substack{j\in\{1,\dots,m_k\}:\\ \exists_{i\in\{1,\dots,m\}}:\ P_{k,j}\subset Q_i}} M(f,P_{k,j})|P_{k,j}| + \sum_{\substack{j\in\{1,\dots,m_k\}:\\ \forall_{i\in\{1,\dots,m\}}:\ P_{k,j}\not\subset Q_i}} M(f,P_{k,j})|P_{k,j}| \leqslant U(f,\pi) + M(f,P)\eta_k, \text{ gdzie}$$

$$\eta_k := \sum_{\substack{j\in\{1,\dots,m_k\}:\\ \forall_{i\in\{1,\dots,m\}}:\ P_{k,j}\not\subset Q_i}} |P_{k,j}|, \quad k \geqslant 1.$$

Zauważmy, że $\eta_k \longrightarrow 0$. Istotnie, jeżeli $P_{k,j} \not\subset Q_i$, $i = 1,\dots,m$, to $P_{k,j}$ musi przecinać którąś ze ścian którejś z kostek $Q_1,\dots,Q_m$. Stąd $\eta_k \leqslant c\operatorname{diam}\pi_k$, $k \geqslant 1$, gdzie $c > 0$ jest pewną stałą (Ćwiczenie). Ostatecznie

$$\int_P^* f \leqslant \liminf_{k\to+\infty} U(f,\pi_k) \leqslant \limsup_{k\to+\infty} U(f,\pi_k) \leqslant \int_P^* f + \varepsilon,$$

co, wobec dowolności $\varepsilon > 0$, kończy dowód.

Definicja 12.1.6. Niech $\pi = \{P_1, \dots, P_m\}$ będzie podziałem kostki P i niech $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$, $\xi_j \in P_j$, $j = 1, \dots, m$. Dla $\varphi : P \longrightarrow \mathbb{C}$, sumę $M(\varphi, \pi, \xi) := \sum_{j=1}^{m} \varphi(\xi_j)|P_j|$ nazywamy *sumą aproksymacyjną pośrednią dla funkcji φ przy podziale π i punktach pośrednich ξ*. Czasami mówimy o *sumie Cauchy'ego–Riemanna.*

Obserwacja 12.1.7. (a) Jest rzeczą widoczną, iż:
- $M(\alpha\varphi + \beta\psi, \pi, \xi) = \alpha M(\varphi, \pi, \xi) + \beta M(\psi, \pi, \xi)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
- $M(\varphi, \pi, \xi) = M(\operatorname{Re}\varphi, \pi, \xi) + iM(\operatorname{Im}\varphi, \pi, \xi)$.
- $|M(\varphi, \pi, \xi)| \leqslant M(|\varphi|, \pi, \xi)$.
- dla $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ mamy: $L(f, \pi) \leqslant M(f, \pi, \xi) \leqslant U(f, \pi)$.

(b) Następujące warunki są równoważne (por. Twierdzenie 7.1.9):

(i) $\varphi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$;

(ii) istnieje $c \in \mathbb{C}$ takie, że dla dowolnego ciągu $(\pi_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{NCP}(P)$ oraz dla dowolnego wyboru punktów pośrednich $(\xi_k)_{k=1}^{\infty}$ (tzn. ξ_k jest zbiorem punktów pośrednich dla π_k) mamy $M(\varphi, \pi_k, \xi_k) \longrightarrow c$; równoważnie: dla dowolnego ciągu $(\pi_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{NCP}(P)$ oraz dla dowolnego wyboru punktów pośrednich $(\xi_k)_{k=1}^{\infty}$ istnieje $c \in \mathbb{C}$ takie, że $M(\varphi, \pi_k, \xi_k) \longrightarrow c$;

(iii) istnieje $c \in \mathbb{C}$ takie, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla dowolnego podziału π o średnicy $\leqslant \delta$ oraz dla dowolnego wyboru punktów pośrednich ξ mamy $|M(\varphi, \pi, \xi) - c| \leqslant \varepsilon$;

(iv) istnieje $c \in \mathbb{C}$ oraz ciąg $(\pi_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{NCP}(P)$ takie, że dla dowolnego wyboru punktów pośrednich $(\xi_k)_{k=1}^{\infty}$, mamy $M(\varphi, \pi_k, \xi_k) \longrightarrow c$; równoważnie: istnieje ciąg $(\pi_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{NCP}(P)$ taki, że dla dowolnego wyboru punktów pośrednich $(\xi_k)_{k=1}^{\infty}$, istnieje $c \in \mathbb{C}$ takie, że $M(\varphi, \pi_k, \xi_k) \longrightarrow c$.

(c) $\mathcal{R}(P, \mathbb{C})$ jest zespoloną przestrzenią wektorową, a operator $\mathcal{R}(P, \mathbb{C}) \ni \varphi \longmapsto \int_P \varphi \in \mathbb{C}$ jest $\mathbb{C}$–liniowy.

(d) Jeżeli $\psi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$ oraz $|\varphi(x') - \varphi(x'')| \leqslant |\psi(x') - \psi(x'')|$, $x', x'' \in P$, to $\varphi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$ (por. Obserwacja 7.1.12(c)).

(e) Jeżeli $\varphi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$, to $|\varphi| \in \mathcal{R}(P)$ oraz $\left| \int_P \varphi \right| \leqslant \int_P |\varphi|$ (por. Obserwacja 7.1.12(d)).

(f) Jeżeli $\varphi, \psi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$, to $\varphi \cdot \psi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$.

(g) Operator $\mathcal{R}(P, \mathbb{C}) \times \mathcal{R}(P, \mathbb{C}) \ni (\varphi, \psi) \overset{\Phi}{\longmapsto} \int_P \varphi\overline{\psi} \in \mathbb{C}$ jest semi-iloczynem skalarnym. W szczególności, na podstawie nierówności Schwarza, mamy $\left| \int_P \varphi\overline{\psi} \right|^2 \leqslant \left(\int_P |\varphi|^2 \right)\left(\int_P |\psi|^2 \right)$, $\varphi, \psi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$. Ponadto, funkcja $\mathcal{R}(P, \mathbb{C}) \ni \varphi \longmapsto \left(\int_P |\varphi|^2 \right)^{1/2}$ jest *seminormą*.

(h) $\mathcal{C}(P, \mathbb{C}) \subset \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$ (por. Obserwacja 7.1.12(n)).

(i) Jeżeli $0 \leqslant f \in \mathcal{C}(P)$ i $\int_P f = 0$, to $f \equiv 0$. W szczególności, odwzorowanie

$$\mathcal{C}(P, \mathbb{C}) \times \mathcal{C}(P, \mathbb{C}) \ni (\varphi, \psi) \longmapsto \int_P \varphi\overline{\psi}$$

jest iloczynem skalarnym. Niestety, jak wiemy, przestrzeń $\mathcal{C}(P, \mathbb{C})$ z tym iloczynem skalarnym nie musi być przestrzenią Hilberta (zob. Obserwacja 7.1.12(l)).

(j) (Twierdzenie o wartości średniej) Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{C}(P)$ istnieje $\xi \in P$ taki, że $f(\xi) = \frac{1}{|P|} \int_P f$.

(k) Niech $\pi = \{P_1, \dots, P_m\}$ będzie ustalonym podziałem. Wtedy $\varphi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C}) \iff \varphi|_{P_j} \in \mathcal{R}(P_j, \mathbb{C})$, $j = 1, \dots, m$. Ponadto, $\int_P \varphi = \int_{P_1} \varphi + \dots + \int_{P_m} \varphi$ (por. Obserwacja 7.1.12(k)).

(l) Jeżeli $\varphi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$, to $\varphi|_Q \in \mathcal{R}(Q, \mathbb{C})$ dla dowolnej kostki $Q \subset P$ oraz $\int_Q \varphi = \int_P \varphi_0$, gdzie $\varphi_0 := \varphi$ na Q i $\varphi_0 := 0$ na $P \setminus Q$.

(m) Jeżeli $\mathcal{R}(P, \mathbb{C}) \ni \varphi_\nu \longrightarrow \varphi$ jednostajnie na P, to $\varphi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$ i $\int_P \varphi_\nu \longrightarrow \int_P \varphi$ (por. Obserwacja 7.1.12(o)).

Definicja 12.1.8. Mówimy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ ma *miarę Jordana (objętość) zero* (krótko: $|A| = 0$), jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje skończona rodzina kostek $P_1, \dots, P_m$ taka, że $A \subset P_1 \cup \dots \cup P_m$ i $|P_1| + \dots + |P_m| \leqslant \varepsilon$.

Obserwacja 12.1.9. (a) Każdy zbiór o mierze Jordana zero jest ograniczony.

(b) Każdy zbiór skończony ma miarę Jordana zero.

(c) Jeżeli $|A| = 0$, to $|\overline{A}| = 0$.

(d) Zbiór $P \cap \mathbb{Q}^n$ jest przeliczalny, ale nie ma miary Jordana zero.

(e) Podzbiór zbioru o mierze Jordana zero na miarę Jordana zero.

(f) Suma skończonej liczby zbiorów o mierze Jordana zero ma miarę© Jordana zero.

(g) Jeżeli $\mathbb{R}^n \ni a_\nu \longrightarrow a_0 \in \mathbb{R}^n$, to zbiór $\{a_\nu : \nu \geqslant 0\}$ ma miarę Jordna zero.

(h) Jeżeli $A \subset \mathbb{R}^n$ ma miarę Jordana zero, to dla dowolnego zbioru ograniczonego $B \subset \mathbb{R}^m$ zbiór $A \times B$ ma miarę Jordana zero.

Twierdzenie 12.1.10. (a) *Niech $Q \subset \mathbb{R}^d$ będzie kostką i niech $\varphi : Q \longrightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ będzie dowolnym odwzorowaniem ciągłym, $1 \leqslant d \leqslant n-1$. Wtedy wykres $A := \{(t, \varphi(t)) : t \in Q\}$ ma miarę Jordana zero.*

W szczególności, dla dowolnej „kostki ograniczonej" $R \subset \mathbb{R}^n$ (tzn. zbioru R takiego, że istnieje kostka P, dla której $\operatorname{int} P \subset R \subset P$) mamy $|\partial R| = 0$.

(b) *Niech $Q \subset \mathbb{R}^d$ będzie kostką i niech $p : Q \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie odwzorowaniem spełniającym warunek Höldera z wykładnikiem α. Wówczas:*

(b_1) *Jeżeli $\alpha n > d$, to zbiór $A := p(Q)$ ma miarę Jordana zero.* $\binom{1}{}$

(b_2) *Jeżeli $\alpha n \geqslant d$, to zbiór $A := p(Z)$ ma miarę Jordana zero dla dowolnego zbioru $Z \subset Q$ o mierze Jordana zero.*

(b_3) *Jeżeli p spełnia warunek Lipschitza (np. $p \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, gdzie Ω jest otoczeniem Q), to:*

- *jeżeli $n > d$, to $|p(Q)| = 0$,*
- *jeżeli $n \geqslant d$, to $|p(Z)| = 0$ dla dowolnego zbioru $Z \subset Q$ o mierze Jordana zero.* $\binom{2}{}$

(c) *Jeżeli $M \in \mathcal{M}^1_d(\mathbb{R}^n)$, $0 \leqslant d \leqslant n-1$, to każdy zwarty podzbiór $A \subset M$ ma miarę Jordana zero. Dla przykładu, $|\partial \mathbb{B}(a,r)| = 0$.*

Dowód. (a) Ustalmy $\varepsilon > 0$. Wobec jednostajnej ciągłości odwzorowania φ istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$\|\varphi(t') - \varphi(t'')\|_\infty \leqslant \varepsilon \text{ o ile } \|t' - t''\| \leqslant \delta.$$

Niech $\pi = \{Q_1, \dots, Q_m\}$ będzie podziałem kostki Q takim, że $\operatorname{diam} \pi \leqslant \delta$. Ustalmy $t_j \in Q_j$ i niech

$$P_j := Q_j \times (\varphi(t_j) + [-\varepsilon, \varepsilon]^{n-d}).$$

Oczywiście $A \subset P_1 \cup \dots \cup P_m$ oraz $|P_1| + \dots + |P_m| = |Q_1|(2\varepsilon)^{n-d} + \dots + |Q_m|(2\varepsilon)^{n-d} = |Q|(2\varepsilon)^{n-d}$.

(b) Przypuśćmy, że $\|p(t') - p(t'')\|_\infty \leqslant C\|t' - t''\|^\alpha$, $t', t'' \in Q$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Przypadki (b_1) i (b_2) rozpatrzymy jednocześnie. Niech $X := Q$ (odp. $X := Z$) i niech $\varkappa := 2|Q|$ (odp. $\varkappa > 0$, gdzie $\varkappa$ jest dowolne). Niech $\pi = \{Q_1, \dots, Q_m\}$ będzie układem kostek takim, że

- $Q_j = u_j + [-\eta, \eta]^d$, gdzie $u_j \in \mathbb{R}^d$, $j = 1, \dots, m$, $\eta \in (0, 1]$,
- $X \subset Q_1 \cup \dots \cup Q_m$, $Q_j \cap Q \neq \varnothing$, $j = 1, \dots, m$,
- $m(2\eta)^d = |Q_1| + \dots + |Q_m| \leqslant \varkappa$.

Niech $\delta := C(2\sqrt{d}\eta)^\alpha$. Ustalmy $t_j \in Q_j \cap Q$ i niech $P_j := p(t_j) + [-\delta, \delta]^n$, $j = 1, \dots, m$. Oczywiście $A \subset P_1 \cup \dots \cup P_m$ oraz $|P_1| + \dots + |P_m| = m(2C(2\sqrt{d}\eta)^\alpha)^n \leqslant \big(2^{(\alpha+1)n-d}\varkappa(Cd^{\alpha/2})^n\big)\eta^{\alpha n - d}$.

Gdy $\alpha n > d$, to dla małych $\eta > 0$ ostatnia liczba będzie dowolnie mała (odp. gdy $\alpha n = d$, to dobierając $\varkappa > 0$ stosownie małe, możemy uczynić tę ostatnią liczbę dowolnie małą).

(b_3) wynika z (b_1) i (b_2).

(c) wynika z (b). □

Obserwacja 12.1.11. (a) Jeżeli zbiór $N_P(\varphi) := \{a \in P : \varphi \text{ nie jest ciągła w punkcie } a\}$ ma miarę Jordana zero, to $\varphi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$ (por. Obserwacja 12.1.7(h)).

(b) Jeżeli zbiór $D_P(\varphi, \psi) := \{a \in P : \varphi(a) \neq \psi(a)\}$ ma miarę Jordana zero, to $\varphi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C}) \iff \psi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$. Ponadto, $\int_P \varphi = \int_P \psi$ (por. Obserwacja 7.1.16(b)).

(c) Relacja $\varphi \sim \psi \overset{\text{df}}{\iff} |D_P(\varphi, \psi)| = 0$ jest relacją równoważnościową w $\mathcal{R}(P, \mathbb{C})$; całka Riemanna jest dobrze określonym operatorem liniowym $\mathcal{R}(P, \mathbb{C})/\!\sim \longrightarrow \mathbb{C}$.

(d) Jeżeli $0 \leqslant f \in \mathcal{R}(P)$ i $\int_P f = 0$, to zbiór $Z_f := \{x \in P : f(x) > 0\}$ jest przeliczalną sumą zbiorów o mierze Jordana zero. Zbiór Z_f może nie mieć miary Jordana zero (zob. Obserwacja 7.1.16(e)).

Definicja 12.1.12. Mówimy, że zbiór ograniczony $A \subset \mathbb{R}^n$ jest *mierzalny w sensie Jordana (regularny dla całki Riemanna)* (krótko: $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$), jeżeli $\chi_A \in \mathcal{R}(P)$ dla pewnej kostki $P \supset A$. Liczbę $|A| := \int_P \chi_A$ nazywamy *miarą Jordana (objętością) zbioru A*

$\binom{1}{}$ Warto w tym miejscu przypomnieć o istnieniu krzywej $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ takiej, że $\gamma([0,1]) = [0,1] \times [0,1]$. Z ($b_1$) wynika, że γ nie może spełniać warunku Höldera z wykładnikiem $\alpha > 1/2$.

$\binom{2}{}$ Jeżeli $n < d$, to biorąc jako p projekcję $\operatorname{pr}_{\mathbb{R}^{d-n}}$, zaś jako Z zbiór postaci $A \times B \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{d-n}$, gdzie $|A| = 0$, a B jest ograniczony, widzimy, że $p(Z) = B$ nie musi być zbiorem o mierze Jordana nawet, gdy p jest liniowe.

Obserwacja 12.1.13. (a) Jeżeli $\chi_A \in \mathcal{R}(P)$ dla pewnej kostki $P \supset A$, to $\chi_A \in \mathcal{R}(Q)$ dla dowolnej kostki $Q \supset A$. Ponadto, $\int_P \chi_A = \int_Q \chi_A$ (por. Obserwacja 12.1.7(c)).

(b) Jeżeli $|A| = 0$ w sensie Definicji 12.1.8, to $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ oraz $|A| = 0$ w sensie Definicji 12.1.12.

(c) Dla zbioru ograniczonego $A \subset \mathbb{R}^n$ mamy: $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \iff |\partial A| = 0$.

Istotnie, niech P będzie dowolną kostką taką, że $A \subset\subset P$.

Ponieważ $N_P(\chi_A) \subset \partial A$, implikacja ($\Longleftarrow$) wynika z Obserwacji 12.1.11(a)). Dla dowodu ($\Longrightarrow$) przypuśćmy, że $\chi_A \in \mathcal{R}(P)$. Chcemy pokazać, że $|\partial A| = 0$. Ustalmy dowolne $\varepsilon > 0$. Z całkowalności funkcji χ_A wynika, że istnieje podział $\pi = \{P_1, \dots, P_m\}$ kostki P taki, że $U(\chi_A, \pi) - L(\chi_A, \pi) \leqslant \varepsilon/2$. Warunek ten oznacza, że $\sum\limits_{i \in I} |P_i| \leqslant \varepsilon/2$, gdzie $I := \{i \in \{1, \dots, m\} : P_i \cap A \neq \varnothing,\ P_i \not\subset A\}$. Niech $B := \bigcup\limits_{j=1}^{m} \partial P_j$. Wiemy, że $|B| = 0$. W szczególności, istnieje skończone pokrycie zbioru B kostkami $Q_1, \dots, Q_r$ takie, że $|Q_1| + \dots + |Q_r| \leqslant \varepsilon/2$. Wystarczy jeszcze pokazać, że $(\partial A) \setminus B \subset \bigcup\limits_{i \in I} P_i$. Niech $a \in (\partial A) \setminus B$. Wtedy istnieje i_0 takie, że $a \in \operatorname{int} P_{i_0}$. Stąd $P_{i_0} \cap A \neq \varnothing$. Gdyby $P_{i_0} \subset A$, to mielibyśmy $a \in \operatorname{int} A$. Tak więc $i_0 \in I$, co kończy dowód.

(d) Dowolna kula euklidesowa $\mathbb{B}(a, r)$ jest mierzalna w sensie Jordana (zob. Twierdzenie 12.1.10(c)).

(e) Każda kostka jest regularna.

(f) Jeżeli $A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, to $A \cup B,\ A \cap B, A \setminus B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, tzn. $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ jest *algebrą zbiorów*.

Istotnie, $\partial(A \cup B),\ \partial(A \cap B) \subset (\partial A) \cup (\partial B)$. Niech $B \subset\subset P$. Mamy $A \setminus B = (P \setminus B) \cap a$ oraz $\partial(P \setminus B) \subset (\partial P) \cup (\partial B)$.

(g) Jeżeli $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ i $B \subset \partial A$, to $A \setminus B$, $A \cup B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$. W szczególności, $\operatorname{int} A$, $\overline{A} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$.

(h) Jeżeli $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^m)$, to $A \times B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{n+m})$. Istotnie, $\partial(A \times B) \subset \big((\partial A) \times \overline{B}\big) \cup \big(\overline{A} \times (\partial B)\big)$ i możemy skorzystać z Obserwacji 12.1.9(h) i (c).

12.2. Całka Riemanna na zbiorze mierzalnym w sensie Jordana

Naszym najbliższym celem jest zbudowanie teorii całki Riemanna na zbiorach regularnych.

Definicja 12.2.1. Niech $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $A \subset P$, gdzie P jest kostką. Dla funkcji ograniczonej $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{C}$ niech $\varphi_0 := \begin{cases} \varphi, & \text{na } A \\ 0, & \text{na } P \setminus A \end{cases}$. Powiemy, że φ jest *całkowalna w sensie Riemanna na* A (krótko: $\varphi \in \mathcal{R}(A, \mathbb{C})$), jeżeli $\varphi_0 \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$. Kładziemy wtedy $\int_A \varphi := \int_P \varphi_0$. Jak zwykle, $\mathcal{R}(A) := \{\varphi \in \mathcal{R}(A, \mathbb{C}) : \varphi(A) \subset \mathbb{R}\}$.

Bez trudu widać, że taka definicja jest poprawna, tzn. nie zależy od wyboru kostki $P \supset A$.

Poniżej przedstawimy listę podstawowych własności tak zdefiniowanej całki Riemanna. Dowody poszczególnych własności polegają na wykorzystaniu znanych własności całki Riemanna na kostce.

Obserwacja 12.2.2. Niech $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$.

(a) Jeżeli $|A| = 0$, to każda funkcja ograniczona $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{C}$ jest całkowalna oraz $\int_A \varphi = 0$.

(b) Jeżeli zbiór $N_A(\varphi) := \{a \in A : \varphi \text{ nie jest ciągła w } a\}$ ma objętość zero, to $\varphi \in \mathcal{R}(A, \mathbb{C})$. W szczególności, $\mathcal{C}_b(A, \mathbb{C}) \subset \mathcal{R}(A, \mathbb{C})$.

(c) $1 \in \mathcal{R}(A)$ oraz $\int_A 1 = |A|$, gdzie $|A|$ oznacza miarę Jordana zbioru A (w sensie Definicji 12.1.12).

(d) $\mathcal{R}(A, \mathbb{C})$ jest algebrą, operator $\mathcal{R}(A) \ni \varphi \longmapsto \int_A \varphi \in \mathbb{C}$ jest liniowy i monotoniczny. W szczególności, jeżeli $A \subset B$, gdzie B jest także regularny, to $|A| \leqslant |B|$ (tzn. miara Jordana jest monotoniczna).

(e) Jeżeli $\varphi \in \mathcal{R}(A, \mathbb{C})$, to $|\varphi| \in \mathcal{R}(A)$ oraz $|\int_A \varphi| \leqslant \int_A |\varphi|$.

(f) Operator $\mathcal{R}(A, \mathbb{C}) \times \mathcal{R}(A, \mathbb{C}) \ni (\varphi, \psi) \longmapsto \int_A \varphi\overline{\psi} \in \mathbb{C}$ jest semi-iloczynem skalarnym. W szczególności, zachodzi nierówność Schwarza: $\big|\int_A \varphi\overline{\psi}\big|^2 \leqslant \big(\int_A |\varphi|^2\big)\big(\int_A |\psi|^2\big)$, $\varphi, \psi \in \mathcal{R}(A, \mathbb{C})$.

(g) Dla funkcji ograniczonych $\varphi, \psi : A \longrightarrow \mathbb{C}$, jeżeli zbiór $D_A(\varphi, \psi) := \{a \in A : \varphi(a) \neq \psi(a)\}$ ma objętość zero, to $\varphi \in \mathcal{R}(A, \mathbb{C}) \iff \psi \in \mathcal{R}(A, \mathbb{C})$. Ponadto, $\int_A \varphi = \int_A \psi$.

(h) Jeżeli $B \subset A$ jest zbiorem regularnym, to dla funkcji $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{C}$ mamy: $\varphi|_B \in \mathcal{R}(B, \mathbb{C}) \iff \varphi \cdot \chi_B \in \mathcal{R}(A, \mathbb{C})$.

(i) Jeżeli $A = A_1 \cup A_2$, gdzie A_1, $A_2 \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, i $|A_1 \cap A_2| = 0$, to $\varphi \in \mathcal{R}(A, \mathbb{C}) \iff \varphi|_{A_j} \in \mathcal{R}(A_j, \mathbb{C})$, $j = 1, 2$. Ponadto $\int_A \varphi = \int_{A_1} \varphi + \int_{A_2} \varphi$. W szczególności,

- miara Jordana jest *skończenie addytywna*, tzn. $|A \cup B| = |A| + |B|$ dla $A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ takich, że $A \cap B = \varnothing$;
- jeżeli $B \subset A$ jest zbiorem regularnym i $\varphi \in \mathcal{R}(A, \mathbb{C})$, to $\varphi|_B \in \mathcal{R}(B, \mathbb{C})$;

- dla dowolnej funkcji ograniczonej $\varphi : \overline{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ mamy: $\varphi \in \mathcal{R}(A,\mathbb{C}) \iff \varphi \in \mathcal{R}(\overline{A},\mathbb{C})$ oraz $\int_A \varphi = \int_{\overline{A}} \varphi$;
- dla dowolnej funkcji ograniczonej $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{C}$ mamy: $\varphi \in \mathcal{R}(A,\mathbb{C}) \iff \varphi \in \mathcal{R}(\operatorname{int} A,\mathbb{C})$ oraz $\int_A \varphi = \int_{\operatorname{int} A} \varphi$.

Twierdzenie 12.2.3. *Niech $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{n-1})$, niech $f \in \mathcal{R}(A)$ i niech B oznacza wykres funkcji f, tzn. zbiór $B := \{(x, f(x)) : x \in A\} \subset \mathbb{R}^n$. Wtedy $|B| = 0$.*

Dowód. Niech $A \subset P$, gdzie P jest kostką, niech f_0 oznacza standardowe przedłużenie funkcji f i niech $B_0 := \{(x, f_0(x)) : x \in P\}$. Zauważmy, że $|B| = 0 \iff |B_0| = 0$ (Ćwiczenie). Wynika stąd w szczególności, że możemy założyć, że $A = P$ jest kostką.

Dla $\varepsilon > 0$, niech $\pi = \{P_1, \dots, P_m\}$ będzie podziałem kostki P takim, że $U(f,\pi) - L(f,\pi) \leqslant \varepsilon$. Połóżmy, $Q_j := P_j \times [m(f,P_j), M(f,P_j)]$, $j = 1, \dots, m$. Wtedy $B \subset Q_1 \cup \dots \cup Q_m$ oraz

$$|Q_1| + \dots + |Q_m| = \sum_{j=1}^{m} |P_j|(M(f,P_j) - m(f,P_j)) \leqslant \varepsilon. \qquad \square$$

Twierdzenie 12.2.4 (Twierdzenie o całkach iterowanych)**.** *Niech $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^m)$ i niech $\varphi \in \mathcal{R}(A \times B, \mathbb{C})$ (por. Obserwacja 12.1.13*(h)*). Załóżmy, że $\varphi(x,\cdot) \in \mathcal{R}(B,\mathbb{C})$ dla dowolnego $x \in A$ $\binom{3}{}$. Wtedy funkcja $A \ni x \longmapsto \int_B \varphi(x,y)dy \in \mathbb{R}$ jest całkowalna na A oraz*

$$\int_{A\times B} \varphi(x,y)dxdy = \int_A \Big(\int_B \varphi(x,y)dy \Big) dx. \quad \binom{4}{}$$

W szczególności, powyższy wzór stosuje się dla funkcji klasy $\mathcal{C}_b(A \times B, \mathbb{C})$.

Dowód. W oczywisty sposób dowód sprowadza się do przypadku, gdy $A = P$ i $B = Q$ są kostkami oraz $\varphi = f$ ma wartości rzeczywiste. Ustalmy dowolne podziały $\pi' = \{P_1, \dots, P_r\}$ kostki P i $\pi'' = \{Q_1, \dots, Q_s\}$ kostki Q. Wtedy rodzina $\pi := \{P_j \times Q_k : j = 1, \dots, r,\ k = 1, \dots, s\}$ jest podziałem kostki $P \times Q$. Wybierzmy dowolne punkty pośrednie ξ dla podziału π'. Wtedy

$$m(f, P_j \times Q_k)|Q_k| \leqslant \int_{Q_k} f(\xi_j, y)dy \leqslant M(f, P_j \times Q_k)|Q_k|, \quad \binom{5}{}$$

skąd po pomnożeniu przez $|P_j|$, zsumowaniu najpierw względem k, a potem względem j, mamy:

$$L(f,\pi) \leqslant \sum_{j=1}^{r} \int_Q f(\xi_j, y)dy|P_j| \leqslant U(f,\pi).$$

Pozostaje rozważyć normalne ciągi podziałów i zastosować Obserwację 12.1.7(b). $\square$

Wniosek 12.2.5. *Niech $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^m)$ i niech $\varphi \in \mathcal{R}(A,\mathbb{C})$, $\psi \in \mathcal{R}(B,\mathbb{C})$. Wtedy $\varphi \otimes \psi \in \mathcal{R}(A \times B, \mathbb{C})$ $\binom{6}{}$ oraz*

$$\int_{A\times B} \varphi(x)\psi(y)dxdy = \Big(\int_A \varphi(x)dx \Big) \Big(\int_B \psi(y)dy \Big).$$

Dowód. Jedynym problemem jest całkowalność $\varphi \otimes \psi$ na $A \times B$. Możemy założyć, że $A = P$, $B = Q$ są kostkami oraz, że $\varphi = f$ i $\psi = g$ mają wartości rzeczywiste (Ćwiczenie). Ustalmy dowolne podziały $\pi' = \{P_1, \dots, P_r\}$ kostki P i $\pi'' = \{Q_1, \dots, Q_s\}$ kostki Q i niech π będzie jak w dowodzie Twierdzenia 12.2.4. Załóżmy, że $|f|, |g| \leqslant c$. Wtedy

$$U(f \otimes g, \pi) - L(f \otimes g, \pi) \leqslant c\Big((U(f,\pi') - L(f,\pi'))|Q| + (U(g,\pi'') - L(g,\pi''))|P| \Big)$$

i dalej możemy rozumować standardowo. $\square$

$\binom{3}{}$ Odnotujmy, że nie wynika to z całkowalności φ na $A \times B$. Dla przykładu: $A = B = [0,1]$, $\varphi(0,\cdot) = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$, $\varphi(x,\cdot) := 0$ dla $x \in (0,1]$.

$\binom{4}{}$ Stosujemy tu wygodny tradycyjny zapis całki Riemanna z uwidocznieniem zmiennych.

$\binom{5}{}$ Z całkowalności funkcji $f(\xi_j,\cdot)$ na Q wynika jej całkowalność na Q_k.

$\binom{6}{}$ $(f \otimes g)(x,y) := f(x)g(y)$

Twierdzenie 12.2.6 (Całka jako miara objętości). *Niech $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{n-1})$ i niech $\alpha, \beta \in \mathcal{C}_b(A)$, $\alpha \leqslant \beta$. Połóżmy $B := \{(x,y) \in A \times \mathbb{R} : \alpha(x) \leqslant y \leqslant \beta(x)\}$. Wtedy $B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ oraz dla dowolnej funkcji $\varphi \in \mathcal{R}(B, \mathbb{C})$ takiej, że $f(x,\cdot) \in \mathcal{R}([\alpha(x), \beta(x)], \mathbb{C})$, $x \in A$, $\big(^7\big)$ funkcja $A \ni x \longmapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \varphi(x,y)dy \in \mathbb{C}$ jest całkowalna i mamy:*

$$\int_B \varphi(x,y)dxdy = \int_A \Big(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \varphi(x,y)dy \Big) dx.$$

W szczególności, $|B| = \int_A (\beta - \alpha)$ (por. Przykład 7.5.1(1)).

Dowód. Niech $|\alpha|, |\beta| \leqslant c$. Zauważmy, że

$$\partial B \subset ((\partial A) \times [-c,c]) \cup \{(x, \alpha(x)) : x \in A\} \cup \{(x, \beta(x)) : x \in A\} =: Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3.$$

Istotnie, niech $B \ni (x_s, y_s) \longrightarrow (x_0, y_0) \in \partial B$. Jeżeli $x_0 \in \partial A$, to oczywiście $(x_0, y_0) \in Z_1$. Jeżeli $x_0 \in \operatorname{int} A$, to wobec ciągłości funkcji α i β, mamy $\alpha(x_0) \leqslant y_0 \leqslant \beta(x_0)$. Ponownie korzystając z ciągłości tych funkcji, wnioskujemy, że wykluczone jest, aby $\alpha(x_0) < y_0 < \beta(x_0)$.

Teraz regularność zbioru wynika z Obserwacji 12.1.9(h) oraz Twierdzenia 12.2.3.

Niech $\varphi_0 : A \times [-c,c] \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie trywialnym rozszerzeniem funkcji φ (poprzez wartości zerowe). Wtedy na podstawie twierdzenia o całkach iterowanych (Twierdzenie 12.2.4) mamy:

$$\int_B \varphi(x,y)dxdy = \int_{A\times[-c,c]} \varphi_0(x,y)dxdy = \int_A \Big(\int_{[-c,c]} \varphi_0(x,y)dy \Big) dx = \int_A \Big(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \varphi(x,y)dy \Big) dx. \quad \square$$

Twierdzenie* 12.2.7 (Twierdzenie o zmianie zmiennych w całce Riemanna). *Niech $\Phi : U \longrightarrow V$ będzie dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^1$ zbiorów otwartych $U, V \subset \mathbb{R}^n$ i niech $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $A \subset\subset U$. Wtedy:*

- *$\Phi(A) \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$,*
- *dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{R}(\Phi(A))$ funkcja $(f \circ \Phi) \cdot |\Phi'|$ jest całkowalna na A, gdzie $|\Phi'| = J_n(\Phi)$ oznacza moduł wyznacznika macierzy Jacobiego odwzorowania Φ (zob. podrozdział 10.1.1),*
- *$\int_{\Phi(A)} f = \int_A (f \circ \Phi) \cdot |\Phi'|$, $\quad f \in \mathcal{R}(\Phi(A))$.*

Dowód zostanie podany później (Wniosek 14.3.10). Teraz tylko zauważmy, że regularność $\Phi(A)$ wynika z tego, że $\partial\Phi(A) = \Phi(\partial A)$, a stad, na podstawie Twierdzenia 12.1.10(b_2), dostajemy $|\partial\Phi(A)| = 0$. Łatwo również sprawdzić, że twierdzenie jest prawdziwe dla translacji.

Przykład 12.2.8. Niech $r_1, \dots, r_n > 0$, $\mathbb{E} := \big\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \frac{x_1^2}{r_1^2} + \dots + \frac{x_n^2}{r_n^2} < 1\big\}$. Wtedy $|\mathbb{E}| = |\mathbb{B}_n| r_1 \cdots r_n$, gdzie $\mathbb{B}_n := \mathbb{B}(1)$. W szczególności, $|\mathbb{B}(a,r)| = |\mathbb{B}_n| r^n$.

Istotnie, niech $\Phi(x_1, \dots, x_n) = (r_1 x_1, \dots, r_n x_n)$. Wtedy $|\Phi'(x)| = r_1 \cdots r_n$, a stąd $|\mathbb{E}| = \int_{\mathbb{E}} 1 = \int_{\Phi(\mathbb{B}_n)} 1 = \int_{\mathbb{B}_n} |\Phi'| = \int_{\mathbb{B}_n} r_1 \cdots r_n = |\mathbb{B}_n| r_1 \cdots r_n$.

Ćwiczenie 12.2.9. Dla poniższych odwzorowań Φ wyznaczyć $V := \Phi(U)$, sprawdzić czy $\Phi : U \longrightarrow V$ jest dyfeomorfizmem oraz wyliczyć wzór na $|\Phi'|$ ($a, b, c > 0$ oznaczają stałe).

- $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\Phi(r,\varphi) := (ar\cos\varphi, br\sin\varphi)$, $U := \mathbb{R}_{>0} \times (0, 2\pi)$, $\Phi'(r,\varphi) = abr$; $\det \Phi'(r,\varphi,z) = abcr$; dla $a = b = 1$ są to tzw. *współrzędne biegunowe*.
- $\Phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\Phi(r,\varphi,z) := (ar\cos\varphi, br\sin\varphi, cz)$, $U := \mathbb{R}_{>0} \times (0,2\pi) \times \mathbb{R}$, $\det \Phi'(r,\varphi,z) = abcr$; dla $a = b = c = 1$ są to tzw. *współrzędne walcowe*.
- (współrzędne sferyczne) $\Phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\Phi(r,\varphi,\theta) := (ar\sin\theta\cos\varphi, br\sin\theta\sin\varphi, cr\cos\theta)$, $U := \mathbb{R}_{>0} \times (0,2\pi) \times (0,\pi)$, $\det \Phi'(r,\varphi,\theta) = abcr^2 \sin\theta$; dla $a = b = c = 1$ są to tzw. *współrzędne sferyczne*.
- $\Phi = \overset{(n)}{\Phi} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, *współrzędne sferyczne w* $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
\Phi_1(r,\theta) &:= r\cos\theta_1,\\
\Phi_2(r,\theta) &:= r\sin\theta_1\cos\theta_2,\\
\Phi_3(r,\theta) &:= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3,\\
&\dots\\
\Phi_{n-1}(r,\theta) &:= r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1},\\
\Phi_n(r,\theta) &:= r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1},
\end{aligned}$$

$\big(^7\big)$ Np. $\varphi \in \mathcal{C}_b(B, \mathbb{C})$.

$U := \mathbb{R}_{>0} \times (0,\pi)^{n-2} \times (0,2\pi)$, $\det \Phi'(r,\theta_1 \ldots,\theta_{n-1}) = r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1 \sin^{n-3}\theta_2 \ldots \sin\theta_{n-2}$.

Wskazówka: rozwinięcie wyznacznika względem ostatniej kolumny daje:

$\det \overset{(n)}{\Phi'}(r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-1}) = r\sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{n-2} \det \overset{(n-1)}{\Phi'}(r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2})$ i teraz można skorzystać z indukcji.

12.3. Funkcje dane całką

Twierdzenie 12.3.1 (Twierdzenie o funkcjach danych całką)**.** *Niech Ω będzie zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^m$, niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie regularnym zbiorem zwartym* $\binom{8}{}$ *i niech $f : \Omega \times A \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie odwzorowaniem takim, że dla pewnego $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ mamy:*

- *$f(\cdot,t) \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ dla dowolnego $t \in A$,*
- *odwzorowanie $\Omega \times A \ni (x,t) \longmapsto D^\alpha_x f(x,t) \in \mathbb{R}$ jest ciągłe dla $|\alpha| \leqslant k$* $\binom{9}{}$.

Wtedy odwzorowanie $\Omega \ni x \overset{\varphi}{\longmapsto} \int_A f(x,t)dt$ jest klasy $\mathcal{C}^k(\Omega)$ oraz $D^\alpha\varphi(x) = \int_A D^\alpha_x f(x,t)dt$, $x \in \Omega,\ |\alpha| \leqslant k$.

Dowód. Ćwiczenie— por. dowód Twierdzenia 10.16.1. □

12.4. Całki krzywoliniowe II

Twierdzenie 12.4.1 (Niezależność całki krzywoliniowej od drogi całkowania)**.** *Niech $D \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem i niech $V : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) *dla dowolnej drogi $\gamma : [0,1] \longrightarrow D$ całka $\int_\gamma V dx$ zależy jedynie od końców tej drogi;*

(ii) *pole V jest* potencjalne*, tzn. istnieje funkcja $\Phi \in \mathcal{C}^1(D)$ (zwana* potencjałem*) taka, że*

$$V_j = \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}, \quad j = 1,\ldots,n.$$

Warunek (i) pozwala zdefiniować dla $A, B \in D$ całkę $\int_A^B V dx$ rozumianą jako całka po dowolnej drodze łączącej A i B wewnątrz obszaru D. W szczególności, całka po dowolnej drodze zamkniętej jest równa zero.

Zauważmy, że potencjał pola jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do stałej.

Dowód. (ii) $\Longrightarrow$ (i): Na podstawie Twierdzenia 7.8.5 dostajemy

$$\int_\gamma V dx = \int_0^1 \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt = \int_0^1 (\Phi\circ\gamma)'(t)dt = \Phi(\gamma(1)) - \Phi(\gamma(0)).$$

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Ustalmy $A \in D$ i niech

$$\Phi(x) := \int_A^x V dx, \quad x \in D.$$

Wtedy dla $a \in D$ i dla $j \in \{1,\ldots,n\}$, korzystając z niezależności całki od drogi, mamy

$$\begin{aligned}\Big|\frac{\Phi(a+he_j)-\Phi(a)}{h} - V_j(a)\Big| &= \Big|\frac{1}{h}\int_{[a,a+he_j]} V dx - V_j(a)\Big| = \Big|\int_0^1 V_j(a+the_j)dt - V_j(a)\Big| \\ &\leqslant \max\{|V_j(a+the_j) - V_j(a)| : 0 \leqslant t \leqslant 1\} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

□

Twierdzenie 12.4.2 (Lemat Poincarégo $\binom{10}{}$)**.** *Niech $D \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem gwiaździstym względem punktu a i niech $V \in \mathcal{C}^1(D,\mathbb{R}^n)$. Wtedy V jest polem potencjalnym wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\frac{\partial V_j}{\partial x_k} = \frac{\partial V_k}{\partial x_j}, \quad j,k = 1,\ldots,n. \quad \binom{11}{} \qquad (*)$$

$\binom{8}{}$ Np. $A = P$ – kostka.

$\binom{9}{}$ Dla $k = 0$ warunek ten oznacza po prostu ciągłość f.

$\binom{10}{}$ Jules Henri Poincaré (1854–1912).

$\binom{11}{}$ Mamy $\binom{n}{2}$ nietrywialnych warunków.

Przykład 12.4.3. Powinniśmy zawsze pamiętać o następującym przykładzie obszaru, w którym Lemat Poincarégo nie zachodzi.

Niech $D := (\mathbb{R}^2)_* = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\varphi(x,y) := \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$, $(x,y) \in D$, $P(x,y) := -\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $Q(x,y) := \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$. Wtedy $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$ (Ćwiczenie), a wiec pole $V := (P,Q)$ spełnia warunek (*). Gdyby to pole było potencjalne w obszarze D, to na podstawie Twierdzenia 12.4.1, całka z tego pola po dowolnej drodze zamkniętej leżącej w D byłaby równa zero. Z drugiej strony, biorąc jako drogę okrąg jednostkowy mamy

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_0^{2\pi} \big(P(\cos t, \sin t)(-\sin t) + Q(\cos t, \sin t)\cos t\big)\,dt = 2\pi,$$

co daje sprzeczność.

Dowód Twierdzenia 12.4.2. Oczywiście, jeżeli pole V jest potencjalne i Φ jest jego potencjałem, to Φ musi być klasy $\mathcal{C}^2$, a zatem:

$$\frac{\partial V_j}{\partial x_k} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial V_k}{\partial x_j}, \quad j,k = 1,\dots,n.$$

W drugą stronę: możemy założyć, że $a = 0$. Niech

$$\Phi(x) := \int_{[0,x]} V\,dx = \int_0^1 \langle V(tx), x\rangle\,dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n V_i(tx)x_i\,dt, \quad x \in D.$$

Na podstawie twierdzenia o funkcjach danych całką funkcja Φ jest klasy $\mathcal{C}^1$. Ponadto dla $x \in D$ i $j \in \{1,\dots,n\}$ mamy:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}(x) &= \int_0^1 \Big(\sum_{i=1}^n \frac{\partial V_i}{\partial x_j}(tx)tx_i + V_j(tx)\Big)\,dt \overset{\text{na mocy (*)}}{=} \int_0^1 \Big(t\sum_{i=1}^n \frac{\partial V_j}{\partial x_i}(tx)x_i + V_j(tx)\Big)\,dt \\ &= \int_0^1 \Big(t\frac{d}{dt}V_j(tx) + V_j(tx)\Big)\,dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}(tV_j(tx))\,dt = tV_j(tx)|_0^1 = V_j(x). \qquad \square\end{aligned}$$

12.5. Rachunek wariacyjny III

Zgodnie z zapowiedzią w podrozdziale 10.17 przechodzimy do podania warunków dostatecznych na minimum funkcjonału

$$\mathcal{D} \ni u \longmapsto I(u) := \int_a^b F(x,u(x),u'(x))\,dx \in \mathbb{R}, \text{ gdzie}$$

$$\mathcal{D} := \{u \in \mathcal{C}([a,b]) \cap \mathcal{C}'^1((a,b),(c,d)) : u(a) = \alpha,\ u(b) = \beta,\ \text{całka } I(u) \text{ jest zbieżna}\},$$

$a < b$, $c < d$, $\alpha,\beta \in (c,d)$, $F : \mathcal{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest daną funkcją klasy $\mathcal{C}^2$, gdzie $\mathcal{R} := (a,b)\times(c,d)$. Zachowujemy oznaczenia z podrozdziałów 9.4, 10.17.

Zdefiniujmy pomocniczą *funkcję Weierstrassa*

$$\mathcal{E}(x,y,z_1,z_2) := F(x,y,z_2) - F(x,y,z_1) - (z_2-z_1)F'_z(x,y,z_1).$$

Twierdzenie 12.5.1. *Załóżmy, że:*

- *F jest klasy $\mathcal{C}^2$,*
- *$u \in \mathcal{D} \cap \mathcal{C}^2((a,b))$ jest rozwiązaniem równania Eulera,*
- *istnieje funkcja $p : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ klasy $\mathcal{C}^1$ taka, że:*
  - *$u'(x) = p(x,u(x))$, $x \in (a,b)$,*
  - *dla dowolnego punktu $(x_0,y_0) \in \mathcal{R}$ istnieje przedział otwarty $\Delta = \Delta_{x_0,y_0} \subset (a,b)$, $x_0 \in \Delta$, oraz funkcja różniczkowalna $v = v(\cdot;x_0,y_0) : \Delta \longrightarrow (c,d)$ takie, że:*
    $v'(x) = p(x,v(x))$, $x \in \Delta$ (zauważmy, że funkcja v musi być klasy $\mathcal{C}^2$),
    $v(x_0) = y_0$ (odnotujmy, że na podstawie twierdzenia Picarda, funkcja v jest jednoznacznie wyznaczona w pewnym otoczeniu punktu x_0),
    v jest rozwiązaniem równania Eulera w Δ.

- $\mathcal{E} \geqslant 0$ *w* $\mathcal{R} \times \mathbb{R}^2$,
- $|F'_z(x,y,z)| \leqslant M(y)$ *dla* $(x,y,z) \in \mathcal{R} \times \mathbb{R}$, *przy czym funkcja* M *jest całkowalna w przedziałach* $(c,d) \cap (\alpha - \varepsilon_0, \alpha + \varepsilon_0))$, $(c,d) \cap (\beta - \varepsilon_0, \beta + \varepsilon_0)$ *dla pewnego* $\varepsilon_0 > 0$ *(jeżeli* $\alpha, \beta \in (c,d)$*, to wystarczy założyć, że* M *jest lokalnie całkowalna w* (c,d)*).*

Wtedy u *realizuje minimum funkcjonału* I *w* $\mathcal{D}$.

Dowód. Rozważmy pole wektorowe $(P,Q) : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$P(x,y) := F(x,y,p(x,y)) - p(x,y)F'_z(x,y,p(x,y)), \qquad Q(x,y) := F'_z(x,y,p(x,y)).$$

Jest to pole klasy $\mathcal{C}^1$. Ponadto, jest to pole potencjalne. Istotnie, ponieważ mamy do czynienia z prostokątem, wystarczy sprawdzić, że $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Liczymy:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= F''_{x,z}(x,y,p) + F''_{z,z}(x,y,p)p'_x - F'_y(x,y,p) - F'_z(x,y,p)p'_y \\ &\quad + p'_y F'_z(x,y,p) + pF''_{y,z}(x,y,p) + pF''_{z,z}(x,y,p)p'_y \\ &= -F'_y(x,y,p) + F''_{x,z}(x,y,p) + F''_{y,z}(x,y,p)p + F''_{z,z}(x,y,p)(p'_x + p'_y p).\end{aligned}$$

Ustalmy $(x_0,y_0) \in \mathcal{R}$ i niech funkcja $v = v(\cdot; x_0, y_0) : \Delta \longrightarrow (c,d)$ będzie taka, jak w założeniach. Ponieważ $v'(x) = p(x, v(x))$, zatem

$$v'' = p'_x(x,v) + p'_y(x,v)v' = p'_x + p'_y p,$$

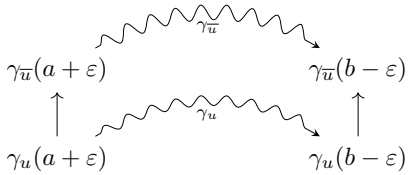
a stąd, na podstawie równania Eulera, dostajemy

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,v(x)) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,v(x)) = -F'_y(x,v,v') + F''_{x,z}(x,v,v') + F''_{y,z}(x,v,v')v' + F''_{z,z}(x,v,v')v'' = 0 \ \text{ w } \Delta.$$

W szczególności, dla $x = x_0$ dostajemy, $\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0)$, co wobec dowolności punktu (x_0,y_0) kończy dowód potencjalności pola.

W konsekwencji całka krzywoliniowa $\Xi(\gamma) := \int_\gamma Pdx + Qdx$ zależy wyłącznie od końców krzywej $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathcal{R}$.

Weźmy dowolną funkcję $\overline{u} \in \mathcal{D}$ i $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Rozważmy dwa odwzorowania: $\gamma_u : (a,b) \longrightarrow \mathcal{R}$, $\gamma_u(x) := (x, u(x))$, $\gamma_{\overline{u}} : (a,b) \longrightarrow \mathcal{R}$, $\gamma_{\overline{u}}(x) := (x, \overline{u}(x))$. Niech $A_\varepsilon(u) := \Xi(\gamma_u|_{[a+\varepsilon, b-\varepsilon]})$, $A_\varepsilon(\overline{u}) := \Xi(\gamma_{\overline{u}}|_{[a+\varepsilon,b-\varepsilon]})$, $L_\varepsilon := \Xi([\gamma_u(a+\varepsilon), \gamma_{\overline{u}}(a+\varepsilon)])$, $R_\varepsilon := \Xi([\gamma_u(b-\varepsilon), \gamma_{\overline{u}}(b-\varepsilon)])$. Wiemy, że $A_\varepsilon(u) + R_\varepsilon - A_\varepsilon(\overline{u}) - L_\varepsilon = 0$.



Biorąc pod uwagę, że $u' = p(x,u)$ oraz $\mathcal{E} \geqslant 0$, dostajemy:

$$A_\varepsilon(u) = \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} F(x,u,u')dx, \quad A_\varepsilon(\overline{u}) \leqslant \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} F(x,\overline{u},\overline{u}')dx.$$

Ponadto,

$$|L_\varepsilon| = \Big| \int_{u(a+\varepsilon)}^{\overline{u}(a+\varepsilon)} Q(a+\varepsilon, y)dy \Big| = \Big| \int_{u(a+\varepsilon)}^{\overline{u}(a+\varepsilon)} F'_z(a+\varepsilon, y, p(a+\varepsilon,y))dy \Big| \leqslant \Big| \int_{[u(a+\varepsilon), \overline{u}(a+\varepsilon)]} M(y)dy \Big|$$

i podobnie

$$|R_\varepsilon| \leqslant \Big| \int_{[u(b-\varepsilon), \overline{u}(b-\varepsilon)]} M(y)dy \Big|.$$

Ponieważ $u(a+\varepsilon) - \overline{u}(a+\varepsilon) \longrightarrow \alpha - \alpha = 0$, gdy $\varepsilon \longrightarrow 0$, zatem całkowalność funkcji M na $(c,d) \cap (\alpha - \varepsilon_0, \alpha + \varepsilon_0)$ gwarantuje, że $L_\varepsilon \longrightarrow 0$, gdy $\varepsilon \longrightarrow 0$. Podobnie, $R_\varepsilon \longrightarrow 0$.

Przypomnijmy, że $A_\varepsilon(u) + R_\varepsilon - A_\varepsilon(\overline{u}) - L_\varepsilon = 0$. Biorąc pod uwagę dotychczasowe oszacowania i przechodząc z ε do 0, dostajemy $I(u) - I(\overline{u}) \leqslant 0$, co dowodzi, że u realizuje minimum. $\square$

Obserwacja 12.5.2. Dla funkcjonału Fermata mamy:

$$\mathcal{E}(x,y,z_1,z_2)=\varphi(y)\Big(\sqrt{1+z_2^2}-\sqrt{1+z_1^2}-(z_2-z_1)\frac{z_1}{\sqrt{1+z_1^2}}\Big)\geqslant 0,\quad (x,y,z_1,z_2)\in\mathcal{R}\times\mathbb{R}^2.$$

Ponadto,

$$|F'_z(x,y,z)|=\varphi(y)\frac{|z|}{\sqrt{1+z^2}}\leqslant\varphi(y),\quad (x,y,z)\in\mathcal{R}\times\mathbb{R},$$

zaś φ, jako funkcja ciągła, jest oczywiście lokalnie całkowalna w (c,d). Tak więc, dla funkcjonałów Fermata z $\varphi\in\mathcal{C}^2$ i $\alpha,\beta\in(c,d)$, cały problem polega na znalezieniu funkcji p.

Zauważmy, że w zagadnieniu brachistochrony założenie $\alpha,\beta\in(c,d)$ nie jest spełnione, bowiem $\alpha=0=c$. Na szczęście, w tym przypadku $\varphi(y)=\frac{1}{\sqrt{y}}$ jest funkcją całkowalną w dowolnym przedziale postaci $(0,\varepsilon_0)$.

Obserwacja 12.5.3. Funkcję p można skonstruować z jednoparametrowej rodziny rozwiązań równania Eulera.

Dokładniej, niech $F\in\mathcal{C}^2$ i niech $U=U(x,C)$ będzie jednoparametrową rodziną rozwiązań równania Eulera, tzn. przy dowolnym $C\in(C_-,C_+)$ funkcja $U(\cdot,C)$ jest określona w pewnym przedziale $(a(C),b(C))\subset(a,b)$ i spełnia tam równanie Eulera. Zakładamy ponadto, że:

- zbiór $\Omega:=\{(x,C):C\in(C_-,C_+),\ x\in(a(C),b(C))\}$ jest otwarty w $\mathbb{R}^2$,
- $U\in\mathcal{C}^2(\Omega)$, $U'_C\neq 0$ w Ω,
- dla dowolnego $(x_0,y_0)\in\mathcal{R}$ istnieje dokładnie jedna stała $C=C(x_0,y_0)\in(C_-,C_+)$ taka, że $x_0\in(a(C),b(C))$ i $U(x_0,C)=y_0$,
- istnieje stała $C_0\in(C_-,C_+)$ taka, że $(a(C_0),b(C_0))=(a,b)$ oraz $U(\cdot,C_0)=u$ ($u\in\mathcal{D}\cap\mathcal{C}^2((a,b))$ jest ustalonym rozwiązaniem równania Eulera, o którym chcemy orzec, czy realizuje minimum).

Zdefiniujmy $p(x,y):=U'_x(x,C(x,y)),\ (x,y)\in\mathcal{R}$. Zauważmy, że na podstawie twierdzenia o funkcjach uwikłanych, założenie że $U'_C\neq 0$ gwarantuje, że odwzorowanie $\mathcal{R}\ni(x,y)\longmapsto C(x,y)$ jest klasy $\mathcal{C}^1$. W takim razie $p\in\mathcal{C}^1(\mathcal{R})$. Oczywiście, $p(x,u(x))=U'_x(x,C(x,u(x)))=U'_x(x,C_0)=u'(x)$, $x\in(a,b)$. Ponadto, dla dowolnego $(x_0,y_0)\in\mathcal{R}$ możemy przyjąć $C:=C(x_0,y_0)$, $\Delta=\Delta_{x_0,y_0}:=(a(C),b(C))$, $v(\cdot;x_0,y_0):=U(\cdot,C)$ i wtedy $v'(x)=U'_x(x,C)=U'_x(x,C(x,v(x)))=p(x,v(x)),\ x\in\Delta$.

Przykład 12.5.4 (Ćwiczenie)**.** Rodzina rozwiązań z Przykładu 10.17.8

$$x=C(\theta-\sin\theta),\quad u=C(1-\cos\theta),\quad C>0,\ 0<\theta<\theta_0(C),$$

spełnia warunki z Obserwacji 12.5.3, a więc funkcja z Przykładu 10.17.8 jest rozwiązaniem płaskiego problemu brachistochrony.

12.6. Wzór Greena

Przypomnijmy (Definicja 4.5.1), że krzywa Jordana na płaszczyźnie to homeomorficzny obraz okręgu $\sigma:\mathbb{T}\longrightarrow\mathbb{R}^2$, który utożsamiamy z krzywą zamkniętą $\gamma:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}^2$ ($\gamma(t):=\sigma(e^{2\pi it})$). Wiadomo, że każda krzywa Jordana $\gamma:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}^2$ dzieli płaszczyznę na dwa obszary:

- ograniczony, zwany *wnętrzem krzywej* γ i oznaczany $\operatorname{int}\gamma$,
- nieograniczony, zwany *zewnętrzem krzywej* γ i oznaczany $\operatorname{ext}\gamma$,

takie, że $\partial(\operatorname{int}\gamma)=\partial(\operatorname{ext}\gamma)=\gamma^*$.

Definicja 12.6.1. Niech $D\subset\mathbb{R}^2$ będzie obszarem ograniczonym takim, że dla pewnego $N\in\mathbb{N}_0$ mamy:

(†) $\partial D=\gamma_0^*\cup\cdots\cup\gamma_N^*$, gdzie $\gamma_j:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}^2$ jest drogą Jordana[12] *zorientowaną dodatnio względem* D, tzn. „gdy idziemy po γ_j^* zgodnie z przebiegiem parametru, to obszar D mamy po lewej ręce”, $j=0,\dots,N$,
$\gamma_j^*\subset\operatorname{int}\gamma_0$, $j=1,\dots,N$,
$\gamma_j^*\subset\operatorname{ext}\gamma_k^*$ dla $j,k=1,\dots,N$, $j\neq k$.

Powiemy, że dla obszaru ograniczonego $D\subset\mathbb{R}^2$ spełniającego warunek (†) zachodzi *wzór Greena* [13], jeżeli dla dowolnych funkcji $P,Q\in\mathcal{C}^1(\Omega)$, gdzie Ω jest pewnym otoczeniem $\overline{D}$, zachodzi wzór:

$$\int_{\partial D}P\,dx+Q\,dy=\int_D\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big).\quad [14]$$

[12] Tzn. drogą będącą krzywą Jordana.
[13] George Green (1793–1841).

Zauważmy, że na mocy Twierdzenia 12.1.10 obszar D jest regularny oraz, że całki po obu stronach powyższego wzoru istnieją. Problemem jest równość.

Obserwacja 12.6.2. (a) Przypuśćmy, że D jest *normalny względem osi* x, tzn.

$$D = \{(x,y) \in (a,b) \times \mathbb{R} : \varphi(x) < y < \psi(x)\},$$

gdzie $\varphi, \psi \in \mathcal{C}([a,b]) \cap \mathcal{C}'^1([a,b])$ i $\varphi(x) < \psi(x)$ dla $x \in (a,b)$ [15]. Niech dalej $Q := 0$. Wtedy, na podstawie twierdzenia o całkach iterowanych, mamy:

$$\int_D \Big(\frac{\partial 0}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) = -\int_a^b \Big(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy\Big) dx = \int_a^b \big(P(x,\varphi(x)) - P(x,\psi(x))\big) dx$$
$$= \int_{[a,b] \ni t \longrightarrow (t,\varphi(t))} P dx + 0 dy + \int_{\ominus\left([a,b] \ni t \longrightarrow (t,\psi(t))\right)} P dx + 0 dy = \int_{\partial D} P dx + 0 dy.$$

(b) Jeżeli D jest normalny względem osi y, to $\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial 0}{\partial y}\right) = \int_{\partial D} 0 dx + Q dy$.

(c) *Wzór Greena zachodzi dla obszarów normalnych względem obu osi* (np. dla prostokątów, trójkątów, elips, wielokątów wypukłych itd).

(d) (Ćwiczenie) *Wzór Greena zachodzi dla obszarów, które dają się podzielić na skończoną liczbę obszarów normalnych względem obu osi* (np. dla wielokątów (mogących mieć „dziury")).

(e) (Ćwiczenie) Jeżeli dla obszaru D zachodzi wzór Greena, to $|D| = \frac{1}{2}\int_{\partial D} -y dx + x dy$. Wzór ten był podstawą budowy *planimetru*.

(f) (Ćwiczenie) Niech $D = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) : \alpha < \varphi < \beta,\ 0 \leqslant r < R(\varphi)\}$, gdzie $\beta - \alpha \leqslant 2\pi$, $R \in \mathcal{C}'^1([\alpha,\beta], \mathbb{R}_{>0})$ (por. Przykład 7.5.1(2)). Wobec (e), jeżeli dla obszaru D zachodzi wzór Greena, to $|D| = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta R^2(\varphi) d\varphi$.

Definicja 12.6.3. Aby poznać ogólniejszą klasę obszarów, dla których zachodzi wzór Greena, rozważmy następującą konstrukcję. Niech $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ będzie krzywą Jordana. Dla dowolnego podziału $\pi = (t_0, \dots, t_m)$ odcinka $[0,1]$, niech $\gamma_\pi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ oznacza łamaną wpisaną w γ wyznaczoną przez podział π, tzn. $\gamma_\pi = [\gamma(t_0), \dots, \gamma(t_m)]$.

Obserwacja 12.6.4. Niech $(\pi_k)_{k=1}^\infty \in \mathcal{NCP}([0,1])$.

(a) (Ćwiczenie) $\gamma_{\pi_k} \longrightarrow \gamma$ jednostajnie na $[0,1]$.

(b) Wobec (a), jeżeli krzywe $\gamma_{0,\pi_k}, \dots, \gamma_{N,\pi_k}$ są Jordana, to dla $k \gg 1$ spełniają one (†) dla pewnego obszaru D_{π_k}. Ponadto, jeżeli $\overline{D} \subset \Omega$, to $\overline{D}_{\pi_k} \subset \Omega$, $k \gg 1$.

(c) (Ćwiczenie*) Istnieje droga Jordana γ taka, że pewnego normalnego ciągu podziałów γ_{π_k} nie jest Jordana dla dowolnego k.

(d) Jeżeli γ jest klasy $\mathcal{C}^1$, $\gamma_j'(t) \neq 0$, $t \in [0,1]$, oraz $\gamma'(0) = \gamma'(1)$, to γ_{π_k} jest Jordana dla $k \gg 1$.

Istotnie, zauważmy, że odwzorowanie γ przedłuża się w sposób naturalny do odwzorowania $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, klasy $\mathcal{C}^1$, okresowego o okresie 1 i takiego, że $\gamma'(t) \neq 0$ dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$. Przypuśćmy, że istnieje $(\pi_k)_{k=1}^\infty \in \mathcal{NCP}([0,1])$ oraz punkty $u_k', u_k'' \in [0,1]$, $k = 1,2,\dots$, takie że $|u_k' - u_k''| < 1$ oraz $\gamma_{\pi_k}(u_k') = \gamma_{\pi_k}(u_k'')$, $k = 1,2,\dots$. Możemy założyć, że $u_k' \longrightarrow u_0'$, $u_k'' \longrightarrow u_0''$. Na podstawie (a) wnioskujemy, że $\gamma(u_0') = \gamma(u_0'')$.

Korzystając z twierdzenia o funkcji uwikłanej, widzimy, że dla dowolnego $u \in [0,1]$ istnieje ograniczony prostokąt otwarty $P_u = P_{u,x} \times P_{u,y}$ o środku w punkcie $\gamma(u)$ taki, że $\gamma^* \cap P_u$ jest wykresem (względem którejś osi) funkcji klasy $\mathcal{C}^1$. Niech dla przykładu $\gamma^* \cap P_u = \{(t,\varphi(t)) : t \in P_{u,x}\}$, gdzie $\varphi : P_{u,x} \longrightarrow P_{u,y}$ jest klasy $\mathcal{C}^1$. Weźmy dowolne prostokątne otoczenie $Q_u \subset\subset P_u$ punktu $\gamma(u)$. Zauważmy, że $\gamma_{\pi_k}^* \cap \overline{Q}_u$ musi być łukiem Jordana dla $k \geqslant k(u) \gg 1$. Dobierzmy $u_1, \dots, u_N \in [0,1]$ tak, że $\gamma^* \subset Q_{u_1} \cup \dots \cup Q_{u_N}$.

W przypadku, gdy $u_0' = u_0'' =: t_0$, niech $\gamma(t_0) \in Q_{u_{j_0}}$. Wtedy $\gamma_{\pi_k}(u_k'), \gamma_{\pi_k}(u_k'') \in Q_{u_{j_0}}$ dla $k \gg 1$, a więc $\gamma_{\pi_k}(u_k') \neq \gamma_{\pi_k}(u_k'')$ dla $k \gg 1$ — sprzeczność. W przypadku, gdy np. $u_0' = 0$, $u_0'' = 1$, wystarczy skorzystać z okresowości.

Twierdzenie 12.6.5 (Wzór Greena). *Niech $D \subset \mathbb{R}^2$ będzie obszarem spełniającym (†) i niech $(\pi_k)_{k=1}^\infty \in \mathcal{NCP}([0,1])$ będzie taki, że dla dowolnych $k \in \mathbb{N}$ i $j \in \{0,\dots,N\}$ mamy:*

- *γ_{j,π_k} jest krzywą Jordana,*

---

[14] Stosujemy tu tradycyjne oznaczenia: $\int_{\partial D} P dx + Q dy := \sum_{j=0}^N \int_{\gamma_j} P dx + Q dy$.

[15] Nie wykluczamy równości na końcach przedziału.

- *jeżeli* $\pi_k = (t_{k,0}, \dots, t_{k,m_k})$, *to* $\gamma_j|_{[t_{k,i-1},t_{k,i}]} \in \mathcal{C}^1([t_{k,i-1}, t_{k,i}])$, $i = 1, \dots, m_k$.

Wtedy wzór Greena zachodzi. W szczególności, jeżeli $\gamma_j : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *jest krzywą Jordana klasy* $\mathcal{C}^1$, $\gamma_j'(t) \neq 0$, $t \in [0,1]$, $j = 0, \dots, N$, *to wzór Greena zachodzi (Obserwacja 12.6.4*(d)*).*

W przyszłości pokażemy, że powyższe dodatkowe założenia można pominąć, a więc *wzór Greena zachodzi dla dowolnego obszaru spełniającego* (†) — zob. § 15.3.

Dowód. Niech Ω, P i Q będą jak w Definicji 12.6.1. Wobec Obserwacji 12.6.4(b), możemy założyć, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$, krzywe γ_{j,π_k}, $j = 0, \dots, N$, spełniają (†) i ograniczają pewien obszar $D_{\pi_k} \subset\subset \Omega$. Na podstawie Obserwacji 12.6.2(d), wzór Greena zachodzi dla D_{π_k}, tzn. $\int_{\partial D_{\pi_k}} P dx + Q dy = \int_{D_{\pi_k}} \big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\big)$, $k \gg 1$. Jeżeli pokażemy zbieżność do siebie odpowiednich całek gdy $k \longrightarrow +\infty$, to uzyskamy wzór Greena dla D.

Ustalmy $k \in \mathbb{N}$ i $j \in \{0, \dots, N\}$. Dla uproszczenia oznaczeń niech $V = (P, Q)$, $\pi := \pi_k = (t_0, \dots, t_m)$, $\gamma = \gamma_j$. Możemy założyć (zmniejszając Ω), że V jest odwzorowaniem ograniczonym i jednostajnie ciągłym na Ω oraz że $f := \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ jest funkcją ograniczoną na Ω. Mamy:

$$\gamma_\pi(t) := \gamma(t_{i-1}) + \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})), \quad t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Liczymy:

$$\begin{aligned}
\Big| \int_{\gamma_\pi} V dx - \int_\gamma V dx \Big| &\leqslant \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Big| \Big\langle V(\gamma_\pi(t)), \gamma_\pi'(t) \Big\rangle - \Big\langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \Big\rangle \Big| \, dt \\
&= \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Big| \Big\langle V(\gamma_\pi(t)), \frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \Big\rangle - \Big\langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \Big\rangle \Big| \, dt \\
&\leqslant \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Big| \Big\langle V(\gamma_\pi(t)), \frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) - \gamma'(t)(t_i - t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \Big\rangle \Big| \, dt \\
&\quad + \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Big| \Big\langle V(\gamma_\pi(t)) - V(\gamma(t)), \gamma'(t) \Big\rangle \Big| \, dt \\
&\leqslant \big(\sup_\Omega \|V\| \big) \omega_{\gamma'}(\operatorname{diam} \pi) + \big(\max_{\gamma^*} \|\gamma'\| \big) \omega_V(\omega_\gamma(\operatorname{diam} \pi)).
\end{aligned}$$

Wynika stąd natychmiast, że $\int_{\partial D_{\pi_k}} P dx + Q dy \longrightarrow \int_{\partial D} P dx + Q dy$.

Niech $|f| \leqslant c$ na Ω. Wtedy $\Big| \int_{D_{\pi_k}} f - \int_D f \Big| \leqslant c(|D \setminus D_{\pi_k}| + |D_{\pi_k} \setminus D|)$; zauważmy, że zbiory $D \setminus D_{\pi_k}$, $D_{\pi_k} \setminus D$ są regularne. Pozostaje udowodnić, że $|D \setminus D_{\pi_k}| + |D_{\pi_k} \setminus D| \longrightarrow 0$, gdy $k \longrightarrow +\infty$. Istotnie, niech $\varepsilon > 0$ i niech $Q_1, \dots, Q_r$ będą kwadratami takimi, że $\partial D \subset \operatorname{int} Q_1 \cup \dots \cup \operatorname{int} Q_r$ i $|Q_1| + \dots + |Q_r| \leqslant \varepsilon$ (por. dowód Twierdzenia 12.1.10). Wtedy, jeżeli $k \gg 1$, to $(D \setminus D_{\pi_k}) \cup (D_{\pi_k} \setminus D) \subset Q_1 \cup \dots \cup Q_r$, a zatem $|D \setminus D_{\pi_k}| + |D_{\pi_k} \setminus D| \leqslant |Q_1| + \dots + |Q_r| \leqslant \varepsilon$. □

Obserwacja 12.6.6. Przy pewnych szczególnych dodatkowych założeniach, wzór Greena może być wykorzystany do udowodnienia wzoru na zmianę zmiennych w całce Riemanna (Twierdzenie 12.2.7) dla $n = 2$.

Załóżmy, że $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2) : U \longrightarrow V$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^2$ zbiorów otwartych $U, V \subset \mathbb{R}^2$. Zmienne w U będziemy oznaczać (x, y), zaś w V — (u, v). Niech $P, Q \in \mathcal{C}^1(V)$, $f := \frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}$. Niech $D \subset\subset U$ będzie obszarem spełniającym (†) o gładkim brzegu klasy $\mathcal{C}^1$ (w szczególności, spełnione są założenia z Twierdzenia 12.6.5). Zauważmy, że wtedy obszar $\Phi(D)$ spełnia również (†) z tym, że orientacja $\partial\Phi(D)$ może się zmienić na przeciwną. Niech $\varepsilon := 1$, gdy orientacja się nie zmienia i $\varepsilon := -1$, gdy zmienia się na przeciwną. Obszar $\Phi(D)$ spełnia również założenia z Twierdzenia 12.6.5). Będziemy chcieli pokazać, że

$$\int_{\Phi(D)} f = \int_D (f \circ \Phi) |\Phi'|.$$

Korzystając ze woru Greena liczymy:

$$\int_{\Phi(D)} f = \int_{\Phi(D)} \Big(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \Big) = \varepsilon \int_{\partial\Phi(D)} P du + Q dv = \varepsilon \sum_{j=0}^N \int_{\Phi \circ \gamma_j} P du + Q dv$$

$$
\begin{aligned}
&= \varepsilon \sum_{j=0}^{N} \int_0^1 ((P\circ\Phi\circ\gamma_j)(\Phi_1\circ\gamma_j)' + (Q\circ\Phi\circ\gamma_j)(\Phi_2\circ\gamma_j)')dt \\
&= \varepsilon \sum_{j=0}^{N} \int_0^1 \Big((P\circ\Phi\circ\gamma_j)\Big(\Big(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\circ\gamma_j\Big)\gamma'_{j,1} + \Big(\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\circ\gamma_j\ Big)\gamma'_{j,2}\Big) \\
&\quad + (Q\circ\Phi\circ\gamma_j)\Big(\Big(\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}\circ\gamma_j\Big)\gamma'_{j,1} + \Big(\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\circ\gamma_j\Big)\gamma'_{j,2}\Big)\Big)dt \\
&= \varepsilon \int_{\partial D} \Big((P\circ\Phi)\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} + (Q\circ\Phi)\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}\Big)dx + \Big((P\circ\Phi)\frac{\partial\Phi_1}{\partial y} + (Q\circ\Phi)\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\Big)dy \\
&= \varepsilon \int_D \Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big((P\circ\Phi)\frac{\partial\Phi_1}{\partial y} + (Q\circ\Phi)\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\Big) - \frac{\partial}{\partial y}\Big((P\circ\Phi)\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} + (Q\circ\Phi)\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}\Big)\Big) \\
&\overset{\text{Ćwiczenie}}{=} \varepsilon \int_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial u}\circ\Phi - \frac{\partial P}{\partial v}\circ\Phi\Big)\Big(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}\Big) = \int_D (f\circ\Phi)|\Phi'|.
\end{aligned}
$$

12.7. Formy różniczkowe

Niech E i F będą rzeczywistymi przestrzeniami unormowanymi [16]. Niech $r\in\mathbb{N}$ i niech $\sigma\in S_r$. Z permutacją σ kojarzymy odwzorowanie $\sigma=\sigma_E : E^r \longrightarrow E^r$ dane wzorem $\sigma(x_1,\dots,x_r) := (x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(r)})$. Przypomnijmy, że odwzorowania wieloliniowe symetryczne były charakteryzowane przy pomocy relacji $L\in \mathrm{Hom}^r_s(E,F) \iff \forall_{\sigma\in S_r} : L\circ\sigma = L$.

Definicja 12.7.1. Mówimy, że odwzorowanie $L\in\mathrm{Hom}^r(E,F)$ jest *skośnie symetryczne (antysymetryczne)* ($L\in\mathrm{Hom}^r_a(E,F)$), jeżeli $\forall_{\sigma\in S_r} : L\circ\sigma = (\operatorname{sgn}\sigma)L$.

W naturalny sposób wprowadzamy przestrzeń $\mathcal{L}^r_a(E,F)$ odwzorowań r–liniowych antysymetrycznych ciągłych.

Oczywiście, $\mathrm{Hom}^1_s(E,F)=\mathrm{Hom}^1_a(E,F)=\mathrm{Hom}^1(E,F)$ oraz $\mathcal{L}^1_s(E,F)=\mathcal{L}^1_a(E,F)=\mathcal{L}^1(E,F)$.

Przyjmijmy dodatkowo $\mathrm{Hom}^0_a(E,F)=\mathcal{L}^0_a(E,F)=\mathrm{Hom}^0(E,F)=\mathcal{L}^0(E,F):=F$.

Obserwacja 12.7.2. (a) $\mathrm{Hom}^r_a(E,F)$ jest podprzestrzenią wektorową $\mathrm{Hom}^r(E,F)$.

(b) $\mathcal{L}^r_a(E,F)$ jest podprzestrzenią domkniętą w $\mathcal{L}^r(E,F)$.

(c) $\mathcal{L}^r_a(E,F)$ jest Banacha o ile F jest Banacha.

(d) Dla $L\in\mathrm{Hom}^r(E,F)$ ($r\geqslant 2$) następujące warunki są równoważne:

- (i) $L\in\mathrm{Hom}^r_a(E,F)$;
- (ii) $\forall_{x=(x_1,\dots,x_r)\in E^r}\ \forall_{j\in\{1,\dots,r-1\}} : \big(x_j=x_{j+1}\Longrightarrow L(x)=0\big)$;
- (iii) $\forall_{x=(x_1,\dots,x_r)\in E^r}\ \forall_{j,k\in\{1,\dots,r\},\ j\neq k} : \big(x_j=x_k\Longrightarrow L(x)=0\big)$.

Obserwacja 12.7.3. Załóżmy, że $n:=\dim E\in\mathbb{N}$ i niech $(e_1,\dots,e_n)$ będzie ustaloną bazą E.

(a) Dla $L\in\mathrm{Hom}^r_a(E,F)=\mathcal{L}^r_a(E,F)$ ($r\geqslant 1$) i $x_j=\sum\limits_{k=1}^{n} x_{j,k}e_k\in E$, $j=1,\dots,r$, mamy:

$$
\begin{aligned}
L(x_1,\dots,x_r) &= \sum_{k_1,\dots,k_r=1}^{n} x_{1,k_1}\cdots x_{r,k_r}L(e_{k_1},\dots,e_{k_r}) \\
&= \sum_{1\leqslant k_1<\dots<k_r\leqslant n} \Big(\sum_{\sigma\in S_r}(\operatorname{sgn}\sigma)x_{1,k_{\sigma(1)}}\dots x_{r,k_{\sigma(r)}}\Big)L(e_{k_1},\dots,e_{k_r}) = \sum_{K\in\Lambda^n_r}(\det X_{(1,\dots,r),K})L(e_K), \quad (\dagger)
\end{aligned}
$$

gdzie:

- $\Lambda^n_r := \{(k_1,\dots,k_r) : 1\leqslant k_1<\dots<k_r\leqslant n\}$,
- $X=[x_{j,k}]_{\substack{j=1,\dots,r\\ k=1,\dots,n}}\in\mathbb{M}(r\times n;\mathbb{R})$,
- $X_{J,K}\in\mathbb{M}(r\times r;\mathbb{R})$ oznacza podmacierz powstałą z X poprzez wybór wierszy o numerach $j_1,\dots,j_r$ i kolumn $k_1,\dots,k_r$,
- $e_K := (e_{k_1},\dots,e_{k_r})\in E^r$.

(b) $\mathcal{L}^r_a(E,F)=\{0\}$ dla $r>n$.

---

[16] W przyszłości najistotniejszym będzie przypadek $E=\mathbb{R}^n$, $F=\mathbb{R}$.

(c) Dla $K \in \Lambda_r^n$, niech $e_K^* : E^r \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie odwzorowaniem danym wzorem $e_K^*(x_1,\dots,x_r) := \det X_{(1,\dots,r),K}$. Z własności wyznaczników wynika natychmiast, że $e_K^* \in \mathcal{L}_a^r(E,\mathbb{R})$ oraz, że $e_K^*(e_J) = \delta_{K,J}$, $J,K \in \Lambda_r^n$. Oczywiście, dla $r=1$ mamy $e_k^*(\xi) = \xi_k$, $k=1,\dots,n$.

(d) (†) możemy zapisać w postaci $L = \sum\limits_{K\in\Lambda_r^n} L(e_K)e_K^*$, który ustala izomorfizm $\mathcal{L}_a^r(E,F) \simeq F^{\binom{n}{r}}$.

(e) W szczególności, gdy $F=\mathbb{R}$, to $\dim \mathcal{L}_a^r(E,\mathbb{R}) = \binom{n}{r}$ i $(e_K^*)_{K\in\Lambda_r^n}$ jest bazą $\mathcal{L}_a^r(E,\mathbb{R})$.

Definicja 12.7.4. Obecnie zdefiniujemy podstawową dla całej teorii operację *mnożenia zewnętrznego* odwzorowań skośnie symetrycznych $\operatorname{Hom}_a^r(E,\mathbb{R}) \times \operatorname{Hom}_a^s(E,F) \ni (u,v) \overset{\wedge}{\longmapsto} u\wedge v \in \operatorname{Hom}_a^{r+s}(E,F)$:

- jeżeli $r=s=0$, to przyjmujemy $u\wedge v := u\cdot v$;
- jeżeli $r=0$ i $s\geqslant 1$, to kładziemy $(u\wedge v)(x_1,\dots,x_s) := u\cdot v(x_1,\dots,x_s)$;
- jeżeli $r\geqslant 1$ i $s=0$, to kładziemy $(u\wedge v)(x_1,\dots,x_r) := u(x_1,\dots,x_r)\cdot v$;
- jeżeli $r,s\geqslant 1$, to kładziemy

$$(u\wedge v)(x_1,\dots,x_{r+s}) = \sum_{\sigma\in S_{r,s}} (\operatorname{sgn}\sigma) u(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(r)})\cdot v(x_{\sigma(r+1)},\dots,x_{\sigma(r+s)}), \quad x_1,\dots,x_{r+s}\in E,$$

gdzie $S_{r,s} := \{\sigma\in S_{r+s} : \sigma(1)<\dots<\sigma(r),\ \sigma(r+1)<\dots<\sigma(r+s)\}$.

Obserwacja 12.7.5. Iloczyn zewnętrzy $u\wedge v$ jest poprawnie zdefiniowany oraz $\mathcal{L}_a^r(E,\mathbb{R})\wedge\mathcal{L}_a^s(E,F) \subset \mathcal{L}_a^{r+s}(E,F)$.

Istotnie, przypadki, gdy $rs=0$ nie budzą wątpliwości. Dla $rs\neq 0$ jest widoczne, że $u\wedge v\in \operatorname{Hom}^{r+s}(E,F)$. Aby wykazać, że $u\wedge v\in \operatorname{Hom}_a^{r+s}(E,F)$ skorzystamy z Obserwacji 13.1.2(d). Ustalmy $j\in\{1,\dots,r+s-1\}$ i przypuśćmy, że $x_j = x_{j+1}$. Niech

$$\begin{aligned}
A_1 &:= \{\sigma\in S_{r,s} : \{j,j+1\}\subset\{\sigma(1),\dots,\sigma(r)\}\},\\
A_2 &:= \{\sigma\in S_{r,s} : \{j,j+1\}\subset\{\sigma(r+1),\dots,\sigma(r+s)\}\},\\
C_1 &:= \{\sigma\in S_{r,s} : j\in\{\sigma(1),\dots,\sigma(r)\},\ j+1\in\{\sigma(r+1),\dots,\sigma(r+s)\}\},\\
C_2 &:= \{\sigma\in S_{r,s} : j+1\in\{\sigma(1),\dots,\sigma(r)\},\ j\in\{\sigma(r+1),\dots,\sigma(r+s)\}\}.
\end{aligned}$$

Oczywiście, $\sum\limits_{\sigma\in A_i} (\operatorname{sgn}\sigma) u(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(r)})\cdot v(x_{\sigma(r+1)},\dots,x_{\sigma(r+s)}) = 0$, $i=1,2$. Pozostaje więc pokazać, że

$$\sum_{\sigma\in C_1} (\operatorname{sgn}\sigma) u(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(r)})\cdot v(x_{\sigma(r+1)},\dots,x_{\sigma(r+s)}) = -\sum_{\tau\in C_2} (\operatorname{sgn}\tau) u(x_{\tau(1)},\dots,x_{\tau(r)})\cdot v(x_{\tau(r+1)},\dots,x_{\tau(r+s)}).$$

Wynika to natychmiast z następującego rozumowania. Bierzemy dowolną permutację $\sigma\in C_i$. Następnie w ciągu $(\sigma(1),\dots,\sigma(n))$ zamieniamy miejscami elementy j i $j+1$. W efekcie dostajemy nową permutację $\tau\in S_{r+s}$ taką, że $\operatorname{sgn}\tau = -\operatorname{sgn}\sigma$. Pozostaje zauważyć, że $\tau\in C_{3-i}$ — Ćwiczenie. Jeżeli $k=r$, to oczywiście $\tau(1)<\dots<\tau(r)$. Jeżeli $k<r$, to problem mógłby być tylko wtedy, gdy $j+1=\sigma(k+1)$, co jest niemożliwe. Podobnie, jeżeli $\ell = r+1$, to $\tau(r+1)<\dots<\tau(r+s)$. Jeżeli $\ell > r+1$, to problem mógłby być wtedy, gdy $\sigma(\ell-1)=j$, co jest niemożliwe.

Twierdzenie 12.7.6. (a) *Operacja* $\wedge : \mathcal{L}_a^r(E,\mathbb{R})\times\mathcal{L}_a^s(E,F) \longrightarrow \mathcal{L}_a^{r+s}(E,F)$ *jest dwuliniowa i ciągła. Ponadto,* $\|\wedge\| \leqslant \frac{(r+s)!}{r!s!}$.

(b) *Jeżeli* $F=\mathbb{R}$, *to* $u\wedge v = (-1)^{rs} v\wedge u$, $\quad u\in\mathcal{L}_a^r(E,\mathbb{R}),\ v\in\mathcal{L}_a^s(E,\mathbb{R})$.

(c) *Jeżeli* $F=\mathbb{R}$, *to* $(u\wedge v)\wedge w = u\wedge(v\wedge w)$, $\quad u\in\mathcal{L}_a^r(E,\mathbb{R}),\ v\in\mathcal{L}_a^s(E,\mathbb{R}),\ w\in\mathcal{L}_a^t(E,\mathbb{R})$.

(d) *Operacja* $(\mathcal{L}(E,\mathbb{R}))^r \ni (u_1,\dots,u_r)\longmapsto u_1\wedge\dots\wedge u_r\in\mathcal{L}_a^r(E,\mathbb{R})$ *jest* r*–liniowa i skośnie symetryczna.*

(e) $(u_1\wedge\dots\wedge u_r)(x_1,\dots,x_r) = \det([u_k(x_j)]_{j,k=1,\dots,r})$, $u_k\in\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$, $x_j\in E$, $j,k=1,\dots,r$.

(f) $e_K^* = e_{k_1}^*\wedge\dots\wedge e_{k_r}^*$, $K=(k_1,\dots,k_r)\in\Lambda_r^n$.

Dowód. (a) Przypadki $rs=0$ są oczywiste. Jeżeli $rs\neq 0$, to

$$\|(u\wedge v)(x_1,\dots,x_{r+s})\| \leqslant \sum_{\sigma\in S_{r,s}} \|u(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(r)})\|\|v(x_{\sigma(r+1)},\dots,x_{\sigma(r+s)})\|$$

---

(16) Odnotujmy, że $\#S_{r,s} = \frac{(r+s)!}{r!s!}$.

$$\leqslant \sum_{\sigma\in S_{r,s}} \|u\|\|x_{\sigma(1)}\|\dots\|x_{\sigma(r)}\|\|v\|\|x_{\sigma(r+1)}\|\dots\|x_{\sigma(r+s)}\| = \binom{r+s}{r}\|u\|\|v\|\|x_1\|\dots\|x_{r+s}\|.$$

(b) Przypadki $rs=0$ są oczywiste. Jeżeli $rs\neq 0$, to niech $\tau=(r+1,\dots,r+s,1,\dots,r)\in S_{r+s}$. Zauważmy, że $\operatorname{sgn}\tau=(-1)^{rs}$ oraz $\sigma\in S_{r,s}\iff\sigma\circ\tau\in S_{s,r}$. Stąd:

$$(v\wedge u)(x_1,\dots,x_{r+s}) = \sum_{\sigma\in S_{r,s}} (\operatorname{sgn}(\sigma\circ\tau))v(x_{\sigma(r+1)},\dots,x_{\sigma(r+s)})\cdot u(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(r)})$$
$$= (\operatorname{sgn}\tau)(u\wedge v)(x_1,\dots,x_{r+s}).$$

(c) Wystarczy pokazać (Ćwiczenie), że obie strony są równe

$$\sum_{\sigma\in S_{r,s,t}} (\operatorname{sgn}\sigma)u(x_1,\dots,x_r)v(x_{r+1},\dots,x_{r+s})w(x_{r+s+1},\dots,x_{r+s+t}),\ \text{gdzie}$$
$$S_{r,s,t} := \{\sigma\in S_{r+s+t} : \sigma(1)<\dots<\sigma(r),\ \sigma(r+1)<\dots<\sigma(r+s),\ \sigma(r+s+1)<\dots<\sigma(r+s+t)\},$$

(d) r–liniowość jest oczywista. Wobec (b), jeżeli $u_j=u_{j+1}$, to:

$$u_1\wedge\dots\wedge u_r = u_1\wedge\dots\wedge u_{j-1}\wedge u_{j+1}\wedge u_j\wedge u_{j+2}\wedge\dots\wedge u_r$$
$$= u_1\wedge\dots\wedge u_{j-1}\wedge(-1)^{1\cdot 1}u_j\wedge u_{j+1}\wedge u_{j+2}\wedge\dots\wedge u_r = -(u_1\wedge\dots\wedge u_r).$$

(e) Indukcja względem r. Przypadek $r=1$ jest trywialny. Załóżmy, że wynik zachodzi dla $r-1$. Zauważmy, że $S_{r-1,1}=\{(1,\dots,i-1,i+1,\dots,r,i)\in S_r : i=1,\dots,r\}$. Niech $X=[u_k(x_j)]_{j,k=1,\dots,r}$. Wtedy

$$(u_1\wedge\dots\wedge u_r)(x_1,\dots,x_r) = \sum_{i=1}^{r}(-1)^{r-i}(u_1\wedge\dots\wedge u_{r-1})(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_r)u_r(x_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{r}(-1)^{i+r}u_r(x_i)(\det X_{(1,\dots,i-1,i+1,\dots,r),(1,\dots,r-1)}) = \det X$$

na podstawie rozwinięcia Laplace'a (względem ostatniej kolumny).

(f) wynika z (e). □

Definicja 12.7.7. Niech $\Omega\in\operatorname{top}\mathbb{R}^n$ i niech F będzie przestrzenią unormowaną. *Formą różniczkową rzędu r na Ω o wartościach w F* nazywamy dowolne odwzorowanie $u:\Omega\longrightarrow\mathcal{L}^r_a(\mathbb{R}^n,F)$. Zbiór wszystkich takich form różniczkowych oznaczamy przez $\mathcal{F}_{(r)}(\Omega,F)$. Odnotujmy, że $\mathcal{F}_{(0)}(\Omega,F)$ to po prostu zbiór wszystkich funkcji $u:\Omega\longrightarrow F$. Jak zwykle, $\mathcal{F}_{(r)}(\Omega):=\mathcal{F}_{(r)}(\Omega,\mathbb{R})$.

W oczywisty sposób $\mathcal{F}_{(r)}(\Omega,F)$ ma strukturę przestrzeni wektorowej. Oczywiście $\mathcal{F}_{(r)}(\Omega,F)=\{0\}$ dla $r>n$. Mamy ponadto określone *mnożenie zewnętrzne form*:

$$\wedge:\mathcal{F}_{(r)}(\Omega)\times\mathcal{F}_{(s)}(\Omega,F)\longrightarrow\mathcal{F}_{(r+s)}(\Omega,F),\quad (u\wedge v)(x):=u(x)\wedge v(x),\ x\in\Omega.$$

Odnotujmy, że jeżeli $f:\Omega\longrightarrow F$ jest odwzorowaniem różniczkowalnym (w każdym punkcie), to $df:=f'\in\mathcal{F}_{(1)}(\Omega,F)$.

Dla $k\in\mathbb{N}$ niech $\mathcal{F}^k_{(r)}(\Omega,F):=\mathcal{D}^k(\Omega,\mathcal{L}^r_a(E,F))$, $\mathcal{C}^k_{(r)}(\Omega,F):=\mathcal{C}^k(\Omega,\mathcal{L}^r_a(E,F))$. Widać, że definicje te są zgodne dla $r=0$, tzn. $\mathcal{F}^k_{(0)}(\Omega,F):=\mathcal{D}^k(\Omega,F)$ i $\mathcal{C}^k_{(0)}(\Omega,F)=\mathcal{C}^k(\Omega,F)$. Jak zwykle, $\mathcal{F}'_{(r)}(\Omega,F):=\mathcal{F}^1_{(r)}(\Omega,F)$, $\mathcal{F}''_{(r)}(\Omega,F):=\mathcal{F}^2_{(r)}(\Omega,F)$.

Obserwacja 12.7.8. (a) Niech $e_1,\dots,e_n$ oznacza bazę kanoniczną $\mathbb{R}^n$. Każdą formę $u\in\mathcal{F}_{(r)}(\Omega,F)$ możemy przedstawić w *postaci kanonicznej*

$$u(x)=\sum_{I\in\Lambda^n_r}u(x)(e_I)e^*_I =: \sum_{I\in\Lambda^n_r}u_I(x)dx_I,$$

gdzie dla $I=(i_1,\dots,i_r)$ mamy $dx_I=dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_r}$, $dx_i=d(\mathrm{pr}_i)=e^*_i$. Będziemy również stosować zapis $u(x)=\sum'_{|I|=r}u_I(x)dx_I$ lub nawet $u(x)=\sum'_I u_I(x)dx_I$.

W tym sensie formę u można utożsamiać z rodziną „zwykłych" funkcji $(u_I)_{I\in\Lambda^n_r}$. W szczególności, dla $r=n$, formę $u=u_{(1,\dots,n)}dx_1\wedge\dots\wedge dx_n$ możemy utożsamiać z jedną funkcją $u_{(1,\dots,n)}$.

(b) Dla dowolnego $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ mamy:

$$u \in \mathcal{F}^k_{(r)}(\Omega, F) \iff \forall_{I\in\Lambda^n_r} : u_I \in \mathcal{D}^k(\Omega, F), \quad u \in \mathcal{C}^k_{(r)}(\Omega, F) \iff \forall_{I\in\Lambda^n_r} : u_I \in \mathcal{C}^k(\Omega, F).$$

(c) Jeżeli $f \in \mathcal{D}(\Omega, F)$, to postać kanoniczna df wygląda następująco $df = \sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$. W szczególności, jeżeli $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$, to $df_1 \wedge \dots \wedge df_r = \sum\limits_{I\in\Lambda^n_r} \frac{\partial(f_1,\dots,f_r)}{\partial(x_{i_1},\dots,x_{i_r})} dx_I$.

Następujące pojęcie *różniczki zewnętrznej* jest centralnym punktem całej teorii form różniczkowych.

Definicja 12.7.9. Określimy operator $d : \mathcal{F}'_{(r)}(\Omega, F) \longrightarrow \mathcal{F}_{(r+1)}(\Omega, F)$.

- Dla $r = 0$ będzie to zwykły operator różniczkowania zdefiniowany poprzednio.
- Dla $r \geqslant 1$ i $u \in \mathcal{F}'_{(r)}(\Omega, F)$ bierzemy postać kanoniczną $u = \sum\limits_{I\in\Lambda^n_r} u_I dx_I$ i definiujemy

$$du = \sum_{I\in\Lambda^n_r} du_I \wedge dx_I = \sum_{J\in\Lambda^n_{r+1}} \Big(\sum_{(I,i)\in S(J)} \varepsilon(I,i) \frac{\partial u_I}{\partial x_i} \Big) dx_J, \text{ gdzie}$$

$$S(J) := \{(I,i) \in \Lambda^n_r \times \{1,\dots,n\} : \exists_{\varepsilon=\varepsilon(I,i)\in\{-1,+1\}} : dx_i \wedge dx_I = \varepsilon dx_J\}.$$

Formalnie rzecz biorąc, powinniśmy pisać d_r. Zauważmy, że dla $r = n$ mamy zawsze $du = 0$.

Twierdzenie 12.7.10. (a) *Operator $d : \mathcal{F}'_{(r)}(\Omega, F) \longrightarrow \mathcal{F}_{(r+1)}(\Omega, F)$ jest liniowy.*

Ponadto, $d(\mathcal{F}^k_{(r)}(\Omega, F)) \subset \mathcal{F}^{k-1}_{(r+1)}(\Omega, F)$ oraz $d(\mathcal{C}^k_{(r)}(\Omega, F)) \subset \mathcal{C}^{k-1}_{(r+1)}(\Omega, F)$, $k \geqslant 1$.

(b) *Jeżeli $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, F)$, to $d(\varphi dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}) = (d\varphi) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$ dla dowolnych $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\}$.*

(c) *Jeżeli $u \in \mathcal{F}''_{(r)}(\Omega, F)$ (np. $u \in \mathcal{C}^2_{(r)}(\Omega, F)$), to $d^2u = (d \circ d)u = 0$.*

(d) *Dla $u \in \mathcal{F}'_{(r)}(\Omega)$ i $v \in \mathcal{F}'_{(s)}(\Omega, F)$ mamy $d(u \wedge v) = (du) \wedge v + (-1)^r u \wedge (dv)$.*

Dowód. (a) jest oczywiste.

(b) Jeżeli $i_\mu = i_\nu$ dla pewnych $\mu \neq \nu$, to obie strony są zero. W przeciwnym przypadku, najpierw porządkujemy $(i_1, \dots, i_r)$ do ciągu rosnącego (co powoduje pomnożenie obu stron przez pewną liczbę $\varepsilon \in \{-1, +1\}$).

(c) Wobec (a) wystarczy rozważyć przypadek, gdy $u = \varphi dx_I$, gdzie $\varphi \in \mathcal{D}''(U, \Omega)$, zaś $I \in \Lambda^n_r$. Korzystając z (b) oraz z symetrii drugich pochodnych cząstkowych mamy:

$$\begin{aligned} d^2u &= d\Big(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I \Big) = \sum_{i=1}^n d\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \Big) \wedge dx_i \wedge dx_I \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i \wedge dx_I = \sum_{i<j} \Big(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \Big) dx_j \wedge dx_i \wedge dx_I = 0. \end{aligned}$$

(d) Wystarczy rozważyć przypadek, gdy $u = \varphi dx_I$, $v = \psi dx_J$. Mamy:

$$\begin{aligned} d(u \wedge v) &= d(\varphi\psi dx_I \wedge dx_J) = d(\varphi\psi) \wedge dx_I \wedge dx_J = ((d\varphi)\psi) + \varphi(d\psi)) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= ((d\varphi) \wedge dx_I) \wedge (\psi dx_J) + (-1)^r (\varphi dx_I) \wedge ((d\psi) \wedge dx_J) = (du) \wedge v + (-1)^r u \wedge (dv). \end{aligned}$$

□

Przykład 12.7.11. (a) Jeżeli $V = \sum\limits_{k=1}^n V_k dx_k \in \mathcal{F}'_{(1)}(\Omega, F)$, to $dV = \sum\limits_{j<k} \big(\frac{\partial V_k}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_k} \big) dx_j \wedge dx_k$. W szczególności, dla $n = 2$ mamy $d(Pdx + Qdy) = \big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \big) dx \wedge dy$.

(b) Jeżeli $u = \sum\limits_{j=1}^n (-1)^{j-1} u_j dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \dots \wedge dx_n \in \mathcal{F}'_{(n-1)}(\Omega, F)$, to wtedy $du = \big(\sum\limits_{j=1}^n \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \big) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$.

Ciąg dalszy podrozdziale 15.1.