Sprawy organizacyjne

Literatura

Wykład będzie w zasadzie „samowystarczalny". Oto kilka pozycji przydatnej literatury uzupełniającej (wszystkie pozycje zostały wydane przez PWN, z wyjątkiem książek H. Cartana i H. Federera):

Andrzej Birkholc, *Analiza matematyczna.*
Henri Cartan, *Calcul différentiel. Formes différentielles*, Herman, Paris.
Ryszard Engelking, *Topologia ogólna.*
Herbert Federer, *Geometric measure theory*, Springer Verlag, Berlin.
Grigorij Michajłowicz Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. I–III.
Franciszek Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy.*
Witold Kołodziej, *Analiza matematyczna.*
Kazimierz Kuratowski, *Rachunek różniczkowy i całkowy.*
Stanisław Łojasiewicz, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych.*
Krzysztof Maurin, *Analiza*, t. I–II.
Walter Rudin, *Podstawy analizy matematycznej.*
Walter Rudin, *Analiza rzeczywista i zespolona.*
Laurent Schwartz, *Kurs analizy matematycznej*, t. I–II.

Program wykładu

(1) Przestrzenie metryczne II.
(2) Odwzorowania liniowe.
(3) Odwzorowania dwuliniowe.
(4) Rodziny sumowalne II.
(5) Operator odwracania w algebrach Banacha.
(6) Różniczkowanie odwzorowań zmiennej rzeczywistej.
(7) Pochodne kierunkowe.
(8) Różniczkowanie odwzorowań zmiennej wektorowej.
(9) Druga pochodna.
(10) Przestrzenie unormowane III.
(11) Pochodne wyższych rzędów.
(12) Wzór Taylora.
(13) Szereg Taylora.
(14) Ekstrema lokalne.
(15) Twierdzenie o odwzorowaniu odwrotnym i twierdzenie o odwzorowaniu uwikłanym.
(16) Odwzorowania analityczne.
(17) Twierdzenie o rzędzie.
(18) Podrozmaitości.
(19) Ekstrema warunkowe.
(20) Orientacja.
(21) Całka Riemanna na kostce.
(22) Całka Riemanna na zbiorze regularnym.
(23) Własności całki Riemanna.
(24) Twierdzenie Morse'a.

(25) Całki krzywoliniowe.
(26) Wzór Greena.

Kontynuacje

W przyszłym semestrze będą wykłady z Analizy Matematycznej 4 (60 godzin).

Zaliczanie ćwiczeń

W semestrze jest 60 godz. ćwiczeń. Limit nieobecności to 20 godzin, w tym limit nieobecności nieusprawiedliwionych to 8 godzin.

W przypadku przekroczenia któregokolwiek z tych limitów student otrzymuje ocenę NZAL i nie jest dopuszczony do egzaminów.

Egzaminy

Student, który uzyskał z zaliczenia ocenę $\geqslant 4,5$ nie musi zdawać egzaminu pisemnego i otrzymuje z egzaminu pisemnego ocenę równą ocenie z zaliczenia, z tym że student, który ma 4,5 może z własnej woli pisać egzamin pisemny, aby poprawić sobie ocenę na 5,0.

Terminy egzaminów pisemnych:

- 29.01.2019 (wtorek), godz. 9:00–11:00, sala 1094; termin główny.
- 18.02.2019 (poniedziałek), godz. 9:00–11:00, sala 1094; termin poprawkowy.

Egzamin będzie się składać z 5 zadań i będzie oceniany w skali 0–50 punktów. Nie będzie zadań „teoretycznych".

Egzamin 18.02.2019 jest dla osób dopuszczonych do zdawania, które bądź nie zdały egzaminu w głównym terminie, bądź z jakiegoś powodu do niego nie przystąpiły w głównym terminie.

— Studenci, którzy uzyskają $\geqslant 26$ pkt i mieli zaliczenie na ocenę $\geqslant 3,0$ otrzymują ocenę z egzaminu pisemnego według następującej tabeli:

Punkty	Ocena
26–32	3,0
33–37	3,5
38–42	4,0
43–46	4,5
47–50	5,0

— Studenci, którzy uzyskają $\geqslant 34$ pkt i mieli zaliczenie na ocenę 2,0 otrzymują ocenę z egzaminu pisemnego według następującej tabeli:

Punkty	Ocena
34–41	3,0
42–46	3,5
47–50	4,0

— Pozostali piszący egzamin otrzymują ocenę końcową 2,0.

— **Wszyscy studenci zdają egzamin ustny** (szczegóły zostaną podane na wykładzie).

ROZDZIAŁ 9

Uzupełnienia

9.1. Przestrzenie metryczne II

Przypomnimy i uzupełnimy naszą wiedzę w zakresie przestrzeni metrycznych. Poniżej $(X, \varrho), (Y, d)$ itd. oznaczają przestrzenie metryczne. Szczegóły pozostawiamy jako Ćwiczenie.

Definicja 9.1.1. Zbiór $A \subset X$ nazywamy *nigdziegęstym*, jeżeli $\operatorname{int} \overline{A} = \varnothing$ (równoważnie: zbiór $X \setminus \overline{A}$ jest gęsty). Zbiory postaci $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, gdzie każdy zbiór A_n jest nigdziegęsty, nazywamy *zbiorami I kategorii Baire'a*. Zbiory niebędące zbiorami I kategorii Baire'a noszą nazwę *zbiorów II kategorii Baire'a*.

9.1.2 (Twierdzenie Baire'a)**.** *Niech $X \neq \varnothing$ będzie przestrzenią zupełną. Każde z poniższych równoważnych sformułowań jest nazywane* twierdzeniem Baire'a.

(i) *Jeżeli $\Omega_n \subset X$ jest zbiorem otwartym i gęstym w X, $n \in \mathbb{N}$, to zbiór $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$ jest gęsty w X.*

(ii) *Jeżeli $A \subset X$ jest zbiorem I kategorii Baire'a, to $\operatorname{int} A = \varnothing$, w szczególności, $A \subsetneq X$.*

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Niech $A_n := X \setminus \Omega_n$. Wtedy A_n jest domknięty oraz $\operatorname{int} A_n = \varnothing$, $n \in \mathbb{N}$. Wobec (ii) mamy $\varnothing = \operatorname{int} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \operatorname{int}(X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n)$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Niech $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, przy czym $\operatorname{int} \overline{A}_n = \varnothing$, $n \in \mathbb{N}$. Niech $\Omega_n := X \setminus \overline{A}_n$. Wtedy Ω_n jest zbiorem otwartym i gęstym w X, $n \in \mathbb{N}$. Wobec (i) mamy $\varnothing = \operatorname{int}(X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n) = \operatorname{int} \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n \supset \operatorname{int} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \operatorname{int} A$.

Definicja 9.1.3. Funkcja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ jest *I klasy Baire'a*, jeżeli istnieje ciąg $(f_s)_{s=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}(X)$ taki, że $f_s \longrightarrow f$ punktowo na X. Powiemy, że funkcja f jest *n–tej klasy Baire'a*, jeżeli istnieje ciąg $(f_s)_{s=1}^{\infty}$ funkcji $(n-1)$–szej klasy Baire'a taki, że $f_s \longrightarrow f$ punktowo na X.

9.1.4 (Punkty nieciągłości funkcji I klasy Baire'a)**.** *Niech (X, ϱ) będzie przestrzenią zupełną i niech $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie I-klasy Baire'a. Oznaczmy przez $N(f)$ zbiór punktów nieciągłości f. Wtedy $N(f)$ jest zbiorem I kategorii Baire'a.*

Dowód. Niech $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$, gdzie $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}(X)$. Zdefiniujmy

$$A_{k,\ell} := \{x \in X : \forall_{n \geqslant \ell} : \ |f_n(x) - f_\ell(x)| \leqslant 1/k\}, \quad k, \ell \in \mathbb{N}.$$

Zbiór $A_{k,\ell}$ jest domknięty, zbiór $F_{k,\ell} := A_{k,\ell} \setminus \operatorname{int} A_{k,\ell}$ jest domknięty i nigdziegęsty. Wystarczy więc pokazać, że $N(f) \subset \bigcup_{k,\ell\in\mathbb{N}} F_{k,\ell}$. Ustalmy punkt $x_0 \in N(f)$. Ponieważ $(f_n(x_0))_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego, zatem dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ istnieje $\ell(k)$ takie, że $x_0 \in A_{k,\ell(k)}$. Gdyby $x_0 \in \operatorname{int} A_{k,\ell(k)}$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$, wtedy, dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$, istniałoby $r_k > 0$ takie, że $B(x_0, r_k) \subset A_{k,\ell(k)}$. Oznacza to, że $|f_n(x) - f_{\ell(k)}(x)| \leqslant 1/k$ dla $x \in B(x_0, r_k)$ i $n \geqslant \ell(k)$. W szczególności, $|f(x) - f_{\ell(k)}(x)| \leqslant 1/k$ dla $x \in B(x_0, r_k)$. Dla $x \in B(x_0, r_k)$ mamy więc

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leqslant |f(x) - f_{\ell(k)}(x)| + |f_{\ell(k)}(x) - f_{\ell(k)}(x_0)| + |f_{\ell(k)}(x_0) - f(x_0)| \\ &\leqslant 2/k + |f_{\ell(k)}(x) - f_{\ell(k)}(x_0)|, \end{aligned}$$

co, wobec ciągłości $f_{\ell(k)}$, dawałoby ciągłość funkcji f w punkcie x_0. Tak więc $x_0 \in F_{k,\ell(k)}$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Definicja 9.1.5. Funkcję $f : X \times Y \longrightarrow Z$ nazywamy *oddzielnie ciągłą*, jeżeli:
- $f(x, \cdot) \in \mathcal{C}(Y, Z)$ dla dowolnego $x \in X$,
- $f(\cdot, y) \in \mathcal{C}(X, Z)$ dla dowolnego $y \in Y$.

Ćwiczenie 9.1.6. Udowodnić, że funkcja $f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{jeżeli } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{jeżeli } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ jest oddzielnie ciągła, ale nie jest ciągła.

9.1.7 (Funkcje oddzielnie ciągłe)**.** *Dla dowolnej oddzielnie ciągłej funkcji $f : \mathbb{R} \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ istnieje ciąg $(f_s)_{s=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}(\mathbb{R} \times Y)$ taki, że $f_s \longrightarrow f$, tzn. dowolna funkcja oddzielnie ciągła $f : \mathbb{R} \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ jest I klasy Baire'a. W szczególności, zbiór $N(f)$ jest I kategorii Baire'a.*

Dowód.
$$f_n(x, y) := \Big(\frac{\frac{k+1}{n} - x}{\frac{1}{n}}\Big) f(\tfrac{k}{n}, y) + \Big(\frac{x - \frac{k}{n}}{\frac{1}{n}}\Big) f(\tfrac{k+1}{n}, y), \quad \tfrac{k}{n} \leqslant x \leqslant \tfrac{k+1}{n},\ y \in Y,\ k \in \mathbb{Z}$$
(dla dowolnego $y \in Y$, $f_n(\cdot, y)$ jest funkcją afiniczną na każdym przedziale $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$). Jest rzeczą widoczną, że funkcja f_n jest ciągła (bo jest ciągła na każdym „pasie" $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}] \times Y$). Ponadto,
$$\begin{aligned} |f_n(x, y) - f(x, y)| &= \Big| \Big(\frac{\frac{k+1}{n} - x}{\frac{1}{n}}\Big)\Big(f(\tfrac{k}{n}, y) - f(x, y)\Big) + \Big(\frac{x - \frac{k}{n}}{\frac{1}{n}}\Big)\Big(f(\tfrac{k+1}{n}, y) - f(x, y)\Big)\Big| \\ &\leqslant \max\{|f(\tfrac{k}{n}, y) - f(x, y)|,\ |f(\tfrac{k+1}{n}, y) - f(x, y)|\}, \quad \tfrac{k}{n} \leqslant x \leqslant \tfrac{k+1}{n},\ y \in Y,\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$
Teraz dla ustalonego punktu $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times Y$ oraz $\varepsilon > 0$, dobierzmy $\delta > 0$ takie, że $|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| \leqslant \varepsilon$ dla $|x - x_0| \leqslant \delta$. Niech $n \geqslant 1/\delta$ i niech $\frac{k}{n} \leqslant x_0 \leqslant \frac{k+1}{n}$. Wtedy z poprzedniego oszacowania dostajemy $|f_n(x_0, y_0) - f(x_0, y_0)| \leqslant \varepsilon$, co dowodzi, że $f_n \longrightarrow f$ punktowo. $\square$

Pojawia się naturalne pytanie czy dowolna funkcja oddzielnie ciągła $f : \mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_k} \longrightarrow \mathbb{R}$ (tzn. $f(x_1, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_k) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^{n_j})$ dla dowolnych $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \dots, x_k \in \mathbb{R}^{n_k}$ i $j \in \{1, \dots, k\}$) jest I klasy Baire'a ? Prawdziwy jest następujący wynik:

9.1.8. *Niech $f : \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{\ell \times} \times \mathbb{R}^{n-\ell} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją oddzielnie ciągłą ($\ell \geqslant 2$). Wtedy f jest ℓ–tej klasy Baire'a.*

Dowód. Dla dowolnej funkcji $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$, zdefiniujmy ciąg $(g_s)_{s=1}^{\infty}$ tak, jak w (9.1.7):
$$g_s(x, y) := \Big(\frac{\frac{k+1}{n} - x}{\frac{1}{n}}\Big) g(\tfrac{k}{n}, y) + \Big(\frac{x - \frac{k}{n}}{\frac{1}{n}}\Big) g(\tfrac{k+1}{n}, y), \quad \tfrac{k}{n} \leqslant x \leqslant \tfrac{k+1}{n},\ y \in \mathbb{R}^{n-1},\ k \in \mathbb{Z}.$$
Zauważmy, że:

(a) jeżeli funkcja $g(\cdot, y)$ jest ciągła dla dowolnego $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, to $g_s \longrightarrow g$ punktowo,

(b) jeżeli $\mathbb{R}^{n-1} = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r$ ($p, q, r \in \mathbb{N}_0$), $y = (u, v, w)$, oraz funkcja $g(x, (u, \cdot, w))$ jest ciągła dla dowolnych $(x, u, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^r$, to każda z funkcji $g_s(\cdot, (u, \cdot, w))$ jest ciągła dla dowolnych $(u, w) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^r$.

Teraz postępujemy następująco:
- Stosujemy powyższą konstrukcję do $g := f$. Wobec (a), do zakończenia dowodu wystarczy pokazać, że każda z funkcji $f_s^1 := g_s$ jest $(\ell-1)$–szej klasy Baire'a. Na podstawie (b), wiemy, że każda funkcja $f_s^1(\cdot, x_2, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_\ell, x_{\ell+1})$ jest ciągła dla dowolnych $(x_2, \dots, x_\ell, x_{\ell+1}) \in \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{(\ell-1)\times} \times \mathbb{R}^{n-\ell}$, $j = 2, \dots, \ell + 1$.
- Powtarzamy konstrukcję dla $g := f_s^1$ względem zmiennej x_2. Dostajemy kolejny ciąg aproksymujący $(f_s^2)_{s=1}^{\infty}$ taki, że każda funkcja $f_s^2(\cdot, \cdot, x_3, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_\ell, x_{\ell+1})$ jest ciągła dla dowolnych $(x_3, \dots, x_\ell, x_{\ell+1}) \in \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{(\ell-2)\times} \times \mathbb{R}^{n-\ell}$, $j = 3, \dots, \ell + 1$.
- Powtarzamy powyższe rozumowanie ℓ razy. $\square$

Okazuje się, że dla $\ell \geqslant 2$ wynik ten nie może być poprawiony, tzn. istnieją przykłady oddzielnie ciągłych funkcji f, które nie są $(\ell - 1)$–szej klasy Baire'a — zob. np. [Leb 1905].

9.1.9 (Rozkład jedności)**.** Niech X będzie *lokalnie zwartą* przestrzenią Hausdorffa, tzn. każdy punkt $x \in X$ ma otoczenie U takie, że $\overline{U}$ jest przestrzenią zwartą. Każda przestrzeń lokalnie zwarta jest $\mathbb{T}_{3\frac{1}{2}}$.Wtedy dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset X$ i dla dowolnego jego pokrycia otwartego $U_1, \dots, U_N$ istnieją funkcje $f_j \in \mathcal{C}_0(U_j, [0, 1])$, $j = 1, \dots, N$, takie, że $f_1 + \cdots + f_N \leqslant 1$ na X oraz $f_1 + \cdots + f_N = 1$ na otwartym otoczeniu K.

Dowód. Krok 1^o. Dla dowolnych dwóch zbiorów domkniętych i rozłącznych $A, B \subset X$ istnieje funkcja $f \in \mathcal{C}(X, [0,1])$ taka, że $f = 1$ and A i $f = 0$ na B (np. $f(x) = \frac{\varrho(x,B)}{\varrho(x,A)+\varrho(x,B)}$, gdy dodatkowo założymy, że X jest przestrzenią metryczną).

Krok 2^o. Dla dowolnego $a \in X$ oraz dla dowolnego jego otoczenia otwartego U istnieje otoczenie otwarte V punktu a takie, że $\overline{V} \subset U$ oraz $\overline{V}$ jest zbiorem zwartym.

Istotnie, dowód sprowadza się do znalezienia otoczenia V takiego, że $\overline{V} \subset U$. Stosujemy Krok 1^o do $A := \{a\}$ i $B := X \setminus U$. Niech $f \in \mathcal{C}(X, [0,1])$ będzie taka, że $f(a) = 1$ i $f = 0$ na B. Zdefiniujmy $V := \{x \in X : f(x) > \frac{1}{2}\}$. Wtedy $\overline{V} \subset \{x \in X : f(x) \geqslant \frac{1}{2}\} \subset X \setminus B = U$.

Krok 3^o. Dla dowolnego zbioru zwartego i jego otoczenia otwartego U istnieje zbiór otwarty V taki, że $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$ i $\overline{V}$ jest zbiorem zwartym.

Istotnie, dla dowolnego $a \in K$ dobieramy na podstawie Kroku 2^o otoczenie otwarte V_a takie, że $\overline{V}_a \subset U$ i $\overline{V}_a$ jest zbiorem zwartym. Wobec zwartości K istnieje skończona liczba punktów $a_1, \dots, a_k \in K$ takich, że $K \subset V_{a_1} \cup \dots \cup V_{a_k} =: V$.

Krok 4^o. Dla dowolnego otoczenia U zbioru zwartego K istnieje funkcja $f \in \mathcal{C}_0(U, [0,1])$ taka, że $f = 1$ na K.

Istotnie, na podstawie Kroku 3^o istnieje zbiór otwarty V taki, że $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$ i $\overline{V}$ jest zbiorem zwartym. Teraz stosujemy Krok 1^o do $A := K$ i $B := X \setminus V$.

Krok 5^o. Dla dowolnego $x \in K$ ustalmy $j(x) \in \{1, \dots, N\}$ tak, że $x \in U_{j(x)}$ i niech V_x będzie relatywnie zwartym otoczeniem punktu x takim, że $\overline{V}_x \subset U_{j(x)}$ Wobec zwartości K istnieje skończona liczba punktów $x_1, \dots, x_k \in K$ takich, że $K \subset V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_k} =: V$. Niech

$$L_j := \bigcup_{i \in \{1,\dots,k\} :\, j(x_i) = j} \overline{V}_{x_i}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Na podstawie Kroku 4^o istnieją funkcje $g_j \in \mathcal{C}_0(U_j, [0,1])$, $g_j = 1$ na L_j, $j = 1, \dots, N$. Zdefiniujmy

$$f_1 := g_1, \quad f_2 := (1 - g_1)g_2, \dots, f_N := (1 - g_1)\dots(1 - g_{N-1})g_N.$$

Oczywiście $f_j \in \mathcal{C}_0(U_j, [0,1])$, $j = 1, \dots, N$. Ponadto, $f_1 + \dots + f_N = 1 - (1 - g_1)\dots(1 - g_N)$, a stąd $f_1 + \dots + f_N = 1$ na V. $\square$

9.2. Odwzorowania liniowe

Poniżej E, F oznaczają przestrzenie unormowane nad $\mathbb{K}$.

Definicja 9.2.1. Mówimy, że normy $\| \|_1, \| \|_2 : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ są *równoważne*, jeżeli $\varrho_{\| \|_1} \sim \varrho_{\| \|_2}$ (1). Piszemy wtedy $\| \|_1 \sim \| \|_2$.

Dla dowolnych $x_0, \dots, x_N \in E$ definiujemy *łamaną* o wierzchołkach $x_0, \dots, x_N$

$$[x_0, \dots, x_N] := [x_0, x_1] \cup \dots \cup [x_{N-1}, x_N].$$

Zauważmy, że każda łamana jest zbiorem spójnym. Łamaną $[x_0, \dots, x_N]$ możemy utożsamiać z krzywą będącą sumą odcinków.

Obserwacja 9.2.2. Dla dowolnego zbioru otwartego $D \subset E$ mamy równoważność:

D jest *obszarem* (tzn. zbiorem otwartym i spójnym) wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $x, y \in D$ istnieje łamana $[x_0, \dots, x_N] \subset D$ taka, że $x_0 = x$ i $x_N = y$ (w szczególności, D jest łukowo spójny).

Istotnie, dowodu wymaga jedynie implikacja ($\Longrightarrow$). Ustalmy $x_0 \in D$ i niech D_0 oznacza zbiór tych wszystkich $x \in D$, dla których istnieje łamana $[x_0, \dots, x_N] \subset D$ taka, że $x_N = x$. Problem polega na pokazaniu, że $D_0 = D$ o ile D jest obszarem. Wystarczy pokazać, że D_0 jest niepusty, otwarty i domknięty w D. Oczywiście $D_0 \neq \varnothing$, bo $x_0 \in D_0$.

Jeżeli $a \in D_0$ i $B(a, r) \subset D$ (D jest otwarty), to $B(a, r) \subset D_0$, bo jeżeli $[x_0, \dots, x_N]$ „dochodzi” do a, to $[x_0, \dots, x_N, x]$ dochodzi do x dla dowolnego $x \in B(a, r)$.

Jeżeli b jest punktem skupienia D_0 w D i $B(b, r) \subset D$, to bierzemy dowolny punkt $a \in B(b, r) \cap D_0$ i teraz, jeżeli $[x_0, \dots, x_N]$ dochodzi do a, to $[x_0, \dots, x_N, b]$ dochodzi do b, czyli $b \in D_0$.

---

(1) Przypomnijmy, że $\varrho_{\| \|}(x, y) := \|x - y\|$ — zob. Obserwacja 4.6.2(c).

Definicja 9.2.3. $\operatorname{Hom}(E,F)$ oznacza przestrzeń wszystkich odwzorowań $\mathbb{K}$–liniowych $L : E \longrightarrow F$; $E^* := \operatorname{Hom}(E,\mathbb{K})$. $\mathcal{L}(E,F)$ oznacza przestrzeń wszystkich odwzorowań liniowych i ciągłych $L : E \longrightarrow F$; $E' := \mathcal{L}(E,\mathbb{K})$.

Obserwacja 9.2.4. Odnotujmy, że na ogół (jeżeli E jest przestrzenią nieskończenie wymiarową) $E' \subsetneq E^*$. Na przykład, niech E oznacza przestrzeń wszystkich wielomianów rzeczywistych jednej zmiennej rzeczywistej, niech $\|f\| := \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$, $f \in E$, i niech $L : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $L(f) := f(3)$. Oczywiście $L \in E^*$. Zauważmy, że $\|(\frac{x}{2})^k\| = (\frac{1}{2})^k \longrightarrow 0$. Z drugiej strony $L((\frac{x}{2})^k) = (\frac{3}{2})^k \longrightarrow \infty$. Oznacza to, że $L \notin E'$.

Obserwacja 9.2.5. (a) Jeżeli $F = F_1 \times \dots \times F_N$, $L : E \longrightarrow F$, $L = (L_1,\dots,L_N)$, to

$$L \in \mathcal{L}(E, F_1 \times \dots \times F_N) \iff L_j \in \mathcal{L}(E, F_j),\ j = 1,\dots,N.$$

(b) Jeżeli $E = E_1 \times \dots \times E_N$, $L : E \longrightarrow F$, $L_j : E_j \longrightarrow F$, $L_j(x_j) := L(\underbrace{0,\dots,0}_{(j-1)\,\times}, x_j, \underbrace{0,\dots,0}_{(N-j)\,\times})$, $j = 1,\dots,N$, to $L \in \mathcal{L}(E_1 \times \dots \times E_N, F) \iff L_j \in \mathcal{L}(E_j, F)$, $j = 1,\dots,N$. Zauważmy, że $L(x) = L_1(x_1) + \dots + L_N(x_N)$ dla $x = (x_1,\dots,x_N) \in E_1 \times \dots \times E_N$.

(c) Przypomnijmy, że $\operatorname{Hom}(\mathbb{K},F) = \mathcal{L}(\mathbb{K},F) \simeq F$. Stąd, wobec (b), dostajemy $\operatorname{Hom}(\mathbb{K}^N,F) = \mathcal{L}(\mathbb{K}^N,F) \simeq F^N$ — izomorfizm jest dany wzorem:

$$F^N \ni (a_1,\dots,a_N) \longmapsto (\mathbb{K}^N \ni (x_1,\dots,x_N) \longmapsto x_1a_1 + \dots + x_Na_N \in F) \in \operatorname{Hom}(\mathbb{K}^N,F).$$

Przypomnijmy również, że: $\operatorname{Hom}(\mathbb{K}^n,\mathbb{K}^m) = \mathcal{L}(\mathbb{K}^n,\mathbb{K}^m) \simeq \mathbb{M}(m\times n;\mathbb{K}) = \mathbb{K}[m\times n]$ = przestrzeń macierzy wymiaru $m\times n$ o wyrazach z $\mathbb{K}$. Izomorfizm $\operatorname{Hom}(\mathbb{K}^n,\mathbb{K}^m) \simeq \mathbb{M}(m\times n;\mathbb{K})$ dany jest następującym przepisem. Odwzorowaniu liniowemu $L : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ przyporządkowujemy macierz, której i-ta kolumna składa się ze współrzędnych wektora $L(\boldsymbol{e}_i) = L(0,\dots,0,\underset{i}{1},0,\dots,0)$. Izomorfizm odwrotny to odwzorowanie, które przypisuje macierzy $A \in \mathbb{M}(m\times n;\mathbb{K})$ odwzorowanie liniowe postaci $\mathbb{K}^n \ni x \longmapsto A.x \in \mathbb{K}^m$, gdzie $A.x$ oznacza wynik mnożenia macierzy A przez wektor x utożsamiany z macierzą kolumnową $n\times 1$.

Propozycja 9.2.6. *Niech $L \in \operatorname{Hom}(E,F)$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) $L \in \mathcal{L}(E,F)$;
(ii) *odwzorowanie L jest ciągłe w 0;*
(iii) *istnieje punkt $a \in E$ taki, że odwzorowanie L jest ciągłe w a;*
(iv) *istnieją $a \in E$, $r > 0$ takie, że $L(\overline{B}(a,r))$ jest zbiorem ograniczonym* (2);
(v) *istnieje $C \geqslant 0$ takie, że $\|L(x)\|_F \leqslant C\|x\|_E$ dla dowolnego $x \in E$.*

Dowód. Jedyny problem to implikacja (iv) $\Longrightarrow$ (v). Niech $L(\overline{B}(a,r)) \subset \overline{B}(R)$. Wystarczy pokazać, że $\|L(x)\| \leqslant C$ dla $\|x\| = 1$. Weźmy dowolne $x \in E$ takie, że $\|x\| = 1$. Mamy:

$$\|L(x)\| = \frac{1}{r}\|L(rx)\| = \frac{1}{r}\|L(a+rx) - L(a)\| \leqslant \frac{1}{r}(\|L(a+rx)\| + \|L(a)\|) \leqslant \frac{2R}{r} =: C. \qquad \square$$

Wniosek 9.2.7. $\|\ \|_1 \sim \|\ \|_2$ *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $C > 0$ takie, że $\frac{1}{C}\|\ \|_1 \leqslant \|\ \|_2 \leqslant C\|\ \|_1$.*

Powyższy wynik oznacza, iż w kategorii metryk zadanych przez normy równoważność takich metryk jest równoważna ich porównywalności.

Dowód. Stosujemy Propozycję 9.2.6 do identyczności $\operatorname{id} : (E,\|\ \|_1) \longrightarrow (E,\|\ \|_2)$. $\square$

Wniosek 9.2.8. *$\mathcal{L}(E,F)$ jest przestrzenią unormowaną przez funkcję*

$$\|L\| = \|L\|_{\mathcal{L}(E,F)} := \sup\{\|L(x)\| : \|x\| \leqslant 1\}, \quad L \in \mathcal{L}(E,F).$$

(2) Oczywiście warunek ten jest równoważny temu, że istnieją $a \in E$, $r > 0$ takie, że $L(B(a,r))$ jest zbiorem ograniczonym.

Zauważmy, że jeżeli $E \neq \{0\}$, to

$$\|L\| = \sup\left\{\frac{\|L(x)\|}{\|x\|} : x \in E_*\right\} = \sup\{\|L(x)\| : \|x\| = 1\} \quad (^3)$$

oraz, że $\|L\|$ jest najmniejszą stałą C taką, że (v) zachodzi. W szczególności, $\|L(x)\| \leqslant \|L\|\|x\|$, $x \in E$.

Obserwacja 9.2.9. Jeżeli $A \in \mathcal{L}(E,F)$, $B \in \mathcal{L}(F,G)$, to $B \circ A \in \mathcal{L}(E,G)$, $\|B \circ A\| \leqslant \|B\|\|A\|$. W szczególności, jeżeli $A \in \mathcal{L}(E,E)$, to $A^k := \underbrace{A \circ \dots \circ A}_{k\times} \in \mathcal{L}(E,E)$ i $\|A^k\| \leqslant \|A\|^k$.

Propozycja 9.2.10. *Jeżeli F jest przestrzenią Banacha, to $\mathcal{L}(E,F)$ jest przestrzenią Banacha.*

Dowód. Niech $(L_\nu)_{\nu=1}^\infty$ będzie ciągiem Cauchy'ego w $\mathcal{L}(E,F)$. Wprost z definicji normy w $\mathcal{L}(E,F)$, wynika, że $(L_\nu|_{\overline{B}(R)})_{\nu=1}^\infty \subset \mathcal{B}(\overline{B}(R),F)$ jest ciągiem Cauchy'ego dla dowolnego $R > 0$. Ponieważ $\mathcal{B}(\overline{B}(R),F)$ jest przestrzenią Banacha, zatem istnieje odwzorowanie $L^{(R)} \in \mathcal{B}(\overline{B}(R),F)$ takie, że $L_\nu|_{\overline{B}(R)} \longrightarrow L^{(R)}$ jednostajnie na $\overline{B}(R)$. Jest widoczne, że $L^{(R')}|_{\overline{B}(R)} = L^{(R)}$ dla dowolnych $0 < R < R'$. Mamy więc odwzorowanie $L : E \longrightarrow F$ takie, że $L|_{\overline{B}(R)} = L^{(R)}$. Z liniowości odwzorowań L_ν, $\nu \in \mathbb{N}$, wynika natychmiast liniowość L. Biorąc $R = 1$ widzimy, że $L_\nu \longrightarrow L$ w $\mathcal{L}(E,F)$. $\square$

Definicja 9.2.11. Niech $\operatorname{Isom}(E,F)$ oznacza rodzinę wszystkich izomorfizmów algebraicznych $L : E \longrightarrow F$ takich, że L i L^{-1} są ciągłe (tzn. L jest również izomorfizmem topologicznym).

Obserwacja 9.2.12. (a) Jeżeli $\operatorname{Isom}(E,F) \neq \varnothing$, to E jest przestrzenią Banacha wtedy i tylko wtedy, gdy F jest przestrzenią Banacha.

(b) Jeżeli $L \in \operatorname{Isom}(E,F)$ i $E \neq \{0\}$, to $\|L^{-1}\| \geqslant \|L\|^{-1}$.
Istotnie, $1 = \|\operatorname{id}_E\| = \|L^{-1} \circ L\| \leqslant \|L^{-1}\|\|L\|$.

Propozycja 9.2.13. *Załóżmy, że $1 \leqslant \dim E < \infty$. Wtedy:*

(a) *Wszystkie normy w E są równoważne.*
(b) $\operatorname{Isom}(\mathbb{K}^d, E) \neq \varnothing$, *$d := \dim E$.*
(c) $\mathcal{L}(E,F) = \operatorname{Hom}(E,F)$ *dla dowolnej przestrzeni unormowanej F.*
(d) *E jest przestrzenią Banacha.*

Dowód. (a) Niech $\|\ \|$ będzie ustaloną normą na E. Niech $d := \dim_{\mathbb{K}} E$ i niech $e_1, \dots, e_d$ będzie dowolną bazą E. Zdefiniujmy $L : \mathbb{K}^d \longrightarrow E$, $L(t_1, \dots, t_d) := t_1e_1 + \dots + t_de_d$; L jest izomorfizmem algebraicznym. Ponadto L jest odwzorowaniem ciągłym bowiem $\|L(t)\| \leqslant \max\{\|e_1\|, \dots, \|e_d\|\}\|t\|_1 = C\|t\|_1$, $t \in \mathbb{K}^d$.

Zauważmy, że funkcja $N : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $N(x) := \|L^{-1}(x)\|_1$, jest normą na E. Wystarczy pokazać, że $\|\ \| \sim N$. Wiemy, że $\|\ \| \leqslant CN$. Wystarczy więc pokazać, że $N \leqslant \operatorname{const}\|\ \|$ (co jest równoważne ciągłości L^{-1}).

Chcemy pokazać, że $\|L^{-1}(x)\|_1 \leqslant \operatorname{const}\|x\|$, $x \in E$. Innymi słowy, $\|t\|_1 \leqslant \operatorname{const}\|L(t)\|$, $t \in \mathbb{K}^d$, co z kolei jest równoważne pokazaniu, że $\|L(t)\| \geqslant \operatorname{const} > 0$ dla $\|t\|_1 = 1$. Teraz wystarczy już tylko skorzystać z twierdzenia Weierstrassa o osiąganiu kresów (wobec faktu, że L jest ciągłe, a sfera $\{\|t\|_1 = 1\}$ jest zwarta).

(b) $L \in \operatorname{Isom}(\mathbb{K}^d, E)$.

(c) i (d) wynikają z faktu, że $\operatorname{Isom}(\mathbb{K}^d, E) \neq \varnothing$, a dla $E = \mathbb{K}^d$ własności (c) i (d) są oczywiste. $\square$

Wniosek 9.2.14. *Niech $V \subset E$ będzie skończenie wymiarową podprzestrzenią wektorową E. Wtedy V jest przestrzenią Banacha. W szczególności, V jest domknięta.*

Propozycja 9.2.15. *Następujące warunki są równoważne:*

(i) $\dim E < \infty$;
(ii) $\forall_{a \in E,\ r>0} : \overline{B}(a,r)$ *jest zbiorem zwartym;*
(iii) $\exists_{a \in E,\ r>0} : \overline{B}(a,r)$ *jest zbiorem zwartym.*

Dowód. Implikacje (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) są oczywiste. Pozostaje do wykazania (iii) $\Longrightarrow$ (i). Korzystając z translatywności kul, widzimy, że (iii) $\Longrightarrow$ (ii). Ponieważ kula $\overline{B}(0,2)$ jest zwarta, istnieje skończona

---

(3) $A_* := A \setminus \{0\}$.

liczba punktów $a_1, \dots, a_N \in \overline{B}(0,2)$ taka, że $\overline{B}(0,2) \subset \bigcup_{j=1}^{N} B(a_j, 1)$. Niech V oznacza podprzestrzeń generowaną przez wektory $a_1, \dots, a_N$. Na podstawie Wniosku 9.2.14, jest to podprzestrzeń domknięta. Pokażemy, że $E = V$. Ustalmy $a \in E$. Zamierzamy pokazać, że $a \in \overline{V}$. Możemy założyć, że $\|a\| < 1$. Ponieważ $a \in \overline{B}(0,2)$, istnieją $j_1 \in \{1, \dots, N\}$ oraz $x_1 \in B(0,1)$ takie, że $a = a_{j_1} + x_1 =: b_1 + x_1$. Powtarzając to samo dla wektora $2x_1$, wnioskujemy, że $a = b_2 + \frac{1}{2}x_2$, gdzie $b_2 \in V$ i $\|x_2\| < 1$. Po k krokach dostajemy: $a = b_k + \frac{1}{2^{k-1}}x_k$, gdzie $b_k \in V$ i $\|x_k\| < 1$. W szczególności, $a \in \overline{V}$. $\square$

9.3. Odwzorowania dwuliniowe

Dalej E, F, G oznaczają przestrzenie unormowane nad $\mathbb{K}$.

Definicja 9.3.1. Przez $\mathrm{Hom}(E, F; G)$ oznaczamy przestrzeń wszystkich odwzorowań dwuliniowych $B : E \times F \longrightarrow G$. Jeżeli $E = F$, to piszemy $\mathrm{Hom}^2(E, G)$ zamiast $\mathrm{Hom}(E, E; G)$.

Przez $\mathcal{L}(E, F; G)$ oznaczamy zbiór wszystkich ciągłych odwzorowań dwuliniowych $E \times F \longrightarrow G$; niech $\mathcal{L}^2(E, G) := \mathcal{L}(E, E; G)$. Oczywiście, $\mathcal{L}(E, F; G)$ jest $\mathbb{K}$–przestrzenią wektorową.

Obserwacja 9.3.2. Przypomnijmy pewien fakt algebraiczny. Niech

$$\mathrm{Hom}(E, F; G) \ni B \overset{\Phi}{\longmapsto} \Big(E \ni x \longmapsto B(x, \cdot) \in \mathrm{Hom}(F, G)\Big) \in \mathrm{Hom}(E, \mathrm{Hom}(F, G));$$

Φ jest dobrze określone, liniowe, bijektywne i $\Psi = \Phi^{-1}$ jest dane wzorem

$$\mathrm{Hom}(E, \mathrm{Hom}(F, G)) \ni A \overset{\Psi}{\longmapsto} \Big(E \times F \ni (x, y) \longmapsto A(x)(y) \in G\Big) \in \mathrm{Hom}(E, F; G).$$

Tak więc $\mathrm{Hom}(E, F; G) \simeq \mathrm{Hom}(E, \mathrm{Hom}(F, G))$. W identyczny sposób można pokazać, że

$$\mathrm{Hom}(E, F; G) \simeq \mathrm{Hom}(F, \mathrm{Hom}(E, G));$$
$$\mathrm{Hom}(E, F; G) \ni B \longmapsto \Big(F \ni y \longmapsto B(\cdot, y) \in \mathrm{Hom}(E, G)\Big) \in \mathrm{Hom}(F, \mathrm{Hom}(E, G)).$$

Propozycja 9.3.3. *Niech $B \in \mathrm{Hom}(E, F; G)$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) *$B \in \mathcal{L}(E, F; G)$;*
(ii) *odwzorowanie B jest ciągłe w $(0,0)$;*
(iii) *istnieje punkt $(a, b) \in E \times F$ taki, że odwzorowanie B jest ciągłe w (a, b);*
(iv) *istnieją $(a, b) \in E \times F$ i $r > 0$ takie, że $B(\overline{\mathbb{B}}(a, r) \times \overline{\mathbb{B}}(b, r))$ jest zbiorem ograniczonym* ([4]);
(v) *istnieje $C \geqslant 0$ takie, że $\|B(x, y)\|_G \leqslant C\|x\|_E\|y\|_F$ dla dowolnego $(x, y) \in E \times F$.*

Dowód. Implikacje (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) są oczywiste.

(iv) $\Longrightarrow$ (v): Niech $B(\overline{\mathbb{B}}(a, r) \times \overline{\mathbb{B}}(b, r)) \subset \overline{\mathbb{B}}(R)$.

Wystarczy pokazać, że $\|B(x, y)\| \leqslant C$ dla $\|x\| = \|y\| = 1$. Weźmy $(x, y) \in E \times F$, $\|x\| = \|y\| = 1$:

$$\begin{aligned}\|B(x, y)\| &= \frac{1}{r^2}\|B(rx, ry)\| = \frac{1}{r^2}\|B(a + rx, b + ry) - B(a, b + ry) - B(a + rx, b) + B(a, b)\| \\ &\leqslant \frac{1}{r^2}(\|B(a + rx, b + ry)\| + \|B(a, b + ry)\| + \|B(a + rx, b)\| + \|B(a, b)\|) \leqslant \frac{4R}{r^2} =: C.\end{aligned}$$

(v) $\Longrightarrow$ (i): $\|B(x, y) - B(x_0, y_0)\| = \|B(x - x_0, y) + B(x_0, y - y_0)\|$
$$\leqslant C(\|x - x_0\|\|y\| + \|x_0\|\|y - y_0\|) \leqslant C\max\{\|x_0\|, \|y\|\}\|(x, y) - (x_0, y_0)\|_1. \quad \square$$

Wniosek 9.3.4. *$\mathcal{L}(E, F; G)$ wraz z normą*

$$\|B\| = \|B\|_{\mathcal{L}(E,F;G)} := \sup\{\|B(x, y)\| : \|x\| \leqslant 1,\ \|y\| \leqslant 1\}, \quad B \in \mathcal{L}(E, F; G)$$

jest przestrzenią unormowaną.

([4]) Równoważnie: istnieją $(a, b) \in E \times F$ i $r > 0$ takie, że $B(\mathbb{B}(a, r) \times \mathbb{B}(b, r))$ jest zbiorem ograniczonym. Uwaga: dla uniknięcia kolizji oznaczeń piszemy chwilowo $\mathbb{B}(a, r)$ zamiast $B(a, r)$.

Zauważmy, że jeżeli $E \neq \{0\}$ i $F \neq \{0\}$, to

$$\|B\| = \sup\Big\{\frac{\|B(x,y)\|}{\|x\|\|y\|} : (x,y) \in E_* \times F_*\Big\} = \sup\{\|B(x,y)\| : \|x\| = 1,\ \|y\| = 1\}$$

oraz, że $\|B\|$ jest najmniejszą stałą C taką, że (v) zachodzi. W szczególności,

$$\|B(x,y)\| \leqslant \|B\|\|x\|\|y\|, \quad (x,y) \in E \times F.$$

Przykład 9.3.5 (Przykłady odwzorowań dwuliniowych)**.** (a) $\mathcal{L}(E,F) \times E \ni (L,x) \overset{B}{\longmapsto} L(x) \in F$, $\|B\| \leqslant 1$. Ponadto, jeżeli $E \neq \{0\}$ i $F \neq \{0\}$, to $\|B\| = 1$. Istotnie, jeżeli $x_0 \in E$ i $y_0 \in F$ są takie, że $\|x_0\| = \|y_0\| = 1$, to zdefiniujmy $\xi : \mathbb{K} \cdot x_0 \longrightarrow \mathbb{K}$ wzorem $\xi(\lambda x_0) := \lambda$. Jest to oczywiście odwzorowanie liniowe oraz $\|\xi\| = 1$. Z twierdzenia Hahna–Banacha [5] [6] dostajemy odwzorowanie liniowe $\widetilde{\xi} : E \longrightarrow \mathbb{K}$ takie, że $\widetilde{\xi} = \xi$ na $\mathbb{K} \cdot x_0$ oraz $\|\widetilde{\xi}\| = 1$. Niech teraz $L(x) := \widetilde{\xi}(x)y_0$, $x \in E$. Wtedy $\|B(L,x)\| = |\widetilde{\xi}(x)| \leqslant \|x\|$ oraz $\|B(L,x_0)\| = |\widetilde{\xi}(x_0)| = 1$.

(b) $\mathcal{L}(F,G) \times \mathcal{L}(E,F) \ni (Q,P) \overset{B}{\longmapsto} Q \circ P \in \mathcal{L}(E,G)$, $\|B\| \leqslant 1$. Ponadto, jeżeli $E \neq \{0\}$, $F \neq \{0\}$ i $G \neq \{0\}$, to $\|B\| = 1$ (Ćwiczenie).

Propozycja 9.3.6. (a) *Odwzorowanie* $\mathcal{L}(E,F;G) \ni B \overset{\Phi}{\longmapsto} \Big(E \ni x \longmapsto B(x,\cdot) \in \mathcal{L}(F,G)\Big) \in \mathcal{L}(E,\mathcal{L}(F,G))$; *jest dobrze określone, izomorficzne i izometryczne, tzn.*

$$\Phi \in \mathrm{Isom}(\mathcal{L}(E,F;G), \mathcal{L}(E,\mathcal{L}(F,G))), \quad \|\Phi(B)\| = \|B\|,\ B \in \mathcal{L}(E,F;G). \quad [7]$$

(b) *Jeżeli E i F są skończenie wymiarowe, to* $\mathcal{L}(E,F;G) = \mathrm{Hom}(E,F;G)$.

Analogiczne własności przysługują odwzorowaniu

$$\mathcal{L}(E,F;G) \ni B \longmapsto \Big(F \ni y \longmapsto B(\cdot,y) \in \mathcal{L}(E,G)\Big) \in \mathcal{L}(F,\mathcal{L}(E,G)).$$

Dowód. (a) Jest oczywiste, że $B(x,\cdot) \in \mathcal{L}(F,G)$ dla dowolnego $x \in E$. Ponadto, $\|B(x,\cdot)\| \leqslant \|B\|\|x\|$. Stąd $\Phi(B) \in \mathcal{L}(E,\mathcal{L}(F,G))$ i $\|\Phi(B)\| \leqslant \|B\|$. Ostatecznie $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E,F;G), \mathcal{L}(E,\mathcal{L}(F,G)))$ i $\|\Phi\| \leqslant 1$.

Teraz przechodzimy do odwzorowania $\Psi = \Phi^{-1}$:

$$\mathcal{L}(E,\mathcal{L}(F,G)) \ni A \overset{\Psi}{\longmapsto} \Big(E \times F \ni (x,y) \longmapsto A(x)(y) \in G\Big) \in \mathcal{L}(E,F;G).$$

Ponieważ $\|A(x)(y)\| \leqslant \|A(x)\|\|y\| \leqslant \|A\|\|x\|\|y\|$, zatem $\Psi(A) \in \mathcal{L}(E,F;G)$, $\|\Psi(A)\| \leqslant \|A\|$. Wynika stąd, że $\Psi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E,\mathcal{L}(F,G)), \mathcal{L}(E,F;G))$ i $\|\Psi\| \leqslant 1$.

(b) Na podstawie (a) i Propozycji 9.2.13 mamy: $\mathcal{L}(E,F;G) \simeq \mathcal{L}(E,\mathcal{L}(F,G)) = \mathrm{Hom}(E,\mathrm{Hom}(F,G)) \simeq \mathrm{Hom}(E,F;G)$. □

Wniosek 9.3.7. *Jeżeli G jest przestrzenią Banacha, to $\mathcal{L}(E,F;G)$ jest przestrzenią Banacha* [8].

9.4. Rodziny sumowalne II

Z przeliczalnymi rodzinami sumowalnymi spotkaliśmy się już podrozdziale 5.7. Obecnie uzupełnimy naszą wiedzę.

Niech X i I będą dowolnymi niepustymi zbiorami i niech E będzie ustaloną przestrzenią Banacha nad $\mathbb{K}$ ($E \neq \{0\}$). Zakładamy, że I jest zbiorem nieskończonym. *Nie zakładamy, że I jest zbiorem przeliczalnym.* Oznaczmy przez $\mathcal{F}(I)$ rodzinę wszystkich niepustych skończonych podzbiorów I.

Rozważmy rodzinę funkcji $f_i : X \longrightarrow E$, $i \in I$.

Tak, jak poprzednio zdefiniujmy $f_A := \sum_{i \in A} f_i$, $A \in \mathcal{F}(I)$.

---

[5] Hans Hahn (1879–1934).

[6] **Twierdzenie Hahna–Banacha.** *Niech V będzie podprzestrzenią przestrzeni unormowanej $(E, \|\ \|)$ i niech $\xi : V \longrightarrow \mathbb{K}$ będzie funkcjonałem liniowym takim, że $|\xi(x)| \leqslant \|x\|$, $x \in V$. Wtedy istnieje funkcjonał liniowy $\widetilde{\xi} : E \longrightarrow \mathbb{K}$ taki, że $\widetilde{\xi} = \xi$ na V oraz $|\widetilde{\xi}(x)| \leqslant \|x\|$, $x \in E$.*

[7] W szczególności, $\|\Phi\| = \|\Phi^{-1}\| = 1$ o ile $E \neq \{0\}$, $F \neq \{0\}$ i $G \neq \{0\}$.

[8] Bo $\mathcal{L}(E,\mathcal{L}(F,G))$ jest przestrzenią Banacha.

Definicja 9.4.1. Powiemy, że rodzina funkcji $(f_i)_{i\in I}$ jest *jednostajnie sumowalna na* X, jeżeli istnieje funkcja $f_I : X \longrightarrow E$ taka, że

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{S(\varepsilon)=S(\varepsilon,I)\in\mathcal{F}(I)}\ \forall_{A\in\mathcal{F}(I):S(\varepsilon)\subset A} : \|f_A(x) - f_I(x)\| \leqslant \varepsilon, \quad x\in X;$$

funkcja f_I jest wyznaczona jednoznacznie (Ćwiczenie). Nazywamy ją *sumą* rodziny f i oznaczamy przez $\sum\limits_{i\in I} f_i$

Jeżeli rodzina $(\|f_i\|)_{i\in I}$ jest jednostajnie sumowalna na X, to mówimy, rodzina $(f_i)_{i\in I}$ jest *bezwzględnie jednostajnie sumowalna na* X.

Następująca propozycja pozwala zredukować przypadek dowolnego I do (poprzednio badanego) przypadku, gdy I jest przeliczalny.

Propozycja 9.4.2. *Jeżeli rodzina* $(f_i)_{i\in I}$ *jest jednostajnie sumowalna na* X*, to* $\#\{i\in I : f_i \not\equiv 0\} \leqslant \aleph_0$.

Dowód. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i $i \in I\setminus S(\varepsilon)$ mamy:

$$\|f_i(x)\| = \|f_{\{i\}\cup S(\varepsilon)}(x) - f_{S(\varepsilon)}(x)\| \leqslant \|f_{\{i\}\cup S(\varepsilon)}(x) - f_I(x)\| + \|f_{S(\varepsilon)}(x) - f_I(x)\| \leqslant 2\varepsilon, \quad x\in X.$$

Innymi słowy: $\{i\in I : \exists_{x\in X} :\ \|f_i(x)\| > 2\varepsilon\} \subset S(\varepsilon)$ dla dowolnego $\varepsilon > 0$. W takim razie

$$\{i\in I : f_i \not\equiv 0\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} S\Big(\frac{1}{n}\Big). \qquad \square$$

Obserwacja 9.4.3. Niech $L : E \longrightarrow F$ będzie operatorem liniowym i ciągłym. Jeżeli $(f_i)_{i\in I}$ jest rodziną jednostajnie sumowalną na X, to rodzina $(L\circ f_i)_{i\in I}$ jest również jednostajnie sumowalna na X oraz $\sum\limits_{i\in I} L\circ f_i = L\big(\sum\limits_{i\in I} f_i\big)$.

Istotnie, $\|\sum\limits_{i\in A} L\circ f_i(x) - L\circ f_I(x)\| \leqslant \|L\|\|f_A(x) - f_I(x)\|$, $A\in\mathcal{F}(I)$, $x\in X$.

Uogólnieniem Twierdzenia 5.7.11 o mnożeniu mnożeniu rodzin sumowalnych jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 9.4.4. *Niech* E, F, G *będą przestrzeniami Banacha. Załóżmy, że:*

- $B : E\times F \longrightarrow G$ *jest operatorem dwuliniowym ciągłym,*
- $f_i : X \longrightarrow E$*,* $i\in I$*,* $g_j : X \longrightarrow F$*,* $j\in J$*, są odwzorowaniami ograniczonymi,*
- $(f_i)_{i\in I}$ *jest rodziną jednostajnie sumowalną na* X*,*
- $(g_j)_{j\in J}$ *jest rodziną bezwzględnie jednostajnie sumowalną na* X*.*

Wtedy:

- $(B(f_i, g_j))_{(i,j)\in I\times J}$ *jest rodziną jednostajnie sumowalną na* X*,*
- $\sum\limits_{(i,j)\in I\times J} B(f_i, g_j) = B(f_I, g_J)$.

Jeżeli ponadto $(f_i)_{i\in I}$ *jest rodziną bezwzględnie jednostajnie sumowalną na* X*, to* $(B(f_i, g_j))_{(i,j)\in I\times J}$ *jest rodziną bezwzględnie jednostajnie sumowalną na* X*.*

Dowód. Jedynym problemem jest jednostajna sumowalność rodziny $(B(f_i, g_j))_{(i,j)\in I\times J}$; jeżeli bowiem jest ona jednostajnie sumowalna, to na mocy Twierdzenia 5.7.10 o grupowaniu wyrazów (z $I(j) := I\times\{j\}$) oraz Obserwacji 9.4.3, dostajemy

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} B(f_i, g_j) = \sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in I} B(f_i, g_j)\Big) \overset{L:=B(\cdot,g_j)}{=} \sum_{j\in J} B(f_I, g_j) \overset{L:=B(f_I,\cdot)}{=} B(f_I, g_J).$$

Niech $M > 0$ będzie takie, że dla dowolnych $A\in\mathcal{F}(I)$, $B\in\mathcal{F}(J)$ mamy: $\|f_A(x)\| \leqslant M$, $\sum\limits_{j\in B}\|g_j(x)\| \leqslant M$, $x\in X$. W szczególności, $\|f_I(x)\| \leqslant M$ oraz $\sum\limits_{j\in J}\|g_j(x)\| \leqslant M$, $x\in X$.

Weźmy $\varepsilon > 0$ i niech zbiory $S(\varepsilon)\in\mathcal{F}(I)$, $C(\varepsilon)\in\mathcal{F}(J)$ będą takie, że $\|f_A(x) - f_I(x)\| \leqslant \varepsilon$, $x\in X$, dla dowolnego $A\in\mathcal{F}(I)$ takiego, że $S(\varepsilon)\subset A$ oraz $\sum\limits_{j\in B}\|g_j(x)\| \leqslant \varepsilon$, $x\in X$, dla dowolnego $B\in\mathcal{F}(J\setminus C(\varepsilon))$. Niech teraz $D\in\mathcal{F}(I\times J)$ będzie taki, że $S(\varepsilon)\times C(\varepsilon)\subset D$. Dla dowolnego $j\in J$ niech $D(j) := \{i\in I :$

$(i,j) \in D\}$ (9). Zauważmy, że na podstawie Obserwacji 9.4.3 (z $L := B(f_I, \cdot)$) mamy

$$\sum_{(i,j)\in D} B(f_i, g_j) - B(f_I, g_J) = \sum_{(i,j)\in D} B(f_i, g_j) - \sum_{j\in J} B(f_I, g_j) = \sum_{j\in J} B(f_{D(j)} - f_I, g_j),$$

gdzie $f_\varnothing := 0$. Wynika stąd, że

$$\Big\| \sum_{(i,j)\in D} B(f_i, g_j) - B(f_I, g_J)\Big\| \leqslant \|B\|\Big(\sum_{j\in C(\varepsilon)} \|f_{D(j)} - f_I\|\|g_j\| + \sum_{j\notin C(\varepsilon)} \|f_{D(j)} - f_I\|\|g_j\|\Big)$$
$$\leqslant \|B\|\Big(\varepsilon \sum_{j\in J} \|g_j\| + 2M \sum_{j\notin C(\varepsilon)} \|g_j\|\Big) \leqslant 3M\|B\|\varepsilon.$$

W przypadku, gdy rodzina $(f_i)_{i\in I}$ jest bezwzględnie jednostajnie sumowalna, na podstawie pierwszej części twierdzenia (zastosowanej do mnożenia) wnioskujemy, że rodzina $(\|f_i\|\|g_j\|)_{(i,j)\in I\times J}$ jest jednostajnie sumowalna. W szczególności, spełnia ona warunek Cauchy'ego. Pozostaje jeszcze tylko zauważyć, że dla dowolnego $A \in \mathcal{F}(I \times J)$ mamy

$$\sum_{(i,j)\in A} \|B(f_i, g_j)\| \leqslant \|B\| \sum_{(i,j)\in A} \|f_i\|\|g_j\|. \qquad \square$$

9.5. Twierdzenie Lévy'ego–Steinitza

Twierdzenie 9.5.1 (Lévy-Steinitz (10))**.** *Niech* $\boldsymbol{a} = (a^\nu)_{\nu=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$ *będzie ciągiem takim, że* $\lim_{\nu\to\infty} a^\nu = 0$. *Zdefiniujmy:*

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{a}) := \Big\{x \in \mathbb{R}^n : \exists_{\sigma:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}} : \sigma \text{ jest bijekcją, szereg } \sum_{\nu=1}^\infty a^{\sigma(\nu)} \text{ jest zbieżny oraz } x = \sum_{n=1}^\infty a^{\sigma(n)}\Big\}.$$

Jeśli $\mathcal{S}(\boldsymbol{a}) \neq \varnothing$*, to* $\mathcal{S}(\boldsymbol{a})$ *jest rzeczywistą podprzestrzenią afiniczną* $\mathbb{R}^n$*.*

Obserwacja 9.5.2. (a) $x \in \mathcal{S}(\boldsymbol{a})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $0 \in \mathcal{S}((a^1 - x, a^2, a^3, \dots))$.
(b) Dla dowolnego odwzorowania liniowego $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, jeżeli $x \in \mathcal{S}(\boldsymbol{a})$, to $L(x) \in \mathcal{S}((L(a^1), L(a^2), \dots))$.

Na początek ustalmy oznaczenia użyte w dowodzie. W $\mathbb{R}^n$ rozważać będziemy normę euklidesową. Dla elementu $x \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ będziemy pisać $x = (x', x_n)$. Rzutowanie na poszczególne współrzędne oznaczymy odpowiednio

$$\mathbb{R}^n \ni x \overset{\pi'}{\longmapsto} x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad \mathbb{R}^n \ni x \overset{\pi_n}{\longmapsto} x_n \in \mathbb{R}.$$

Dowód Twierdzenia 9.5.1 opierać się będzie na następujących dwóch lematach, które udowodnimy później.

Lemat 9.5.3. *Jeśli* $(0', 0), (0', 1) \in \mathcal{S}(\boldsymbol{a})$*, to* $(0', 2) \in \mathcal{S}(\boldsymbol{a})$*.*

Lemat 9.5.4. *Jeśli* $(0', 0), (0', 1) \in \mathcal{S}(\boldsymbol{a})$*, to* $(0', t) \in \mathcal{S}(\boldsymbol{a})$ *dla dowolnego* $t \in (0, 1)$*.*

Dowód Twierdzenia 9.5.1. Niech $x^1, x^2 \in \mathcal{S}(\boldsymbol{a})$, $t \in \mathbb{R}$. Wystarczy pokazać, że $\mathbf{bar}(t, x^1, x^2) := (1-t)x^1 + tx^2 \in \mathcal{S}(\boldsymbol{a})$. Zauważmy, że $\mathbf{bar}(t, x^1, x^2) = \mathbf{bar}(1-t, x^2, x^1)$. Możemy więc założyć, że $t > 0$. Ponieważ

$$\mathbf{bar}(2t, x^1, x^2) = (1-2t)x^1 + 2tx^2 = -x^1 + 2[(1-t)x^1 + tx^2] = \mathbf{bar}(2, x^1, \mathbf{bar}(t, x^1, x^2)),$$

możemy się ograniczyć do przypadku $t \in (0, 1] \cup \{2\}$. Przypadki $t = 1$ i $x^1 = x^2$ są trywialne. Wstawiając $a^1 - x^1$ w miejsce a^1 możemy założyć, że $x^1 = 0$. Niech L będzie izomorfizmem liniowym takim, że $L(x^2) = (0', 1)$. Wstawiając $L(a^\nu)$ w miejsce a^ν, $\nu = 1, 2, \dots$, możemy założyć, że $x^2 = (0', 1)$. Twierdzenie jest teraz natychmiastową konsekwencją przedstawionych powyżej lematów. $\square$

Przechodzimy do lematów. Ponieważ $(0', 0), (0', 1) \in \mathcal{S}(\boldsymbol{a})$, możemy założyć, że wyrazy szeregu $\boldsymbol{a}$ ułożone są pewien szczególny sposób.

Niech $K_0 = \varnothing$ i przeprowadźmy następującą konstrukcję indukcyjną. Niech $\ell \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że skonstruowaliśmy zbiór $K_{\ell-1}$. Ponieważ $(0', 1) \in \mathcal{S}(\boldsymbol{a})$, istnieje zbiór skończony $J_\ell \supset K_{\ell-1} \cup \{\ell\}$ taki, że

$$\Big\| \sum_{\nu\in J_\ell} a^\nu - (0', 1)\Big\| \leqslant \frac{1}{\ell}.$$

Ponieważ $(0', 0) \in \mathcal{S}(\boldsymbol{a})$, istnieje zbiór skończony $K_\ell \supset J_\ell$ taki, że

$$\Big\| \sum_{\nu\in K_\ell} a^\nu\Big\| \leqslant \frac{1}{\ell}.$$

(9) Odnotujmy, że $S(\varepsilon) \subset D(j)$ dla $j \in C(\varepsilon)$.
(10) Paul Pierre Lévy (1886–1971).

Oznaczmy teraz $j_\ell = \#J_\ell$, $k_\ell = \#K_\ell$, $\ell = 1, 2, \dots$, i przetasujmy szereg tak, aby elementy J_ℓ (odpowiednio K_ℓ) stanowiły pierwsze j_ℓ (odpowiednio k_ℓ) wyrazów szeregu po przestawieniu, $\ell = 1, 2, \dots$.

Ostatecznie możemy założyć, że istnieją liczby $0 = \underbrace{k_0 < j_1 < k_1 < j_2 < k_2}\underbrace{< j_3 < k_3 < j_4 < k_4} < \dots$ takie, że

$$\Big\|\sum_{\nu=1}^{j_\ell} a^\nu - (0', 1)\Big\| \leqslant \frac{1}{\ell}, \quad \Big\|\sum_{\nu=1}^{k_\ell} a^\nu\Big\| \leqslant \frac{1}{\ell}, \quad \ell = 1, 2, \dots.$$

W dowodach obu lematów kluczową rolę odegra następujący fakt, który udowodnimy później.

Lemat 9.5.5. *Przyjmijmy, że ciąg sum częściowych szeregu $\boldsymbol{a}$ ma punkt skupienia $x \in \mathbb{R}^n$. Wtedy $x \in \mathcal{S}(\boldsymbol{a})$.*

Dowód Lematu 9.5.3. Ustawmy wyrazy szeregu w następującej kolejności:

$$\begin{matrix} 1, \dots, j_1, & k_1+1, \dots, j_2, & j_1+1, \dots, k_1, & j_2+1, \dots, k_2, \\ k_2+1, \dots, j_3, & k_3+1, \dots, j_4, & j_3+1, \dots, k_3, & j_4+1, \dots, k_4, \dots \end{matrix}.$$

Ustalmy $\ell \in \mathbb{N}$ i przyjrzyjmy się teraz sumie S_ℓ utworzonej z pierwszych $j_{2\ell-1} + j_{2\ell} - k_{2\ell-1}$ wyrazów tak ustawionego szeregu. Mamy:

$$\begin{aligned} \|S_\ell - (0', 2)\| &\leqslant \Big\|\sum_{\nu=1}^{j_{2\ell-1}} a^\nu - (0', 1)\Big\| + \Big\|\sum_{\nu=k_{2\ell-1}+1}^{j_{2\ell}} a^\nu - (0', 1)\Big\| \\ &\leqslant \frac{1}{2\ell-1} + \Big\|\sum_{\nu=1}^{j_{2\ell}} a^\nu - (0', 1)\Big\| + \Big\|\sum_{\nu=1}^{k_{2\ell-1}} a^\nu\Big\| \leqslant \frac{2}{2\ell-1} + \frac{1}{2\ell} \underset{\ell\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Stosując teraz Lemat 9.5.5 otrzymujemy tezę. □

Przyjmijmy na chwilę prawdziwość jeszcze jednego lematu.

Lemat 9.5.6. *Niech $v^1, \dots, v^m \in \mathbb{R}^n$, $0 < t < 1$, $w := v^1 + \dots + v^m$, $\varepsilon := \max\{\|v^1\|, \dots, \|v^m\|\}$. Wtedy istnieją $\sigma \in \Sigma_m$ oraz $r \in \{1, \dots, m\}$ takie, że*

$$\Big\|\sum_{i=1}^r v^{\sigma(i)} - tw\Big\| \leqslant 3^n \varepsilon.$$

Dowód Lematu 9.5.4. Stosując Lemat 9.5.6 dla $a^{k_{\ell-1}+1}, a^{k_{\ell-1}+2}, \dots, a^{j_\ell}$, otrzymujemy $\sigma_\ell \in \Sigma_{j_\ell - k_{\ell-1}}$ i $1 \leqslant r_\ell \leqslant j_\ell - k_{\ell-1}$ takie, że

$$\Big\|\sum_{i=1}^{r_\ell} a^{k_{\ell-1}+\sigma_\ell(i)} - tw_\ell\Big\| \leqslant 3^n \varepsilon_\ell, \text{ gdzie } w_\ell := \sum_{\nu=k_{\ell-1}+1}^{j_\ell} a^\nu, \quad \varepsilon_\ell := \max\{\|a^\nu\| : \nu = k_{\ell-1}+1, \dots, j_\ell\}.$$

Zauważmy, że $\varepsilon_\ell \longrightarrow 0$ przy $\ell \longrightarrow +\infty$.

Ustawmy wyrazy szeregu w następującej kolejności:

$$\begin{matrix} k_0 + \sigma_1(1), k_0 + \sigma_1(2), \dots, k_0 + \sigma_1(j_1 - k_0), & j_1+1, j_1+2, \dots, k_1, \\ k_1 + \sigma_2(1), k_1 + \sigma_2(2), \dots, k_1 + \sigma_2(j_2 - k_1), & j_2+1, j_2+2, \dots, k_2, \\ k_2 + \sigma_3(1), k_2 + \sigma_3(2), \dots, k_2 + \sigma_3(j_3 - k_2), & j_3+1, j_3+2, \dots, k_3, \dots \end{matrix}.$$

Ustalmy $\ell \in \mathbb{N}$ i przyjrzyjmy się teraz sumie S_ℓ utworzonej z pierwszych $k_{\ell-1} + r_\ell$ wyrazów tak ustawionego szeregu. Mamy:

$$\|S_\ell - (0', t)\| \leqslant \Big\|\sum_{\nu=1}^{k_{\ell-1}} a^\nu\Big\| + \Big\|\sum_{i=1}^{r_\ell} a^{k_{\ell-1}+\sigma_\ell(i)} - tw_\ell\Big\| + t\|w_\ell - (0', 1)\| \leqslant \frac{1}{\ell-1} + 3^n\varepsilon_\ell + t\Big(\frac{1}{\ell} + \frac{1}{\ell-1}\Big) \underset{\ell\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Stosując Lemat 9.5.5 otrzymujemy tezę. □

Pozostaje udowodnić sformułowane po drodze lematy. W ich dowodach przydatny jest kolejny lemat, który oczywiście na końcu również udowodnimy.

Lemat 9.5.7. *Niech $v^1, \dots, v^m \in \mathbb{R}^n$ będą takie, że $v^1 + \dots + v^m = 0$. Połóżmy $\varepsilon := \max\{\|v^1\|, \dots, \|v^m\|\}$. Wtedy istnieje permutacja $\sigma \in \Sigma_m$ taka, że $\sigma(1) = 1$ oraz*

$$\Big\|\sum_{i=1}^r v^{\sigma(i)}\Big\| \leqslant 3^n \varepsilon, \quad r = 1, \dots, m.$$

Dowód Lematu 9.5.5. Oznaczmy $S_i := \sum_{\nu=1}^i a^\nu$, $i = 1, 2, \dots$, i niech $0 = i_0 < i_1 < i_2 < \dots$ będą takie, że $\lim\limits_{\ell\to+\infty} s_{i_\ell} = x$. Stosując Lemat 9.5.7 dla układu $S_{i_{\ell-1}} - S_{i_\ell} + a^{i_{\ell-1}+1}, a^{i_{\ell-1}+2}, a^{i_{\ell-1}+3}, \dots, a^{i_\ell}$, otrzymujemy permutację $\sigma_\ell \in \Sigma_{i_\ell - i_{\ell-1}}$ taką, że $\sigma_\ell(1) = 1$ oraz

$$\Big\|S_{i_{\ell-1}} - S_{i_\ell} + \sum_{i=1}^r a^{i_{\ell-1}+\sigma_\ell(i)}\Big\| \leqslant 3^n \varepsilon_\ell, \quad r = 1, \dots, i_\ell - i_{\ell-1},$$

gdzie
$$\varepsilon_\ell := \max\{\|S_{i_{\ell-1}} - S_{i_\ell} + a^{i_{\ell-1}+1}\|,\ \|a^{i_{\ell-1}+2}\|,\ \|a^{i_{\ell-1}+3}\|, \dots, \|a^{i_\ell}\|\}.$$
Ustawmy wyrazy szeregu w następującej kolejności:
$$\begin{gathered}\sigma_1(1), \sigma_1(2), \dots, \sigma_1(i_1),\\ i_1+\sigma_2(1), i_1+\sigma_2(2), \dots, i_1+\sigma_2(i_2-i_1),\ .\\ i_2+\sigma_3(1), i_2+\sigma_3(2), \dots, i_2+\sigma_3(i_3-i_2), \dots\end{gathered}$$
Ustalmy $i_{\ell-1} < k \leqslant i_\ell$ i przyjrzyjmy się sumie S_k. Mamy:
$$\begin{aligned}\|S_k - x\| &\leqslant \Big\|\sum_{\nu=1}^{i_{\ell-1}} a^\nu - x\Big\| + \|S_{i_{\ell-1}} - S_{i_\ell}\| + \Big\|S_{i_{\ell-1}} - S_{i_\ell} + \sum_{i=1}^{k-i_{\ell-1}} a^{i_{\ell-1}+\sigma_\ell(i)}\Big\|\\ &\leqslant \Big\|\sum_{\nu=1}^{i_{\ell-1}} a^\nu - x\Big\| + \|S_{i_{\ell-1}} - S_{i_\ell}\| + 3^n\varepsilon_\ell \underset{\ell\to+\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$
Zbieżność pierwszych dwóch składników wynika ze zbieżności podciągu ciągu sum częściowych $\boldsymbol{a}$, trzeciego zaś dodatkowo ze zbieżności $\lim\limits_{\nu\to+\infty} a^\nu = 0$. Tym samym otrzymujemy tezę. □

Dowód Lematu 9.5.6. Przypadek $w = 0$ jest trywialny. W przypadku $w \neq 0$ niech $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie izometrią taką, że $L(w) = (0', \|w\|)$. Zastępując v^j przez $L(v^j)/\|w\|$, $j = 1, \dots, m$, możemy założyć, że $w = (0', 1)$. Oznaczmy $s_r := \sum_{j=1}^r v^j$, $r = 1, \dots, m$. Korzystając z Lematu 9.5.7, możemy tak przestawić elementy $v^1, \dots, v^m$, że $\|\pi'(s_r)\| \leqslant 3^{n-1}\varepsilon$, $r = 1, \dots, m$. Weźmy najmniejsze $r \in \{1, \dots, m\}$ takie, że $\pi_n(s_r) \geqslant t$ (11). Zauważmy, że $\pi_n(s_r) = \pi_n(s_{r-1}) + \pi_n(v^r) < t + \varepsilon$, co oznacza, że $\|s_r - t\| \leqslant \|\pi'(s_r)\| + |\pi_n(s_r) - t| < 3^{n-1}\varepsilon + \varepsilon < 3^n\varepsilon$. □

Dowód Lematu 9.5.7. Przypadek $n = 1$ jest elementarny — Ćwiczenie. Poniższe rozumowanie przedstawia krok indukcyjny $n-1 \rightsquigarrow n$.

Niech $M := \max\{\|s_A\| : \{1\} \subset A \subset \{1, \dots, m\}\} = \|s_{A_0}\|$, gdzie $s_A := \sum_{j\in A} v^j$. Przypadek $M = 0$ jest trywialny. W przypadku $M > 0$ niech L będzie izometrią taką, że $L(s_{A_0}) = (0', \|s_{A_0}\|)$. Zastępując v^j przez $L(v^j)/\|s_{A_0}\|$, możemy założyć, że $s_{A_0} = (0', 1)$ (w szczególności, $M = 1$). Przez odpowiednią permutację elementów możemy założyć, że $A_0 = \{1, \dots, \ell\}$ oraz (stosując dwukrotnie założenie indukcyjne)
$$\Big\|\sum_{j=1}^r \pi'(v^j)\Big\| \leqslant 3^{n-1}\varepsilon, \quad r = 1, \dots, \ell, \qquad \Big\|\sum_{j=1}^r \pi'(v^{\ell+j})\Big\| \leqslant 3^{n-1}\varepsilon, \quad r = 1, \dots, m-\ell.$$
Zauważmy, że $\pi_n(v^j) \geqslant 0$, $j = 1, \dots, \ell$.

Istotnie, gdyby $\pi_n(v_j) < 0$ dla pewnego $j \in \{1, \dots, \ell\}$, to wtedy mielibyśmy
$$\|s_{A_0\setminus\{j\}}\| = \|(0', 1) - (\pi'(v^j), \pi_n(v^j))\| \geqslant 1 - \pi_n(v^j) > 1.$$
Zauważmy, że $\|s_{A_0\setminus\{j\}}\| = \|s_{\{1,2,\dots,m\}\setminus(A_0\setminus\{j\})}\|$ i jedna z tych sum występuje w definicji $M(=1)$ — sprzeczność.

Podobnie $\pi_n(v^j) \leqslant 0$, $j = \ell+1, \dots, m$ (tym razem w dowodzie rozważamy $s_{A_0\cup\{j\}}$ — Ćwiczenie).

Przystępujemy teraz do konstrukcji permutacji σ. Kładziemy $\sigma(1) := 1$, a następnie postępujemy indukcyjnie.

Przyjmijmy, że skonstruowaliśmy wartości $\sigma(1), \dots, \sigma(k)$, $k = k_1 + k_2 < m$, wykorzystując wartości $\{1, 2, \dots, k_1, \ell+1, \ell+2, \dots, \ell+k_2\}$ oraz w ten sposób, że $|\pi_n(s_k)| \leqslant \varepsilon$, gdzie $s_k := \sum_{j=1}^k v^{\sigma(k)}$. Na wstępie zauważmy, że wtedy
$$\|s_k\| \leqslant \|\pi'(s_k)\| + |\pi_n(s_k)| \leqslant \Big\|\sum_{j=1}^{k_1} \pi'(v^j)\Big\| + \Big\|\sum_{j=1}^{k_2} \pi'(v^{\ell+j})\Big\| + \varepsilon \leqslant 3^{n-1}\varepsilon + 3^{n-1}\varepsilon + \varepsilon \leqslant 3^n\varepsilon.$$

- Jeśli $\pi_n(s_k) > 0$, to na pewno $\ell + k_2 < m$ (bo $\pi_n(s_m) = 0$) i kładziemy $\sigma(k+1) := \ell + k_2 + 1$.
- Jeśli $\pi_n(s_k) < 0$, to na pewno $k_1 < \ell$ (bo $\pi_n(s_\ell) = 1$) i kładziemy $\sigma(k+1) := k_1 + 1$.
- Jeśli $\pi_n(s_k) = 0$, to zachodzi jedna z powyższych nierówności i stosownie dobieramy $\sigma(k+1)$.

W każdej z powyższych sytuacji zachowujemy nierówność $|\pi_n(s_{k+1})| \leqslant \varepsilon$. □

9.6. Operator odwracania w algebrach Banacha

Definicja 9.6.1. Mówimy, że $(A, \|\ \|)$ jest *algebrą Banacha* z jedynką, jeżeli:
- A jest algebrą z jedynką e,
- $(A, \|\ \|)$ jest przestrzenią Banacha,
- $\|xy\| \leqslant \|x\|\|y\|$, $x, y \in A$,
- $\|e\| = 1$.

Niech $O(A)$ oznacza zbiór elementów odwracalnych algebry A i niech $O(A) \ni x \overset{\Lambda}{\longmapsto} x^{-1} \in O(A)$. Odnotujmy, że Λ jest bijekcją; $\Lambda^{-1} = \Lambda$.

---

(11) Ponieważ $s_m = 1 > t$, więc takie r zawsze istnieje.

Obserwacja 9.6.2. (a) Niech $X \neq \varnothing$ będzie zwartą przestrzenią topologiczną i niech $A := \mathcal{C}(X, \mathbb{K})$. Wtedy A z normą Czebyszewa (supremową) jest algebrą Banacha z jedynką. Ponadto, $O(A) = \{f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{K}) : f(x) \neq 0,\ x \in X\}$ oraz $\Lambda(f) = 1/f$.

(b) Niech $E \neq \{0\}$ będzie przestrzenią Banacha nad $\mathbb{K}$ i niech $A := \mathcal{L}(E, E)$. Wtedy A z normą z $\mathcal{L}(E, E)$ i składaniem jako mnożeniem wewnętrznym jest algebrą Banacha z jedynką id_E. Ponadto, $O(A) = \mathrm{Isom}(E, E)$ oraz $\Lambda(L) = L^{-1}$.

(c) Niech $A := \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n) \simeq \mathbb{M}(n \times n; \mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^{n^2}$ (z normą operatorową z $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$). Wtedy $O(A)$ to zbiór macierzy odwracalnych, tzn. $O(A) = \{L \in \mathbb{M}(n \times n; \mathbb{K}) : \det L \neq 0\}$. Zauważmy, że jest to zbiór otwarty w $\mathbb{M}(n \times n; \mathbb{K})$. Ponadto, odwzorowanie $O(A) \ni L \overset{\Lambda}{\longmapsto} L^{-1} \in O(A)$ jest homeomorfizmem.

Powyższa sytuacja (w (c)) nie jest przypadkowa. Mamy bowiem następujący ogólny wynik.

Propozycja 9.6.3. *Niech A będzie algebrą Banacha z jedynką e. Wtedy:*

(a) *$B(e, 1) \subset O(A)$ oraz $(e - x)^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu$, $\|x\| < 1$, gdzie $x^0 := e$.*

(b) *Ogólniej, jeżeli $a \in O(A)$, to $B(a, 1/\|a^{-1}\|) \subset O(A)$ oraz $(a - x)^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (a^{-1}x)^\nu a^{-1}$, $\|x\| < 1/\|a^{-1}\|$. W szczególności, $O(A)$ jest otwarty w A.*

(c) *Odwzorowanie $O(A) \ni x \overset{\Lambda}{\longmapsto} x^{-1} \in O(A)$ jest homeomorfizmem.*

Dowód. (a) Ustalmy $x \in A$, $\|x\| < 1$. Na wstępie zauważmy, że ponieważ $\|x^\nu\| \leqslant \|x\|^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, zatem szereg jest zbieżny do pewnego elementu a. Mamy:

$$(e - x)a = a - xa = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu - \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu+1} = e, \quad a(e - x) = a - ax = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu - \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu+1} = e.$$

(b) Niech $a \in O(A)$. Ustalmy $x \in A$, $\|x\| < 1/\|a^{-1}\|$. Wtedy $\|a^{-1}x\| < 1$. Ponieważ $a - x = a(e - a^{-1}x)$, wystarczy skorzystać z (a).

(c) Niech $a \in O(A)$, $\|x\| < 1/\|a^{-1}\|$. Na podstawie (b) mamy:

$$\|\Lambda(a - x) - \Lambda(a)\| = \|(a - x)^{-1} - a^{-1}\| = \|\sum_{\nu=1}^{\infty} (a^{-1}x)^\nu a^{-1}\| \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} \|a^{-1}\|^{\nu+1} \|x\|^\nu = \frac{\|a^{-1}\|^2 \|x\|}{1 - \|a^{-1}\| \|x\|}. \quad \square$$

Przypomnijmy, że dla dowolnych przestrzeni unormowanych E, F, symbol $\mathrm{Isom}(E, F)$ oznacza rodzinę wszystkich izomorfizmów algebraicznych $L : E \longrightarrow F$ takich, że L i L^{-1} są ciągłe.

Korzystając z poprzednich rozważań łatwo dostajemy następujący wynik.

Propozycja 9.6.4. *Dla dowolnego $L_0 \in \mathrm{Isom}(E, F)$ i $X \in \mathcal{L}(E, F)$ takich, że $\|X\| < 1/\|L_0^{-1}\|$ mamy*

$$L_0 - X \in \mathrm{Isom}(E, F), \quad (L_0 - X)^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (L_0^{-1} \circ X)^\nu \circ L_0^{-1}.$$

W szczególności, zbiór $\mathrm{Isom}(E, F)$ jest otwarty w $\mathcal{L}(E, F)$, a odwzorowanie

$$\mathrm{Isom}(E, F) \ni L \overset{\Lambda}{\longmapsto} L^{-1} \in \mathrm{Isom}(F, E)$$

jest homeomorfizmem.

ROZDZIAŁ 10

Różniczkowanie odwzorowań

10.1. Różniczkowanie odwzorowań zmiennej rzeczywistej II

Niech $P \subset \mathbb{R}$ będzie *dowolnym* przedziałem nieredukującym się do punktu i niech F będzie przestrzenią unormowaną nad $\mathbb{K}$. Najpierw uzupełnimy i poszerzymy naszą wiedzę z Rozdziału 6.

Obserwacja 10.1.1. (a) Jeżeli $F = F_1 \times \cdots \times F_N$, $f = (f_1, \dots, f_N)$, to

$$f \in \mathcal{D}(P, F; a) \iff f_j \in \mathcal{D}(P, F_j; a), \quad j = 1, \dots, N.$$

Ponadto, $f'(a) = (f_1'(a), \dots, f_N'(a))$.

(b) Jeżeli $L \in \mathcal{L}(F, G)$ (gdzie G jest przestrzenią unormowaną) i $f \in \mathcal{D}(P, F; a)$, to $L \circ f \in \mathcal{D}(P, G; a)$ i $(L \circ f)'(a) = L(f'(a))$.

Propozycja 10.1.2. (a) *Jeżeli $f \in \mathcal{D}(P, F; a)$, $g \in \mathcal{D}(P, G; a)$, $B \in \mathcal{L}(F, G; H)$, gdzie F, G i H są przestrzeniami unormowanymi, to*

$$B(f, g) \in \mathcal{D}(P, H; a), \quad (B(f, g))'(a) = B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a)).$$

(b) *Jeżeli H jest przestrzenią Hilberta, $f, g \in \mathcal{D}(P, H; a)$, to*

$$\langle f, g\rangle \in \mathcal{D}(P, H; a), \quad (\langle f, g\rangle)'(a) = \langle f'(a), g(a)\rangle + \langle f(a), g'(a)\rangle.$$

Dowód. (a) Dwuliniowość i ciągłość B dają:

$$\frac{B(f(a+h), g(a+h)) - B(f(a), g(a))}{h}$$
$$= B\Big(\frac{f(a+h) - f(a)}{h}, g(a+h)\Big) + B\Big(f(a), \frac{g(a+h) - g(a)}{h}\Big) \longrightarrow B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a)).$$

(b) W przypadku gdy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, własność ta wynika bezpośrednio z (a). W przypadku gdy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, wystarczy zauważyć, że w dowodzie (a) korzystaliśmy tylko z $\mathbb{R}$–jednorodności. $\square$

Propozycja 10.1.3 (Wzór Leibniza)**.** (a) *Jeżeli $f \in \mathcal{D}^k(P, F; a)$, $g \in \mathcal{D}^k(P, G; a)$, $B \in \mathcal{L}(F, G; H)$, to*

$$B(f, g) \in \mathcal{D}^k(P, H; a), \quad (B(f, g))^{(k)}(a) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} B(f^{(j)}(a), g^{(k-j)}(a)).$$

(b) *Jeżeli H jest przestrzenią Hilberta, $f, g \in \mathcal{D}^k(P, H; a)$, to*

$$\langle f, g\rangle \in \mathcal{D}^k(P, H; a), \quad (\langle f, g\rangle)^{(k)}(a) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \langle f^{(j)}(a), g^{(k-j)}(a)\rangle.$$

Dowód. (a) Dla $k = 1$ wynik pokrywa się z Propozycją 10.1.2(a).

$k \rightsquigarrow k + 1$: Na podstawie założenia indukcyjnego

$$(B(f, g))^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} B(f^{(j)}(x), g^{(k-j)}(x)), \quad x \in U,$$

gdzie $U \subset P$ jest pewnym otoczeniem a. Różniczkując ten wzór w punkcie a (zgodnie z Propozycją 10.1.2(a)) dostajemy

$$(B(f, g))^{(k+1)}(a) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Big(B(f^{(j+1)}(a), g^{(k-j)}(a)) + B(f^{(j)}(a), g^{(k-j+1)}(a))\Big)$$

$$\overset{(\text{Ćwiczenie})}{=} \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} B(f^{(j)}(a), g^{(k+1-j)}(a)).$$

(b) wynika z (a). □

Propozycja 10.1.4. (a) *Jeżeli* $f \in \mathcal{C}^k(P, F)$, $L \in \mathcal{L}(F, G)$, *to* $L \circ f \in \mathcal{C}^k(P, G)$, $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$.

(b) *Jeżeli* $f \in \mathcal{C}^k(P, F)$, $g \in \mathcal{C}^k(P, G)$, $B \in \mathcal{L}(F, G; H)$, *to* $B(f, g) \in \mathcal{C}^k(P, H)$, $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. *W szczególności: jeżeli* H *jest przestrzenią Hilberta,* $f, g \in \mathcal{C}^k(P, H; a)$, *to* $\langle f, g\rangle \in \mathcal{C}^k(P, H; a)$, $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$.

Dowód. (a) wynika z Obserwacji 10.1.1(b).

(b) Stosujemy indukcję względem k. Dla $k = 0$ wynik jest oczywisty.

$k \rightsquigarrow k + 1$: Na podstawie Propozycji 10.1.2(a) mamy $(B(f, g))' = B(f', g) + B(f, g')$. Ponieważ, $f' \in \mathcal{C}^k(P, F)$ i $g' \in \mathcal{C}^k(P, G)$, założenie indukcyjne implikuje, że $(B(f, g))' \in \mathcal{C}^k(P, H)$, a stąd $B(f, g) \in \mathcal{C}^{k+1}(P, H)$. □

10.2. Pochodne kierunkowe

Niech E i F będą przestrzeniami unormowanymi, niech $\Omega \subset E$ będzie zbiorem otwartym i niech $f : \Omega \longrightarrow F$. Dla $a \in \Omega$ i $\xi \in E$, niech

$$\Omega_{a,\xi} := \{t \in \mathbb{R} : a + t\xi \in \Omega\}.$$

Oczywiście $\Omega_{a,0} = \mathbb{R}$ i $0 \in \Omega_{a,\xi}$. Dla $\xi \neq 0$, zbiór $\Omega_{a,\xi}$ jest izomorficzny z $\Omega \cap (a + \mathbb{R}\xi)$. Łatwo widać, że $\Omega_{a,\xi}$ jest zbiorem otwartym. Niech

$$\Omega_{a,\xi} \ni t \overset{f_{a,\xi}}{\longmapsto} f(a + t\xi) \in F.$$

Oczywiście $f_{a,0} \equiv \text{const} = f(a)$, $f_{a,\xi}(0) = f(a)$. Dla $\xi \neq 0$, funkcję $f_{a,\xi}$ możemy utożsamiać z $f|_{\Omega\cap(a+\mathbb{R}\xi)}$.

Jeżeli $f'_{a,\xi}(0)$ istnieje, to mówimy że f ma *pochodną kierunkową w punkcie a w kierunku ξ* i definiujemy

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(a) := f'_{a,\xi}(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a + t\xi) - f(a)}{t}.$$

Oczywiście $\frac{\partial f}{\partial 0}(a)$ zawsze istnieje i $\frac{\partial f}{\partial 0}(a) = 0$.

Dla $E = \mathbb{R}$ i $\xi \neq 0$ mamy:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(a) \text{ istnieje } \iff f'(a) \text{ istnieje. Ponadto, } \frac{\partial f}{\partial \xi}(a) = f'(a)\xi.$$

Zauważmy, że dla $\alpha \in \mathbb{R}_*$ mamy

$$\frac{\partial f}{\partial(\alpha\xi)}(a) \text{ istnieje } \iff \frac{\partial f}{\partial \xi}(a) \text{ istnieje. Ponadto, } \frac{\partial f}{\partial(\alpha\xi)}(a) = \alpha\frac{\partial f}{\partial \xi}(a).$$

Ponieważ różniczkowanie „kierunkowe" sprowadza się do różniczkowania pewnej pomocniczej funkcji jednej zmiennej rzeczywistej, wiele reguł różniczkowania kierunkowego wynika natychmiast z odpowiednich własności różniczkowania funkcji jednej zmiennej rzeczywistej, np. (przy oczywistych założeniach o f i g) mamy:

Jeżeli $\frac{\partial f}{\partial \xi}(a)$ i $\frac{\partial g}{\partial \xi}(a)$ istnieją, to $\frac{\partial(f+g)}{\partial \xi}(a)$ istnieje oraz

$$\frac{\partial(f + g)}{\partial \xi}(a) = \frac{\partial f}{\partial \xi}(a) + \frac{\partial g}{\partial \xi}(a).$$

Jeżeli $\frac{\partial f}{\partial \xi}(a)$ i $\frac{\partial g}{\partial \xi}(a)$ istnieją oraz $B \in \mathcal{L}(F, G; H)$, to $\frac{\partial(B(f,g))}{\partial \xi}(a)$ istnieje oraz

$$\frac{\partial(B(f, g))}{\partial \xi}(a) = B\Big(\frac{\partial f}{\partial \xi}(a), g(a)\Big) + B\Big(f(a), \frac{\partial g}{\partial \xi}(a)\Big).$$

Przykład 10.2.1.

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{x_1^4 x_2^2}{x_1^8 + x_2^4}, & \text{jeżeli } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{jeżeli } (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}.$$

Wtedy $\frac{\partial f}{\partial \xi}(0,0) = 0$ dla dowolnego $\xi \in \mathbb{R}^2$ (1), ale $f(t,t^2) = \frac{1}{2}$, a więc, w szczególności, f nie jest ciągła w $(0,0)$.

Definicja 10.2.2. Mówimy, że f ma w punkcie a *różniczkę Gâteaux (różniczkę słabą)* (2), jeżeli $\frac{\partial f}{\partial \xi}(a)$ istnieje dla dowolnego $\xi \in E$ oraz odwzorowanie $E \ni \xi \overset{\delta_a f}{\longmapsto} \frac{\partial f}{\partial \xi}(a) \in F$ jest liniowe i ciągłe; odwzorowanie to nazywamy *różniczką Gâteaux odwzorowania f w punkcie a*.

Przykład 10.2.1 pokazuje, że istnienie różniczki Gâteaux nie implikuje nawet ciągłości odwzorowania w punkcie.

Jeżeli $L : E \longrightarrow F$ jest operatorem liniowym nieciągłym (takim, jak, np. w Obserwacji 9.2.4), to $\frac{\partial L}{\partial \xi}(0) = L(\xi)$ dla dowolnego $\xi \in E$. W szczególności, odwzorowanie $E \ni \xi \longmapsto \frac{\partial L}{\partial \xi}(a) \in F$ jest liniowe, ale nieciągłe.

Dla $E = \mathbb{R}$ mamy: $\delta_a f$ istnieje $\iff f'(a)$ istnieje.

Jeżeli $E = \mathbb{R}^n$ i $(e_1, \dots, e_n)$ jest bazą kanoniczną w $\mathbb{R}^n$, to

$$\frac{\partial f}{\partial e_j}(a) =: \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

nazywamy j-tą *pochodną cząstkową* (o ile istnieje).

Jeżeli ponadto $F = \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$, to macierz

$$Jf(a) := \left[\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a)\right]_{j=1,\dots,m,\ k=1,\dots,n}$$

(o ile wszystkie pochodne cząstkowe istnieją) nazywamy *macierzą Jacobiego odwzorowania f w punkcie a* (3). Jeżeli $m = 1$, to macierz Jacobiego nazywamy *gradientem* funkcji f w punkcie a:

$$\operatorname{grad} f(a) = \left[\tfrac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \tfrac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right].$$

Jeżeli $m = n$, to $\det Jf(a)$ nazywamy *jakobianem* odwzorowania f w punkcie a.

Przykład 10.2.3. Niech

$$f(x_1,x_2) := \begin{cases} \frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}, & \text{jeżeli } (x_1,x_2) \neq (0,0) \\ 0, & \text{jeżeli } (x_1,x_2) = (0,0) \end{cases}.$$

Wtedy $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = 0$, ale $\frac{\partial f}{\partial (1,1)}(0,0)$ nie istnieje.

Niech

$$f(x_1,x_2) := \begin{cases} \frac{x_1x_2(x_1-x_2)}{x_1^2+x_2^2}, & \text{jeżeli } (x_1,x_2) \neq (0,0) \\ 0, & \text{jeżeli } (x_1,x_2) = (0,0) \end{cases}.$$

Wtedy $\frac{\partial f}{\partial \xi}(0,0) = f(\xi)$ dla dowolnego $\xi \in \mathbb{R}^2$, ale odwzorowanie

$$\mathbb{R}^2 \ni \xi \longmapsto \frac{\partial f}{\partial \xi}(0,0) \in \mathbb{R}$$

nie jest liniowe.

Obserwacja 10.2.4. (a) Jeżeli E jest skończenie wymiarowa, to dla istnienia różniczki Gâteaux istotna jest tylko liniowość odwzorowania $\xi \longmapsto \frac{\partial f}{\partial \xi}(a)$.

(b) Jeżeli $E = \mathbb{R}^n$ i $\delta_a f$ istnieje, to

$$(\delta_a f)(\xi) = \frac{\partial f}{\partial \xi}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\xi_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\xi_n = \operatorname{grad} f(a).\xi, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n.$$

(c) Jeżeli $F = F_1 \times \dots \times F_N$, $f = (f_1, \dots, f_N)$, to $\delta_a f$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $\delta_a f_1, \dots, \delta_a f_N$ istnieją. Ponadto, $\delta_a f := (\delta_a f_1, \dots, \delta_a f_N)$.

---

(1) Dla $\xi \neq (0,0)$ mamy $\frac{f(t\xi)-f(0)}{t} = \frac{t\xi_1^4\xi_2^2}{t^4\xi_1^8+\xi_2^4}$.

(2) René Gâteaux (1880–1914).

(3) Carl Jacobi (1804–1851).

(d) Jeżeli $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^m$ i $\delta_a f$ istnieje, to $Jf(a)$ jest reprezentacją macierzową $\delta_a f$, czyli

$$(\delta_a f)(\xi) = \frac{\partial f}{\partial \xi}(a) = Jf(a).\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Niech $\xi_1, \dots, \xi_k \in E$. Jeżeli pochodna kierunkowa

$$\frac{\partial^{k-1} f}{\partial \xi_{k-1} \dots \partial \xi_1}(x)$$

rzędu $k-1$ w kierunku wektorów $\xi_1, \dots, \xi_{k-1}$ istnieje dla x z pewnego otoczenia punktu a, to definiujemy *pochodną kierunkową rzędu k w kierunku wektorów* $\xi_1, \dots, \xi_k$ jako

$$\frac{\partial^k f}{\partial \xi_k \dots \partial \xi_1}(a) = \frac{\partial}{\partial \xi_k}\Big(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial \xi_{k-1} \dots \partial \xi_1}\Big)(a).$$

Odnotujmy (Ćwiczenie), że

$$\frac{\partial^{k+\ell} f}{\partial \xi_{k+\ell} \dots \partial \xi_1}(a) = \frac{\partial^\ell}{\partial \xi_{k+\ell} \dots \partial \xi_{k+1}}\Big(\frac{\partial^k f}{\partial \xi_k \dots \partial \xi_1}\Big)(a).$$

W szczególności, dla $E = \mathbb{R}^n$ definiujemy n^k pochodnych cząstkowych rzędu k:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}}(a), \quad i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}.$$

Przykład 10.2.5. Niech

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{jeżeli } (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0, & \text{jeżeli } (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}.$$

Wtedy $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$ i $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)$ istnieją dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^2$ oraz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0,0) = 1 \quad (\text{Ćwiczenie}).$$

Propozycja 10.2.6 (Twierdzenie o równości pochodnych mieszanych)**.** *Załóżmy, że pochodne kierunkowe*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}(x), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi}(x)$$

istnieją dla x z otoczenia punktu a i są ciągłe w punkcie a. Wtedy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi}(a).$$

Dowód. Możemy założyć, że $\xi, \eta \neq 0$ i, dalej, że $\|\xi\| = \|\eta\| = 1$. Niech kula $B(a, 3r) \subset \varOmega$ będzie taka, że pochodne mieszane istnieją dla dowolnego punktu $x \in B(a, 3r)$. Zdefiniujmy

$$\varPhi(t) := f(a + t\xi + t\eta) - f(a + t\xi) - f(a + t\eta) + f(a) - t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}(a), \quad |t| \leqslant r.$$

Pokażemy, że $\varPhi(t)/t^2 \longrightarrow 0$ przy $t \longrightarrow 0+$, co wobec symetrii wyrażenia

$$f(a + t\xi + t\eta) - f(a + t\xi) - f(a + t\eta) + f(a),$$

da żądany wynik.

Wystarczy pokazać, że

$$\|\varPhi(t)\| \leqslant t^2 \sup\Big\{\Big\|\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}(a + x\xi + y\eta) - \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}(a)\Big\| : 0 \leqslant x, y \leqslant t\Big\}, \quad 0 \leqslant t \leqslant r. \tag{†}$$

Ustalmy $0 < t \leqslant r$ i niech

$$g(y) := f(a + t\xi + y\eta) - f(a + y\eta) - ty \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}(a), \quad 0 \leqslant y \leqslant r.$$

Mamy $\Phi(t) = g(t) - g(0)$. Ponadto,

$$g'(y) = \frac{\partial f}{\partial \eta}(a + t\xi + y\eta) - \frac{\partial f}{\partial \eta}(a + y\eta) - t\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}(a).$$

Na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych, mamy:

$$\|\Phi(t)\| \leqslant t \sup\{\|g'(y)\| : 0 \leqslant y \leqslant t\}. \tag{‡}$$

Ustalmy teraz $0 < y \leqslant t$ i niech

$$h(x) := \frac{\partial f}{\partial \eta}(a + x\xi + y\eta) - x\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}(a), \quad 0 \leqslant x \leqslant r.$$

Mamy $g'(y) = h(t) - h(0)$. Ponadto,

$$h'(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}(a + x\xi + y\eta) - \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}(a).$$

Na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych, dostajemy

$$\|g'(y)\| \leqslant y \sup\{\|h'(x)\| : 0 \leqslant x \leqslant t\},$$

co łącznie z (‡) daje (†) □

Wniosek 10.2.7. *Niech $\xi_1, \dots, \xi_k \in E$ ($k \geqslant 2$). Załóżmy, że dla dowolnego $\ell \in \{2, \dots, k\}$ i dla dowolnego odwzorowania injektywnego $\tau : \{1, \dots, \ell\} \longrightarrow \{1, \dots, k\}$, pochodna kierunkowa*

$$\frac{\partial^\ell f}{\partial \xi_{\tau(\ell)} \dots \partial \xi_{\tau(1)}}(x)$$

istnieje dla $x \in \Omega$ oraz funkcja

$$\Omega \ni x \longmapsto \frac{\partial^\ell f}{\partial \xi_{\tau(\ell)} \dots \partial \xi_{\tau(1)}}(x)$$

jest ciągła na całym Ω dla $\ell < k$ oraz jest ciągła w punkcie a dla $\ell = k$. Wtedy dla dowolnej permutacji k–elementowej σ mamy:

$$\frac{\partial^k f}{\partial \xi_{\sigma(k)} \dots \partial \xi_{\sigma(1)}}(a) = \frac{\partial^k f}{\partial \xi_k \dots \partial \xi_1}(a).$$

Dowód. Zastosujemy indukcję ze względu na k. Przypadek $k = 2$ został rozwiązany w poprzedniej propozycji. Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla $k - 1$ i niech σ będzie dowolną permutacją k elementową.

Przypadek $\sigma(j) = j$, $j = 1, \dots, k-2$, $\sigma(k-1) = k$, $\sigma(k) = k-1$ redukuje się do przypadku $k = 2$:

$$\frac{\partial^k f}{\partial \xi_{\sigma(k)} \dots \partial \xi_{\sigma(1)}}(a) = \frac{\partial^2}{\partial \xi_{k-1} \partial \xi_k}\Big(\frac{\partial^{k-2} f}{\partial \xi_{k-2} \dots \partial \xi_1}\Big)(a) = \frac{\partial^2}{\partial \xi_k \partial \xi_{k-1}}\Big(\frac{\partial^{k-2} f}{\partial \xi_{k-2} \dots \partial \xi_1}\Big)(a) = \frac{\partial^k f}{\partial \xi_k \dots \partial \xi_1}(a).$$

Przypadek $\sigma(k) = k$ wynika z założenia indukcyjnego:

$$\frac{\partial^k f}{\partial \xi_{\sigma(k)} \dots \partial \xi_{\sigma(1)}}(a) = \frac{\partial}{\partial \xi_k}\Big(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial \xi_{\sigma(k-1)} \dots \partial \xi_{\sigma(1)}}\Big)(a) = \frac{\partial}{\partial \xi_k}\Big(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial \xi_{k-1} \dots \partial \xi_1}\Big)(a) = \frac{\partial^k f}{\partial \xi_k \dots \partial \xi_1}(a).$$

Pozostałe przypadki wynikają z faktu, iż każda permutacja jest złożeniem pewnej liczby permutacji powyższych dwóch typów. □

10.3. Różniczkowanie odwzorowań zmiennej wektorowej

Niech E i F będą przestrzeniami unormowanymi nad $\mathbb{K}$, niech $\Omega \subset E$ będzie zbiorem otwartym, $f : \Omega \longrightarrow F$ i niech $a \in \Omega$.

Definicja 10.3.1. Powiemy, że odwzorowanie f jest *różniczkowalne* w punkcie a (ma w punkcie a *różniczkę Frécheta (mocną)* (4)), jeżeli istnieje odwzorowanie $L \in \mathcal{L}(E, F)$ takie, że

$$f(a + h) = f(a) + L(h) + o(\|h\|) \text{ gdy } h \longrightarrow 0.$$

---

(4) René Fréchet (1878–1973).

Równoważnie,

$$\lim_{E_*\ni h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-L(h)}{\|h\|}=0.$$

Odnotujmy, że oczywiście definicja ta nie zależy od wyboru normy (w klasie norm równoważnych).

Zbiór wszystkich odwzorowań $f : \Omega \longrightarrow F$ różniczkowalnych w punkcie a będziemy oznaczać roboczo przez $\mathcal{D}(\Omega, F; a)$. Oczywiście, każde odwzorowanie stałe jest różniczkowalne ($L = 0$).

Obserwacja 10.3.2. (a) Jeżeli f jest różniczkowalne w punkcie a, to f jest ciągłe w punkcie a.

(b) Każde odwzorowanie liniowe i ciągłe $L \in \mathcal{L}(E, F)$ jest różniczkowalne w każdym punkcie $a \in E$.

Istotnie, $L(a + h) = L(a) + L(h)$.

(c) Jeżeli f jest różniczkowalne w punkcie a, to f ma różniczkę Gâteaux w punkcie a i $\delta_a f = L$ (gdzie L jest odwzorowaniem występującym w definicji różniczkowalności w sensie Frécheta).

Istotnie, dla dowolnego $\xi \in E$ mamy

$$f(a+t\xi)=f(a)+L(t\xi)+o(\|t\xi\|)=f(a)+tL(\xi)+o(t),\quad \text{gdy } t\longrightarrow 0.$$

Jak wiemy, istnieją odwzorowania nieciągłe mające różniczkę Gâteaux, a więc różniczkowalność w sensie Frécheta jest istotnie mocniejsza.

(d) Jeżeli $E = \mathbb{R}^n$, to f jest różniczkowalne w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, F)$ oraz odwzorowania $g_1, \dots, g_n : \Omega - a \longrightarrow F$ takie, że

$$\lim_{h\to 0} g_j(h) = 0 = g_j(0),\quad j = 1,\dots,n,$$

$$f(a+h)=f(a)+L(h)+\sum_{j=1}^{n} h_j g_j(h),\quad h=(h_1,\dots,h_n)\in\Omega-a.$$

Istotnie, jest widoczne, że powyższy warunek jest wystarczający. Przypuśćmy teraz, że $f(a + h) = f(a) + L(h) + o(\|h\|)$, gdzie $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, F)$. Definiujemy

$$g_j(h) := \frac{h_j}{\|h\|^2}\Big(f(a+h)-f(a)-L(h)\Big),\quad h\in(\Omega-a)_*,\quad g_j(0):=0,\quad j=1,\dots,n.$$

Z powyższej obserwacji wynika, że jeżeli f jest różniczkowalne w punkcie a, to odwzorowanie L występujące w definicji jest jednoznacznie wyznaczone. Oznaczamy je przez $f'(a)$ i nazywamy *pochodną (różniczką Frécheta)* odwzorowania f w punkcie a. Mamy więc

$$f'(a)\in\mathcal{L}(E,F),\qquad f'(a)(h)=(\delta_a f)(h)=\frac{\partial f}{\partial h}(a),\quad h\in E.$$

Przypomnijmy, że $\text{const}'(a) = 0$ i jeżeli $L \in \mathcal{L}(E, F)$, to $L'(a) = L$ dla dowolnego $a \in E$ (Obserwacja 10.3.2(b)).

Uwaga 10.3.3. W przypadku przestrzeni zespolonych musimy wyraźnie rozróżniać pomiędzy różniczkowaniem w sensie zespolonym i różniczkowaniem w sensie rzeczywistym. Oczywiście każde odwzorowanie $\mathbb{C}$–liniowe jest $\mathbb{R}$–liniowe. Tak więc, jeżeli E, F są przestrzeniami nad $\mathbb{C}$ i odwzorowanie f jest różniczkowalne w punkcie a w sensie zespolonym (tzn. różniczka $f'(a)$ jest $\mathbb{C}$–liniowa), to f jest różniczkowalne w punkcie a w sensie rzeczywistym. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Np. jeżeli $L \in \mathcal{L}(E, F)$ jest odwzorowaniem $\mathbb{R}$–liniowym, które nie jest $\mathbb{C}$–liniowe, to L jest różniczkowalne w sensie rzeczywistym, ale nie jest różniczkowalne w sensie zespolonym; dla przykładu: $E = F := \mathbb{C}$, $L(z) := \overline{z}$, $z \in \mathbb{C}$.

Obserwacja 10.3.4. (a) Jeżeli $E = \mathbb{R}$, to f jest różniczkowalne w sensie Frécheta w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(a)$ istnieje w zwykłym sensie. Ponadto, $f'(a)(h) = f'(a)h$ dla dowolnego $h \in \mathbb{R}$.

(b) Jeżeli $F = F_1 \times \dots \times F_N$, $f = (f_1, \dots, f_N)$, to

$$f\in\mathcal{D}(\Omega,F;a)\iff f_j\in\mathcal{D}(\Omega,F_j;a),\ j=1,\dots,N.\ \text{Ponadto, } f'(a)=(f_1'(a),\dots,f_N'(a)).$$

(c) Jeżeli $f, g \in \mathcal{D}(\Omega, F; a)$, to $\mu f + \nu g \in \mathcal{D}(\Omega, F; a)$ oraz $(\mu f + \nu g)'(a) = \mu f'(a) + \nu g'(a)$, $\mu, \nu \in \mathbb{K}$. Innymi słowy, $\mathcal{D}(\Omega, F; a)$ jest $\mathbb{K}$–przestrzenią wektorową, a operator $\mathcal{D}(\Omega, F; a) \ni f \longmapsto f'(a) \in \mathcal{L}(E, F)$ jest $\mathbb{K}$–liniowy.

(d) Jeżeli $L \in \mathcal{L}(F, G)$ (gdzie G jest przestrzenią unormowaną) i $f \in \mathcal{D}(\Omega, F; a)$, to $L \circ f \in \mathcal{D}(\Omega, G; a)$ i $(L \circ f)'(a) = L \circ f'(a)$.

(e) Jeżeli $B \in \mathcal{L}(E,F;G)$, to $B'(a,b)(h,k) = B(h,b) + B(a,k)$, $(a,b),(h,k) \in E \times F$.

Istotnie, odwzorowanie $E \times F \ni (h,k) \overset{L}{\longmapsto} B(h,b) + B(a,k) \in G$ jest liniowe i ciągłe. Ponadto,

$$B(a+h,b+k) - B(a,b) - (B(h,b) + B(a,k)) = B(h,k)$$

oraz

$$\frac{\|B(h,k)\|}{\|h\|+\|k\|} \leqslant \frac{\|B\|\|h\|\|k\|}{\|h\|+\|k\|} \leqslant \|B\|(\|h\|+\|k\|).$$

Propozycja 10.3.5. (a) *Jeżeli $f \in \mathcal{D}(\Omega,F;a)$, $g \in \mathcal{D}(\Omega,G;a)$, $B \in \mathcal{L}(F,G;H)$, gdzie F, G i H są przestrzeniami unormowanymi, to $B(f,g) \in \mathcal{D}(\Omega,H;a)$ oraz*

$$(B(f,g))'(a)(h) = B(f'(a)(h),g(a)) + B(f(a),g'(a)(h)), \quad h \in E.$$

(b) *W szczególności, jeżeli $f \in \mathcal{D}(\Omega,\mathbb{K};a)$ i $g \in \mathcal{D}(\Omega,F;a)$, to $f \cdot g \in \mathcal{D}(\Omega,F;a)$ oraz*

$$(f \cdot g)'(a)(h) = f'(a)(h) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)(h), \quad h \in E.$$

(c) *Jeżeli H jest przestrzenią Hilberta, $f,g \in \mathcal{D}(\Omega,H;a)$, to*

$$\langle f,g\rangle \in \mathcal{D}(\Omega,H;a) \text{ i } (\langle f,g\rangle)'(a) = \langle f'(a),g(a)\rangle + \langle f(a),g'(a)\rangle.$$

Dowód. (a) Operator $E \ni h \overset{L}{\longmapsto} B(f'(a)(h),g(a)) + B(f(a),g'(a)(h))$ jest oczywiście liniowy i ciągły. Wobec dwuliniowości B, dostajemy:

$$\frac{B(f(a+h),g(a+h)) - B(f(a),g(a)) - L(h)}{\|h\|} = B\Big(\frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)(h)}{\|h\|}, g(a+h)\Big)$$
$$+ B\Big(f(a), \frac{g(a+h)-g(a)-g'(a)(h)}{\|h\|}\Big) + B\Big(\frac{f'(a)(h)}{\|h\|}, g(a+h)-g(a)\Big) = A_1(h) + A_2(h) + A_3(h).$$

Ciągłość B oraz różniczkowalność f i g w punkcie a (w szczególności, ciągłość g w punkcie a) implikują, że $A_1(h) \longrightarrow 0$ i $A_2(h) \longrightarrow 0$ oraz $\|A_3(h)\| \leqslant \|B\|\|f'(a)\|\|g(a+h)-g(a)\| \longrightarrow 0$, gdy $h \longrightarrow 0$.

(b) wynika z (a).

(c) W przypadku, gdy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ własność ta wynika bezpośrednio z (a). W przypadku, gdy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ wystarczy zauważyć, że w dowodzie (a) korzystaliśmy tylko z $\mathbb{R}$–jednorodności. □

Propozycja 10.3.6 (Różniczkowanie złożenia)**.** *Niech G będzie przestrzenią unormowaną, niech $U \subset G$ będzie zbiorem otwartym, niech $\varphi : U \longrightarrow E$ i niech $t_0 \in U$. Załóżmy, że $\varphi \in \mathcal{D}(U,E;t_0)$, $f \in \mathcal{D}(\Omega,F;\varphi(t_0))$ i $\varphi(U) \subset \Omega$. Wtedy $f \circ \varphi \in \mathcal{D}(U,F;t_0)$ oraz $(f \circ \varphi)'(t_0) = f'(\varphi(t_0)) \circ \varphi'(t_0)$.*

Dowód. Niech $a := \varphi(t_0)$, $B := \varphi'(t_0)$, $A := f'(a)$,

$$\varphi(t_0+t) = \varphi(t_0) + B(t) + \beta(t)\|t\|, \quad f(a+h) = f(a) + A(h) + \alpha(h)\|h\|,$$

gdzie $\lim\limits_{t\to 0} \beta(t) = 0$, $\lim\limits_{h\to 0} \alpha(h) = 0$.

Oczywiście $A \circ B \in \mathcal{L}(G,F)$. Dla małych $t \in G_*$ niech

$$h(t) := \varphi(t_0+t) - \varphi(t_0) = B(t) + \beta(t)\|t\|.$$

Oczywiście $h(t) \longrightarrow 0$, gdy $t \longrightarrow 0$. Mamy:

$$\begin{aligned}(f \circ \varphi)(t_0+t) &= f(a+h(t)) = f(a) + A(B(t) + \beta(t)\|t\|) + \alpha(h(t))\|B(t) + \beta(t)\|t\|\| \\ &= (f \circ \varphi)(t_0) + A(B(t)) + \gamma(t)\|t\|,\end{aligned}$$

gdzie

$$\gamma(t) := A(\beta(t)) + \alpha(h(t))\Big\|\frac{B(t)}{\|t\|} + \beta(t)\Big\|.$$

Pozostaje jeszcze zauważyć, że $\gamma(t) \longrightarrow 0$, gdy $t \longrightarrow 0$. □

Obserwacja 10.3.7. Propozycja 10.3.5 wynika z Propozycji 10.3.6 i Obserwacji 10.3.4(b, e). Istotnie,

$$\begin{aligned}(B(f,g))'(a)(h) &= (B \circ (f,g))'(a)(h) = (B'((f,g)(a)) \circ ((f,g)'(a)))(h) \\ &= B'(f(a),g(a))(f'(a)(h),g'(a)(h)) = B(f'(a)(h),g(a)) + B(f(a),g'(a)(h)).\end{aligned}$$

Jeżeli $E = E_1 \times \dots \times E_N$, $a = (a_1, \dots, a_N)$, to definiujemy

$$\Omega_{a,j} := \{x_j \in E_j : (a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n) \in \Omega\},$$
$$f_{a,j}(x_j) := f(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n), \quad x_j \in \Omega_{a,j},\ j = 1, \dots, N;$$

zauważmy, że $\Omega_{a,j}$ jest zbiorem otwartym w E_j. Powiemy, że f ma w punkcie a *różniczkę cząstkową w kierunku przestrzeni* E_j, jeżeli różniczka $f'_{a,j}(a_j) \in \mathcal{L}(E_j, F)$ istnieje. Oznaczamy ją wtedy przez $\frac{\partial f}{\partial E_j}(a)$.

Obserwacja 10.3.8. Jeżeli $\dim E_j = 1$ i $E_j = \mathbb{R}\xi$ (dla pewnego j), to $\frac{\partial f}{\partial E_j}(a)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{\partial f}{\partial \xi}(a)$ istnieje. Ponadto,

$$\frac{\partial f}{\partial E_j}(a)(h_j) = \frac{\partial f}{\partial h_j}(a), \quad h_j \in E_j.$$

Propozycja 10.3.9. (a) *Jeżeli $f'(a)$ istnieje, to $\frac{\partial f}{\partial E_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial E_N}(a)$ istnieją oraz*

$$f'(a)(h) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial E_j}(a)(h_j), \quad h = (h_1, \dots, h_N) \in E_1 \times \dots \times E_N,$$

czyli

$$\frac{\partial f}{\partial E_j}(a)(h_j) = f'(a)(0, \dots, 0, h_j, 0, \dots, 0), \quad h_j \in E_j, \quad j = 1, \dots, N.$$

W szczególności, dla $E = \mathbb{R}^n$, jeżeli $f'(a)$ istnieje, to istnieją pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$ oraz $f'(a)(h) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)h_j$.

(b) *Niech $\varphi \in \mathcal{D}(U, E; t_0)$ i $f \in \mathcal{D}(\Omega, F; \varphi(t_0))$ będą takie, jak w twierdzeniu o różniczkowaniu złożenia. Załóżmy, że*

$$G = G_1 \times \dots \times G_p, \quad E = E_1 \times \dots \times E_n, \quad \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n).$$

Wtedy:

$$(f \circ \varphi)'(t_0)(X) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{\partial f}{\partial E_j}(\varphi(t_0)) \circ \frac{\partial \varphi_j}{\partial G_k}(t_0)\Big)(X_k), \quad X = (X_1, \dots, X_p) \in G_1 \times \dots \times G_p,$$

czyli

$$\frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial G_k}(t_0)(X_k) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{\partial f}{\partial E_j}(\varphi(t_0)) \circ \frac{\partial \varphi_j}{\partial G_k}(t_0)\Big)(X_k), \quad k = 1, \dots, p.$$

W szczególności, dla $G = \mathbb{K}^p$, $E = \mathbb{K}^n$, dostajemy

$$\frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial t_k}(t_0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\varphi(t_0)) \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k}(t_0), \quad k = 1, \dots, p.$$

Jeżeli ponadto $F = \mathbb{K}^m$, to powyższy wzór ma następującą interpretację macierzową:

$$J(f \circ \varphi)(t_0) = Jf(\varphi(t_0)).J\varphi(t_0). \quad (5)$$

Dowód. (a) Zauważmy, że $f_{a,j} = f \circ \psi_{a,j}$, gdzie

$$\Omega_{a,j} \ni x_j \overset{\psi_{a,j}}{\longmapsto} (a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n) \in E_1 \times \dots \times E_N.$$

Wystarczy teraz skorzystać z twierdzenia o różniczkowaniu złożenia:

$$f'_{a,j}(a_j)(h_j) = (f \circ \psi_{a,j})'(a_j)(h_j) = (f'(\psi_{a,j}(a_j)) \circ \psi'_{a,j}(a_j))(h_j) = f'(a)(0, \dots, 0, h_j, 0, \dots, 0).$$

---

(5) Przypomnijmy, że wzór ten jest prawdziwy przy założeniu, że $\varphi'(t_0)$ i $f'(\varphi(t_0))$ istnieją. Jeżeli istnieją tylko pochodne cząstkowe (tak, że wszystkie występujące obiekty mają sens), to wzór nie musi zachodzić. Dla przykładu, niech $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) := (t, t^2)$ (odnotujmy, że φ jest klasy $\mathcal{C}^\infty$), $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(t, t^2) := 0$, $f(t, 0) = f(0, t) := t$, a poza tym f jest określona dowolnie, $t_0 := 0$. Wtedy $\varphi(0) = (0, 0)$, $f \circ \varphi \equiv 0$, $J\varphi(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $Jf(0, 0) = [1, 1]$, $Jf(0, 0).J\varphi(0) = 1$.

(b) Na podstawie (a) mamy:

$$(f\circ\varphi)'(t_0)(X)=f'(\varphi(t_0))(\varphi'(t_0)(X))=f'(\varphi(t_0))\Big(\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial\varphi}{\partial G_k}(t_0)(X_k)\Big)$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial E_j}(\varphi(t_0))\Big(\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial\varphi_j}{\partial G_k}(t_0)(X_k)\Big)=\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{\partial f}{\partial E_j}(\varphi(t_0))\circ\frac{\partial\varphi_j}{\partial G_k}(t_0)\Big)(X_k).\quad\square$$

Twierdzenie 10.3.10 (Twierdzenie o przyrostach skończonych)**.** *Załóżmy, że $D\subset E$ jest obszarem gwiaździstym względem punktu a (tzn. $[a,x]\subset D$ dla dowolnego $x\in D$). Niech $f:D\longrightarrow F$ będzie odwzorowaniem ciągłym takim, że $f'(x)$ istnieje dla $x\in D\setminus S$, gdzie $S\subset D$ jest zbiorem takim, że $\#(S\cap[a,x])\leqslant\aleph_0$ dla dowolnego $x\in D$. Wtedy dla dowolnego $L\in\mathcal{L}(E,F)$ mamy:*

$$\|f(x)-f(a)-L(x-a)\|\leqslant\sup\{\|f'(\xi)-L\|:\xi\in[a,x]\setminus S\}\|x-a\|,\quad x\in D.$$

W szczególności,

$$\|f(x)-f(a)\|\leqslant\sup\{\|f'(\xi)\|:\xi\in[a,x]\setminus S\}\|x-a\|,\quad x\in D.$$

Dowód. Zastępując odwzorowanie f przez $f-L$ redukujemy dowód do przypadku $L=0$.

Ustalmy $x\in D$, $x\neq a$ i niech

$$g(t):=f(a+t(x-a)),\ t\in[0,1],\quad S':=\{t\in[0,1]:a+t(x-a)\in S\}.$$

Wtedy $g:[0,1]\longrightarrow F$ jest odwzorowaniem ciągłym i $g'(t)$ istnieje dla $t\in[0,1]\setminus S'$. Ponadto, na podstawie twierdzenia o różniczkowaniu złożenia, $g'(t)=f'(a+t(x-a))(x-a)$. Stąd, na podstawie klasycznego twierdzenia o przyrostach skończonych (zob. Wniosek 6.4.4), mamy:

$$\begin{aligned}\|f(x)-f(a)\|=\|g(1)-g(0)\|&\leqslant\sup\{\|g'(t)\|:t\in[0,1]\setminus S'\}\\&=\sup\{\|f'(a+t(x-a))(x-a)\|:t\in[0,1]\setminus S'\}\\&\leqslant\sup\{\|f'(\xi)\|:\xi\in[a,x]\setminus S\}\|x-a\|.\end{aligned}\quad\square$$

Wniosek 10.3.11. *Niech $D\subset E$ będzie dowolnym obszarem i niech $f:D\longrightarrow F$ będzie odwzorowaniem ciągłym takim, że $f'(x)=0$ dla $x\in D\setminus S$, gdzie $S\subset D$ jest zbiorem takim, że $\#(S\cap[a,b])\leqslant\aleph_0$ dla dowolnego odcinka $[a,b]\subset D$. Wtedy $f=\mathrm{const}$.*

Dowód. Na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych wnioskujemy, że dla dowolnej kuli $B(a,r)\subset D$ odwzorowanie $f|_{B(a,r)}$ jest stałe. Stąd, wobec spójności D, f musi być globalnie stałe. $\square$

Wniosek 10.3.12. *Niech $f:\Omega\longrightarrow F$ będzie funkcją ciągłą i różniczkowalną w $\Omega\setminus\{a\}$ dla pewnego $a\in\Omega$. Jeżeli $L:=\lim_{x\to a}f'(x)$ istnieje (granica w $\mathcal{L}(E,F)$), to $f'(a)$ istnieje i $f'(a)=L$.*

Dowód. Na podstawie poprzedniej propozycji mamy $f(a+h)=f(a)+L(h)+\alpha(h)\|h\|$, gdzie $\|\alpha(h)\|\leqslant\sup\{\|f'(\xi)-L\|:\xi\in(a,a+h]\}\underset{h\to0}{\longrightarrow}0$. $\square$

Obserwacja 10.3.13. Niech $D\subset E$ będzie obszarem. Dla dowolnych punktów $x,y\in D$, niech $\varrho_D^i(x,y)$ oznacza infimum wszystkich liczb postaci $\sum_{j=1}^{n}\|x_j-x_{j-1}\|$ gdzie $[x_0,\dots,x_n]\subset D$ jest łamaną łączącą x i y. Dostajemy funkcję $\varrho_D^i:D\times D\longrightarrow\mathbb{R}_+$. Oczywiście, na podstawie nierówności trójkąta, mamy $\varrho_D^i(x,y)\geqslant\|x-y\|$. Bez trudu sprawdzamy, że ϱ_D^i jest metryką. Jest to tzw. *metryka wewnętrzna* dla obszaru D. Ponadto, jeżeli $[x,y]\subset D$, to $\varrho_D^i(x,y)=\|x-y\|$. W szczególności, ϱ_D^i jest ciągła w wyjściowej topologii.

Jeżeli D jest ograniczonym obszarem gwiaździstym względem punktu x_0, to $\varrho_D^i(x,y)\leqslant\|x-x_0\|+\|y-x_0\|\leqslant2\operatorname{diam}D$. Odnotujmy, że istnieją obszary ograniczone $D\subset\mathbb{R}^2$ takie, że ϱ_D^i nie jest funkcją ograniczoną — Ćwiczenie.

Na podstawie Twierdzenia 10.3.10 dostajemy następującą wersję twierdzenia o przyrostach skończonych.

Twierdzenie 10.3.14 (Twierdzenie o przyrostach skończonych)**.** *Niech $D\subset E$ będzie dowolnym obszarem i niech $f:D\longrightarrow F$ będzie odwzorowaniem ciągłym takim, że $f'(x)$ istnieje dla $x\in D\setminus S$, gdzie $S\subset D$ jest zbiorem takim, że $\#(S\cap[a,b])\leqslant\aleph_0$ dla dowolnego odcinka $[a,b]\subset D$. Wtedy*

$$\|f(x)-f(y)\|\leqslant\sup\{\|f'(\xi)\|:\xi\in D\setminus S\}\varrho_D^i(x,y),\quad x,y\in D.$$

Propozycja 10.3.15. *Załóżmy, że $E = E_1 \times \dots \times E_N$ i $f : \varOmega \longrightarrow F$ jest odwzorowaniem takim, że*

- *różniczka cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial E_j}(x)$ istnieje dla x z pewnego otoczenia punktu a i jest ciągła w punkcie a dla dowolnego $j \in \{1, \dots, N\} \setminus \{j_0\}$,*
- *$\frac{\partial f}{\partial E_{j_0}}(a)$ istnieje.*

Wtedy $f'(a)$ istnieje.

Dowód. Zastosujemy indukcję ze względu na N.

- $N = 2$. Możemy założyć, że $a = 0$ oraz $j_0 = 2$. Wiemy, że jedynym kandydatem na $f'(0)$ jest odwzorowanie

$$E_1 \times E_2 \ni (h_1, h_2) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial E_1}(0)(h_1) + \frac{\partial f}{\partial E_2}(0)(h_2) \in F.$$

Jest to oczywiście odwzorowanie liniowe ciągłe. Dla małych $h = (h_1, h_2)$ szacujemy (korzystając z twierdzenia o przyrostach skończonych oraz definicji różniczki cząstkowej):

$$\begin{aligned}
&\Big\| f(h_1, h_2) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial E_1}(0)(h_1) - \frac{\partial f}{\partial E_2}(0)(h_2) \Big\| \\
&\leqslant \Big\| f(h_1, h_2) - f(0, h_2) - \frac{\partial f}{\partial E_1}(0)(h_1) \Big\| + \Big\| f(0, h_2) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial E_2}(0)(h_2) \Big\| \\
&\leqslant \sup \Big\{ \Big\| \frac{\partial f}{\partial E_1}(\xi_1, h_2) - \frac{\partial f}{\partial E_1}(0) \Big\| : \xi_1 \in [0, h_1] \Big\} \, \|h_1\| + o(\|h_2\|) = o(\|(h_1, h_2)\|).
\end{aligned}$$

- $N - 1 \rightsquigarrow N$. Możemy założyć, że $j_0 = N$. Wobec założenia indukcyjnego różniczka cząstkowa

$$\frac{\partial f}{\partial (E_2 \times \dots \times E_N)}(a)$$

istnieje. Teraz wystarczy wykorzystać przypadek $N = 2$. □

Fakt, że $f'(x)$ istnieje dla dowolnego $x \in \varOmega$ będziemy zapisywać symbolicznie: $f \in \mathcal{D}(\varOmega, F)$. Oczywiście $\mathcal{D}(\varOmega, F)$ jest $\mathbb{K}$–przestrzenią wektorową. Niech

$$\mathcal{BD}(\varOmega, F) := \{f \in \mathcal{D}(\varOmega, F) \cap \mathcal{B}(\varOmega, F) : f' \in \mathcal{B}(\varOmega, \mathcal{L}(E, F))\}.$$

Widać, że $\mathcal{BD}(\varOmega, F)$ jest przestrzenią wektorową, zaś funkcja

$$\mathcal{BD}(\varOmega, F) \ni f \longmapsto \|f\|_{\varOmega,1} := \sup\{\|f(x)\| : x \in \varOmega\} + \sup\{\|f'(x)\| : x \in \varOmega\}$$

jest normą na $\mathcal{BD}(\varOmega, F)$.

Jeżeli $f \in \mathcal{D}(\varOmega, F)$ oraz funkcja $E \ni x \overset{f'}{\longmapsto} f'(x) \in \mathcal{L}(E, F)$ jest ciągła, to mówimy, że f jest klasy $\mathcal{C}^1$ i piszemy $f \in \mathcal{C}^1(\varOmega, F)$. Jak zwykle, $\mathcal{C}^1(\varOmega) := \mathcal{C}^1(\varOmega, \mathbb{R})$.

Niech $\mathcal{BC}^1(\varOmega, F) := \mathcal{C}^1(\varOmega, F) \cap \mathcal{BD}(\varOmega, F)$.

Propozycja 10.3.16. *Załóżmy, że odwzorowanie $f : \varOmega \longrightarrow F$ ma w każdym punkcie $x \in \varOmega$ różniczkę Gâteaux $\delta_x f$.*

(a) *Jeżeli odwzorowanie*

$$\varOmega \ni x \longmapsto \delta_x f \in \mathcal{L}(E, F)$$

jest ciągłe w punkcie $a \in \varOmega$, to $f'(a)$ istnieje (i oczywiście $f'(a) = \delta_a f$).

(b) *$f \in \mathcal{C}^1(\varOmega, F)$ wtedy i tylko wtedy, gdy odwzorowanie $\varOmega \ni x \longmapsto \delta_x f \in \mathcal{L}(E, F)$ jest ciągłe.*

Dowód. (a) Zauważmy, że dla małych $h \in E$ funkcja

$$[0, 1] \ni t \overset{f_{a,h}}{\longmapsto} f(a + th) \in F$$

jest różniczkowalna oraz $f'_{a,h}(t) = \frac{\partial f}{\partial h}(a+th) = \delta_{a+th} f(h)$. Teraz, na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych, mamy

$$\begin{aligned}
&\|f(a + h) - f(a) - \delta_a f(h)\| = \|f_{a,h}(1) - f_{a,h}(0) - f'_{a,h}(0)(1 - 0)\| \\
&\leqslant \sup\{\|f'_{a,h}(t) - f'_{a,h}(0)\| : t \in [0, 1]\} = \sup\{\|\delta_{a+th} f(h) - \delta_a f(h)\| : t \in [0, 1]\} \\
&\leqslant \sup\{\|\delta_{a+th} f - \delta_a f\|_{\mathcal{L}(E,F)} : t \in [0, 1]\} \|h\| = o(\|h\|).
\end{aligned}$$

(b) wynika natychmiast z (a). □

Obserwacja 10.3.17. (a) $\mathcal{C}^1(\Omega, F)$ jest $\mathbb{K}$–przestrzenią wektorową.

(b) Jeżeli $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, F)$, $g \in \mathcal{C}^1(\Omega, G)$ i $B \in \mathcal{L}(F, G; H)$, to $B(f, g) \in \mathcal{C}^1(\Omega, H)$.

Istotnie, na podstawie Propozycji 10.3.5(a), mamy

$$(B(f, g))' = B(f', g) + B(f, g').$$

(c) Jeżeli $\varphi \in \mathcal{C}^1(U, E)$, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, F)$ i $\varphi(U) \subset \Omega$, to $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^1(U, F)$.

Istotnie, na podstawie Propozycji 10.3.6, mamy $(f \circ \varphi)' = (f' \circ \varphi) \circ \varphi'$.

(d) Jeżeli $E = E_1 \times \dots \times E_N$ i $\frac{\partial f}{\partial E_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial E_N}$ istnieją, to

$$f \in \mathcal{C}^1(\Omega, F) \Longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial E_j} \in \mathcal{C}(\Omega, \mathcal{L}(E_j, F)),\ j = 1, \dots, N.$$

W szczególności, dla $E = \mathbb{R}^n$, jeżeli $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ istnieją, to

$$f \in \mathcal{C}^1(\Omega, F) \Longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathcal{C}(\Omega, F),\ j = 1, \dots, n.$$

Istotnie, implikacja ($\Longrightarrow$) wynika z faktu, że (Propozycja 10.3.9)

$$\frac{\partial f}{\partial E_j}(x)(h_j) = f'(x)(0, \dots, 0, \underset{j}{h_j}, 0, \dots, 0), \quad x \in \Omega,\ h_j \in E_j,$$

a stąd

$$\Big\|\frac{\partial f}{\partial E_j}(x) - \frac{\partial f}{\partial E_j}(x_0)\Big\| \leqslant \|f'(x) - f'(x_0)\|, \quad j = 1, \dots, N. \quad (^6)$$

Dla dowodu implikacji ($\Longleftarrow$) zauważmy najpierw, że na podstawie Propozycji 10.3.15 wiemy, że $f \in \mathcal{D}(\Omega, F)$. Dalej mamy

$$\|f'(x) - f'(x_0)\| = \sup\Big\{\Big\|\sum_{j=1}^{N}\Big(\frac{\partial f}{\partial E_j}(x)(h_j) - \frac{\partial f}{\partial E_j}(x_0)(h_j)\Big)\Big\| : \|h_j\| \leqslant 1,\ j = 1, \dots, N\Big\}$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{N}\Big\|\frac{\partial f}{\partial E_j}(x) - \frac{\partial f}{\partial E_j}(x_0)\Big\| \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0.$$

Twierdzenie 10.3.18 (Twierdzenie o różniczkowaniu szeregu wyraz po wyrazie). *Niech $D \subset E$ będzie ograniczonym obszarem gwiaździstym względem x_0 i niech F będzie przestrzenią Banacha.*

(a) *Załóżmy, że mamy rodzinę $(f_i)_{i \in I} \subset \mathcal{D}(D, F)$ taką, że:*
- *$(f_i')_{i \in I}$ jest rodziną jednostajnie sumowalną na D,*
- *$(f_i(x_0))_{i \in I}$ jest rodziną sumowalną.*

Wtedy $(f_i)_{i \in I}$ jest rodziną jednostajnie sumowalną na D, funkcja $f := \sum\limits_{i \in I} f_i$ jest różniczkowalna na D oraz $f' = \sum\limits_{i \in I} f_i'$, czyli $\big(\sum\limits_{i \in I} f_i\big)' = \sum\limits_{i \in I} f_i'$.

(b) *Załóżmy, że mamy ciąg $(f_\nu)_{\nu=1}^\infty \subset \mathcal{D}(D, F)$ taki, że:*
- *szereg $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} f_\nu'$ jest zbieżny jednostajnie na D,*
- *szereg $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x_0)$ jest zbieżny.*

Wtedy szereg $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} f_\nu$ jest zbieżny jednostajnie na D, funkcja $f := \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} f_\nu$ jest różniczkowalna na D oraz $f' = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} f_\nu'$, czyli $\big(\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} f_\nu\big)' = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} f_\nu'$.

(c) *Załóżmy, że mamy ciąg $(f_\nu)_{\nu=1}^\infty \subset \mathcal{D}(D, F)$ taki, że:*
- *ciąg $(f_\nu')_{\nu=1}^\infty$ jest zbieżny jednostajnie na D,*
- *ciąg $(f_\nu(x_0))_{\nu=1}^\infty$ jest zbieżny.*

$(^6)$ W $E_1 \times \dots \times E_N$ wybieramy normę maksimum.

Wtedy ciąg $(f_\nu)_{\nu=1}^\infty$ *jest zbieżny jednostajnie na* D*, funkcja* $f := \lim_{\nu\to+\infty} f_\nu$ *jest różniczkowalna na* D *oraz* $f' = \lim_{\nu\to+\infty} f'_\nu$*, czyli* $\big(\lim_{\nu\to+\infty} f_\nu\big)' = \lim_{\nu\to+\infty} f'_\nu$.

Dowód. (a) Niech

$$g_i := f'_i : D \longrightarrow \mathcal{L}(E,F),\ i \in I, \quad g := \sum_{i\in I} f'_i.$$

Niech $f_A := \sum_{i\in A} f_i$, $A \in \mathcal{F}(I)$. Zauważmy, że f_A jest funkcją różniczkowalną oraz $(f_A)' = g_A$. Weźmy $\varepsilon > 0$ i niech $C(\varepsilon) \in \mathcal{F}(I)$ będzie takie, że dla $A \in \mathcal{F}(I \setminus C(\varepsilon))$ mamy $\|f_A(x_0)\| \leqslant \varepsilon$ i $\|g_A(x)\| \leqslant \varepsilon$, $x \in D$. Na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych (Twierdzenie 10.3.10), dla $A \in \mathcal{F}(I \setminus C(\varepsilon))$ i $x \in D$ mamy:

$$\|f_A(x)\| \leqslant \|f_A(x_0)\| + \|f_A(x) - f_A(x_0)\| \leqslant \varepsilon + \sup\{\|g_A(\xi)\| : \xi \in [x, x_0]\}\|x - x_0\| \leqslant \varepsilon + \varepsilon \operatorname{diam} D.$$

Wynika stąd, że $(f_i)_{i\in I}$ jest rodziną jednostajnie sumowalną.

Ustalmy $a \in D$ i niech

$$h_i(x) := \begin{cases} \frac{f_i(x)-f_i(a)-f'_i(a)(x-a)}{\|x-a\|}, & \text{jeżeli } x \neq a \\ 0, & \text{jeżeli } x = a \end{cases}, \quad x \in D, \quad i \in I.$$

Zauważmy, że każde z odwzorowań h_i jest ciągłe w punkcie a. Rodzina $(h_i)_{i\in I}$ jest jednostajnie sumowalna na D.

Istotnie, mamy

$$h_A(x) = \frac{f_A(x) - f_A(a) - g_A(a)(x-a)}{\|x-a\|}, \quad x \neq a,$$

a stąd, na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych, dla x bliskich a, dostajemy

$$\|h_A(x)\| \leqslant \sup\{\|g_A(\xi) - g_A(a)\| : \xi \in [x,a]\} \leqslant 2\sup\{\|g_A(\xi)\| : \xi \in D\},$$

co, na podstawie kryterium Cauchy'ego, daje jednostajną sumowalność.

Teraz, na podstawie własności rodzin jednostajnie sumowalnych, mamy

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - g(a)(x-a)}{\|x-a\|} = \lim_{x\to a} \sum_{i\in I} h_i(x) = \sum_{i\in I} \lim_{x\to a} h_i(x) = 0,$$

co kończy dowód.

(b) Dowód jest analogiczny — Ćwiczenie.

(c) wynika z (b). □

Wniosek 10.3.19. *Niech* $D \subset E$ *będzie obszarem. Załóżmy, że* F *jest przestrzenią Banacha. Wtedy* $(\mathcal{BD}(D,F), \|\ \|_{D,1})$ *jest przestrzenią Banacha. Ponadto,* $\mathcal{BC}^1(D,F)$*, jako podprzestrzeń domknięta, jest również przestrzenią Banacha.*

Dowód. Niech $(f_\nu)_{\nu=1}^\infty \subset \mathcal{BD}(P,F)$ będzie dowolnym ciągiem Cauchy'ego. Wtedy $(f_\nu)_{\nu=1}^\infty$ jest ciągiem Cauchy'ego w $\mathcal{B}(D,F)$, a $(f'_\nu)_{\nu=1}^\infty$ jest ciągiem Cauchy'ego w $\mathcal{B}(D,\mathcal{L}(E,F))$. Ponieważ przestrzenie

$$\mathcal{B}(D,F) \text{ i } \mathcal{B}(D,\mathcal{L}(E,F))$$

są zupełne, zatem $f_\nu \longrightarrow g_0 \in \mathcal{B}(D,F)$ jednostajnie na D i $f'_\nu \longrightarrow g_1 \in \mathcal{B}(D,\mathcal{L}(E,F))$ jednostajnie na D. Teraz pozostaje już tylko skorzystać lokalnie z Propozycji 10.3.18, aby stwierdzić, że $g_0 \in \mathcal{D}(D,F)$ i $g_1 = g'_0$. □

Obserwacja 10.3.20. Korzystając z Obserwacji 10.3.13, możemy uogólnić Propozycję 10.3.18 na takie obszary $D \subset E$, dla których ϱ_D^i jest funkcją ograniczoną (punkt x_0 może być wówczas dowolnym punktem obszaru D).

10.4. Druga pochodna

Niech E i F będą przestrzeniami unormowanymi nad $\mathbb{K}$. Niech $\Omega \subset E$ będzie zbiorem otwartym, $f : \Omega \longrightarrow F$, $a \in \Omega$. Będziemy chcieli zdefiniować pojęcie drugiej pochodnej funkcji f w punkcie a.

Definicja 10.4.1. Mówimy, że f ma *drugą pochodną (różniczkę Frécheta, różniczkę mocną) w punkcie* a, jeżeli $f'(x)$ istnieje dla $x \in V$, gdzie $V \subset \Omega$ jest pewnym otoczeniem otwartym punktu a, oraz odwzorowanie $f' : V \longrightarrow \mathcal{L}(E, F)$ ma pochodną w punkcie a. Definiujemy *drugą pochodną (drugą różniczkę Frécheta, drugą różniczkę mocną)* odwzorowania f w punkcie a:

$$f''(a) := (f')'(a) \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F)) \simeq \mathcal{L}^2(E, F);$$

aby uniknąć nieporozumień ustalamy identyfikację

$$\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F)) \ni A \longmapsto (E \times E \ni (\xi_1, \xi_2) \longmapsto A(\xi_1)(\xi_2) \in F) \in \mathcal{L}^2(E, F),$$
$$f''(a)(\xi_1, \xi_2) \simeq f''(a)(\xi_1)(\xi_2), \quad \xi_1, \xi_2 \in E.$$

Zbiór wszystkich odwzorowań $f : \Omega \longrightarrow F$, dla których $f''(a)$ istnieje oznaczamy przez $\mathcal{D}^2(\Omega, F; a)$.

Oczywiście, dla $E = \mathbb{R}$ powyższa definicja jest równoważna istnieniu $f''(a)$ (w sensie klasycznym) oraz

$$f''(a)(\xi_1, \xi_2) = f''(a)\xi_1\xi_2, \quad \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}.$$

Propozycja 10.4.2 (Por. Obserwacja 10.6.1(c))**.** *Jeżeli $f''(a)$ istnieje, to dla dowolnego $\xi \in E$ odwzorowanie $x \longmapsto f'(x)(\xi)$ ma pochodną w punkcie a oraz*

$$f''(a)(\xi, \eta) = (x \longmapsto f'(x)(\eta))'(a)(\xi), \quad \xi, \eta \in E.$$

W szczególności:

- *dla dowolnych $\xi, \eta \in E$ pochodna kierunkowa $\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}(a)$ istnieje oraz $f''(a)(\xi, \eta) = \frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}(a)$.*
- *jeżeli $E = \mathbb{R}^n$, to wszystkie drugie pochodne cząstkowe $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$, $i, j = 1, \dots, n$, istnieją oraz*

$$f''(a)(\xi, \eta) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)\xi_j\eta_i, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n),\ \eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Dowód. Wiemy, że

$$f'(a + \xi) = f'(a) + f''(a)(\xi) + o(\|\xi\|) \text{ przy } \xi \longrightarrow 0 \quad (\text{równość w } \mathcal{L}(E, F)).$$

Podstawiając η dostajemy:

$$f'(a + \xi)(\eta) = f'(a)(\eta) + f''(a)(\xi, \eta) + o(\|\xi\|) \text{ przy } \xi \longrightarrow 0,$$

co daje żądany wynik. □

Niech $\mathcal{L}^2_s(E, F)$ oznacza zbiór wszystkich odwzorowań symetrycznych z $\mathcal{L}^2(E, F)$. Odnotujmy, że $\mathcal{L}^2_s(E, F)$ jest podprzestrzenią domkniętą $\mathcal{L}^2(E, F)$. W szczególności, jeżeli F jest Banacha, to przestrzeń $\mathcal{L}^2_s(E, F)$ jest Banacha.

Twierdzenie 10.4.3 (Twierdzenie o symetrii drugiej różniczki)**.** $f''(a) \in \mathcal{L}^2_s(E, F)$. *W szczególności (por. Propozycja 10.4.2), dla $E = \mathbb{R}^n$ dostajemy*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Dowód. (Por. dowód Propozycji 10.2.6.) Ustalmy $\xi, \eta \in E$. Chcemy pokazać, że

$$f''(a)(\xi, \eta) = f''(a)(\eta, \xi).$$

Możemy założyć, że $\|\xi\|=\|\eta\|=1$. Niech kula $B(a, 3r) \subset \Omega$ będzie taka, że $f'(x)$ istnieje dla dowolnego punktu $x \in B(a, 3r)$. Zdefiniujmy

$$\varPhi(t) := f(a + t\xi + t\eta) - f(a + t\xi) - f(a + t\eta) + f(a) - t^2 f''(a)(\xi, \eta), \quad |t| \leqslant r.$$

Pokażemy, że $\varPhi(t)/t^2 \longrightarrow 0$ przy $t \longrightarrow 0+$, co wobec symetrii wyrażenia

$$f(a + t\xi + t\eta) - f(a + t\xi) - f(a + t\eta) + f(a),$$

da żądany wynik. Ustalmy $0 < t \leqslant r$ i niech

$$g(y) := f(a + t\xi + y\eta) - f(a + y\eta) - tyf''(a)(\xi, \eta), \quad 0 \leqslant y \leqslant r.$$

Mamy $\varPhi(t) = g(t) - g(0)$. Ponadto,

$$g'(y) = f'(a + t\xi + y\eta)(\eta) - f'(a + y\eta)(\eta) - tf''(a)(\xi, \eta).$$

Na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych, mamy:

$$\|\varPhi(t)\| \leqslant t \sup\{\|g'(y)\| : 0 \leqslant y \leqslant t\}.$$

Niech

$$f'(a + h) = f'(a) + f''(a)(h) + \alpha(h)\|h\|, \quad \|h\| < 3r$$

(równość w $\mathcal{L}(E, F)$), gdzie $\lim\limits_{h \to 0} \alpha(h) = 0$. Wynika stąd, że dla $0 \leqslant y \leqslant t$ mamy

$$\begin{aligned} g'(y) &= f'(a)(\eta) + f''(a)(t\xi + y\eta)(\eta) + \alpha(t\xi + y\eta)(\eta)\|t\xi + y\eta\| \\ &\quad - f'(a)(\eta) - f''(a)(y\eta)(\eta) - \alpha(y\eta)(\eta)\|y\eta\| - tf''(a)(\xi)(\eta) \\ &= \alpha(t\xi + y\eta)(\eta)\|t\xi + y\eta\| - \alpha(y\eta)(\eta)\|y\eta\|, \end{aligned}$$

a więc

$$\sup\{\|g'(y)\| : 0 \leqslant y \leqslant t\} \leqslant 3t \sup\{\|\alpha(\mu\xi + \nu\eta)\| : 0 \leqslant \mu, \nu \leqslant t\}.$$

Ostatecznie,

$$\frac{\|\varPhi(t)\|}{t^2} \leqslant 3 \sup\{\|\alpha(\mu\xi + \nu\eta)\| : 0 \leqslant \mu, \nu \leqslant t\} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0. \qquad \square$$

Obserwacja 10.4.4. Niech E, F będą przestrzeniami wektorowymi nad $\mathbb{K}$. Odwzorowanie $Q : E \longrightarrow F$ nazywamy *wielomianem jednorodnym stopnia* 2 *(formą kwadratową)* ($Q \in \underline{\mathcal{H}}^2(E, F)$), jeżeli istnieje odwzorowanie $\widetilde{Q} \in \operatorname{Hom}^2(E, F)$ takie, że $Q(x) = \widetilde{Q}(x, x)$, $x \in E$. Oczywiście $\underline{\mathcal{H}}^2(E, F)$ jest $\mathbb{K}$–przestrzenią wektorową. Zauważmy, że odwzorowanie

$$\widehat{Q}(x, y) := \tfrac{1}{2}(\widetilde{Q}(x, y) + \widetilde{Q}(y, x)), \quad x, y \in E,$$

jest dwuliniowe, symetryczne ($\widehat{Q} \in \operatorname{Hom}^2_s(E, F)$) i $Q(x) = \widehat{Q}(x, x)$, $x \in E$. W takim razie odwzorowanie

$$\operatorname{Hom}^2_s(E, F) \ni W \overset{\varLambda}{\longmapsto} (E \ni x \longmapsto W(x, x) \in F) \in \underline{\mathcal{H}}^2(E, F)$$

jest epimorfizmem. Jest ono również injektywne bowiem

$$\widehat{Q}(x, y) = \tfrac{1}{2}(\widehat{Q}(x + y, x + y) - \widehat{Q}(x, x) - \widehat{Q}(y, y)), \quad x, y \in E, \quad \widehat{Q} \in \operatorname{Hom}^2_s(E, F)$$

(zob. Propozycja 10.5.1). Oznacza to, że $\varLambda : \operatorname{Hom}^2_s(E, F) \longmapsto \underline{\mathcal{H}}^2(E, F)$ jest izomorfizmem algebraicznym, przy czym odwzorowanie odwrotne $\Xi := \varLambda^{-1}$ jest dane wzorem

$$\underline{\mathcal{H}}^2(E, F) \ni Q \overset{\Xi}{\longmapsto} \widehat{Q} \in \operatorname{Hom}^2_s(E, F),$$

$$E \times E \ni (x, y) \overset{\widehat{Q}}{\longmapsto} \tfrac{1}{2}(Q(x + y) - Q(x) - Q(y)) \in F.$$

Niech teraz E, F będą unormowane. Oznaczmy przez $\mathcal{H}^2(E, F)$ przestrzeń wszystkich ciągłych wielomianów z $\underline{\mathcal{H}}^2(E, F)$.

Zauważmy, że $\mathcal{H}^2(E, F) = \varLambda(\mathcal{L}^2_s(E, F))$. W przestrzeni $\mathcal{H}^2(E, F)$ wprowadzamy normę

$$\|Q\| := \sup\{\|Q(x)\| : \|x\| \leqslant 1\};$$

wobec nierówności $\|Q(x)\| = \|\widehat{Q}(x, x)\| \leqslant \|\widehat{Q}\|\|x\|^2$, norma $\|Q\|$ jest poprawnie określona. Przy takim unormowaniu

$$\varLambda \in \operatorname{Isom}(\mathcal{L}^2_s(E, F), \mathcal{H}^2(E, F)), \quad (\|\varLambda\| \leqslant 1,\ \|\Xi\| \leqslant 3).$$

Jeżeli F jest Banacha, to $\mathcal{H}^2(E, F)$ jest Banacha.

Korzystając z powyższych identyfikacji będziemy pisać

$$f''(a)(h) := f''(a)(h, h), \quad h \in E$$

(z pełną świadomością, że czasem może to prowadzić do wieloznaczności).

Propozycja 10.4.5. *Załóżmy, że*

$$f \in \mathcal{D}^2(\Omega, F; a), \quad g \in \mathcal{D}^2(\Omega, G; a), \quad B \in \mathcal{L}(F, G; H).$$

Wtedy $B(f, g) \in \mathcal{D}^2(\Omega, H; a)$ *oraz*

$$\begin{aligned}(B(f,g))''(a)(\xi,\eta) = B(f''(a)(\xi,\eta), g(a)) + B(f'(a)(\eta), g'(a)(\xi))\\ + B(f'(a)(\xi), g'(a)(\eta)) + B(f(a), g''(a)(\xi,\eta)), \quad (\xi,\eta) \in E \times E.\end{aligned}$$

W szczególności,

$$(B(f,g))''(a)(h) = B(f''(a)(h), g(a)) + 2B(f'(a)(h), g'(a)(h)) + B(f(a), g''(a)(h)), \quad h \in E.$$

Oczywiście, tak jak poprzednio, możemy sformułować analogiczne wyniki dla mnożenia i iloczynu skalarnego — Ćwiczenie.

Dowód. Możemy założyć, że $f \in \mathcal{D}(\Omega, F)$, $g \in \mathcal{D}(\Omega, G)$. Wiemy, że $(B(f,g))' = B_1(f', g) + B_2(f, g')$, gdzie

$$\begin{aligned}&B_1 : \mathcal{L}(E, F) \times G \longrightarrow \mathcal{L}(E, H), \quad B_1(L, y)(h) := B(L(h), y),\\ &B_2 : F \times \mathcal{L}(E, G) \longrightarrow \mathcal{L}(E, H), \quad B_2(x, L)(h) := B(x, L(h)).\end{aligned}$$

Widać, że są to operatory dwuliniowe i ciągłe. Teraz wystarczy już tylko skorzystać z Propozycji 10.3.5:

$$\begin{aligned}(B(f,g))''(a)(\xi) = B_1(f''(a)(\xi), g(a)) + B_1(f'(a), g'(a)(\xi)) + B_2(f'(a)(\xi), g'(a)) + B_2(f(a), g''(a)(\xi)),\\ \xi \in E\end{aligned}$$

(równość w $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, H))$). Po podstawieniu argumentów dostajemy szukany wzór. □

Propozycja 10.4.6 (Różniczkowanie złożenia)**.** *Niech G będzie przestrzenią unormowaną, niech $U \subset G$ będzie zbiorem otwartym, niech $\varphi : U \longrightarrow E$ i niech $t_0 \in U$. Załóżmy, że $\varphi \in \mathcal{D}^2(U, E; t_0)$, $f \in \mathcal{D}^2(\Omega, F; \varphi(t_0))$ i $\varphi(U) \subset \Omega$. Wtedy $f \circ \varphi \in \mathcal{D}^2(U, F; t_0)$ oraz*

$$(f \circ \varphi)''(t_0)(\xi,\eta) = f''(\varphi(t_0))(\varphi'(t_0)(\xi), \varphi'(t_0)(\eta)) + f'(\varphi(t_0))(\varphi''(t_0)(\xi,\eta)), \quad \xi,\eta \in G.$$

W szczególności,

$$(f \circ \varphi)''(t_0)(h) = f''(\varphi(t_0))(\varphi'(t_0)(h)) + f'(\varphi(t_0))(\varphi''(t_0)(h)), \quad h \in G.$$

Dowód. Możemy założyć, że $\varphi \in \mathcal{D}(U, E)$ i $f \in \mathcal{D}(\Omega, F)$. Wiemy, że $(f \circ \varphi)' = B(f' \circ \varphi, \varphi')$, gdzie

$$B : \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(G, E) \longrightarrow \mathcal{L}(G, F), \quad B(P, Q) := P \circ Q.$$

Wiadomo, że B jest operatorem dwuliniowym i ciągłym. Stąd, na podstawie Propozycji 10.3.5, mamy:

$$\begin{aligned}(f \circ \varphi)''(t_0)(\xi) &= B((f' \circ \varphi)'(t_0)(\xi), \varphi'(t_0)) + B(f'(\varphi(t_0)), \varphi''(t_0)(\xi))\\ &= B(f''(\varphi(t_0))(\varphi'(t_0)(\xi)), \varphi'(t_0)) + B(f'(\varphi(t_0)), \varphi''(t_0)(\xi))\end{aligned}$$

(równość w $\mathcal{L}(G, F)$). □

W standardowy sposób definiujemy $\mathcal{D}^2(\Omega, F)$, $\mathcal{BD}^2(\Omega, F)$, $\mathcal{C}^2(\Omega, F)$ oraz $\mathcal{BC}^2(\Omega, F)$. Niech

$$\|f\|_{\Omega,2} := \sup\{\|f(x)\| : x \in \Omega\} + \sup\{\|f'(x)\| : x \in \Omega\} + \sup\{\|f''(x)\| : x \in \Omega\}, \quad f \in \mathcal{BD}^2(\Omega, F).$$

Zauważamy, że $f' \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathcal{L}(E, F)) \iff f \in \mathcal{C}^2(\Omega, F)$. Ta prosta uwaga pozwala bez trudu pokazać, że jeżeli $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, F)$, $g \in \mathcal{C}^2(\Omega, G)$ i $B \in \mathcal{L}(F, G; H)$, to $B(f, g) \in \mathcal{C}^2(\Omega, H)$. Podobnie, jeżeli $\varphi \in \mathcal{C}^2(U, E)$ i $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, F)$, to $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^2(U, F)$.

Teraz przychodzi kolej na uogólnienie twierdzenia o różniczkowaniu szeregu wyraz po wyrazie (por. Twierdzenie 6.9.1), a na koniec dowodzimy, że $\mathcal{BD}^2(\Omega, F)$ i $\mathcal{BC}^2(\Omega, F)$ są przestrzeniami Banacha, gdy F jest przestrzenią Banacha (Ćwiczenie).

Jeżeli $E = E_1 \times \cdots \times E_N$, to możemy wprowadzić *różniczki cząstkowe drugiego rzędu*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial E_j \partial E_i}(a) \in \mathcal{L}(E_j, E_i; F) \simeq \mathcal{L}(E_j, \mathcal{L}(E_i, F)),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial E_j \partial E_i}(a)(\xi,\eta) := \frac{\partial}{\partial E_j}\frac{\partial f}{\partial E_i}(a)(\xi)(\eta), \quad \xi \in E_j,\ \eta \in E_i, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Propozycja 10.4.7. *Jeżeli* $f \in \mathcal{D}^2(\Omega, F; a)$, *to* $\frac{\partial^2 f}{\partial E_j \partial E_i}(a)$ *istnieje*, $i, j = 1, \dots, N$, *oraz*

$$f''(a)(\xi, \eta) = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial E_j \partial E_i}(a)(\xi_j, \eta_i), \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_N),\ \eta = (\eta_1, \dots, \eta_N) \in E_1 \times \dots E_N.$$

W szczególności,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial E_j \partial E_i}(a)(\xi_j, \eta_i) = f''(a)((0, \dots, 0, \underset{j}{\xi_j}, 0, \dots, 0), (0, \dots, 0, \underset{i}{\eta_i}, 0, \dots, 0)),$$

a stąd, wobec symetrii $f''(a)$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial E_j \partial E_i}(a)(\xi_j, \eta_i) = \frac{\partial^2 f}{\partial E_i \partial E_j}(a)(\eta_i, \xi_j).$$

Jeżeli $E = \mathbb{R}^n$, *to z istnienia* $f''(a)$ *wynika symetria macierzy drugich pochodnych cząstkowych:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Dowód. Możemy założyć, że $f \in \mathcal{D}(\Omega, F)$. Mamy

$$f' = \sum_{i=1}^{N} L_i \circ \frac{\partial f}{\partial E_i}$$

(równość w $\mathcal{L}(E, F)$), gdzie

$$L_i : \mathcal{L}(E_i, F) \longrightarrow \mathcal{L}(E, F), \quad L_i(A)(h_1, \dots, h_N) := A(h_i), \quad i = 1, \dots, N.$$

Stąd:

$$f''(a)(\xi) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f'}{\partial E_j}(a)(\xi_j) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} L_i\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial E_j \partial E_i}(a)(\xi_j)\Big)$$

(równość w $\mathcal{L}(E, F)$), a po wstawieniu zmiennych:

$$f''(a)(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial E_j \partial E_i}(a)(\xi_j, \eta_i). \qquad \square$$

10.4.1. Druga różniczka Gâteaux.

Definicja 10.4.8. Mówimy, że funkcja $f : \Omega \longrightarrow F$ ma *drugą różniczkę Gâteaux (słabą) w punkcie* $a \in \Omega$, jeżeli dla dowolnych wektorów $\xi_1, \xi_2 \in E$ druga pochodna kierunkowa $\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_2 \partial \xi_1}(a)$ istnieje oraz odwzorowanie

$$E^2 \ni (\xi_1, \xi_2) \overset{\delta_a^2 f}{\longmapsto} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_2 \partial \xi_1}(a)$$

jest klasy $\mathcal{L}_s^2(E, F)$. Odwzorowanie to nazywamy *drugą różniczką Gâteaux (słabą) funkcji* f *w punkcie* a.

Oczywiście, dla $E = \mathbb{R}$, $\delta_a^2 f(a)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $f''(a)$ istnieje; ponadto $\delta_a^2 f(a)(\xi_1, \xi_2) = f''(a)\xi_1\xi_2$, $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$.

Propozycja 10.4.9 (Por. Twierdzenie 10.6.3)**.** *Załóżmy, że* $\delta_x^2 f$ *istnieje dla* $x \in V$, *gdzie* $V \subset \Omega$ *jest otwartym otoczeniem punktu* a, *oraz odwzorowanie* $V \ni x \longmapsto \delta_x^2 f \in \mathcal{L}^2(E, F)$ *jest ciągłe w punkcie* a. *Wtedy* $f''(a)$ *istnieje (i oczywiście* $f''(a) = \delta_a^2 f$*).*

Dowód. Będziemy chcieć zastosować Propozycję 10.3.16 do funkcji $f' : V \longrightarrow \mathcal{L}(E, F)$. Wystarczy pokazać, że

$$\delta_x f'(\xi_2)(\xi_1) = \delta_x^2 f(\xi_1, \xi_2).$$

Liczymy:

$$\begin{aligned}\delta_x f'(\xi_2)(\xi_1) &= \frac{\partial f'}{\partial \xi_2}(x)(\xi_1) = \Big(\lim_{t\to 0} \frac{f'(x + t\xi_2) - f'(x)}{t}\Big)(\xi_1) = \Big(\lim_{t\to 0} \frac{\delta_{x+t\xi_2} f - \delta_x f}{t}\Big)(\xi_1)\\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\delta_{x+t\xi_2} f(\xi_1) - \delta_x f(\xi_1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial \xi_1}(x + t\xi_2) - \frac{\partial f}{\partial \xi_1}(x)}{t} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_2 \partial \xi_1}(x) = \delta_x^2 f(\xi_1, \xi_2).\end{aligned} \qquad \square$$

10.5. Przestrzenie unormowane III

Niech $E, E_1, \dots, E_k, F$ będą przestrzeniami wektorowymi nad $\mathbb{K}$. Przez

$$\operatorname{Hom}(E_1, \dots, E_k; F)$$

oznaczamy przestrzeń odwzorowań k–liniowych

$$W : E_1 \times \dots \times E_k \longrightarrow F.$$

Jeżeli $E_1 = \dots = E_k = E$, to piszemy $\operatorname{Hom}^k(E, F)$. Przez $\operatorname{Hom}^k_s(E, F)$ oznaczamy przestrzeń wszystkich symetrycznych odwzorowań z przestrzeni $\operatorname{Hom}^k(E, F)$, tzn. tych odwzorowań $W \in \operatorname{Hom}^k(E, F)$, dla których

$$W(x_1, \dots, x_k) = W(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)})$$

dla dowolnych $x_1, \dots, x_k \in E$ i permutacji k–elementowej $\sigma \in \Sigma_k$.

Oczywiście, dla dowolnej permutacji $\sigma \in \Sigma_k$ mamy

$$\operatorname{Hom}(E_1, \dots, E_k; F) \simeq \operatorname{Hom}(E_{\sigma(1)}, \dots, E_{\sigma(k)}; F).$$

Odnotujmy, że $\operatorname{Hom}^1(E, F) = \operatorname{Hom}^1_s(E, F) = \operatorname{Hom}(E, F)$.

Dla $1 \leqslant \ell \leqslant k - 1$ rozważmy odwzorowanie

$$\operatorname{Hom}(E_1, \dots, E_k; F) \ni W \overset{\Phi}{\longmapsto} \widehat{W} \in \operatorname{Hom}(E_1, \dots, E_\ell; \operatorname{Hom}(E_{\ell+1}, \dots, E_k; F)),$$

$$E_1 \times \dots \times E_\ell \ni (x_1, \dots, x_\ell) \overset{\widehat{W}}{\longmapsto} W(x_1, \dots, x_\ell, \cdot, \dots, \cdot).$$

Bez trudu sprawdzamy, że Φ jest dobrze określone oraz, że Φ jest izomorfizmem algebraicznym, przy czym $\Psi := \Phi^{-1}$ jest dane wzorem:

$$\operatorname{Hom}(E_1, \dots, E_\ell; \operatorname{Hom}(E_{\ell+1}, \dots, E_k; F)) \ni A \overset{\Psi}{\longmapsto} \widehat{A} \in \operatorname{Hom}(E_1, \dots, E_k; F),$$

$$E_1 \times \dots \times E_k \ni (x_1, \dots, x_k) \overset{\widehat{A}}{\longmapsto} A(x_1, \dots, x_\ell)(x_{\ell+1}, \dots, x_k) \in F.$$

Mamy więc

$$\operatorname{Hom}(E_1, \dots, E_k; F) \simeq \operatorname{Hom}(E_1, \dots, E_\ell; \operatorname{Hom}(E_{\ell+1}, \dots, E_k; F)).$$

W szczególności,

$$\operatorname{Hom}^k(E, F) \simeq \operatorname{Hom}^\ell(E, \operatorname{Hom}^{k-\ell}(E, F)).$$

Niech $\underline{\mathcal{H}}^k(E, F)$ oznacza przestrzeń wszystkich *wielomianów jednorodnych stopnia* k, tzn. przestrzeń wszystkich tych odwzorowań $Q : E \longrightarrow F$, dla których istnieje $\widetilde{Q} \in \operatorname{Hom}^k(E, F)$ takie, że $Q(x) = \widetilde{Q}(x, \dots, x)$ dla dowolnego $x \in E$. Wzór

$$\widehat{Q}(x_1, \dots, x_k) := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \widetilde{Q}(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}), \quad x_1, \dots, x_k \in E,$$

zadaje odwzorowanie z $\operatorname{Hom}^k_s(E, F)$ o tej samej własności. Mamy więc epimorfizm

$$\operatorname{Hom}^k_s(E, F) \ni W \overset{\Lambda}{\longmapsto} (E \ni x \longmapsto W(x, \dots, x) \in F) \in \underline{\mathcal{H}}^k(E, F).$$

Przyjmijmy dodatkowo $\underline{\mathcal{H}}^0(E, F) := F$.

Propozycja 10.5.1 (Formuła polaryzacyjna)**.** *Dla* $0 \leqslant \ell \leqslant k$, $k \in \mathbb{N}$ *i* $Q \in \underline{\mathcal{H}}^\ell(E, F)$ *zachodzi wzór*

$$\frac{1}{k!} \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k \in \{0,1\}} (-1)^{k-(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_k)} Q(x_0 + \varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_k x_k)$$

$$= \begin{cases} \widehat{Q}(x_1, \dots, x_k), & \text{jeżeli } \ell = k \\ 0, & \text{jeżeli } 0 \leqslant \ell \leqslant k - 1 \end{cases}, \quad x_0, \dots, x_k \in E.$$

Dla $\ell = k \geqslant 2$ formuła polaryzacyjna pokazuje, że odwzorowanie Λ jest injektywne (a więc jest izomorfizmem) i daje ponadto wzór na $\Xi := \Lambda^{-1}$ (zawsze można przyjąć $x_0 = 0$). Mamy więc

$$\operatorname{Hom}^k_s(E, F) \simeq \underline{\mathcal{H}}^k(E, F).$$

Dowód. Przypadek $\ell = 0$ pozostawiamy jako ĆWICZENIE. Dla $\ell \geqslant 1$ mamy

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k!}\sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^k}(-1)^{k-|\varepsilon|}Q(x_0+\varepsilon_1x_1+\dots+\varepsilon_kx_k)\\
&=\frac{1}{k!}\sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^k}(-1)^{k-|\varepsilon|}\widehat{Q}(\underbrace{x_0+\varepsilon_1x_1+\dots+\varepsilon_kx_k,\dots,x_0+\varepsilon_1x_1+\dots+\varepsilon_kx_k}_{\ell})\\
&=\frac{1}{k!}\sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^k}(-1)^{k-|\varepsilon|}\sum_{\substack{j_0,\dots,j_k\in\mathbb{N}_0\\ j_0+\dots+j_k=\ell}}\frac{\ell!}{j_0!\dots j_k!}\varepsilon_1^{j_1}\dots\varepsilon_k^{j_k}\widehat{Q}(\underbrace{x_0,\dots,x_0}_{j_0},\dots,\underbrace{x_k,\dots,x_k}_{j_k})\\
&=:\sum_{\substack{j_0,\dots,j_k\in\mathbb{N}_0\\ j_0+\dots+j_k=\ell}}A_{j_0,\dots,j_k}\widehat{Q}(\underbrace{x_0,\dots,x_0}_{j_0},\dots,\underbrace{x_k,\dots,x_k}_{j_k}).
\end{aligned}$$

Ustalmy $j_0,\dots,j_k \in \mathbb{N}_0$ takie, że $j_0+\dots+j_k = \ell$ i rozważmy dwa przypadki:

- Istnieje $s \in \{1,\dots,k\}$ takie, że $j_s = 0$ (ma to zawsze miejsce, gdy $\ell < k$, bo $j_1+\dots+j_k \leqslant \ell$). Wtedy $A_{j_0,\dots,j_k} = 0$, bo $(-1)^{k-(\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_k)}$ zmienia znak, gdy przechodzimy od $\varepsilon_s = 0$ do $\varepsilon_s = 1$, a cała reszta pozostaje bez zmian.
- Przypadek przeciwny. Musi być $\ell = k$, $j_0 = 0$ i $j_1 = \dots = j_k = 1$. Wtedy

$$A_{0,1,\dots,1} = \frac{1}{k!}\sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^k}(-1)^{k-|\varepsilon|}k!\varepsilon_1\dots\varepsilon_k = 1. \qquad \square$$

Odwzorowanie $Q : E \longrightarrow F$ nazywamy *wielomianem stopnia* $\leqslant k$, jeżeli istnieją $Q_j \in \underline{\mathcal{H}}^j(E,F)$, $j = 0,\dots,k$, takie, że $Q = Q_0+\dots+Q_k$. Przestrzeń wielomianów stopnia $\leqslant k$ będzie oznaczana przez $\underline{\mathcal{P}}_k(E,F)$. Na podstawie formuły polaryzacyjnej wiemy, że Q_k jest wyznaczony jednoznacznie przez Q. Powtarzając to rozumowanie dla $Q - Q_k$ wnioskujemy, że Q_{k-1} jest wyznaczony jednoznacznie itd. Wynika stąd, że wszystkie wielomiany $Q_0,\dots,Q_k$ są wyznaczone jednoznacznie.

Obecnie przechodzimy do przypadku, gdy przestrzenie $E, E_1, \dots, E_k, F$ są unormowane.

Niech $\mathcal{L}(E_1,\dots,E_k;F)$ oznacza przestrzeń wszystkich odwzorowań ciągłych z $\operatorname{Hom}(E_1,\dots,E_k;F)$ (jeżeli $E_1 = \dots = E_k = E$, to piszemy $\mathcal{L}^k(E,F)$).

Propozycja 10.5.2. *Niech $W \in \operatorname{Hom}(E_1,\dots,E_k;F)$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) *$W \in \mathcal{L}(E_1,\dots,E_k;F)$;*
(ii) *W jest ciągłe w 0;*
(iii) *istnieje punkt $a \in E_1\times\dots\times E_k$ taki, że W jest ciągłe w a;*
(iv) *istnieją $a = (a_1,\dots,a_k) \in E_1\times\dots\times E_k$ i $r > 0$ takie, że*

$$W(\overline{B}(a_1,r)\times\dots\times\overline{B}(a_k,r))$$

jest zbiorem ograniczonym;
(v) *istnieje $C \geqslant 0$ takie, że*

$$\|W(x_1\dots,x_k)\| \leqslant C\|x_1\|\cdots\|x_k\|, \quad (x_1,\dots,x_k)\in E_1\times\dots\times E_k.$$

Dowód. Implikacje (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) są oczywiste.

(iv) $\Longrightarrow$ (v): Niech

$$W(\overline{B}(a_1,r)\times\dots\times\overline{B}(a_k,r)) \subset \overline{B}(R).$$

Wystarczy pokazać, że $\|W(x_1,\dots,x_k)\| \leqslant C$ dla $\|x_1\| = \dots = \|x_k\| = r$ (7). Weźmy $(x_1,\dots,x_k) \in E_1\times\dots\times E_k$ takie, że $\|x_1\| = \dots = \|x_k\| = r$ i szacujemy:

$$\begin{aligned}
\|W(x_1,\dots,x_k)\| &= \|W((a_1+x_1)-a_1,\dots,(a_k+x_k)-a_k)\|\\
&= \Big\|\sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^k}(-1)^{k-|\varepsilon|}W(a_1+\varepsilon_1x_1,\dots,a_k+\varepsilon_kx_k)\Big\| \leqslant 2^kR =: C.
\end{aligned}$$

(7) Wtedy $\|W(x_1,\dots,x_k)\| \leqslant (C/r^k)\|x_1\|\cdots\|x_k\|$ dla dowolnych $(x_1,\dots.x_k) \in E_1\times\dots\times E_k$.

(v) $\Longrightarrow$ (i): Dla $\|h_1\|,\dots,\|h_k\|\leqslant 1$ szacujemy:

$$\begin{aligned}
&\|W(a_1+h_1,\dots,a_k+h_k)-W(a_1,\dots,a_k)\|\\
&=\Big\|\sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^k\colon|\varepsilon|\geqslant 1}W((1-\varepsilon_1)a_1+\varepsilon_1h_1,\dots,(1-\varepsilon_k)a_k+\varepsilon_kh_k)\Big\|\\
&\leqslant\sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^k\colon|\varepsilon|\geqslant 1}C\|a_1\|^{1-\varepsilon_1}\|h_1\|^{\varepsilon_1}\cdots\|a_k\|^{1-\varepsilon_k}\|h_k\|^{\varepsilon_k}\leqslant C\operatorname{const}(k,a)(\|h_1\|+\dots+\|h_k\|).
\end{aligned}$$
□

Wniosek 10.5.3. *$\mathcal{L}(E_1,\dots,E_k;F)$ jest przestrzenią unormowaną poprzez funkcję*

$$\|W\|=\|W\|_{\mathcal{L}(E_1,\dots,E_k;F)}:=\sup\{\|W(x_1,\dots,x_k)\|:\|x_1\|\leqslant 1,\dots,\|x_k\|\leqslant 1\},\quad W\in\mathcal{L}(E_1,\dots,E_k;F).$$

Zauważmy, że

$$\|W\|=\sup\Big\{\frac{\|W(x_1,\dots,x_k)\|}{\|x_1\|\cdots\|x_k\|}:(x_1,\dots,x_k)\in(E_1)_*\times\dots\times(E_k)_*\Big\}$$

oraz że $\|W\|$ jest najmniejszą stałą C taką, że (v) zachodzi. W szczególności,

$$\|W(x_1,\dots,x_k)\|\leqslant\|W\|\|x_1\|\cdots\|x_k\|,\quad(x_1,\dots,x_k)\in E_1\times\dots\times E_k.$$

Propozycja 10.5.4. (a)

$$\varPhi(\mathcal{L}(E_1,\dots,E_k;F))=\mathcal{L}(E_1,\dots,E_\ell;\mathcal{L}(E_{\ell+1},\dots,E_k;F)),\quad\|\varPhi(W)\|=\|W\|,\quad W\in\mathcal{L}(E_1,\dots,E_k;F),$$

a więc

$$\varPhi\in\operatorname{Isom}(\mathcal{L}(E_1,\dots,E_k;F),\mathcal{L}(E_1,\dots,E_\ell;\mathcal{L}(E_{\ell+1},\dots,E_k;F)))$$

i $\varPhi$ jest izometrią.

(b) *Jeżeli $E_1,\dots,E_k$ są skończenie wymiarowe, to*

$$\mathcal{L}(E_1,\dots,E_k;F)=\operatorname{Hom}(E_1,\dots,E_k;F).$$

W szczególności, jeżeli E jest skończenie wymiarowa, to

$$\mathcal{L}^k(E,F)=\operatorname{Hom}^k(E,F).$$

(c) *Jeżeli F jest Banacha, to $\mathcal{L}(E_1,\dots,E_k;F)$ jest Banacha.*

Dowód. (a) Wystarczy skorzystać ze wzorów na $\varPhi$ i $\varPsi$.

(b) Stosujemy indukcję względem k:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(E_1,\dots,E_{k+1};F)&\simeq\mathcal{L}(E_1,\dots,E_k;\mathcal{L}(E_{k+1},F))\\
&=\operatorname{Hom}(E_1,\dots,E_k;\operatorname{Hom}(E_{k+1},F))=\operatorname{Hom}(E_1,\dots,E_{k+1};F).
\end{aligned}$$

(c) Stosujemy indukcję względem k:

$$\mathcal{L}(E_1,\dots,E_{k+1};F)\simeq\mathcal{L}(E_1,\dots,E_k;\mathcal{L}(E_{k+1},F)).$$
□

Niech $\mathcal{L}^k_s(E,F)$ oznacza przestrzeń ciągłych odwzorowań z $\operatorname{Hom}^k_s(E,F)$. Jest to podprzestrzeń domknięta $\mathcal{L}^k(E,F)$. W szczególności, jeżeli F jest Banacha, to $\mathcal{L}^k_s(E,F)$ jest Banacha.

Niech $\mathcal{H}^k(E,F)$ oznacza przestrzeń ciągłych wielomianów jednorodnych stopnia k i niech $\mathcal{P}_k(E,F)$ oznacza przestrzeń ciągłych wielomianów stopnia $\leqslant k$.

Przestrzeń $\mathcal{H}^k(E,F)$ normujemy przy pomocy funkcji

$$\|Q\|=\|Q\|_{\mathcal{H}^k(E,F)}:=\sup\{\|Q(x)\|:\|x\|\leqslant 1\},\quad Q\in\mathcal{H}^k(E,F).$$

Odnotujmy, że $\|Q\|$ jest dobrze określona, $\|Q\|\leqslant\|\widehat{Q}\|$ oraz $\|Q(x)\|\leqslant\|Q\|\|x\|^k$, $x\in E$.

Na podstawie formuły polaryzacyjnej dostajemy

Propozycja 10.5.5. (a)

$$\varLambda(\mathcal{L}^k_s(E,F))=\mathcal{H}^k(E,F),$$

$$\varLambda\in\operatorname{Isom}(\mathcal{L}^k_s(E,F),\mathcal{H}^k(E,F)),\quad\|\varLambda\|\leqslant 1,\quad\|\Xi\|\leqslant e^{2k}.$$

(b) *Dla wielomianu $Q=Q_0+\dots+Q_k\in\underline{\mathcal{P}}_k(E,F)$ mamy*

$$Q\in\mathcal{P}_k(E,F)\Longleftrightarrow Q_j\in\mathcal{H}^j(E,F),\ j=1,\dots,k.$$

(c) *Jeżeli E jest rzeczywistą przestrzenią unitarną, to $\|\Lambda\| = 1$.*

Dowód. (a) Jeżeli $\|x_1\|, \dots, \|x_k\| \leqslant 1$, to

$$\|\widehat{Q}(x_1, \dots, x_k)\| \leqslant \frac{1}{k!} \sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^k} \|Q\| |\varepsilon|^k = \|Q\| \frac{1}{k!} \sum_{\ell=1}^{k} \binom{k}{\ell} \ell^k \leqslant \|Q\| \frac{1}{k!} 2^k k^k \leqslant e^{2k} \|Q\|,$$

a więc $\|\Xi\| \leqslant e^{2k}$. Ćwiczenie: Wyznaczyć $\|\Xi\|$.

(b) Przypuśćmy, że Q jest wielomianem ciągłym. Na podstawie formuły polaryzacyjnej mamy

$$\widehat{Q}_k(x_1, \dots, x_k) := \frac{1}{k!} \sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^k} (-1)^{k-|\varepsilon|} Q(\varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_k x_k), \quad x_1, \dots, x_k \in E,$$

skąd natychmiast wynika, że Q_k jest wielomianem jednorodnym ciągłym. Stosując to samo rozumowanie do wielomianu $Q - Q_k$ wnioskujemy, że Q_{k-1} jest wielomianem jednorodnym ciągłym. Skończona indukcja kończy dowód.

(c) Na wstępie zauważmy, że można założyć, że $\dim E < +\infty$. Istotnie, przypuśćmy, że (c) zachodzi dla przestrzeni skończenie wymiarowych. Niech $x_1, \dots, x_k \in \overline{B}(1)$ i niech $V := \mathbb{R}x_1 + \dots + \mathbb{R}x_k$. Wtedy, dla dowolnego $Q \in \mathcal{H}^k(E, F)$, mamy

$$\|\widehat{Q}(x_1, \dots, x_k)\| \leqslant \|\widehat{Q}|_{V^k}\| = \|Q|_V\| \leqslant \|Q\|,$$

co dowodzi, że $\|\widehat{Q}\| = \|Q\|$, a więc $\|\Lambda\| = 1$.

Możemy więc założyć, że $\dim E < +\infty$.

Niech $W \in \mathcal{H}^2(E, F)$ i przypuśćmy, że $b_1, b_2 \in \overline{B}(1)$ są takie, że $\|\widehat{W}\| = \|\widehat{W}(b_1, b_2)\|$. Wtedy

$$\|W(b_1 \pm b_2)\| = \|\widehat{W}\| \|b_1 \pm b_2\|^2.$$

Istotnie, gdyby np. $\|W(b_1 + b_2)\| < \|\widehat{W}\| \|b_1 + b_2\|^2$, to wówczas

$$\|\widehat{W}\| = \|\widehat{W}(b_1, b_2)\| = \tfrac{1}{4} \|W(b_1 + b_2) - W(b_1 - b_2)\| < \|\widehat{W}\| \tfrac{1}{4} (\|b_1 + b_2\|^2 + \|b_1 - b_2\|^2)$$
$$\overset{(*)}{=} \|\widehat{W}\| \tfrac{1}{2} (\|b_1\|^2 + \|b_2\|^2) \leqslant \|\widehat{W}\|;$$

sprzeczność ((*) wynika z faktu, że norma w E jest zadana przez iloczyn skalarny).

Przechodzimy do zasadniczego dowodu. Ustalmy $Q \in \mathcal{H}^k(E, F)$, $k \geqslant 2$. Ponieważ E jest skończenie wymiarowa, zbiór $\overline{B}(1)^k$ jest zwarty i w związku z tym $\|\widehat{Q}\|$ jest zrealizowana dla pewnych $a_1, \dots, a_k \in \overline{B}(1)$. Niech $a \in \overline{B}(1)$ będzie taki, że $\langle a, a_j \rangle \neq 0$, $j = 1, \dots, k$. Zastępując ewentualnie a_j przez $-a_j$ możemy założyć, że $\langle a, a_j \rangle \geqslant r > 0$, $j = 1, \dots, k$. Niech

$$K := \{(x_1, \dots, x_k) \in \overline{B}(1)^k : \langle a, x_j \rangle \geqslant r, \ j = 1, \dots, k, \ \|\widehat{Q}\| = \|\widehat{Q}(x_1, \dots, x_k)\|\}.$$

Zauważmy, że $(a_1, \dots, a_k) \in K$ oraz, że K jest zwarty. Zdefiniujmy $f(x_1, \dots, x_k) := \langle a, x_1 \rangle + \dots + \langle a, x_k \rangle$ i niech $(b_1, \dots, b_k) \in K$ realizuje maksimum funkcji f na K. Pokażemy, że $\varepsilon_1 b_1 = \dots = \varepsilon_k b_k =: c$ dla pewnych $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k \in \{-1, 1\}$. Zauważmy, że to już zakończy dowód, bowiem wtedy

$$\|\widehat{Q}\| = \|\widehat{Q}(b_1, \dots, b_k)\| = \|\widehat{Q}(\varepsilon_1 b_1, \dots, \varepsilon_k b_k)\| = \|\widehat{Q}(c, \dots, c)\| = \|Q(c)\| \leqslant \|Q\|.$$

Przypuśćmy, że np. $b_1 \neq b_2$ i $b_1 \neq -b_2$. Zdefiniujmy $d := (b_1 + b_2)/\|b_1 + b_2\|$ i zauważmy, że:

- $\|b_1 + b_2\| < 2$,
- $\langle a, d \rangle = \frac{\langle a, b_1 \rangle + \langle a, b_2 \rangle}{\|b_1 + b_2\|} \geqslant \frac{2r}{\|b_1 + b_2\|} > r$,
- stosując drugą część dowodu do wielomianu $W(x) := \widehat{Q}(x, x, b_3, \dots, b_k)$, $x \in E$ (dla którego $\widehat{W}(x_1, x_2) = \widehat{Q}(x_1, x_2, b_3, \dots, b_k)$ oraz $\|\widehat{W}\| = \|\widehat{W}(b_1, b_2)\|$), dostajemy $\|W(b_1 + b_2)\| = \|\widehat{W}\| \|b_1 + b_2\|^2$, czyli $\|W(d)\| = \|\widehat{W}\|$,
- w takim razie $(d, d, b_3, \dots, b_k) \in K$,
- $f(d, d, b_3, \dots, b_k) = 2\frac{\langle a, b_1 \rangle + \langle a, b_2 \rangle}{\|b_1 + b_2\|} + \langle a, b_3 \rangle + \dots + \langle a, b_k \rangle > f(b_1, \dots, b_k)$;

sprzeczność. □

Propozycja 10.5.6. *Niech $Q = Q_0 + \dots + Q_k \in \underline{\mathcal{P}}_k(E, F)$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) $Q \in \mathcal{P}_k(E, F)$;
(ii) *Q jest ciągłe w 0;*
(iii) *istnieje punkt $a \in E$ taki, że Q jest ciągłe w a;*
(iv) *istnieją $a \in E$ i $r_0 > 0$ takie, że $Q(B(a, r_0))$ jest zbiorem ograniczonym;*
(v) *dla dowolnego $r > 0$, $Q(B(r))$ jest zbiorem ograniczonym* (8).

---

(8) Równoważnie: dla dowolnych $a \in E$ i $r > 0$, $Q(B(a, r))$ jest zbiorem ograniczonym.

Dowód. Implikacje (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) są oczywiste.

(iv) $\Longrightarrow$ (v): Wobec formuły polaryzacyjnej (z $x_0 := a$)

$$\widehat{Q}_k(B(r_0/k) \times \cdots \times B(r_0/k))$$

jest zbiorem ograniczonym. Stąd na podstawie Propozycji 10.5.2, $\widehat{Q}_k$ jest ciągłe. W szczególności, $Q_k(B(r))$ jest zbiorem ograniczonym dla dowolnego $r > 0$. Teraz powtarzamy rozumowanie dla wielomianu $Q - Q_k$ i wnioskujemy, że $Q_{k-1}(B(r))$ jest zbiorem ograniczonym dla dowolnego $r > 0$ itd. Ostatecznie $Q_j(B(r))$ jest zbiorem ograniczonym dowolnych $j = 1, \dots, k$ i $r > 0$, skąd natychmiast wynika (v).

(v) $\Longrightarrow$ (i): Stosujemy poprzednie rozumowanie. $\square$

Propozycja 10.5.7. (a) *Jeżeli* $W \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_k; F)$*, to*

$$W'(a_1, \dots, a_k)(h_1, \dots, h_k) = W(h_1, a_2, \dots, a_k) + W(a_1, h_2, a_3, \dots, a_k) + \cdots + W(a_1, \dots, a_{k-1}, h_k).$$

(b) *Jeżeli* $Q \in \mathcal{H}^k(E, F)$*, to*

$$Q'(a)(h) = k\widehat{Q}(a, \dots, a, h), \quad a, h \in E.$$

W szczególności, $Q' \in \mathcal{H}^{k-1}(E, \mathcal{L}(E, F))$.

(c) *Jeżeli* $Q \in \mathcal{P}_k(E, F)$*, to* $Q' \in \mathcal{P}_{k-1}(E, \mathcal{L}(E, F))$.

Dowód. (a) — zob. dowód Obserwacji 10.3.4(e).

(b) wynika z (a).

(c) wynika z (b). $\square$

10.6. Pochodne wyższych rzędów

Niech E i F będą przestrzeniami unormowanymi nad $\mathbb{K}$, niech $\Omega \subset E$ będzie zbiorem otwartym, $f : \Omega \longrightarrow F$, $a \in \Omega$ i załóżmy, że $f^{(k-1)}(x) \in \mathcal{L}^{k-1}(E, F)$ istnieje dla $x \in V$, gdzie V jest pewnym otoczeniem a (9). Mamy więc odwzorowanie

$$f^{(k-1)} : V \longrightarrow \mathcal{L}^{k-1}(E, F).$$

Definiujemy *k-tą pochodną (k-tą różniczkę Frécheta)* odwzorowania f w punkcie a:

$$f^{(k)}(a) := (f^{(k-1)})'(a) \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}^{k-1}(E, F)) \simeq \mathcal{L}^k(E, F);$$

aby uniknąć nieporozumień ustalamy identyfikację

$$\mathcal{L}(E, \mathcal{L}^{k-1}(E, F)) \ni A \longmapsto \widehat{A} \in \mathcal{L}^k(E, F),$$

$$E \times E^{k-1} \ni (\xi, \eta) \overset{\widehat{A}}{\longmapsto} A(\xi)(\eta) \in F,$$

tzn.

$$f^{(k)}(a)(\xi, \eta) \simeq f^{(k)}(a)(\xi)(\eta), \quad (\xi, \eta) \in E \times E^{k-1}.$$

Zbiór wszystkich odwzorowań $f : \Omega \longrightarrow F$, dla których $f^{(k)}(a)$ istnieje oznaczamy przez $\mathcal{D}^k(\Omega, F; a)$.

Obserwacja 10.6.1. (a) (Ćwiczenie; por. Propozycja 10.5.7)

- Jeżeli $L \in \mathcal{L}(E, F)$, to $L^{(k)} = 0$ dla $k \geqslant 2$.
- Jeżeli $B \in \mathcal{L}(E, F; G)$, to $B^{(k)} = 0$ dla $k \geqslant 3$.
- Jeżeli $W \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_k; F)$, to dla $1 \leqslant \ell \leqslant k$ mamy

$$W^{(\ell)}(a_1, \dots, a_k)((h_{1,1}, \dots, h_{1,k}), \dots, (h_{\ell,1}, \dots, h_{\ell,k}))$$
$$\sum_{\substack{1 \leqslant j_1 < \dots < j_\ell \leqslant k \\ \sigma \in \Sigma_\ell}} W(a_1, \dots, a_{j_1-1}, h_{\sigma(1),j_1}, a_{j_1+1}, \dots, a_{j_\ell-1}, h_{\sigma(\ell),j_\ell}, a_{j_\ell+1}, \dots, a_k);$$

w szczególności, $W^{(\ell)} = 0$ dla $\ell \geqslant k + 1$.

(9) Wiemy już co to oznacza dla $k = 2, 3$.

• Jeżeli $Q \in \mathcal{H}^k(E,F)$, to

$$Q^{(\ell)}(a)(\underbrace{h,\dots,h}_{\ell\times}) = \ell!\binom{k}{\ell}\widehat{Q}(\underbrace{a,\dots,a}_{(k-\ell)\times},\underbrace{h,\dots,h}_{\ell\times}), \quad a,h\in E,\ \ell=0,\dots,k;$$

w szczególności, $Q^{(k)}(a) = k!Q$, $a \in E$, a stąd $Q^{(\ell)} = 0$ dla $\ell \geqslant k+1$.

• Jeżeli $Q \in \mathcal{P}_k(E,F)$, to $Q^{(\ell)} = 0$ dla $\ell \geqslant k+1$.

(b) $f^{(k)} \in \mathcal{D}^\ell(\Omega, \mathcal{L}^k(E,F);a) \Longrightarrow f \in \mathcal{D}^{k+\ell}(\Omega,F;a)$. Ponadto,

$$(f^{(k)})^{(\ell)}(a) = f^{(k+\ell)}(a)$$

(po utożsamieniu $\mathcal{L}^\ell(E,\mathcal{L}^k(E,F)) \simeq \mathcal{L}^{k+\ell}(E,F)$).

Rozumujemy indukcyjnie względem ℓ. Dla $\ell=1$ wynik jest trywialny.

$\ell \rightsquigarrow \ell+1$: Jeżeli $f^{(k)} \in \mathcal{D}^{\ell+1}(\Omega,\mathcal{L}^k(E,F);a)$, to, zgodnie z definicją, $(f^{(k)})^{(\ell)}(x)$ istnieje dla x z otoczenia punktu a oraz

$$(f^{(k)})^{(\ell+1)}(a) = ((f^{(k)})^{(\ell)})'(a).$$

Na podstawie założenia indukcyjnego mamy $(f^{(k)})^{(\ell)} = f^{(k+\ell)}$. Stąd, na podstawie definicji, dostajemy

$$(f^{(k)})^{(\ell+1)}(a) = (f^{(k+\ell)})'(a) = f^{(k+\ell+1)}(a).$$

(c) Jeżeli $f \in \mathcal{D}^{k+\ell}(\Omega,F;a)$, to dla dowolnych $h_{\ell+1},\dots,h_{k+\ell} \in E$ odwzorowanie

$$x \longmapsto f^{(k)}(x)(h_{\ell+1},\dots,h_{k+\ell})$$

ma ℓ-tą pochodną w punkcie a oraz

$$f^{(k+\ell)}(a)(h_1,\dots,h_{k+\ell}) = (x \longmapsto f^{(k)}(x)(h_{\ell+1},\dots,h_{k+\ell}))^{(\ell)}(a)(h_1,\dots,h_\ell), \quad h_1,\dots,h_\ell \in E.$$

Rozumujemy indukcyjnie względem ℓ.

$\ell = 1$ (por. Propozycja 10.4.2): Wiemy, że

$$f^{(k)}(a+h_1) = f^{(k)}(a) + f^{(k+1)}(a)(h_1) + o(\|h_1\|) \text{ przy } h_1 \longrightarrow 0$$

(równość w $\mathcal{L}^k(E,F)$). Podstawiając $h_2,\dots,h_{k+1}$ dostajemy:

$$f^{(k)}(a+h_1)(h_2,\dots,h_{k+1}) = f^{(k)}(a)(h_2,\dots,h_{k+1}) + f^{(k+1)}(a)(h_1,h_2,\dots,h_{k+1}) + o(\|h_1\|) \quad \text{przy } h_1 \longrightarrow 0,$$

co daje żądany wynik.

$\ell \rightsquigarrow \ell+1$: Załóżmy, że $f \in \mathcal{D}^{k+\ell}(U,F)$ dla pewnego otoczenia U punktu a. Ustalmy $h_{\ell+2}, \dots, h_{k+\ell+1} \in E$. Na podstawie założenia indukcyjnego odwzorowanie

$$U \ni x \overset{g}{\longmapsto} f^{(k)}(x)(h_{\ell+2},\dots,h_{k+\ell+1})$$

jest ℓ–krotnie różniczkowalne w U oraz

$$g^{(\ell)}(x)(h_2,\dots,h_{\ell+1}) = f^{(k+\ell)}(x)(h_2,\dots,h_{k+\ell+1}), \quad x \in U,\ h_2,\dots,h_{\ell+1}\in E.$$

Z drugiej strony, ponieważ $f^{(k+\ell+1)}(a)$ istnieje, więc

$$f^{(k+\ell)}(a+h_1) = f^{(k+\ell)}(a) + f^{(k+\ell+1)}(a)(h_1) + o(\|h_1\|) \text{ przy } h_1 \longrightarrow 0$$

(równość w $\mathcal{L}^{k+\ell}(E,F)$). Podstawiając $h_{\ell+2},\dots,h_{k+\ell+1}$, dostajemy

$$g^{(\ell)}(a+h_1) = g^{(\ell)}(a) + f^{(k+\ell+1)}(a)(h_1,\cdot,\dots,\cdot,h_{\ell+2},\dots,h_{k+\ell+1}) + o(\|h_1\|) \quad \text{przy } h_1 \longrightarrow 0$$

(równość w $\mathcal{L}^\ell(E,F)$ po stosownym utożsamieniu). Wynika stąd, że $g^{(\ell+1)}(a)$ istnieje oraz

$$g^{(\ell+1)}(a) = f^{(k+\ell+1)}(a)(\cdot,\dots,\cdot,h_{\ell+2},\dots,h_{k+\ell+1}),$$

co kończy dowód.

(d) Jeżeli $f \in \mathcal{D}^k(\Omega, F; a)$, to dla dowolnych $h_1, \dots, h_k \in E$ pochodna kierunkowa $\frac{\partial^k f}{\partial h_1 \dots \partial h_k}(a)$ istnieje oraz
$$\frac{\partial^k f}{\partial h_1 \dots \partial h_k}(a) = f^{(k)}(a)(h_1, \dots, h_k).$$

Rozumujemy indukcyjnie. Przypadek $k = 1$ jest oczywisty.

$k \rightsquigarrow k+1$: Na podstawie (c) mamy
$$\begin{aligned}\frac{\partial^{k+1} f}{\partial h_1 \dots \partial h_{k+1}}(a) &= \frac{\partial}{\partial h_1}\frac{\partial^k f}{\partial h_2 \dots \partial h_{k+1}}(a) = \frac{\partial}{\partial h_1}\Big(x \longmapsto f^{(k)}(x)(h_2, \dots, h_{k+1})\Big)(a)\\ &= (x \longmapsto f^{(k)}(x)(h_2, \dots, h_{k+1}))'(a)(h_1) = f^{(k+1)}(a)(h_1, \dots, h_{k+1}).\end{aligned}$$

(e) Dla $E = \mathbb{R}$ mamy: $f \in \mathcal{D}^k(\Omega, F; a)$ (w sensie Frécheta) wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{(k)}(a)$ istnieje w sensie klasycznym oraz
$$f^{(k)}(a)(h_1, \dots, h_k) = f^{(k)}(a)h_1 \cdots h_k, \quad h_1, \dots, h_k \in \mathbb{R}.$$

Rozumujemy indukcyjnie. Przypadek $k = 1$ jest oczywisty.

$k \rightsquigarrow k+1$: Na podstawie (c) mamy
$$\begin{aligned}f^{(k+1)}(a)(h_1, \dots, h_{k+1}) &= (x \longmapsto f^{(k)}(x)(h_2, \dots, h_{k+1}))'(a)(h_1)\\ &= (x \longmapsto f^{(k)}(x)h_2 \cdots h_{k+1})'(a)(h_1) = f^{(k+1)}(a)h_1 \cdots h_{k+1}.\end{aligned}$$

(f) Jeżeli $E = \mathbb{R}^n$ i $f \in \mathcal{D}^k(\Omega, F; a)$, to
$$f^{(k)}(a)(h_1, \dots, h_k) = \sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a) h_{1,i_1} \cdots h_{k,i_k}, \quad h_j = (h_{j,1}, \dots, h_{j,n}) \in \mathbb{R}^n,\ j = 1, \dots, k.$$

Propozycja 10.6.2 (Twierdzenie o symetrii wyższych różniczek)**.** *Zachodzi relacja* $f^{(k)}(a) \in \mathcal{L}_s^k(E, F)$.

W szczególności, jeżeli $E = \mathbb{R}^n$*, to*
$$f^{(k)}(a)(h) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n:\ |\alpha| = k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(a) h^\alpha, \quad h \in \mathbb{R}^n,$$
gdzie dla $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$*:*

$\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!$,

$D^\alpha f(a) := (\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1} \circ \dots \circ (\frac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n} f(a)$ *(zauważmy, że wobec symetrii różniczki, operator* $D^\alpha f(a)$ *jest poprawnie określony).*

Dowód. Zastosujemy indukcję ze względu na k. Przypadek $k = 2$ został rozwiązany w Twierdzeniu 10.4.3. Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla $k - 1$ i niech σ będzie dowolną permutacją k elementową.

Przypadek $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 1$, $\sigma(j) = j$, $j = 3, \dots, k$, redukuje się do przypadku $k = 2$:
$$\begin{aligned}f^{(k)}(a)(h_2, h_1, h_3, \dots, h_k) &= (x \longmapsto f^{(k-2)}(x)(h_3, \dots, h_k))''(a)(h_2, h_1)\\ &= (x \longmapsto f^{(k-2)}(x)(h_3, \dots, h_k))''(a)(h_1, h_2)\\ &= f^{(k)}(a)(h_1, h_2, h_3, \dots, h_k).\end{aligned}$$

Przypadek $\sigma(1) = 1$ wynika z założenia indukcyjnego:
$$\begin{aligned}f^{(k)}(a)(h_1, h_{\sigma(2)}, \dots, h_{\sigma(k)}) &= (x \longmapsto f^{(k-1)}(x)(h_{\sigma(2)}, \dots, h_{\sigma(k)}))'(a)(h_1)\\ &= (x \longmapsto f^{(k-1)}(x)(h_2, \dots, h_k))'(a)(h_1) = f^{(k)}(a)(h_1, h_2, \dots, h_k).\end{aligned}$$

Pozostałe przypadki wynikają z faktu, iż każda permutacja jest złożeniem pewnej liczby permutacji powyższych dwóch typów (por. dowód Wniosku 10.2.7). □

Twierdzenie 10.6.3 (Por. Propozycja 10.3.16, Wniosek 10.2.7)**.** *Niech* $f : \Omega \longrightarrow F$ *będzie taka, że dla dowolnego* $\ell \in \{1, \dots, k\}$*:*

- *pochodna kierunkowa* $\frac{\partial^\ell f}{\partial \xi_\ell \cdots \partial \xi_1}(x)$ *istnieje dla dowolnych* $\xi_1, \dots, \xi_\ell \in E$ *oraz* $x \in \Omega$*,*

• *odwzorowanie*

$$E^\ell \ni (\xi_1, \dots, \xi_\ell) \xrightarrow{\delta_x^\ell f} \frac{\partial^\ell f}{\partial \xi_\ell \cdots \partial \xi_1}(x)$$

jest klasy $\mathcal{L}_s^\ell(E,F)$ (10) *dla dowolnego* $x \in \Omega$,

• *odwzorowanie* $\Omega \ni x \longmapsto \delta_x^\ell f \in \mathcal{L}^\ell(E,F)$ *jest ciągłe na całym* Ω *dla* $\ell < k$ *oraz jest ciągłe w punkcie* a *dla* $\ell = k$.

Wtedy $f^{(k)}(a)$ *istnieje (i oczywiście* $f^{(k)}(a) = \delta_a^k f$*).*

Dowód. Zastosujemy indukcję ze względu na k. Przypadek $k=1$ to Propozycja 10.3.16. Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla $k-1 \geqslant 1$. Wobec założenia indukcyjnego $f \in \mathcal{C}^{k-1}(\Omega, F)$. Wystarczy pokazać, że

$$\delta_x f^{(k-1)}(\xi_k)(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) = \delta_x^k f(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, \xi_k)$$

i zastosować Propozycję 10.3.16 (do funkcji $f^{(k-1)} : \Omega \longrightarrow \mathcal{L}^{k-1}(E,F)$). Liczymy:

$$\begin{aligned}
&\delta_x f^{(k-1)}(\xi_k)(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) = \frac{\partial f^{(k-1)}}{\partial \xi_k}(x)(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) \\
&= \Big(\lim_{t \to 0} \frac{f^{(k-1)}(x + t\xi_k) - f^{(k-1)}(x)}{t}\Big)(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) = \Big(\lim_{t \to 0} \frac{\delta_{x+t\xi_k}^{k-1} f - \delta_x^{k-1} f}{t}\Big)(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{\delta_{x+t\xi_k}^{k-1} f(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) - \delta_x^{k-1} f(\xi_1, \dots, \xi_{k-1})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\partial^{k-1} f}{\partial \xi_{k-1} \cdots \partial \xi_1}(x + t\xi_k) - \frac{\partial^{k-1} f}{\partial \xi_{k-1} \cdots \partial \xi_1}(x)}{t} \\
&= \frac{\partial^k f}{\partial \xi_k \cdots \partial \xi_1}(x) = \delta_x^k f(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, \xi_k). \qquad \square
\end{aligned}$$

Propozycja 10.6.4. (a) (Wzór Leibniza) *Niech* $f \in \mathcal{D}^k(\Omega, F; a)$, $g \in \mathcal{D}^k(\Omega, G; a)$ *i* $B \in \mathcal{L}(F, G; H)$. *Wtedy* $B(f,g) \in \mathcal{D}^k(\Omega, H; a)$. *Ponadto,*

$$(B(f,g))^{(k)}(a)(h) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} B(f^{(j)}(a)(h), g^{(k-j)}(a)(h)), \quad h \in E.$$

(b) *Niech* G *będzie przestrzenią unormowaną, niech* $U \subset G$ *będzie zbiorem otwartym, niech* $\varphi : U \longrightarrow E$ *i niech* $t_0 \in U$. *Załóżmy, że* $\varphi \in \mathcal{D}^k(U, E; t_0)$, $f \in \mathcal{D}^k(\Omega, F; \varphi(t_0))$ *i* $\varphi(U) \subset \Omega$. *Wtedy* $f \circ \varphi \in \mathcal{D}^k(U, F; t_0)$ *— zob. również Propozycja 10.7.3.*

Dowód. (a) Rozumujemy indukcyjnie. Przypadek $k=1$ jest dobrze znany.

$k \rightsquigarrow k+1$: Wiemy, że $(B(f,g))' = B_1(f', g) + B_2(f, g')$, gdzie B_1 i B_2 są operatorami dwuliniowymi i ciągłymi takimi, jak w dowodzie Propozycji 10.4.5. W takim razie, na podstawie założenia indukcyjnego, $(B(f,g))' \in \mathcal{D}^k(\Omega, \mathcal{L}(E,H); a)$, a stąd $B(f,g) \in \mathcal{D}^{k+1}(\Omega, H; a)$.

Indukcyjny dowód wzoru pozostawiamy jako Ćwiczenie.

(b) Znów indukcyjnie. Przypadek $k=1$ jest dobrze znany.

$k \rightsquigarrow k+1$: Korzystamy ze wzoru $(f \circ \varphi)' = B(f' \circ \varphi, \varphi')$, gdzie B jest operatorem składania odwzorowań tak, jak w dowodzie Propozycji 10.4.6. Dalej rozumujemy standardowo. $\square$

W „pełnej" wersji wzór Leibniza wygląda następująco.

Propozycja 10.6.5. *Niech* $f \in \mathcal{D}^k(\Omega, F; a)$, $g \in \mathcal{D}^k(\Omega, G; a)$ *i* $B \in \mathcal{L}(F, G; H)$. *Wtedy*

$$(B(f,g))^{(k)}(a)(h_1, \dots, h_k) = \sum_{j=0}^{k} \sum_{\sigma \in \Sigma_{j,k-j}} B\Big(f^{(j)}(a)(h_{\sigma(1)}, \dots, h_{\sigma(j)}), g^{(k-j)}(a)(h_{\sigma(j+1)}, \dots, h_{\sigma(k)})\Big), \; h_1, \dots, h_k \in E,$$

gdzie $\Sigma_{j,k-j} := \{\sigma \in \Sigma_k : \sigma(1) < \dots < \sigma(j),\ \sigma(j+1) < \dots < \sigma(k)\}$.

Dowód. Wystarczy do wzoru w Propozycji 10.6.4(a) zastosować formułę polaryzacyjną z Propozycji 10.5.1 i dokonać stosownych przekształceń:

$$(B(f,g))^{(k)}(a)(h_1, \dots, h_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^k} (-1)^{k - |\varepsilon|} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} B\Big(f^{(j)}(a)(\varepsilon_1 h_1 + \dots + \varepsilon_k h_k), g^{(k-j)}(a)(\varepsilon_1 h_1 + \dots + \varepsilon_k h_k)\Big)$$

---

(10) Odwzorowanie to, to *ℓ–ta różniczka Gâteaux funkcji f w punkcie x.*

$$= \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!(k-j)!} \sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^k} (-1)^{k-|\varepsilon|} \sum_{\mu\in\mathbb{N}_0^k,\ |\mu|=j} \frac{j!}{\mu_1!\cdots\mu_k!}\varepsilon_1^{\mu_1}\cdots\varepsilon_k^{\mu_k} \sum_{\nu\in\mathbb{N}_0^k\ |\nu|=k-j} \frac{(k-j)!}{\nu_1!\cdots\nu_k!}\varepsilon_1^{\nu_1}\cdots\varepsilon_k^{\nu_k}\times$$
$$\times B\Big(f^{(j)}(a)(\underbrace{h_1,\dots,h_k}_{\mu_1\times},\dots,\underbrace{h_k,\dots,h_k}_{\mu_k\times}), g^{(k-j)}(a)(\underbrace{h_1,\dots,h_1}_{\nu_1\times},\dots,\underbrace{h_k,\dots,h_k}_{\nu_k\times})\Big)$$
$$\overset{\text{por. dowód Prop. 10.5.1}}{=} \sum_{j=0}^{k} \sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^k} (-1)^{k-|\varepsilon|} \sum_{\substack{\mu\in\mathbb{N}_0^k,\ |\mu|=j\\ \nu\in\mathbb{N}_0^k,\ |\nu|=k-j\\ \mu_i+\nu_i\geqslant 1,\ i=1,\dots,k}} \frac{1}{\mu_1!\cdots\mu_k!}\frac{1}{\nu_1!\cdots\nu_k!}\varepsilon_1^{\mu_1+\nu_1}\cdots\varepsilon_k^{\mu_k+\nu_k}\times$$
$$\times B\Big(f^{(j)}(a)(\underbrace{h_1,\dots,h_k}_{\mu_1\times},\dots,\underbrace{h_k,\dots,h_k}_{\mu_k\times}), g^{(k-j)}(a)(\underbrace{h_1,\dots,h_1}_{\nu_1\times},\dots,\underbrace{h_k,\dots,h_k}_{\nu_k\times})\Big)$$
$$= \sum_{j=0}^{k} \sum_{\substack{\mu\in\mathbb{N}_0^k,\ |\mu|=j\\ \nu\in\mathbb{N}_0^k,\ |\nu|=k-j\\ \mu_i+\nu_i=1,\ i=1,\dots,k}} \frac{1}{\mu_1!\cdots\mu_k!}\frac{1}{\nu_1!\cdots\nu_k!} B\Big(f^{(j)}(a)(\underbrace{h_1,\dots,h_1}_{\mu_1\times},\dots,\underbrace{h_k,\dots,h_k}_{\mu_k\times}), g^{(k-j)}(a)(\underbrace{h_1,\dots,h_1}_{\nu_1\times},\dots,\underbrace{h_k,\dots,h_k}_{\nu_k\times})\Big)$$
$$= \sum_{j=0}^{k} \sum_{\sigma\in\Sigma_{j,k-j}} B\Big(f^{(j)}(a)(h_{\sigma(1)},\dots,h_{\sigma(j)}), g^{(k-j)}(a)(h_{\sigma(j+1)},\dots,h_{\sigma(k)})\Big).$$

□

W standardowy sposób definiujemy przestrzenie
$$\mathcal{D}^k(\Omega,F),\quad \mathcal{BD}^k(\Omega,F),\quad \mathcal{C}^k(\Omega,F)\ \text{ i }\ \mathcal{BC}^k(\Omega,F).$$
Normujemy przestrzeń $\mathcal{BD}^k(\Omega,F)$:
$$\|f\|_{\Omega,k} := \sum_{j=0}^{k}\sup\{\|f^{(j)}(x)\| : x\in\Omega\},\quad f\in\mathcal{BD}^k(\Omega,F).$$

Zauważamy, że $f'\in\mathcal{C}^{k-1}(\Omega,\mathcal{L}(E,F)) \iff f\in\mathcal{C}^k(\Omega,F)$. Ta prosta uwaga, wobec dowodu Propozycji 10.6.4, pozwala bez trudu pokazać (Ćwiczenie), że:

- *jeżeli* $f\in\mathcal{C}^k(\Omega,F)$, $g\in\mathcal{C}^k(\Omega,G)$ *i* $B\in\mathcal{L}(F,G;H)$, *to* $B(f,g)\in\mathcal{C}^k(\Omega,H)$,
- *jeżeli* $\varphi\in\mathcal{C}^k(U,E)$ *i* $f\in\mathcal{C}^k(\Omega,F)$, *to* $f\circ\varphi\in\mathcal{C}^k(U,F)$.

Teraz przychodzi kolej na uogólnienie twierdzenia o różniczkowaniu szeregu wyraz po wyrazie (por. Twierdzenie 6.9.1), a na koniec dowodzimy, że $\mathcal{BD}^k(D,F)$ i $\mathcal{BC}^k(D,F)$ są przestrzeniami Banacha, gdy F jest przestrzenią Banacha (Ćwiczenie).

Twierdzenie 10.6.6 (Twierdzenie o różniczkowaniu szeregu wyraz po wyrazie). *Niech $D\subset E$ będzie obszarem takim, że ϱ_D^i jest funkcją ograniczoną (np. D jest ograniczonym obszarem gwiaździstym) i niech F będzie przestrzenią Banacha.*

(a) *Załóżmy, że mamy rodzinę $(f_i)_{i\in I}\subset\mathcal{D}^k(D,F)$ taką, że:*
- *$(f_i^{(k)})_{i\in I}$ jest rodziną jednostajnie sumowalną na D,*
- *dla dowolnego $j\in\{0,\dots,k-1\}$ istnieje punkt $c_j\in D$ taki, że rodzina $(f_i^{(j)}(c_j))_{i\in I}$ jest sumowalna.*

Wtedy dla dowolnego $j\in\{0,\dots,k-1\}$ rodzina $(f_i^{(j)})_{i\in I}$ jest jednostajnie sumowalna na D i jeżeli $g_j := \sum_{i\in I} f_i^{(j)}$, to $g_0\in\mathcal{D}^k(D,F)$ oraz $g_0^{(j)}=g_j$, $j=1,\dots,k$, czyli $\Big(\sum_{i\in I} f_i\Big)^{(j)} = \sum_{i\in I} f_i^{(j)}$, $j=1,\dots,k$.

(b) *Załóżmy, że ciąg $(f_n)_{n=1}^\infty\subset\mathcal{D}^k(D,F)$ jest taki, że:*
- *szereg $\sum_{n=1}^\infty f_n^{(k)}$ jest zbieżny jednostajnie na D,*
- *dla dowolnego $j\in\{0,\dots,k-1\}$ istnieje punkt $c_j\in D$ taki, że szereg $\sum_{n=1}^\infty f_n(c_j)$ jest zbieżny.*

Wtedy dla dowolnego $j\in\{0,\dots,k-1\}$ szereg $\sum_{n=1}^\infty f_n^{(j)}$ jest zbieżny jednostajnie na D i jeżeli $g_j := \sum_{n=1}^\infty f_n^{(j)}$, to $g_0\in\mathcal{D}^k(D,F)$ oraz $g_0^{(j)}=g_j$, $j=1,\dots,k$, czyli $\Big(\sum_{n=1}^\infty f_n\Big)^{(j)} = \sum_{n=1}^\infty f_n^{(j)}$, $j=1,\dots,k$.

(c) *Załóżmy, że ciąg $(f_n)_{n=1}^\infty\subset\mathcal{D}^k(D,F)$ jest taki, że:*
- *ciąg $(f_n^{(k)})_{n=1}^\infty$ jest zbieżny jednostajnie na D,*

- *dla dowolnego $j \in \{0,\dots,k-1\}$ istnieje punkt $c_j \in D$ taki, że ciąg $(f_n^{(j)}(c_j))_{n=1}^\infty$ jest zbieżny.*

Wtedy dla dowolnego $j \in \{0,\dots,k-1\}$ ciąg $(f_n^{(j)})_{n=1}^\infty$ jest zbieżny jednostajnie na D i jeżeli $g_j := \lim\limits_{n\to+\infty} f_n^{(j)}$, to $g_0 \in \mathcal{D}^k(D,F)$ oraz $g_0^{(j)} = g_j$, $j=1,\dots,k$, czyli $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right)^{(j)} = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n^{(j)}$, $j=1,\dots,k$.

Propozycja 10.6.7. *Załóżmy, że D jest obszarem i $f \in \mathcal{D}^k(D,F)$. Wtedy*

$$f \in \mathcal{P}_{k-1}(E,F) \Longleftrightarrow f^{(k)} \equiv 0.$$

Dowód. Jak zwykle indukcja. Przypadek $k=1$ jest dobrze znany (Wniosek 10.3.11).

$k \rightsquigarrow k+1$: Ponieważ $(f^{(k)})' \equiv 0$, więc $f^{(k)} = \text{const} = Q \in \mathcal{H}^k(E,F)$. Przypomnijmy, że $Q^{(k)} = k!Q$ (Obserwacja 10.5.7). Teraz $\left(f - \frac{1}{k!}Q\right)^{(k)} \equiv 0$, a stąd, na podstawie założenia indukcyjnego, $f - \frac{1}{k!}Q \in \mathcal{P}_{k-1}(E,F)$, a więc $f \in \mathcal{P}_k(E,F)$. □

10.6.1. Wyższe pochodne raz jeszcze. Niech E i F będą przestrzeniami unormowanymi nad $\mathbb{K}$, $\Omega \in \operatorname{top} E$, $f : \Omega \longrightarrow F$, $a \in \Omega$. Obecnie zajmiemy się innym rodzajem k-tej różniczki oznaczanym roboczo przez $d_a^k f$. Przyjmujemy, że $d_a^1 f := (a)$ oraz jeżeli różniczka $d_x^{k-1} f : E^{k-1} \longrightarrow F$ istnieje dla x z pewnego otoczenia U punktu a, to $d_a^k f(\xi_1,\dots,\xi_k) := (U \ni x \longmapsto d_x^{k-1} f(x)(\xi_1,\dots,\xi_{k-1}) \in F)'(a)(\xi_k)$.

Obserwacja 10.6.8. (a) Odwzorowanie $d_a^k f$ jest zawsze k-liniowe (indukcja).

(b) Jeżeli $f \in \mathcal{D}^k(\Omega,F;a)$, to $d_a^k f$ istnieje oraz $d_a^k f = f^{(k)}(a)$.

(c) Dla $E = \mathbb{R}$, istnienie $d_a^k f$ jest równoważne istnieniu $f^{(k)}(a)$ oraz $d_a^k f(\xi_1,\dots,\xi_k) = f^{(k)}(a)\xi_1\cdots\xi_k$.

(d) Jeżeli $d_a^k f$ istnieje, to dla dowolnych $\xi_1,\dots,\xi_k \in E$ pochodna kierunkowa $\frac{\partial^k f}{\partial\xi_k\cdots\partial\xi_1}(a)$ istnieje oraz $\frac{\partial^k f}{\partial\xi_k\cdots\partial\xi_1}(a) = d_a^k f(\xi_1,\dots,\xi_k)$ (indukcja).

Propozycja 10.6.9. *Niech $E = \mathbb{R}^n$ i załóżmy, że $f^{(k)}(x)$ istnieje dla x z pewnego otoczenia U punktu a. Wtedy $d_a^{k+1} f$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{(k+1)}(a)$ istnieje.*

W szczególności, dla $E = \mathbb{R}^n$ oba typy różniczek się pokrywają.

Dowód. Z istnienia $d_a^{k+1} f$ wynika, że dla dowolnego wielowskaźnika $I = (i_1,\dots,i_k) \in \{1,\dots,n\}^k$ pochodna $\left(U \ni x \longmapsto f^{(k)}(x)(\boldsymbol{e}_{i_1},\dots,\boldsymbol{e}_{i_k})\right)'(a)$ istnieje. Innymi słowy, istnieje pochodna $\left(U \ni x \longmapsto \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k}\cdots\partial x_{i_1}}(x)\right)'(a)$. Z drugiej strony, mamy

$$f^{(k)}(x)(\xi_1,\dots,\xi_k) = \sum_I \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k}\cdots\partial x_{i_1}}(x)\xi_{1,i_1}\cdots\xi_{k,i_k}, \quad x \in U,\ \xi_1,\dots,\xi_k \in \mathbb{R}^n.$$

Zapisując tę równość na poziomie $\mathcal{L}^k(\mathbb{R}^n,F)$ mamy

$$f^{(k)}(x) = \sum_I P_I \cdot \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k}\cdots\partial x_{i_1}}(x),$$

gdzie $P_I \in \mathcal{L}^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, $P_I(\xi_1,\dots,\xi_k) := \xi_{1,i_1}\cdots\xi_{k,i_k}$. Wynika stąd natychmiast, że $f^{(k+1)}(a)$ istnieje (Ćwiczenie). □

10.7. Wzór Taylora

Niech E i F będą przestrzeniami unormowanymi nad $\mathbb{K}$, niech $\Omega \subset E$ będzie zbiorem otwartym, $f : \Omega \longrightarrow F$, $a \in \Omega$ i załóżmy, że $f \in \mathcal{D}^k(\Omega,F;a)$ (dla pewnego $k \in \mathbb{N}$).

Definiujemy *k-tą resztę odwzorowania f w punkcie a*:

$$R_k(f,a,x) := f(x) - \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)\right), \quad x \in \Omega.$$

Ponadto przyjmujemy $R_0(f,a,x) := f(x) - f(a)$. Mamy:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)(h) + \tfrac{1}{2}f''(a)(h) + \dots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(h) + R_k(f,a,a+h), \quad h \in \Omega - a.$$

Zauważmy, że dla $k \geqslant 2$, funkcja $R_k(f,a,\cdot)$ jest różniczkowalna w pewnym otoczeniu U punktu a oraz

$$R_k(f,a,\cdot)'(x) = R_{k-1}(f',a,x), \quad x \in U.$$

Istotnie, jeżeli $f \in \mathcal{D}(U,F)$, to na podstawie Propozycji 10.5.7 mamy:

$$\begin{aligned}R_k(f,a,\cdot)'(x)(h) &= f'(x)(h) - \left(f'(a)(h) + 2\cdot\tfrac{1}{2}f''(a)(x-a,h) + \dots + k\cdot\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a,\dots,x-a,h)\right)\\ &= R_{k-1}(f',a,x)(h), \quad x \in U.\end{aligned}$$

Twierdzenie 10.7.1 (Wzór Taylora). (a) *(Wzór Taylora z resztą Peano) Jeżeli $f^{(k)}(a)$ istnieje, to*

$$\lim_{h\to 0}\frac{R_k(f,a,a+h)}{\|h\|^k}=0. \quad (^{11})$$

(b) *Jeżeli $f\in\mathcal{C}^k(\Omega,F)$, to dla dowolnego zbioru zwartego $K\subset\Omega$ mamy:*

$$\lim_{\delta\to 0}\ \sup\Big\{\frac{\|R_k(f,a,a+h)\|}{\|h\|^k}: a\in K,\ 0<\|h\|\leqslant\delta\Big\}=0.$$

(c) (Wzór Taylora z resztą typu Lagrange'a) *Załóżmy, że Ω jest gwiaździsty względem a, $f\in\mathcal{D}^{k+1}(\Omega,F)$ oraz $\|f^{(k+1)}(x)\|\leqslant M$ dla dowolnego $x\in\Omega$. Wtedy*

$$\|R_k(f,a,a+h)\|\leqslant\frac{M\|h\|^{k+1}}{(k+1)!},\quad h\in\Omega-a,\quad k\in\mathbb{N}_0.$$

Dowód. (a) Indukcja ze względu na k. Przypadek $k=1$ jest oczywisty.

$k\rightsquigarrow k+1$: Na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych, dla małych $0\neq h\in\Omega-a$ mamy:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\|h\|^{k+1}}\|R_{k+1}(f,a,a+h)\| &= \frac{1}{\|h\|^{k+1}}\|R_{k+1}(f,a,a+h)-R_{k+1}(f,a,a)\|\\ &\leqslant \frac{1}{\|h\|^{k}}\sup\{\|R_{k+1}(f,a,\cdot)'(x)\|: x\in[a,a+h]\}\\ &= \frac{1}{\|h\|^{k}}\sup\{\|R_{k}(f',a,a+\xi)\|: \xi\in[0,h]\}\\ &\leqslant \sup\Big\{\frac{1}{\|\xi\|^{k}}\|R_{k}(f',a,a+\xi)\|: \xi\in(0,h]\Big\}\underset{h\to 0}{\longrightarrow}0.\end{aligned}$$

(b) Indukcja ze względu na k. Przypadek $k=1$ wynika z twierdzenia o przyrostach skończonych. Istotnie, dla $0<\delta<\operatorname{dist}(K,\partial\Omega)$ mamy:

$$\begin{aligned}&\sup\Big\{\frac{\|R_1(f,a,a+h)\|}{\|h\|}: a\in K,\ 0<\|h\|\leqslant\delta\Big\}\\ &=\sup\Big\{\frac{\|f(a+h)-f(a)-f'(a)(h)\|}{\|h\|}: a\in K,\ 0<\|h\|\leqslant\delta\Big\}\\ &\leqslant\sup\{\|f'(x)-f'(a)\|: a\in K,\ x\in[a,a+h],\ 0<\|h\|\leqslant\delta\}\underset{\delta\to 0}{\longrightarrow}0\end{aligned}$$

(ostatni fakt wynika z jednostajnej ciągłości funkcji f' na K — por. 4.4.5).

$k\rightsquigarrow k+1$: Na podstawie dowodu (a), dla małych $\delta>0$, mamy:

$$\sup\Big\{\frac{\|R_{k+1}(f,a,a+h)\|}{\|h\|^{k+1}}: a\in K,\ 0<\|h\|\leqslant\delta\Big\}\leqslant\sup\Big\{\frac{\|R_k(f',a,a+\xi)\|}{\|\xi\|^k}: a\in K,\ 0<\|\xi\|\leqslant\delta\Big\}\underset{\delta\to 0}{\longrightarrow}0.$$

(c) Indukcja ze względu na k. Przypadek $k=0$ wynika z twierdzenia o przyrostach skończonych.

$k\rightsquigarrow k+1$: Mamy

$$\|R_k(f',a,a+h)\|\leqslant\frac{M\|h\|^{k+1}}{(k+1)!},\quad h\in\Omega-a.$$

Ustalmy $h\in\Omega-a$ i niech

$$g(t):=R_{k+1}(f,a,a+th),\quad \varphi(t):=\frac{M\|h\|^{k+2}t^{k+2}}{(k+2)!},\quad t\in[0,1].$$

Wobec poprzedniej nierówności mamy

$$\|g'(t)\|=\|R_{k+1}(f,a,\cdot)'(a+th)(h)\|=\|R_k(f',a,a+th)(h)\|\leqslant\frac{M\|th\|^{k+1}}{(k+1)!}\|h\|=\varphi'(t),\quad t\in[0,1].$$

Stąd, na podstawie zwykłego twierdzenia o przyrostach skończonych,

$$\|R_{k+1}(f,a,a+h)\|=\|g(1)-g(0)\|\leqslant\varphi(1)-\varphi(0)=\frac{M\|h\|^{k+2}}{(k+2)!}.\qquad\square$$

$(^{11})$ Czyli $R_k(f,a,a+h)=o(\|h\|^k)$ przy $h\longrightarrow 0$.

Obserwacja 10.7.2 (Jednoznaczność wzoru Taylora)**.** Jeżeli $f^{(k)}(a)$ istnieje, $Q = Q_0 + \dots + Q_k \in \underline{\mathcal{P}}_k(E, F)$ oraz

$$f(a+h) = Q(h) + o(\|h\|^k), \qquad \text{przy } h \longrightarrow 0, \tag{†}$$

to $Q_j = \frac{1}{j!} f^{(j)}(a)$, $j = 0, \dots, k$.

Istotnie, na podstawie wzoru Taylora z resztą Peano, mamy:

$$\begin{aligned} &f(a) + f'(a)(h) + \tfrac{1}{2} f''(a)(h) + \dots + \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(h) \\ &\qquad = Q_0(h) + Q_1(h) + Q_2(h) + \dots + Q_k(h) + o(\|h\|^k), \qquad \text{przy } h \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Ustalmy $h \in E$. Zastępując w powyższym wzorze h przez th ($t \in \mathbb{R}$) dostajemy

$$\begin{aligned} &f(a) + f'(a)(h)t + \tfrac{1}{2} f''(a)(h)t^2 + \dots + \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(h)t^k \\ &\qquad = Q_0(h) + Q_1(h)t + Q_2(h)t^2 + \dots + Q_k(h)t^k + o(t^k), \qquad \text{przy } t \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

skąd natychmiast wynika, że $Q_j(h) = \frac{1}{j!} f^{(j)}(a)(h)$, $j = 0, \dots, k$.

Propozycja 10.7.3 (Wzór na k–tą pochodną złożenia)**.** *Niech E, F, G będą przestrzeniami unormowanymi, niech $U \subset G$, $\Omega \subset E$ będą zbiorami otwartymi i niech $t_0 \in U$. Załóżmy, że $\varphi \in \mathcal{D}^k(U, E; t_0)$, $\varphi(U) \subset \Omega$, $f \in \mathcal{D}^k(\Omega, F; \varphi(t_0))$. Wtedy (por. Propozycja 10.6.4(b)):*

$$\begin{aligned} (f \circ \varphi)^{(k)}(t_0)(Y) = &\sum_{\substack{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{N}_0^k \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + k\alpha_k = k}} \frac{k!}{\alpha!} \\ &f^{(\alpha_1 + \dots + \alpha_k)}(\varphi(t_0))\Big(\underbrace{\frac{\varphi'(t_0)(Y)}{1!}, \dots, \frac{\varphi'(t_0)(Y)}{1!}}_{\alpha_1 \times}, \dots, \underbrace{\frac{\varphi^{(k)}(t_0)(Y)}{k!}, \dots, \frac{\varphi^{(k)}(t_0)(Y)}{k!}}_{\alpha_k \times}\Big), \quad Y \in G. \end{aligned}$$

Dowód. Skorzystamy z Obserwacji 10.7.2 (podobnie, jak dla jednej zmiennej). Przyjmijmy oznaczenia:

$$\varphi_j := \frac{1}{j!} \varphi^{(j)}(t_0),\ a := \varphi(t_0),\ f_j := \frac{1}{j!} f^{(j)}(a), \quad j = 0, \dots, k.$$

Mamy:

$$f(a+h) = \sum_{i=0}^k f_i(h) + \alpha(h)\|h\|^k, \quad \varphi(t_0 + Y) = \sum_{j=0}^k \varphi_j(Y) + \beta(Y)\|Y\|^k,$$

gdzie $\lim_{h \to 0} \alpha(h) = 0$, $\lim_{Y \to 0} \beta(Y) = 0$. Korzystając z Obserwacji 10.7.2 wystarczy wyznaczyć wielomian jednorodny stopnia k w rozwinięciu $(f \circ \varphi)(t_0 + Y)$. Liczymy:

$$\begin{aligned} (f \circ \varphi)(t_0 + Y) &= \sum_{i=0}^k f_i\Big(\sum_{j=1}^k \varphi_j(Y) + \beta(Y)\|Y\|^k\Big) + \alpha\big(\varphi(t_0 + Y) - \varphi(t_0)\big)\Big\|\sum_{j=1}^k \varphi_j(Y) + \beta(Y)\|Y\|^k\Big\|^k \\ &= \sum_{i=0}^k f_i\Big(\sum_{j=1}^k \varphi_j(Y)\Big) + o(\|Y\|^k) \\ &= \sum_{i=0}^k \sum_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}_0 \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_k = i}} \frac{i!}{\alpha_1! \cdots \alpha_k!}\, f_i\Big(\underbrace{\varphi_1(Y), \dots, \varphi_1(Y)}_{\alpha_1 \times}, \dots, \underbrace{\varphi_k(Y), \dots, \varphi_k(Y)}_{\alpha_k \times}\Big) + o(\|Y\|^k) \\ &= \sum_{\nu=0}^k \Big(\sum_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}_0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + k\alpha_k = \nu}} \frac{(\alpha_1 + \dots + \alpha_k)!}{\alpha_1! \cdots \alpha_k!} f_{\alpha_1 + \dots + \alpha_k}\Big(\underbrace{\varphi_1(Y), \dots, \varphi_1(Y)}_{\alpha_1 \times}, \dots, \underbrace{\varphi_k(Y), \dots, \varphi_k(Y)}_{\alpha_k \times}\Big) + o(\|Y\|^k). \end{aligned}$$

□

Propozycja 10.7.4. *Przy założeniach takich, jak w Propozycji 10.7.3, mamy*

$$(f\circ\varphi)^{(k)}(t_0)(Y_1,\dots,Y_k)=\sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_k)\in\mathbb{N}_0^k\\ \alpha_1+2\alpha_2+\dots+k\alpha_k=k}}\frac{1}{\alpha!}\sum_{\alpha\in\Sigma_\alpha}f^{(\alpha_1+\dots+\alpha_k)}\Big(\underbrace{\varphi^{(i)}(t_0)(Y_{\sigma(1)},\dots,Y_{\sigma(k)})}_{i=1,\dots,k}\Big),\quad Y_1,\dots,Y_k\in G.\quad (*)$$

gdzie Σ_α oznacza zbiór tych wszystkich permutacji k-elementowych σ, dla których ciąg $(\sigma(1),\dots,\sigma(k))$ po podzieleniu na grupy według reguły:

najpierw α_1 grup 1-elementowych, potem α_2 grup 2-elementowych, ..., a na końcu α_k grup k-elementowych

jest w każdej grupie rosnący. Zauważmy, że takich permutacji jest $k!(\prod_{i=1}^{k}(i!)^{\alpha_i})^{-1}$. Ostatni wyraz w (*) ma charakter symboliczny. Oznacza on, że ciąg $(Y_{\sigma(1)},\dots,Y_{\sigma(k)})$ dzielimy grupy według powyższej zasady i po takim podzieleniu odpowiednie wyrazy powinny być podstawione do odpowiednich odwzorowań $\varphi^{(i)}(t_0)$.

Dowód. Do wzoru z Propozycji 10.7.3 zastosujemy formułę polaryzacyjną. Ustalmy $Y=(Y_1,\dots,Y_k)\in G^k$. Dla $\varepsilon=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k)\in\{0,1\}^k$ niech $\varepsilon\cdot Y:=\varepsilon_1Y_1+\dots+\varepsilon_kY_k$. Mamy

$$(f\circ\varphi)^{(k)}(t_0)(Y)=\frac{1}{k!}\sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^k}(-1)^{k-|\varepsilon|}\sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_k)\in\mathbb{N}_0^k\\ \alpha_1+2\alpha_2+\dots+k\alpha_k=k}}\frac{k!}{\alpha!}$$

$$f^{(\alpha_1+\dots+\alpha_k)}(\varphi(t_0))\Big(\underbrace{\frac{\varphi'(t_0)(\varepsilon\cdot Y)}{1!},\dots,\frac{\varphi'(t_0)(\varepsilon\cdot Y)}{1!}}_{\alpha_1\times},\dots,\underbrace{\frac{\varphi^{(k)}(t_0)(\varepsilon\cdot Y)}{k!},\dots,\frac{\varphi^{(k)}(t_0)(\varepsilon\cdot Y)}{k!}}_{\alpha_k\times}\Big)$$

$$=\sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^k}(-1)^{k-|\varepsilon|}\sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_k)\in\mathbb{N}_0^k\\ \alpha_1+2\alpha_2+\dots+k\alpha_k=k}}\frac{1}{\alpha!}\sum_{\substack{\mu_{i,j}^s\in\mathbb{N}_0\\ i=1,\dots,k\\ j=1,\dots,\alpha_i\\ s=1,\dots,k\\ |\mu_{i,j}|=i}}\Big(\prod_{\substack{r=1,\dots,k\\ s=1,\dots,\alpha_r}}\frac{r!}{\mu_{r,s}!}\Big)\varepsilon_1^{|\mu^1|}\cdots\varepsilon_k^{|\mu^k|}\quad(^{12})$$

$$f^{(\alpha_1+\dots+\alpha_k)}\Big(\underbrace{\underbrace{\frac{1}{i!}\varphi^{(i)}(t_0)(\underbrace{Y_1,\dots,Y_1}_{\mu_{i,j}^1\times},\dots,\underbrace{Y_k,\dots,Y_k}_{\mu_{i,j}^k\times})}_{j=1,\dots,\alpha_i}}_{i=1,\dots,k}\Big)$$

$$=\sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_k)\in\mathbb{N}_0^k\\ \alpha_1+2\alpha_2+\dots+k\alpha_k=k}}\frac{1}{\alpha!}\sum_{\substack{\mu_{i,j}^s\in\mathbb{N}_0\\ i=1,\dots,k\\ j=1,\dots,\alpha_i\\ s=1,\dots,k\\ |\mu_{i,j}|=i,\ |\mu^s|=1,\ s=1,\dots,k}}\Big(\prod_{\substack{r=1,\dots,k\\ s=1,\dots,\alpha_r}}\frac{1}{\mu_{r,s}!}\Big)f^{(\alpha_1+\dots+\alpha_k)}\Big(\underbrace{\underbrace{\varphi^{(i)}(t_0)(\underbrace{Y_1,\dots,Y_1}_{\mu_{i,j}^1\times},\dots,\underbrace{Y_k,\dots,Y_k}_{\mu_{i,j}^k\times})}_{j=1,\dots,\alpha_i}}_{i=1,\dots,k}\Big)$$

$$=\sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_k)\in\mathbb{N}_0^k\\ \alpha_1+2\alpha_2+\dots+k\alpha_k=k}}\frac{1}{\alpha!}\sum_{\alpha\in\Sigma_\alpha}f^{(\alpha_1+\dots+\alpha_k)}\Big(\underbrace{\varphi^{(i)}(t_0)(Y_{\sigma(1)},\dots,Y_{\sigma(k)})}_{i=1,\dots,k}\Big).\qquad\square$$

10.8. Szereg Taylora

Niech F będzie przestrzenią Banacha i niech $f:\Omega\longrightarrow F$. Załóżmy, że dla pewnego $a\in\Omega$ pochodna $f^{(k)}(a)$ istnieje dla dowolnego $k\in\mathbb{N}$. Wtedy definiujemy *szereg Taylora funkcji f w punkcie a*

$$(T_af)(x):=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}f^{(\nu)}(a)(x-a);$$

$(T_af)(a+h)$ jest szeregiem wielomianów jednorodnych zmiennej h.

Propozycja 10.8.1 (Borel, por. Twierdzenie 6.12.4)**.** *Niech $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ będzie rzeczywistą przestrzenią unitarną (np. $\mathbb{R}^n$ ze zwykłym iloczynem skalarnym), zaś F — przestrzenią Banacha. Wtedy, dla dowolnego ciągu wielomianów jednorodnych $Q_\nu\in\mathcal{H}^\nu(E,F)$, $\nu\in\mathbb{N}_0$, istnieje funkcja $f\in\mathcal{C}^\infty(E,F)$ taka,*

---

(12) $|\mu_{i,j}|:=\sum_{s=1}^{k}\mu_{i,j}^s$, $\mu_{i,j}!:=\prod_{s=1}^{k}(\mu_{i,j}^s)!$, $|\mu^s|:=\sum_{\substack{i=1,\dots,k\\ j=1,\dots,\alpha_i}}\mu_{i,j}^s$.

że

$$T_0 f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} Q_\nu(x),$$

czyli

$$\frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(0) = Q_\nu, \quad \nu \in \mathbb{N}_0.$$

Dowód. Rozpocznijmy od prostej obserwacji, że dla funkcji

$$E \ni x \overset{\Phi}{\longmapsto} \langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$$

mamy $\Phi'(a)(X) = 2\langle a, X\rangle$, $\Phi''(a)(X,X) = 2\langle X, X\rangle$, $\Phi^{(k)}(a) = 0$, $k \geqslant 3$ (por. Obserwacja 10.6.1).

Niech $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, [0,1])$, $\psi(t) = 0$ dla $t \leqslant 1/4$, $\psi(t) = 1$ dla $t \geqslant 1$. Zdefiniujmy $\varphi(x) := \psi(\langle x, x\rangle) = \psi \circ \Phi(x)$, $x \in E$. Wtedy $\varphi(x) = 0$ dla $\|x\| \leqslant 1/2$, $\varphi(x) = 1$ dla $\|x\| \geqslant 1$ oraz $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(E, [0,1])$. Niech $C_k := \sup\{\|\varphi^{(k)}(x)\| : \|x\| \leqslant 1\}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Zauważmy, że $C_0 = 1$ oraz $C_k < +\infty$, $k \in \mathbb{N}$ (na podstawie wzoru na pochodną złożenia — por. Propozycja 10.7.3). Istotnie, niech $c_\ell := \sup\{|\psi^{(\ell)}(t)| : t \in \mathbb{R}\} < +\infty$. Dla $x, h \in E$, $\|x\| \leqslant 1$, $\|h\| \leqslant 1$, mamy

$$\begin{aligned}
&|\varphi^{(k)}(x)(h)| = |(\psi \circ \Phi)^{(k)}(x)(h)| \\
&= \Big| \sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_k \in \mathbb{N}_0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + k\alpha_k = k}} \frac{k!}{\alpha_1! \cdots \alpha_k!} \psi^{(\alpha_1 + \dots + \alpha_k)}(\Phi(x)) \Big(\frac{\Phi'(x)(h)}{1!}\Big)^{\alpha_1} \cdots \Big(\frac{\Phi^{(k)}(x)(h)}{k!}\Big)^{\alpha_k} \Big| \\
&= \Big| \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{N}_0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = k}} \frac{k!}{\alpha_1!\alpha_2!} \psi^{(\alpha_1+\alpha_2)}(\Phi(x)) \Big(\frac{2\langle x, h\rangle}{1!}\Big)^{\alpha_1} \Big(\frac{2\langle h, h\rangle}{2!}\Big)^{\alpha_2} \Big| \leqslant \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{N}_0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = k}} \frac{k!}{\alpha_1!\alpha_2!} c_{\alpha_1+\alpha_2} 2^{\alpha_1} < +\infty.
\end{aligned}$$

Na wstępie pokażemy, że dla dowolnego $N \in \mathbb{N}_0$ istnieje funkcja $g_N \in \mathcal{C}^\infty(E, F) \cap \mathcal{BD}^N(E, F)$ taka, że $g_N = 0$ w pewnym otoczeniu zera oraz

$$\|Q_{N+1} - g_N\|_{E,N} \leqslant \frac{1}{2^N}. \tag{†}$$

Ustalmy $N \in \mathbb{N}_0$. Przypomnijmy (Obserwacja 10.6.1), że

$$Q_{N+1}^{(\mu)}(a)(X) = \mu! \binom{N+1}{\mu} \widehat{Q}_{N+1}(\underbrace{a, \dots, a}_{(N+1-\mu)\times}, \underbrace{X, \dots, X}_{\mu\times}).$$

W szczególności,

$$\|Q_{N+1}^{(\mu)}(a)\| \leqslant \mu! \binom{N+1}{\mu} \|\widehat{Q}_{N+1}\| \|a\|^{N+1-\mu}.$$

Niech $M_\mu := \mu! \binom{N+1}{\mu} \|\widehat{Q}_{N+1}\|$, $\mu = 0, \dots, N+1$. Połóżmy

$$h_\varepsilon(x) := \varphi(x/\varepsilon) Q_{N+1}(x), \quad x \in E,\ \varepsilon > 0.$$

Wtedy dla $0 < \varepsilon \leqslant 1$, korzystając ze wzoru Leibniza (por. Propozycja 10.6.4), mamy

$$\begin{aligned}
&\|Q_{N+1} - h_\varepsilon\|_{E,N} = \|Q_{N+1} - h_\varepsilon\|_{B(\varepsilon),N} = \sum_{\nu=0}^{N} \sup_{\|x\| \leqslant \varepsilon} \Big\| \Big((1 - \varphi(\cdot/\varepsilon)) Q_{N+1}\Big)^{(\nu)}(x) \Big\| \\
&= \sum_{\nu=0}^{N} \sup_{\|x\| \leqslant \varepsilon,\ \|\xi\| \leqslant 1} \Big\| \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} (1 - \varphi(\cdot/\varepsilon))^{(\nu-\mu)}(x)(\xi) Q_{N+1}^{(\mu)}(x)(\xi) \Big\| \\
&= \sum_{\nu=0}^{N} \sup_{\|x\| \leqslant \varepsilon,\ \|\xi\| \leqslant 1} \Big\| - \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \binom{\nu}{\mu} \varphi^{(\nu-\mu)}(x/\varepsilon)(\xi) \varepsilon^{\mu-\nu} Q_{N+1}^{(\mu)}(x)(\xi) + (1 - \varphi(x/\varepsilon)) Q_{N+1}^{(\nu)}(x)(\xi) \Big\| \\
&\leqslant \sum_{\nu=0}^{N} \Big(\sum_{\mu=0}^{\nu-1} \binom{\nu}{\mu} C_{\nu-\mu} \varepsilon^{\mu-\nu} M_\mu \varepsilon^{N+1-\mu} + M_\nu \varepsilon^{N+1-\nu} \Big) \leqslant \varepsilon \sum_{\nu=0}^{N} \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} C_{\nu-\mu} M_\mu = \varepsilon \operatorname{const}(N).
\end{aligned}$$

Teraz jako g_N wystarczy wziąć h_ε ze stosownie małym ε.

Jeżeli już mamy funkcje g_N, $N \in \mathbb{N}_0$, to definiujemy

$$f := Q_0 + \sum_{N=0}^{\infty} (Q_{N+1} - g_N).$$

Wobec (†), szereg jest zbieżny normalnie w $\mathcal{C}^k(E, F)$ dla dowolnego k. W takim razie $f \in \mathcal{C}^\infty(E, F)$. Oczywiście, $f(0) = Q_0$.

Dla dowolnego ν szereg $\sum\limits_{N=0}^{\infty} (Q_{N+1} - g_N)^{(\nu)}$ jest zbieżny jednostajnie na E. Wynika stąd w szczególności (na podstawie twierdzenia o różniczkowaniu szeregu wyraz po wyrazie), że

$$f^{(\nu)}(0) = \sum_{N=0}^{\infty} (Q_{N+1} - g_N)^{(\nu)}(0) = \sum_{N=0}^{\infty} Q_{N+1}^{(\nu)}(0) = \nu! Q_\nu, \quad \nu \in \mathbb{N}. \qquad \square$$

Ćwiczenie* 10.8.2. Niech E, F będą przestrzeniami Banacha. Czy dla dowolnego ciągu ciągłych wielomianów jednorodnych $Q_\nu \in \mathcal{H}^\nu(E, F)$, $\nu \in \mathbb{N}_0$, istnieje funkcja $f \in \mathcal{C}^\infty(E, F)$ taka, że

$$T_0 f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} Q_\nu(x) \ ?$$

Zauważmy, iż z dowodu Twierdzenia 10.8.1 wynika, że wystarczy znaleźć funkcję $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(E, [0, 1])$ taką, że $\varphi(x) = 0$ dla $\|x\| \leqslant 1/2$, $\varphi(x) = 1$ dla $\|x\| \geqslant 1$ oraz $\sup\{\|\varphi^{(k)}(x)\| : \|x\| \leqslant 1\} < +\infty$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Propozycja 10.8.3 (Twierdzenie Whitneya $\left({}^{13}\right)$)**.** *Niech $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ będzie dowolną ośrodkową przestrzenią unitarną (np. $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym). Wtedy dla dowolnego zbioru domkniętego $S \subset E$ istnieje funkcja $f \in \mathcal{C}^\infty(E, \mathbb{R}_+)$ taka, że $S = f^{-1}(0)$ oraz $f^{(j)} = 0$ na S dla dowolnego $j \in \mathbb{N}_0$.*

Dowód. Możemy założyć, że $\varnothing \neq S \neq E$. Niech $\Phi(x) := \langle x, x\rangle$, $x \in E$ i niech $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, [0, 1])$ będzie dowolną funkcją taką $\psi = 1$ na $[0, 1/2]$ oraz $[0, 1) = \{x \in \mathbb{R}_+ : \psi(x) > 0\}$. Zdefiniujmy $\varphi := \psi \circ \Phi$ (por. dowód Propozycji 10.8.1). Niech $C_j := \sup\{\|\varphi^{(j)}(x)\| : \|x\| \leqslant 1\}$, $j \in \mathbb{N}_0$. Ponieważ E jest ośrodkowa, zbiór $E \setminus S$ zawiera podzbiór przeliczalny gęsty, powiedzmy $\{q_1, q_2, \dots\}$. Niech $d_k := \operatorname{dist}(q_k, S)$, $k \in \mathbb{N}$.

$$a_k := \frac{1}{2^k} \min\Big\{\frac{d_k^j}{C_j} : j \leqslant k\Big\}, \quad f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, \varphi\Big(\frac{x - q_k}{d_k}\Big), \quad x \in E.$$

Sprawdzamy, że f spełnia wszystkie wymagane warunki:

- $f \in \mathcal{C}^\infty(E, \mathbb{R}_+)$: Wystarczy pokazać, że dla dowolnego $j \in \mathbb{N}_0$, szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \Big|\Big(\varphi\Big(\frac{\cdot - q_k}{d_k}\Big)\Big)^{(j)}\Big|$$

jest zbieżny jednostajnie w E. Mamy

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \Big|\Big(\varphi\Big(\frac{\cdot - q_k}{d_k}\Big)\Big)^{(j)}(x)\Big| = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{1}{d_k^j} \Big|\varphi^{(j)}\Big(\frac{x - q_k}{d_k}\Big)\Big| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{C_j}{d_k^j} \leqslant \sum_{k=1}^{j-1} a_k \frac{C_j}{d_k^j} + \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{2^k}, \quad x \in E.$$

- $f(x) > 0$ dla $x \in E \setminus S$: Ustalmy punkt $x_0 \in E \setminus S$ i niech $B(x_0, 2r) \subset E \setminus S$ dla pewnego $0 < r < 1$. Weźmy dowolny punkt $q_{k_0} \in B(x_0, r)$. Wtedy $d_{k_0} > r$, a stąd $x_0 \in B(q_{k_0}, d_{k_0})$, a więc $f(x_0) \geqslant a_{k_0}\, \varphi(\frac{x_0 - q_{k_0}}{d_{k_0}}) > 0$.
- $f^{(j)} = 0$ na S dla dowolnego j: Jeżeli $x_0 \in S$, to $\|x_0 - q_k\| \geqslant d_k$, a więc $\varphi^{(j)}(\frac{x_0 - q_k}{d_k}) = 0$ dla dowolnego k, a stąd $f^{(j)}(x_0) = 0$. $\square$

Ćwiczenie* 10.8.4. Niech E będzie dowolną przestrzenią unormowaną. Czy dla dowolnego zbioru domkniętego $S \subset E$ istnieje funkcja $f \in \mathcal{C}^\infty(E, \mathbb{R}_+)$ taka, że $S = f^{-1}(0)$ oraz $f^{(j)} = 0$ na S dla dowolnego $j \in \mathbb{N}_0$?

Z nazwiskiem Whitneya często łączy się nastepujące ważne twierdzenie.

---

(13) Hassler Whitney (1907–1989).

Twierdzenie* 10.8.5 (Twierdzenie Whitneya)**.** *Niech $S \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem domkniętym i niech $S \ni a \overset{P}{\longmapsto} P_a \in \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n, F)$ ($k \in \mathbb{N}_0$) będzie odwzorowaniem takim, że dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset S$ mamy:*

$$\sup\left\{\frac{\|P_x^{(j)}(x) - P_a^{(j)}(x)\|}{\|x-a\|^{k-j}} : a, x \in K,\ 0 < \|x-a\| \leqslant \delta,\ j = 0, \dots, k\right\} \underset{\delta \to 0+}{\longrightarrow} 0.$$

Wtedy istnieje odwzorowanie $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n, F)$ takie, że $f^{(j)}(x) = P_x^{(j)}(x)$, $x \in S$, $j = 0, \dots, k$.

Zauważmy, że dla $k = 0$, powyższe twierdzenie mówi, że dowolna funkcja ciągła $P : S \longrightarrow F$ przedłuża się ciągle na całe $\mathbb{R}^n$.

Niech $f : \Omega \longrightarrow F$ będzie odwzorowaniem klasy $\mathcal{C}^k$ ($k \in \mathbb{N}_0$) zbioru otwartego $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ w przestrzeń unormowaną F. Przypomnijmy oznaczenie:

$$R_k(f; a, x) := f(x) - \sum_{\nu=0}^{k} \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(a)(x-a), \quad a, x \in \Omega.$$

Przypomnijmy również jedną z postaci wzoru Taylora (Twierdzenie 10.7.1(b)):

Propozycja 10.8.6. *Dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset \Omega$ mamy*

$$\sup\left\{\frac{\|R_k(f; a, x)\|}{\|x-a\|^k} : a, x \in K,\ 0 < \|x-a\| \leqslant \delta\right\} \longrightarrow 0 \ \textit{gdy}\ \delta \longrightarrow 0.$$

Dla $a \in \Omega$ zdefiniujmy

$$P_a(x) = \overset{(k)}{T}_a f(x) := \sum_{\nu=0}^{k} \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(a)(x-a), \quad x \in \mathbb{R}^n;$$

$P_a : \mathbb{R}^n \longrightarrow F$ jest wielomianem stopnia $\leqslant k$ o wartościach w F ($P_a \in \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n, F)$). Oczywiście, $P_a(x) = f(x) - R_k(f; a, x)$ dla $x \in \Omega$. W szczególności,

$$P_a'(x) = f'(x) - R_{k-1}(f'; a, x) = \overset{(k-1)}{T_a} f'(x), \quad x \in \Omega,$$

i dalej

$$P_a^{(j)}(x) = \overset{(k-j)}{T_a} f^{(j)}(x), \quad x \in \Omega,\ j = 0, \dots, k. \quad (^{14})$$

Stąd, dla $x \in \Omega$, dostajemy

$$P_x^{(j)}(x) - P_a^{(j)}(x) = f^{(j)}(x) - \overset{(k-j)}{T_a} f^{(j)}(x) = R_{k-j}(f^{(j)}; a, x).$$

Teraz, wobec Propozycji 10.8.6, mamy

Propozycja 10.8.7. *Dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset \Omega$ mamy*

$$\sup\left\{\frac{\|P_x^{(j)}(x) - P_a^{(j)}(x)\|}{\|x-a\|^{k-j}} : a, x \in K,\ 0 < \|x-a\| \leqslant \delta,\ j = 0, \dots, k\right\} \underset{\delta \to 0+}{\longrightarrow} 0.$$

Propozycja 10.8.8. *Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i niech*

$$\Omega \ni a \overset{P}{\longmapsto} P_a \in \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n, F)$$

będzie odwzorowaniem takim, że dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset \Omega$ mamy:

$$\tau(P; K, \delta) := \sup\left\{\frac{\|P_x^{(j)}(x) - P_a^{(j)}(x)\|}{\|x-a\|^{k-j}} : a, x \in K,\ 0 < \|x-a\| \leqslant \delta,\ j = 0, \dots, k\right\} \underset{\delta \to 0+}{\longrightarrow} 0. \tag{W}$$

Wtedy odwzorowanie $f : \Omega \longrightarrow F$ dane wzorem $f(x) := P_x(x)$, $x \in \Omega$, jest klasy $\mathcal{C}^k$ i $\overset{(k)}{T}_a f = P_a$, $a \in \Omega$.

Dowód. Przypuśćmy, że już wiemy, że

$$f^{(j)}(x) = P_x^{(j)}(x), \quad x \in \Omega,\ j = 0, \dots, \ell,$$

dla pewnego $\ell \in \{0, \dots, k\}$ (dla $\ell = 0$ jest to po prostu definicja odwzorowania f). Teraz, korzystając z (W), wnioskujemy, że dla dowolnego $a \in \Omega$ mamy

$$f^{(\ell)}(x) = P_x^{(\ell)}(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} P_a^{(\ell)}(a) = f^{(\ell)}(a).$$

Oznacza to, że $f^{(\ell)}$ jest odwzorowaniem ciągłym. Ponadto, jeżeli $\ell \leqslant k-1$, to dla dowolnego $a \in \Omega$ i $h \in (\mathbb{R}^n)_*$ mamy

$$\frac{f^{(\ell)}(a+h) - f^{(\ell)}(a) - P_a^{(\ell+1)}(a)(h)}{\|h\|} = \frac{P_{a+h}^{(\ell)}(a+h) - P_a^{(\ell)}(a) - P_a^{(\ell+1)}(a)(h)}{\|h\|}$$

$(^{14})$ Odnotujmy, że $P_a^{(j)}(a) = f^{(j)}(a)$, $j = 0, \dots, k$.

$$= \frac{P_{a+h}^{(\ell)}(a+h) - P_a^{(\ell)}(a+h)}{\|h\|} + \frac{P_a^{(\ell)}(a+h) - P_a^{(\ell)}(a) - P_a^{(\ell+1)}(a)(h)}{\|h\|}.$$

Na mocy (W) pierwszy składnik dąży do 0 przy $h \longrightarrow 0$. Oczywiście drugi składnik dąży również do 0 gdy $h \longrightarrow 0$. Oznacza to, że $f^{(\ell+1)}(a)$ istnieje i $f^{(\ell+1)}(a) = P_a^{(\ell+1)}(a)$. Teraz skończona indukcja względem ℓ kończy łatwo dowód. $\square$

10.9. Ekstrema lokalne

Niech E będzie przestrzenią unormowaną nad $\mathbb{K}$, niech $\Omega \subset E$ będzie zbiorem otwartym, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \Omega$.

Definicja 10.9.1. Powiemy, że f ma w punkcie a *minimum lokalne* (odp. *silne minimum lokalne*), jeżeli istnieje otoczenie $U \subset \Omega$ punktu a takie, że $f(x) \geqslant f(a)$ dla $x \in U$ (odp. $f(x) > f(a)$ dla $x \in U \setminus \{a\}$).

Zmieniając kierunki nierówności definiujemy *maksimum lokalne* i *silne maksimum lokalne*.

Zamieniając f na $-f$ możemy zawsze ograniczyć nasze rozważania do minimów lokalnych.

Definicja 10.9.2. Niech $Q \in \underline{\mathcal{H}}^k(E, \mathbb{R})$. Powiemy, że:

- Q jest *nieujemnie określony (półokreślony dodatnio)*, jeżeli $Q(h) \geqslant 0$, $h \in E$,
- Q jest *dodatnio określony*, jeżeli $Q(h) > 0$, $h \in E_*$,
- Q jest *silnie dodatnio określony*, jeżeli istnieje stała $c > 0$ taka, że $Q(h) \geqslant c\|h\|^k$, $h \in E$.

Zmieniając kierunki nierówności definiujemy pojęcie *niedodatniej określoności (półokreśloności ujemnej)*, *ujemnej określoności* i *silnej ujemnej określoności* ([15]).

Zamieniając Q na $-Q$ możemy zawsze ograniczyć nasze rozważania do dodatniej określoności.

Obserwacja 10.9.3. (a) Jeżeli k jest nieparzyste i $Q \neq 0$, to Q nie jest ani nieujemnie ani niedodatnio określony ([16]). Istotnie, jeżeli k jest nieparzyste, to $Q(-h) = -Q(h)$.

(b) Jeżeli E jest skończenie wymiarowa, to dodatnia określoność jest równoważna silnej dodatniej określoności ([17]). Istotnie, jeżeli E jest skończenie wymiarowa i Q jest dodatnio określony, to $c := \inf\{\|Q(h)\| : \|h\| = 1\} > 0$ (bo sfera jest zwarta) i dla $h \neq 0$ mamy $Q(h) = \|h\|^k Q(\frac{h}{\|h\|}) \geqslant c\|h\|^k$.

(c) Jeżeli $E = \mathbb{R}^n$, $k = 2$ i $Q = [Q_{i,j}]_{i,j=1,\dots,n}$ jest macierzą symetryczną, to następujące warunki są równoważne:

(i) forma $Q(h) = h^t Q h = \sum_{i,j=1}^{n} Q_{i,j} h_i h_j$, $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ ([18]), jest nieujemnie określona;

(ii) $D(i_1, \dots, i_s) \geqslant 0$ dla dowolnych $1 \leqslant i_1 < \dots < i_s \leqslant n$, gdzie

$$D(i_1, \dots, i_s) := \det \begin{bmatrix} Q_{i_1,i_1}, \dots, Q_{i_1,i_s} \\ \vdots \\ Q_{i_s,i_1}, \dots, Q_{i_s,i_s} \end{bmatrix}, \quad 1 \leqslant i_1 < \dots < i_s \leqslant n.$$

(iii) wszystkie wartości własne macierzy Q są nieujemne.

Minor $D(i_1, \dots, i_s)$ nosi nazwę *minora głównego rzędu s*. Minor $D(1, \dots, s)$ nosi nazwę *wiodącego minora głównego rzędu s*. Z kryterium tego wynika oczywiście, że Q jest niedodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy $(-1)^s D(i_1, \dots, i_s) \geqslant 0$ dla dowolnych $1 \leqslant i_1 < \dots < i_s \leqslant n$.

Istotnie, wiadomo, że jeżeli $Q = Q^t$, to $Q = P^t \Delta P$, gdzie P jest macierzą ortogonalną ($PP^t = \mathbb{I}_n$), zaś Δ jest macierzą diagonalną mającą na przekątnej wartości własne $d_1, \dots, d_n$ macierzy A. Wynika stąd, że forma Q jest dodatnio (nieujemnie) określona wtedy i tylko wtedy, gdy forma skojarzona z macierzą Δ jest dodatnio (nieujemnie) określona, co z kolei jest równoważne temu, że $d_1, \dots, d_n > 0$ ($d_1, \dots, d_n \geqslant 0$). W szczególności, (i) $\Longleftrightarrow$ (iii).

Ponieważ $\det Q = \det \Delta = d_1 \cdots d_n$, wnioskujemy stąd również, że jeżeli Q jest dodatnio (nieujemnie) określona, to $\det Q > 0$ ($\det Q \geqslant 0$). Ustalmy $1 \leqslant i_1 < \dots < i_s \leqslant n$. Zauważmy, że $D(i_1, \dots, i_s)$ jest wyznacznikiem reprezentacji macierzowej formy G, gdzie $G : \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$G(t) := Q(0, \dots, 0, \underset{i_1}{t_1}, 0, \dots, 0, \underset{i_2}{t_2}, 0, \dots, 0, \underset{i_s}{t_s}, 0, \dots, 0), \quad t = (t_1, \dots, t_s) \in \mathbb{R}^s.$$

([15]) W tym ostatnim przypadku żądamy istnienia stałej $c < 0$ takiej, że $Q(h) \leqslant c\|h\|^k$ dla dowolnego $h \in E$.

([16]) Czyli jest *nieokreślony*.

([17]) Tak nie musi być gdy $\dim E = \infty$ — Ćwiczenie.

([18]) Odnotujmy, że $Q(h) = \widehat{Q}(h, h)$, $h \in \mathbb{R}^n$, gdzie $\widehat{Q}(x, y) := x^t Q y$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, oraz że $Q_{i,j} = \widehat{Q}(e_i, e_j)$, $i, j = 1, \dots, n$.

Jest jasne, że jeżeli Q jest dodatnio (nieujemnie) określona, to G jest dodatnio (nieujemnie) określona, a stąd $D(i_1,\dots,i_s) > 0$ ($D(i_1,\dots,i_s) \geqslant 0$).

Pozostaje wykazać, że (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Wiadomo, że równanie charakterystyczne $\det(A - \lambda\mathbb{I}_n) = 0$ macierzy A ma postać

$$(-\lambda)^n + \sum_{s=1}^{n}\Big(\sum_{1\leqslant i_1<\dots<i_s\leqslant n} D(i_1,\dots,i_s)\Big)(-\lambda)^{n-s} = 0.$$

Jeżeli więc $D(i_1,\dots,i_s) \geqslant 0$ dla dowolnych $1 \leqslant i_1 < \dots < i_s \leqslant n$, to każdy pierwiastek tego równania (czyli wartość własna) musi być $\geqslant 0$ (Ćwiczenie).

Ćwiczenie: Czy dla nieujemnej określoności formy Q wystarczy, by $D(1,\dots,s) \geqslant 0$, $s = 1,\dots,n$?

(d) Jeżeli $E = \mathbb{R}^n$, $k = 2$ i $Q = [Q_{i,j}]_{i,j=1,\dots,n}$ jest macierzą symetryczną, to następujące warunki są równoważne:

(i) forma skojarzona z macierzą Q jest dodatnio określona;

(ii) $D(1,\dots,s) > 0$, $s = 1,\dots,n$ (19);

(iii) wszystkie wartości własne macierzy Q są dodatnie.

Istotnie, wiemy już, że (i) $\Longleftrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (ii). Pozostaje wykazać, że (ii) $\Longrightarrow$ (i). Dowód ten przeprowadzimy indukcyjnie ze względu na n. Przypadek $n = 1$ jest oczywisty. Załóżmy, że wynik zachodzi dla $n-1$. Oznacza to w szczególności, że $Q((x',0)) > 0$ dla $x' \in (\mathbb{R}^{n-1})_*$. Niech $\widehat{Q}(x,y) := x^tQy$, $x,y \in \mathbb{R}^n$, oznacza dwuliniowe odwzorowanie symetryczne generujące formę Q. Łatwo sprawdzić, że istnieje $w^0 = (w',1) \in \mathbb{R}^n$ takie, że $\widehat{Q}(w^0, \boldsymbol{e}_j) = 0$, $j = 1,\dots,n-1$. Istotnie problem polega na rozwiązaniu kwadratowego układu równań:

$$\sum_{s=1}^{n-1} Q_{s,j}w_j = -Q_{n,j}, \quad s = 1,\dots,n-1,$$

którego wyznacznik to $D(1,\dots,n-1) > 0$.

Łatwo również stwierdzić, że forma Q jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy $Q((x',0)) > 0$ dla $x' \in (\mathbb{R}^{n-1})_*$ oraz $Q(w^0) > 0$. Istotnie, wektory $(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_{n-1},w^0)$ tworzą bazę. Forma Q jest dodatnio okreslona $\Longleftrightarrow \forall_{x'\in\mathbb{R}^{n-1}}\forall_{t\neq 0} : 0 < Q((x',0)+tw^0) = Q((x',0)) + 2t\widehat{Q}((x',0),w^0) + t^2Q(w^0) = Q((x',0)) + t^2Q(w^0)$.

Pozostaje więc sprawdzenie, że $Q(w^0) > 0$. Niech R oznacza reprezentację macierzową formy Q w bazie $e_1,\dots,e_{n-1},w^0$. Wiemy, że $\det R > 0$. Pozostaje zauważyć, że $\det R = D(1,\dots,n-1)Q(w^0)$ (Ćwiczenie).

Propozycja 10.9.4 (Warunki konieczne na ekstrema lokalne)**.** *Załóżmy, że f ma w punkcie a minimum lokalne i $f^{(k)}(a)$ istnieje. Wtedy:*

- *$f'(a) = 0$, tzn. a jest punktem* krytycznym f.
- *jeżeli $k \geqslant 2$, $f'(a) = 0, \dots, f^{(k-1)}(a) = 0$ i $f^{(k)}(a) \neq 0$, to k jest parzyste i różniczka $f^{(k)}(a)$ jest nieujemnie określona.*

Dowód. Ustalmy $h \in E_*$. Funkcja $g(t) = f(a+th)$ jest poprawnie określona dla $|t| \leqslant \delta$ (przy dostatecznie małym δ) i ma minimum lokalne w punkcie $t = 0$. Widać, że $g^{(k)}(0)$ istnieje. Stąd, na podstawie teorii dla jednej zmiennej rzeczywistej, $0 = g'(0) = f'(a)(h)$.

Jeżeli teraz $f'(a) = 0, \dots, f^{(k-1)}(a) = 0$, to $g'(0) = 0, \dots, g^{(k-1)}(0) = 0$ i $g^{(k)}(0) = f^{(k)}(a)(h)$. Z klasycznej teorii funkcji jednej zmiennej rzeczywistej dostajemy teraz, że $f^{(k)}(a)(h) \geqslant 0$ oraz, że k musi być parzyste. $\square$

Propozycja 10.9.5 (Warunki dostateczne na ekstrema lokalne)**.** (a) *Przypuśćmy, że $f^{(k)}(a)$ istnieje, $f'(a) = 0, \dots, f^{(k-1)}(a) = 0$, a różniczka $f^{(k)}(a)$ jest silnie dodatnio określona* (20)*. Wtedy f ma w punkcie a silne minimum lokalne.*

(b) *Przypuśćmy, że $f \in \mathcal{D}^k(U,\mathbb{R})$, gdzie U jest otwartym otoczeniem punktu a, $f'(a) = 0,\dots,f^{(k-1)}(a) = 0$, a różniczka $f^{(k)}(x)$ jest nieujemnie określona dla dowolnego $x \in U$. Wtedy f ma w punkcie a minimum lokalne.*

---

(19) Q jest ujemnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy $(-1)^sD(1,\dots,s) > 0$, $s = 1,\dots,n$.

(20) W szczególności, k musi być parzyste.

Dowód. (a) Niech $c > 0$ będzie takie, że $\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(h) \geqslant c\|h\|^k$, $h \in E$. Wtedy, na podstawie wzoru Taylora z resztą Peano, mamy

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(h) + o(\|h\|^k) \geqslant f(a) + \frac{c}{2}\|h\|^k > f(a), \quad 0 < \|h\| \ll 1. \quad (^{21})$$

(b) Niech $\overline{B}(a,r) \subset U$. Dla dowolnego $h \in E$, $\|h\| \leqslant r$, niech $g(t) := f(a+th)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Wtedy $g^{(j)}(t) = f^{(j)}(a+th)(h)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $j = 1, \dots, k$. Korzystając z jednowymiarowego wzoru Taylora z resztą Lagrange'a, wnioskujemy, że istnieje liczba $\theta(h) \in [0,1]$ taka, że

$$f(a+h) - f(a) = g(1) - g(0) = \frac{1}{k!}g^{(k)}(\theta(h)) = \frac{1}{k!}f^{(k)}(a + \theta(h)h)(h) \geqslant 0. \qquad \square$$

Ćwiczenie 10.9.6 (Funkcje wypukłe)**.** Powiemy, że funkcja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ jest *wypukła*, jeżeli dla dowolnego segmentu $[a,b] \subset \Omega$, funkcja $[0,1] \ni t \longmapsto f(a+t(b-a)) \in \mathbb{R}$ jest wypukła (por. Definicja 6.8.1). Funkcję $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *wklęsłą*, jeżeli funkcja $-f$ jest wypukła.

Udowodnić, że jeżeli $f \in \mathcal{D}^2(\Omega)$, to f jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $x \in \Omega$, druga różniczka $f''(x)$ jest nieujemnie określona.

10.10. Twierdzenie o odwzorowaniu odwrotnym i twierdzenie o odwzorowaniu uwikłanym

Twierdzenie 10.10.1 (Twierdzenie o odwzorowaniu odwrotnym)**.** *Załóżmy, że E, F są przestrzeniami Banacha, $\Omega \subset E$ jest zbiorem otwartym i $f \in \mathcal{C}^k(\Omega, F)$ $(k \geqslant 1)$. Załóżmy, że punkt $a \in \Omega$ jest taki, że $f'(a) \in \operatorname{Isom}(E,F)$. Wtedy istnieje otoczenie otwarte $U \subset \Omega$ punktu a takie, że:*
$V := f(U)$ jest zbiorem otwartym,
$f|_U : U \longrightarrow V$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$ $(^{22})$,
jeżeli $g := (f|_U)^{-1} : V \longrightarrow U$, to $g'(y) = (f'(g(y)))^{-1}$ dla dowolnego $y \in V$.

Odnotujmy, że wzór na $g'(y)$ wynika bezpośrednio z pozostałych własności (wystarczy zróżniczkować identyczności $(f|_U) \circ g = \mathrm{id}_V$, $g \circ (f|_U) = \mathrm{id}_U$).

Obserwacja 10.10.2. Rozważmy dla treningu przypadek $E = F = \mathbb{R}$. Założenie $f'(a) \in \operatorname{Isom}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ oznacza oczywiście, że $f'(a) \neq 0$. Istnieje więc przedział otwarty $U \subset \Omega$ taki, że $a \in U$ oraz $f'(x) \neq 0$ dla dowolnego $x \in U$ (w szczególności, funkcja $f|_U$ jest ściśle monotoniczna). Zbiór $V := f(U)$ jest wtedy przedziałem otwartym, odwzorowanie $g := (f|_U)^{-1} : V \longrightarrow U$ jest różniczkowalne oraz $g' = 1/(f' \circ g)$. Ze wzoru tego wynika natychmiast, że jeżeli $g \in \mathcal{C}^\ell(V)$ dla pewnego $\ell \in \{0, \dots, k-1\}$ (co wiemy dla $\ell = 0$), to $g' \in \mathcal{C}^\ell(V)$, a więc $g \in \mathcal{C}^{\ell+1}(V)$. Oznacza to, że $g \in \mathcal{C}^k(V)$ (uwaga na przypadek $k = \infty$).

Propozycja 10.10.3. *Przy oznaczeniach z Twierdzenia 10.10.1 przy $E = F := \mathbb{R}$, mamy dodatkowo:*
Jeżeli $f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega)$, to $g \in \mathcal{C}^\omega(V)$.

Wynik ten wynika natychmiast z Twierdzenia 5.8.9. Poniżej podamy inny dowód bardziej dostosowany do naszych potrzeb.

Przypomnijmy, że teza ta nie zachodzi bez założenia, że $f'(a) \neq 0$. Dla przykładu, funkcja $\mathbb{R} \ni x \longmapsto x^3 \in \mathbb{R}$ jest analitycznym homeomorfizmem, ale funkcja odwrotna $\mathbb{R} \ni y \longmapsto \sqrt[3]{y}$ nie jest różniczkowalna w zerze.

Dowód. ([Kra-Par 2002]) Skorzystamy z Twierdzenia 6.13.3. Ustalmy $K \subset\subset V$. Zakładamy, że wiemy już, że $g \in \mathcal{C}^\infty(V)$. Na podstawie Obserwacji 5.8.2(d) oraz Twierdzenia 5.8.7 wnioskujemy, że $h := 1/f' \in \mathcal{C}^\omega(U)$. Istnieją więc stałe C, $\varrho > 0$ takie, że

$$\frac{1}{s!}\sup_{y \in K}|h^{(s)}(g(y))| \leqslant \frac{C}{\varrho^s}, \quad s \in \mathbb{N}_0. \tag{10.10.1}$$

Teraz udowodnimy indukcyjnie, że

$$\frac{1}{k!}\sup_{y \in K}|g^{(k)}(y)| \leqslant \frac{C_k}{\varrho^{k-1}}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{10.10.2}$$

$(^{21})$ Przypomnijmy, że zapis „$0 < \|h\| \ll 1$" oznacza, że istnieje $\varepsilon_0 > 0$ takie, że nierówności zachodzą dla $0 < \|h\| \leqslant \varepsilon_0$.

$(^{22})$ Odwzorowanie bijektywne $h : U \longrightarrow V$ nazywamy *dyfeomorfizmem klasy* $\mathcal{C}^k$, jeżeli h i h^{-1} są klasy $\mathcal{C}^k$; zauważmy, że wtedy $h'(x) \in \operatorname{Isom}(E,F)$ dla dowolnego $x \in U$ — Ćwiczenie.

gdzie

$$C_k := (2C)^k(-1)^{k-1}\binom{\frac{1}{2}}{k} = (2C)^k(-1)^{k-1}\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!} > 0.$$

Zauważmy, że $\lim\limits_{k\to+\infty}\sqrt[k]{C_k} = 2C$ (Ćwiczenie), a więc (10.10.2) zakończy dowód.

Ponieważ, $g' = h\circ g$, przypadek $k=1$ wynika natychmiast z (10.10.1) (z $s=0$). Teraz $k \rightsquigarrow k+1$. Korzystamy z Twierdzenia 6.6.12:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(k+1)!}\sup_{y\in K}|g^{(k+1)}(y)| = \frac{1}{(k+1)!}\sup_{y\in K}|(h\circ g)^{(k)}(y)| \\
&= \frac{1}{k+1}\sup_{y\in K}\Big|\sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathbb{N}_0\\ \alpha_1+2\alpha_2+\dots+k\alpha_k=k}}\frac{1}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}h^{(\alpha_1+\dots+\alpha_k)}(g(y))\Big(\frac{g'(y)}{1!}\Big)^{\alpha_1}\cdots\Big(\frac{g^{(k)}(y)}{k!}\Big)^{\alpha_k}\Big| \\
&\leqslant \frac{1}{k+1}\sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathbb{N}_0\\ \alpha_1+2\alpha_2+\dots+k\alpha_k=k}}\frac{(\alpha_1+\dots+\alpha_k)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}\frac{C}{\varrho^{\alpha_1+\dots+\alpha_k}}\Big(\frac{C_1}{\varrho^{1-1}}\Big)^{\alpha_1}\cdots\Big(\frac{C_k}{\varrho^{k-1}}\Big)^{\alpha_k} \\
&= \frac{C}{\varrho^k}\frac{1}{k+1}\sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathbb{N}_0\\ \alpha_1+2\alpha_2+\dots+k\alpha_k=k}}\frac{(\alpha_1+\dots+\alpha_k)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}\Big((2C)^1(-1)^{1-1}\binom{\frac{1}{2}}{1}\Big)^{\alpha_1}\cdots\Big((2C)^k(-1)^{k-1}\binom{\frac{1}{2}}{k}\Big)^{\alpha_k} \\
&= \frac{(2C)^{k+1}}{\varrho^k}\frac{(-1)^k}{2(k+1)}\sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathbb{N}_0\\ \alpha_1+2\alpha_2+\dots+k\alpha_k=k}}\frac{(-1)^{\alpha_1+\dots+\alpha_k}(\alpha_1+\dots+\alpha_k)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}\binom{\frac{1}{2}}{1}^{\alpha_1}\cdots\binom{\frac{1}{2}}{k}^{\alpha_k} \\
&\overset{(*)}{=} \frac{(2C)^{k+1}}{\varrho^k}\frac{(-1)^k}{2(k+1)}2(k+1)\binom{\frac{1}{2}}{k+1} = \frac{C_{k+1}}{\varrho^k},
\end{aligned}$$

gdzie (*) wynika ze wzoru

$$\sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathbb{N}_0\\ \alpha_1+2\alpha_2+\dots+k\alpha_k=k}}\frac{(-1)^{\alpha_1+\dots+\alpha_n}(\alpha_1+\dots+\alpha_k)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}\binom{\frac{1}{2}}{1}^{\alpha_1}\cdots\binom{\frac{1}{2}}{k}^{\alpha_k} = 2(k+1)\binom{\frac{1}{2}}{k+1}.$$

Powyższy wzór udowodnimy korzystając ponownie z Twierdzenia 6.6.12 dla funkcji

$$f(x) := \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k, \quad x\in(-1,1),$$

$$\varphi(t) := 1-\sqrt{1-2t} = -\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}(-2t)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}t^k, \quad t\in(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}). \quad [23]$$

Niech $h := f\circ\varphi$. Mamy

$$h(t) = f(\varphi(t)) = \frac{1}{\sqrt{1-2t}} = \varphi'(t),$$

a stąd

$$\begin{aligned}
&-(k+1)!\binom{\frac{1}{2}}{k+1}(-2)^{k+1} = \varphi^{(k+1)}(0) = h^{(k)}(0) \\
&= \sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathbb{N}_0\\ \alpha_1+2\alpha_2+\dots+k\alpha_k=k}}\frac{k!}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}f^{(\alpha_1+\dots+\alpha_k)}(0)\Big(\frac{\varphi'(0)}{1!}\Big)^{\alpha_1}\cdots\Big(\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\Big)^{\alpha_k} \\
&= k!\sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathbb{N}_0\\ \alpha_1+2\alpha_2+\dots+k\alpha_k=k}}\frac{(\alpha_1+\dots+\alpha_k)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}\Big(-\binom{\frac{1}{2}}{1}(-2)^1\Big)^{\alpha_1}\cdots\Big(-\binom{\frac{1}{2}}{k}(-2)^k\Big)^{\alpha_k} \\
&= (-2)^k k!\sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathbb{N}_0\\ \alpha_1+2\alpha_2+\dots+k\alpha_k=k}}\frac{(-1)^{\alpha_1+\dots+\alpha_n}(\alpha_1+\dots+\alpha_k)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}\binom{\frac{1}{2}}{1}^{\alpha_1}\cdots\binom{\frac{1}{2}}{k}^{\alpha_k}. \qquad \square
\end{aligned}$$

[23] Korzystamy tu z rozwinięcia $(1+t)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}t^k$, $t\in(-1,1)$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Twierdzenie 10.10.4 (Twierdzenie o odwzorowaniu uwikłanym). *Załóżmy, że E_1, E_2, F są przestrzeniami Banacha, $\Omega \subset E_1 \times E_2$ jest zbiorem otwartym i $f \in \mathcal{C}^k(\Omega, F)$ ($k \geqslant 1$). Załóżmy, że punkt $a = (a_1, a_2) \in \Omega$ jest taki, że*

$$\frac{\partial f}{\partial E_2}(a) \in \operatorname{Isom}(E_2, F).$$

Wtedy istnieją otoczenia otwarte $U_1 \subset E_1$, $U_2 \subset E_2$ punktów a_1 i a_2 oraz odwzorowanie $\varphi : U_1 \longrightarrow U_2$ klasy $\mathcal{C}^k$ takie, że

$$U_1 \times U_2 \subset \Omega, \qquad \{x \in U_1 \times U_2 : f(x) = f(a)\} = \{(t, \varphi(t)) : t \in U_1\},$$
$$\frac{\partial f}{\partial E_2}(x) \in \operatorname{Isom}(E_2, F), \quad x \in U_1 \times U_2,$$
$$\varphi'(t) = -\Big(\frac{\partial f}{\partial E_2}(t, \varphi(t))\Big)^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial E_1}(t, \varphi(t)), \quad t \in U_1.$$

Zauważmy, że wzór na pochodną $\varphi'(t)$ wynika z pozostałych własności. Istotnie, mamy $f(t, \varphi(t)) = f(a)$ dla dowolnego $t \in U_1$. Różniczkując dostajemy

$$\frac{\partial f}{\partial E_1}(t, \varphi(t)) + \frac{\partial f}{\partial E_2}(t, \varphi(t)) \circ \varphi'(t) = 0.$$

Obserwacja 10.10.5. Rozważmy dla treningu przypadek $E_1 = E_2 = F = \mathbb{R}$. Niech $(a, b) \in \Omega$ będzie ustalonym punktem takim, że $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$. Możemy założyć, że $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) > 0$ dla dowolnego $(x, y) \in \Omega$ oraz, że Ω jest prostokątem.

Ustalmy $\varepsilon > 0$ takie, że $(a, b \pm \varepsilon) \in \Omega$. Oczywiście

$$f(a, b - \varepsilon) < f(a, b) < f(a, b + \varepsilon).$$

Niech $\delta > 0$ będzie takie, że

$$f(x, b - \varepsilon) < f(a, b) < f(x, b + \varepsilon), \quad x \in (a - \delta, a + \delta).$$

Wynika stąd, że dla dowolnego $x \in (a - \delta, a + \delta)$ istnieje dokładnie jeden punkt $y = \varphi(x) \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ taki, że $f(x, \varphi(x)) = f(a, b)$.

Pozostaje sprawdzić, że $\varphi : (a - \delta, a + \delta) \longrightarrow (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ jest klasy $\mathcal{C}^k$. Na wstępie zauważmy, że powtarzając powyższe rozumowanie dla dowolnego punktu $(x_0, y_0) \in P := (a - \delta, a + \delta) \times (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ i dowolnego $0 < \varepsilon^* \ll 1$, wnioskujemy, że istnieje $\delta^* > 0$ oraz funkcja

$$\varphi^* : (x_0 - \delta^*, x_0 + \delta^*) \longrightarrow (y_0 - \varepsilon^*, y_0 + \varepsilon^*)$$

takie, że $P^* := (x_0 - \delta^*, x_0 + \delta^*) \times (y_0 - \varepsilon^*, y_0 + \varepsilon^*) \subset P$ oraz $y = \varphi^*(x)$ jest jedynym rozwiązaniem równania $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ w prostokącie P^*. Jeżeli $y_0 = \varphi(x_0)$, to oczywiście $\varphi^* = \varphi$ na $(x_0 - \delta^*, x_0 + \delta^*)$, co w szczególności, wobec dowolności ε^*, oznacza, że φ jest funkcją ciągłą.

Zauważmy, że cały problem leży w różniczkowalności φ. Jeżeli bowiem φ jest różniczkowalna, to równość $f(x, \varphi(x)) = f(a, b)$ implikuje, że

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))\, \varphi'(x) = 0, \tag{*}$$

a stąd

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}, \quad x \in (a - \delta, a + \delta),$$

co z kolei pokazuje, że φ' jest funkcją ciągłą, a więc φ jest klasy $\mathcal{C}^1$. Jeżeli już wiemy, że φ jest klasy $\mathcal{C}^\ell$ dla pewnego $\ell \in \{1, \dots, k-1\}$, to powyższa równość pokazuje, że φ jest klasy $\mathcal{C}^{\ell+1}$.

Przechodzimy do różniczkowalności. Ustalmy $x_0 \in (a - \delta, a + \delta)$. Dla małych $h \in \mathbb{R}$ mamy:

$$0 = f(x_0 + h, \varphi(x_0 + h)) - f(x_0, \varphi(x_0)) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(h), \varphi(x_0 + h))h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta(h))(\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)),$$

gdzie $\xi(h) \in [x_0, x_0 + h]$ i $\eta(h) \in [\varphi(x_0), \varphi(x_0 + h)]$. Wynika stąd, że

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(h), \varphi(x_0 + h)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta(h)) \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h}.$$

Teraz przechodząc z h do 0 (i korzystając z ciągłości φ) otrzymujemy różniczkowalność funkcji φ w punkcie x_0.

Jeżeli $k \geqslant 2$, to różniczkując (*), dostajemy

$$f''_{x,x}(x,\varphi(x)) + 2f''_{x,y}(x,\varphi(x))\,\varphi'(x) + f''_{y,y}(x,\varphi(x))(\varphi'(x))^2 + f'_y(x,\varphi(x))\,\varphi''(x) = 0, \quad (^{24})$$

a stąd, po uwzględnieniu (*), mamy (dla uproszczenia zapisu pomijamy argument funkcji φ):

$$\varphi''(x) = -\frac{f''_{x,x}(x,\varphi)(f'_y(x,\varphi))^2 - 2f''_{x,y}(x,\varphi)f'_x(x,\varphi)f'_y(x,\varphi) + f''_{y,y}(x,\varphi)(f'_x(x,\varphi))^2}{(f'_y(x,\varphi))^3}$$

(Ćwiczenie). W szczególności, jeżeli $\varphi'(x_0) = 0$ dla pewnego x_0, to

$$\varphi''(x_0) = -\frac{f''_{x,x}(x_0,\varphi(x_0))}{f'_y(x_0,\varphi(x_0))}.$$

Prowadzi to do następującego warunku dostatecznego na ekstrema lokalne funkcji $y = \varphi(x)$ uwikłanej równaniem $f(x,y) = 0$, gdzie $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (Ćwiczenie):

Jeżeli

$$f'_y(a,b) \neq 0, \quad f'_x(a,b) = 0, \quad f''_{x,x}(a,b) \neq 0,$$

to równanie $f(x,y) = 0$ *da się w otoczeniu punktu* (a,b) *rozwikłać oraz funkcja uwikłana* $y = \varphi(x)$, $\varphi(a) = b$, *ma w punkcie* a *ekstremum lokalne; ponadto, jeżeli* $f''_{x,x}(a,b)f'_y(a,b) < 0$, *to jest to minimum, a w przypadku przeciwnym — maksimum.*

Ćwiczenie 10.10.6. Korzystając z metody użytej w poprzedniej obserwacji, przeprowadzić dowód twierdzenia o odwzorowaniu uwikłanym w przypadku, gdy $E_1 = \mathbb{R}^n$, $E_2 = F = \mathbb{R}$. W przypadku, gdy $k \geqslant 2$, wyprowadzić wzór na $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j \partial x_k}$. Korzystając z tych wzorów, sformułować warunek dostateczny na ekstrema lokalne funkcji $y = \varphi(x_1,\dots,x_n)$ uwikłanej równaniem $f(x_1,\dots,x_n,y) = 0$, gdzie $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Dowód tego, że twierdzenie o odwzorowaniu uwikłanym implikuje twierdzenie o odwzorowaniu odwrotnym. Niech E, F, Ω, f, a będą takie, jak w założeniach twierdzenia o odwzorowaniu odwrotnym. Zdefiniujmy

$$E_1 := F, \quad E_2 := E, \quad \widetilde{\Omega} := F \times \Omega, \quad \widetilde{a} := (f(a), a),$$
$$\widetilde{f} : \widetilde{\Omega} \longrightarrow F, \quad \widetilde{f}(y,x) := f(x) - y.$$

Zauważmy, że $\widetilde{f}$ jest klasy $\mathcal{C}^k$, $\widetilde{f}(\widetilde{a}) = 0$ oraz

$$\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial E_2}(\widetilde{a}) = f'(a) \in \operatorname{Isom}(E_2, F).$$

Niech $\widetilde{U}_1, \widetilde{U}_2$ i g będą takie, jak w twierdzeniu o odwzorowaniu uwikłanym dla $E_1, E_2, F, \widetilde{\Omega}, \widetilde{f}, \widetilde{a}$, tzn. $\widetilde{U}_1 \subset F$, $\widetilde{U}_2 \subset \Omega$ są otwarte, $g : \widetilde{U}_1 \longrightarrow \widetilde{U}_2$ jest klasy $\mathcal{C}^k$ oraz

$$\{(y,x) \in \widetilde{U}_1 \times \widetilde{U}_2 : y = f(x)\} = \{(y, g(y)) : y \in \widetilde{U}_1\}. \quad (\dagger)$$

Niech $U := \widetilde{U}_2 \cap f^{-1}(\widetilde{U}_1)$, $V := \widetilde{U}_1$. Wobec (†) wnioskujemy, że $f|_U : U \longrightarrow V$ jest bijekcją oraz $(f|_U)^{-1} = g$. □

Dowód tego, że twierdzenie o odwzorowaniu odwrotnym implikuje twierdzenie o odwzorowaniu uwikłanym. Niech $E_1, E_2, F, \Omega, f, a$ będą takie, jak w założeniach twierdzenia o odwzorowaniu uwikłanym. Zdefiniujmy

$$\widetilde{E} := E_1 \times E_2, \quad \widetilde{F} := E_1 \times F,$$
$$\widetilde{f} : \Omega \longrightarrow \widetilde{F}, \quad \widetilde{f}(x_1,x_2) := (x_1, f(x_1,x_2)).$$

(24) Stosujemy tu tradycyjne oznaczenia $f'_x := \frac{\partial f}{\partial x}$, $f''_{x,y} := \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ itd.

Oczywiście, $\widetilde{f}$ jest klasy $\mathcal{C}^k$, $\widetilde{f}(a) = (a_1, f(a))$ oraz

$$\widetilde{f}'(a)(X_1, X_2) = \Big(X_1, \frac{\partial f}{\partial E_1}(a)(X_1) + \frac{\partial f}{\partial E_2}(a)(X_2)\Big) =: (X_1, A(a)(X_1) + B(a)(X_2)),\ (X_1, X_2) \in E_1 \times E_2.$$

W szczególności, $\widetilde{f}'(a) \in \operatorname{Isom}(\widetilde{E}, \widetilde{F})$ ponieważ

$$(\widetilde{f}'(a))^{-1}(Y_1, Y_2) = (Y_1, (B(a))^{-1}(Y_2 - A(a)(Y_1))), \quad (Y_1, Y_2) \in E_1 \times F.$$

Niech teraz $\widetilde{U}, \widetilde{V}$ będą takie, jak w twierdzeniu o odwzorowaniu odwrotnym dla $\widetilde{E}, \widetilde{F}, \Omega, \widetilde{f}$ i a, tzn. $\widetilde{U} \subset \Omega$ jest otwartym otoczeniem a, $\widetilde{V} \subset \widetilde{F}$ jest otwarty i $\widetilde{f}|_{\widetilde{U}} : \widetilde{U} \longrightarrow \widetilde{V}$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$. Oczywiście $\widetilde{f}'(x) \in \operatorname{Isom}(\widetilde{E}, \widetilde{F})$ dla dowolnego $x \in \widetilde{U}$. Wynika stąd, że

$$\frac{\partial f}{\partial E_2}(x) \in \operatorname{Isom}(E_2, F), \quad x \in \widetilde{U}.$$

Istotnie, ponieważ

$$\widetilde{f}'(x)(X_1, X_2) = \Big(X_1, \frac{\partial f}{\partial E_1}(x)(X_1) + \frac{\partial f}{\partial E_2}(x)(X_2)\Big)$$
$$=: (X_1, A(x)(X_1) + B(x)(X_2)), \quad (X_1, X_2) \in E_1 \times E_2,$$

zatem dla $x \in \widetilde{U}$ mamy:

$$(B(x))^{-1}(Y) = \operatorname{pr}_{E_2}((\widetilde{f}'(x))^{-1}(0, Y)), \quad Y \in F.$$

Niech $\widetilde{g} := (\widetilde{f}|_{\widetilde{U}})^{-1}$. Z postaci odwzorowania $\widetilde{f}$ wynika, że

$$\widetilde{g}(x_1, y) = (x_1, h(x_1, y)), \quad (x_1, y) \in \widetilde{V},$$

gdzie $h : \widetilde{V} \longrightarrow E_2$ jest pewnym odwzorowaniem klasy $\mathcal{C}^k$, dla którego $h(a_1, f(a)) = a_2$. Zdefiniujmy

$$W := \{x_1 \in E_1 : (x_1, f(a)) \in \widetilde{V}\}, \quad \varphi(x_1) := h(x_1, f(a)).$$

Zauważmy, że $\varphi(a_1) = a_2$. Dobierzmy teraz otoczenia otwarte $U_1 \subset E_1$ i $U_2 \subset E_2$ punktów a_1 i a_2 tak, że $U_1 \times U_2 \subset \widetilde{U}$, $U_1 \subset W$ i $\varphi(U_1) \subset U_2$. Liczymy

$$\{(t, \varphi(t)) : t \in U_1\} = \{(x_1, h(x_1, f(a))) : x_1 \in U_1\} = \{\widetilde{g}(x_1, f(a)) : x_1 \in U_1\}$$
$$= \{(x_1, x_2) \in \widetilde{U} : x_1 \in U_1,\ f(x_1, x_2) = f(a)\} = \{x \in U_1 \times U_2 : f(x) = f(a)\}. \quad \square$$

Dowód twierdzenia o odwzorowaniu odwrotnym.

Lemat 10.10.7. *Niech E, F będą przestrzeniami Banacha. Wtedy odwzorowanie*

$$\operatorname{Isom}(E, F) \ni L \overset{\Lambda}{\longmapsto} L^{-1} \in \operatorname{Isom}(F, E)$$

jest klasy $\mathcal{C}^\infty$ oraz

$$\Lambda'(L_0)(H) = -L_0^{-1} \circ H \circ L_0^{-1}, \quad L_0 \in \operatorname{Isom}(E, F),\ H \in \mathcal{L}(E, F).$$

Dowód. Ustalmy $L_0 \in \operatorname{Isom}(E, F)$. Oczywiście odwzorowanie

$$\mathcal{L}(E, F) \ni H \longmapsto -L_0^{-1} \circ H \circ L_0^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$$

jest liniowe i ciągłe. Na podstawie Propozycji 9.6.4, dla dowolnego $H \in \mathcal{L}(E, F)$ takiego, że $\|H\| < 1/\|L_0^{-1}\|$, mamy

$$\|\Lambda(L_0 + H) - \Lambda(L_0) + L_0^{-1} \circ H \circ L_0^{-1}\| = \|\sum_{\nu=2}^{\infty} (-1)^\nu (L_0^{-1} \circ H)^\nu \circ L_0^{-1}\|$$
$$\leqslant \sum_{\nu=2}^{\infty} \|L_0^{-1}\|^{\nu+1} \|H\|^\nu = \frac{\|L_0^{-1}\|^3 \|H\|^2}{1 - \|L_0^{-1}\| \|H\|}.$$

Wynika stąd różniczkowalność odwzorowania Λ w punkcie L_0 oraz wzór na pochodną.

Mamy więc $\Lambda'(L) = \Phi(\Lambda(L), \Lambda(L))$, $L \in \operatorname{Isom}(E, F)$, gdzie

$$\Phi : \mathcal{L}(F, E) \times \mathcal{L}(F, E) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(E, F), \mathcal{L}(F, E)),$$

$$\varPhi(A,B)(H) := -A\circ H\circ B,\quad H\in\mathcal{L}(E,F).$$

Zauważmy, że operator $\varPhi$ jest poprawnie określony, dwuliniowy oraz

$$\|\varPhi(A,B)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{L}(E,F),\mathcal{L}(F,E))}\leqslant\|A\|_{\mathcal{L}(F,E)}\|B\|_{\mathcal{L}(F,E)},$$

skąd wynika, że

$$\varPhi\in\mathcal{L}^2\big(\mathcal{L}(F,E),\ \mathcal{L}(\mathcal{L}(E,F),\mathcal{L}(F,E))\big)$$

i $\|\varPhi\|\leqslant 1$.

Teraz skorzystamy z rozumowania indukcyjnego. Przypuśćmy, że $\varLambda$ jest klasy $\mathcal{C}^\ell$ (dla $\ell=0$ to wiemy). Wtedy ze wzoru $\varLambda'=\varPhi(\varLambda,\varLambda)$ wynika, że $\varLambda'$ jest klasy $\mathcal{C}^\ell$. Znaczy to, że $\varLambda$ jest klasy $\mathcal{C}^{\ell+1}$. Tak więc $\varLambda$ jest klasy $\mathcal{C}^\infty$. □

Lemat 10.10.8. *Niech E,F będą przestrzeniami unormowanymi, niech $U\subset E$, $V\subset F$ będą zbiorami otwartymi i niech $f:U\longrightarrow V$ będzie odwzorowaniem bijektywnym. Niech $g:=f^{-1}$ i niech $a\in U$ będzie taki, że $f'(a)$ istnieje. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) *$g'(f(a))$ istnieje;*

(ii) *$f'(a)\in\operatorname{Isom}(E,F)$ i g jest ciągłe w punkcie $f(a)$.*

Dowód. Implikacja (i) $\Longrightarrow$ (ii) jest oczywista $(g'(f(a))=(f'(a))^{-1})$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Niech $A:=f'(a)$. Chcemy sprawdzić, że

$$g(f(a)+k)=g(f(a))+A^{-1}(k)+\|k\|\beta(k),$$

gdzie $\beta(k)\longrightarrow 0$ przy $k\longrightarrow 0$. Niech $B(f(a),r)\subset V$. Dla $\|k\|<r$ zdefiniujmy $h(k):=g(f(a)+k)-a$. Ciągłość odwzorowania g w punkcie $f(a)$ implikuje, że $h(k)\longrightarrow 0$ przy $k\longrightarrow 0$. Nasz problem sprowadza się więc do równości

$$h(k)=A^{-1}(f(a+h(k))-f(a))+\|f(a+h(k))-f(a)\|\beta(k)$$

i dalej, korzystając z równości $f(a+h)=f(a)+A(h)+\|h\|\alpha(h)$, $\alpha(h)\longrightarrow 0$ przy $h\longrightarrow 0$, mamy

$$0=A^{-1}(\|h(k)\|\alpha(h(k)))+\|A(h(k))+\|h(k)\|\alpha(h(k))\|\beta(k).$$

Wystarczy więc pokazać, że

$$\frac{A^{-1}(\|h\|\alpha(h))}{\|A(h)+\|h\|\alpha(h)\|}$$

dąży do zera przy $h\longrightarrow 0$. Ponieważ operator A^{-1} jest ograniczony, wystarczy więc pokazać, że wyrażenie

$$\frac{\|h\|\alpha(h)}{\|A(h)+\|h\|\alpha(h)\|}$$

dąży do zera przy $h\longrightarrow 0$. Ponieważ $\alpha(h)\longrightarrow 0$ przy $h\longrightarrow 0$, wystarczy oszacować od dołu wyrażenie

$$\|A(h/\|h\|)+\alpha(h)\|.$$

Odnotujmy, że $\|h\|=\|A^{-1}(A(h))\|\leqslant\|A^{-1}\|\|A(h)\|$. Mamy więc

$$\|A(h/\|h\|)+\alpha(h)\|\geqslant 1/\|A^{-1}\|-\|\alpha(h)\|.$$ □

Lemat 10.10.9. *Niech E,F będą przestrzeniami Banacha, niech $U\subset E$, $V\subset F$ będą zbiorami otwartymi i niech $f:U\longrightarrow V$ będzie homeomorfizmem takim, że $f\in\mathcal{C}^k(U,F)$ i $f'(x)\in\operatorname{Isom}(E,F)$ dla dowolnego $x\in U$. Wtedy $g:=f^{-1}$ jest klasy $\mathcal{C}^k(V,E)$.*

Dowód. Na podstawie Lematu 10.10.8 g jest odwzorowaniem różniczkowalnym oraz $g'(y)=\varLambda(f'(g(y)))$, $y\in V$, gdzie

$$\varLambda:\operatorname{Isom}(E,F)\longrightarrow\operatorname{Isom}(F,E)$$

oznacza operator odwracania. Przypomnijmy, że $\varLambda$ jest klasy $\mathcal{C}^\infty$. Teraz uruchamiamy zwykłą procedurę rekurencyjną i pokazujemy, że g jest klasy $\mathcal{C}^k$. □

Lemat 10.10.10. *Niech E, F będą przestrzeniami Banacha, niech $\varOmega\subset E$ będzie zbiorem otwartym i niech $f:\varOmega\longrightarrow F$ będzie odwzorowaniem różniczkowalnym takim, że f' jest ciągła w x_0 oraz $f'(x_0)\in\operatorname{Isom}(E,F)$ dla pewnego $x_0\in\varOmega$. Wtedy, dla dostatecznie małych $\tau>0$, zbiór $f(B(x_0,\tau))$ jest otoczeniem punktu $f(x_0)$.*

Dowód. Niech $P : \widetilde{E} \longrightarrow E$, $Q : F \longrightarrow \widetilde{F}$ będą dowolnymi dyfeomorfizmami klasy $\mathcal{C}^1$, gdzie $\widetilde{E}$ i $\widetilde{F}$ są przestrzeniami Banacha. Zdefiniujmy

$$\widetilde{\Omega} := P^{-1}(\Omega), \quad \widetilde{f} := Q \circ f \circ P : \widetilde{\Omega} \longrightarrow \widetilde{F}, \quad \widetilde{x}_0 := P^{-1}(x_0).$$

Zauważmy, że $\widetilde{f}'(\widetilde{x}_0) \in \operatorname{Isom}(\widetilde{E}, \widetilde{F})$. Jest rzeczą widoczną, że wystarczy pokazać, że dla dostatecznie małych $\widetilde{\tau} > 0$ zbiór $\widetilde{f}(B(\widetilde{x}_0, \widetilde{\tau}))$ zawiera pewne otoczenie punktu $\widetilde{f}(\widetilde{x}_0)$.

Powyższa uwaga pozwala najpierw zredukować problem do przypadku $x_0 = 0$ i $f(x_0) = 0$ (poprzez translacje: $\widetilde{E} := E$, $P(x) = x + x_0$, $\widetilde{F} := F$, $Q(y) := y - f(x_0)$), a następnie do przypadku $F = E$ i $f'(0) = -\operatorname{id}_E$ (biorąc $\widetilde{E} := E$, $P := \operatorname{id}_E$, $\widetilde{F} := E$, $Q := -(f'(0))^{-1}$).

Ustalmy $\tau > 0$ takie, że $X := \overline{B}(\tau) \subset \Omega$ oraz

$$\|f'(x) + \operatorname{id}_E\| \leqslant \tfrac{1}{2}, \quad x \in X.$$

Pokażemy, że $B(\frac{\tau}{2}) \subset f(X)$.

Ustalmy $y^* \in B(\frac{\tau}{2})$ i niech $T : X \longrightarrow E$, $T(x) := f(x) - y^* + x$. Zauważmy, że jeżeli $T(x^*) = x^*$, to $f(x^*) = y^*$.

Będziemy chcieli zastosować twierdzenie Banacha o punkcie stałym

Na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych, dla $x', x'' \in X$, mamy

$$\begin{aligned}\|T(x') - T(x'')\| &= \|f(x') - f(x'') + (x' - x'')\| \\ &\leqslant \sup\{\|f'(x) + \operatorname{id}_E\| : x \in [x', x'']\}\|x' - x''\| \leqslant \tfrac{1}{2}\|x' - x''\|.\end{aligned}$$

Stąd, dla $x \in X$, mamy

$$\|T(x)\| \leqslant \|T(x) - T(0)\| + \|T(0)\| \leqslant \tfrac{1}{2}\|x\| + \|y^*\| \leqslant \tau. \qquad \square$$

Przechodzimy do zasadniczego dowodu twierdzenia o odwzorowaniu odwrotnym. Niech E, F, Ω, f, a będą takie, jak w założeniach.

Ponieważ zbiór $\operatorname{Isom}(E, F)$ jest otwarty w $\mathcal{L}(E, F)$, a operator odwracania Λ jest homeomorfizmem, możemy założyć, że $f'(x) \in \operatorname{Isom}(E, F)$ dla dowolnego $x \in \Omega$. Niech $A := f'(a)$, $\eta := 1/\|A^{-1}\|$. Ustalmy dowolną kulę $B(a, r) \subset \Omega$ tak małą, by

$$\|f'(x) - A\| \leqslant \frac{\eta}{2}, \quad x \in B(a, r).$$

Teraz, na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych, dla dowolnych $x', x'' \in B(a, r)$ mamy:

$$\begin{aligned}\|f(x') - f(x'')\| &\geqslant \|A(x' - x'')\| - \|f(x') - f(x'') - A(x' - x'')\| \\ &\geqslant \eta\|x' - x''\| - \sup\{\|f'(x) - A\| : x \in [x', x'']\}\|x' - x''\| \geqslant \frac{\eta}{2}\|x' - x''\|.\end{aligned}$$

Wynika stąd, że $f|_{B(a,r)}$ jest odwzorowaniem injektywnym oraz, że odwzorowanie

$$g := (f|_{B(a,r)})^{-1} : f(B(a, r)) \longrightarrow B(a, r)$$

jest ciągłe (spełnia warunek Lipschitza). Wobec Lematu 10.10.9, pozostaje jeszcze zauważyć, że $f(B(a, r))$ jest zbiorem otwartym, co wynika z Lematu 10.10.10. $\square$

W przypadku, gdy $E = F = \mathbb{R}^n$, twierdzenie o odwzorowaniu odwrotnym można istotnie wzmocnić.

Twierdzenie 10.10.11 (Twierdzenie o odwzorowaniu odwrotnym). *Załóżmy, że $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym, $a \in \Omega$ i $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ jest odwzorowaniem różniczkowalnym takim, że:*
- *pochodna f' jest ciągła w punkcie $a \in \Omega$,*
- *$f'(a) \in \operatorname{Isom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ (tzn. $\det Jf(a) \neq 0$).*

Wtedy istnieje otoczenie otwarte $U \subset \Omega$ punktu a takie, że
- *$V := f(U)$ jest zbiorem otwartym,*
- *$f|_U : U \longrightarrow V$ jest homeomorfizmem,*
- *jeżeli $g := (f|_U)^{-1} : V \longrightarrow U$, to g jest różniczkowalne oraz $g'(y) = (f'(g(y)))^{-1}$ dla dowolnego $y \in V$.*

Dowód. Zachowajmy oznaczenia z dowodu Twierdzenia 10.10.1. Tak jak poprzednio, znajdujemy $r > 0$ takie, że $\det Jf(x) \neq 0$ dla dowolnego $x \in \mathbb{B}(a, r) \subset\subset \Omega$ oraz

$$\|f(x') - f(x'')\| \geqslant \frac{\eta}{2}\|x' - x''\|, \quad x', x'' \in \mathbb{B}(a, r)$$

(wszystkie obliczenia wykonujemy w normie euklidesowej), gdzie $0 < \eta \leqslant \min\{1/\|A^{-1}\|, 1\}$, $A := f'(a)$. W szczególności, $f|_{\mathbb{B}(a,r)}$ jest odwzorowaniem injektywnym oraz odwzorowanie $g := (f|_{\mathbb{B}(a,r)})^{-1} : f(\mathbb{B}(a, r)) \longrightarrow \mathbb{B}(a, r)$ jest ciągłe. Podobnie jak poprzednio, pozostaje jeszcze pokazać, że zbiór $f(\mathbb{B}(a, r))$ jest otwarty. Poprzednio robiliśmy to w oparciu o Lemat

10.10.10 (którego użycie wymagało założenia, że f' jest ciągła w każdym punkcie $x_0 \in \mathbb{B}(a,r)$). Obecnie zastosujemy inną metodę.

Ustalmy punkt $x_0 \in \mathbb{B}(a,r)$. Wystarczy pokazać, że $\mathbb{B}(f(x_0),\tau) \subset f(\mathbb{B}(x_0,r_0))$, gdzie

$$r_0 := r - \|x_0 - a\|, \quad \tau := (\eta/4)r_0.$$

Ustalmy $y^* \in \mathbb{B}(f(x_0),\tau)$. Szukamy $x^* \in \mathbb{B}(x_0,r_0)$ tak, by $f(x^*) = y^*$.

Niech $T(x) := \|f(x) - y^*\|$, $x \in \Omega$. Odnotujmy, że T^2 jest odwzorowaniem różniczkowalnym oraz

$$(T^2)'(x)(X) = 2\langle f(x) - y^*, f'(x)(X)\rangle, \quad x \in \Omega,\ X \in \mathbb{R}^n.$$

Wynika stąd w szczególności, że jeżeli $(T^2)'(x) = 0$ i $Jf(x) \neq 0$, to $f(x) = y^*$.

Ustalmy $0 < s < r_0$ tak, by $y^* \in \mathbb{B}(f(x_0),(\eta/4)s)$. Ponieważ $\overline{\mathbb{B}}(x_0,s)$ jest zbiorem zwartym (tu korzystamy istotnie z założenia, iż $E = F = \mathbb{R}^n$), zatem istnieje punkt $x^* \in \overline{\mathbb{B}}(x_0,s)$ taki, że $T(x^*) = \min\{T(x) : x \in \overline{\mathbb{B}}(x_0,s)\}$. Zauważmy, że $T(x_0) < (\eta/4)s$, a więc $T(x^*) < (\eta/4)s$. Pokażemy, że $x^* \in \mathbb{B}(x_0,s)$. Przypuśćmy, że $\|x^* - x_0\| = s$. Wtedy

$$T(x^*) = \|f(x^*) - f(x_0) - (y^* - f(x_0)\| \geqslant \|f(x^*) - f(x_0)\| - \|y^* - f(x_0)\| > (\eta/2)\|x^* - x_0\| - (\eta/4)s = (\eta/4)s;$$

sprzeczność.

Tak więc $x^* \in \mathbb{B}(x_0,s)$, a stąd $(T^2)'(x^*) = 0$, co wobec poprzedniej obserwacji, daje $f(x^*) = y^*$. $\square$

10.11. Odwzorowania analityczne

Niech E, F, G będą przestrzeniami Banacha.

Definicja 10.11.1. Niech $\Omega \subset E$ będzie otwarty. Powiemy, że odwzorowanie $f : \Omega \longrightarrow F$ jest *analityczne* ($f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega,F)$), jeżeli dla dowolnego $a \in \Omega$ istnieją $r > 0$ i ciąg wielomianów jednorodnych $Q_k \in \mathcal{H}^k(E,F)$, $k \in \mathbb{N}_0$, taki że $B(a,r) \subset \Omega$ oraz

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(h), \quad h \in B(r).$$

Obserwacja 10.11.2. Jeżeli $E = \mathbb{R}$, to powyższa definicja jest zgodna z Definicją 5.8.1.

Rozpoczniemy od pewnej obserwacji dotyczącej wielomianów jednorodnych.

Lemat 10.11.3. *Niech E, F będą przestrzeniami Banacha i niech $Q_k \in \mathcal{H}^k(E,F)$, $k = 1,2,\dots$. Załóżmy, że dla pewnego $r > 0$, szereg $\sum_{k=1}^\infty Q_k(h)$ jest zbieżny dla dowolnego $h \in \overline{B}(r)$. Wtedy istnieją stałe $C, \varrho > 0$ takie, że $\|\widehat{Q}_k\| \leqslant \frac{C}{\varrho^k}$, $k = 1,2,\dots$.*

W szczególności, dla dowolnego $h \in B(\theta\varrho)$, $0 < \theta < 1$, mamy $\|Q_k(h)\| \leqslant C\theta^k$, $k = 1,2,\dots$, skąd wynika, że szereg $\sum_{k=1}^\infty Q_k$ jest zbieżny normalnie w każdej kuli $B(\theta\varrho)$, $0 < \theta < 1$.

Z powyższego lematu wynika, że w definicji odwzorowania analitycznego możemy zawsze zakładać, że istnieje stała $C > 0$ taka, że $\|\widehat{Q}_k\| \leqslant \frac{C}{r^k}$, $k \in \mathbb{N}$.

Dowód. Niech $F_s := \{h \in \overline{B}(r) : \forall_{k \in \mathbb{N}} : \ \|Q_k(h)\| \leqslant s\}$. Zbiory F_s są oczywiście domknięte, $F_s \subset F_{s+1}$, oraz $\overline{B}(r) = \bigcup_{s=1}^\infty F_s$. Ponieważ $\overline{B}(r)$ jest przestrzenią zupełną, twierdzenie Baire'a implikuje, że istnieje $s_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $\operatorname{int} F_{s_0} \neq \varnothing$. Niech $\overline{B}(x_0,\tau) \subset F_{s_0}$. Teraz na podstawie wzoru polaryzacyjnego (Propozycja 10.5.1), dla $h_1,\dots,h_k \in \overline{B}(\tau/k)$, dostajemy:

$$\|\widehat{Q}_k(h_1,\dots,h_k)\| \leqslant \frac{1}{k!}2^k s_0,$$

skąd wynika, że

$$\|\widehat{Q}_k\| \leqslant \frac{1}{k!}\frac{2^k s_0}{(\frac{\tau}{k})^k} = \frac{(2k)^k}{k!}\frac{s_0}{\tau^k} \leqslant e^{2k}\frac{s_0}{\tau^k} = \frac{s_0}{(e^{-2}\tau)^k}, \quad k \in \mathbb{N}. \qquad \square$$

Lemat 10.11.4. *Niech E, F będą przestrzeniami unormowanymi i niech $Q_k \in \mathcal{H}^k(E,F)$, $k = 1,2,\dots$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) $\exists_{C,\, r>0}\ \forall_{k \in \mathbb{N}}\ \forall_{h_1,\dots,h_k \in \overline{B}(r)} : \ \|\widehat{Q}_k(h_1,\dots,h_k)\| \leqslant C;$

(ii) $\exists_{C,\, r>0}\ \forall_{k \in \mathbb{N}} : \ \|\widehat{Q}_k\| \leqslant \frac{C}{r^k};$

(iii) $\exists_{C,\, r>0}\ \forall_{k \in \mathbb{N}} : \ \|Q_k\| \leqslant \frac{C}{r^k};$

(iv) $\exists_{C,\, r>0}\ \forall_{k \in \mathbb{N}}\ \forall_{h \in \overline{B}(r)} : \ \|Q_k(h)\| \leqslant C.$

Dowód. Łatwo widać, że (i) $\iff$ (ii) $\implies$ (iii) $\iff$ (iv). Implikacja (iii) $\implies$ (ii) wynika z Propozycji 10.5.5(a):

$$\|\widehat{Q}_k\| \leqslant e^{2k}\|Q_k\| \leqslant \frac{C}{(re^{-2})^k}, \quad k \in \mathbb{N}. \qquad \square$$

Propozycja 10.11.5 (Por. Lemat 10.10.7)**.** *Odwzorowanie*

$$\operatorname{Isom}(E,F) \ni L \overset{\Lambda}{\longmapsto} L^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$$

jest analityczne.

Dowód. Ustalmy $L_0 \in \operatorname{Isom}(E,F)$. Na podstawie Propozycji 9.6.4, dla dowolnego $H \in \mathcal{L}(E,F)$ takiego, że $\|H\| < 1/\|L_0^{-1}\|$, mamy

$$\Lambda(L_0+H) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(L_0^{-1}\circ H)^k \circ L_0^{-1} =: \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(H).$$

Zauważmy, że $Q_k(H) = \widetilde{Q}_k(H,\dots,H)$, gdzie

$$\widetilde{Q}_k(H_1,\dots,H_k) := (-1)^k(L_0^{-1}\circ H_1)\circ\dots\circ(L_0^{-1}\circ H_k)\circ L_0^{-1}, \quad H_1,\dots,H_k \in \mathcal{L}(E,F).$$

Widać, że $\widetilde{Q}_k \in \mathcal{L}^k(\mathcal{L}(E,F),\mathcal{L}(F,E))$. $\square$

Propozycja 10.11.6. *Niech $f(a+h) := \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(h)$, $h \in B(r)$, gdzie $Q_k \in \mathcal{H}^k(E,F)$, $\|\widehat{Q}_k\| \leqslant \frac{C}{r^k}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Wtedy:*

(a) $f \in \mathcal{C}^\omega(B(a,r),F) \subset \mathcal{C}^\infty(B(a,r),F)$,

(b) $f^{(j)}(a+h) = \sum_{k=j}^{\infty} j!\binom{k}{j}\widehat{Q}_k(\underbrace{h,\dots,h}_{(k-j)\times},\underbrace{\cdot,\dots,\cdot}_{j\times})$, *$h \in B(r)$ (równość w $\mathcal{H}^j(E,F)$), $j \in \mathbb{N}_0$,*

(c) $Q_j = \frac{1}{j!}f^{(j)}(a)$, *$j \in \mathbb{N}_0$, czyli $f(a+h) = T_af(h)$, $h \in B(r)$,*

(d) $f^{(j)} \in \mathcal{C}^\omega(\Omega,\mathcal{H}^j(E,F))$ *dla dowolnego odwzorowania $f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega,F)$, $j \in \mathbb{N}$.*

Dowód. (a) Niech $b \in B(a,r)$ i niech $\varrho := r - \|b-a\|$. Dla $\|h\| < \varrho$, policzmy formalnie

$$f(b+h) = f(a+(h+b-a)) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(h+(b-a)) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\widehat{Q}_k(\underbrace{h,\dots,h}_{j\times},\underbrace{b-a,\dots,b-a}_{(k-j)\times})$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=j}^{\infty}\binom{k}{j}\widehat{Q}_k(\underbrace{h,\dots,h}_{j\times},\underbrace{b-a,\dots,b-a}_{(k-j)\times}) =: \sum_{j=0}^{\infty} P_j(h).$$

Powyższe formalne przekształcenia staną się poprawne, jeżeli rodzina

$$\sum_{(k,j)\in\mathbb{N}_0^2:\ j\leqslant k}\binom{k}{j}\widehat{Q}_k(\underbrace{h,\dots,h}_{j\times},\underbrace{b-a,\dots,b-a}_{(k-j)\times})$$

będzie sumowalna. Wynika to natychmiast z oszacowania

$$\Big\|\binom{k}{j}\widehat{Q}_k(\underbrace{h,\dots,h}_{j\times},\underbrace{b-a,\dots,b-a}_{(k-j)\times})\Big\| \leqslant \binom{k}{j}C\Big(\frac{\|h\|}{r}\Big)^j\Big(\frac{\|b-a\|}{r}\Big)^{k-j}.$$

Niech

$$\widehat{P}_j(h_1,\dots,h_j) := \sum_{k=j}^{\infty}\binom{k}{j}\widehat{Q}_k(h_1,\dots,h_j,\underbrace{b-a,\dots,b-a}_{(k-j)\times}), \quad h_1,\dots,h_j \in E.$$

Mamy

$$\Big\|\binom{k}{j}\widehat{Q}_k(h_1,\dots,h_j,\underbrace{b-a,\dots,b-a}_{(k-j)\times})\Big\| \leqslant \binom{k}{j}C\frac{\|h_1\|}{r}\cdots\frac{\|h_j\|}{r}\Big(\frac{\|b-a\|}{r}\Big)^{k-j},$$

a stąd

$$\Big\|\binom{k}{j}\widehat{Q}_k(\underbrace{\cdot,\dots,\cdot}_{j\times},\underbrace{b-a,\dots,b-a}_{(k-j)\times})\Big\| \leqslant C\Big(\frac{1}{r}\Big)^j\binom{k}{j}\Big(\frac{\|b-a\|}{r}\Big)^{k-j}.$$

Szereg definiujący $\widehat{P}_j$ jest zatem zbieżny w $\mathcal{L}_s^j(E,F)$, a stąd $\widehat{P}_j \in \mathcal{L}_s^j(E,F)$.

(b) W przestrzeni $\mathcal{L}(E,F)$ rozważmy szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} Q_k'(h) = \sum_{k=1}^{\infty} k\widehat{Q}_k(\underbrace{h,\dots,h}_{(k-1)\times},\cdot)$$

(zob. Propozycja 10.5.7(b)). Dla $h \in \overline{B}(\theta r)$, $0<\theta<1$, mamy

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \|k\widehat{Q}_k(h,\dots,h,\cdot)\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leqslant k\theta^{k-1}\frac{C}{r} \leqslant \text{const} < +\infty.$$

Teraz wystarczy już tylko (Ćwiczenie) skorzystać z twierdzenia o różniczkowaniu szeregu wyraz po wyrazie (Twierdzenie 10.3.18) i Lematu 10.11.4.

(c) i (d) wynika z (b). $\square$

Propozycja 10.11.7 (Zasada identyczności)**.** *Jeżeli $\mathit{\Omega}$ jest spójny, $f,g \in \mathcal{C}^\omega(\mathit{\Omega},F)$ i $f=g$ na pewnym niepustym zbiorze otwartym $U\subset\mathit{\Omega}$, to $f\equiv g$.*

Dowód. Ćwiczenie. $\square$

Propozycja 10.11.8 (Por. Twierdzenie 6.13.3)**.** *Niech $\mathit{\Omega}\subset E$ będzie zbiorem otwartym i niech $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathit{\Omega},F)$. Wtedy*

$$f\in\mathcal{C}^\omega(\mathit{\Omega},F) \iff \forall_{a\in\mathit{\Omega}}\ \exists_{C>0,\ B(a,r)\subset\mathit{\Omega}}\ \forall_{h\in B(r)}\ \forall_{k\in\mathbb{N}_0}:\ \frac{1}{k!}\|f^{(k)}(a+h)\| \leqslant \frac{C}{r^k}.$$

Dowód. ($\Longleftarrow$): Niech $a\in\mathit{\Omega}$ i niech C, $r>0$ będą takie, jak w warunku. Korzystając ze wzoru Taylora z resztą typu Lagrange'a (Twierdzenie 10.7.1(c)), dla $h\in B(r)$ mamy:

$$\Big\|f(a+h)-\sum_{\nu=0}^{k}\frac{1}{\nu!}f^{(\nu)}(a)(h)\Big\| = \|R_k(f,a,a+h)\| \leqslant \frac{\sup_{x\in B(a,r)}\|f^{(k+1)}(x)\|}{(k+1)!}\|h\|^{k+1}$$
$$\leqslant C\Big(\frac{\|h\|}{r}\Big)^{k+1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

($\Longrightarrow$): Niech $a\in\mathit{\Omega}$. Przypuśćmy, że $f(a+h) := \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(h)$, $h\in B(2r)$, gdzie $Q_k\in\mathcal{H}^k(E,F)$, $\|\widehat{Q}_k\| \leqslant \frac{C}{(2r)^k}$, $k\in\mathbb{N}_0$, $B(a,2r)\subset\mathit{\Omega}$. Niech $\varphi(t) := \frac{1}{1-t}$. Korzystając z Propozycji 10.11.6(b) oraz z rozumowania z dowodu Twierdzenia 6.13.3, dostajemy dla $h\in B(r)$:

$$\|f^{(j)}(a+h)\| \leqslant \sum_{k=j}^{\infty} j!\binom{k}{j}\|\widehat{Q}_k(\underbrace{h,\dots,h}_{(k-j)\times},\underbrace{\cdot,\dots,\cdot}_{j\times})\| \leqslant C\sum_{k=j}^{\infty} j!\binom{k}{j}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{k-j}\Big(\frac{1}{2r}\Big)^j$$
$$= C\Big(\frac{1}{2r}\Big)^j\varphi^{(j)}(\tfrac{1}{2}) = C\Big(\frac{1}{2r}\Big)^j j!2^{j+1} = j!\frac{2C}{r^j}, \quad j\in\mathbb{N}. \qquad \square$$

Propozycja 10.11.9 (Por. Twierdzenie 5.8.7)**.** *Niech $U\subset G$, $\mathit{\Omega}\subset E$ będą zbiorami otwartymi, niech $\varphi\in\mathcal{C}^\omega(U,E)$, $\varphi(U)\subset\mathit{\Omega}$, $f\in\mathcal{C}^\omega(\mathit{\Omega},F)$. Wtedy $f\circ\varphi\in\mathcal{C}^\omega(U,F)$.*

Dowód. Wykorzystamy Propozycję 10.11.8. Niech $t_0\in U$, $a:=\varphi(t_0)$ i niech $C>1$, $0<s\leqslant r<1$ będą takie, że

$$B(t_0,r)\subset U,\quad \frac{1}{k!}\sup_{t\in B(r)}\|\varphi^{(k)}(t_0+t)\| \leqslant \frac{C}{r^k},$$
$$\varphi(B(t_0,s))\subset B(a,r)\subset\mathit{\Omega},\quad \frac{1}{k!}\sup_{h\in B(r)}\|f^{(k)}(a+h)\| \leqslant \frac{C}{r^k},\quad k\in\mathbb{N}_0.$$

Skorzystamy z Propozycji 10.7.3. Dla $t\in B(s)$ mamy

$$\begin{aligned}\frac{1}{k!}\|(f\circ\varphi)^{(k)}(t_0+t)\| &\leqslant \sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathbb{N}_0\\ \alpha_1+2\alpha_2+\dots+k\alpha_k=k}} \frac{(\alpha_1+\dots+\alpha_k)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}\frac{C}{r^{\alpha_1+\dots+\alpha_k}}\Big(\frac{C}{r}\Big)^{\alpha_1}\cdots\Big(\frac{C}{r^k}\Big)^{\alpha_k}\\ &= \frac{C}{r^k}\sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathbb{N}_0\\ \alpha_1+2\alpha_2+\dots+k\alpha_k=k}} \frac{(\alpha_1+\dots+\alpha_k)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}\Big(\frac{C}{r}\Big)^{\alpha_1+\dots+\alpha_k} \overset{(*)}{\leqslant} \frac{C}{r^k}2^{k-1}\Big(\frac{C}{r}\Big)^k = \frac{C/2}{(\frac{r^2}{2C})^k},\end{aligned}$$

gdzie (*) wynika ze wzoru:

$$\sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathbb{N}_0\\ \alpha_1+2\alpha_2+\dots+k\alpha_k=k}} \frac{(\alpha_1+\dots+\alpha_k)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!} = 2^{k-1}.$$

Dla dowodu tego wzoru, niech

$$\begin{aligned} f(x) &:= \frac{1}{2-x} = \frac{1}{1-(x-1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty}(x-1)^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}f^{(\nu)}(1)(x-1)^\nu, \quad |x-1|<1,\\ \varphi(t) &:= \frac{1}{1-t} = \sum_{\nu=0}^{\infty}t^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\varphi^{(\nu)}(0)t^\nu, \quad |t|<1.\end{aligned}$$

Wtedy

$$f(\varphi(t)) = \frac{1}{2-\frac{1}{1-t}} = \frac{1-t}{1-2t} = \sum_{\nu=0}^{\infty}(2t)^\nu - t\sum_{\nu=0}^{\infty}(2t)^\nu = 1+\sum_{\nu=1}^{\infty}2^{\nu-1}t^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}(f\circ\varphi)^{(\nu)}(0)t^\nu, \quad |t|<\frac{1}{2}.$$

Teraz, korzystając ze wzoru na pochodną złożenia, dostajemy

$$\begin{aligned} 2^{k-1} = \frac{1}{k!}(f\circ\varphi)^{(k)}(0) &= \sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathbb{N}_0\\ \alpha_1+2\alpha_2+\dots+k\alpha_k=k}} \frac{1}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}f^{(\alpha_1+\dots+\alpha_k)}(1)\Big(\frac{\varphi'(0)}{1!}\Big)^{\alpha_1}\cdots\Big(\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\Big)^{\alpha_k}\\ &= \sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathbb{N}_0\\ \alpha_1+2\alpha_2+\dots+k\alpha_k=k}} \frac{(\alpha_1+\dots+\alpha_k)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}. \qquad \square\end{aligned}$$

Twierdzenie 10.11.10 (Por. Propozycja 10.10.3)**.** *Przy założeniach i oznaczeniach Twierdzenia 10.10.1, jeżeli $f\in\mathcal{C}^\omega(\Omega,F)$, to $g\in\mathcal{C}^\omega(V,E)$.*

Dowód. Wiemy już, że $g\in\mathcal{C}^\infty(V)$. Skorzystamy z Propozycji 10.11.8. Ustalmy $y_0\in V$. Na podstawie Propozycji 10.11.5 oraz 10.11.9 wnioskujemy, że $h:=(f')^{-1}=\varLambda\circ f'\in\mathcal{C}^\omega(U,\mathcal{L}(F,E))$. Istnieją więc stałe $C>1$, $0<s\leqslant r<1$ takie, że

$$g(B(y_0,s))\subset B(g(y_0),r), \quad \frac{1}{k!}\sup_{y\in B(s)}\|h^{(k)}(g(y_0+y))\|\leqslant\frac{C}{r^k}, \quad k\in\mathbb{N}_0.$$

Teraz, podobnie jak w dowodzie Propozycji 10.10.3, dowodzimy indukcyjnie, że

$$\frac{1}{k!}\sup_{y\in B(s)}\|g^{(k)}(y_0+y)\|\leqslant\frac{C_k}{r^{k-1}}, \quad k\in\mathbb{N}_0,$$

gdzie C_k jest takie, jak w dowodzie Propozycji 10.10.3. Ponieważ, $g'=h\circ g$, przypadek $k=1$ jest oczywisty. W kroku indukcyjnym korzystamy z Propozycji 10.7.3 i szacujemy dokładnie tak, jak w dowodzie Propozycji 10.10.3 (Ćwiczenie). $\square$

Teraz, korzystając z rozumowania pokazującego równoważność twierdzenia o odwzorowaniu odwrotnym z twierdzeniem o odwzorowaniu uwikłanym, dostajemy łatwo następujący wynik.

Twierdzenie 10.11.11. *Przy założeniach i oznaczeniach Twierdzenia 10.10.4, jeżeli $f\in\mathcal{C}^\omega(\Omega,F)$, to $\varphi\in\mathcal{C}^\omega(U_1,E_2)$.*

10.12. Przestrzenie funkcji spełniających warunek Höldera

Niech E, F będą przestrzeniami unormowanymi nad $\mathbb{K}$ i niech $\Omega \subset E$ będzie otwarty. Przypomnijmy sobie przestrzenie $\mathcal{BD}^k(\Omega, F)$ i $\mathcal{BC}^k(\Omega, F)$ wyposażone w normę $\| \ \|_{\Omega,k}$ — zob. definicje przed Propozycją 10.6.7. Dla $\alpha > 0$ niech $\mathfrak{H}^\alpha(\Omega, F)$ oznacza zbiór wszystkich funkcji $f : \Omega \longrightarrow F$, które spełniają globalny warunek Höldera z wykładnikiem α. Zauważmy, że jest to $\mathbb{K}$–przestrzeń wektorowa oraz $\mathfrak{H}^\alpha(\Omega, F) \subset \mathcal{C}(\Omega, F)$. Dla $f : \Omega \longrightarrow F$ połóżmy

$$|f|_\alpha := \sup\left\{\frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|x - y\|^\alpha} : x, y \in \Omega,\ x \neq y\right\} \in [0, +\infty].$$

Jest oczywiste, że $f \in \mathfrak{H}^\alpha(\Omega, F) \iff |f|_\alpha < +\infty$. Wtedy też $\|f(x) - f(y)\| \leqslant |f|_\alpha \|x - y\|^\alpha$, $x, y \in \Omega$. Zauważmy, że dla $\alpha > 1$ mamy: $|f|_\alpha < +\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f jest lokalnie stała (równoważnie: stała na każdej składowej spójnej Ω). Istotnie, dla dowolnego $x \in \Omega$ oraz $\xi \in E$, $\|\xi\| = 1$, mamy:

$$\left\|\frac{f(x + t\xi) - f(x)}{t}\right\| \leqslant |f|_\alpha |t|^{\alpha-1},$$

co przy $t \longrightarrow 0$ daje $\frac{\partial f}{\partial \xi}(x) = 0$ dla dowolnych $x \in \Omega$ i $\xi \in E$. Oznacza to stałość f na każdej składowej spójnej (Ćwiczenie). Z tego też powodu *będziemy dalej zakładać, że* $\alpha \in (0, 1]$.

Łatwo sprawdzić, że $| \ |_\alpha : \mathfrak{H}^\alpha \longrightarrow \mathbb{R}_+$ jest $\mathbb{K}$–*seminormą*, tzn. $|0|_\alpha = 0$, $|\lambda f|_\alpha = |\lambda||f|_\alpha$ ($\lambda \in \mathbb{K}$) oraz $|f + g|_\alpha \leqslant |f|_\alpha + |g|_\alpha$. Dla $k \in \mathbb{N}_0$ definiujemy

$$\mathcal{BC}^{k,\alpha}(\Omega, F) := \{f \in \mathcal{BD}^k(\Omega, F) : |f^{(k)}|_\alpha < +\infty\} \subset \mathcal{BC}^k(\Omega, F),$$

przy czym $\mathcal{BC}^{0,\alpha}(\Omega, F) = \mathcal{B}(\Omega, F) \cap \mathfrak{H}^\alpha(\Omega, F)$. Są to $\mathbb{K}$–przestrzenie wektorowe. Przestrzenie te normujemy przy pomocy norm $\|f\|_{\Omega,k,\alpha} := \|f\|_{\Omega,k} + |f^{(k)}|_\alpha$. We wszystkich powyższych oznaczeniach, zgodnie z ogólnymi regułami, jeżeli $F = \mathbb{R}$, to pomijamy F.

Przykład 10.12.1. Dla dowolnego $k \in \mathbb{N}_0$, funkcja $f(x) := |x|^{k+\alpha}$, $x \in (-1, 1)$, jest klasy $\mathcal{BC}^{k,\alpha}((-1, 1))$. Ponadto, $f \notin \mathcal{BC}^{k,\beta}((-1, 1))$ dla $\alpha < \beta \leqslant 1$. Dla k parzystego i $\alpha = 1$ dostajemy funkcję $f \in \mathcal{BC}^{k,1}((-1, 1)) \setminus \mathcal{D}^{k+1}((-1, 1); 0)$.

Istotnie, mamy

$$f^{(j)}(x) = j!\binom{k}{j}\begin{cases} x^{k-j+\alpha}, & \text{jeżeli } x \geqslant 0 \\ (-1)^j(-x)^{k-j+\alpha}, & \text{jeżeli } x < 0 \end{cases}, \quad j = 0, \dots, k.$$

W szczególności, dla $j = k$ dostajemy

$$f^{(k)}(x) = k!\begin{cases} x^\alpha, & \text{jeżeli } x \geqslant 0 \\ (-1)^k(-x)^\alpha, & \text{jeżeli } x < 0 \end{cases}.$$

Pozostaje sprawdzić, że $|f^{(k)}|_\alpha < +\infty$. Dla $x, y \in (-1, 1)$, $x < y$, szacujemy wyrażenie $A := \frac{|f^{(k)}(x) - f^{(k)}(y)|}{|x-y|^\alpha}$. Nie ma problemu, gdy $xy = 0$. Zakładamy więc, że $xy \neq 0$. W przypadku, gdy $x < 0$, $y > 0$ mamy

$$A = k!\frac{|(-1)^k(-x)^\alpha - y^\alpha|}{|x - y|^\alpha} \leqslant k! \sup_{t>1} \frac{|(-1)^k t^\alpha - 1|}{(t + 1)^\alpha} < +\infty.$$

Jeżeli $xy > 0$, to mamy

$$A \leqslant k! \sup_{0<t<u<1} \frac{u^\alpha - t^\alpha}{(u - t)^\alpha} = k! \sup_{0<u<1} \frac{1 - u^\alpha}{(1 - u)^\alpha} < +\infty. \quad [25]$$

Dla $\beta > \alpha$ mamy $\frac{|f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)|}{|x-0|^\beta} = k!|x|^{\alpha-\beta}$, a ostatnie wyrażenie nie jest ograniczone w $(0, 1)$.

Obserwacja 10.12.2 (Własności przestrzeni $\mathcal{BC}^{k,\alpha}(\Omega, F)$). (a) Jeżeli Ω jest ograniczony, to dla $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$ mamy $| \ |_\beta \leqslant C| \ |_\alpha$, gdzie $C := (\operatorname{diam} \Omega)^{\alpha-\beta}$. W szczególności, jeżeli Ω jest ograniczony, to dla $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$ mamy: $\mathcal{BC}^{k,\alpha}(\Omega, F) \subset \mathcal{BC}^{k,\beta}(\Omega, F)$ oraz $\| \ \|_{\Omega,k,\beta} \leqslant C\| \ \|_{\Omega,k,\alpha}$, gdzie $C := \max\{1, (\operatorname{diam} \Omega)^{\alpha-\beta}\}$.

(b) Jeżeli Ω jest wypukły, to $\mathcal{BD}^{k+1}(\Omega, F) \subset \mathcal{BC}^{k,1}(\Omega, F)$ oraz $\| \ \|_{\Omega,k,1} \leqslant \| \ \|_{\Omega,k+1}$ (wystarczy skorzystać z twierdzenia o przyrostach skończonych).

(c) Dla $f \in \mathcal{B}(\Omega, F)$ mamy: $f \in \mathcal{BC}^{k+1,\alpha}(\Omega, F) \iff f' \in \mathcal{BC}^{k,\alpha}(\Omega, \mathcal{L}(E, F))$. Ponadto, $\|f\|_{\Omega,k+1,\alpha} = \|f\|_{\Omega,0} + \|f'\|_{\Omega,k,\alpha}$.

Pojawia się naturalne pytanie, które z wyników dla funkcji $\mathcal{BC}^k$ pozostają prawdziwe dla $\mathcal{BC}^{k,\alpha}$.

Propozycja 10.12.3. *Jeżeli F jest Banacha, to $(\mathcal{BC}^{k,\alpha}(\Omega, F), \| \ \|_{\Omega,k,\alpha})$ jest Banacha.*

Dowód. Niech $(f_s)_{s=1}^\infty \subset \mathcal{BC}^{k,\alpha}(\Omega, F)$ będzie ciągiem Cauchy'ego w sensie $\| \ \|_{\Omega,k,\alpha}$. Ponieważ $(\mathcal{BC}^k(\Omega, F), \| \ \|_{\Omega,k})$ jest przestrzenią Banacha (zob. uwagi przed Propozycją 10.6.7), mamy $f_s \overset{\| \ \|_{\Omega,k}}{\longrightarrow} f_0 \in \mathcal{BC}^k(\Omega, F)$. Pozostaje, wykazać, że $|f_s^{(k)} - f_0^{(k)}|_\alpha \longrightarrow 0$. Dla $x, y \in \Omega$, $x \neq y$, mamy

$$\frac{\|f_s^{(k)}(x) - f_0^{(k)}(x) - (f_s^{(k)}(y) - f_0^{(k)}(y))\|}{\|x - y\|^\alpha} = \lim_{\nu\to+\infty} \frac{\|f_s^{(k)}(x) - f_\nu^{(k)}(x) - (f_s^{(k)}(y) - f_\nu^{(k)}(y))\|}{\|x - y\|^\alpha}$$
$$\leqslant \limsup_{\nu\to+\infty} |f_s^{(k)} - f_\nu^{(k)}|_\alpha \underset{s\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \qquad \square$$

---

[25] Jeżeli $\alpha < 1$, to $\lim\limits_{t\to1-} \frac{1-u^\alpha}{(1-u)^\alpha} \overset{H}{=} \lim\limits_{t\to1-} \frac{u^{\alpha-1}}{(1-u)^{\alpha-1}} < +\infty$.

Propozycja 10.12.4. *Załóżmy, że Ω jest ograniczony i wypukły.*

(a) *Niech $B \in \mathcal{L}(F, G; H)$, $f \in \mathcal{BC}^{k,\alpha}(\Omega, F)$, $g \in \mathcal{BC}^{k,\alpha}(\Omega, G)$. Wtedy $B(f, g) \in \mathcal{BC}^{k,\alpha}(\Omega, H)$ oraz*

$$\|B(f,g)\|_{\Omega,k,\alpha} \leqslant C\|B\|\|f\|_{\Omega,k,\alpha}\|g\|_{\Omega,k,\alpha},$$

gdzie $C = \mathrm{const}(\operatorname{diam}\Omega, k, \alpha)$.

(b) *Niech $U \subset G$ będzie otwarty wypukły i ograniczony, $f \in \mathcal{BC}^{k,\alpha}(\Omega, F)$, $\varphi \in \mathcal{BC}^{k,\beta}(U, E)$, $\varphi(U) \subset \Omega$. Wtedy*

$$f \circ \varphi \in \begin{cases} \mathcal{BC}^{0,\alpha\beta}(U, F), & \text{jeżeli } k = 0 \\ \mathcal{BC}^{k,\min\{\alpha,\beta\}}(U, F), & \text{jeżeli } k \geqslant 1 \end{cases}.$$

Zauważmy, że biorąc $G = E = F = \mathbb{R}$, $U = \Omega = (-1, 1)$, $f(x) = |x|^\alpha$, $\varphi(t) := |t|^\beta$, widzimy, że dla $k = 0$ wyniku z (b) nie da się poprawić.

Dowód. (a) Indukcja względem k (przy dowolnych pozostałych elementach). Dla $k = 0$ mamy:

$$\frac{\|B(f(x), g(x)) - B(f(y), g(y))\|}{\|x-y\|^\alpha} \leqslant \frac{\|B(f(x)-f(y), g(y))\| + \|B(f(y), g(x)-g(y)\|}{\|x-y\|^\alpha}$$
$$\leqslant \|B\|(|f|_\alpha\|g\|_{\Omega,0} + \|f\|_{\Omega,0}|g|_\alpha) \leqslant 2\|B\|\|f\|_{\Omega,0,\alpha}\|g\|_{\Omega,0,\alpha},$$

skąd wynika, że $\|B(f,g)\|_{\Omega,0,\alpha} \leqslant 3\|B\|\|f\|_{\Omega,0,\alpha}\|g\|_{\Omega,0,\alpha}$. Dla dowodu $k \rightsquigarrow k+1$ mamy $(B(f,g))' = B_1(f', g) + B_2(f, g')$ przy standardowej interpretacji operatorów dwuliniowych

$$B_1 : \mathcal{L}(E, F) \times G \longrightarrow \mathcal{L}(E, H), \quad B_2 : F \times \mathcal{L}(E, G) \longrightarrow \mathcal{L}(E, H).$$

Zauważmy, że $f' \in \mathcal{BC}^{k,\alpha}(\Omega, \mathcal{L}(E, F))$, $g \in \mathcal{BC}^{k,1}(\Omega, F) \subset \mathcal{BC}^{k,\alpha}(\Omega, F)$. Korzystając z założenia indukcyjnego wnioskujemy, że $B_1(f', g) \in \mathcal{BC}^{k,\alpha}(\Omega, \mathcal{L}(E, G))$. Analogicznie dowodzimy, że $B_2(f, g') \in \mathcal{BC}^{k,\alpha}(\Omega, \mathcal{L}(E, G))$. W takim razie $(B(f, g))' \in \mathcal{BC}^{k,\alpha}(\Omega, \mathcal{L}(E, G))$, co daje $B(f, g) \in \mathcal{BC}^{k+1,\alpha}(\Omega, G)$. Ponadto,

$$\begin{aligned}\|B(f,g)\|_{\Omega,k,\alpha} &= \|B(f,g)\|_{\Omega,0} + \|(B(f,g))'\|_{\Omega,k,\alpha} \\ &\leqslant \|B\|\|f\|_{\Omega,0}\|g\|_{\Omega,0} + C_1\|B_1\|\|f'\|_{\Omega,k,\alpha}\|g\|_{\Omega,k,\alpha} + C_2\|B_2\|\|f\|_{\Omega,k,\alpha}\|g'\|_{\Omega,k,\alpha} \\ &\leqslant \|B\|\Big(\|f\|_{\Omega,k+1,\alpha}\|g\|_{\Omega,k+1,\alpha} + C_3\|f\|_{\Omega,k+1,\alpha}\|g\|_{\Omega,k,1} + C_4\|f\|_{\Omega,k,1}\|g\|_{\Omega,k+1,\alpha}\Big) \\ &\leqslant \|B\|\Big(\|f\|_{\Omega,k+1,\alpha}\|g\|_{\Omega,k+1,\alpha} + C_3\|f\|_{\Omega,k+1,\alpha}\|g\|_{\Omega,k+1} + C_4\|f\|_{\Omega,k+1}\|g\|_{\Omega,k+1,\alpha}\Big) \\ &\leqslant C\|B\|\|f\|_{\Omega,k+1,\alpha}\|g\|_{\Omega,k+1,\alpha}.\end{aligned}$$

(b) Dla $k = 0$ mamy:

$$\frac{\|f(\varphi(t)) - f(\varphi(u))\|}{\|t-u\|^{\alpha\beta}} \leqslant |f|_\alpha\Big(\frac{\|\varphi(t)-\varphi(u)\|}{\|t-u\|^\beta}\Big)^\alpha \leqslant |f|_\alpha|\varphi|_\beta^\alpha.$$

Dla dowodu kroku indukcyjnego $k \rightsquigarrow k+1$ mamy $(f \circ \varphi)' = (f' \circ \varphi) \circ \varphi' = B(f' \circ \varphi, \varphi')$, gdzie

$$B : \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(G, E) \ni (A, B) \longmapsto A \circ B \in \mathcal{L}(G, F).$$

Wiemy, że $f' \in \mathcal{BC}^{k,\alpha}(\Omega, \mathcal{L}(E, F))$, $\varphi \in \mathcal{BC}^{k,1}(U, E)$ oraz $\varphi' \in \mathcal{BC}^{k,\beta}(U, \mathcal{L}(G, E))$. Z założenia indukcyjnego dostajemy $f' \circ \varphi \in \mathcal{BC}^{k,\alpha}(U, \mathcal{L}(E, F))$. Na podstawie (a), $B(f' \circ \varphi, \varphi') \in \mathcal{BC}^{k,\min\{\alpha,\beta\}}(U, \mathcal{L}(G, F))$, a stąd $f \circ \varphi \in \mathcal{BC}^{k+1,\min\{\alpha,\beta\}}(U, F)$. □

Twierdzenie 10.12.5 (Wzór Taylora)**.** *Jeżeli $f \in \mathcal{BC}^{k,\alpha}(\Omega, F)$, to*

$$\frac{\|R_k(f, a, a+h)\|}{\|h\|^{k+\alpha}} \leqslant |f^{(k)}|_\alpha, \quad [a, a+h] \subset \Omega.$$

W szczególności, dla dowolnego zbioru $A \subset \Omega$ takiego, że $A + \mathbb{B}(r) \subset \Omega$ dla pewnego $r > 0$ (np. dla dowolnego zbioru zwartego) mamy

$$\lim_{r>\delta\to 0+} \sup\Big\{\frac{\|R_k(f, a, a+h)\|}{\|h\|^{k+\beta}} : a \in A,\ 0 < \|h\| \leqslant \delta\Big\} = 0, \quad 0 < \beta < \alpha.$$

Dowód. Indukcja względem k (przy dowolnych pozostałych elementach). Dla $k = 0$ wystarczy skorzystać z definicji $|f|_\alpha$. Dla dowodu $k \rightsquigarrow k+1$ mamy:

$$\frac{\|R_{k+1}(f, a, a+h)\|}{\|h\|^{k+1+\alpha}} \leqslant \frac{\sup\{\|R'_{k+1}(f, a, a+\xi)\| : \xi \in (0, h]\}\|h\|}{\|h\|^{k+1+\alpha}}$$
$$= \frac{\sup\{\|R_k(f', a, a+\xi)\| : \xi \in (0, h]\}}{\|h\|^{k+\alpha}} \leqslant \frac{\sup\{|(f')^{(k)}|_\alpha\|\xi\|^{k+\alpha} : \xi \in (0, h]\}}{\|h\|^{k+\alpha}} \leqslant |f^{(k+1)}|_\alpha. \quad \square$$

Niech $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega) := \{f \in \mathcal{C}^k(\Omega) : \forall_{a\in\Omega}\exists_{U_a} : f|_{U_a} \in \mathcal{BC}^{k,\alpha}(U_a)\}$.

Propozycja 10.12.6. *Niech $\mathcal{L}(E, F) \supset \operatorname{Isom}(E, F) \ni X \overset{\Lambda}{\longmapsto} X^{-1} \in \operatorname{Isom}(F, E) \subset \mathcal{L}(F, E)$ będzie operatorem odwracania. Wtedy dla dowolnego $L_0 \in \operatorname{Isom}(E, F)$ istnieje otoczenie wypukłe $W \subset \operatorname{Isom}(E, F)$ takie, że $\Lambda|_W \in \mathcal{BC}^{k,1}(W)$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}_0$.*

Dowód. Wiemy, że $\varLambda'(H) = \varPhi(\varLambda(H), \varLambda(H))$, $H \in \mathcal{L}(E,F)$, gdzie $\varPhi \in B(\mathcal{L}(F,E), \mathcal{L}(F,E); \mathcal{L}(\mathcal{L}(E,F), \mathcal{L}(F,E)))$ (por. dowód Lematu 10.10.7). Stąd, na podstawie Propozycji 10.12.4, dla dowolnego wypukłego otoczenia W odwzorowania L_0, jeżeli $\varLambda \in \mathcal{BC}^{k,1}(W)$, to $\varLambda' \in \mathcal{BC}^{k,1}(W)$, a więc $\varLambda \in \mathcal{BC}^{k+1,1}(W)$. Pozostaje wybrać wypukłe W tak, by $\varLambda \in \mathcal{B}(W, \mathcal{L}(F,E))$. $\square$

Twierdzenie 10.12.7. (a) *Przy oznaczeniach z twierdzenia o odwzorowaniu odwrotnym, jeżeli $f \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(\varOmega, F)$, to $g \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(V, E)$.*

(b) *Przy oznaczeniach z twierdzenia o odwzorowaniu uwikłanym, jeżeli $f \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(\varOmega, F)$, to $\varphi \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(U_1 \times U_2)$.*

Dowód. (a) Zachowujemy oznaczenia z twierdzenia o odwzorowaniu odwrotnym. Możemy założyć, że $\varOmega$ jest zbiorem wypukłym ograniczonym oraz $f \in \mathcal{BC}^{k,\alpha}(\varOmega)$. Wiemy, że $g' = \varLambda \circ f' \circ g$, gdzie $\varLambda : \operatorname{Isom}(E,F) \longrightarrow \operatorname{Isom}(F,E)$ jest operatorem odwracania. Na podstawie Propozycji 10.12.6 możemy założyć $f'(g(V)) \subset W$, gdzie $W \subset \mathcal{L}(E,F)$ jest wzięte z Propozycji 10.12.6 dla $L_0 := f'(a)$, zaś V jest otoczeniem wypukłym punktu $f(a)$. W szczególności, $\varLambda \in \mathcal{BC}^{s,1}(W, \mathcal{L}(F,E))$ dla dowolnego $s \in \mathbb{N}_0$. Zastosujemy indukcję ze względu na k.

$k = 1$: Wiemy, że $\varLambda \in \mathcal{BC}^{0,1}(W, \mathcal{L}(F,E))$, $f' \in \mathcal{BC}^{0,\alpha}(\varOmega, \mathcal{L}(E,F))$ oraz $g \in \mathcal{BC}^{0,1}(V,F)$. Na podstawie Propozycji 10.12.4(b) dostajemy $\varLambda \circ f' \circ g \in \mathcal{BC}^{0,\alpha}(V, \mathcal{L}(F,E))$. Skąd $g' \in \mathcal{BC}^{0,\alpha}(V, \mathcal{L}(F,E))$, a wiec $g \in \mathcal{BC}^{1,\alpha}(V,E)$.

$k \rightsquigarrow k+1$: Ponieważ $\varLambda \in \mathcal{BC}^{k,1}(W, \mathbb{R}^{n^2})$, $f' \in \mathcal{BC}^{k,\alpha}(\varOmega, \mathcal{L}(E,F))$ oraz $g \in \mathcal{BC}^{k,1}(V,F)$, zatem, wobec Propozycji 10.12.4(b), dostajemy $\varLambda \circ f' \circ g \in \mathcal{BC}^{k,\alpha}(V, \mathcal{L}(F,E))$, skąd wynika, że $g' \in \mathcal{BC}^{k,\alpha}(V, \mathcal{L}(F,E))$, a wiec $g \in \mathcal{BC}^{k+1,\alpha}(V,E)$.

(b) Wynika z (a) i dowodu równoważności twierdzeń o odwzorowaniu odwrotnym i uwikłanym. $\square$

10.13. Twierdzenie o rzędzie

Twierdzenie 10.13.1 (Twierdzenie o rzędzie)**.** *Niech $\varOmega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i niech $f : \varOmega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ będzie odwzorowaniem klasy $\mathcal{C}^k$ ($k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$) takim, że*

$$\exists_{r \in \{0,\dots,\min\{n,m\}\}}\ \forall_{x \in \varOmega} :\ \operatorname{rank} f'(x) = r.$$

Niech $\varDelta := (-1,1) \subset \mathbb{R}$. Wtedy dla dowolnego punktu $a \in \varOmega$ istnieje:

- *otoczenie otwarte $U \subset \varOmega$ punktu a,*
- *otoczenie otwarte $V \subset \mathbb{R}^m$ punktu $f(a)$, $f(U) \subset V$,*
- *dyfeomorfizm klasy $\mathcal{C}^k$ $\varPhi : \varDelta^n \longrightarrow U$, $\varPhi(0) = a$,*
- *dyfeomorfizm klasy $\mathcal{C}^k$ $\varPsi : V \longrightarrow \varDelta^m$, $\varPsi(f(a)) = 0$,*

takie, że

$$(\varPsi \circ f \circ \varPhi)(t_1, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_r, 0, \dots, 0), \quad (t_1, \dots, t_n) \in \varDelta^n.$$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] & V \arrow[d, "\varPsi"] \\ \varDelta^n \arrow[u, "\varPhi"] \arrow[r, "(\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^r}{,}0)"] & \varDelta^m \end{tikzcd}$$

Dowód. Przypadek $r = 0$. Wtedy $f \equiv f(a) = \text{const}$ w składowej spójnej zbioru $\varOmega$, do której należy punkt a. Dobierzmy $\tau > 0$ takie, że $U := a + \tau\varDelta^n \subset \varOmega$ i zdefiniujmy $V := f(a) + \varDelta^m$, $\varPhi(t) := a + \tau t$, $\varPsi(u) := u - f(a)$.

Przypadek $r \geqslant 1$. Niech $P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ i $Q : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ będą dowolnymi izomorfizmami afinicznymi. Zdefiniujmy $\widetilde{\varOmega} := P^{-1}(\varOmega)$, $\widetilde{f} := Q \circ f \circ P : \widetilde{\varOmega} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\widetilde{a} := P^{-1}(a)$. Zauważmy, że odwzorowanie $\widetilde{f}$ jest klasy $\mathcal{C}^k$ oraz $\operatorname{rank} \widetilde{f}'(x) = r$ dla dowolnego $x \in \widetilde{\varOmega}$. Przypuśćmy, że twierdzenie o rzędzie zachodzi dla odwzorowania $\widetilde{f}$ w punkcie $\widetilde{a}$ i niech $\widetilde{U}$, $\widetilde{V}$, $\widetilde{\varPhi}$ i $\widetilde{\varPsi}$ będą dobrane do odwzorowania $\widetilde{f}$ zgodnie z tym twierdzeniem.

Niech $U := P(\widetilde{U})$, $V := Q^{-1}(\widetilde{V})$, $\varPhi := P \circ \widetilde{\varPhi}$, $\varPsi := \widetilde{\varPsi} \circ Q$.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] & V \arrow[d, "Q"] \\ \widetilde{U} \arrow[u, "P"] \arrow[r, "\widetilde{f}"] & \widetilde{V} \arrow[d, "\widetilde{\varPsi}"] \\ \varDelta^n \arrow[u, "\widetilde{\varPhi}"] \arrow[r, "(\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^r}{,}0)"] & \varDelta^m \end{tikzcd}$$

Mamy

$$(\varPsi \circ f \circ \varPhi)(t) = ((\widetilde{\varPsi} \circ Q) \circ f \circ (P \circ \widetilde{\varPhi}))(t) = (\widetilde{\varPsi} \circ \widetilde{f} \circ \widetilde{\varPhi})(t) = (t_1, \dots, t_r, 0, \dots, 0),$$

czyli twierdzenie o rzędzie zachodzi dla odwzorowania f w punkcie a.

Stosując powyższe rozumowanie do $P(x) := x+a$ i $Q(y) := y-f(a)$, redukujemy dowód do przypadku $a=0$ i $f(0)=0$.

Z algebry liniowej wiadomo, że istnieją izomorfizmy liniowe $P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ i $Q : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ takie, że

$$Q \circ f'(0) \circ P = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (^{26})$$

Dowód redukuje się więc do przypadku, gdy

$$f'(0) = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Niech

$$g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad g(x) := (f_1(x), \dots, f_r(x), x_{r+1}, \dots, x_n).$$

Oczywiście g jest klasy $\mathcal{C}^k$, $g(0)=0$ oraz $g'(0)=\mathbb{I}_n$. Na podstawie twierdzenia o odwzorowaniu odwrotnym istnieje otoczenie otwarte zera $U \subset \Omega$ oraz $\tau > 0$ takie, że odwzorowanie

$$g|_U : U \longrightarrow \tau\Delta^n$$

jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$. Niech

$$\widetilde{\Phi} := (g|_U)^{-1} : \tau\Delta^n \longrightarrow U,$$
$$\varphi := f \circ \widetilde{\Phi} : \tau\Delta^n \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

Zauważmy, że φ jest klasy $\mathcal{C}^k$, $\varphi(0)=0$ oraz $\operatorname{rank}\varphi'(t) = r$ dla dowolnego $t \in \tau\Delta^n$. Ponadto,

$$\varphi(t) = (t_1, \dots, t_r, \varphi_{r+1}(t), \dots, \varphi_m(t)),$$

a więc w szczególności $\varphi(\tau\Delta^n) \subset (\tau\Delta)^r \times \mathbb{R}^{m-r}$ oraz

$$\varphi'(t) = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_r & 0_{r,n-r} \\ *_{m-r,r} & \left[\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial t_\nu}(t)\right]_{\substack{\mu=r+1,\dots,m \\ \nu=r+1,\dots,n}} \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $\operatorname{rank}\varphi'(t) = r$, wnioskujemy stąd, że

$$\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial t_\nu}(t) = 0, \quad t \in \tau\Delta^n, \quad \mu = r+1, \dots, m, \ \nu = r+1, \dots, n.$$

Innymi słowy, funkcje $\varphi_{r+1}, \dots, \varphi_m$ zależą jedynie od $t_1, \dots, t_r$. Niech

$$\widetilde{\Psi} : (\tau\Delta^r) \times \mathbb{R}^{m-r} \longrightarrow (\tau\Delta^r) \times \mathbb{R}^{m-r},$$
$$\widetilde{\Psi}(u', u_{r+1}, \dots, u_m) := (u', u_{r+1} - \varphi_{r+1}(u'), \dots, u_m - \varphi_m(u')).$$

Widać, że $\widetilde{\Psi}$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$ $(^{27})$ i $\widetilde{\Psi}(0)=0$. Ponadto,

$$(\widetilde{\Psi} \circ \varphi)(t) = (\widetilde{\Psi} \circ f \circ \widetilde{\Phi})(t) = (t', 0), \quad t = (t', t'') \in (\tau\Delta^r) \times (\tau\Delta^{n-r}).$$

Niech teraz

$$\Phi : \Delta^n \longrightarrow U, \quad \Phi(t) := \widetilde{\Phi}(\tau t),$$
$$V := \widetilde{\Psi}^{-1}(\tau\Delta^m), \quad \Psi : V \longrightarrow \Delta^m, \quad \Psi(y) := \frac{1}{\tau}\widetilde{\Psi}(y).$$

$(^{26})$ $\mathbb{I}_r$ oznacza macierz $(r \times r)$–wymiarową jednostkową,

$$\mathbb{I}_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

$(^{27})$ $\widetilde{\Psi}^{-1}(v', v_{r+1}, \dots, v_m) := (v', v_{r+1} + \varphi_{r+1}(v'), \dots, v_m + \varphi_m(v'))$.

Odwzorowania Φ i Ψ są dyfeomorfizmami klasy $\mathcal{C}^k$ oraz

$$(\Psi \circ f \circ \Phi)(t) = \frac{1}{\tau}(\widetilde{\Psi} \circ f \circ \widetilde{\Phi})(\tau t) = \frac{1}{\tau}(\tau t', 0) = (t', 0), \quad t = (t', t'') \in \Delta^r \times \Delta^{n-r}. \qquad \square$$

Wobec Twierdzenia 10.12.7 i dowodu Twierdzenia 10.13.1, łatwo dostajemy następujący wynik.

Twierdzenie 10.13.2 (Twierdzenie o rzędzie). *Przy oznaczeniach z Twierdzenia 10.13.1, jeżeli $f \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)$, to dyfeomorfizmy Φ i Ψ można wybrać tak, by $\Phi, \Phi^{-1}, \Psi, \Psi^{-1} \in \mathcal{C}^{k,\alpha}$.*

10.14. Podrozmaitości

Definicja 10.14.1. Niech $\Omega \in \operatorname{top}\mathbb{R}^n$, $M \subset \Omega$, $d \in \mathbb{N}_0 \cap [0, n]$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$. Mówimy, że zbiór M jest *d–wymiarową podrozmaitością Ω klasy $\mathcal{C}^k$*, jeżeli M jest zbiorem relatywnie domkniętym w Ω oraz:
- dla $d = 0$: M jest zbiorem dyskretnym (28) (29) (30),
- dla $1 \leqslant d \leqslant n$: spełniony jest następujący warunek: $\forall_{a \in M}\ \exists_{P \in \operatorname{top}\mathbb{R}^d}\ \exists_{U \in \operatorname{top} M:\ a \in U}\ \exists_{p: P \to U}$:
  - $p : P \longrightarrow U$ jest homeomorfizmem,
  - $p \in \mathcal{C}^k(P, \mathbb{R}^n)$,
  - $\operatorname{rank} p'(t) = d$, $t \in P$.

Można również mówić o rozmaitościach klasy $\mathcal{C}^{k,\alpha}$.

W powyższej sytuacji mówimy, że $p : P \longrightarrow U$ jest *lokalną parametryzacją* (dla U), zaś $p^{-1} : U \longrightarrow P$ jest *mapą* (na U).

Każdą rodzinę map $p_i^{-1} : U_i \longrightarrow P_i$, $i \in I$, taką że $\bigcup_{i \in I} U_i = M$ nazywamy *atlasem na M*. Zauważmy, że na podstawie twierdzenia Lindelöfa, z dowolnego atlasu na M można wybrać podatlas przeliczalny.

Zauważmy, że dla $d = n$, na podstawie twierdzenia o odwzorowaniu odwrotnym, powyższe warunki oznaczają, że M jest podzbiorem otwartym $\mathbb{R}^n$. Ponieważ M jest jednocześnie podzbiorem domkniętym Ω, to dla $d = n$ podrozmaitość M musi być sumą pewnej liczby składowych otwartych Ω (31).

Zbiór $M \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy *lokalnie d–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$ w $\mathbb{R}^n$*, jeżeli dowolny punkt $a \in M$ posiada otoczenie otwarte Ω_a takie, że $M \cap \Omega_a$ jest d–wymiarową podrozmaitością Ω_a klasy $\mathcal{C}^k$.

Zauważmy, że dla $d = 0$, M jest zbiorem dyskretnym, zaś dla $d = n$, M jest zbiorem otwartym.

Niech $\Omega := \bigcup_{a \in M} \Omega_a$. Widać, że M jest zbiorem domkniętym w Ω i w takim razie, M jest d–wymiarową podrozmaitością Ω klasy $\mathcal{C}^k$. Oznacza to, że każda podrozmaitość „lokalna” jest podrozmaitością stosownego zbioru otwartego.

W dalszym ciągu, pisząc „M jest d–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$ w $\mathbb{R}^n$” będziemy mieli na myśli podrozmaitość „lokalną”.

Obserwacja 10.14.2. (a) W $\mathbb{R}$ nie ma nietrywialnych podrozmaitości.

(b) Jeżeli M jest d–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$ w $\mathbb{R}^n$ i $N \in \operatorname{top} M$, to N jest d–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$ w $\mathbb{R}^n$.

(c) Jeżeli $p : P \longrightarrow U$ jest lokalną parametryzacją, zaś $\varphi : Q \longrightarrow P$ — dowolnym dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$ ($Q \in \operatorname{top}\mathbb{R}^d$), to $p \circ \varphi : Q \longrightarrow U$ jest również lokalną parametryzacją.

(d) W szczególności, jeżeli M jest d–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$ w $\mathbb{R}^n$ i $1 \leqslant d \leqslant n$, to dla każdego punktu $a \in M$ istnieje lokalna parametryzacja $p : \Delta^d \longrightarrow U$ (32) taka, że $p(0) = a$. Z tych samych powodów możemy zawsze znaleźć parametryzację $p : \mathbb{R}^d \longrightarrow U$ taką, że $p(0) = a$ (33).

(e) Każda podrozmaitość klasy $\mathcal{C}^k$ jest klasy $\mathcal{C}^\ell$ dla dowolnego $1 \leqslant \ell \leqslant k - 1$.

(f) Każdy wykres $M := \{(t, \varphi(t)) : t \in P\}$, gdzie $1 \leqslant d \leqslant n - 1$, $P \in \operatorname{top}\mathbb{R}^d$ i $\varphi \in \mathcal{C}^k(P, \mathbb{R}^{n-d})$, jest d–wymiarową podrozmaitością $P \times \mathbb{R}^{n-d}$ klasy $\mathcal{C}^k$.

---

(28) Tzn. dowolny punkt $a \in M$ ma otoczenie otwarte $U \subset \mathbb{R}^n$ takie, że $M \cap U = \{a\}$.
(29) Zauważmy, że $\#M \leqslant \aleph_0$ — Ćwiczenie.
(30) W szczególności, dla $d = 0$ klasa $\mathcal{C}^k$ jest obojętna.
(31) W szczególności, dla $d = n$ klasa $\mathcal{C}^k$ jest obojętna.
(32) $\Delta := (-1, 1)$.
(33) Wystarczy zauważyć, że istnieje $\mathcal{C}^\omega$–dyfeomorfizm $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \Delta^d$ taki, że $\varphi(0) = 0$ — Ćwiczenie.

(g) Jeżeli M jest d–wymiarową podrozmaitością $\varOmega$ klasy $\mathcal{C}^k$ i $\varPhi : \varOmega \longrightarrow \varOmega'$ ($\varOmega' \in \operatorname{top}\mathbb{R}^n$) jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$, to $M' := \varPhi(M)$ jest d–wymiarową podrozmaitością $\varOmega'$ klasy $\mathcal{C}^k$.

Istotnie, przypadki $d = 0$ i $d = n$ są trywialne. Dla $1 \leqslant d \leqslant n-1$, wystarczy pokazać, że jeżeli $p : P \longrightarrow U$ jest lokalną parametryzacją dla $U \in \operatorname{top} M$, to $\varPhi\circ p : P \longrightarrow \varPhi(U)$ jest lokalną parametryzacją dla $\varPhi(U)$. Jedyną wątpliwość może budzić ostatni warunek z rzędem. Mamy: $(\varPhi \circ p)'(t) = \varPhi'(p(t)) \circ p'(t)$. Ponadto, $\varPhi'(x)$ jest macierzą nieosobliwą dla dowolnego $x \in \varOmega$ (ponieważ $\varPhi$ jest dyfeomorfizmem). Teraz już widać, że $\operatorname{rank}(\varPhi \circ p)'(t) = \operatorname{rank} p'(t) = d$ dla dowolnego $t \in P$.

(h) Każda d–wymiarowa płaszczyzna afiniczna $M \subset \mathbb{R}^n$ jest d–wymiarową podrozmaitością $\mathbb{R}^n$ klasy $\mathcal{C}^\omega$.

Istotnie, przypadki $d = 0$ i $d = n$ są trywialne. Dla $1 \leqslant d \leqslant n-1$, jeżeli $M = x_0 + V$, gdzie V jest d–wymiarową podprzestrzenią wektorową $\mathbb{R}^n$, to dla dowolnej bazy $v_1, \dots, v_d$ przestrzeni V odwzorowanie

$$\mathbb{R}^d \ni (t_1, \dots, t_d) \longmapsto x_0 + t_1 v_1 + \dots + t_d v_d \in M$$

jest (globalną) parametryzacją M klasy $\mathcal{C}^\omega$ — Ćwiczenie.

(i) $(n-1)$–wymiarowa jednostkowa sfera euklidesowa $\mathbb{S}_{n-1}$

$$\mathbb{S}_{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\} = \partial\mathbb{B}_n$$

jest $(n-1)$–wymiarową podrozmaitością $\mathbb{R}^n$ klasy $\mathcal{C}^\omega$.

Istotnie, jeżeli np. $U_n^+ := \{x \in \mathbb{S}_{n-1} : x_n > 0\}$, to odwzorowanie

$$\mathbb{B}_{n-1} \ni x' \longmapsto (x', \sqrt{1 - \|x'\|^2}) \in U_n^+$$

jest lokalną parametryzacją U_n^+ klasy $\mathcal{C}^\omega$ — por. (f). Podobnie możemy sparametryzować każdy z $2n$ zbiorów $U_j^\pm := \{x \in \mathbb{S}_{n-1} : \pm x_j > 0\}$, $j = 1, \dots, n$ (34).

(j) Zbiór $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 = y^2\}$ nie jest jednowymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$ w $\mathbb{R}^2$, ale odwzorowanie $p : \mathbb{R} \longrightarrow M$, $p(t) := (t^2, t^3)$, jest homeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^\omega$ (35).

Istotnie, przypuśćmy, że $q = (f, g) : \Delta \longrightarrow M$ jest odwzorowaniem różniczkowalnym w $t = 0$ takim, że $q(0) = (0, 0)$. Wtedy $f^3 \equiv g^2$. Po podzieleniu przez t^2 i przejściu z t do zera dostajemy $(f'(0))^2 f(0) = (g'(0))^2$, co daje $g'(0) = 0$. Dzieląc z kolei przez t^3 mamy: $(f(t)/t)^3 = (g(t)/t)^2(\frac{1}{t})$. Przy $t \longrightarrow 0$ lewa strona zmierza do $(f'(0))^3$, zaś prawa jest $\leqslant 0$ dla $t < 0$ i $\geqslant 0$ dla $t > 0$. Stąd: $f'(0) = 0$. Tak więc $q'(0) = (0, 0)$, a zatem q nie może być parametryzacją.

Twierdzenie 10.14.3 (Opisy podrozmaitości)**.** *Niech $M \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leqslant d \leqslant n-1$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) *M jest d–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$ w $\mathbb{R}^n$;*

(ii) $\forall_{a\in M}\ \exists_{d'\geqslant d}\ \exists_{P\in\operatorname{top}\mathbb{R}^{d'}}\ \exists_{U\in\operatorname{top} M:\ a\in U}\ \exists_{p:P\to U}$:
$p : P \longrightarrow U$ jest odwzorowaniem otwartym (36),
$p(P) = U$,
$p \in \mathcal{C}^k(P, \mathbb{R}^n)$,
$\operatorname{rank} p'(t) = d$, $t \in P$;

(iii) $\forall_{a\in M}\ \exists_{\varOmega\in\operatorname{top}\mathbb{R}^n:\ a\in\varOmega}\ \exists_{\varPhi:\varOmega\longrightarrow\Delta^n}$:
$\varPhi$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$,
$\varPhi(M \cap \varOmega) = \Delta^d \times \{0\}^{n-d}$ (37)*;*

(iv) $\forall_{a\in M}\ \exists_{\varOmega\in\operatorname{top}\mathbb{R}^n:\ a\in\varOmega}\ \exists_{Q\in\operatorname{top}\mathbb{R}^n}\ \exists_{V\subset\mathbb{R}^n}\ \exists_{\varPhi:\varOmega\longrightarrow Q}$:
V jest d–wymiarową podprzestrzenią wektorową $\mathbb{R}^n$,
$\varPhi$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$,
$\varPhi(M \cap \varOmega) = V \cap Q$;

(v) $\forall_{a\in M}\ \exists_{\ell\geqslant n-d}\ \exists_{\varOmega\in\operatorname{top}\mathbb{R}^n:\ a\in\varOmega}\ \exists_{f\in\mathcal{C}^k(\varOmega,\mathbb{R}^\ell)}$:
$M \cap \varOmega = f^{-1}(0)$,
$\operatorname{rank} f'(x) = n - d$, $x \in \varOmega$;

---

(34) Czy $2n$ jest minimalną liczbą lokalnych parametryzacji „pokrywających” w sumie całą sferę $\mathbb{S}_{n-1}$?

(35) Uwaga: $p'(0) = (0, 0)$.

(36) Tzn. $p(\operatorname{top} P) \subset \operatorname{top} U$.

(37) Takie odwzorowanie $\varPhi$ będziemy nazywać *odwzorowaniem rozpłaszczającym.*

(vi) $\forall_{a\in M}\ \exists_{\Omega\in\operatorname{top}\mathbb{R}^n:\ a\in\Omega}\ \exists_{f\in\mathcal{C}^k(\Omega,\mathbb{R}^{n-d})}$:
$M\cap\Omega = f^{-1}(0)$,
$\operatorname{rank} f'(x) = n-d,\ x\in\Omega$;
(vii) $\forall_{a\in M}\ \exists_{\Omega\in\operatorname{top}\mathbb{R}^n:\ a\in\Omega}\ \exists_{P\in\operatorname{top}\mathbb{R}^d}\ \exists_{\varphi\in\mathcal{C}^k(P,\mathbb{R}^{n-d})}\ \exists_{\sigma\in\Sigma_n}$:
P jest wypukły,
$\sigma(M\cap\Omega) = \{(t,\varphi(t)) : t\in P\}$,
gdzie $\sigma:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$, $\sigma(x_1,\dots,x_n) := (x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)})$;
(viii) $\forall_{a\in M}\ \exists_{\Omega\in\operatorname{top}\mathbb{R}^n:\ a\in\Omega}\ \exists_{P\in\operatorname{top}\mathbb{R}^d}\ \exists_{p:P\longrightarrow M\cap\Omega}\ \exists_{s:\Omega\longrightarrow P}$:
P jest wypukły,
$p\in\mathcal{C}^k(P,\mathbb{R}^n)$,
$s\in\mathcal{C}^k(\Omega,\mathbb{R}^d)$,
$M\cap\Omega = p(P)$,
$s\circ p = \mathrm{id}_P$. [38]

Dowód. Implikacje (i) $\Longrightarrow$ (ii), (iii) $\Longrightarrow$ (iv) są oczywiste.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Niech $a = p(t_0)$. Na podstawie twierdzenia o rzędzie istnieją zbiory otwarte $A\in\operatorname{top}P$, $B\in\operatorname{top}\mathbb{R}^n$ oraz $\mathcal{C}^k$–dyfeomorfizmy $\alpha:\varDelta^{d'}\longrightarrow A$, $\beta:B\longrightarrow\varDelta^n$ takie, że $\alpha(0)=t_0$, $\beta(a)=0$, $p(A)\subset B$ i $\beta\circ p\circ\alpha(t) = (t_1,\dots,t_d,0,\dots,0)$, $t\in\varDelta^{d'}$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\ p\ } & B \\ {\scriptstyle\alpha}\big\uparrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\beta} \\ \varDelta^{d'} & \xrightarrow{(\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^d},0)} & \varDelta^n \end{array}$$

Niech $\Omega'\in\operatorname{top}B$ będzie taki, że $p(A) = M\cap\Omega'$ (korzystamy tu z otwartości p). Zauważmy, że

$$\beta(M\cap\Omega') = \beta\circ p(A) = (\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^d},0)\circ\alpha^{-1}(A) = (\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^d},0)(\varDelta^{d'}) = \varDelta^d\times\{0\}^{n-d}.$$

Weźmy $\tau>0$ takie, że $\tau\varDelta^n\subset\beta(\Omega')$. Niech $\Omega := \beta^{-1}(\tau\varDelta^n)\subset\Omega'$. Zdefiniujmy $\varPhi := \frac{1}{\tau}\beta|_\Omega : \Omega\longrightarrow\varDelta^n$. Odwzorowanie $\varPhi$ jest oczywiście dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$. Ponadto, widać, że

$$\varPhi(M\cap\Omega) = \frac{1}{\tau}\beta(M\cap\Omega)\subset\varDelta^d\times\{0\}^{n-d}.$$

Aby pokazać równość ustalmy $t\in\varDelta^d\times\{0\}^{n-d}$ i niech $x\in M\cap\Omega'$ będzie takie, że $\beta(x) = \tau t$. Wtedy $x\in M\cap\Omega$ oraz $\varPhi(x) = t$.

(iv) $\Longrightarrow$ (v): Niech $L:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ będzie izomorfizmem liniowym takim, że $L(V) = \{0\}^{n-d}\times\mathbb{R}^d$. Zdefiniujmy $g := L\circ\varPhi$, $f := (g_1,\dots,g_{n-d})$ ($\ell := n-d$).

(v) $\Longrightarrow$ (vi): Na podstawie twierdzenia o rzędzie istnieją zbiory otwarte $A\subset\mathbb{R}^n$, $B\subset\mathbb{R}^\ell$ oraz dyfeomorfizmy klasy $\mathcal{C}^k$ $\alpha:\varDelta^n\longrightarrow A$, $\beta:B\longrightarrow\varDelta^\ell$ takie, że $a\in A\subset\Omega$, $\alpha(0)=a$, $f(A)\subset B$, $\beta(0)=0$, $\beta\circ f\circ\alpha(t) = (t_1,\dots,t_{n-d},0,\dots,0)$, $t\in\varDelta^n$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\ f\ } & B \\ {\scriptstyle\alpha}\big\uparrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\beta} \\ \varDelta^{n} & \xrightarrow{(\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{n-d}},0)} & \varDelta^\ell \end{array}$$

Niech $g := \alpha^{-1}$, $h := (g_1,\dots,g_{n-d})$. Oczywiście $\operatorname{rank} h'(x) = n-d$, $x\in\varDelta^n$, oraz

$$M\cap A = \{x\in A : f(x)=0\} = \{x\in A : \beta\circ f(x) = 0\} = \{x\in A : (\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{n-d}},0)\circ\alpha^{-1}(x) = 0\} = h^{-1}(0).$$

(vi) $\Longrightarrow$ (vii): Po permutacji zmiennych, można założyć, że

$$\det\Big[\frac{\partial f_i}{\partial x_{d+j}}(a)\Big]_{i,j=1,\dots,n-d}\neq 0.$$

Teraz wystarczy tylko skorzystać z twierdzenia o odwzorowaniu uwikłanym [39].

---

[38] Zauważmy, że odwzorowanie $r := p\circ s : \Omega\longrightarrow M\cap\Omega$ jest retrakcją klasy $\mathcal{C}^k$ (odwzorowanie $r : A\longrightarrow B$, gdzie $B\subset A$, nosi nazwę *retrakcji*, jeżeli $r = \mathrm{id}$ na B).

[39] Trzeba zauważyć, że zbiór U_1 w twierdzeniu o odwzorowaniu uwikłanym (a więc P w (vii)) można zawsze wybrać w klasie obszarów wypukłych.

(vii) $\Longrightarrow$ (viii): Niech

$$p(t) := \sigma^{-1}(t, \varphi(t)),\ t \in P, \quad s(x) := \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^d}(\sigma(x)),\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Oczywiście, $M \cap \Omega = p(P)$ oraz $s \circ p = \mathrm{id}_P$. Pozostaje tylko zmodyfikować zbiór Ω i zastąpić go przez $s^{-1}(P)$.

(viii) $\Longrightarrow$ (i): Niech $U := M \cap \Omega$. Oczywiście $p : P \longrightarrow U$ jest homeomorfizmem ($p^{-1} = s|_U$). Pozostaje zauważyć, że ze związku $s'(p(t)) \circ p'(t) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d}$, $t \in P$, wynika łatwo, że $\operatorname{rank} p'(t) = d$ dla $t \in P$. $\square$

Odnotujmy, że prawdziwe jest następujące wysoce nietrywialne twierdzenie.

Twierdzenie* 10.14.4 (Twierdzenie o retrakcji)**.** *Niech $M \subset \mathbb{R}^n$ będzie niepustym zbiorem spójnym i niech $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Wtedy M jest podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$ w $\mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją zbiór otwarty $\Omega \supset M$ oraz retrakcja $r : \Omega \longrightarrow M$ klasy $\mathcal{C}^k$.*

Obserwacja 10.14.5. Niech $\Omega := (\mathbb{R}^n)_*$, $f(x) := \|x\|^2 - 1$, $x \in \Omega$.

Wtedy $\operatorname{rank} f'(x) = 1$, $x \in \Omega$, oraz $f^{-1}(0) = \mathbb{S}_{n-1}$, a zatem na podstawie Twierdzenia 10.14.3(vi), $\mathbb{S}_{n-1}$ jest $(n-1)$–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^\infty$ (por. Obserwacja 10.14.2(i)).

Twierdzenie 10.14.6. *Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i niech $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ będzie odwzorowaniem klasy $\mathcal{C}^k$ ($k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$) o stałym rzędzie d. Wtedy dowolny punkt $a \in \Omega$ ma otoczenie otwarte $U \subset \Omega$ takie, że $f(U)$ jest d–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$ w $\mathbb{R}^m$.*

Dowód. Przypadek $d = 0$ jest trywialny, bowiem wtedy f jest stałe na każdej składowej zbioru Ω. Niech $1 \leqslant d \leqslant \min\{m, n\}$. Ustalmy $a \in \Omega$. Na podstawie twierdzenia o rzędzie istnieją:
- zbiory otwarte $U \subset \Omega$, $V \subset \mathbb{R}^m$,
- dyfeomorfizmy klasy $\mathcal{C}^k$ $\alpha : \Delta^n \longrightarrow U$, $\beta : V \longrightarrow \Delta^m$

takie, że
- $\alpha(0) = a$, $\beta(f(a)) = 0$, $f(U) \subset V$,
- $\beta \circ f \circ \alpha(t_1, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_d, \underbrace{0, \dots, 0}_{(m-d)\times})$, $t = (t_1, \dots, t_n) \in \Delta^n$.

W tej sytuacji $f(U) = \beta^{-1}(\Delta^d \times \{0\}^{m-d})$, skąd oczywiście wynika, że $f(U)$ jest d–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$ w $\mathbb{R}^m$. $\square$

Propozycja 10.14.7. *Niech M będzie d–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$ ($1 \leqslant d \leqslant n$) i niech $p : P \longrightarrow U$, $q : Q \longrightarrow V$ będą dwiema lokalnymi parametryzacjami takimi, że $U \cap V \neq \varnothing$. Wtedy odwzorowanie*

$$\varphi := p^{-1} \circ q : q^{-1}(U \cap V) \longrightarrow p^{-1}(U \cap V)$$

jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$ (40)*.*

Dowód. Przypadek $d = n$ jest oczywisty. Załóżmy, że $d \leqslant n - 1$. Oczywiście, φ jest homeomorfizmem. Wystarczy więc sprawdzić, że jest klasy $\mathcal{C}^k$ (a następnie zamienić rolami p i q). Problem ma teraz charakter lokalny. Ustalmy $a \in U \cap V$ i niech $p(t_0) = a = q(u_0)$. Na podstawie twierdzenia o rzędzie istnieją otoczenie A_1 punktu t_0 w P, otoczenie A_2 punktu u_0 w Q, otoczenia B_1, B_2 punktu a w $\mathbb{R}^n$, dyfeomorfizmy klasy $\mathcal{C}^k$ $\alpha_j : \Delta^d \longrightarrow A_j$, $\beta_j : B_j \longrightarrow \Delta^n$, $j = 1, 2$, takie, że: $p(A_1) \subset B_1$, $q(A_2) \subset B_2$, $\alpha_1(0) = t_0$, $\alpha_2(0) = u_0$, $\beta_j(a) = 0$, $j = 1, 2$, $\beta_1 \circ p \circ \alpha_1(\xi) = (\xi, 0)$, $\xi \in \Delta^d$, $\beta_2 \circ q \circ \alpha_2(\eta) = (\eta, 0)$, $\eta \in \Delta^d$.

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "p"] & B_1\ B_2 \arrow[d, "\beta_1"', "\beta_2"] & A_2 \arrow[l, "q"'] \\
\Delta^d \arrow[u, "\alpha_1"] \arrow[r, "(\mathrm{id},0)"] & \Delta^n & \Delta^d \arrow[u, "\alpha_2"'] \arrow[l, "(\mathrm{id},0)"']
\end{tikzcd}$$

Stąd wynika, że na zbiorze $q^{-1}(p(A_1) \cap B_2)$ zachodzi równość

$$\varphi = p^{-1} \circ q = \alpha_1 \circ \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^d} \circ \beta_1 \circ \beta_2^{-1} \circ (\alpha_2^{-1}, 0),$$

która dowodzi, że φ jest klasy $\mathcal{C}^k$ w otoczeniu u_0. $\square$

(40) Odwzorowanie φ nosi nazwę *funkcji przejścia*.

Definicja 10.14.8. Niech M będzie d–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$ $(1 \leqslant d \leqslant n)$ i niech F będzie dowolną przestrzenią unormowaną. Powiemy, że odwzorowanie $f : M \longrightarrow F$ jest *k–krotnie różniczkowalne w punkcie* $a \in M$ $(f \in \mathcal{D}^k(M, F; a))$, jeżeli dla dowolnej parametryzacji lokalnej $p : P \longrightarrow U$ takiej, że $a \in U$, mamy $f \circ p \in \mathcal{D}^k(P, F; p^{-1}(a))$.

Podobnie, powiemy, że odwzorowanie $f : M \longrightarrow F$ jest *klasy $\mathcal{C}^k$ na M* $(f \in \mathcal{C}^k(M, F))$, jeżeli dla dowolnej parametryzacji lokalnej $p : P \longrightarrow U$ odwzorowanie $f \circ p$ jest klasy $\mathcal{C}^k(P, F)$.

Zauważmy, że dla $d = n$ wprowadzone powyżej pojęcia są zgodne ze standardowymi definicjami.

Obserwacja 10.14.9. (a) $\mathcal{D}^k(M, F; a)$ i $\mathcal{C}^k(M, F)$ są przestrzeniami wektorowymi.

(b) Jeżeli $f \in \mathcal{D}^k(M, F; a)$ i $\psi \in \mathcal{D}^k(\Omega, G; f(a))$ (gdzie Ω jest zbiorem otwartym w F, zaś G jest przestrzenią unormowaną i $f(M) \subset \Omega$), to $\psi \circ f \in \mathcal{D}^k(M, G; a)$.

(c) Jeżeli $f \in \mathcal{C}^k(M, F)$, $f(M) \subset \Omega$ i $\psi \in \mathcal{C}^k(\Omega, G)$, to $\psi \circ f \in \mathcal{C}^k(M, G)$.

Propozycja 10.14.10. *Dla dowolnego odwzorowania $f : M \longrightarrow F$ i punktu $a \in M$ następujące warunki są równoważne:*

(i) $f \in \mathcal{D}^k(M, F; a)$;

(ii) *istnieje lokalna parametryzacja $p : P \longrightarrow U$ taka, że $a \in U$ i $f \circ p \in \mathcal{D}^k(P, F; p^{-1}(a))$.*

(iii) *istnieje otoczenie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ punktu a oraz $\widetilde{f} : \Omega \longrightarrow F$ takie, że $\widetilde{f} \in \mathcal{D}^k(\Omega, F; a)$ oraz $\widetilde{f} = f$ na $M \cap \Omega$.*

Dowód. To, że (i) $\iff$ (ii) wynika wprost z Propozycji 10.14.7.

(i) $\Longrightarrow$ (iii): Niech Ω, P, p, s będą takie, jak w Twierdzeniu 10.14.3(viii). Przypomnijmy, że $p : P \longrightarrow M \cap \Omega$ jest lokalną parametryzacją (por. dowód implikacji (viii) $\Longrightarrow$ (i) w Twierdzeniu 10.14.3). Zdefiniujmy $\widetilde{f} := (f \circ p) \circ s$. Oczywiście, $\widetilde{f} = f$ na $M \cap \Omega$ oraz $\widetilde{f} \in \mathcal{D}^k(\Omega, F; a)$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): Rozważmy dowolną parametryzację lokalną $p : P \longrightarrow U$ $(a \in U)$ i niech $p(t_0) = a$. Niech Ω, $\widetilde{f}$ będą jak w (iii). Możemy założyć, że $U \subset \Omega$. Wtedy $f \circ p = \widetilde{f} \circ p$, a stąd oczywiście wynika, że $f \circ p \in \mathcal{D}^k(P, F; t_0)$. $\square$

W ten sam sposób można wykazać następujący wynik (Ćwiczenie).

Propozycja 10.14.11. *Dla dowolnego odwzorowania $f : M \longrightarrow F$ następujące warunki są równoważne:*

(i) $f \in \mathcal{C}^k(M, F)$;

(ii) *dla dowolnego punktu $a \in M$ istnieje lokalna parametryzacja $p : P \longrightarrow U$ taka, że $a \in U$ i $f \circ p \in \mathcal{C}^k(P, F)$;*

(iii) *dla dowolnego punktu $a \in M$ istnieje otoczenie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ oraz $\widetilde{f} \in \mathcal{C}^k(\Omega, F)$ takie, że $\widetilde{f} = f$ na $M \cap \Omega$.*

Obserwacja 10.14.12. (a) Jeżeli $p : P \longrightarrow U$ jest lokalną parametryzacją klasy $\mathcal{C}^k$, to $p^{-1} \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^d)$.

(b) Jeżeli $\varphi \in \mathcal{D}^k(\Omega, \mathbb{R}^n; u_0)$ $(\Omega \in \operatorname{top} E$, zaś E jest przestrzenią unormowaną), $\varphi(\Omega) \subset M$ i $f \in \mathcal{D}^k(M, F; \varphi(u_0))$, to $f \circ \varphi \in \mathcal{D}^k(\Omega, F; u_0)$.

Istotnie, wystarczy wykorzystać Propozycję 10.14.10(iii) i zauważyć, że w otoczeniu punktu u_0 mamy $f \circ \varphi = \widetilde{f} \circ \varphi$.

(c) Jeżeli $\varphi \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\varphi(\Omega) \subset M$ i $f \in \mathcal{C}^k(M, F)$, to $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^k(\Omega, F)$.

Istotnie, wystarczy wykorzystać lokalnie Propozycję 10.14.11(iii).

Definicja 10.14.13. Niech M będzie d–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$ w $\mathbb{R}^n$ $(1 \leqslant d \leqslant n)$. Niech $a \in M$ i niech $p : P \longrightarrow U$ będzie dowolną lokalną parametryzacją taką, że $a \in U$. Przyjmijmy, że $a = p(t_0)$. Przestrzeń

$$T_a M := p'(t_0)(\mathbb{R}^d)$$

nazywamy *przestrzenią styczną do M w punkcie a*.

Oczywiście, jeżeli $d = n$, to $T_a M = \mathbb{R}^n$.

Zauważmy, że definicja jest poprawna, bowiem na podstawie Propozycji 10.14.7, jeżeli $q : Q \longrightarrow V$ jest jakąś inną parametryzacją taką, że $q(u_0) = a$, to $q = p \circ \varphi$, gdzie φ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^1$, $\varphi(u_0) = t_0$. W szczególności, ponieważ $\varphi'(u_0)$ jest izomorfizmem, zatem $q'(u_0)(\mathbb{R}^d) = p'(t_0)(\varphi'(u_0)(\mathbb{R}^d)) = p'(t_0)(\mathbb{R}^d)$.

Przyjmujemy ponadto, że $T_aM := \{0\}$, jeżeli $d = 0$.
Oczywiście $\dim T_aM = d$.

Propozycja 10.14.14. *Niech M będzie d–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$ w $\mathbb{R}^n$ $(1 \leqslant d \leqslant n-1)$, $a \in M$ i niech $\Omega \in \operatorname{top}\mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^\ell)$ będzie takie, że $a \in \Omega$, $M \cap \Omega = f^{-1}(0)$ i $\operatorname{rank} f'(x) = n-d$, $x \in \Omega$ (41). Wtedy $T_aM = \operatorname{Ker} f'(a)$.*

Dowód. Niech $V := \operatorname{Ker} f'(a)$. Odnotujmy, że $\dim V = d$. Niech $p : P \longrightarrow U$, $U \subset \Omega$, będzie dowolną lokalną parametryzacją, $p(t_0) = a$. Ponieważ $f \circ p \equiv 0$, zatem $f'(a) \circ p'(t_0) = 0$, a stąd $T_aM \subset V$, co wobec równości wymiarów, daje żądaną równość. □

Propozycja 10.14.15 (Równoważne opisy przestrzeni stycznej). *Niech M będzie d–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$ w $\mathbb{R}^n$ $(1 \leqslant d \leqslant n-1)$, $a \in M$, $X \in \mathbb{R}^n$. Następujące warunki są równoważne:*

(i) *$X \in T_aM$;*
(ii) *istnieje $\varepsilon > 0$ oraz odwzorowanie $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ klasy $\mathcal{C}^k$ (42) takie, że $\gamma(0) = a$, $\gamma'(0) = X$;*
(iii) *istnieją ciągi $(a_\nu)_{\nu=1}^\infty \subset M$, $(r_\nu)_{\nu=1}^\infty \subset (0, +\infty)$ takie, że*

$$a_\nu \longrightarrow a, \quad r_\nu(a_\nu - a) \longrightarrow X. \quad (^{43})$$

Dowód. Dla $X = 0$ równoważność warunków jest oczywista. Przyjmujemy dalej, że $X \neq 0$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Niech $p : P \longrightarrow U$ będzie lokalną parametryzacją, $p(t_0) = a$. Niech $Y \in \mathbb{R}^d$ będzie taki, że $X = p'(t_0)(Y)$. Wtedy $X = \gamma'(0)$, gdzie $\gamma(\tau) := p(t_0 + \tau Y)$, $|\tau| < \varepsilon$ (ε małe).

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Wystarczy przyjąć $a_\nu := \gamma(\frac{1}{\nu})$, $r_\nu := \nu$, $\nu \gg 1$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): Niech $p : P \longrightarrow U$ będzie lokalną parametryzacją, $p(t_0) = a$. Możemy założyć, że $a_\nu = p(t_\nu)$, $t_\nu \in P$, $\nu \geqslant 1$. Oczywiście $t_\nu \longrightarrow t_0$ (44). Możemy również założyć, że $t_\nu \neq t_0$, $\nu \geqslant 1$, oraz (przechodząc do podciągu), że

$$Y_\nu := \frac{t_\nu - t_0}{\|t_\nu - t_0\|} \longrightarrow Y$$

dla pewnego $Y \in \mathbb{R}^d$.

Zauważmy, że $r_\nu\|a_\nu - a\| \longrightarrow \|X\|$, a zatem

$$\frac{a_\nu - a}{\|a_\nu - a\|} \longrightarrow \frac{X}{\|X\|}.$$

Niech $p(t) = p(t_0) + p'(t_0)(t - t_0) + \alpha(t)\|t - t_0\|$, gdzie $\alpha(t) \longrightarrow 0$ przy $t \longrightarrow t_0$. Ostatecznie mamy:

$$\frac{X}{\|X\|} = \lim_{\nu \to +\infty} \frac{p'(t_0)(Y_\nu) + \alpha(t_\nu)}{\|p'(t_0)(Y_\nu) + \alpha(t_\nu)\|} = \frac{p'(t_0)(Y)}{\|p'(t_0)(Y)\|},$$

co kończy dowód (bo T_aM jest przestrzenią wektorową). □

Propozycja 10.14.16. *Niech M będzie d–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$ w $\mathbb{R}^n$ $(1 \leqslant d \leqslant n-1)$, $a \in M$ i niech $f \in \mathcal{D}(M, F; a)$. Wtedy $\widetilde{f}'(a)|_{T_aM}$ nie zależy od wyboru lokalnego przedłużenia $\widetilde{f}$ różniczkowalnego w punkcie a (45).*

Dowód. Wystarczy pokazać, że jeżeli $g : \Omega \longrightarrow F$ jest odwzorowaniem różniczkowalnym w punkcie a i takim, że $g = 0$ na $M \cap \Omega$, to $g'(a)|_{T_aM} \equiv 0$.

Istotnie, niech $p : P \longrightarrow U$ będzie dowolną parametryzacją lokalną, $a = p(t_0) \in U \subset \Omega$. Mamy $g \circ p \equiv 0$. Zatem $g'(a) \circ p'(t_0) = 0$, co daje żądaną równość. □

Definicja 10.14.17. W powyższej sytuacji kładziemy

$$f'(a) : T_aM \longrightarrow F, \quad f'(a) := \widetilde{f}'(a)|_{T_aM}.$$

Odnotujmy, że $f'(a) \in \mathcal{L}(T_aM, F)$. Odwzorowanie $f'(a)$ nazywamy *różniczką odwzorowania f w punkcie a*.

---

(41) Por. Twierdzenie 10.14.3(v).
(42) Jako odwzorowanie $(-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^n$.
(43) Odnotujmy czysto geometryczny charakter warunku (iii).
(44) Ponieważ p jest homeomorfizmem.
(45) Przedłużenie takie istnieje na mocy Propozycji 10.14.10(iii).

Propozycja 10.14.18. *Niech M będzie d–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$ w $\mathbb{R}^n$ i niech M' będzie d'–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$ w $\mathbb{R}^{n'}$. Niech*

$$f : M \longrightarrow M'$$

będzie różniczkowalne w punkcie $a \in M$. Wtedy $f'(a)(T_aM) \subset T_{f(a)}M'$. (46)

Dowód. Załóżmy, że $M' \cap \Omega' = g^{-1}(0)$, gdzie $\Omega' \in \operatorname{top} \mathbb{R}^{n'}$, $g \in \mathcal{C}^1(\Omega', \mathbb{R}^{n'-d'})$, $\operatorname{rank} g'(y) = n' - d'$, $y \in \Omega'$, $f(a) \in \Omega'$ (47). Niech $\widetilde{f}$ będzie lokalnym przedłużeniem odwzorowania f na otoczenie Ω punktu a. Możemy założyć, że $\widetilde{f}(\Omega) \subset \Omega'$. Wtedy $g \circ \widetilde{f} = 0$ na $M \cap \Omega$, zatem $(g \circ \widetilde{f})'(a) = 0$ na T_aM (por. Propozycja 10.14.16). Oznacza to, że $g'(f(a)) \circ \widetilde{f}'(a) = 0$ na T_aM, co wobec Propozycji 10.14.14, daje żądany wynik. □

Uwaga 10.14.19. Dla rozmaitości klasy $\mathcal{C}^2$ i odwzorowań $f : M \longrightarrow F$ mających drugą pochodną w punkcie a należy oprzeć się pokusie zdefiniowania drugiej różniczki w punkcie a jako odwzorowania $f''(a) : T_aM \times T_aM \longrightarrow F$ danego wzorem $f''(a) = \widetilde{f}''(a)|_{T_aM \times T_aM}$, gdzie $\widetilde{f}$ jest lokalnym przedłużeniem f takim, że $\widetilde{f}''(a)$ istnieje.

Istotnie, $\widetilde{f}''(a)|_{T_aM \times T_aM}$ może zależeć od wyboru przedłużenia.

Niech np. $M := \{(t, t^2) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}$, $F := \mathbb{R}$, $f := 0$, $a := (0,0)$. Zauważmy, że $T_aM = \mathbb{R} \times \{0\}$. Niech $\widetilde{f}(x,y) := x^2 - y$. Oczywiście $\widetilde{f}$ jest przedłużeniem f, ale $\widetilde{f}''(a)((h_1,0),(h_2,0)) = 2h_1h_2$, $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$.

Lemat 10.14.20 (Lemat o jednoczesnej parametryzacji)**.** *Niech M będzie d–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$ w $\mathbb{R}^n$ i niech M' będzie d'–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$ w $\mathbb{R}^n$ taką, że $M' \subset M$. Wtedy*

(a) *$d' \leqslant d$;*

(b) *jeżeli $d' = d$, to M' jest podzbiorem otwartym w M;*

(c) *jeżeli $d' < d \leqslant n$, to dla dowolnego punktu $a \in M'$ istnieje lokalna parametryzacja $p : \Delta^d \longrightarrow U$ podrozmaitości M, $a \in U$, taka, że $p(0) = a$ i $p(\Delta^{d'} \times \{0\}^{d-d'}) = M' \cap U$* (48)*.*

W szczególności, jeżeli $d' \geqslant 1$, to odwzorowanie $\widetilde{p} : \Delta^{d'} \longrightarrow M' \cap U$, $\widetilde{p}(v) := p(v,0)$, jest lokalną parametryzacją dla M' (49)*.*

Dowód. Dla $d' = 0$ twierdzenie jest oczywiste. Załóżmy, że $d' \geqslant 1$. W szczególności, $d \geqslant 1$.

(a) Wobec Propozycji 10.14.15(ii) mamy: $T_aM' \subset T_aM$, $a \in M'$. Stąd $d' = \dim T_aM' \leqslant \dim T_aM = d$.

(b) Weźmy dowolny punkt $a \in M'$ i niech $p : P \longrightarrow U$, $q : Q \longrightarrow V$ będą parametryzacjami lokalnymi dla M i M' takimi, że $a \in U \cap V$ ($P, Q \in \operatorname{top} \mathbb{R}^d$). Możemy założyć, że $V = U \cap M'$. Rozważmy homeomorfizm $\varphi := p^{-1} \circ q : Q \longrightarrow p^{-1}(V)$. Na podstawie Obserwacji 10.14.12 jest to odwzorowanie klasy $\mathcal{C}^k$. Mamy $p \circ \varphi = q$. W szczególności, $p'(\varphi(u)) \circ \varphi'(u) = q'(u)$, skąd wynika, że $\operatorname{rank} \varphi'(u) = d$, $u \in Q$. Teraz, na podstawie np. twierdzenia o odwzorowaniu odwrotnym, $p^{-1}(V)$ jest podzbiorem otwartym w P, a więc $U \cap M'$ jest zbiorem otwartym w M.

(c) Weźmy dowolną parametryzację lokalną $p : P \longrightarrow U$ podrozmaitości M taką, że $a = p(t_0) \in U$. Niech $N := p^{-1}(M' \cap U)$. Zauważmy, że N jest d'–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$ w $\mathbb{R}^d$. Istotnie, dla dowolnego $u_0 \in N$, niech $q : Q \longrightarrow V$ będzie lokalną parametryzacją klasy $\mathcal{C}^k$ podrozmaitości M' i $p(u_0) \in V \subset M' \cap U$. Niech $\varphi := p^{-1} \circ q : Q \longrightarrow p^{-1}(V)$. Oczywiście, tak jak w (b), φ jest homeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$ i $p'(\varphi(u)) \circ \varphi'(u) = q'(u)$, $u \in Q$. Stąd $\operatorname{rank} \varphi'(u) = d'$, $u \in Q$. Tak więc φ jest lokalną parametryzacją podrozmaitości N w otoczeniu u_0.

Teraz, na podstawie Twierdzenia 10.14.3(iii) (zastosowanego do podrozmaitości N) istnieją zbiór otwarty $\Omega \in \operatorname{top} P$, $t_0 \in \Omega$, oraz $\mathcal{C}^k$–dyfeomorfizm $\Phi : \Omega \longrightarrow \Delta^d$ takie, że $\Phi(N \cap \Omega) = \Delta^{d'} \times \{0\}^{d-d'}$.

Poszukiwaną parametryzacją będzie: $p \circ \Phi^{-1} : \Delta^d \longrightarrow p(\Omega)$. □

Obecnie pokażemy następującą prostszą wersję twierdzenia o globalnej retrakcji.

Twierdzenie 10.14.21. *Dla dowolnej d–wymiarowej podrozmaitości M klasy $\mathcal{C}^k$ ($k \in \mathbb{N}_2 \cup \{\infty, \omega\}$) istnieje otoczenie otwarte $M \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ oraz globalna retrakcja $\pi : \Omega \longrightarrow M$ klasy $\mathcal{C}^{k-1}$ taka, że dla*

---

(46) W szczególności, $f'(a) \in \mathcal{L}(T_aM, T_{f(a)}M')$.

(47) Por. Twierdzenie 10.14.3(vi).

(48) Dla $d' = 0$ warunek ten oznacza, że $p(0) = M' \cap U$.

(49) Uwaga na warunek: $\operatorname{rank} \widetilde{p}'(v) = d'$, $v \in \Delta^{d'}$.

dowolnego $x \in \Omega$ mamy $\|x-\pi(x)\| = \operatorname{dist}(x, M)$, przy czy punkt $\pi(x)$ jest jedynym punktem realizującym tę odległość (norma i odległość są euklidesowe).

Dowód. Możemy założyć, że $1 \leqslant d \leqslant n-1$. Rozpocznijmy od elementarnej obserwacji, że dla $a \in M$ oraz $x \in \mathbb{B}(a,r)$ mamy $\operatorname{dist}(x, M) = \operatorname{dist}(x, M \cap \mathbb{B}(a, 3r))$ (Ćwiczenie). Pozwala to na lokalizację problemu. Ponadto, problem jest oczywiście niezmienniczy względem izometrii euklidesowych. Pozwala to dla dowolnego $a \in M$ na przejście do następującego zagadnienia lokalnego. Najpierw redukujemy sytuację do $a = 0$ oraz $T_aM = \mathbb{R}^d \times \{0\}^{n-d}$. Niech $p : P \longrightarrow U$ będzie dowolną lokalną parametryzacją, $0 \in P$, $p(0) = 0 \in U$. Warunek $p'(0)(\mathbb{R}^d) = \mathbb{R}^d \times \{0\}^{n-d}$ oznacza, że $\frac{\partial p_j}{\partial u_k}(0) = 0$, $j = d+1, \dots, n$, $k = 1, \dots, d$. Wynika stąd, że $\det[\frac{\partial p_j}{\partial u_k}(0)]_{j,k=1,\dots,d} \neq 0$. Wobec twierdzenia o odwzorowaniu odwrotnym, możemy więc założyć, że $\psi := (p_1, \dots, p_d) : P \longrightarrow Q$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$. Wtedy $q := p \circ \psi^{-1} : Q \longrightarrow U$ oraz $q(t) = (t, f(t))$, przy czym $f(0) = 0$ oraz $f'(0) = 0$ [50]. Ostatecznie więc mamy:

$M := \{(t, f(t)) : t \in \Delta^d(r)\}$, gdzie $\Delta^\ell(r) := (-r, r)^\ell \subset \mathbb{R}^\ell$, $f : \Delta^d(r) \longrightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ jest klasy $\mathcal{C}^k$ oraz $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$.

W konsekwencji, dla $x = (x', x'') \in \Delta^d(s) \times \Delta^{n-d}(s)$ przy $0 < s \ll 1$ mamy

$$\operatorname{dist}^2(x, M) = \min\{\|t - x'\|^2 + \|f(t) - x''\|^2 : t \in \Delta^d(r)\} =: \min\{g(x,t) : t \in \Delta^d(r)\}.$$

Jedynego punktu realizującego odległość będziemy szukać w postaci $(\varphi(x), f(\varphi(x)))$, gdzie $\varphi : \Delta^n(s) \longrightarrow \Delta^d(r)$ jest klasy $\mathcal{C}^{k-1}$ (wtedy będziemy mogli przyjąć $\pi(x) := (\varphi(x), f(\varphi(x)))$, $x \in \Delta^n(s)$, $0 < s \ll 1$). Zauważmy, że

$$\frac{\partial g}{\partial t_k}(x,t) = 2\Big(t_k - x_k + \sum_{j=1}^{n-d}(f_j(t) - x_{d+j})\frac{\partial f_j}{\partial t_k}(t)\Big) =: 2F_k(x,t), \quad k = 1, \dots, d.$$

Tak więc, w otoczeniu punktu $(0,0)$, $t = \varphi(x)$ powinno być jedynym rozwiązaniem układu równań $F_k(x,t) = 0$, $k = 1, \dots, d$. Oczywiście F_k jest klasy $\mathcal{C}^{k-1}$. Ponadto, $F(0,0) = 0$ oraz

$$\frac{\partial F_k}{\partial t_\ell}(x,t) = \delta_{k,\ell} + \sum_{j=1}^{n-d}\Big(\frac{\partial f_j}{\partial t_\ell}(t)\frac{\partial f_j}{\partial t_k}(t) + (f_j(t) - x_{d+j})\frac{\partial^2 f_j}{\partial t_\ell \partial t_k}(t)\Big).$$

W szczególności,

$$\Big[\frac{\partial F_k}{\partial t_\ell}(0,0)\Big]_{k,\ell=1,\dots,d} = \mathbb{I}_d.$$

W takim razie, na podstawie twierdzenia o odwzorowaniu uwikłanym, istnieją $0 < s_1, r_1 \ll 1$ oraz odwzorowanie $\varphi : \Delta^n(s_1) \longrightarrow \Delta^d(r_1)$ klasy $\mathcal{C}^{k-1}$ takie, że $t = \varphi(x)$ jest jedynym rozwiązaniem naszego układu dla $(x,t) \in \Delta^n(s_1) \times \Delta^d(r_1)$. Teraz wystarczy jeszcze tylko dobrać $0 < s < s_1$ tak by dla $x \in \Delta^n(s)$ było $\operatorname{dist}(x, M) = \operatorname{dist}(x, M \cap (\Delta^d(r_1) \times \mathbb{R}^{n-d}))$. $\square$

Przykład 10.14.22. Twierdzenie 10.14.21 nie jest prawdziwe dla $k = 1$. Niech $\theta \in (0,1)$,

$$M := \{(t, |t|^{1+\theta}) : t \in \mathbb{R}\};$$

M jest jednowymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$, przy czym $T_0M = \mathbb{R} \times \{0\}$ (Ćwiczenie). Pokażemy, że dla dowolnego $y > 0$ istnieje $t > 0$ takie, że

$$\operatorname{dist}^2((0,y), M) \leqslant \|(0,y) - (t, t^{1+\theta})\|^2 = t^2 + (y - t^{1+\theta})^2 < y^2 = \|(0,y) - (0,0)\|^2.$$

Oznacza to, że istnieją co najmniej dwa punkty rozmaitości M realizujące odległość. W konsekwencji ciągła retrakcja $\pi : \Omega \longrightarrow M$ (taka, jak w Twierdzeniu 10.14.21) nie może istnieć.

Istotnie, warunek $t^2 + (y - t^{1+\theta})^2 < y^2$ oznacza, że $y > \frac{1}{2}(t^{1-\theta} + t^{1+\theta})$, co pozwala zawsze dobrać t.

---

[50] Zauważmy, że nasza konstrukcja pokazuje, że lokalnie M jest wykresem nad afiniczną przestrzenią styczną $a+T_aM$ (dla dowolnego $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$).

10.15. Ekstrema warunkowe

Rozważmy następujący problem. Dane są: d–wymiarowa podrozmaitość $M \subset \mathbb{R}^n$ klasy $\mathcal{C}^k$ ($1 \leqslant d \leqslant n-1$), punkt $a \in M$ i funkcja $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, która jest k–krotnie różniczkowalna w punkcie a. Problem polega na znalezieniu (różniczkowych) warunków koniecznych i dostatecznych na to, by f miała w punkcie a ekstremum lokalne, zwane *ekstremum warunkowym*. Nazwa bierze się stąd, że ponieważ problem ma charakter lokalny, to możemy założyć (korzystając z Propozycji 10.14.10 i zmniejszając ewentualnie M), że $f = \widetilde{f}|_M$, gdzie $\widetilde{f} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $M \subset \Omega \in \operatorname{top} \mathbb{R}^n$ i $\widetilde{f}$ jest k–krotnie różniczkowalne w punkcie a, a zatem szukamy ekstremów lokalnych funkcji $\widetilde{f}$ przy warunku „punkt leży na M".

Obserwacja 10.15.1 (Warunek konieczny)**.** Jeżeli f ma w punkcie a ekstremum warunkowe, to $f'(a) = 0$.

Istotnie, niech $p : P \longrightarrow U$ będzie lokalną parametryzacją, $p(t_0) = a$. Wtedy $\widetilde{f} \circ p$ ma ekstremum lokalne w punkcie t_0, a zatem $f'(a) \circ p'(t_0) = 0$, co daje żądany wynik.

Twierdzenie 10.15.2 (Warunek dostateczny)**.** *Załóżmy, że dla pewnego $k \geqslant 2$ mamy:*

$$\widetilde{f}'(a) = 0 \text{ na } \mathbb{R}^n, \dots, \widetilde{f}^{(k-1)}(a) = 0 \text{ na } \mathbb{R}^n, \quad \widetilde{f}^{(k)}(a) \not\equiv 0 \text{ na } T_a M.$$

Wtedy:

(a) *jeżeli $\widetilde{f}^{(k)}(a)(X) > 0$ dla $X \in (T_a M)_*$* (51)*, to f ma w punkcie a silne minimum warunkowe;*

(b) *jeżeli $\widetilde{f}^{(k)}(a)(X) < 0$ dla $X \in (T_a M)_*$, to f ma w punkcie a silne maksimum warunkowe;*

(c) *jeżeli $\widetilde{f}^{(k)}(a)$ przyjmuje na $T_a M$ wartości różnych znaków* (52)*, to f nie ma w punkcie a lokalnego ekstremum warunkowego.*

Dowód. Niech $p : P \longrightarrow U$ będzie dowolną lokalną parametryzacją, $p(t_0) = a$. Niech $g := \widetilde{f} \circ p$. Musimy zbadać ekstremum lokalne (w sensie klasycznym) funkcji g w punkcie t_0. Ze wzoru na pochodną złożenia (Propozycja 10.7.3), dla $j = 1, \dots, k$, mamy

$$g^{(j)}(t_0)(Y) = (\widetilde{f} \circ p)^{(j)}(t_0)(Y) = \sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_j \in \mathbb{N}_0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + j\alpha_j = j}} \frac{j!}{\alpha_1! \cdots \alpha_j!}$$
$$\widetilde{f}^{(\alpha_1+\dots+\alpha_j)}(a)\Big(\underbrace{\frac{p'(t_0)(Y)}{1!}, \dots, \frac{p'(t_0)(Y)}{1!}}_{\alpha_1 \times}, \dots, \underbrace{\frac{p^{(j)}(t_0)(Y)}{j!}, \dots, \frac{p^{(j)}(t_0)(Y)}{j!}}_{\alpha_j \times}\Big), \quad Y \in \mathbb{R}^d,$$

co wobec naszych założeń daje

$$g^{(j)}(t_0) = 0, \quad j = 1, \dots, k-1,$$
$$g^{(k)}(t_0)(Y) = \widetilde{f}^{(k)}(a)(p'(t_0)(Y)), \quad Y \in \mathbb{R}^d.$$

Przypomnijmy, że $p'(t_0)(Y) \in (T_a M)_*$ dla $Y \in (\mathbb{R}^d)_*$, a zatem $g^{(k)}(t_0)$ zachowuje się (w sensie określoności) tak, jak $\widetilde{f}^{(k)}(a)$ na $T_a M$. Teraz wystarczy już tylko zastosować klasyczne twierdzenie o ekstremach lokalnych. □

Obserwacja 10.15.3. Niech $k = 2$. Zauważmy, że warunek $\widetilde{f}'(a) = 0$ nie może zostać zastąpiony warunkiem $f'(a) = 0$. Niech np. $n = 2$, $M := \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$, $a = (0,0)$, $f(x, x^2) := x^3$ (oczywiście f nie ma ekstremum warunkowego w punkcie a). Niech $\widetilde{f}(x,y) = x^2 - y + x^3$. Widać, że $\widetilde{f} = f$ na M. Ponadto, $f'(a) = 0$ na $T_a M = \mathbb{R} \times \{0\}$ i $\widetilde{f}''(a)((h,0)) = 2h^2$, $h \in \mathbb{R}$ (a więc spełniony jest warunek (a)).

Obserwacja 10.15.4. Z dowodu Twierdzenia 10.15.2 wynika, że odwzorowanie

$$\widetilde{f}^{(k)}(a)|_{(T_a M)^k}$$

nie zależy od wyboru rozszerzenia $\widetilde{f}$ (w klasie rozszerzeń spełniających założenia twierdzenia). Tak więc wystarczy zbadać określoność $\widetilde{f}^{(k)}(a)$ na $T_a M$ dla jednego ustalonego rozszerzenia $\widetilde{f}$ funkcji f takiego, że $\widetilde{f}^{(j)}(a) = 0$, $j = 1, \dots, k-1$ (k parzyste).

---

(51) W szczególności, k musi być parzyste.

(52) W szczególności, gdy k jest nieparzyste.

Patrząc na Twierdzenie 10.15.2 (i pamiętając o Obserwacji 10.15.3) widzimy, iż przeszkodą w stosowaniu Twierdzenia 10.15.2 będzie następująca sytuacja: Dla pewnego $1 \leqslant m \leqslant k$ znaleźliśmy rozszerzenie $\widetilde{f}$ takie, że:

- $\widetilde{f}$ jest k–krotnie różniczkowalne w punkcie a,
- $\widetilde{f}^{(j)}(a) = 0$, $j = 1, \dots, m-1$ (warunek ten jest pusty dla $m = 1$),
- $\widetilde{f}^{(m)}(a) \neq 0$,
- $\widetilde{f}^{(m)}(a) = 0$ na T_aM (dla $m = 1$ jest to po prostu warunek konieczny na ekstremum warunkowe).

Rozszerzenie takie na nic się nam nie przyda. Pytamy więc, czy możemy znaleźć inne rozszerzenie takie, że $\widetilde{f}^{(j)}(a) = 0$, $j = 1, \dots, m$. Jeżeli tak, to będziemy mieli pewną szansę, że Twierdzenie 10.15.2 rozstrzygnie o ekstremum.

Możemy zawsze założyć, że $M \cap \Omega = g^{-1}(0)$, gdzie $g \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^\ell)$ i $\operatorname{rank} g'(x) = n - d$, $x \in \Omega$. Zauważmy, że dla dowolnego odwzorowania $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_\ell) \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^\ell)$, odwzorowanie

$$\widetilde{f}_\varphi := \widetilde{f} - \varphi_1 g_1 - \dots - \varphi_\ell g_\ell$$

jest przedłużeniem f oraz, że jest ono k–krotnie różniczkowalne w punkcie a.

Propozycja 10.15.5 (Metoda mnożników Lagrange'a)**.** *Dla $m = 1$, jeżeli $f'(a) = 0$ na T_aM, to istnieje $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$ takie, że dla funkcji*

$$\widetilde{f}_\lambda := \widetilde{f} - \lambda_1 g_1 - \dots - \lambda_\ell g_\ell$$

spełniony jest związek $\widetilde{f}'_\lambda(a) = 0$ na $\mathbb{R}^n$ [53].

Liczby $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ noszą nazwę *mnożników Lagrange'a*.

Dowód. Przypomnijmy, że $T_aM = \operatorname{Ker} g'(a)$ (Propozycja 10.14.14). W tej sytuacji warunek $\widetilde{f}'(a) = 0$ na T_aM oznacza, że

$$\operatorname{Ker} g_1'(a) \cap \dots \cap \operatorname{Ker} g_\ell'(a) \subset \operatorname{Ker} \widetilde{f}'(a),$$

a to, na podstawie znanych wyników z algebry, implikuje istnienie λ (zob. dowód Twierdzenia 10.15.6). □

Obecnie udowodnimy przypadek ogólny.

Twierdzenie 10.15.6. *Dla dowolnego $2 \leqslant m \leqslant k$, jeżeli*

- *$\widetilde{f}$ jest k–krotnie różniczkowalne w punkcie a,*
- *$\widetilde{f}^{(j)}(a) = 0$, $j = 1, \dots, m-1$,*
- *$\widetilde{f}^{(m)}(a) = 0$ na T_aM,*

to istnieją wielomiany jednorodne $Q_1, \dots, Q_\ell \in \mathcal{H}^{m-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ takie, że dla odwzorowania

$$\widetilde{f}_Q(x) := \widetilde{f}(x) - \frac{1}{m!} \sum_{i=1}^{\ell} Q_i(x-a) g_i(x), \quad x \in \Omega,$$

mamy: $\widetilde{f}_Q^{(j)}(a) = 0$, $j = 1, \dots, m$.

Dowód. Na wstępie zauważmy, że dla dowolnych $Q_1, \dots, Q_\ell \in \mathcal{H}^{m-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, na podstawie wzoru Leibniza, mamy:

$$\widetilde{f}_Q^{(j)}(a)(h) = \widetilde{f}^{(j)}(a)(h) - \frac{1}{m!} \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{s=0}^{j} \binom{j}{s} Q_i^{(s)}(0)(h) g_i^{(j-s)}(a)(h), \quad h \in \mathbb{R}^n, \ j = 1, \dots, m.$$

Przypomnijmy, że $Q_i^{(s)} \in \mathcal{H}^{m-1-s}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$. W szczególności, mamy $Q_i^{(s)}(0) = 0$ dla $s = 0, \dots, m-2$. Z drugiej strony $g_i(a) = 0$. Tak więc dla $j = 1, \dots, m-1$, otrzymujemy $\widetilde{f}_Q^{(j)}(a)(h) = 0$. Wiemy, że $Q_i^{(m-1)}(0) = (m-1)! Q_i$. Stąd dla $j = m$ mamy:

$$\widetilde{f}_Q^{(m)}(a)(h) = \widetilde{f}^{(m)}(a)(h) - \frac{1}{m!} \sum_{i=1}^{\ell} \binom{m}{m-1} Q_i^{(m-1)}(0)(h) g_i'(a)(h) = \widetilde{f}^{(m)}(a)(h) - \sum_{i=1}^{\ell} Q_i(h) g_i'(a)(h),$$

---

[53] A więc dla $m = 1$ nasza procedura nie zacina się i jako odwzorowanie φ można wybrać odwzorowanie stałe $\varphi \equiv \lambda$.

$h \in \mathbb{R}^n.$

Tak więc cały problem sprowadza się do doboru $Q_i \in \mathcal{H}^{m-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $i = 1, \dots, \ell$, w ten sposób by

$$\widetilde{f}^{(m)}(a)(h) = \sum_{i=1}^{\ell} Q_i(h) g_i'(a)(h), \quad h \in \mathbb{R}^n.$$

Ponieważ $W := \widetilde{f}^{(m)}(a) \in \mathcal{H}^m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ i $W = 0$ na T_aM, zatem wystarczy już tylko wykorzystać znane wyniki z algebry, aby stwierdzić, że W da się przedstawić w żądanej postaci. Możemy skorzystać np. z takiego rozumowania: Niech $L_1, \dots, L_{n-d}$ będzie dowolnym liniowo niezależnym podukładem układu $g_1'(a), \dots, g_\ell'(a)$. Wybierzmy d form liniowych $L_{n-d+1}, \dots, L_n$ w ten sposób, że odwzorowanie $L := (L_1, \dots, L_n) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ jest izomorfizmem. Niech $V := W \circ L^{-1}$. Wtedy $V \in \mathcal{H}^m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ i $V = 0$ na $\{0\}^{n-d} \times \mathbb{R}^d$. Oznacza to, że wielomian V można zapisać w postaci $V(x) = x_1 V_1(x) + \dots + x_{n-d} V_{n-d}(x)$, gdzie $V_i \in \mathcal{H}^{m-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $i = 1, \dots, n-d$ (postać tę łatwo uzyskać przez zwykłe grupowanie wyrazów z wykorzystaniem warunku $V(0, \dots, 0, x_{n-d+1}, \dots, x_n) \equiv 0$). Zdefiniujmy $Q_i := V_i \circ L$, $i = 1, \dots, n-d$. Ostatecznie $W = Q_1 L_1 + \dots + Q_{n-d} L_{n-d}$. $\square$

Przykład 10.15.7. Niech

$$M := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + \dots + x_n = c,\ x_1, \dots, x_n > 0\},$$

gdzie $n \geqslant 2$ i $c > 0$ jest ustaloną stałą (M jest $(n-1)$–wymiarową podrozmaitością w $\mathbb{R}^n$). Niech dalej $\widetilde{f}(x_1, \dots, x_n) := x_1 \cdots x_n$.

Zadanie: znaleźć ekstrema warunkowe $\widetilde{f}$ na M.

Stosujemy metodę mnożników Lagrange'a. Niech

$$\widetilde{f}_\lambda(x) := \widetilde{f}(x) - \lambda(x_1 + \dots + x_n - c).$$

Punkt podejrzany o ekstremum warunkowe, to punkt $a \in M$ taki, że

$$\frac{\partial \widetilde{f}_\lambda}{\partial x_j}(a) = \prod_{k \neq j} a_k - \lambda = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Dostajemy stąd łatwo $a = (c/n, \dots, c/n)$ i $\lambda = (c/n)^{n-1}$. Teraz przechodzimy do badania zachowania się $\widetilde{f}_\lambda''(a)$ na T_aM. Oczywiście

$$T_aM = \{(X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n : X_1 + \dots + X_n = 0\},$$

zaś

$$\widetilde{f}_\lambda''(a)(X) = \sum_{j \neq k} \Big(\frac{c}{n}\Big)^{n-2} X_j X_k, \quad X \in \mathbb{R}^n.$$

Wynika stąd, że

$$\widetilde{f}_\lambda''(a)(X) = -\Big(\frac{c}{n}\Big)^{n-2} \|X\|^2 < 0, \quad X \in (T_aM)_*,$$

a więc $\widetilde{f}$ ma w punkcie a maksimum warunkowe, czyli

$$x_1 \cdots x_n \leqslant \Big(\frac{c}{n}\Big)^n = \Big(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\Big)^n, \quad x_1, \dots, x_n \geqslant 0.$$

10.16. Średnia uogólniona

Ustalmy $n \in \mathbb{N}_2$ oraz liczby $a_1, \dots, a_n, t_1, \dots, t_n > 0$ takie, że $a_1, \dots, a_n$ są parami różne oraz $t_1 + \dots + t_n = 1$. Niech $a := (a_1, \dots, a_n)$, $t := (t_1, \dots, t_n)$. Rozważmy funkcję

$$\mathbb{R}_* \ni x \overset{S_{a,t}}{\longmapsto} \Big(t_1 a_1^x + \dots + t_n a_n^x\Big)^{1/x} \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Uwaga: Formalnie można zrezygnować z założenia, że $a_1, \dots, a_n$ są parami różne, ponieważ (poprzez zmianę n i $t_1, \dots, t_n$) zawsze można doprowadzić do sytuacji, w której bądź $n = 1$, bądź $a_1, \dots, a_n$ są parami różne.

Lemat 10.16.1. (a) $\lim\limits_{x \to +\infty} S_{a,t}(x) = \max\{a_1, \dots, a_n\} =: S_{a,t}(+\infty)$.

(b) $\lim\limits_{x \to 0} S_{a,t}(x) = a_1^{t_1} \cdots a_n^{t_n} =: S_{a,t}(0)$.

(c) $\lim\limits_{x \to -\infty} S_{a,t}(x) = \min\{a_1, \dots, a_n\} =: S_{a,t}(-\infty)$.

Dowód. (a) i (c) są elementarne (Ćwiczenie).

(b) Zauważmy, że $S_{a,t} = \exp(\varphi)$, gdzie $\varphi(x) := \frac{1}{x}\ln(t_1 a_1^x + \dots + t_n a_n^x)$. Granica $\lim_{x\to 0}\varphi(x)$ jest symbolem nieoznaczonym typu $\frac{0}{0}$. Stosujemy regułę d'Hôpitala

$$\lim_{x\to 0}\varphi(x) \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{t_1 a_1^x \ln a_1 + \dots + t_n a_n^x \ln a_n}{t_1 a_1^x + \dots + t_n a_n^x} = t_1\ln a_1 + \dots + t_n \ln a_n. \qquad \square$$

Definicja 10.16.2. Funkcję $S_{a,t} : \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ nazywamy *średnią uogólnioną liczb $a_1, \dots, a_n$ z wagami $t_1, \dots, t_n$*.

Obserwacja 10.16.3. W przypadku, gdy $t_1 = \dots = t_n := 1/n$, niech $S_a := S_{a,t}$. Wtedy dostajemy klasyczne średnie:

- $S_a(2) = \sqrt{\dfrac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}}$ = średnia kwadratowa;
- $S_a(1) = \dfrac{a_1 + \dots + a_n}{n}$ = średnia arytmetyczna;
- $S_a(0) = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$ = średnia geometryczna;
- $S_a(-1) = \dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}$ = średnia harmoniczna.

Uwaga: Definiując powyższe średnie rezygnujemy z założenia, że $a_j \neq a_k$ dla $j \neq k$.

Lemat 10.16.4. *Funkcja $S_{a,t} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest analityczna.*

Dowód. Przypomnijmy najpierw, że dla $c > 0$ funkcja $\mathbb{R} \ni x \longmapsto c^x = \exp(x \ln c)$ jest analityczna. Wynika stąd łatwo, że funkcja $\mathbb{R} \ni x \overset{\psi}{\longmapsto} \ln(t_1 a_1^x + \dots + t_n a_n^x)$ jest analityczna. Wiemy, że $\psi(0) = 0$. Wynika stąd natychmiast, że funkcja φ jest analityczna ($\varphi(0) := \psi'(0)$). Istotnie, jeżeli $\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k$, $|x| < r$, to $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^{k-1}$, $|x| < r$. Stąd, $S_{a,t} = \exp(\varphi)$ jest analityczna. $\square$

Propozycja 10.16.5. *Funkcja $S_{a,t}$ jest ściśle rosnąca.*

Dowód. Wystarczy udowodnić ścisłą monotoniczność funkcji φ. Mamy

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2}\ln(t_1 a_1^x + \dots + t_n a_n^x) + \frac{1}{x}\frac{t_1 a_1^x \ln a_1 + \dots + t_n a_n^x \ln a_n}{t_1 a_1^x + \dots + t_n a_n^x}.$$

Ustalmy $x \in \mathbb{R}$ i połóżmy $u_j = u_j(x) := a_j^x$, $j = 1, \dots, n$. Widzimy, że wystarczy pokazać, że

$$f(u_1, \dots, u_n) := -\ln(t_1 u_1 + \dots + t_n u_n) + \frac{t_1 u_1 \ln u_1 + \dots + t_n u_n \ln u_n}{t_1 u_1 + \dots + t_n u_n} \geqslant 0, \quad u_1, \dots, u_n > 0,$$

przy czym równość zachodzi wyłącznie dla $u_1 = \dots = u_n$.

Jest oczywiste, że $f(u, \dots, u) = 0$. Ustalmy liczbę $p > 0$ i rozważmy zbiór

$$M := \{(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}_{>0}^n : t_1 u_1 + \dots + t_n u_n = p\}.$$

Zauważmy, że dla $(u_1, \dots, u_n) \in M$ mamy

$$f(u_1, \dots, u_n) = h(u_1, \dots, u_n) := -\ln p + \frac{1}{p}(t_1 u_1 \ln u_1 + \dots + t_n u_n \ln u_n).$$

Wobec zależności $\lim_{\delta\to 0+}\delta\ln\delta = 0$, funkcja h przedłuża się do funkcji ciągłej $\widetilde{h}$ na zbiorze zwartym $\overline{M} = \{(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}_+^n : t_1 u_1 + \dots + t_n u_n = p\}$. Niech $u^0 = (u_1^0, \dots, u_n^0) \in \overline{M}$ będzie punktem, w którym $\widetilde{h}$ przyjmuje globalne minimum na $\overline{M}$. Wiemy, że $\widetilde{h}(u^0) \leqslant 0$. Rozważmy dwa przypadki:

(a) $u^0 \in M$: Stosujemy metodę mnożników Lagrange'a (do funkcji h z warunkiem $g(u_1, \dots, u_n) := t_1 u_1 + \dots + t_n u_n - p = 0$). Warunek Lagrange'a

$$\frac{\partial h}{\partial u_j}(u^0) - \lambda\frac{\partial g}{\partial u_j}(u^0) = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

daje

$$\frac{1}{p}(\ln u_j^0 + 1) - \lambda = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

a stąd $u_1^0 = \dots = u_n^0$, co oznacza, że $h(u^0) = 0$.

(b) $u^0 \in \overline{M} \setminus M$: Możemy założyć, że dla pewnego $1 \leqslant s \leqslant n-1$ mamy $u_1^0 > 0, \dots, u_s^0 > 0$, $u_{s+1}^0 = \dots = u_n^0 = 0$. Zauważmy, że $\widetilde{h}(u_1, \dots, u_s, 0, \dots, 0) = -\ln p + \frac{1}{p}(t_1 u_1 \ln u_1 + \dots + t_s u_s \ln u_s)$, $(u_1, \dots, u_s) \in M' := \{(u_1, \dots, u_s) \in \mathbb{R}_{>0}^s : t_1 u_1 + \dots + t_s u_s = p\}$. Stosując rozumowanie z (a) względem zmiennych $u_1, \dots, u_s$, wnioskujemy, że musi być $u_1^0 = \dots = u_s^0 = \frac{p}{t_1 + \dots + t_s}$. Wynika stąd, że $\widetilde{h}(u^0) = -\ln p + \frac{1}{p}(t_1 + \dots + t_s)\frac{p}{t_1 + \dots + t_s}\ln\frac{p}{t_1 + \dots + t_s} = -\ln(t_1 + \dots + t_s) > 0$ — sprzeczność.

Oznacza to, że globalne minimum funkcji h na M jest równe 0. Wobec rozumowania w (a), widzimy również, że jeżeli $u^0 \in M$ jest taki, że $h(u^0) = 0$, to $u_1^0 = \dots = u_n^0$. $\square$

Propozycja 10.16.6. *Istnieją liczby $x_\pm \in \mathbb{R}$ takie, że funkcja $S_{a,t}$ jest wypukła w przedziale $(-\infty, x_-)$ i wklęsła w $(x_+, +\infty)$.*

Dowód. Wiadomo, że $S''_{a,t} = S_{a,t}((\varphi')^2 + \varphi'')$. Obliczmy $\varphi''(x)$:

$$\varphi''(x) = \frac{2}{x^3}\ln(t_1a_1^x + \dots + t_na_n^x) - \frac{2}{x^2}\frac{t_1a_1^x\ln a_1 + \dots + t_na_n^x\ln a_n}{t_1a_1^x + \dots + t_na_n^x} + \frac{1}{x}\frac{t_1a_1^x\ln^2 a_1 + \dots + t_na_n^x\ln^2 a_n}{t_1a_1^x + \dots + t_na_n^x} - \frac{1}{x}\Big(\frac{t_1a_1^x\ln a_1 + \dots + t_na_n^x\ln a_n}{t_1a_1^x + \dots + t_na_n^x}\Big)^2.$$

Rozumowanie przy $x \longrightarrow -\infty$: Wystarczy pokazać, że $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3\varphi''(x) < 0$. Możemy założyć, że $a_1 < \dots < a_n$. Podstawmy $u_j = u_j(x) := a_j^x$ i $v_j = v_j(x) = u_j/u_1 = (a_j/a_1)^x$. Zauważmy, że $v_j(x) \longrightarrow 0$ gdy $x \longrightarrow -\infty$ dla $j = 2, \dots, n$. Dla $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n_{>0}$ niech

$$M(\xi) := t_1\xi_1 + \dots + t_n\xi_n,$$
$$P(\xi) := t_1\xi_1\ln\xi_1 + \dots + t_n\xi_n\ln\xi_n,$$
$$Q(\xi) := t_1\xi_1\ln^2\xi_1 + \dots + t_n\xi_n\ln^2\xi_n.$$

Zauważmy, że $M(v) \longrightarrow t_1$, $P(v) \longrightarrow 0$, $Q(v) \longrightarrow 0$ gdy $x \longrightarrow -\infty$. Mamy

$$\begin{aligned}
x^3\varphi''(x) &= 2\ln M(u) - 2\frac{P(u)}{M(u)} + \frac{Q(u)}{M(u)} - \Big(\frac{P(u)}{M(u)}\Big)^2\\
&= 2\ln M(v) - 2\ln u_1 - 2\frac{t_1v_1(\ln v_1 + \ln u_1) + \dots + t_nv_n(\ln v_n + \ln u_1)}{M(v)}\\
&+ \frac{t_1v_1(\ln v_1 + \ln u_1)^2 + \dots + t_nv_n(\ln v_n + \ln u_1)^2}{M(v)} - \Big(\frac{t_1v_1(\ln v_1 + \ln u_1) + \dots + t_nv_n(\ln v_n + \ln u_1)}{M(v)}\Big)^2\\
&= 2\ln M(v) + 2\ln u_1 - 2\frac{P(v)}{M(v)} - 2\ln u_1 + \frac{Q(v)}{M(v)} + 2\frac{P(v)}{M(v)}\ln u_1 + \ln^2 u_1 - \Big(\frac{P(v)}{M(v)} + \ln u_1\Big)^2\\
&= 2\ln M(v) - 2\frac{P(v)}{M(v)} + \frac{Q(v)}{M(v)} - \Big(\frac{P(v)}{M(v)}\Big)^2 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 2\ln t_1 < 0.
\end{aligned}$$

Rozumowanie przy $x \longrightarrow +\infty$: Wystarczy pokazać, że $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4((\varphi'(x))^2 + \varphi''(x)) = -\infty$. Możemy założyć, że $a_1 > \dots > a_n$. Tak, jak poprzednio definiujemy u_j, v_j, M, P, Q. Zauważmy, że $v_j(x) \longrightarrow 0$ gdy $x \longrightarrow +\infty$ dla $j = 2, \dots, n$, oraz $M(v) \longrightarrow t_1$, $P(v) \longrightarrow 0$, $Q(v) \longrightarrow 0$ gdy $x \longrightarrow +\infty$. Mamy

$$x^4((\varphi'(x))^2 + \varphi''(x)) = \Big(-\ln M(v) + \frac{P(v)}{M(v)}\Big)^2 + x\Big(2\ln M(v) - 2\frac{P(v)}{M(v)} + \frac{Q(v)}{M(v)} - \Big(\frac{P(v)}{M(v)}\Big)^2\Big) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ln^2 t_1 + (+\infty)\cdot(2\ln t_1) = -\infty. \qquad \square$$

Ćwiczenie* 10.16.7. Zbadać wypukłość funkcji $S_{a,t}$. Odnotujmy, że problem wypukłości funkcji $S_{a,t}$ jest wysoce nietrywialny. Dla przykładu, korzystając z pomocy komputera można łatwo, sprawdzić, że dla $n = 4$, $a_1 := 0.1635$, $a_2 := 4.7965$, $a_3 := 9.3668$, $a_4 := 1.7856$, $t_1 := 0.0455$, $t_2 := 0.1430$, $t_3 := 0.0007$, $t_4 := 0,8108$, mamy co najmniej 5 punktów przegięcia.

10.17. Orientacja

Niech E będzie d–wymiarową rzeczywistą przestrzenią wektorową ($1 \leqslant d < \infty$) i niech $\boldsymbol{B}(E)$ oznacza rodzinę wszystkich baz E. Dla dowolnych dwóch baz $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_d)$, $\boldsymbol{f} = (f_1, \dots, f_d) \in \boldsymbol{B}(E)$ niech $A = A(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})$ oznacza macierz przejścia od $\boldsymbol{e}$ do $\boldsymbol{f}$, tzn.

$$f_j = \sum_{k=1}^d A_{k,j}e_k, \quad j = 1, \dots, d.$$

Oczywiście

$$A(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}) = \mathrm{id}, \quad A(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}) = A(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})^{-1}, \quad A(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{g}) = A(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}) \cdot A(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}).$$

W zbiorze $\boldsymbol{B}(E)$ wprowadzamy relację $\boldsymbol{e} \sim \boldsymbol{f} :\Longleftrightarrow \det A(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}) > 0$. Jest to relacja równoważnościowa. Niech $\mathcal{O}(E) := \boldsymbol{B}(E)/\sim$. Każdą klasę równoważności z $\mathcal{O}(E)$ nazywamy *orientacją* E.

Dla bazy $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_d)$ niech $\widehat{\boldsymbol{e}} := (-e_1, e_2, \dots e_d)$. Zauważmy, że $A(\boldsymbol{e}, \widehat{\boldsymbol{e}})$ różni się od macierzy jednostkowej tym, że ma -1 na miejscu $(1, 1)$. W szczególności, $\det A(\boldsymbol{e}, \widehat{\boldsymbol{e}}) = -1 < 0$, a więc $\boldsymbol{e} \not\sim \widehat{\boldsymbol{e}}$, czyli $[\boldsymbol{e}]_\sim \neq [\widehat{\boldsymbol{e}}]_\sim$. Ponadto, dla dowolnej bazy $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{B}(E)$ albo $\boldsymbol{f} \sim \boldsymbol{e}$ albo $\boldsymbol{f} \sim \widehat{\boldsymbol{e}}$. Oznacza to, że na E istnieją dokładnie dwie orientacje. Żadna z nich nie jest wyróżniona. Jeżeli ustalimy jedną, np. O, to drugą oznaczamy przez $-O$.

W przypadku gdy $E = \mathbb{R}^d$, możemy wyróżnić orientację wyznaczoną przez bazę kanoniczną. Orientację tę oznaczamy przez $[\mathbb{R}^d]_+$ i nazywamy *orientacją kanoniczną*. Niech $[\mathbb{R}^d]_- := -[\mathbb{R}^d]_+$. Dla

$$\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_d) \in \boldsymbol{B}(\mathbb{R}^d), \quad e_j = (e_{j,1}, \dots, e_{j,d}), \quad j = 1, \dots, d,$$

mamy: $[\boldsymbol{e}]_\sim = [\mathbb{R}^d]_+ \iff \det[e_{j,k}] > 0$.

Niech V będzie podprzestrzenią wektorową w $\mathbb{R}^n$, $\dim V = d$, $1 \leqslant d \leqslant n-1$. Niech $V^\perp := \{a \in \mathbb{R}^n : \forall_{x \in V} : \langle a, x\rangle = 0\}$, gdzie $\langle\ ,\ \rangle$ oznacza standardowy iloczyn skalarny. Przypomnijmy, że $V^\perp$ jest przestrzenią wektorową, $\dim V^\perp = n-d$ oraz $\mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp$.

Zauważmy, że mamy naturalne odwzorowanie

$$\Theta : \boldsymbol{B}(V) \times \boldsymbol{B}(V^\perp) \longrightarrow \boldsymbol{B}(\mathbb{R}^n)$$

dane wzorem

$$\Theta((e_1, \dots, e_d), (f_1, \dots, f_{n-d})) := (e_1, \dots, e_d, f_1, \dots, f_{n-d}).$$

Określmy nowe odwzorowanie $\Phi : \mathcal{O}(V) \longrightarrow \mathcal{O}(V^\perp)$ poprzez relację

$$\Phi([\boldsymbol{e}]_\sim) = [\boldsymbol{f}]_\sim :\iff [\Theta(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})]_\sim = [\mathbb{R}^n]_+.$$

Zauważmy, że

$$A(\Theta(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}), \Theta(\boldsymbol{e}', \boldsymbol{f}')) = \begin{bmatrix} A(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}') & 0 \\ 0 & A(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}') \end{bmatrix},$$

a więc Φ jest dobrze określone i injektywne. Ponadto, dla dowolnych $\boldsymbol{e} \in \boldsymbol{B}(V)$ i $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{B}(V^\perp)$ albo $\Phi([\boldsymbol{e}]_\sim) = [\boldsymbol{f}]_\sim$ albo $\Phi([\widehat{\boldsymbol{e}}]_\sim) = [\boldsymbol{f}]_\sim$, a więc Φ jest bijekcją. Będziemy krótko pisać $O^\perp := \Phi(O)$.

W tym sensie „zadać orientację V” to to samo, co „zadać orientację $V^\perp$”.

Niech teraz $L : \mathbb{R}^d \longrightarrow V$ będzie dowolnym izomorfizmem liniowym. Izomorfizm ten daje bijekcję

$$\boldsymbol{B}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \boldsymbol{B}(V), \quad L((e_1, \dots, e_d)) := (L(e_1), \dots, L(e_d)).$$

Odnotujmy, że $A(L(\boldsymbol{e}), L(\boldsymbol{f})) = A(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})$. Mamy więc bijekcję $L : \mathcal{O}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathcal{O}(V)$ (54). Zauważmy, że $L(-O) = -L(O)$. Ponadto, jeżeli $T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ jest izomorfizmem liniowym, to $(L \circ T)(O) = L(T(O))$, $O \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$.

Niech M będzie d-wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$ w $\mathbb{R}^n$.

Jeżeli $d = 0$, to przez *orientację* M rozumiemy dowolne odwzorowanie $O : M \longrightarrow \{-1, +1\}$.

Jeżeli $d \geqslant 1$, to przez *orientację* M rozumiemy dowolne odwzorowanie

$$M \ni x \overset{O}{\longmapsto} O(x) \in \mathcal{O}(T_x M)$$

takie, że dla dowolnego punktu $a \in M$ istnieje lokalna parametryzacja $p : P \longrightarrow U$, $a \in U$, taka, że $O(p(t)) = p'(t)([\mathbb{R}^d]_+)$, $t \in P$. W tej sytuacji mówimy, że parametryzacja $p : P \longrightarrow U$ jest *zgodna z orientacją* O.

Niech $\mathcal{O}(M)$ oznacza zbiór wszystkich orientacji M. Powiemy, że rozmaitość jest *orientowalna*, jeżeli $\mathcal{O}(M) \neq \varnothing$.

Dalej zajmować się będziemy jedynie przypadkiem $d \geqslant 1$.

Obserwacja 10.17.1. (a) Niech $p : P \longrightarrow U$, $q : Q \longrightarrow U$ będą dwiema parametryzacjami i niech $\varphi := p^{-1} \circ q : Q \longrightarrow P$. Wiadomo, że $\det \varphi'(u) \neq 0$, $u \in Q$. Niech $\varepsilon(u) := \operatorname{sgn}(\det \varphi'(u))$, $u \in Q$. Ponieważ $q = p \circ \varphi$, zatem

$$q'(u)([\mathbb{R}^d]_+) = p'(\varphi(u))(\varphi'(u)([\mathbb{R}^d]_+)) = p'(\varphi(u))(\varepsilon(u)[\mathbb{R}^d]_+) = \varepsilon(u) p'(\varphi(u))([\mathbb{R}^d]_+), \quad u \in Q.$$

(b) Dla dowolnej parametryzacji $p : P \longrightarrow U$ niech $\widehat{p} : \widehat{P} \longrightarrow U$ będzie dane wzorem: $\widehat{p} := p \circ \widehat{I}$, $\widehat{P} := \widehat{I}^{-1}(P)$, gdzie $\widehat{I} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $\widehat{I}(t) = \widehat{t} := (-t_1, t_2, \dots, t_d)$.

Widać, że $\widehat{p} : \widehat{P} \longrightarrow U$ jest również lokalną parametryzacją. Ponadto, na podstawie (a), jeżeli $p : P \longrightarrow U$ jest zgodna z O, to $\widehat{p}'(t)([\mathbb{R}^d]_+) = -p'(\widehat{t})([\mathbb{R}^d]_+) = -O(p(\widehat{t}))$, $t \in \widehat{P}$.

Wynika stąd, że $-O \in \mathcal{O}(M)$, gdzie $(-O)(x) := -O(x)$, $x \in M$.

(c) Jeżeli $p : P \longrightarrow U$ jest parametryzacją zgodną z O taką, że P jest obszarem, to, na podstawie (a), dowolna parametryzacja $q : Q \longrightarrow U$ jest zgodna albo z O albo z $-O$ (bowiem funkcja ε, jako funkcja ciągła o wartościach w $\{-1, +1\}$, jest stała).

Niech $\mathcal{A} = (p_i : P_i \longrightarrow U_i)_{i \in I}$ będzie dowolnym *atlasem na* M. Jeżeli każda z parametryzacji $p_i : P_i \longrightarrow U_i$ jest zgodna z orientacją O, to mówimy, że atlas $\mathcal{A}$ jest *zgodny z* O.

Na podstawie Obserwacji 10.17.1(a) otrzymujemy bez trudu następujący wynik.

(54) Oznaczaną tą samą literą co odwzorowanie.

Propozycja 10.17.2. *Jeżeli $\mathcal{A} = (p_i : P_i \longrightarrow U_i)_{i\in I}$ jest atlasem zgodnym z orientacją O, to dla odwzorowań przejścia*

$$\varphi_{i,j} := p_i^{-1} \circ p_j : p_j^{-1}(U_i \cap U_j) \longrightarrow p_i^{-1}(U_i \cap U_j)$$

mamy:

$$\det \varphi_{i,j}'(u) > 0, \quad u \in p_j^{-1}(U_i \cap U_j), \quad i, j \in I. \tag{†}$$

Propozycja 10.17.3. *Niech $\mathcal{A} = (p_i : P_i \longrightarrow U_i)_{i\in I}$ będzie atlasem na M takim, że dla wszystkich odwzorowań przejścia*

$$\varphi_{i,j} := p_i^{-1} \circ p_j : p_j^{-1}(U_i \cap U_j) \longrightarrow p_i^{-1}(U_i \cap U_j)$$

mamy (†). Wtedy na M istnieje orientacja O taka, że atlas $\mathcal{A}$ jest zgodny z O.

Oznacza to, że „zadać orientację M" to to samo, co „zadać atlas spełniający (†)". Takie atlasy będziemy nazywać *orientującymi*.

Dowód. Niech $O(x) := p_i'(p_i^{-1}(x))([\mathbb{R}^d]_+)$ o ile $x \in U_i$. Jedyny problem to poprawność definicji. Przypuśćmy, że $x \in U_i \cap U_j$ i $x = p_i(t) = p_j(u)$, zatem $t = \varphi_{i,j}(u)$. Wtedy

$$p_j'(u)([\mathbb{R}^d]_+) = p_i'(\varphi_{i,j}(u))(\varphi_{i,j}'(u)([\mathbb{R}^d]_+)) = p_i'(t)([\mathbb{R}^d]_+). \qquad \square$$

Propozycja 10.17.4. *Jeżeli M jest podrozmaitością spójną i orientowalną, to na M istnieją dokładnie dwie różne orientacje.*

W szczególności, jeżeli M ma s składowych spójnych i jest orientowalna, to na M istnieje dokładnie 2^s różnych orientacji.

Dowód. Niech O będzie ustaloną orientacją M. Wtedy $-O$ jest również orientacją i $-O \neq O$. Pozostaje pokazać, że dla każdej innej orientacji O' mamy albo $O' = O$ albo $O' = -O$. Niech

$$M_+ := \{x \in M : O'(x) = O(x)\}, \quad M_- := \{x \in M : O'(x) = -O(x)\}.$$

Oczywiście $M_+ \cap M_- = \varnothing$ i $M = M_+ \cup M_-$. Na podstawie Obserwacji 10.17.1(a) oba te zbiory są otwarte. Stąd, wobec spójności, albo $M_+ = M$ albo $M_- = M$. $\square$

Propozycja 10.17.5. *Jeżeli $d = 1$, to M jest orientowalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje odwzorowanie ciągłe $\boldsymbol{s} : M \longrightarrow \mathbb{S}_{n-1}$ takie, że $\boldsymbol{s}(x) \in T_xM$, $x \in M$.*

Ponadto, dla dowolnej orientacji O rozmaitości M istnieje odwzorowanie ciągłe $\boldsymbol{s} : M \longrightarrow \mathbb{S}_{n-1}$ takie, że $\boldsymbol{s}(x) \in T_xM$ i $O(x) = [\boldsymbol{s}(x)]_\sim$, $x \in M$.

W powyższej sytuacji mówimy, że $\boldsymbol{s}$ jest *orientującym polem wektorów stycznych*.

Można pokazać, że dowolna jednowymiarowa podrozmaitość jest orientowalna. Z tego też powodu, powyższa propozycja nie stanowi, w gruncie rzeczy, kryterium na orientowalność, ale daje jedynie opis orientacji.

Dowód. Niech O będzie pewną orientacją na podrozmaitości M. Jeżeli $\mathcal{A} = (p_i : P_i \longrightarrow U_i)_{i\in I}$ jest atlasem zgodnym z O, to definiujemy

$$\boldsymbol{s}(x) := \operatorname{wersor}(p_i'(p_i^{-1}(x))) \quad \text{gdy } x \in U_i.$$

Jedyny problem to, czy definicja jest poprawna. Rozumujemy lokalnie: jeżeli $p : P \longrightarrow U$ i $q : Q \longrightarrow U$ są parametryzacjami zgodnymi z O oraz $q = p \circ \varphi$, to (korzystając z tego, że $\varphi'(u) > 0$, $u \in Q$) mamy:

$$\operatorname{wersor}(q'(u)) = \operatorname{wersor}(p'(\varphi(u))\varphi'(u)) = \operatorname{wersor}(p'(\varphi(u))).$$

W drugą stronę: kładziemy $O(x) := [\boldsymbol{s}(x)]_\sim \in \mathcal{O}(T_xM)$, $x \in M$. Trzeba sprawdzić, że O jest orientacją. Ustalmy punkt $a \in M$ oraz dowolną parametryzację $p : P \longrightarrow U$, $a = p(t_0)$, taką, że P jest przedziałem i $p'(t_0)([\mathbb{R}]_+) = O(a)$ (taka parametryzacja zawsze istnieje — pamiętajmy, że możemy zastąpić wyjściową parametryzację przez $\widehat{p} : \widehat{P} \longrightarrow U$). Mamy

$$\boldsymbol{s}(p(t)) = \varepsilon(t) \operatorname{wersor}(p'(t)), \quad t \in P,$$

gdzie $\varepsilon : P \longrightarrow \{-1, +1\}$ jest funkcją ciągłą (bo $\boldsymbol{s}$ jest odwzorowaniem ciągłym) i $\varepsilon(t_0) = +1$. Zatem $\varepsilon \equiv +1$, co kończy dowód. $\square$

Propozycja 10.17.6. *Jeżeli $d = n-1$, to M jest orientowalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje odwzorowanie ciągłe $\boldsymbol{n} : M \longrightarrow \mathbb{S}_{n-1}$ takie, że $\boldsymbol{n}(x) \in (T_xM)^\perp$, $x \in M$.*

Ponadto, dla dowolnej orientacji O rozmaitości M istnieje odwzorowanie ciągłe $\boldsymbol{n} : M \longrightarrow \mathbb{S}_{n-1}$ takie, że $\boldsymbol{n}(x) \in (T_xM)^\perp$ i $O(x) = ([\boldsymbol{n}(x)]_\sim)^\perp$, $x \in M$.

W powyższej sytuacji mówimy, że $\boldsymbol{n}$ jest *orientującym polem wektorów normalnych.*

Przypadek podrozmaitości wymiaru $2 \leqslant d \leqslant n-2$ zostanie scharakteryzowany w Obserwacji 13.2.6.

Dowód. Niech O będzie pewną orientacją na M. Ustalmy $x \in M$. Zauważmy, że układ warunków: $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 1$, $v \perp T_xM$ i $([v]_\sim)^\perp = O(x)$ wyznacza jednoznacznie wektor v. Kładziemy $\boldsymbol{n}(x) := v$. Pozostaje sprawdzić ciągłość odwzorowania $x \longmapsto \boldsymbol{n}(x)$. Ustalmy punkt $a \in M$ oraz parametryzację $p : P \longrightarrow U$, $a = p(t_0)$, zgodną z O. Zauważmy, że dla $t \in P$ wektor $v = \boldsymbol{n}(p(t))$ jest wyznaczony (jednoznacznie) przez układ warunków (55):

$$v \in \mathbb{R}^n, \quad \|v\| = 1, \quad v \perp T_{p(t)}M, \quad \det\Big[v, \frac{\partial p}{\partial t_1}(t), \dots, \frac{\partial p}{\partial t_{n-1}}(t)\Big] > 0.$$

Niech teraz $t_\nu \longrightarrow t_0$ i przypuśćmy, że $v_\nu := \boldsymbol{n}(p(t_\nu)) \longrightarrow v_0$. Wtedy v_0 spełnia powyższy układ z $t = t_0$, a więc $v_0 = \boldsymbol{n}(p(t_0))$.

W drugą stronę: kładziemy $O(x) := ([\boldsymbol{n}(x)]_\sim)^\perp \in \mathcal{O}(T_xM)$, $x \in M$. Trzeba sprawdzić, że O jest orientacją. Ustalmy punkt $a \in M$ oraz dowolną parametryzację $p : P \longrightarrow U$, $a = p(t_0)$, taką, że P jest obszarem i $p'(t_0)([\mathbb{R}^{n-1}]_+) = O(a)$. Mamy $p'(t)([\mathbb{R}^{n-1}]_+) = \varepsilon(t)O(p(t))$, $t \in P$, gdzie $\varepsilon : P \longrightarrow \{-1, +1\}$ i $\varepsilon(t_0) = +1$. Pozostaje wykazać, że ε jest funkcją ciągłą. W tym celu wystarczy tylko zauważyć, że wprost z definicji $([\boldsymbol{n}(x)]_\sim)^\perp$ mamy:

$$\varepsilon(t) = \operatorname{sgn}\Big(\det\Big[\boldsymbol{n}(p(t)), \frac{\partial p}{\partial t_1}(t), \dots, \frac{\partial p}{\partial t_{n-1}}(t)\Big]\Big), \quad t \in P. \qquad \square$$

Uwaga 10.17.7. Niech $a_j \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, n-1$. Z wektorów tych utwórzmy $(n-1) \times n$–wymiarową macierz A poprzez ustawienie ich jako wiersze

$$A := \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Dla $k \in \{1, \dots, n\}$ niech A_k oznacza podmacierz macierzy A powstałą poprzez opuszczenie k-tej kolumny:

$$A_k := \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,k-1} & a_{n-1,k+1} & \dots & a_{n-1,n} \end{bmatrix}.$$

Niech $v_k := (-1)^{k+1} \det A_k$, $v = (v_1, \dots, v_n)$. Zauważmy, że wektory $a_1, \dots, a_{n-1}$ są liniowo zależne wtedy i tylko wtedy, gdy $v = 0$.

Dla $j \in \{1, \dots, n-1\}$ niech B_j oznacza $n \times n$–wymiarową macierz

$$B_j := \begin{bmatrix} a_j \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Stosując do tej macierzy rozwinięcie Laplace'a (56) (względem pierwszego wiersza) wnioskujemy, że:

$$\langle v, a_j \rangle = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{j,k} \det A_k = \det B_j = 0,$$

tak więc $v \perp a_j$, $j = 1, \dots, n-1$. Dalej mamy:

$$\det[v, a_1, \dots, a_{n-1}] = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} v_k \det A_k = \sum_{k=1}^n (\det A_k)^2 = \|v\|^2.$$

(55) Uwaga: jeżeli $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 1$, $v \perp T_{p(t)}M$, to $\det\big[v, \frac{\partial p}{\partial t_1}(t), \dots, \frac{\partial p}{\partial t_{n-1}}(t)\big] \neq 0$.

(56) Pierre Simon de Laplace (1749–1827).

Wektor v nazywamy *iloczynem wektorowym* wektorów $a_1, \dots, a_{n-1}$ i oznaczamy $a_1 \times \dots \times a_{n-1}$. Zauważmy, że operacja

$$(\mathbb{R}^n)^{n-1} \ni (a_1, \dots, a_{n-1}) \longmapsto a_1 \times \dots \times a_{n-1} \in \mathbb{R}^n$$

jest $(n-1)$–liniowa.

Jeżeli układ $(a_1, \dots, a_{n-1})$ jest bazą pewnej podprzestrzeni E przestrzeni $\mathbb{R}^n$, wyznaczającą na E orientację O, to $([v]_\sim)^\perp = O$.

W szczególności, w sytuacji opisanej w Propozycji 10.17.6 mamy:

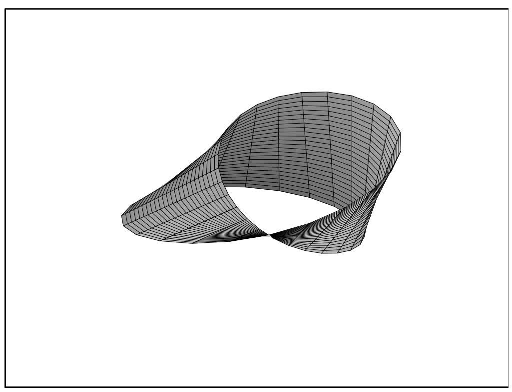
$$\boldsymbol{n}(p(t)) = \text{wersor}\Big(\frac{\partial p}{\partial t_1}(t) \times \dots \times \frac{\partial p}{\partial t_{n-1}}(t)\Big),$$

czyli

$$\boldsymbol{n}_k \circ p = \frac{(-1)^{k+1}\frac{\partial(p_1,\dots,p_{k-1},p_{k+1},\dots,p_n)}{\partial(t_1,\dots,t_{n-1})}}{\Big(\sum\limits_{j=1}^{n}\big(\frac{\partial(p_1,\dots,p_{j-1},p_{j+1},\dots,p_n)}{\partial(t_1,\dots,t_{n-1})}\big)^2\Big)^{1/2}} = \frac{(-1)^{k+1}\frac{\partial(p_1,\dots,p_{k-1},p_{k+1},\dots,p_n)}{\partial(t_1,\dots,t_{n-1})}}{|p'|}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (^{57})$$

Obserwacja 10.17.8. Istnieją podrozmaitości nieorientowalne, np. *wstęga Möbiusa* $(^{58})$:
$M := p((-1,1) \times [0, 2\pi])$, gdzie $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $p(t,u) := \big((2 + t\cos\frac{u}{2})\cos u, (2 + t\cos\frac{u}{2})\sin u, t\sin\frac{u}{2}\big)$.
Mamy

$$p'(t,u) = \begin{bmatrix} \cos\frac{u}{2}\cos u, & -2\sin u - t(\frac{1}{2}\sin\frac{u}{2}\cos u + \cos\frac{u}{2}\sin u) \\ \cos\frac{u}{2}\sin u, & 2\cos u - t(\frac{1}{2}\sin\frac{u}{2}\sin u - \cos\frac{u}{2}\cos u) \\ \sin\frac{u}{2}, & \frac{1}{2}t\cos\frac{u}{2} \end{bmatrix}.$$



Wstęga Möbiusa.

Zauważmy, że

$$\frac{\partial p}{\partial t}(t,u) \times \frac{\partial p}{\partial u}(t,u) = \Big(\begin{vmatrix} \cos\frac{u}{2}\sin u, & 2\cos u - t(\frac{1}{2}\sin\frac{u}{2}\sin u - \cos\frac{u}{2}\cos u) \\ \sin\frac{u}{2}, & \frac{1}{2}t\cos\frac{u}{2} \end{vmatrix},$$
$$- \begin{vmatrix} \cos\frac{u}{2}\cos u, & -2\sin u - t(\frac{1}{2}\sin\frac{u}{2}\cos u + \cos\frac{u}{2}\sin u \\ \sin\frac{u}{2}, & \frac{1}{2}t\cos\frac{u}{2} \end{vmatrix},$$
$$\begin{vmatrix} \cos\frac{u}{2}\cos u, & -2\sin u - t(\frac{1}{2}\sin\frac{u}{2}\cos u + \cos\frac{u}{2}\sin u \\ \cos\frac{u}{2}\sin u, & 2\cos u - t(\frac{1}{2}\sin\frac{u}{2}\sin u - \cos\frac{u}{2}\cos u \end{vmatrix} \Big)$$
$$= \Big(-2\sin\frac{u}{2}\cos u + \frac{t}{2}\sin u(1 - \cos u), -2\sin\frac{u}{2}\sin u - \frac{t}{2}(\cos u + \sin^2 u), 2\cos\frac{u}{2} + t\cos^2\frac{u}{2}\Big).$$

Stąd

$$\Big\|\frac{\partial p}{\partial t}(t,u) \times \frac{\partial p}{\partial u}(t,u)\Big\| = 4 + 4t\cos\frac{u}{2} + t^2\Big(\frac{1}{4} + \cos^2\frac{u}{2}\Big).$$

$(^{57})$ Przypomnijmy, że

$$\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(t_1, \dots, t_n)} := \det\Big[\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k}\Big]_{j,k=1,\dots,n}.$$

$(^{58})$ August Möbius (1790–1868).

W szczególności, $\|\frac{\partial p}{\partial t}(t,u) \times \frac{\partial p}{\partial u}(t,u)\| > 0$, $-1 < t < 1$, $0 \leqslant u \leqslant 2\pi$.

Wynika stąd w szczególności, że M jest 2–wymiarową podrozmaitością w $\mathbb{R}^3$ klasy $\mathcal{C}^\infty$ (por. Twierdzenie 10.14.6). Dla $t = 0$ dostajemy

$$\boldsymbol{N}(p(0,u)) = \boldsymbol{N}(2\cos u, 2\sin u, 0) := \text{wersor}\Big(\frac{\partial p}{\partial t}(0,u) \times \frac{\partial p}{\partial u}(0,u)\Big) = \Big(-\sin\frac{u}{2}\cos u, -\sin\frac{u}{2}\sin u, \cos\frac{u}{2}\Big).$$

Zauważmy, że $(2,0,0) = p(0,0) = p(0,2\pi)$, ale $\boldsymbol{N}(p(0,0)) = (0,0,1)$, zaś $\boldsymbol{N}(p(0,2\pi)) = (0,0,-1)$. Oznacza to, że nie istnieje ciągłe pole wersorów normalnych $M \supset p(\{0\}\times[0,2\pi]) \ni (x,y,z) \longmapsto \boldsymbol{n}(x,y,z)$, a więc, na podstawie Propozycji 10.17.6, M nie jest orientowalna.

Obserwacja 10.17.9. Załóżmy, że M jest d–wymiarową orientowalną podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$ w $\mathbb{R}^n$ i niech $D \subset M$ będzie obszarem (w sensie topologii indukowanej) takim, że $\operatorname{int}_M(\operatorname{cl}_M D) = D$, tzn. D jest *tłusty* (cały czas w sensie topologii indukowanej). Załóżmy dalej, że $\partial_M D =: M'$ jest $(d-1)$–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$ w $\mathbb{R}^n$. Ustalmy pewną orientację $O \in \mathcal{O}(M)$. Pokażemy, że orientacja ta indukuje w sposób naturalny pewną orientację O' rozmaitości M'.

Postępujemy następująco: ustalmy punkt $a \in M'$. Na podstawie Lematu 10.14.20, istnieje parametryzacja $p : P \longrightarrow U$ podrozmaitości M, $a \in U$, taka, że P jest otwartą kostką w $\mathbb{R}^d$ i jeżeli $\widetilde{P} := \operatorname{pr}_{\mathbb{R}^{d-1}}(P)$, to $\{0\} \times \widetilde{P} \subset P$ i $p(\{0\} \times \widetilde{P}) = M' \cap U$. Dla $d = 1$ oznacza to, że $P \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem otwartym, $0 \in P$ i $\{p(0)\} = M' \cap U$.

Na wstępie rozważymy przypadek $d \geqslant 2$. Zbiór $\{0\} \times \widetilde{P}$ dzieli P na dwie składowe spójne $P_- := P \cap \{t_1 < 0\}$ i $P_+ := P \cap \{t_1 > 0\}$. Ponieważ p jest homeomorfizmem, zatem $M' \cap U$ dzieli U na dwie składowe $V_\pm := p(P_\pm)$. Każdy punkt składowej $V_\pm$ należy albo do $D_- := D \cap U$ albo do $D_+ := (M \setminus \operatorname{cl}_M D) \cap U$. Zauważmy, że tłustość zbioru gwarantuje, że $D_+ \neq \varnothing$. Wobec spójności, oznacza to, że mamy jedną z dwóch możliwości:

(a) $V_- = D_-$ i $V_+ = D_+$,

(b) $V_- = D_+$ i $V_+ = D_-$: w tym przypadku zastępujemy wyjściową parametryzację przez parametryzację $t \longmapsto p(-t_1, t_2, \dots, t_d)$ i sprowadzamy sytuację do (a).

Tak więc możemy przyjąć, że $V_\pm = D_\pm$. Teraz, zastępując ewentualnie wyjściową parametryzację przez $t \longmapsto p(t_1, -t_2, t_3, \dots, t_d)$ (tu jest istotne, że $d \geqslant 2$), możemy założyć, że parametryzacja jest zgodna z O (wystarczy ją uzgodnić w jednym punkcie i skorzystać ze spójności P). Dostajemy w ten sposób pewną parametryzację $\widetilde{p} : \widetilde{P} \longrightarrow M' \cap U$, $\widetilde{p}(u) := p(0,u)$.

Przypuśćmy teraz, że analogiczną konstrukcję przeprowadziliśmy dla jakiejś innej parametryzacji $q : Q \longrightarrow U$, która spełnia te same warunki, co p i w efekcie konstrukcji dostaliśmy nową parametryzację $\widetilde{q} : \widetilde{Q} \longrightarrow M' \cap U$. Wiemy, że $q = p \circ \varphi$ i $\det \varphi'(u) > 0$, $u \in Q$ (bo obie parametryzacje są zgodne z O). Niech $\widetilde{\varphi} := \widetilde{p}^{-1} \circ \widetilde{q} : \widetilde{Q} \longrightarrow \widetilde{P}$. Pokażemy, że $\det \widetilde{\varphi}'(v) > 0$ dla $v \in \widetilde{Q}$. Mamy: $\widetilde{q}(v) = q(0,v) = p(\varphi(0,v)) = \widetilde{p}(\widetilde{\varphi}(v)) = p(0, \widetilde{\varphi}(v))$, a więc $\varphi_1(0,v) = 0$ i $\widetilde{\varphi}(v) = (\varphi_2(0,v), \dots, \varphi_d(0,v))$. Zauważmy, że $\varphi(Q_\pm) = P_\pm$, a stąd: $\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}(0,v) \geqslant 0$. Ponadto,

$$\varphi'(0,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}(0,v) & 0 \\ * & \widetilde{\varphi}'(v) \end{bmatrix},$$

a stąd

$$\det \varphi'(0,v) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}(0,v) \det \widetilde{\varphi}'(v),$$

co kończy dowód.

Oznacza to, że potrafimy skonstruować rodzinę lokalnych parametryzacji $(p_i : P_i \longrightarrow U_i)_{i \in I}$ zgodną z O taką, że rodzina

$$(\widetilde{p}_i : \widetilde{P}_i \longrightarrow M' \cap U_i)_{i \in I}$$

jest atlasem orientującym na M'. Atlas ten wprowadza na M' pewną orientację O'. Z konstrukcji wynika, że O' zależy wyłącznie od O. Orientację O' nazywamy *orientacją indukowaną przez O*.

Teraz przypadek $d = 1$. W tej sytuacji nie zajmujemy się uzyskaniem zgodności $V_\pm = D_\pm$, ale jedynie, poprzez ewentualną zamianę parametryzacji p na parametryzację $t \longmapsto p(-t)$, uzyskujemy zgodność parametryzacji z orientacją O. Mamy dwa możliwe przypadki:

(a) $V_- = D_-$ i $V_+ = D_+$: wtedy przyjmujemy $O'(p(0)) := +1$,

(b) $V_- = D_+$ i $V_+ = D_-$: wtedy przyjmujemy $O'(p(0)) := -1$.

Musimy jeszcze sprawdzić, że O' nie zależy od wyboru parametryzacji. Niech $q : Q \longrightarrow U$ będzie inną parametryzacją zgodną z O. Wiemy, że $q = p \circ \varphi$, $\varphi : Q \longrightarrow P$, $\varphi'(u) > 0$, $u \in Q$. Oznacza to, że $\varphi(P_\pm) = Q_\pm$, skąd od razu wynika, że (a) zachodzi dla p wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi dla q.

Ponownie uzyskaliśmy *orientację indukowaną przez* O na M'.

ROZDZIAŁ 11

Całka Riemanna

Zasadniczym celem rozdziału jest przeniesienie wyników przedstawionych w Rozdziale 7 na przypadek wielowymiarowy. Te dowody, które są prostym uogólnieniem przypadku jednowymiarowego pozostawiamy jako ĆWICZENIE.

11.1. Całka Riemanna na kostce

Definicja 11.1.1. *Kostką* (domkniętą) nazywamy dowolny zbiór postaci $P := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$, gdzie $a_j < b_j$, $j = 1, \dots, n$ (rozważamy tylko kostki niezdegenerowane). *Objętością* kostki P nazywamy liczbę $|P| := (b_1-a_1)\cdots(b_n-a_n)$; zauważmy, że $|P| > 0$ oraz, że $|x_0+P| = |P|$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. *Podziałem* kostki P nazywamy dowolną skończoną rodzinę kostek $\pi = \{P_1, \dots, P_m\}$ taką, że $P = P_1 \cup \dots \cup P_m$ oraz $\operatorname{int} P_j \cap \operatorname{int} P_k = \varnothing$ dla $j \neq k$; dla $n = 1$ podział kostki $P = [a, b]$ możemy utożsamiać z ciągiem $\pi = (x_0, \dots, x_m)$, gdzie $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$. *Podziałem prostym* kostki P nazywamy podział postaci $\{P_{k_1,\dots,k_n} : 1 \leqslant k_j \leqslant m_j,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$, gdzie $P_{k_1,\dots,k_n} = [x_{1,k_1-1}, x_{1,k_1}] \times \dots \times [x_{n,k_n-1}, x_{n,k_n}]$, zaś $(x_{j,0}, \dots, x_{j,m_j})$ jest podziałem $[a_j, b_j]$, $j = 1, \dots, n$. Podział ten składa się z $m_1 \cdots m_n$ kostek. Typowym przypadkiem jest sytuacja, gdy $x_{j,k} := a_j + (k/m_j)(b_j - a_j)$ (tzn. dzielimy krawędzie na równe części).

Niech $\pi_1 = \{P_1, \dots, P_m\}$, $\pi_2 = \{Q_1, \dots, Q_r\}$ będą podziałami kostki P. Powiemy, że π_2 *jest wpisany w* π_1 lub też, że π_2 *jest zagęszczeniem* π_1, jeżeli dla dowolnego $j \in \{1, \dots, m\}$ rodzina $\{Q_k : Q_k \subset P_j\}$ jest podziałem P_j; innymi słowy, jeżeli $\operatorname{int} P_j \cap \operatorname{int} Q_k \neq \varnothing$, to $Q_k \subset P_j$. W tej sytuacji piszemy $\pi_2 \preccurlyeq \pi_1$.

Średnicą podziału $\pi = \{P_1, \dots, P_m\}$ nazywamy liczbę $\operatorname{diam} \pi := \max\{\operatorname{diam} P_1, \dots, \operatorname{diam} P_m\}$.

Niech $(\pi_k)_{k=1}^{\infty}$ będzie ciągiem podziałów kostki P. Powiemy, że jest to *normalny ciąg podziałów*, jeżeli $\operatorname{diam} \pi_k \longrightarrow 0$.

Obserwacja 11.1.2. (a) Relacja $\preccurlyeq$ jest przechodnia.

(b) Dla dowolnych podziałów π_1, π_2 kostki P istnieje podział prosty π taki, że $\pi \preccurlyeq \pi_j$, $j = 1, 2$, tzn. π jest *wspólnym zagęszczeniem podziałów* π_1 *i* π_2.

(c) Dla dowolnego podziału $\pi = \{P_1, \dots, P_m\}$ mamy $|P| = |P_1| + \dots + |P_m|$.

Istotnie, najpierw sprawdzamy przypadek podziału prostego:

$$\sum_{k_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{m_n} |P_{k_1,\dots,k_n}| = \sum_{k_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{m_n} \prod_{j=1}^{n} (x_{j,k_j} - x_{j,k_j-1})$$
$$= \prod_{j=1}^{n} \sum_{k_j=1}^{m_j} (x_{j,k_j} - x_{j,k_j-1}) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j) = |P|.$$

Dla dowolnego podziału znajdujemy najpierw wpisany podział prosty $\pi' = \{Q_1, \dots, Q_r\}$, a następnie rozumujemy następująco: $|P| = \sum\limits_{k=1}^{r} |Q_k| = \sum\limits_{j=1}^{m} \sum\limits_{\substack{k \in \{1,\dots,r\}: \\ Q_k \subset P_j}} |Q_k| = \sum\limits_{j=1}^{m} |P_j|$.

Definicja 11.1.3. Niech $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją ograniczoną na kostce P. Zdefiniujmy:

$$m(f, P) := \inf f(P), \quad M(f, P) := \sup f(P).$$

Niech teraz $\pi = \{P_1, \dots, P_m\}$ będzie dowolnym podziałem kostki P. Połóżmy:

$$L(f, \pi) := \sum_{j=1}^{m} m(f, P_j)|P_j|, \quad U(f, \pi) := \sum_{j=1}^{m} M(f, P_j)|P_j|.$$

Liczbę $L(f,\pi)$ nazywamy *sumą aproksymacyjną dolną dla funkcji f przy podziale π*. Analogicznie, $U(f,\pi)$ nazywamy *sumą aproksymacyjną górną*. Czasami mówi się o *sumach Darboux*. Zauważmy, że

$$m(f,P)|P| \leqslant L(f,\pi) \leqslant U(f,\pi) \leqslant M(f,P)|P|.$$

Niech

$$\int_{*P} f := \sup_{\pi} L(f,\pi), \quad \int_P^* f := \inf_{\pi} U(f,\pi),$$

gdzie supremum i infimum bierzemy po wszystkich podziałach kostki P. Liczbę $\int_{*P} f$ nazywamy *całką dolną z funkcji f po kostce P*. Analogicznie, liczbę $\int_P^* f$ nazywamy *całką górną*.

Powiemy, że funkcja f jest *całkowalna w sensie Riemanna na kostce P* ($f \in \mathcal{R}(P)$), jeżeli $\int_{*P} f = \int_P^* f$. Wtedy wspólną wartość tych całek oznaczamy przez $\int_P f$ i nazywamy *całką Riemanna z funkcji f po kostce P*.

Niech teraz $\varphi : P \longrightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją ograniczoną. Powiemy, że φ *jest całkowalna w sensie Riemanna na P* ($\varphi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$), jeżeli $\operatorname{Re}\varphi, \operatorname{Im}\varphi \in \mathcal{R}(P)$. Kładziemy wtedy $\int_P \varphi := \int_P \operatorname{Re}\varphi + i\int_P \operatorname{Im}\varphi$ i nazywamy tę liczbę *całką Riemanna z funkcji φ po kostce P*.

Oczywiście każda funkcja stała $c \in \mathbb{C}$ jest całkowalna w sensie Riemanna i $\int_P c = c|P|$.

Przykład 11.1.4. Niech $f := \chi_{P\cap\mathbb{Q}^n}$. Przypomnijmy, że χ_A oznacza funkcję charakterystyczną zbioru $A \subset P$. Funkcję f nazywamy *funkcją Dirichleta* w kostce P. Wtedy $L(f,\pi) = 0$ oraz $U(f,\pi) = |P|$ dla dowolnego podziału π. Tak więc $\int_{*P} f = 0$ oraz $\int_P^* f = |P|$, czyli $f \notin \mathcal{R}(P)$.

Poniżej przedstawimy szereg (mniej lub bardziej elementarnych) własności całki Riemanna; $f,g : P \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi,\psi : P \longrightarrow \mathbb{C}$ oznaczają funkcje ograniczone, π, π_1, π_2 — podziały kostki P. Większość dowodów pozostawiamy jako Ćwiczenie — por. Obserwacja 7.1.5.

Obserwacja 11.1.5. (a) Dla dowolnego $c \in \mathbb{R}$ mamy: $L(f+c,\pi) = L(f,\pi)+c|P|$ oraz $U(f+c,\pi) = U(f,\pi)+c|P|$. Wynika stąd natychmiast, że $\int_{*P}(f+c) = \int_{*P} f + c|P|$ oraz $\int_P^*(f+c) = \int_P^* f + c|P|$. W szczególności, $f \in \mathcal{R}(P) \iff f+c \in \mathcal{R}(P)$ oraz $\int_P(f+c) = \int_P f + \int_P c$. Wynik przenosi się natychmiast na funkcje ograniczone $\varphi: P \longrightarrow \mathbb{C}$ i $c \in \mathbb{C}$: $\varphi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C}) \iff \varphi+c \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$ oraz $\int_P(\varphi+c) = \int_P \varphi + \int_P c$.

(b) Jeżeli $f \leqslant g$, to $L(f,\pi) \leqslant L(g,\pi)$ i $U(f,\pi) \leqslant U(g,\pi)$. W szczególności, $\int_{*P} f \leqslant \int_{*P} g$ oraz $\int_P^* f \leqslant \int_P^* g$. Jeżeli ponadto $f,g \in \mathcal{R}(P)$, to $\int_P f \leqslant \int_P g$ *(monotoniczność całki)*.

(c) $L(-f,\pi) = -U(f,\pi)$. W szczególności,
- $\int_{*P}(-f) = -\int_P^* f$,
- $\varphi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C}) \iff (-\varphi) \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$ oraz $\int_P(-\varphi) = -\int_P \varphi$,
- $\varphi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C}) \iff \overline{\varphi} \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$ i $\int_P \overline{\varphi} = \overline{\int_P \varphi}$.

(d) Jeżeli $\pi_1 \preccurlyeq \pi_2$, to $L(f,\pi_1) \geqslant L(f,\pi_2)$, $U(f,\pi_1) \leqslant U(f,\pi_2)$. W szczególności,
- $L(f,\pi_1) \leqslant U(f,\pi_2)$ dla dowolnych π_1, π_2,
- $\int_{*P} f \leqslant \int_P^* f$.

(e) $f \in \mathcal{R}(P) \iff \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\pi} : U(f,\pi) - L(f,\pi) \leqslant \varepsilon$.

(f) Dla każdego normalnego ciągu podziałów $(\pi_k)_{k=1}^{\infty}$ mamy: $L(f,\pi_k) \longrightarrow \int_{*P} f$, $U(f,\pi_k) \longrightarrow \int_P^* f$.

Ograniczymy się do sum górnych. Można założyć, że $f \geqslant 0$ (zastępując f przez $f+c$). Weźmy $\varepsilon > 0$ i niech $\pi = \{Q_1,\dots,Q_m\}$ będzie podziałem takim, że $U(f,\pi) - \int_P^* f \leqslant \varepsilon$. Niech $\pi_k = \{P_{k,1},\dots,P_{k,m_k}\}$. Wtedy

$$U(f,\pi_k) = \sum_{\substack{j\in\{1,\dots,m_k\}\\ \exists_{i\in\{1,\dots,m\}}:P_{k,j}\subset Q_i}} M(f,P_{k,j})|P_{k,j}| + \sum_{\substack{j\in\{1,\dots,m_k\}\\ \forall_{i\in\{1,\dots,m\}}:P_{k,j}\not\subset Q_i}} M(f,P_{k,j})|P_{k,j}| \leqslant U(f,\pi) + M(f,P)\eta_k,$$

gdzie

$$\eta_k := \sum_{\substack{j\in\{1,\dots,m_k\}\\ \forall_{i\in\{1,\dots,m\}}:\\ P_{k,j}\not\subset Q_i}} |P_{k,j}|, \quad k \geqslant 1.$$

Zauważmy, że $\eta_k \longrightarrow 0$. Istotnie, jeżeli $P_{k,j} \not\subset Q_i$, $i = 1,\dots,m$, to $P_{k,j}$ musi przecinać którąś ze ścian którejś z kostek $Q_1,\dots, Q_m$. Stąd $\eta_k \leqslant c \operatorname{diam}\pi_k$, $k \geqslant 1$, gdzie $c > 0$ jest pewną stałą (Ćwiczenie).

Ostatecznie
$$\int_P^* f \leqslant \liminf_{k\to+\infty} U(f,\pi_k) \leqslant \limsup_{k\to+\infty} U(f,\pi_k) \leqslant \int_P^* f + \varepsilon,$$
co, wobec dowolności $\varepsilon > 0$, kończy dowód.

Definicja 11.1.6. Niech $\pi = \{P_1,\dots,P_m\}$ będzie podziałem kostki P i niech $\xi = \{\xi_1,\dots,\xi_m\}$, $\xi_j \in P_j$, $j = 1,\dots,m$. Dla $\varphi : P \longrightarrow \mathbb{C}$, sumę
$$M(\varphi,\pi,\xi) := \sum_{j=1}^m \varphi(\xi_j)|P_j|$$
nazywamy *sumą aproksymacyjną pośrednią dla funkcji φ przy podziale π i punktach pośrednich ξ*. Czasami mówimy o *sumie Cauchy'ego–Riemanna*.

Obserwacja 11.1.7. (a) Jest rzeczą widoczną, iż:

(i) $M(\alpha\varphi + \beta\psi,\pi,\xi) = \alpha M(\varphi,\pi,\xi) + \beta M(\psi,\pi,\xi)$, $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$.

(ii) W szczególności, $M(\varphi,\pi,\xi) = M(\operatorname{Re}\varphi,\pi,\xi) + iM(\operatorname{Im}\varphi,\pi,\xi)$.

(iii) Ponadto, $|M(\varphi,\pi,\xi)| \leqslant M(|\varphi|,\pi,\xi)$.

(iv) Dla $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ mamy: $L(f,\pi) \leqslant M(f,\pi,\xi) \leqslant U(f,\pi)$.

(b) Następujące warunki są równoważne:

(i) $\varphi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$;

(ii) istnieje $c \in \mathbb{C}$ takie, że dla dowolnego normalnego ciągu podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ oraz dla dowolnego wyboru punktów pośrednich $(\xi_k)_{k=1}^\infty$ (1) mamy $M(\varphi,\pi_k,\xi_k) \longrightarrow c$ (2);

(iii) istnieje $c \in \mathbb{C}$ takie, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla dowolnego podziału π o średnicy $\leqslant \delta$ oraz dla dowolnego wyboru punktów pośrednich ξ mamy $|M(\varphi,\pi,\xi) - c| \leqslant \varepsilon$;

(iv) istnieje $c \in \mathbb{C}$ oraz normalny ciąg podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ takie, że dla dowolnego wyboru punktów pośrednich $(\xi_k)_{k=1}^\infty$, mamy $M(\varphi,\pi_k,\xi_k) \longrightarrow c$ (3).

(c) $\mathcal{R}(P,\mathbb{C})$ jest zespoloną przestrzenią wektorową, a operator $\mathcal{R}(P,\mathbb{C}) \ni \varphi \longmapsto \int_P \varphi \in \mathbb{C}$ jest $\mathbb{C}$–liniowy.

(d) Jeżeli $\psi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$ oraz $|\varphi(x') - \varphi(x'')| \leqslant |\psi(x') - \psi(x'')|$, $x', x'' \in P$, to $\varphi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$.

(e) Jeżeli $\varphi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$, to $|\varphi| \in \mathcal{R}(P)$ oraz $\left|\int_P \varphi\right| \leqslant \int_P |\varphi|$.

(f) Jeżeli φ, $\psi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$, to $\varphi \cdot \psi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$.

(g) Operator $\mathcal{R}(P,\mathbb{C}) \times \mathcal{R}(P,\mathbb{C}) \ni (\varphi,\psi) \overset{\Phi}{\longmapsto} \int_P \varphi\overline{\psi} \in \mathbb{C}$ jest semi-iloczynem skalarnym. W szczególności, na podstawie nierówności Schwarza, mamy $\left|\int_P \varphi\overline{\psi}\right|^2 \leqslant \Big(\int_P |\varphi|^2\Big)\Big(\int_P |\psi|^2\Big)$, $\varphi,\psi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$. Ponadto, funkcja $\mathcal{R}(P,\mathbb{C}) \ni \varphi \longmapsto (\int_P |\varphi|^2)^{1/2}$ jest *seminormą*.

(h) $\mathcal{C}(P,\mathbb{C}) \subset \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$.

(i) (Twierdzenie o wartości średniej) Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{C}(P)$ istnieje $\xi \in P$ taki, że $f(\xi) = \frac{1}{|P|}\int_P f$.

Definicja 11.1.8. Mówimy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ ma *objętość zero* ($|A| = 0$), jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje skończona rodzina kostek P_1, ..., P_m taka, że $A \subset P_1 \cup \dots \cup P_m$ i $|P_1| + \dots + |P_m| \leqslant \varepsilon$.

Obserwacja 11.1.9. (a) Każdy zbiór o objętości zero jest ograniczony.

(b) Każdy zbiór skończony ma objętość zero.

(c) Podzbiór zbioru o objętości zero ma objętość zero.

(d) Suma skończonej liczby zbiorów o objętości zero ma objętość zero.

---

(1) Tzn. ξ_k jest zbiorem punktów pośrednich dla π_k.

(2) Jest rzeczą oczywistą, że jeżeli mamy dwa ciągi zbieżne liczb rzeczywistych $(a_k)_{k=1}^\infty$ i $(b_k)_{k=1}^\infty$ oraz wiemy, że ciąg $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ jest również zbieżny, to $\lim_{k\to+\infty} a_k = \lim_{k\to+\infty} b_k$. Z tej trywialnej uwagi wynika, że warunek (ii) jest równoważny następującemu warunkowi: *dla dowolnego normalnego ciągu podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ oraz dla dowolnego wyboru punktów pośrednich $(\xi_k)_{k=1}^\infty$, ciąg $(M(\varphi,\pi_k,\xi_k))_{k=1}^\infty$ jest zbieżny do granicy skończonej.*

(3) Podobnie jak poprzednio, warunek (iv) jest równoważny następującemu warunkowi: *istnieje normalny ciąg podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ taki, że dla dowolnego wyboru punktów pośrednich $(\xi_k)_{k=1}^\infty$, ciąg $(M(\varphi,\pi_k,\xi_k))_{k=1}^\infty$ jest zbieżny do granicy skończonej.*

(e) Jeżeli $\mathbb{R}^n \ni a_\nu \longrightarrow a_0 \in \mathbb{R}^n$, to zbiór $\{a_\nu : \nu \geqslant 0\}$ ma objętość zero.

(f) Jeżeli $A \subset \mathbb{R}^n$ ma objętość zero, to dla dowolnego zbioru ograniczonego $B \subset \mathbb{R}^m$ zbiór $A \times B$ ma objętość zero. W szczególności, dla dowolnej kostki ograniczonej $Q \subset \mathbb{R}^n$ (4) mamy $|\partial Q| = 0$.

(g) Jeżeli $|A| = 0$, to $|\overline{A}| = 0$.

Propozycja 11.1.10. (a) *Niech $Q \subset \mathbb{R}^d$ będzie kostką domkniętą i niech $\varphi : Q \longrightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ będzie dowolnym odwzorowaniem ciągłym, $1 \leqslant d \leqslant n-1$. Wtedy wykres $A := \{(t, \varphi(t)) : t \in Q\}$ ma objętość zero.*

(b) *Niech $Q \subset \mathbb{R}^d$ będzie kostką domkniętą i niech $p : Q \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie odwzorowaniem spełniającym warunek Höldera z wykładnikiem α. Wówczas:*

(b_1) *Jeżeli $\alpha n > d$, to zbiór $A := p(Q)$ ma objętość zero.* (5)

(b_2) *Jeżeli $\alpha n \geqslant d$, to zbiór $A := p(Z)$ ma objętość zero dla dowolnego zbioru $Z \subset Q$ o objętości zero.*

(b_3) *Jeżeli p spełnia warunek Lipschitza (np. $p \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, gdzie Ω jest otoczeniem Q), to:*

- *jeżeli $n > d$, to $|p(Q)| = 0$,*
- *jeżeli $n \geqslant d$, to $|p(Z)| = 0$ dla dowolnego zbioru $Z \subset Q$ o objętości zero.* (6)

(c) *Jeżeli M jest d–wymiarową podrozmaitością w $\mathbb{R}^n$ klasy $\mathcal{C}^1$, $0 \leqslant d \leqslant n-1$, to każdy zwarty podzbiór $A \subset M$ ma objętość zero* (7).

Dowód. (a) Ustalmy $\varepsilon > 0$. Wobec jednostajnej ciągłości odwzorowania φ istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$\max_{j=1,\dots,n-d} |\varphi_j(t') - \varphi_j(t'')| \leqslant \varepsilon \text{ o ile } \|t' - t''\| \leqslant \delta.$$

Niech $\pi = \{Q_1, \dots, Q_m\}$ będzie podziałem kostki Q takim, że $\operatorname{diam} \pi \leqslant \delta$. Ustalmy $t_j \in Q_j$ i niech

$$P_j := Q_j \times (\varphi(t_j) + [-\varepsilon, \varepsilon]^{n-d}).$$

Oczywiście $A \subset P_1 \cup \dots \cup P_m$ oraz $|P_1| + \dots + |P_m| = |Q_1|(2\varepsilon)^{n-d} + \dots + |Q_m|(2\varepsilon)^{n-d} = |Q|(2\varepsilon)^{n-d}$.

(b) Przypuśćmy, że $\max_{j=1,\dots,n} |p_j(t') - p_j(t'')| \leqslant C\|t' - t''\|^\alpha$, $t', t'' \in Q$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Przypadki (b_1) i (b_2) rozpatrzymy jednocześnie. Niech $X := Q$ (odp. $X := Z$) i niech $\varkappa := 2|Q|$ (odp. $\varkappa > 0$, gdzie $\varkappa$ jest dowolne). Niech $\pi = \{Q_1, \dots, Q_m\}$ będzie układem kostek takim, że

- $Q_j = u_j + [-\eta, \eta]^d$, gdzie $u_j \in \mathbb{R}^d$, $j = 1, \dots, m$, $\eta \in (0, 1]$,
- $X \subset Q_1 \cup \dots \cup Q_m$, $Q_j \cap Q \neq \varnothing$, $j = 1, \dots, m$,
- $m(2\eta)^d = |Q_1| + \dots + |Q_m| \leqslant \varkappa$.

Niech $\delta := C(2\sqrt{d}\eta)^\alpha$. Ustalmy $t_j \in Q_j \cap Q$ i niech $P_j := p(t_j) + [-\delta, \delta]^n$, $j = 1, \dots, m$. Oczywiście $A \subset P_1 \cup \dots \cup P_m$ oraz $|P_1| + \dots + |P_m| = m(2C(2\sqrt{d}\eta)^\alpha)^n \leqslant \big(2^{(\alpha+1)n-d}\varkappa(Cd^{\alpha/2})^n\big)\eta^{\alpha n - d}$.

Gdy $\alpha n > d$, to dla małych $\eta > 0$ ostatnia liczba będzie dowolnie mała (odp. gdy $\alpha n = d$, to dobierając $\varkappa > 0$ stosownie małe, możemy uczynić tę ostatnią liczbę dowolnie małą).

(b_3) wynika z (b_1) i (b_2).

(c) wynika z (b). □

Obserwacja 11.1.11. (a) Jeżeli zbiór $N_P(\varphi) := \{a \in P : \varphi \text{ nie jest ciągła w punkcie } a\}$ ma objętość zero, to $\varphi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$ (por. Obserwacja 11.1.7(h)).

(b) Niech $\pi = \{P_1, \dots, P_m\}$ będzie ustalonym podziałem. Wtedy $\varphi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C}) \iff \varphi|_{P_j} \in \mathcal{R}(P_j, \mathbb{C})$, $j = 1, \dots, m$. Ponadto, $\int_P \varphi = \int_{P_1} \varphi + \dots + \int_{P_m} \varphi$.

(c) Jeżeli zbiór $D_P(\varphi, \psi) := \{a \in P : \varphi(a) \neq \psi(a)\}$ ma objętość zero, to $\varphi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C}) \iff \psi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$. Ponadto, $\int_P \varphi = \int_P \psi$.

(d) Jeżeli $\varphi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$, to $\varphi|_Q \in \mathcal{R}(Q, \mathbb{C})$ dla dowolnej kostki $Q \subset P$ oraz $\int_Q \varphi = \int_P \varphi_0$, gdzie $\varphi_0 := \varphi$ na Q i $\varphi_0 := 0$ na $P \setminus Q$.

(e) Relacja $\varphi \sim \psi \overset{\text{df}}{\iff} |D_P(\varphi, \psi)| = 0$ jest relacją równoważnościową w $\mathcal{R}(P, \mathbb{C})$; całka Riemanna jest dobrze określonym operatorem liniowym $\mathcal{R}(P, \mathbb{C})/\sim \longrightarrow \mathbb{C}$.

---

(4) Q jest (niezdegenerowaną) kostką ograniczoną, jeżeli $\overline{Q}$ jest kostką domkniętą i $\operatorname{int} \overline{Q} \subset Q$.

(5) Warto w tym miejscu przypomnieć o istnieniu krzywej $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ takiej, że $\gamma([0,1]) = [0,1] \times [0,1]$. Z ($b_1$) wynika, że γ nie może spełniać warunku Höldera z wykładnikiem $\alpha > 1/2$.

(6) Jeżeli $n < d$, to biorąc jako p projekcję $\operatorname{pr}_{\mathbb{R}^{d-n}}$, zaś jako Z zbiór postaci $A \times B \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{d-n}$, gdzie $|A| = 0$, a B jest ograniczony, widzimy, że $p(Z) = B$ nie musi być zbiorem o objętości zero nawet, gdy p jest liniowe.

(7) Dla przykładu, $|\mathbb{S}_{n-1}| = 0$.

(f) Jeżeli $\mathcal{R}(P,\mathbb{C}) \ni \varphi_\nu \longrightarrow \varphi$ jednostajnie na P, to $\varphi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$ i $\int_P \varphi_\nu \longrightarrow \int_P \varphi$.

(g) Jeżeli $0 \leqslant f \in \mathcal{C}(P)$ i $\int_P f = 0$, to $f \equiv 0$. W szczególności, odwzorowanie

$$\mathcal{C}(P,\mathbb{C}) \times \mathcal{C}(P,\mathbb{C}) \ni (\varphi,\psi) \longmapsto \int_P \varphi\overline{\psi}$$

jest iloczynem skalarnym.

(h) Niestety przestrzeń $\mathcal{C}(P,\mathbb{C})$ z tym iloczynem skalarnym nie jest przestrzenią Hilberta.

Istotnie, niech $P := [0,1] \subset \mathbb{R}$,

$$f_\nu(x) := \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{\nu} \\ \frac{\nu}{2}(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{\nu}), & \text{jeżeli } \frac{1}{2} - \frac{1}{\nu} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{\nu} \\ 1, & \text{jeżeli } \frac{1}{2} + \frac{1}{\nu} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases},$$

$f_0 := \chi_{(1/2,1]}$. Wtedy $\int_P (f_\nu - f_0)^2 \longrightarrow 0$ (Ćwiczenie). W szczególności, $(f_\nu)_{\nu=1}^\infty$ jest ciągiem Cauchy'ego w $\mathcal{C}(P,\mathbb{C})$, który nie ma granicy. Istotnie, przypuśćmy, że granica taka istnieje i jest nią funkcja $g_0 \in \mathcal{C}(P,\mathbb{C})$. Mamy $\int_P |f_0 - g_0|^2 = 0$. Stąd, wobec (g), $g_0 = 0$ na $[0,\frac{1}{2})$ i $g_0 = 1$ na $(\frac{1}{2},1]$; sprzeczność.

(i) Jeżeli $0 \leqslant f \in \mathcal{R}(P)$ i $\int_P f = 0$, to zbiór $Z_f := \{x \in P : f(x) > 0\}$ jest przeliczalną sumą zbiorów o objętości zero.

Wystarczy pokazać, że dla dowolnego $c > 0$ zbiór $A := \{f \geqslant c\}$ ma objętość zero. Weźmy $\varepsilon > 0$ i podział $\pi = \{P_1,\dots,P_m\}$ taki, że $U(f,\pi) \leqslant \varepsilon$. Wtedy

$$\varepsilon \geqslant U(f,\pi) \geqslant c \sum_{\substack{j \in \{1,\dots,m\}: \\ A \cap P_j \neq \varnothing}} |P_j|.$$

Wynika stąd, że A można pokryć kostkami o łącznej objętości $\leqslant \varepsilon/c$.

(j) Zbiór $Z_f := \{f > 0\}$ w (i) może nie mieć objętości zero. Dla przykładu, niech $P \cap \mathbb{Q}^n = \{r_1, r_2, \dots\}$ i niech $f : P \longrightarrow [0,1]$, $f(x) := \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } x \notin \mathbb{Q}^n \\ \frac{1}{j}, & \text{jeżeli } x = r_j \end{cases}$. Oczywiście, zbiór $Z_f = P \cap \mathbb{Q}^n$ nie ma objętości zero, ale $\int_P f = 0$. Istotnie, dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ rozważmy podział $\pi = \{P_1,\dots,P_m\}$ ($m \geqslant k$) taki, że $r_j \in \operatorname{int}_P P_j$, $j = 1,\dots,k$, $|P_1| + \dots + |P_k| \leqslant \frac{1}{k}$. Wtedy

$$U(f,\pi) = \sum_{j=1}^{k} M(f,P_j)|P_j| + \sum_{j=k+1}^{m} M(f,P_j)|P_j| \leqslant \sum_{j=1}^{k} |P_j| + \frac{1}{k+1} \sum_{j=k+1}^{m} |P_j| \leqslant \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}|P|.$$

Definicja 11.1.12. Mówimy, że zbiór ograniczony $A \subset \mathbb{R}^n$ jest *mierzalny w sensie Jordana*, jeżeli $\chi_A \in \mathcal{R}(P)$ dla pewnej kostki $P \supset A$. Liczbę $|A| := \int_P \chi_A$ nazywamy *miarą Jordana (objętością) zbioru* A [8].

Własność 11.1.13. *Jeżeli A jest zbiorem ograniczonym takim, że $|\partial A| = 0$ w sensie Definicji 11.1.8, to A jest mierzalny w sensie Jordana. Ponadto, jeżeli $|A| = 0$ w sensie Definicji 11.1.8, to $|A| = 0$ w sensie Definicji 11.1.12.*

Dowód. Wystarczy skorzystać z Obserwacji 11.1.11(a). □

Obserwacja 11.1.14. Sumy aproksymacyjne pośrednie można zdefiniować dla dowolnego odwzorowania $\varphi : P \longrightarrow F$, gdzie F jest przestrzenią unormowaną. Pozwala to przenieść pojęcie całki Riemanna: odwzorowanie $\varphi : P \longrightarrow F$ nazywamy *całkowalnym w sensie Riemanna* ($\varphi \in \mathcal{R}(P,F)$), jeżeli istnieje $c \in F$ takie, że dla dowolnego normalnego ciągu podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ oraz dla dowolnego wyboru punktów pośrednich mamy: $M(\varphi,\pi_k,\xi_k) \longrightarrow c$. Element c nazywamy wtedy *całką Riemanna odwzorowania φ po kostce* P i oznaczamy $\int_P \varphi$. Obserwacja 11.1.7(b) gwarantuje zgodność definicji dla $F = \mathbb{C}$. Pojawia się tu pewna subtelność: nowa definicja całki obejmuje formalnie funkcje nieograniczone, a Obserwacja 11.1.7(b) dotyczy tylko funkcji ograniczonych. Dla usunięcia tego problemu wystarczy zauważyć, że jeżeli funkcja $\varphi : P \longrightarrow F$ jest całkowalna w nowym sensie, to musi być ograniczona. Istotnie, przypuśćmy np. że $\sup_P \|\varphi\| = +\infty$ i niech $P \ni a_\nu \longrightarrow a_0 \in P$ będzie ciągiem takim, że $\|\varphi(a_\nu)\| \longrightarrow +\infty$. Weźmy

[8] Łatwo widać (por. Obserwacja 11.1.11(b)), że jeżeli $\chi_A \in \mathcal{R}(P)$ dla pewnej kostki $P \supset A$, to $\chi_A \in \mathcal{R}(Q)$ dla dowolnej kostki $Q \supset A$. Ponadto, $\int_P \chi_A = \int_Q \chi_A$.

normalny ciąg podziałów $(\pi_k)_{k=1}^{\infty}$, $\pi_k = \{P_{k,1}, \dots, P_{k,m_k}\}$, taki, że $a_0 \in \operatorname{int}_P P_{k,1}$, $k \geqslant 1$. Ustalmy k. Wybierzmy w sposób dowolny punkty pośrednie $\xi_{k,2}, \dots, \xi_{k,m_k}$. Ponieważ $\sup_{P_{k,1}} \|\varphi\| = +\infty$, to zawsze znajdziemy punkt $\xi_{k,1}$ taki, że $\|M(\varphi, \pi_k, \xi_k)\| \geqslant k$. Mamy więc $\|M(\varphi, \pi_k, \xi_k)\| \longrightarrow +\infty$, czyli φ nie może być całkowalna w nowym sensie.

11.2. Całka Riemanna na zbiorze regularnym

Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie dowolnym zbiorem ograniczonym takim, że $|\partial A| = 0$ — takie zbiory będziemy roboczo nazywać *regularnymi*. Naszym celem jest zbudowanie teorii całki Riemanna $\int_A f$. Dla prostoty ograniczymy się do funkcji ograniczonych $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Przeniesienie teorii na funkcje zespolone pozostawiamy jako Ćwiczenie.

Ćwiczenie 11.2.1. (a) Jeżeli $|A| = 0$, to A jest regularny.
(b) Każda kostka jest regularna.
(c) Jeżeli zbiór A jest regularny, to zbiór $\operatorname{int} A$ jest regularny; implikacja przeciwna nie jest prawdziwa.
(d) Jeżeli zbiór A jest regularny, to zbiór $\overline{A}$ jest regularny; implikacja przeciwna nie jest prawdziwa.
(e) Jeżeli zbiory A, B są regularne, to zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ są regularne.
(f) Jeżeli zbiory $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ są regularne, to zbiór $A \times B$ jest regularny (por. Obserwacja 11.1.9(f)).

Definicja 11.2.2. Niech $A \subset P$, gdzie P jest kostką. Dla $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ niech

$$f_0 := \begin{cases} f, & \text{na } A \\ 0, & \text{na } P \setminus A \end{cases}.$$

Powiemy, że f jest *całkowalna w sensie Riemanna na A* ($f \in \mathcal{R}(A)$), jeżeli $f_0 \in \mathcal{R}(P)$. Kładziemy wtedy $\int_A f := \int_P f_0$. Bez trudu widać, że taka definicja jest poprawna, tzn. nie zależy od wyboru kostki $P \supset A$.

Poniżej przedstawimy listę podstawowych własności tak zdefiniowanej całki Riemanna. Dowody poszczególnych własności polegają w większości przypadków na wykorzystaniu własności całki Riemanna na kostce i dlatego też podamy tylko szkice dowodów.

Obserwacja 11.2.3. (a) Jeżeli $|A| = 0$, to każda funkcja ograniczona $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna oraz $\int_A f = 0$ (por. Ćwiczenie 11.2.1(a)).

Istotnie, zbiór $\{x \in P : f_0(x) \neq 0\} \subset A$ i wystarczy skorzystać z Obserwacji 11.1.11(c).

(b) Jeżeli zbiór $N_A(f) := \{a \in A : f \text{ nie jest ciągła w } a\}$ ma objętość zero, to $f \in \mathcal{R}(A)$ (jest to uogólnienie Obserwacji 11.1.11(a)).

Istotnie, wtedy $N_P(f_0) = \{a \in P : f_0 \text{ nie jest ciągła w punkcie } a\} \subset N_A(f) \cup \partial A$ i możemy skorzystać z Obserwacji 11.1.11(a).

W szczególności, $\mathcal{BC}(A) \subset \mathcal{R}(A)$.

(c) $1 \in \mathcal{R}(A)$ oraz $\int_A 1 = |A|$, gdzie $|A|$ oznacza miarę Jordana (objętość) zbioru A w sensie Definicji 11.1.12.

(d) $\mathcal{R}(A)$ jest algebrą, operator $\mathcal{R}(A) \ni f \longmapsto \int_A f \in \mathbb{R}$ jest liniowy i monotoniczny. W szczególności, jeżeli $A \subset B$, gdzie B jest także regularny, to $|A| \leqslant |B|$.

(e) Jeżeli $f \in \mathcal{R}(A)$, to $|f| \in \mathcal{R}(A)$ oraz $|\int_A f| \leqslant \int_A |f|$.

(f) Operator $\mathcal{R}(A) \times \mathcal{R}(A) \ni (f, g) \longmapsto \int_A fg \in \mathbb{R}$ jest semi-iloczynem skalarnym. W szczególności, zachodzi nierówność Schwarza: $\big(\int_A fg\big)^2 \leqslant \big(\int_A f^2\big)\big(\int_A g^2\big)$, $f, g \in \mathcal{R}(A)$.

(g) Jeżeli zbiór $\{a \in A : f(a) \neq g(a)\}$ ma objętość zero, to $f \in \mathcal{R}(A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g \in \mathcal{R}(A)$. Ponadto, $\int_A f = \int_A g$ (jest to uogólnienie Obserwacji 11.1.11(c)).

(h) Jeżeli $B \subset A$ jest zbiorem regularnym, to dla funkcji $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ mamy: $f|_B \in \mathcal{R}(B) \iff f \cdot \chi_B \in \mathcal{R}(A)$.

(i) Jeżeli $A = A_1 \cup A_2$, gdzie A_1, A_2 są zbiorami regularnymi i $|A_1 \cap A_2| = 0$, to $f \in \mathcal{R}(A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f|_{A_j} \in \mathcal{R}(A_j)$, $j = 1, 2$. Ponadto $\int_A f = \int_{A_1} f + \int_{A_2} f$.

Istotnie, jeżeli $f \in \mathcal{R}(A)$, to $f \cdot \chi_{A_j} \in \mathcal{R}(A)$ (9), a zatem $f|_{A_j} \in \mathcal{R}(A_j)$, $j = 1, 2$. Odwrotnie, jeżeli $f|_{A_j} \in \mathcal{R}(A_j)$, to $f_j := f \cdot \chi_{A_j} \in \mathcal{R}(A)$, $j = 1, 2$, a zatem $f_1 + f_2 \in \mathcal{R}(A)$. Teraz wystarczy tylko zauważyć, że $\{f_1 + f_2 \neq f\} \subset A_1 \cap A_2$ i skorzystać z (g).

---

(9) Bo $\chi_{A_j} \in \mathcal{R}(A)$ i $\mathcal{R}(A)$ jest algebrą (por. (d)).

W szczególności (por. Ćwiczenie 11.2.1):

- jeżeli $B \subset A$ jest zbiorem regularnym i $f \in \mathcal{R}(A)$, to $f|_B \in \mathcal{R}(B)$;
- dla dowolnej funkcji ograniczonej $f : \overline{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ mamy: $f \in \mathcal{R}(A) \iff f \in \mathcal{R}(\overline{A})$ oraz $\int_A f = \int_{\overline{A}} f$;
- dla dowolnej funkcji ograniczonej $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ mamy: $f \in \mathcal{R}(A) \iff f \in \mathcal{R}(\operatorname{int} A)$ oraz $\int_A f = \int_{\operatorname{int} A} f$.

Propozycja 11.2.4. *Niech $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ będzie zbiorem regularnym, niech $f \in \mathcal{R}(A)$ i niech B oznacza wykres funkcji f, tzn. zbiór $B := \{(x, f(x)) : x \in A\} \subset \mathbb{R}^n$. Wtedy $|B| = 0$.*

Dowód. Niech $A \subset P$, gdzie P jest kostką, niech f_0 oznacza standardowe przedłużenie funkcji f i niech $B_0 := \{(x, f_0(x)) : x \in P\}$. Zauważmy, że $|B| = 0 \iff |B_0| = 0$ (Ćwiczenie). Wynika stąd w szczególności, że możemy założyć, że $A = P$ jest kostką.

Dla $\varepsilon > 0$, niech $\pi = \{P_1, \dots, P_m\}$ będzie podziałem kostki P takim, że $U(f, \pi) - L(f, \pi) \leqslant \varepsilon$. Połóżmy, $Q_j := P_j \times [m(f, P_j), M(f, P_j)]$, $j = 1, \dots, m$. Wtedy $B \subset Q_1 \cup \dots \cup Q_m$ oraz

$$|Q_1| + \dots + |Q_m| = \sum_{j=1}^{m} |P_j|(M(f_i, P_j) - m(f_i, P_j)) \leqslant \varepsilon. \qquad \square$$

Twierdzenie 11.2.5 (Twierdzenie o całkach iterowanych)**.** *Niech $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ będą zbiorami regularnymi i niech $f \in \mathcal{R}(A \times B)$ (por. Ćwiczenie 11.2.1(f)). Załóżmy, że $f(x, \cdot) \in \mathcal{R}(B)$ dla dowolnego $x \in A$ [10]. Wtedy funkcja $A \ni x \longmapsto \int_B f(x, y)dy \in \mathbb{R}$ jest całkowalna na A oraz*

$$\int_{A \times B} f(x, y)dxdy = \int_A \Big(\int_B f(x, y)dy \Big) dx. \quad [11]$$

W szczególności, powyższy wzór stosuje się dla funkcji klasy $\mathcal{BC}(A \times B)$.

Dowód. W oczywisty sposób dowód sprowadza się do przypadku, gdy $A = P$ i $B = Q$ są kostkami. Ustalmy dowolne podziały $\pi' = \{P_1, \dots, P_r\}$ kostki P i $\pi'' = \{Q_1, \dots, Q_s\}$ kostki Q. Wtedy rodzina

$$\pi := \{P_j \times Q_k : j = 1, \dots, r,\ k = 1, \dots, s\}$$

jest podziałem kostki $P \times Q$. Wybierzmy dowolne punkty pośrednie ξ dla podziału π'. Wtedy

$$m(f, P_j \times Q_k)|Q_k| \leqslant \int_{Q_k} f(\xi_j, y)dy \leqslant M(f, P_j \times Q_k)|Q_k|, \quad [12]$$

skąd po pomnożeniu przez $|P_j|$, zsumowaniu najpierw względem k, a potem względem j, mamy:

$$L(f, \pi) \leqslant \sum_{j=1}^{r} \int_Q f(\xi_j, y)dy|P_j| \leqslant U(f, \pi).$$

Pozostaje rozważyć normalne ciągi podziałów i zastosować Obserwację 11.1.7(b). $\square$

11.3. Własności całki Riemanna

Propozycja 11.3.1. *Niech $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ będą zbiorami regularnymi i niech $f \in \mathcal{R}(A)$, $g \in \mathcal{R}(B)$. Wtedy $f \otimes g \in \mathcal{R}(A \times B)$ [13] oraz*

$$\int_{A \times B} f(x)g(y)dxdy = \Big(\int_A f(x)dx \Big) \Big(\int_B g(y)dy \Big).$$

Dowód. Jedynym problemem jest całkowalność $f \otimes g$ na $A \times B$. Możemy założyć, że $A = P$, $B = Q$ są kostkami. Ustalmy dowolne podziały $\pi' = \{P_1, \dots, P_r\}$ kostki P i $\pi'' = \{Q_1, \dots, Q_s\}$ kostki Q i niech π będzie jak w dowodzie Twierdzenia 11.2.5. Załóżmy, że $|f|, |g| \leqslant c$. Wtedy

$$U(f \otimes g, \pi) - L(f \otimes g, \pi) \leqslant c\Big((U(f, \pi') - L(f, \pi'))|Q| + (U(g, \pi'') - L(g, \pi''))|P| \Big)$$

i dalej możemy rozumować standardowo. $\square$

---

[10] Odnotujmy, że nie wynika to z całkowalności f na $A \times B$. Dla przykładu: $A = B = [0, 1]$, $f(0, \cdot) = \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$, $f(x, \cdot) := 0$ dla $x \in (0, 1]$.

[11] Stosujemy tu wygodny tradycyjny zapis całki Riemanna z uwidocznieniem zmiennych.

[12] Z całkowalności funkcji $f(\xi_j, \cdot)$ na Q wynika jej całkowalność na Q_k.

[13] $(f \otimes g)(x, y) := f(x)g(y)$

Propozycja 11.3.2 (Całka jako miara objętości)**.** *Niech A będzie zbiorem regularnym w $\mathbb{R}^{n-1}$ i niech $\alpha, \beta \in \mathcal{BC}(Q)$, $\alpha \leqslant \beta$. Połóżmy $B := \{(x, y) \in A \times \mathbb{R} : \alpha(x) \leqslant y \leqslant \beta(x)\}$. Wtedy B jest zbiorem regularnym oraz dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{R}(B)$ takiej, że $f(x, \cdot) \in \mathcal{R}([\alpha(x), \beta(x)])$, $x \in A$, (14) funkcja $A \ni x \longmapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)dy \in \mathbb{R}$ jest całkowalna i mamy:*

$$\int_B f(x, y)dxdy = \int_A \Big(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)dy\Big)dx.$$

W szczególności, $|B| = \int_A (\beta - \alpha)$.

Dowód. Niech $|\alpha|, |\beta| \leqslant c$. Zauważmy, że

$$\partial B \subset (\partial A) \times [-c, c] \cup \{(x, \alpha(x)) : x \in A\} \cup \{(x, \beta(x)) : x \in A\} =: Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3.$$

Istotnie, niech $B \ni (x_s, y_s) \longrightarrow (x_0, y_0) \in \partial B$. Jeżeli $x_0 \in \partial A$, to oczywiście $(x_0, y_0) \in Z_1$. Jeżeli $x_0 \in \operatorname{int} A$, to wobec ciągłości funkcji α i β, mamy $\alpha(x_0) \leqslant y_0 \leqslant \beta(x_0)$. Ponownie korzystając z ciągłości tych funkcji, wnioskujemy, że wykluczone jest, aby $\alpha(x_0) < y_0 < \beta(x_0)$.

Teraz regularność zbioru wynika z Obserwacji 11.1.9(f) oraz Propozycji 11.2.4.

Niech $f_0 : A \times [-c, c] \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie trywialnym rozszerzeniem funkcji f (poprzez wartości zerowe). Wtedy na podstawie twierdzenia o całkach iterowanych (Twierdzenie 11.2.5) mamy:

$$\int_B f(x, y)dxdy = \int_{A\times[-c,c]} f_0(x, y)dxdy = \int_A \Big(\int_{[-c,c]} f_0(x, y)dy\Big)dx = \int_A \Big(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)dy\Big)dx. \quad \square$$

Twierdzenie 11.3.3 (Twierdzenie o funkcjach danych całką)**.** *Niech Ω będzie zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^m$, niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie regularnym zbiorem zwartym (15) i niech $f : \Omega \times A \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie odwzorowaniem takim, że dla pewnego $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ mamy:*

- *$f_t := f(\cdot, t) \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ dla dowolnego $t \in A$,*
- *odwzorowanie $\Omega \times A \ni (x, t) \longmapsto D^\alpha(f_t)(x) \in \mathbb{R}$ jest ciągłe dla $|\alpha| \leqslant k$ (16).*

Wtedy odwzorowanie $\varphi(x) := \int_A f(x, t)dt$, $x \in \Omega$, jest klasy $\mathcal{C}^k(\Omega)$ oraz $D^\alpha\varphi(x) = \int_A D^\alpha(f_t)(x)dt$, $x \in \Omega$, $|\alpha| \leqslant k$.

Dowód. Wystarczy rozważyć przypadki $k = 0$ i $k = 1$.

$k = 0$: Ustalmy $a \in \Omega$, kulę $\mathbb{B}(a, r) \subset\subset \Omega$ i $\varepsilon > 0$. Odwzorowanie f jest jednostajnie ciągłe na $\mathbb{B}(a, r) \times A$. Zatem istnieje $\delta > 0$ taka, że $|f(x, t) - f(a, t)| \leqslant \varepsilon$ dla $x \in \mathbb{B}(a, \delta)$ i $t \in A$. Otrzymujemy stąd:

$$|\varphi(x) - \varphi(a)| \leqslant \int_A |f(x, t) - f(a, t)|dt \leqslant \varepsilon|A|, \quad x \in \mathbb{B}(a, \delta).$$

$k = 1$: Niech $\alpha = e_j$. Wystarczy wykazać, że

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x) = \int_A \frac{\partial f_t}{\partial x_j}(x)dt, \quad x \in \Omega,$$

bowiem ciągłość prawej strony mamy już zapewnioną. Ustalmy $a \in \Omega$, kulę $\mathbb{B}(a, r) \subset\subset \Omega$ i $\varepsilon > 0$. Odwzorowanie $\frac{\partial f_t}{\partial x_j}(x)$ jest jednostajnie ciągłe na $\mathbb{B}(a, r) \times A$. Zatem istnieje $\delta > 0$ taka, że $|\frac{\partial f_t}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_t}{\partial x_j}(a)| \leqslant \varepsilon$ dla $x \in \mathbb{B}(a, \delta)$ i $t \in A$. Stąd, na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych, otrzymujemy:

$$\Big|\frac{\varphi(a + he_j) - \varphi(a)}{h} - \int_A \frac{\partial f_t}{\partial x_j}(a)dt\Big| \leqslant \int_A \Big|\frac{f(a + he_j, t) - f(a, t)}{h} - \frac{\partial f_t}{\partial x_j}(a)\Big|dt \leqslant \varepsilon|A|, \quad |h| < \delta. \quad \square$$

Twierdzenie 11.3.4 (Twierdzenie o funkcjach danych całką niewłaściwą)**.** *Niech Ω będzie zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^m$, niech $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ i niech $f : \Omega \times [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie odwzorowaniem takim, że dla pewnego $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ mamy:*

- *$f_t := f(\cdot, t) \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ dla dowolnego $t \in [a, b)$,*
- *odwzorowanie $\Omega \times [a, b) \ni (x, t) \longmapsto D^\alpha(f_t)(x) \in \mathbb{R}$ jest ciągłe dla $|\alpha| \leqslant k$,*
- *dla dowolnego $|\alpha| \leqslant k$ istnieje odwzorowanie ciągłe $g_\alpha : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ takie, że $|D^\alpha(f_t)(x)| \leqslant g_\alpha(t)$ dla $x \in \Omega$ i $t \in [a, b)$ oraz takie, że całka niewłaściwa $\int_a^b g_\alpha(t)dt$ jest zbieżna.*

---

(14) Np. $f \in \mathcal{BC}(B)$.

(15) Np. $A = P$ – kostka.

(16) Dla $k = 0$ warunki te oznaczają po prostu ciągłość f.

Wtedy odwzorowanie $\varphi(x) := \int_a^b f(x,t)dt$, $x \in \Omega$, *jest klasy* $\mathcal{C}^k(\Omega)$ *oraz* $D^\alpha\varphi(x) = \int_a^b D^\alpha(f_t)(x)dt$, $x \in \Omega$, $|\alpha| \leqslant k$. ([17])

Dowód. Ustalmy ciąg $a < b_\nu < b$, $b_\nu \nearrow b$ i niech $\varphi_\nu(x) := \int_a^{b_\nu} f(x,t)dt$, $x \in \Omega$. Na podstawie poprzedniego twierdzenia wnioskujemy, że $\varphi_\nu \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ oraz $D^\alpha\varphi_\nu(x) = \int_a^{b_\nu} D^\alpha(f_t)(x)dt$, $x \in \Omega$, $|\alpha| \leqslant k$. Zauważmy, że $\varphi_\nu \longrightarrow \varphi$ jednostajnie na Ω. Istotnie, $|\varphi_\nu(x) - \varphi(x)| \leqslant \int_{b_\nu}^b g_0(t)dt \longrightarrow 0$. Wynika stąd, że φ jest ciągła. Z tych samych powodów, dla dowolnego $|\alpha| \leqslant k$ ciąg $(D^\alpha\varphi_\nu)_{\nu=1}^\infty$ jest zbieżny jednostajnie. Teraz wystarczy już tylko wykorzystać twierdzenie o różniczkowaniu ciągu wyraz po wyrazie. $\square$

Obserwacja 11.3.5. Przedział $[a,b)$ można zastąpić przedziałem $(a,b]$ lub też przedziałem (a,b).

Przykład 11.3.6 (Funkcja Γ Eulera)**.** Niech

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt, \quad x > 0.$$

Wtedy

- $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_{>0})$,
- $\Gamma(1) = 1$, $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$, $x > 0$.

W szczególności, $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Dowód. Niech $f(x,t) := t^{x-1}e^{-t}$, $x, t > 0$. Wtedy

$$\Gamma(x) = \int_0^1 f(x,t)dt + \int_1^\infty f(x,t)dt, \quad x > 0.$$

Zauważmy, że $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = t^{x-1}(\ln t)^k e^{-t}$. Wobec poprzedniego twierdzenia, dla dowodu, że Γ jest klasy $\mathcal{C}^\infty$ wystarczy pokazać, że dla dowolnego przedziału $[\alpha,\beta] \subset (0,+\infty)$ i dla dowolnego $k \in \mathbb{N}_0$ istnieją funkcje ciągłe $g_k : (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $h_k : [1,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ takie, że

- $|t^{x-1}(\ln t)^k e^{-t}| \leqslant g_k(t)$, $x \in [\alpha,\beta]$, $t \in (0,1]$,
- $|t^{x-1}(\ln t)^k e^{-t}| \leqslant h_k(t)$, $x \in [\alpha,\beta]$, $t \in [1,\infty)$,
- całki $\int_0^1 g_k(t)dt$ i $\int_1^\infty h_k(t)dt$ są zbieżne.

Przyjmujemy:

- $g_k(t) := t^{\alpha-1}|\ln t|^k e^{-t}$, $0 < t \leqslant 1$; dla $0 < \varepsilon < \alpha$ mamy $\int_0^1 g_k(t)dt \leqslant \operatorname{const}(\varepsilon)\int_0^1 t^{\alpha-1-\varepsilon}dt = \frac{\operatorname{const}(\varepsilon)}{\alpha-\varepsilon}$.
- $h_k(t) := N!t^{\beta-1+k-N}$, gdzie $N > \beta + k$; całkowalność h_k jest oczywista; ponadto,

$$t^{\beta-1}(\ln t)^k e^{-t} \leqslant t^{\beta-1+k}\frac{1}{\sum\limits_{s=0}^\infty \frac{t^s}{s!}} \leqslant N!t^{\beta-1+k-N}.$$

Jest widoczne, że $\Gamma(1) = 1$. Ponadto, dla $x > 0$ mamy:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}dt = -t^x e^{-t}\Big|_0^{+\infty} + x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = x\Gamma(x). \qquad \square$$

Twierdzenie* 11.3.7 (Twierdzenie o zmianie zmiennych w całce Riemanna)**.** *Niech* $\Phi : U \longrightarrow V$ *będzie dyfeomorfizmem klasy* $\mathcal{C}^1$ *zbiorów otwartych* $U, V \subset \mathbb{R}^n$ *i niech* $A \subset\subset U$ *będzie zbiorem regularnym (ze względu na całkę Riemanna). Wtedy:*

- *zbiór* $\Phi(A)$ *jest regularny,*
- *dla dowolnej funkcji* $f \in \mathcal{R}(\Phi(A))$ *funkcja* $(f \circ \Phi) \cdot |\Phi'|$ *jest całkowalna na* $\Phi(A)$, *gdzie* $|\Phi'|$ *oznacza moduł wyznacznika macierzy Jacobiego odwzorowania* Φ ([18]),
- $\int_{\Phi(A)} f = \int_A (f \circ \Phi) \cdot |\Phi'|, \quad f \in \mathcal{R}(\Phi(A))$.

Dowód zostanie podany później (Wniosek 12.4.10). Teraz tylko zauważmy, że regularność $\Phi(A)$ wynika z Propozycji 11.1.10(b) oraz że twierdzenie jest prawdziwe dla translacji.

Ćwiczenie 11.3.8. Wyznaczyć $\det \Phi'$, sprawdzić czy $\Phi|_U$ jest dyfeomorfizmem oraz wyznaczyć $V := \Phi(U)$ dla następujących transformacji i obszarów U ($a, b, c > 0$ oznaczają stałe):

([17]) Zauważmy, że nasze założenia gwarantują zbieżność wszystkich występujących w tezie całek niewłaściwych.

([18]) Tzn. $|\Phi'|(x) := |\det[\frac{\partial \Phi_j}{\partial x_k}(x)]_{j,k=1,\dots,n}|$.

- (współrzędne biegunowe) $\varPhi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,
$\varPhi(r,\varphi) := (ar\cos\varphi, br\sin\varphi)$,
$U := \mathbb{R}_{>0} \times (0, 2\pi)$;
- (współrzędne walcowe) $\varPhi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,
$\varPhi(r,\varphi,z) := (ar\cos\varphi, br\sin\varphi, cz)$,
$U := \mathbb{R}_{>0} \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$;
- (współrzędne sferyczne) $\varPhi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,
$\varPhi(r,\varphi,\theta) := (ar\cos\varphi\cos\theta, br\sin\varphi\cos\theta, cr\sin\theta)$,
$U := \mathbb{R}_{>0} \times (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$;
- (współrzędne sferyczne w $\mathbb{R}^n$) $\varPhi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
\varPhi_1(r,\omega) :=& r\cos\omega_1\cos\omega_2\cos\omega_3\ldots\cos\omega_{n-2}\cos\omega_{n-1},\\
\varPhi_2(r,\omega) :=& r\sin\omega_1\cos\omega_2\cos\omega_3\ldots\cos\omega_{n-2}\cos\omega_{n-1},\\
\varPhi_3(r,\omega) :=& r\sin\omega_2\cos\omega_3\ldots\cos\omega_{n-2}\cos\omega_{n-1},\\
&\vdots\\
\varPhi_{n-1}(r,\omega) :=& r\sin\omega_{n-2}\cos\omega_{n-1},\\
\varPhi_n(r,\omega) :=& r\sin\omega_{n-1},
\end{aligned}$$

$U := \mathbb{R}_{>0} \times (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{n-2}$.

Ćwiczenie 11.3.9. Niech $a_1, \ldots, a_n > 0$, $\mathbb{E} := \Big\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \frac{x_1^2}{a_1^2} + \cdots + \frac{x_n^2}{a_n^2} \leqslant 1\Big\}$. Obliczyć $|\mathbb{E}|$.

11.4. Twierdzenie Morse'a

Propozycja 11.4.1. *Niech $D \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem gwiaździstym względem punktu $a = (a_1, \ldots, a_n) \in D$* [19] *i niech $f \in \mathcal{C}^k(D)$ ($k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$). Wtedy istnieją funkcje $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{C}^{k-1}(D)$ takie, że*

$$f(x) - f(a) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - a_j) f_j(x), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in D.$$

Zauważmy, że musi być $f_j(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$, $j = 1, \ldots, n$. Istotnie,

$$\frac{f(a + he_j) - f(a)}{h} = f_j(a + he_j) \longrightarrow f_j(a), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Dowód Propozycji 11.4.1. Możemy założyć, że $a = 0$. Niech

$$f_j(x) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx)dt, \quad x \in D.$$

Wtedy $f_j \in \mathcal{C}^{k-1}(D)$, $j = 1, \ldots, n$ (zob. Twierdzenie 11.3.3). Ponadto, mamy:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j f_j(x) = \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx)dt = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx)dt = f(x) - f(0). \qquad \square$$

Wniosek 11.4.2. *Niech $D \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem gwiaździstym względem punktu 0 i niech $f \in \mathcal{C}^k(D)$ ($k \in \mathbb{N}_2 \cup \{\infty\}$), $f(0) = 0$, $\operatorname{grad} f(0) = 0$. Wtedy istnieją funkcje $f_{j,k} \in \mathcal{C}^{k-2}(D)$, $j, k = 1, \ldots, n$, takie, że*

$$f(x) = \sum_{j,k=1}^{n} x_j x_k f_{j,k}(x), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in D,$$

przy czym $f_{j,k} = f_{k,j}$.

---

[19] Tzn. $a + t(x - a) \in D$ dla $x \in D$ i $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Zauważmy, że musi być $f_{j,k}(0) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(0)$, $j,k = 1,\dots,n$. Istotnie, na podstawie wzoru Taylora mamy:

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(0) x_j x_k + o(\|x\|^2) = \sum_{j,k=1}^{n} x_j x_k f_{j,k}(x), \quad x \longrightarrow 0,$$

a stąd:

$$\sum_{j,k=1}^{n} x_j x_k \Big(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(0) - f_{j,k}(x)\Big) = o(\|x\|^2), \quad x \longrightarrow 0.$$

W szczególności, biorąc $x = x(t) := te_j + te_k$ dla $j \neq k$, lub też $x = x(t) := te_j$ dla $j = k$, dostajemy

$$t^2\Big(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(0) - f_{j,k}(x(t))\Big) = o(t^2), \quad t \longrightarrow 0,$$

skąd natychmiast wynika żądany wzór.

Dowód Propozycji 11.4.2. Na podstawie Propozycji 11.4.1 mamy $f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(x)$, $x \in D$, gdzie $f_j \in \mathcal{C}^{k-1}(D)$ oraz $f_j(0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(0) = 0$, $j = 1,\dots,n$. Stosując to samo twierdzenie do funkcji f_j, dostajemy

$$f(x) = \sum_{j,k=1}^{n} x_j x_k f_{j,k}(x), \quad x \in D,$$

gdzie $f_{j,k} \in \mathcal{C}^{k-2}(D)$, $j,k = 1,\dots,n$. Zastępując funkcję $f_{j,k}$ przez $\frac{1}{2}(f_{j,k} + f_{k,j})$ zapewniamy sobie symetrię. □

Definicja 11.4.3. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym, niech $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ i niech $a \in \Omega$. Załóżmy, że $f'(a) = 0$ (tzn. a jest punktem krytycznym funkcji f). Powiemy, że jest to *punkt krytyczny nieosobliwy*, jeżeli odwzorowanie $f''(a)$ (rozumiane jako $n \times n$–wymiarowa macierz symetryczna) ma rząd n. W przeciwnym przypadku mówimy, że punkt krytyczny jest *osobliwy*.

Przykład 11.4.4 (Punkty krytyczne osobliwe)**.** (a) $f(x) = x^3$: $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$. Punkt $x = 0$ jest jedynym punktem krytycznym; jest to punkt osobliwy.

(b) $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}\sin^2(1/x), & \text{jeżeli } x \neq 0 \\ 0, & \text{jeżeli } x = 0 \end{cases}$: $f'(0) = f''(0) = 0$, 0 jest punktem krytycznym nieizolowanym (Ćwiczenie).

(c) $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$: $f'(x,y) = [3x^2 - 3y^2, -6xy]$, $f''(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & -6y \\ -6y & -6x \end{bmatrix}$; $f'(0,0) = 0$, $f''(0,0) = 0$.

(d) $f(x,y) = x^2$: $f'(x,y) = [2x, 0]$, $f''(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Zbiór punktów krytycznych to prosta $x = 0$; wszystkie punkty krytyczne są osobliwe.

(e) $f(x,y) = x^2y^2$: $f'(x,y) = [2xy^2, 2x^2y]$, $f''(x,y) = \begin{bmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{bmatrix}$. Zbiór punktów krytycznych to dwie proste $xy = 0$; wszystkie punkty krytyczne są osobliwe.

Obserwacja 11.4.5 (Diagonalizacja form kwadratowych)**.** Rozważmy formę kwadratową $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \not\equiv 0$, postaci

$$f(x) = \sum_{j,k=1}^{n} a_{j,k} x_j x_k = x^t A x,$$

gdzie $A := [a_{j,k}]$ jest macierzą symetryczną. Jeżeli $x = Px'$ zadaje zmianę współrzędnych (P jest macierzą nieosobliwą), to w nowych współrzędnych macierz formy f ma postać $P^t A P$ (jest to macierz przystająca do macierzy A). Proces *diagonalizacji* formy f polega na znalezieniu takich współrzędnych x', w których forma f ma postać

$$f(Px') = {x'_1}^2 + \dots + {x'_k}^2 - x'^2_{k+1} - \dots - {x'_r}^2$$

dla pewnych $0 \leqslant k \leqslant r \leqslant n$. Wiadomo, że taka diagonalizacja jest zawsze możliwa. Jest oczywiste, że $r = \operatorname{rank} A$ (w szczególności, $r = n$, o ile A jest nieosobliwa). Wiadomo również, że liczba k zależy wyłącznie od f.

Twierdzenie 11.4.6 (Twierdzenie Morse'a ([20])**.** *Niech $\varOmega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym, niech $f \in \mathcal{C}^\infty(\varOmega)$ i niech $a \in \varOmega$ będzie punktem krytycznym nieosobliwym z $f(a) = 0$. Wtedy istnieje dyfeomorfizm $\varPhi : U \longrightarrow \varPhi(U) \subset \varOmega$ klasy $\mathcal{C}^\infty$, gdzie U jest pewnym otoczeniem zera, taki że $\varPhi(0) = a$ oraz*

$$f \circ \varPhi(t) = t_1^2 + \dots + t_k^2 - t_{k+1}^2 - \dots - t_n^2, \quad t = (t_1, \dots, t_n) \in U,$$

dla pewnego $k \in \{0, \dots, n\}$.

Obserwacja 11.4.7. $\operatorname{grad}(f \circ \varPhi)(t) = 0 \iff t = 0$, skąd w szczególności wynika, że punkty krytyczne nieosobliwe odwzorowań klasy $\mathcal{C}^\infty$ są izolowane.

Dowód Twierdzenia Morse'a. Możemy założyć, że $a = 0$. Zastosujemy indukcję. Pokażemy, że dla dowolnego $r \in \{1, \dots, n+1\}$ istnieje lokalna $\mathcal{C}^\infty$–dyfeomorficzna zmiana układu współrzędnych $\varPhi_r$, $\varPhi_r(0) = 0$, po której, dla x w pewnym otoczeniu zera, mamy:

$$f \circ \varPhi_r(x) = \sum_{i=1}^{r-1} \sigma_i x_i^2 + \sum_{j,k=r}^{n} x_j x_k f_{j,k}(x),$$

gdzie $\sigma_1, \dots, \sigma_{r-1} \in \{-1, 1\}$, $f_{j,k}$ są klasy $\mathcal{C}^\infty$ oraz $f_{j,k} = f_{k,j}$, $j, k = r, \dots, n$. Zauważmy, że przypadek $r = 1$, to Wniosek 11.4.2, zaś $r = n+1$, to teza Twierdzenia Morse'a. Przechodzimy do kroku indukcyjnego $r \rightsquigarrow r + 1$.

Niech $g := f \circ \varPhi_r$. Wiemy, że

$$g''(0)(h) = f''(0)(\varPhi_r'(0)(h)) + f'(0)(\varPhi_r''(0)(h)) = f''(0)(\varPhi_r'(0)(h)),$$

skąd, w szczególności, wynika, że macierz $g''(0)$ jest nieosobliwa. Zauważmy, że dla $p \in \{1, \dots, r - 1\}$ i $q \in \{r, \dots, n\}$ mamy

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_p \partial x_q}(0) = \frac{\partial}{\partial x_q}\Big(2\sigma_p x_p + \sum_{j,k=r}^{n} x_j x_k \frac{\partial f_{j,k}}{\partial x_p}(x)\Big)\Big|_{x=0} = 0.$$

Stąd

$$g''(0) = \begin{bmatrix} 2\sigma_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \dots & 2\sigma_{r-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & f_{r,r}(0) & \dots & f_{r,n}(0) \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & f_{n,r}(0) & \dots & f_{n,n}(0) \end{bmatrix}.$$

Ponieważ macierz $g''(0)$ jest nieosobliwa, zatem macierz $[f_{j,k}(0)]_{j,k=r,\dots,n}$ musi być również nieosobliwa. Po liniowej zmianie współrzędnych $x_r, \dots, x_n$ możemy uzyskać sytuację, w której $f_{r,r}(0) \neq 0$. Oznaczmy przez $\widetilde{\varPhi}_r$ dyfeomorfizm powstały ze złożenia tej zmiany współrzędnych z dyfeomorfizmem $\varPhi_r$. Niech $\sigma_r := \operatorname{sgn}(f_{r,r}(0))$ i niech U będzie otoczeniem zera takim, że $\operatorname{sgn}(f_{r,r}(x)) = \sigma_r$, $x \in U$. Zdefiniujmy

$$x_r' = \varPsi_r(x) := x_r\sqrt{|f_{r,r}(x)|} + \sigma_r \sum_{j=r+1}^{n} x_j \frac{f_{r,j}(x)}{\sqrt{|f_{r,r}(x)|}}, \quad x \in U.$$

Odnotujmy, że $\varPsi_r(0) = 0$ oraz

$$\sigma_r {x'}_r^2 = x_r^2 f_{r,r}(x) + 2\sum_{j=r+1}^{n} x_r x_j f_{r,j}(x) + \sum_{j,k=r+1}^{n} x_j x_k g_{j,k}(x),$$

gdzie $g_{j,k} := \frac{f_{r,j} f_{r,k}}{|f_{r,r}|} \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Rozważmy odwzorowanie

$$x' = \varPsi(x) := (x_1, \dots, x_{r-1}, \varPsi_r(x), x_{r+1}, \dots, x_n), \quad x \in U.$$

Mamy $\varPsi(0) = 0$. Ponadto,

$$\frac{\partial \varPsi_r}{\partial x_s}(0) = \delta_{r,r}\sqrt{|f_{r,r}(0)|} + \sigma_r \sum_{j=r+1}^{n} \delta_{j,s} \frac{f_{r,j}(0)}{\sqrt{|f_{r,r}(0)|}}.$$

([20]) Harold Morse (1892–1977).

W szczególności, $\frac{\partial\Psi_r}{\partial x_s}(0) = 0$ dla $s \leqslant r-1$, a wiec $\det\Psi_r'(0) = \frac{\partial\Psi_r}{\partial x_r}(0) = \sqrt{|f_{r,r}(0)|} \neq 0$. W konsekwencji Ψ jest $\mathcal{C}^\infty$–dyfeomorfizmem $V \longrightarrow \Psi(V)$ w pewnym otoczeniu zera $V \subset U$. Ostatecznie mamy

$$\begin{aligned} f \circ \widetilde{\Phi}_r(x) &= \sum_{i=1}^{r-1}\sigma_i x_i^2 + x_r^2 f_{r,r}(x) + 2\sum_{j=r+1}^{n} x_r x_j f_{r,j}(x) + \sum_{j,k=r+1}^{n} x_j x_k f_{j,k}(x) \\ &= \sum_{i=1}^{r-1}\sigma_i x_i^2 + \sigma_r {x_r'}^2 - \sum_{j,k=r+1}^{n} x_j x_k g_{j,k}(x) + \sum_{j=r+1}^{n} x_r x_j f_{r,j}(x) \\ &= \sum_{i=1}^{r}\sigma_i {x_i'}^2 + \sum_{j,k=r+1}^{n} x_j' x_k' h_{j,k}(x'). \end{aligned} \qquad \square$$

11.5. Całki krzywoliniowe

Będziemy kontynuować rozważania z § 7.2. Na wstępie przypomnijmy Twierdzenie 7.2.4.

Twierdzenie 11.5.1. *Dowolna droga $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ jest prostowalna* ([21]) *oraz*

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt. \quad (^{22})$$

Niech $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie krzywą i niech $f : \gamma^* \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją ograniczoną ([23]). Dla podziału $\pi = (t_0, \dots, t_m)$ przedziału $[a,b]$ i dla punktów pośrednich $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ niech

$$M(f,\gamma,\pi,\xi) := \sum_{j=1}^{m} f(\gamma(\xi_j))\|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|.$$

Powiemy, że funkcja f jest *całkowalna wzdłuż krzywej* γ ($f \in \mathcal{R}(\gamma)$), jeżeli istnieje $c \in \mathbb{R}$ takie, że dla dowolnego normalnego ciągu podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ przedziału $[a,b]$ oraz dla dowolnego wyboru punktów pośrednich $(\xi_k)_{k=1}^\infty$ mamy:

$$M(f,\gamma,\pi_k,\xi_k) \longrightarrow c.$$

Liczbę c nazywamy *całką krzywoliniową niezorientowaną z funkcji f po krzywej γ* i oznaczamy $c = \int_\gamma f dl$.

Obserwacja 11.5.2. (a) Całkowalność i całka są niezależne od parametryzacji krzywej.

Istotnie, wystarczy tylko zauważyć, że jeżeli $\tau : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ jest ściśle rosnącą bijekcją, to jest to odwzorowanie jednostajnie ciągłe, a w szczególności obraz normalnego ciągu podziałów jest normalnym ciągiem podziałów.

(b) γ jest prostowalna wtedy i tylko wtedy, gdy $1 \in \mathcal{R}(\gamma)$. Ponadto $L(\gamma) = \int_\gamma 1 dl$.

(c) $f \in \mathcal{R}(\gamma) \iff f \in \mathcal{R}(\ominus\gamma)$. Ponadto, $\int_{\ominus\gamma} f dl = \int_\gamma f dl$ ([24]).

(d) Jeżeli $\gamma_j : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $j = 1,2$, są krzywymi takimi, że $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ oraz $f : \gamma_1^* \cup \gamma_2^* \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją taka, że $f|_{\gamma_j^*} \in \mathcal{R}(\gamma_j)$, $j = 1,2$, to $f \in \mathcal{R}(\gamma_1 \oplus \gamma_2)$ oraz

$$\int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} f dl = \int_{\gamma_1} f dl + \int_{\gamma_2} f dl.$$

Istotnie, wystarczy rozważyć normalny ciąg podziałów będący „sumą” normalnych ciągów podziałów dla poszczególnych krzywych i udowodnić, że w definicji całki krzywoliniowej niezorientowanej możemy brać tylko takie normalne ciągi podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$, dla których $\widetilde{t} \in \pi_k$, $k \geqslant 1$, gdzie $\widetilde{t}$ jest ustalonym punktem z (a,b).

Rozważmy bowiem dowolny normalny ciąg podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ i ciąg punktów pośrednich $(\xi_k)_{k=1}^\infty$. Niech $(\pi_k')_{k=1}^\infty$ będzie ciągiem powstałym przez dołożenie punktu $\widetilde{t}$ i niech $(\xi_k')_{k=1}^\infty$ będzie uzupełnionym ciągiem punktów pośrednich (zachowujemy wszystkie dotychczasowe punkty pośrednie). Wtedy (por. dowód Propozycji 7.2.3) mamy:

$$|M(f,\gamma,\pi_k,\xi_k) - M(f,\gamma,\pi_k',\xi_k')| \leqslant 3\big(\sup_{\gamma^*}|f|\big)\omega_\gamma(\operatorname{diam}\pi_k);$$

([21]) Względem odległości euklidesowej.

([23]) $\gamma^* := \gamma([a,b])$ jest *obrazem geometrycznym* krzywej γ.

([24]) Uzasadnia to nazwę „całka niezorientowana”.

dalej rozumujemy standardowo.

(e) Operator $\mathcal{R}(\gamma) \ni f \longmapsto \int_\gamma f dl \in \mathbb{R}$ jest liniowy.

Propozycja 11.5.3. *Niech $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie drogą. Wtedy mamy $\mathcal{C}(\gamma^*) \subset \mathcal{R}(\gamma)$ oraz*

$$\int_\gamma f dl = \int_0^1 f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt, \quad f \in \mathcal{C}(\gamma^*). \quad (^{25})$$

Dowód. Możemy założyć, że γ jest klasy $\mathcal{C}^1$. Ustalmy podział $\pi = (t_0,\dots,t_m)$ oraz punkty pośrednie $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$. Wtedy

$$\begin{aligned}|M(f,\gamma,\pi,\xi) - M((f\circ\gamma)\|\gamma'\|,\pi,\xi)| &\leqslant \sum_{j=1}^m |f(\gamma(\xi_j))| \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) - \gamma'(\xi_j)(t_j - t_{j-1})\| \\ &\leqslant \big(\max_{\gamma^*}|f|\big)\omega_{\gamma'}(\operatorname{diam}\pi);\end{aligned}$$

dalej standardowo. □

Niech teraz $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie dowolną krzywą i niech $V = (V_1,\dots,V_n) : \gamma^* \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie dowolnym odwzorowaniem (*polem wektorowym*) ograniczonym. Dla podziału $\pi = (t_0,\dots,t_m)$ przedziału $[a,b]$ i dla punktów pośrednich $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ niech

$$M(V,\gamma,\pi,\xi) := \sum_{j=1}^m \langle V(\gamma(\xi_j)), \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\rangle. \quad (^{26})$$

Powiemy, że pole V jest *całkowalne wzdłuż krzywej* γ, jeżeli istnieje $c \in \mathbb{R}$ takie, że dla dowolnego normalnego ciągu podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ przedziału $[a,b]$ oraz dla dowolnego wyboru punktów pośrednich $(\xi_k)_{k=1}^\infty$ mamy:

$$M(V,\gamma,\pi_k,\xi_k) \longrightarrow c.$$

Liczbę c nazywamy *całką krzywoliniową zorientowaną z pola V po krzywej* γ i oznaczamy $c = \int_\gamma V dx = \int_\gamma V_1 dx_1 + \dots + V_n dx_n$.

Obserwacja 11.5.4. (a) Całkowalność i całka są niezależne od parametryzacji krzywej.

(b) Pole V jest całkowalne na γ wtedy i tylko wtedy, gdy jest całkowalne na $\ominus\gamma$. Ponadto,

$$\int_{\ominus\gamma} V dx = -\int_\gamma V dx \quad (^{27})$$

.

(c) Jeżeli $\gamma_j : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $j = 1,2$, są krzywymi takimi, że $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ oraz $V : \gamma_1^* \cup \gamma_2^* \longrightarrow \mathbb{R}^n$ jest odwzorowaniem takim, że V jest całkowalne osobno na γ_1 i γ_2, to V jest całkowalne na $\gamma_1 \oplus \gamma_2$ oraz

$$\int_{\gamma_1\oplus\gamma_2} V dx = \int_{\gamma_1} V dx + \int_{\gamma_2} V dx.$$

(d) Całka zorientowana po krzywej γ jest operatorem liniowym.

Propozycja 11.5.5. *Niech $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie drogą. Wtedy każde pole ciągłe V jest całkowalne na γ oraz*

$$\int_\gamma V dx = \int_0^1 \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt. \quad (^{28})$$

---

(25) Zauważmy, że całka po prawej stronie istnieje. Twierdzenie daje praktyczny sposób obliczania całek niezorientowanych.

(26) $\langle\ ,\ \rangle$ oznacza standardowy iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n$.

(27) Uzasadnia to nazwę „całka zorientowana”.

(28) Zauważmy, że całka po prawej stronie istnieje. Twierdzenie daje praktyczny sposób obliczania całek zorientowanych.

Dowód. Możemy założyć, że γ jest klasy $\mathcal{C}^1$. Ustalmy podział $\pi = (t_0,\dots,t_m)$ oraz punkty pośrednie $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_m)$. Wtedy

$$\begin{aligned}|M(V,\gamma,\pi,\xi) - M(\langle V\circ\gamma,\gamma'\rangle,\pi,\xi)| &\leqslant \sum_{j=1}^{m}\Big|\Big\langle V(\gamma(\xi_j)), \gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})-\gamma'(\xi_j)(t_j-t_{j-1})\Big\rangle\Big|\\ &\leqslant \big(\max_{\gamma^*}\|V\|\big)\omega_{\gamma'}(\operatorname{diam}\pi);\end{aligned}$$

dalej standardowo. □

Twierdzenie 11.5.6 (Niezależność całki krzywoliniowej od drogi całkowania)**.** *Niech $D\subset\mathbb{R}^n$ będzie obszarem i niech $V : D\longrightarrow\mathbb{R}^n$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) *dla dowolnej drogi $\gamma : [0,1]\longrightarrow D$ całka $\int_\gamma V dx$ zależy jedynie od końców tej drogi;*

(ii) *pole V jest* potencjalne*, tzn. istnieje funkcja $\Phi\in\mathcal{C}^1(D)$ (zwana* potencjałem*) taka, że*

$$V_j = \frac{\partial\Phi}{\partial x_j},\quad j=1,\dots,n.$$

Warunek (i) pozwala zdefiniować dla $A,B\in D$ całkę $\int_A^B V dx$ rozumianą jako całka po dowolnej drodze łączącej A i B wewnątrz obszaru D. W szczególności, całka po dowolnej drodze zamkniętej jest równa zero.

Zauważmy, że potencjał pola jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do stałej.

Dowód. (ii) $\Longrightarrow$ (i): Na podstawie Propozycji 11.5.5 dostajemy

$$\int_\gamma V dx = \int_0^1\langle V(\gamma(t)),\gamma'(t)\rangle dt = \int_0^1(\Phi\circ\gamma)'(t)dt = \Phi(\gamma(1)) - \Phi(\gamma(0)).$$

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Ustalmy $A\in D$ i niech

$$\Phi(x) := \int_A^x V dx,\quad x\in D.$$

Wtedy dla $a\in D$ i dla $j\in\{1,\dots,n\}$, korzystając z niezależności całki od drogi, mamy

$$\begin{aligned}\Big|\frac{\Phi(a+he_j)-\Phi(a)}{h} - V_j(a)\Big| &= \Big|\frac{1}{h}\int_{[a,a+he_j]} V dx - V_j(a)\Big| = \Big|\int_0^1 V_j(a+the_j)dt - V_j(a)\Big|\\ &\leqslant \max\{|V_j(a+the_j)-V_j(a)| : 0\leqslant t\leqslant 1\}\underset{h\to0}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$ □

Twierdzenie 11.5.7 (Lemat Poincarégo [29])**.** *Niech $D\subset\mathbb{R}^n$ będzie obszarem gwiaździstym względem punktu a i niech $V\in\mathcal{C}^1(D,\mathbb{R}^n)$. Wtedy V jest polem potencjalnym wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\frac{\partial V_j}{\partial x_k} = \frac{\partial V_k}{\partial x_j},\quad j,k=1,\dots,n.\quad [30] \tag{$*$}$$

Dowód. Oczywiście, jeżeli pole V jest potencjalne i Φ jest jego potencjałem, to Φ musi być klasy $\mathcal{C}^2$, a zatem:

$$\frac{\partial V_j}{\partial x_k} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_k\partial x_j} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_j\partial x_k} = \frac{\partial V_k}{\partial x_j},\quad j,k=1,\dots,n.$$

W drugą stronę: możemy założyć, że $a=0$. Niech

$$\Phi(x) := \int_{[0,x]} V dx = \int_0^1\langle V(tx),x\rangle dt = \int_0^1\sum_{i=1}^n V_i(tx)x_i dt,\quad x\in D.$$

---

[29] Jules Henri Poincaré (1854–1912).

[30] Mamy $\binom{n}{2}$ nietrywialnych warunków.

Na podstawie twierdzenia o funkcjach danych całką funkcja Φ jest klasy $\mathcal{C}^1$. Ponadto dla $x \in D$ i $j \in \{1, \dots, n\}$ mamy:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(x) = \int_0^1 \Big(\sum_{i=1}^n \frac{\partial V_i}{\partial x_j}(tx)tx_i + V_j(tx)) \Big) dt \overset{\text{na mocy } (*)}{=} \int_0^1 \Big(t \sum_{i=1}^n \frac{\partial V_j}{\partial x_i}(tx)x_i + V_j(tx)) \Big) dt$$
$$= \int_0^1 \Big(t \frac{d}{dt} V_j(tx) + V_j(tx) \Big) dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}(tV_j(tx))dt = tV_j(tx)|_0^1 = V_j(x). \qquad \square$$

11.6. Wzór Greena

Wiadomo, że każda krzywa Jordana $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dzieli płaszczyznę na dwa obszary:
- ograniczony, zwany *wnętrzem krzywej* γ i oznaczany $\operatorname{int}\gamma$,
- nieograniczony, zwany *zewnętrzem krzywej* γ i oznaczany $\operatorname{ext}\gamma$,

takie, że $\partial(\operatorname{int}\gamma) = \partial(\operatorname{ext}\gamma) = \gamma^*$.

Niech $D \subset \mathbb{R}^2$ będzie obszarem ograniczonym takim, że dla pewnego $N \in \mathbb{N}_0$ mamy:

(†) $\partial D = \gamma_0^* \cup \dots \cup \gamma_N^*$, gdzie $\gamma_j : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ jest drogą Jordana (31) *zorientowaną dodatnio względem* D, tzn. „gdy idziemy po γ_j^* zgodnie z przebiegiem parametru, to obszar D mamy po lewej ręce" (32), $j = 0, \dots, N$,
$\gamma_j^* \subset \operatorname{int}\gamma_0$, $j = 1, \dots, N$,
$\gamma_j^* \subset \operatorname{ext}\gamma_k^*$ dla $j, k = 1, \dots, N$, $j \neq k$.

Powiemy, że dla obszaru ograniczonego $D \subset \mathbb{R}^2$ spełniającego warunek (†) zachodzi *wzór Greena* (33), jeżeli dla dowolnych funkcji $P, Q \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, gdzie Ω jest pewnym otoczeniem $\overline{D}$, zachodzi wzór:

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \int_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \Big). \quad (34)$$

Zauważmy, że na mocy Propozycji 11.1.10(b) obszar D jest regularny oraz, że całki po obu stronach powyższego wzoru istnieją. Problemem jest równość.

Obserwacja 11.6.1. (a) Przypuśćmy, że D jest *normalny względem osi* x, tzn.

$$D = \{(x, y) \in (a, b) \times \mathbb{R} : \varphi(x) < y < \psi(x)\},$$

gdzie $\varphi, \psi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ są funkcjami ciągłymi, kawałkami klasy $\mathcal{C}^1$ i $\varphi(x) < \psi(x)$ dla $x \in (a, b)$ (35). Niech dalej $Q := 0$. Wtedy, na podstawie twierdzenia o całkach iterowanych, mamy:

$$\int_D \Big(\frac{\partial 0}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \Big) = -\int_a^b \Big(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \Big) dx = \int_a^b [P(x, \varphi(x)) - P(x, \psi(x))]dx$$
$$= \int_{[a,b] \ni t \longrightarrow (t, \varphi(t))} Pdx + 0dy + \int_{\ominus\left([a,b] \ni t \longrightarrow (t, \psi(t))\right)} Pdx + 0dy = \int_{\partial D} Pdx + 0dy.$$

(b) Jeżeli D jest normalny względem osi y, to

$$\int_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial 0}{\partial y} \Big) = \int_{\partial D} 0dx + Qdy.$$

(c) Wzór Greena zachodzi dla obszarów normalnych względem obu osi (np. dla prostokątów, trójkątów, elips, wielokątów wypukłych itd).

(d) Wzór Greena zachodzi dla obszarów, które dają się podzielić na skończoną liczbę obszarów normalnych względem obu osi (np. dla wielokątów (mogących mieć „dziury")).

---

(31) Tzn. drogą będącą krzywą Jordana.

(32) Pojęcie to sformalizujemy w przyszłości.

(33) George Green (1793–1841).

(34) Stosujemy tu tradycyjne oznaczenia; $\int_{\partial D} Pdx + Qdy := \sum_{j=0}^N \int_{\gamma_j} Pdx + Qdy$.

(35) Nie wykluczamy równości na końcach przedziału.

Aby poznać ogólniejszą klasę obszarów, dla których zachodzi wzór Greena, rozważmy następującą konstrukcję.

Niech $\pi = (t_0, \dots, t_m)$ będzie podziałem $[0,1]$ takim, że $\gamma_j|_{[t_{i-1},t_i]}$ jest klasy $\mathcal{C}^1$ dla dowolnych $j = 0, \dots, N$, $i = 1, \dots, m$ $(m \gg 1)$. Niech $\gamma_{j,\pi}$ oznacza łamaną wpisaną w γ_j wyznaczoną przez podział π, tzn. przez punkty $(\gamma_j(t_0), \dots, \gamma_j(t_m))$, $j = 0, \dots, N$.

Ćwiczenie 11.6.2. Pokazać, że jeżeli $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ jest drogą, to dla dowolnego normalnego ciągu podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ mamy $\gamma_{\pi_k} \longrightarrow \gamma$ jednostajnie na $[0,1]$.

Lemat 11.6.3. *Jeżeli $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ jest krzywą Jordana klasy $\mathcal{C}^1$, $\gamma'(0) = \gamma'(1)$, $\gamma'(t) \neq 0$, $t \in [0,1]$, to γ_π jest Jordana dla dostatecznie drobnych podziałów π.*

Dowód. Przypuśćmy, że istnieje normalny ciąg podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ oraz punkty $u'_k, u''_k \in [0,1]$, $k = 1, 2, \dots$, takie że $|u'_k - u''_k| < 1$ oraz $\gamma_{\pi_k}(u'_k) = \gamma_{\pi_k}(u''_k)$, $k = 1, 2, \dots$. Możemy założyć, że $u'_k \longrightarrow u'_0$, $u''_k \longrightarrow u''_0$. Na podstawie Ćwiczenia 11.6.2 wnioskujemy, że $\gamma(u'_0) = \gamma(u''_0)$.

Odwzorowanie γ przedłuża się w sposób naturalny do odwzorowania $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, klasy $\mathcal{C}^1$, okresowego o okresie 1 i takiego, że $\gamma'(t) \neq 0$ dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$. Korzystając z twierdzenia o funkcji uwikłanej, widzimy, że dla dowolnego $u \in [0,1]$ istnieje ograniczony prostokąt otwarty P_u o środku w punkcie $\gamma(u)$ taki, że $\gamma^* \cap P_u$ jest wykresem (względem którejś osi). Niech dla przykładu $P_u = \gamma(u) + (-r_1, r_1) \times (-r_2, r_2)$ oraz $\gamma^* \cap P_u = \{(x, \varphi(x)) : |x - \gamma_1(u)| < r_1\}$. Niech $Q_u := \gamma(u) + (-r_1/2, r_1/2) \times (-r_2, r_2)$. Zauważmy, że $\gamma^*_{\pi_k} \cap Q_u$ musi być łukiem Jordana dla $k \geqslant k(u) \gg 1$. Dobierzmy $u_1, \dots, u_N \in [0,1]$ tak, że $\gamma^* \subset Q_{u_1} \cup \dots \cup Q_{u_N}$.

W przypadku, gdy $u'_0 = u''_0 =: t_0$, niech $\gamma(t_0) \in Q_{u_{j_0}}$. Wtedy $\gamma_{\pi_k}(u'_k), \gamma_{\pi_k}(u''_k) \in Q_{u_{j_0}}$ dla $k \gg 1$, a więc $\gamma_{\pi_k}(u'_k) \neq \gamma_{\pi_k}(u''_k)$ dla $k \gg 1$ — sprzeczność. W przypadku, gdy np. $u'_0 = 0$, $u''_0 = 1$, wystarczy skorzystać z okresowości — Ćwiczenie. □

Ćwiczenie 11.6.4. Znaleźć przykład drogi Jordana $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ takiej, że dla pewnego normalnego ciągu podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$, krzywa γ_{π_k} nie jest Jordana, $k = 1, 2, \dots$.

Twierdzenie 11.6.5 (Wzór Greena). *Niech $D \subset \mathbb{R}^2$ będzie obszarem spełniającym (†). Załóżmy dodatkowo, że γ_{j,π_k} jest krzywą Jordana dla $j = 0, \dots, N$ i pewnego normalnego ciągu podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$. Wtedy wzór Greena zachodzi.*

W szczególności, jeżeli $\gamma_j : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ jest krzywą Jordana klasy $\mathcal{C}^1$, $\gamma'_j(0) = \gamma'_j(1)$, $\gamma'_j(t) \neq 0$, $t \in [0,1]$, $j = 0, \dots, N$, to wzór Greena zachodzi (por. Lemat 11.6.3).

W przyszłości pokażemy, że powyższe dodatkowe założenie można pominąć, a więc *wzór Greena zachodzi dla dowolnego obszaru spełniającego* (†) — zob. Twierdzenie 13.3.4.

Dowód. Niech D_{π_k} oznacza obszar ograniczony krzywymi γ_{j,π_k}, $j = 0, \dots, N$. Widać, że $\overline{D}_{\pi_k} \subset \Omega$, $k \gg 1$. Na podstawie poprzedniej części dowodu wzór Greena zachodzi dla D_{π_k}, $k \gg 1$. Jeżeli pokażemy zbieżność do siebie odpowiednich całek gdy $k \longrightarrow +\infty$, to uzyskamy wzór Greena dla D.

Lemat 11.6.6. *Niech $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie krzywą kawałkami klasy $\mathcal{C}^1$, niech γ_π oznacza łamaną wpisaną w γ wyznaczoną przez podział $\pi = (t_0, \dots, t_m)$ odcinka $[0,1]$ i niech $V : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie ciągłym polem wektorowym określonym w pewnym otoczeniu Ω zbioru γ^*. Wtedy*

$$\int_{\gamma_\pi} V\,dx \underset{\operatorname{diam}\pi \to 0}{\longrightarrow} \int_\gamma V\,dx.$$

Dowód. Możemy założyć, że γ jest klasy $\mathcal{C}^1$. Mamy:

$$\gamma_\pi(t) := \gamma(t_{i-1}) + \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})), \quad t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Możemy założyć (zmniejszając Ω), że V jest odwzorowaniem ograniczonym i jednostajnie ciągłym na Ω. Liczymy:

$$\begin{aligned}\Big| \int_{\gamma_\pi} V\,dx - \int_\gamma V\,dx \Big| &\overset{11.5.5}{\leqslant} \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Big| \Big\langle V(\gamma_\pi(t)), \gamma'_\pi(t) \Big\rangle - \Big\langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \Big\rangle \Big|\,dt \\ &= \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Big| \Big\langle V(\gamma_\pi(t)), \frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \Big\rangle - \Big\langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \Big\rangle \Big|\,dt\end{aligned}$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Big| \Big\langle V(\gamma_\pi(t)), \frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) - \gamma'(t)(t_i - t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \Big\rangle \Big| \, dt$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Big| \Big\langle V(\gamma_\pi(t)) - V(\gamma(t)), \gamma'(t) \Big\rangle \Big| \, dt$$
$$\leqslant \big(\sup_{\Omega} \|V\|\big)\omega_{\gamma'}(\operatorname{diam}\pi) + \big(\max_{\gamma^*} \|\gamma'\|\big)\omega_V(\omega_\gamma(\operatorname{diam}\pi)). \qquad \square$$

Z powyższego lematu wynika natychmiast, że

$$\int_{\partial D_\pi} Pdx + Qdy \underset{\operatorname{diam}\pi \to 0}{\longrightarrow} \int_{\partial D} Pdx + Qdy.$$

Niech $f := \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$. Możemy założyć, że $|f| \leqslant c$ na Ω (36). Wtedy

$$\Big| \int_{D_\pi} f - \int_D f \Big| \leqslant c(|D \setminus D_\pi| + |D_\pi \setminus D|). \quad (37)$$

Pozostaje udowodnić, że $|D \setminus D_\pi| + |D_\pi \setminus D| \longrightarrow 0$, gdy $\operatorname{diam}\pi \longrightarrow 0$. Istotnie, niech $\varepsilon > 0$ i niech $Q_1, \dots, Q_r$ będą kwadratami takimi, że $\partial D \subset \operatorname{int} Q_1 \cup \dots \cup \operatorname{int} Q_r$ i $|Q_1| + \dots + |Q_r| \leqslant \varepsilon$ (por. dowód Propozycji 11.1.10). Wtedy, jeżeli średnica podziału π jest dostatecznie mała, to $(D \setminus D_\pi) \cup (D_\pi \setminus D) \subset Q_1 \cup \dots \cup Q_r$, a zatem

$$|D \setminus D_\pi| + |D_\pi \setminus D| \leqslant |Q_1| + \dots + |Q_r| \leqslant \varepsilon. \qquad \square$$

Wniosek 11.6.7. *Jeżeli dla obszaru D zachodzi wzór Greena, to*

$$2|D| = \int_{\partial D} -ydx + xdy.$$

Obserwacja 11.6.8. Przy pewnych szczególnych dodatkowych założeniach, wzór Greena może być wykorzystany do udowodnienia wzoru na zmianę zmiennych w całce Riemanna (Twierdzenie 11.3.7) dla $n = 2$.

Załóżmy, że $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2) : U \longrightarrow V$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^2$ zbiorów otwartych $U, V \subset \mathbb{R}^2$. Zmienne w U będziemy oznaczać (x, y), zaś w V — (u, v). Niech $P, Q \in \mathcal{C}^1(V)$, $f := \frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}$ (38). Niech $D \subset\subset U$ będzie obszarem spełniającym (†) o gładkim brzegu klasy $\mathcal{C}^1$ (tzn. spełnione są założenia z Lematu 11.6.3). Zauważmy, że wtedy obszar $\Phi(D)$ spełnia również (†) z tym, że orientacja $\partial\Phi(D)$ może się zmienić na przeciwną. Niech $\varepsilon := 1$, gdy orientacja się nie zmienia i $\varepsilon := -1$, gdy zmienia się na przeciwną. Obszar $\Phi(D)$ spełnia również założenia z Lematu 11.6.3. Będziemy chcieli pokazać, że

$$\int_{\Phi(D)} f = \int_D (f \circ \Phi)|\Phi'|.$$

Korzystając ze woru Greena liczymy:

$$\int_{\Phi(D)} f = \int_{\Phi(D)} \Big(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \Big) = \varepsilon \int_{\partial\Phi(D)} Pdu + Qdv = \varepsilon \sum_{j=0}^{N} \int_{\Phi\circ\gamma_j} Pdu + Qdv$$
$$= \varepsilon \sum_{j=0}^{N} \int_0^1 ((P \circ \Phi \circ \gamma_j)(\Phi_1 \circ \gamma_j)' + (Q \circ \Phi \circ \gamma_j)(\Phi_2 \circ \gamma_j)')dt$$
$$= \varepsilon \sum_{j=0}^{N} \int_0^1 \Big((P \circ \Phi \circ \gamma_j) \Big(\Big(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \circ \gamma_j \Big) \gamma'_{j,1} + \Big(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \circ \gamma_j \Big) \gamma'_{j,2} \Big) + (Q \circ \Phi \circ \gamma_j) \Big(\Big(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \circ \gamma_j \Big) \gamma'_{j,1} + \Big(\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \circ \gamma_j \Big) \gamma'_{j,2} \Big) \Big) dt$$
$$= \varepsilon \int_{\partial D} \Big((P \circ \Phi) \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + (Q \circ \Phi) \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \Big) dx + \Big((P \circ \Phi) \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + (Q \circ \Phi) \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \Big) dy$$
$$= \varepsilon \int_D \Big(\frac{\partial}{\partial x} \Big((P \circ \Phi) \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + (Q \circ \Phi) \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \Big) - \frac{\partial}{\partial y} \Big((P \circ \Phi) \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + (Q \circ \Phi) \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \Big) \Big)$$
$$\overset{\text{Ćwiczenie}}{=} \varepsilon \int_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial u} \circ \Phi - \frac{\partial P}{\partial v} \circ \Phi \Big) \Big(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \Big) = \int_D (f \circ \Phi)|\Phi'|.$$

---

(36) Zmniejszając ewentualnie Ω.

(37) Zauważmy, że zbiory $D \setminus D_\pi$, $D_\pi \setminus D$ są regularne.

(38) Ćwiczenie: Proszę spróbować ocenić, na ile to założenie jest ograniczające.