Sprawy organizacyjne

Literatura

Wykład będzie w zasadzie „samowystarczalny”. Oto kilka pozycji przydatnej literatury uzupełniającej (wszystkie pozycje zostały wydane przez PWN, z wyjątkiem książek H. Cartana i H. Federera):

Andrzej Birkholc, *Analiza matematyczna.*

Henri Cartan, *Calcul différentiel. Formes différentielles*, Herman, Paris.

Ryszard Engelking, *Topologia ogólna.*

Herbert Federer, *Geometric measure theory*, Springer Verlag, Berlin.

Grigorij Michajłowicz Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. I–III.

Franciszek Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy.*

Witold Kołodziej, *Analiza matematyczna.*

Kazimierz Kuratowski, *Rachunek różniczkowy i całkowy.*

Stanisław Łojasiewicz, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych.*

Krzysztof Maurin, *Analiza*, t. I–II.

Walter Rudin, *Podstawy analizy matematycznej.*

Walter Rudin, *Analiza rzeczywista i zespolona.*

Laurent Schwartz, *Kurs analizy matematycznej*, t. I–II.

Program wykładu

(1) Pochodne kierunkowe.
(2) Różniczkowanie odwzorowań zmiennej wektorowej.
(3) Twierdzenia o przyrostach skończonych.
(4) Różniczki cząstkowe.
(5) Druga pochodna.
(6) Przestrzenie wieloliniowe.
(7) Pochodne wyższych rzędów.
(8) Twierdzenie o różniczkowaniu szeregu wyraz po wyrazie.
(9) Wzór Taylora.
(10) Szereg Taylora.
(11) Ekstrema lokalne.
(12) Odwzorowania analityczne.
(13) Dyfeomorfizmy.
(14) Twierdzenie o odwzorowaniu odwrotnym i twierdzenie o odwzorowaniu uwikłanym.
(15) Twierdzenie o rzędzie.
(16) Podrozmaitości lokalne.
(17) Ekstrema warunkowe.
(18) Orientacja.
(19) Całka Riemanna na kostce.
(20) Całka Riemanna na zbiorze mierzalnym w sensie Jordana.
(21) Własności całki Riemanna.
(22) Funkcje dane całką.
(23) Twierdzenie Morse’a.
(24) Całki krzywoliniowe.
(25) Wzór Greena.

Sposób prowadzenia wykładu

Aż do odwołania wykład będzie prowadzony w wersji zdalnej. W zwykłym miejscu znajdziecie Państwo sukcesywnie umieszczane pliki zawierające:

— wykład w formacie pdf z podziałem na poszczególne wykłady (tak jak to było dotychczas),

— wykład w wersji wideo z podziałem na poszczególne grupy tematyczne (które nie muszą odpowiadać dokładnie wykładom w pliku pdf).

Wszelkie pytania i uwagi proszę kierować do mnie e-mailem.

Kontynuacje

W przyszłym semestrze będą wykłady z Analizy Matematycznej 4 (60 godzin).

Zaliczanie ćwiczeń

Sposób zaliczania ćwiczeń ustala prowadzący ćwiczenia.

Egzaminy

Egzamin będzie ustny, najprawdopodobniej w trybie zdalnym.

W ciągu całego semestru, aż do rozpoczęcia zimowej sesji egzaminacyjnej, można zdawać w trybie zdalnym egzaminy częściowe, po wcześniejszym umówieniu terminu przy pomocy e-maila. Egzamin częściowy może obejmować dowolny fragment wykładu. Zdane fragmenty wykładu nie obowiązują podczas głównego egzaminu w sesji egzaminacyjnej.

ROZDZIAŁ 9

Różniczkowanie odwzorowań

[Wykład 05.10.2020 . . . .]

9.1. Pochodne kierunkowe

Definicja 9.1.1. Niech E i F będą przestrzeniami unormowanymi nad $\mathbb{R}$, niech $\Omega \in \operatorname{top} E$ i niech $f : \Omega \longrightarrow F$. Dla $a \in \Omega$ i $\xi \in E$, niech $\Omega_{a,\xi} := \{t \in \mathbb{R} : a + t\xi \in \Omega\}$. Oczywiście $\Omega_{a,0} = \mathbb{R}$ i $0 \in \Omega_{a,\xi}$. Dla $\xi \neq 0$, zbiór $\Omega_{a,\xi}$ jest izomorficzny z $\Omega \cap (a + \mathbb{R}\xi)$. Łatwo widać, że $\Omega_{a,\xi} \in \operatorname{top} \mathbb{R}$. Niech

$$\Omega_{a,\xi} \ni t \overset{f_{a,\xi}}{\longmapsto} f(a + t\xi) \in F.$$

Oczywiście $f_{a,0} \equiv f(a)$, $f_{a,\xi}(0) = f(a)$. Dla $\xi \neq 0$, funkcję $f_{a,\xi}$ możemy utożsamiać z $f|_{\Omega \cap (a+\mathbb{R}\xi)}$.

Jeżeli $f'_{a,\xi}(0)$ istnieje, to mówimy że f ma *pochodną kierunkową w punkcie a w kierunku ξ* i definiujemy

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(a) := f'_{a,\xi}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\xi) - f(a)}{t}.$$

Oczywiście $\frac{\partial f}{\partial 0}(a)$ zawsze istnieje i $\frac{\partial f}{\partial 0}(a) = 0$. Zauważmy, że dla $\alpha \in \mathbb{R}_*$ mamy

$$\frac{\partial f}{\partial(\alpha\xi)}(a) \text{ istnieje } \iff \frac{\partial f}{\partial \xi}(a) \text{ istnieje; ponadto, } \frac{\partial f}{\partial(\alpha\xi)}(a) = \alpha\frac{\partial f}{\partial \xi}(a).$$

Dla $E = \mathbb{R}$ i $\xi \neq 0$ mamy: $\frac{\partial f}{\partial \xi}(a)$ istnieje $\iff f'(a)$ istnieje; ponadto, $\frac{\partial f}{\partial \xi}(a) = f'(a)\xi$.

Obserwacja 9.1.2. Ponieważ różniczkowanie „kierunkowe” sprowadza się do różniczkowania pewnej pomocniczej funkcji jednej zmiennej rzeczywistej, wiele reguł różniczkowania kierunkowego wynika natychmiast z odpowiednich własności różniczkowania funkcji jednej zmiennej rzeczywistej, np. (przy oczywistych założeniach o f i g) mamy:

- Niech $f, g : \Omega \longrightarrow F$, $a \in \Omega$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Jeżeli $\frac{\partial f}{\partial \xi}(a)$ i $\frac{\partial g}{\partial \xi}(a)$ istnieją, to $\frac{\partial(\alpha f + \beta g)}{\partial \xi}(a)$ istnieje oraz $\frac{\partial(\alpha f + \beta g)}{\partial \xi}(a) = \alpha\frac{\partial f}{\partial \xi}(a) + \beta\frac{\partial g}{\partial \xi}(a)$.
- Niech $f : \Omega \longrightarrow F$, $g : \Omega \longrightarrow G$, $a \in \Omega$. Jeżeli $\frac{\partial f}{\partial \xi}(a)$ i $\frac{\partial g}{\partial \xi}(a)$ istnieją oraz $B \in \mathcal{L}(F, G; H)$, to $\frac{\partial(B(f,g))}{\partial \xi}(a)$ istnieje oraz $\frac{\partial(B(f,g))}{\partial \xi}(a) = B\big(\frac{\partial f}{\partial \xi}(a), g(a)\big) + B\big(f(a), \frac{\partial g}{\partial \xi}(a)\big)$.

Przykład 9.1.3. Niech

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{x_1^4 x_2^2}{x_1^8 + x_2^4}, & \text{jeżeli } (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0, & \text{jeżeli } (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}.$$

Wtedy $\frac{\partial f}{\partial \xi}(0,0) = 0$ dla dowolnego $\xi \in \mathbb{R}^2$. Istotnie, dla $\xi \neq (0,0)$ mamy $\frac{f(t\xi) - f(0)}{t} = \frac{t\xi_1^4 \xi_2^2}{t^4\xi_1^8 + \xi_2^4}$.

Z drugiej strony, $f(t, t^2) = \frac{1}{2}$, a więc, w szczególności, f nie jest ciągła w $(0,0)$.

Definicja 9.1.4. Mówimy, że f ma w punkcie a *różniczkę Gâteaux (różniczkę słabą)* (1), jeżeli $\frac{\partial f}{\partial \xi}(a)$ istnieje dla dowolnego $\xi \in E$ oraz odwzorowanie $E \ni \xi \overset{\delta_a f}{\longmapsto} \frac{\partial f}{\partial \xi}(a) \in F$ jest liniowe (2) i ciągłe; odwzorowanie to nazywamy *różniczką Gâteaux odwzorowania f w punkcie a*.

Obserwacja 9.1.5. (a) Przykład 9.1.3 pokazuje, że istnienie różniczki Gâteaux nie implikuje nawet ciągłości odwzorowania w punkcie.

(1) René Gâteaux (1880–1914).

(2) Wiemy, że odwzorowanie to jest zawsze jednorodne. Zatem liniowość oznacza tu addytywność.

(b) Jeżeli $L : E \longrightarrow F$ jest operatorem liniowym nieciągłym (takim, jak, np. w Obserwacji 5.11.2), to $\frac{\partial L}{\partial \xi}(0) = L(\xi)$ dla dowolnego $\xi \in E$. W szczególności, odwzorowanie $E \ni \xi \longmapsto \frac{\partial L}{\partial \xi}(a) \in F$ jest liniowe, ale nieciągłe.

(c) Dla $E = \mathbb{R}$ mamy: $\delta_a f$ istnieje $\Longleftrightarrow f'(a)$ istnieje.

(d) Niech

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{jeżeli } (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0, & \text{jeżeli } (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}.$$

Wtedy $\frac{\partial f}{\partial (1,0)}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial (0,1)}(0,0) = 0$, ale $\frac{\partial f}{\partial ((1,0)+(0,1))}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial (1,1)}(0,0)$ nie istnieje.

(e) Niech

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{x_1 x_2 (x_1 - x_2)}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{jeżeli } (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0, & \text{jeżeli } (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}.$$

Wtedy $\frac{\partial f}{\partial \xi}(0,0) = f(\xi)$ dla dowolnego $\xi \in \mathbb{R}^2$, ale odwzorowanie $\mathbb{R}^2 \ni \xi \longmapsto \frac{\partial f}{\partial \xi}(0,0) \in \mathbb{R}$ nie jest liniowe.

Definicja 9.1.6. (a) Jeżeli $E = \mathbb{R}^n$ i $(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)$ jest bazą kanoniczną w $\mathbb{R}^n$, to $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) := \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}_j}(a)$ nazywamy j-tą *pochodną cząstkową* (o ile istnieje).

(b) Jeżeli ponadto $F = \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$, to macierz

$$Jf(a) := \left[\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a)\right]_{\substack{j=1,\dots,m \\ k=1,\dots,n}} \in \mathbb{M}(m \times n; \mathbb{R})$$

(o ile wszystkie pochodne cząstkowe istnieją) nazywamy *macierzą Jacobiego odwzorowania f w punkcie a* (3).

(c) Jeżeli $m = 1$, to macierz Jacobiego nazywamy *gradientem* funkcji f w punkcie a:

$$\operatorname{grad} f(a) = \left[\tfrac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \tfrac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right] \in \mathbb{M}(1 \times n; \mathbb{R}).$$

(d) Jeżeli $m = n$, to $\det Jf(a)$ nazywamy *jakobianem* odwzorowania f w punkcie a.

Obserwacja 9.1.7. (a) Jeżeli E jest skończenie wymiarowa, to dla istnienia różniczki Gâteaux istotna jest tylko liniowość odwzorowania $\xi \longmapsto \frac{\partial f}{\partial \xi}(a)$.

(b) Jeżeli $F = F_1 \times \dots \times F_N$, $f = (f_1, \dots, f_N)$, to $\delta_a f$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $\delta_a f_1, \dots, \delta_a f_N$ istnieją. Ponadto, $\delta_a f := (\delta_a f_1, \dots, \delta_a f_N)$.

(c) Jeżeli $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^m$ i $\delta_a f$ istnieje, to $Jf(a)$ jest reprezentacją macierzową $\delta_a f$, czyli

$$(\delta_a f)(\xi) = \frac{\partial f}{\partial \xi}(a) = Jf(a).\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

W szczególności, jeżeli $m = 1$, to

$$(\delta_a f)(\xi) = \frac{\partial f}{\partial \xi}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\xi_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\xi_n = \operatorname{grad} f(a).\xi, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Przykład 9.1.5(d) pokazuje, że może być tak, że $\operatorname{grad} f(a)$ ma sens, ale $\frac{\partial f}{\partial \xi}(a)$ nie istnieje dla pewnych ξ.

Definicja 9.1.8. Niech $\xi_1, \dots, \xi_k \in E$. Jeżeli pochodna kierunkowa $\frac{\partial^{k-1} f}{\partial \xi_{k-1} \dots \partial \xi_1}(x)$ rzędu $(k-1)$ w kierunku wektorów $\xi_1, \dots, \xi_{k-1}$ istnieje dla x z pewnego otoczenia punktu a, to definiujemy *pochodną kierunkową rzędu k w kierunku wektorów* $\xi_1, \dots, \xi_k$ jako

$$\frac{\partial^k f}{\partial \xi_k \dots \partial \xi_1}(a) = \frac{\partial}{\partial \xi_k}\Big(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial \xi_{k-1} \dots \partial \xi_1}\Big)(a).$$

W szczególności, dla $E = \mathbb{R}^n$ definiujemy n^k *pochodnych cząstkowych rzędu k*:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}}(a), \quad i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}.$$

---

(3) Carl Jacobi (1804–1851).

Obserwacja 9.1.9 (Ćwiczenie).

$$\frac{\partial^{k+\ell} f}{\partial\xi_{k+\ell}\dots\partial\xi_1}(a)=\frac{\partial^{\ell}}{\partial\xi_{k+\ell}\dots\partial\xi_{k+1}}\Big(\frac{\partial^k f}{\partial\xi_k\dots\partial\xi_1}\Big)(a).$$

Przykład 9.1.10. Niech

$$f(x_1,x_2):=\begin{cases}\frac{x_1x_2(x_1^2-x_2^2)}{x_1^2+x_2^2}, & \text{jeżeli } (x_1,x_2)\neq(0,0)\\ 0, & \text{jeżeli } (x_1,x_2)=(0,0)\end{cases}.$$

Wtedy $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$ i $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)$ istnieją dla dowolnego $x\in\mathbb{R}^2$ ($\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0)=0$) oraz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(0,0)=-\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(0,0)=1.$$

Istotnie, wobec związku $f(x_2,x_1)=-f(x_1,x_2)$, wystarczy pokazać pierwszą równość. Mamy

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(0,0)&=\lim_{t\to0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(t,0)-\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0)}{t}\\ &=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}\Big(\frac{(x_1(x_1^2-x_2^2)+x_1x_2(-2x_2))(x_1^2+x_2^2)-x_1x_2(x_1^2-x_2^2)2x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2}\Big|_{(x_1,x_2)=(t,0)}\Big)=1.\end{aligned}$$

[Wykład 08.10.2020 . . . .]

Twierdzenie 9.1.11 (Twierdzenie o równości pochodnych mieszanych)**.** *Załóżmy, że pochodne* $\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}(x)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial\eta\partial\xi}(x)$ *istnieją dla x z otoczenia punktu a i są ciągłe w punkcie a. Wtedy* $\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}(a)=\frac{\partial^2 f}{\partial\eta\partial\xi}(a)$.

Dowód. Możemy założyć, że $\xi,\eta\neq0$ i, dalej, że $\|\xi\|=\|\eta\|=1$. Niech kula $B(a,3r)\subset\Omega$ będzie taka, że pochodne mieszane istnieją dla dowolnego punktu $x\in B(a,3r)$. Zdefiniujmy

$$\Phi(t):=f(a+t\xi+t\eta)-f(a+t\xi)-f(a+t\eta)+f(a)-t^2\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}(a),\quad |t|\leqslant r.$$

Pokażemy, że $\Phi(t)/t^2\longrightarrow0$ przy $t\longrightarrow0+$, co wobec symetrii wyrażenia $f(a+t\xi+t\eta)-f(a+t\xi)-f(a+t\eta)+f(a)$, da żądany wynik. Wystarczy pokazać, że

$$\|\Phi(t)\|\leqslant t^2\sup\Big\{\Big\|\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}(a+x\xi+y\eta)-\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}(a)\Big\|:0\leqslant x,y\leqslant t\Big\},\quad 0\leqslant t\leqslant r. \tag{†}$$

Ustalmy $0<t\leqslant r$ i niech

$$g(y):=f(a+t\xi+y\eta)-f(a+y\eta)-ty\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}(a),\quad 0\leqslant y\leqslant r.$$

Mamy $\Phi(t)=g(t)-g(0)$. Ponadto,

$$g'(y)=\frac{\partial f}{\partial\eta}(a+t\xi+y\eta)-\frac{\partial f}{\partial\eta}(a+y\eta)-t\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}(a).$$

Na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych, mamy:

$$\|\Phi(t)\|\leqslant t\sup\{\|g'(y)\|:0\leqslant y\leqslant t\}. \tag{‡}$$

Ustalmy teraz $0<y\leqslant t$ i niech

$$h(x):=\frac{\partial f}{\partial\eta}(a+x\xi+y\eta)-x\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}(a),\quad 0\leqslant x\leqslant r.$$

Mamy $g'(y)=h(t)-h(0)$. Ponadto,

$$h'(x)=\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}(a+x\xi+y\eta)-\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}(a).$$

Na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych, dostajemy

$$\|g'(y)\|\leqslant t\sup\{\|h'(x)\|:0\leqslant x\leqslant t\},$$

co łącznie z (‡) daje (†). □

Twierdzenie 9.1.12. *Niech $\xi_1, \dots, \xi_k \in E$ ($k \geqslant 2$). Załóżmy, że dla dowolnego $\ell \in \{2, \dots, k\}$ i dla dowolnego odwzorowania injektywnego $\tau : \{1, \dots, \ell\} \longrightarrow \{1, \dots, k\}$, pochodna kierunkowa $\frac{\partial^\ell f}{\partial \xi_{\tau(\ell)} \dots \partial \xi_{\tau(1)}}(x)$ istnieje dla $x \in \Omega$ oraz funkcja $\Omega \ni x \longmapsto \frac{\partial^\ell f}{\partial \xi_{\tau(\ell)} \dots \partial \xi_{\tau(1)}}(x)$ jest ciągła na całym Ω dla $\ell < k$ oraz jest ciągła w punkcie a dla $\ell = k$. Wtedy dla dowolnej permutacji k–elementowej σ mamy:*

$$\frac{\partial^k f}{\partial \xi_{\sigma(k)} \dots \partial \xi_{\sigma(1)}}(a) = \frac{\partial^k f}{\partial \xi_k \dots \partial \xi_1}(a).$$

Dowód. Zastosujemy indukcję ze względu na k. Przypadek $k = 2$ został rozwiązany w poprzednim twierdzeniu. Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla $k - 1 \geqslant 2$ i niech σ będzie dowolną permutacją k elementową.

Przypadek $\sigma(j) = j$, $j = 1, \dots, k-2$, $\sigma(k-1) = k$, $\sigma(k) = k-1$ redukuje się do przypadku $k = 2$:

$$\frac{\partial^k f}{\partial \xi_{\sigma(k)} \dots \partial \xi_{\sigma(1)}}(a) = \frac{\partial^2}{\partial \xi_{k-1} \partial \xi_k}\Big(\frac{\partial^{k-2} f}{\partial \xi_{k-2} \dots \partial \xi_1}\Big)(a) = \frac{\partial^2}{\partial \xi_k \partial \xi_{k-1}}\Big(\frac{\partial^{k-2} f}{\partial \xi_{k-2} \dots \partial \xi_1}\Big)(a) = \frac{\partial^k f}{\partial \xi_k \dots \partial \xi_1}(a).$$

Przypadek $\sigma(k) = k$ wynika z założenia indukcyjnego:

$$\frac{\partial^k f}{\partial \xi_{\sigma(k)} \dots \partial \xi_{\sigma(1)}}(a) = \frac{\partial}{\partial \xi_k}\Big(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial \xi_{\sigma(k-1)} \dots \partial \xi_{\sigma(1)}}\Big)(a) = \frac{\partial}{\partial \xi_k}\Big(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial \xi_{k-1} \dots \partial \xi_1}\Big)(a) = \frac{\partial^k f}{\partial \xi_k \dots \partial \xi_1}(a).$$

Pozostałe przypadki wynikają z faktu, iż każda permutacja jest złożeniem pewnej liczby permutacji powyższych dwóch typów. □

9.2. Różniczkowanie odwzorowań zmiennej wektorowej

Niech E i F będą przestrzeniami unormowanymi nad $\mathbb{K}$, niech $\Omega \in \operatorname{top} E$, $f : \Omega \longrightarrow F$ i niech $a \in \Omega$.

Definicja 9.2.1. Powiemy, że odwzorowanie f jest *różniczkowalne* w punkcie a (ma w punkcie a *różniczkę Frécheta (mocną)*), jeżeli istnieje odwzorowanie $L \in \mathcal{L}(E, F)$ takie, że

$$f(a + h) = f(a) + L(h) + o(\|h\|) \text{ gdy } h \longrightarrow 0.$$

Równoważnie,

$$\lim_{E_* \ni h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0.$$

Odnotujmy, że oczywiście definicja ta nie zależy od wyboru normy w klasie norm równoważnych.

Zbiór wszystkich odwzorowań $f : \Omega \longrightarrow F$ różniczkowalnych w punkcie a będziemy oznaczać roboczo przez $\mathcal{D}(\Omega, F; a)$. Oczywiście, każde odwzorowanie stałe jest różniczkowalne ($L = 0$).

Obserwacja 9.2.2. (a) Jeżeli f jest różniczkowalne w punkcie a, to f jest ciągłe w punkcie a.

(b) Każde odwzorowanie liniowe i ciągłe $L \in \mathcal{L}(E, F)$ jest różniczkowalne w każdym punkcie $a \in E$.

Istotnie, $L(a + h) = L(a) + L(h)$.

(c) Jeżeli f jest różniczkowalne w punkcie a, to f ma różniczkę Gâteaux w punkcie a i $\delta_a f = L$ (gdzie L jest odwzorowaniem występującym w definicji różniczkowalności w sensie Frécheta).

Istotnie, dla dowolnego $\xi \in E$ mamy

$$f(a + t\xi) = f(a) + L(t\xi) + o(\|t\xi\|) = f(a) + tL(\xi) + o(t), \quad \text{gdy } t \longrightarrow 0.$$

Jak wiemy, istnieją odwzorowania nieciągłe mające różniczkę Gâteaux, a więc różniczkowalność w sensie Frécheta jest istotnie mocniejsza.

(d) Jeżeli $E = \mathbb{R}^n$, to f jest różniczkowalne w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, F)$ oraz odwzorowania $g_1, \dots, g_n : \Omega - a \longrightarrow F$ takie, że

$$\lim_{h \to 0} g_j(h) = 0 = g_j(0), \quad j = 1, \dots, n,$$

$$f(a + h) = f(a) + L(h) + \sum_{j=1}^{n} h_j g_j(h), \quad h = (h_1, \dots, h_n) \in \Omega - a.$$

Istotnie, jest widoczne, że powyższy warunek jest wystarczający. Przypuśćmy teraz, że $f(a+h) = f(a) + L(h) + o(\|h\|)$, gdzie $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, F)$. Definiujemy

$$g_j(h) := \frac{h_j}{\|h\|^2}\Big(f(a+h) - f(a) - L(h)\Big), \quad h \in (\Omega - a)_*, \quad g_j(0) := 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Definicja 9.2.3. Z Obserwacji 9.2.2(c) wynika, że jeżeli f jest różniczkowalne w punkcie a, to odwzorowanie L występujące w definicji jest jednoznacznie wyznaczone. Oznaczamy je przez $f'(a)$ i nazywamy *pochodną (różniczką Fréscheta)* odwzorowania f w punkcie a. Mamy więc

$$f'(a) \in \mathcal{L}(E, F), \qquad f'(a)(h) = (\delta_a f)(h) = \frac{\partial f}{\partial h}(a), \quad h \in E.$$

Uwaga 9.2.4. W przypadku przestrzeni zespolonych musimy wyraźnie rozróżniać pomiędzy różniczkowaniem w sensie zespolonym i różniczkowaniem w sensie rzeczywistym. Oczywiście każde odwzorowanie $\mathbb{C}$–liniowe jest $\mathbb{R}$–liniowe. Tak więc, jeżeli E, F są przestrzeniami nad $\mathbb{C}$ i odwzorowanie f jest różniczkowalne w punkcie a w sensie zespolonym (tzn. różniczka $f'(a)$ jest $\mathbb{C}$–liniowa), to f jest różniczkowalne w punkcie a w sensie rzeczywistym. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Np. jeżeli $L \in \mathcal{L}(E, F)$ jest odwzorowaniem $\mathbb{R}$–liniowym, które nie jest $\mathbb{C}$–liniowe, to L jest różniczkowalne w sensie rzeczywistym, ale nie jest różniczkowalne w sensie zespolonym; dla przykładu: $E = F := \mathbb{C}$, $L(z) := \overline{z}$, $z \in \mathbb{C}$.

Od tej chwili będziemy rozważać wyłącznie różniczkowanie w sensie rzeczywistym, nawet w przypadku, gdy przestrzenie E i F są nad $\mathbb{C}$.

[Wykład 12.10.2020 . . . .]

Obserwacja 9.2.5. (a) Jeżeli $E = \mathbb{R}$, to f jest różniczkowalne w sensie Frécheta w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(a)$ istnieje w zwykłym sensie. Ponadto, $f'(a)(h) = f'(a)h$ dla dowolnego $h \in \mathbb{R}$.

(b) Jeżeli $F = F_1 \times \dots \times F_N$, $f = (f_1, \dots, f_N)$, to

$$f \in \mathcal{D}(\Omega, F; a) \iff f_j \in \mathcal{D}(\Omega, F_j; a),\ j = 1, \dots, N;\ \text{ponadto, } f'(a) = (f_1'(a), \dots, f_N'(a)).$$

(c) Jeżeli $f, g \in \mathcal{D}(\Omega, F; a)$, to $\mu f + \nu g \in \mathcal{D}(\Omega, F; a)$ oraz $(\mu f + \nu g)'(a) = \mu f'(a) + \nu g'(a)$, $\mu, \nu \in \mathbb{K}$. Innymi słowy, $\mathcal{D}(\Omega, F; a)$ jest $\mathbb{K}$–przestrzenią wektorową, a operator $\mathcal{D}(\Omega, F; a) \ni f \longmapsto f'(a) \in \mathcal{L}(E, F)$ jest $\mathbb{K}$–liniowy.

(d) Jeżeli $L \in \mathcal{L}(F, G)$ (gdzie G jest przestrzenią unormowaną) i $f \in \mathcal{D}(\Omega, F; a)$, to $L \circ f \in \mathcal{D}(\Omega, G; a)$ i $(L \circ f)'(a) = L \circ f'(a)$.

(e) Jeżeli $B \in \mathcal{L}(E, F; G)$, to $B'(a, b)(h, k) = B(h, b) + B(a, k)$, $(a, b), (h, k) \in E \times F$.

Istotnie, odwzorowanie $E \times F \ni (h, k) \overset{L}{\longmapsto} B(h, b) + B(a, k) \in G$ jest liniowe i ciągłe. Ponadto,

$$B(a+h, b+k) - B(a, b) - (B(h, b) + B(a, k)) = B(h, k) \text{ oraz}$$
$$\frac{\|B(h,k)\|}{\|h\| + \|k\|} \leqslant \frac{\|B\|\|h\|\|k\|}{\|h\| + \|k\|} \leqslant \|B\|(\|h\| + \|k\|).$$

Twierdzenie 9.2.6. (a) *Jeżeli $f \in \mathcal{D}(\Omega, F; a)$, $g \in \mathcal{D}(\Omega, G; a)$, $B \in \mathcal{L}(F, G; H)$, gdzie F, G i H są przestrzeniami unormowanymi, to $B(f, g) \in \mathcal{D}(\Omega, H; a)$ oraz*

$$(B(f, g))'(a)(h) = B(f'(a)(h), g(a)) + B(f(a), g'(a)(h)), \quad h \in E.$$

W szczególności, jeżeli $f \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K}; a)$ i $g \in \mathcal{D}(\Omega, F; a)$, to $f \cdot g \in \mathcal{D}(\Omega, F; a)$ oraz

$$(f \cdot g)'(a)(h) = f'(a)(h) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)(h), \quad h \in E.$$

(b) *Jeżeli $(\mathcal{H}, \langle\ ,\ \rangle)$ jest przestrzenią unitarną (zob. Definicja 5.11.21), $f, g \in \mathcal{D}(\Omega, \mathcal{H}; a)$, to $\langle f, g\rangle \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K}; a)$ i $(\langle f, g\rangle)'(a) = \langle f'(a), g(a)\rangle + \langle f(a), g'(a)\rangle$.*

Dowód. (a) Operator $E \ni h \overset{L}{\longmapsto} B(f'(a)(h), g(a)) + B(f(a), g'(a)(h))$ jest oczywiście liniowy i ciągły. Wobec dwuliniowości B, dostajemy:

$$\frac{B(f(a+h), g(a+h)) - B(f(a), g(a)) - L(h)}{\|h\|} = B\Big(\frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)(h)}{\|h\|}, g(a+h)\Big)$$
$$+ B\Big(f(a), \frac{g(a+h) - g(a) - g'(a)(h)}{\|h\|}\Big) + B\Big(\frac{f'(a)(h)}{\|h\|}, g(a+h) - g(a)\Big) = A_1(h) + A_2(h) + A_3(h).$$

Ciągłość B oraz różniczkowalność f i g w punkcie a (w szczególności, ciągłość g w punkcie a) implikują, że $A_1(h) \longrightarrow 0$ i $A_2(h) \longrightarrow 0$ oraz $\|A_3(h)\| \leqslant \|B\|\|f'(a)\|\|g(a+h)-g(a)\| \longrightarrow 0$, gdy $h \longrightarrow 0$.

(b) W przypadku, gdy $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ własność ta wynika bezpośrednio z (a). W przypadku, gdy $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ wystarczy zauważyć, że w dowodzie (a) korzystaliśmy tylko z $\mathbb{R}$–jednorodności. □

Twierdzenie 9.2.7 (Różniczkowanie złożenia). *Niech G będzie przestrzenią unormowaną, niech $U \subset G$ będzie zbiorem otwartym, niech $\varphi : U \longrightarrow E$ i niech $t_0 \in U$. Załóżmy, że $\varphi \in \mathcal{D}(U,E;t_0)$, $f \in \mathcal{D}(\Omega,F;\varphi(t_0))$ i $\varphi(U) \subset \Omega$. Wtedy $f\circ\varphi \in \mathcal{D}(U,F;t_0)$ oraz $(f\circ\varphi)'(t_0) = f'(\varphi(t_0))\circ\varphi'(t_0)$.*

Dowód. Niech $a := \varphi(t_0)$, $B := \varphi'(t_0)$, $A := f'(a)$,

$$\varphi(t_0+t) = \varphi(t_0) + B(t) + \beta(t)\|t\|, \quad f(a+h) = f(a) + A(h) + \alpha(h)\|h\|,$$

gdzie $\lim\limits_{t\to 0}\beta(t)=0$, $\lim\limits_{h\to 0}\alpha(h)=0$. Oczywiście $A\circ B \in \mathcal{L}(G,F)$. Dla małych $t \in G_*$ niech

$$h(t) := \varphi(t_0+t) - \varphi(t_0) = B(t) + \beta(t)\|t\|.$$

Zauważmy, że $h(t) \longrightarrow 0$, gdy $t \longrightarrow 0$. Mamy:

$$\begin{aligned}(f\circ\varphi)(t_0+t) &= f(a+h(t)) = f(a) + A(B(t)+\beta(t)\|t\|) + \alpha(h(t))\|B(t)+\beta(t)\|t\|\| \\ &= (f\circ\varphi)(t_0) + A(B(t)) + \gamma(t)\|t\|, \text{ gdzie} \\ \gamma(t) :&= A(\beta(t)) + \alpha(h(t))\Big\|\frac{B(t)}{\|t\|} + \beta(t)\Big\|.\end{aligned}$$

Pozostaje jeszcze zauważyć, że $\gamma(t) \longrightarrow 0$, gdy $t \longrightarrow 0$. □

Obserwacja 9.2.8. Twierdzenie 9.2.6 wynika z Twierdzenia 9.2.7 i Obserwacji 9.2.5(b)(e). Istotnie,

$$\begin{aligned}(B(f,g))'(a)(h) &= (B\circ(f,g))'(a)(h) = (B'((f,g)(a))\circ((f,g)'(a)))(h) \\ &= B'(f(a),g(a))(f'(a)(h),g'(a)(h)) = B(f'(a)(h),g(a)) + B(f(a),g'(a)(h)).\end{aligned}$$

Twierdzenie 9.2.9 (Por. Twierdzenie 5.1.8). *Niech E,F będą przestrzeniami unormowanymi, niech $U\subset E$, $V\subset F$ będą zbiorami otwartymi i niech $f : U \longrightarrow V$ będzie odwzorowaniem bijektywnym. Niech $g := f^{-1}$ i niech $a \in U$ będzie taki, że $f'(a)$ istnieje. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) *$g'(f(a))$ istnieje;*
(ii) *$f'(a) \in \operatorname{Isom}(E,F)$ i g jest ciągłe w punkcie $f(a)$.*

Dowód. Implikacja (i) $\Longrightarrow$ (ii) jest oczywista ($g'(f(a)) = (f'(a))^{-1}$).

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Niech $A := f'(a)$. Chcemy sprawdzić, że $g(f(a)+k) = g(f(a)) + A^{-1}(k) + \|k\|\beta(k)$, gdzie $\beta(k) \longrightarrow 0$ przy $k \longrightarrow 0$. Niech $B(f(a),r) \subset V$. Dla $\|k\| < r$ zdefiniujmy $h(k) := g(f(a)+k) - a$. Ciągłość odwzorowania g w punkcie $f(a)$ implikuje, że $h(k) \longrightarrow 0$ przy $k \longrightarrow 0$. Nasz problem sprowadza się więc do równości $h(k) = A^{-1}(f(a+h(k)) - f(a)) + \|f(a+h(k)) - f(a)\|\beta(k)$ i dalej, korzystając z równości $f(a+h) = f(a) + A(h) + \|h\|\alpha(h)$, $\alpha(h) \longrightarrow 0$ przy $h \longrightarrow 0$, mamy

$$0 = A^{-1}(\|h(k)\|\alpha(h(k))) + \|A(h(k)) + \|h(k)\|\alpha(h(k))\|\beta(k).$$

Wystarczy więc pokazać, że $\frac{A^{-1}(\|h\|\alpha(h))}{\|A(h)+\|h\|\alpha(h)\|}$ dąży do zera przy $h \longrightarrow 0$. Ponieważ operator A^{-1} jest ograniczony, wystarczy więc pokazać, że wyrażenie $\frac{\|h\|\alpha(h)}{\|A(h)+\|h\|\alpha(h)\|}$ dąży do zera przy $h \longrightarrow 0$. Ponieważ $\alpha(h) \longrightarrow 0$ przy $h \longrightarrow 0$, wystarczy oszacować od dołu wyrażenie $\|A(h/\|h\|) + \alpha(h)\|$. Odnotujmy, że $\|h\| = \|A^{-1}(A(h))\| \leqslant \|A^{-1}\|\|A(h)\|$. Mamy więc $\|A(h/\|h\|) + \alpha(h)\| \geqslant 1/\|A^{-1}\| - \|\alpha(h)\|$. □

[Wykład 15.10.2020 . . . .]

9.3. Twierdzenia o przyrostach skończonych

Twierdzenie 9.3.1 (Twierdzenie o przyrostach skończonych). *Załóżmy, że $D \subset E$ jest obszarem, $[a,b] \subset D$. Niech $f : D \longrightarrow F$ będzie odwzorowaniem ciągłym takim, że $f'(x)$ istnieje dla $x \in [a,b]\setminus S$, gdzie $S \subset [a,b]$ jest co najwyżej przeliczalny. Wtedy dla dowolnego $L \in \mathcal{L}(E,F)$ mamy:*

$$\|f(b)-f(a)-L(b-a)\| \leqslant \big(\sup\{\|f'(\xi)-L\| : \xi \in [a,b]\setminus S\}\big)\|b-a\|.$$

W szczególności, $\|f(b)-f(a)\| \leqslant \big(\sup\{\|f'(\xi)\| : \xi \in [a,b]\setminus S\}\big)\|b-a\|$.

Dowód. Zastępując odwzorowanie f przez $f-L$ redukujemy dowód do przypadku $L=0$. Niech

$$g(t) := f(a+t(b-a)),\ t\in[0,1],\quad S' := \{t\in[0,1] : a+t(b-a)\in S\}.$$

Wtedy $g:[0,1]\longrightarrow F$ jest odwzorowaniem ciągłym i $g'(t)$ istnieje dla $t\in[0,1]\setminus S'$. Ponadto, na podstawie twierdzenia o różniczkowaniu złożenia, $g'(t)=f'(a+t(b-a))(x-a)$. Stąd, na podstawie klasycznego twierdzenia o przyrostach skończonych (zob. Wniosek 5.4.4), mamy:

$$\begin{aligned}\|f(b)-f(a)\| = \|g(1)-g(0)\| &\leqslant \sup\{\|g'(t)\| : t\in[0,1]\setminus S'\}\\ &= \sup\{\|f'(a+t(b-a))(x-a)\| : t\in[0,1]\setminus S'\}\\ &\leqslant \sup\{\|f'(\xi)\| : \xi\in[a,b]\setminus S\}\|b-a\|.\end{aligned}$$ □

Jako natychmiastowy wniosek dostajemy

Twierdzenie 9.3.2 (Twierdzenie o przyrostach skończonych)**.** *Załóżmy, że $D\subset E$ jest obszarem gwiaździstym względem punktu a (tzn. $[a,x]\subset D$ dla dowolnego $x\in D$). Niech $f:D\longrightarrow F$ będzie odwzorowaniem ciągłym takim, że $f'(x)$ istnieje dla $x\in D\setminus S$, gdzie $S\subset D$ jest zbiorem takim, że $\#(S\cap[a,x])\leqslant\aleph_0$ dla dowolnego $x\in D$. Wtedy dla dowolnego $L\in\mathcal{L}(E,F)$ mamy:*

$$\|f(x)-f(a)-L(x-a)\| \leqslant \big(\sup\{\|f'(\xi)-L\| : \xi\in[a,x]\setminus S\}\big)\|x-a\|,\quad x\in D.$$

W szczególności, $\|f(x)-f(a)\|\leqslant\big(\sup\{\|f'(\xi)\| : \xi\in[a,x]\setminus S\}\big)\|x-a\|$, $x\in D$.

Wniosek 9.3.3. *Niech $D\subset E$ będzie dowolnym obszarem i niech $f:D\longrightarrow F$ będzie odwzorowaniem ciągłym takim, że $f'(x)=0$ dla $x\in D\setminus S$, gdzie $S\subset D$ jest zbiorem takim, że $\#(S\cap[a,b])\leqslant\aleph_0$ dla dowolnego odcinka $[a,b]\subset D$. Wtedy $f=\mathrm{const}$.*

Dowód. Na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych wnioskujemy, że dla dowolnej kuli $B(a,r)\subset D$ odwzorowanie $f|_{B(a,r)}$ jest stałe. Stąd, wobec spójności D, f musi być globalnie stałe. □

Wniosek 9.3.4. *Niech $f:\Omega\longrightarrow F$ będzie funkcją ciągłą i różniczkowalną w $\Omega\setminus\{a\}$ dla pewnego $a\in\Omega$. Jeżeli $L:=\lim\limits_{x\to a}f'(x)$ istnieje (granica w $\mathcal{L}(E,F)$), to $f'(a)$ istnieje i $f'(a)=L$.*

Dowód. Na podstawie poprzedniego twierdzenia mamy $f(a+h)=f(a)+L(h)+\alpha(h)\|h\|$, gdzie $\|\alpha(h)\|\leqslant\sup\{\|f'(\xi)-L\| : \xi\in(a,a+h]\}\underset{h\to0}{\longrightarrow}0$. □

Wniosek 9.3.5 (Twierdzenie o przyrostach skończonych)**.** *Niech $D\subset E$ będzie dowolnym obszarem i niech $f:D\longrightarrow F$ będzie odwzorowaniem ciągłym takim, że $f'(x)$ istnieje dla $x\in D\setminus S$, gdzie $S\subset D$ jest zbiorem takim, że $\#(S\cap[a,b])\leqslant\aleph_0$ dla dowolnego odcinka $[a,b]\subset D$. Wtedy*

$$\|f(x)-f(y)\|\leqslant\big(\sup\{\|f'(\xi)\| : \xi\in D\setminus S\}\big)\varrho_D^i(x,y),\quad x,y\in D \text{ (zob. Obserwacja 4.6.8).}$$

9.4. Różniczki cząstkowe

Definicja 9.4.1. Jeżeli $E=E_1\times\dots\times E_N$, $a=(a_1,\dots,a_N)$, to definiujemy

$$\begin{gathered}\Omega_{a,j} := \{x_j\in E_j : (a_1,\dots,a_{j-1},x_j,a_{j+1},\dots,a_n)\in\Omega\},\\ f_{a,j}(x_j) := f(a_1,\dots,a_{j-1},x_j,a_{j+1},\dots,a_n),\quad x_j\in\Omega_{a,j},\ j=1,\dots,N;\end{gathered}$$

zauważmy, że $\Omega_{a,j}$ jest zbiorem otwartym w E_j. Powiemy, że f ma w punkcie a *różniczkę cząstkową w kierunku przestrzeni* E_j, jeżeli różniczka $f'_{a,j}(a_j)\in\mathcal{L}(E_j,F)$ istnieje. Oznaczamy ją wtedy przez $\frac{\partial f}{\partial E_j}(a)$.

Obserwacja 9.4.2. Jeżeli $\dim E_j=1$ i $E_j=\mathbb{R}\xi$ (dla pewnego j), to $\frac{\partial f}{\partial E_j}(a)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{\partial f}{\partial\xi}(a)$ istnieje. Ponadto, $\frac{\partial f}{\partial E_j}(a)(h_j)=\frac{\partial f}{\partial h_j}(a)$, $h_j\in E_j$.

Twierdzenie 9.4.3. (a) *Jeżeli $f'(a)$ istnieje, to $\frac{\partial f}{\partial E_1}(a),\dots,\frac{\partial f}{\partial E_N}(a)$ istnieją oraz*

$$f'(a)(h)=\sum_{j=1}^N\frac{\partial f}{\partial E_j}(a)(h_j),\quad h=(h_1,\dots,h_N)\in E_1\times\dots\times E_N,\ \text{czyli}$$

$$\frac{\partial f}{\partial E_j}(a)(h_j)=f'(a)(0,\dots,0,h_j,0,\dots,0),\quad h_j\in E_j,\quad j=1,\dots,N.$$

W szczególności, dla $E = \mathbb{R}^n$, jeżeli $f'(a)$ istnieje, to istnieją pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)$, ..., $\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$ oraz $f'(a)(h) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)h_j$.

(b) *Niech $\varphi \in \mathcal{D}(U, E; t_0)$ i $f \in \mathcal{D}(\Omega, F; \varphi(t_0))$ będą takie, jak w Twierdzeniu 9.2.7 (o różniczkowaniu złożenia). Załóżmy, że $G = G_1 \times \cdots \times G_p$, $E = E_1 \times \cdots \times E_n$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Wtedy:*

$$(f \circ \varphi)'(t_0)(X) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{\partial f}{\partial E_j}(\varphi(t_0)) \circ \frac{\partial \varphi_j}{\partial G_k}(t_0)\Big)(X_k), \quad X = (X_1, \dots, X_p) \in G_1 \times \cdots \times G_p, \text{ czyli}$$

$$\frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial G_k}(t_0)(X_k) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{\partial f}{\partial E_j}(\varphi(t_0)) \circ \frac{\partial \varphi_j}{\partial G_k}(t_0)\Big)(X_k), \quad k = 1, \dots, p.$$

W szczególności, dla $G = \mathbb{K}^p$, $E = \mathbb{K}^n$, dostajemy

$$\frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial t_k}(t_0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\varphi(t_0)) \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k}(t_0), \quad k = 1, \dots, p.$$

Jeżeli ponadto $F = \mathbb{K}^m$, to powyższy wzór ma następującą interpretację macierzową:

$$J(f \circ \varphi)(t_0) = Jf(\varphi(t_0)).J\varphi(t_0). \tag{*}$$

Obserwacja 9.4.4. Podkreślmy, że wzór (*) jest prawdziwy przy założeniu, że $\varphi'(t_0)$ i $f'(\varphi(t_0))$ istnieją. Jeżeli istnieją tylko pochodne cząstkowe (tak, że wszystkie występujące obiekty mają sens), to wzór nie musi zachodzić. Dla przykładu, niech $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) := (t, t^2)$ (odnotujmy, że φ jest klasy $\mathcal{C}^\infty$), $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(t, t^2) := 0$, $f(t, 0) = f(0, t) := t$, a poza tym f jest określona dowolnie, $t_0 := 0$. Wtedy $\varphi(0) = (0, 0)$, $f \circ \varphi \equiv 0$, $J\varphi(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $Jf(0, 0) = [1, 1]$, $Jf(0, 0).J\varphi(0) = 1$.

Dowód Twierdzenia 9.4.3. (a) Zauważmy, że $f_{a,j} = f \circ \psi_{a,j}$, gdzie

$$\Omega_{a,j} \ni x_j \overset{\psi_{a,j}}{\longmapsto} (a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n) \in E_1 \times \cdots \times E_N.$$

Wystarczy teraz skorzystać z twierdzenia o różniczkowaniu złożenia:

$$f'_{a,j}(a_j)(h_j) = (f \circ \psi_{a,j})'(a_j)(h_j) = (f'(\psi_{a,j}(a_j)) \circ \psi'_{a,j}(a_j))(h_j) = f'(a)(0, \dots, 0, h_j, 0, \dots, 0).$$

(b) Na podstawie (a) mamy:

$$\begin{aligned}(f \circ \varphi)'(t_0)(X) &= f'(\varphi(t_0))(\varphi'(t_0)(X)) = f'(\varphi(t_0))\Big(\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \varphi}{\partial G_k}(t_0)(X_k)\Big) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial E_j}(\varphi(t_0))\Big(\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \varphi_j}{\partial G_k}(t_0)(X_k)\Big) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{\partial f}{\partial E_j}(\varphi(t_0)) \circ \frac{\partial \varphi_j}{\partial G_k}(t_0)\Big)(X_k). \quad \square\end{aligned}$$

Twierdzenie 9.4.5. *Załóżmy, że $E = E_1 \times \cdots \times E_N$ i $f : \Omega \longrightarrow F$ jest odwzorowaniem takim, że*
- *różniczka cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial E_j}(x)$ istnieje dla x z pewnego otoczenia punktu a i jest ciągła w punkcie a dla dowolnego $j \in \{1, \dots, N\} \setminus \{j_0\}$,*
- *$\frac{\partial f}{\partial E_{j_0}}(a)$ istnieje.*

Wtedy $f'(a)$ istnieje.

Dowód. Zastosujemy indukcję ze względu na N.

$N = 2$. Możemy założyć, że $a = 0$ oraz $j_0 = 2$. Wiemy, że jedynym kandydatem na $f'(0)$ jest odwzorowanie $E_1 \times E_2 \ni (h_1, h_2) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial E_1}(0)(h_1) + \frac{\partial f}{\partial E_2}(0)(h_2) \in F$. Jest to oczywiście odwzorowanie liniowe ciągłe. Dla małych $h = (h_1, h_2)$ szacujemy korzystając z twierdzenia o przyrostach skończonych oraz definicji różniczki cząstkowej:

$$\begin{aligned}&\Big\|f(h_1, h_2) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial E_1}(0)(h_1) - \frac{\partial f}{\partial E_2}(0)(h_2)\Big\| \\ &\qquad\leqslant \Big\|f(h_1, h_2) - f(0, h_2) - \frac{\partial f}{\partial E_1}(0)(h_1)\Big\| + \Big\|f(0, h_2) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial E_2}(0)(h_2)\Big\|\end{aligned}$$

$$\leqslant \sup\Big\{\Big\|\frac{\partial f}{\partial E_1}(\xi_1, h_2) - \frac{\partial f}{\partial E_1}(0)\Big\| : \xi_1 \in [0, h_1]\Big\}\ \|h_1\| + o(\|h_2\|) = o(\|(h_1, h_2)\|).$$

$N-1 \rightsquigarrow N$. Możemy założyć, że $j_0 = N$. Wobec założenia indukcyjnego różniczka cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial(E_2\times\dots\times E_N)}(a)$ istnieje. Teraz wystarczy wykorzystać przypadek $N = 2$. $\square$

[Wykład 19.10.2020 . . . .]

Definicja 9.4.6. (a) Niech $\mathcal{D}(\Omega, F) := \bigcap_{x\in\Omega} \mathcal{D}(\Omega, F; x)$. Oczywiście $\mathcal{D}(\Omega, F)$ jest $\mathbb{K}$–przestrzenią wektorową. Połóżmy $\mathcal{D}_b(\Omega, F) := \{f \in \mathcal{D}(\Omega, F) \cap \mathcal{B}(\Omega, F) : f' \in \mathcal{B}(\Omega, \mathcal{L}(E, F))\}$. Widać, że $\mathcal{D}_b(\Omega, F)$ jest przestrzenią wektorową, zaś funkcja

$$\mathcal{D}_b(\Omega, F) \ni f \longmapsto \|f\|_{\Omega,1} := \|f\|_\Omega + \|f'\|_\Omega = \sup\{\|f(x)\| : x \in \Omega\} + \sup\{\|f'(x)\| : x \in \Omega\}$$

jest normą na $\mathcal{D}_b(\Omega, F)$.

(b) Dla $0 < \alpha \leqslant 1$, niech $\mathcal{C}_b^{1,\alpha}(\Omega, F) := \{f \in \mathcal{D}_b(\Omega, F) : f' \in \mathcal{H}^\alpha(\Omega, \mathcal{L}(E, F))\}$, gdzie

$$\mathcal{H}^\alpha(\Omega, H) := \Big\{g : \Omega \longrightarrow H : |g|_\alpha := \sup\Big\{\frac{\|g(x) - g(y)\|}{\|x - y\|^\alpha} : x, y \in \Omega,\ x \neq y\Big\} < +\infty\Big\}.$$

W przestrzeni $\mathcal{C}_b^{1,\alpha}(\Omega, F)$ wprowadzamy normę $\|f\|_{\Omega,1,\alpha} := \|f\|_{\Omega,1} + |f'|_\alpha$ (por. Definicja 5.7.5); przypomnijmy, że $|\ |_\alpha$ jest seminormą.

(c) Niech $\mathcal{C}^1(\Omega, F) := \{f \in \mathcal{D}(\Omega, F) : f' \in \mathcal{C}(\Omega, \mathcal{L}(E, F))\}$. Połóżmy $\mathcal{C}_b^1(\Omega, F) := \mathcal{C}^1(\Omega, F) \cap \mathcal{D}_b(\Omega, F)$. Oczywiście $\mathcal{C}_b^{1,\alpha}(\Omega, F) \subset \mathcal{C}_b^1(\Omega, F)$.

Zgodnie z ogólną umową, we wszystkich powyższych oznaczeniach pomijamy F jeżeli $F = \mathbb{R}$ i piszemy $\mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{D}_b(\Omega)$, $\mathcal{C}_b^{1,\alpha}(\Omega)$, $\mathcal{H}^\alpha(\Omega)$, $\mathcal{C}^1(\Omega)$, $\mathcal{C}_b^1(\Omega)$.

Twierdzenie 9.4.7. *Załóżmy, że odwzorowanie $f : \Omega \longrightarrow F$ ma w każdym punkcie $x \in \Omega$ różniczkę Gâteaux $\delta_x f$.*

(a) *Jeżeli odwzorowanie $\Omega \ni x \longmapsto \delta_x f \in \mathcal{L}(E, F)$ jest ciągłe w punkcie $a \in \Omega$, to $f'(a)$ istnieje (i oczywiście $f'(a) = \delta_a f$).*

(b) *$f \in \mathcal{C}^1(\Omega, F)$ wtedy i tylko wtedy, gdy odwzorowanie $\Omega \ni x \longmapsto \delta_x f \in \mathcal{L}(E, F)$ jest ciągłe.*

Dowód. (a) Zauważmy, że dla małych $h \in E$ funkcja $[0, 1] \ni t \overset{f_{a,h}}{\longmapsto} f(a + th) \in F$ jest różniczkowalna oraz $f'_{a,h}(t) = \frac{\partial f}{\partial h}(a + th) = \delta_{a+th} f(h)$. Teraz, na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych dla jednej zmiennej, mamy

$$\begin{aligned}
&\|f(a + h) - f(a) - \delta_a f(h)\| = \|f_{a,h}(1) - f_{a,h}(0) - f'_{a,h}(0)(1 - 0)\| \\
&\leqslant \sup\{\|f'_{a,h}(t) - f'_{a,h}(0)\| : t \in [0, 1]\} = \sup\{\|\delta_{a+th} f(h) - \delta_a f(h)\| : t \in [0, 1]\} \\
&\leqslant \big(\sup\{\|\delta_{a+th} f - \delta_a f\|_{\mathcal{L}(E,F)} : t \in [0, 1]\}\big)\|h\| = o(\|h\|).
\end{aligned}$$

(b) wynika natychmiast z (a). $\square$

Obserwacja 9.4.8. (a) Jeżeli $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, F)$, $g \in \mathcal{C}^1(\Omega, G)$ i $B \in \mathcal{L}(F, G; H)$, to $B(f, g) \in \mathcal{C}^1(\Omega, H)$.

Istotnie, na podstawie Twierdzenia 9.2.6(a), mamy $(B(f, g))' = B(f', g) + B(f, g')$.

(b) Jeżeli $\mathcal{H}$ jest przestrzenią unitarną, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathcal{H})$, $g \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathcal{H})$, to $\langle f, g\rangle \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{K})$.

(c) Jeżeli $\varphi \in \mathcal{C}^1(U, E)$, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, F)$ i $\varphi(U) \subset \Omega$, to $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^1(U, F)$.

Istotnie, na podstawie Twierdzenia 9.2.7, mamy $(f \circ \varphi)' = (f' \circ \varphi) \circ \varphi'$.

(d) Jeżeli $E = E_1 \times \dots \times E_N$ i $\frac{\partial f}{\partial E_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial E_N}$ istnieją, to $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, F) \iff \frac{\partial f}{\partial E_j} \in \mathcal{C}(\Omega, \mathcal{L}(E_j, F))$, $j = 1, \dots, N$. W szczególności, dla $E = \mathbb{R}^n$, jeżeli $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ istnieją, to

$$f \in \mathcal{C}^1(\Omega, F) \iff \frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathcal{C}(\Omega, F),\ j = 1, \dots, n.$$

Istotnie, implikacja ($\Longrightarrow$) wynika z faktu, że (Twierdzenie 9.4.3) $\frac{\partial f}{\partial E_j}(x)(h_j) = f'(x)(0, \dots, 0, \underset{j}{h_j}, 0, \dots, 0)$, $x \in \Omega$, $h_j \in E_j$, a stąd $\big\|\frac{\partial f}{\partial E_j}(x) - \frac{\partial f}{\partial E_j}(x_0)\big\| \leqslant \|f'(x) - f'(x_0)\|$, $j = 1, \dots, N$, przy czym w $E_1 \times \dots \times E_N$ wybieramy normę maksimum.

Dla dowodu implikacji ($\Longleftarrow$) zauważmy najpierw, że na podstawie Twierdzenia 9.4.5 wiemy, że $f \in \mathcal{D}(\Omega, F)$. Dalej mamy

$$\|f'(x) - f'(x_0)\| = \sup\Big\{\Big\|\sum_{j=1}^{N}\Big(\frac{\partial f}{\partial E_j}(x)(h_j) - \frac{\partial f}{\partial E_j}(x_0)(h_j)\Big)\Big\| : \|h_j\| \leqslant 1,\ j = 1, \dots, N\Big\}$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{N}\Big\|\frac{\partial f}{\partial E_j}(x) - \frac{\partial f}{\partial E_j}(x_0)\Big\| \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0.$$

Twierdzenie 9.4.9 (Twierdzenie o różniczkowaniu wyraz po wyrazie (por. Twierdzenia 5.7.1, 6.10.1, 6.10.2))**.** *Niech $D \subset E$ będzie ograniczonym obszarem ϱ^i_D-ograniczonym (np. ograniczonym obszarem gwiaździstym), niech $x_0 \in D$ i niech F będzie przestrzenią Banacha.*

(a) *Załóżmy, że mamy rodzinę $(f_i)_{i\in I} \subset \mathcal{D}(D, F)$ taką, że:*
- *$(f_i')_{i\in I}$ jest rodziną jednostajnie sumowalną na D,*
- *$(f_i(x_0))_{i\in I}$ jest rodziną sumowalną.*

Wtedy $(f_i)_{i\in I}$ jest rodziną jednostajnie sumowalną na D, funkcja $f := \sum_{i\in I} f_i$ jest różniczkowalna na D oraz $f' = \sum_{i\in I} f_i'$, czyli $\big(\sum_{i\in I} f_i\big)' = \sum_{i\in I} f_i'$.

(b) *Załóżmy, że mamy ciąg $(f_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{D}(D, F)$ taki, że:*
- *szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'$ jest zbieżny jednostajnie na D,*
- *szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)$ jest zbieżny.*

Wtedy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ jest zbieżny jednostajnie na D, funkcja $f := \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ jest różniczkowalna na D oraz $f' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'$, czyli $\big(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\big)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'$.

(c) *Załóżmy, że mamy ciąg $(f_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{D}(D, F)$ taki, że:*
- *ciąg $(f_n')_{n=0}^{\infty}$ jest zbieżny jednostajnie na D,*
- *ciąg $(f_n(x_0))_{n=0}^{\infty}$ jest zbieżny.*

Wtedy ciąg $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ jest zbieżny jednostajnie na D, funkcja $f := \lim_{n\to+\infty} f_n$ jest różniczkowalna na D oraz $f' = \lim_{n\to+\infty} f_n'$, czyli $\big(\lim_{n\to+\infty} f_n\big)' = \lim_{n\to+\infty} f_n'$.

Dowód. (a) Niech $g_i := f_i' : D \longrightarrow \mathcal{L}(E, F)$, $i \in I$. Niech $f_A := \sum_{i\in A} f_i$, $A \in \mathcal{F}(I)$[4]. Zauważmy, że f_A jest funkcją różniczkowalną oraz $(f_A)' = g_A$. Weźmy $\varepsilon > 0$ i niech $C(\varepsilon) \in \mathcal{F}(I)$ będzie takie, że dla $A \in \mathcal{F}(I \setminus C(\varepsilon))$ mamy $\|f_A(x_0)\| \leqslant \varepsilon$ i $\|g_A(x)\| \leqslant \varepsilon$, $x \in D$. Na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych (Wniosek 9.3.5), dla $A \in \mathcal{F}(I \setminus C(\varepsilon))$ i $x \in D$ mamy:

$$\|f_A(x)\| \leqslant \|f_A(x_0)\| + \|f_A(x) - f_A(x_0)\| \leqslant \varepsilon + \big(\sup\{\|g_A(\xi)\| : \xi \in D\}\big)\varrho^i_D(x, x_0) \leqslant \varepsilon\big(1 + \sup_{x,y\in D} \varrho^i_D(x, y)\big).$$

Wynika stąd, na podstawie kryterium Cauchy'ego (Twierdzenie 6.8.2(ii)), że $(f_i)_{i\in I}$ jest rodziną jednostajnie sumowalną.

Ustalmy $a \in D$ i niech

$$h_i(x) := \begin{cases} \frac{f_i(x) - f_i(a) - f_i'(a)(x-a)}{\|x-a\|}, & \text{jeżeli } x \neq a \\ 0, & \text{jeżeli } x = a \end{cases}, \quad x \in D, \quad i \in I.$$

Zauważmy, że każde z odwzorowań h_i jest ciągłe w punkcie a. Rodzina $(h_i)_{i\in I}$ jest jednostajnie sumowalna na D. Istotnie, mamy

$$h_A(x) = \frac{f_A(x) - f_A(a) - g_A(a)(x-a)}{\|x-a\|}, \quad x \neq a,$$

a stąd, na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych (Twierdzenie 9.3.2), dla x bliskich a, dostajemy

$$\|h_A(x)\| \leqslant \sup\{\|g_A(\xi) - g_A(a)\| : \xi \in [x, a]\} \leqslant 2\sup\{\|g_A(\xi)\| : \xi \in D\},$$

co, na podstawie kryterium Cauchy'ego, daje jednostajną sumowalność.

---

[4] Przypomnijmy, że $\mathcal{F}(I) = \{A \subset I : A \neq \varnothing,\ \#A \leqslant \aleph_0\}$.

Teraz, na podstawie własności rodzin jednostajnie sumowalnych (Twierdzenia 6.4.11, 6.8.2, 6.8.7), mamy
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-g(a)(x-a)}{\|x-a\|}=\lim_{x\to a}\sum_{i\in I}h_i(x)=\sum_{i\in I}\lim_{x\to a}h_i(x)=0,$$
co kończy dowód.

(b) Dowód jest analogiczny — Ćwiczenie.

(c) wynika z (b). □

Twierdzenie 9.4.10. *Załóżmy, że F jest przestrzenią Banacha. Niech $D\subset E$ będzie obszarem. Wtedy:*

(a) $(\mathcal{D}_b(D,F),\|\ \|_{D,1})$ *jest przestrzenią Banacha,*

(b) $(\mathcal{C}^1_b(D,F),\|\ \|_{D,1})$ *jest przestrzenią Banacha,*

(c) $(\mathcal{C}^{1,\alpha}_b(D,F),\|\ \|_{D,1,\alpha})$ *jest przestrzenią Banacha.*

Dowód. (a) Niech $(f_n)_{n=1}^\infty$ będzie dowolnym ciągiem Cauchy'ego w $(\mathcal{D}_b(D,F),\|\ \|_{D,1})$. Wtedy $(f_n)_{n=1}^\infty$ jest ciągiem Cauchy'ego w $\mathcal{B}(D,F)$, a $(f_n')_{n=1}^\infty$ jest ciągiem Cauchy'ego w $\mathcal{B}(D,\mathcal{L}(E,F))$. Ponieważ przestrzenie $\mathcal{B}(D,F)$ i $\mathcal{B}(D,\mathcal{L}(E,F))$ są zupełne (Obserwacja 4.6.10), zatem $f_n\longrightarrow g_0\in\mathcal{B}(D,F)$ jednostajnie na D i $f_n'\longrightarrow g_1\in\mathcal{B}(D,\mathcal{L}(E,F))$ jednostajnie na D. Teraz pozostaje już tylko skorzystać lokalnie z Twierdzenia 9.4.9, aby stwierdzić, że $g_0\in\mathcal{D}(D,F)$ i $g_1=g_0'$.

(b) Wobec (a), wystarczy tylko zauważyć, że $\mathcal{C}^1_b(D,F)$ jest podprzestrzenią domkniętą w $\mathcal{D}_b(D,F)$ (korzystamy z Twierdzenia 9.4.9).

(c) Niech $(f_n)_{n=1}^\infty$ będzie ciągiem Cauchy'ego w $(\mathcal{C}^{1,\alpha}_b(D,F),\|\ \|_{D,1,\alpha})$. Jest to również ciąg Cauchy'ego w $(\mathcal{C}^1_b(D,F),\|\ \|_{D,1})$, a wiec wobec (b), $f_n\longrightarrow f_0$ w $\mathcal{C}^1_b(D,F)$. Pozostaje, wykazać, że $|f_n-f_0|_\alpha\longrightarrow 0$. Mamy
$$\begin{aligned}|f_n-f_0|_\alpha&=\sup_{\substack{x,y\in D\\x\neq y}}\frac{\|f_n(x)-f_0(x)-(f_n(y)-f_0(y))\|}{\|x-y\|^\alpha}=\sup_{\substack{x,y\in D\\x\neq y}}\lim_{s\to+\infty}\frac{\|f_n(x)-f_s(x)-(f_n(y)-f_s(y))\|}{\|x-y\|^\alpha}\\&\leqslant\limsup_{s\to+\infty}|f_n-f_s|_\alpha\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.\end{aligned}$$
□

[Wykład 22.10.2020 . . . .]

9.5. Druga pochodna

Niech E i F będą przestrzeniami unormowanymi nad $\mathbb{K}$. Niech $\Omega\in\operatorname{top}E$, $f:\Omega\longrightarrow F$ i $a\in\Omega$. Będziemy chcieli zdefiniować pojęcie drugiej pochodnej funkcji f w punkcie a.

Definicja 9.5.1. Mówimy, że f ma *drugą pochodną (różniczkę Frécheta, różniczkę mocną) w punkcie a*, jeżeli $f'(x)$ istnieje dla $x\in V$, gdzie $V\subset\Omega$ jest pewnym otoczeniem otwartym punktu a, oraz odwzorowanie $f':V\longrightarrow\mathcal{L}(E,F)$ ma pochodną w punkcie a. Definiujemy *drugą pochodną (drugą różniczkę Frécheta, drugą różniczkę mocną)* odwzorowania f w punkcie a:
$$f''(a):=(f')'(a)\in\mathcal{L}(E,\mathcal{L}(E,F))\simeq\mathcal{L}^2(E,F);$$
aby uniknąć nieporozumień ustalamy identyfikację
$$\mathcal{L}(E,\mathcal{L}(E,F))\ni A\longmapsto(E\times E\ni(\xi_1,\xi_2)\longmapsto A(\xi_1)(\xi_2)\in F)\in\mathcal{L}^2(E,F),$$
$$f''(a)(\xi_1,\xi_2)\simeq f''(a)(\xi_1)(\xi_2),\quad \xi_1,\xi_2\in E.$$
Zbiór wszystkich odwzorowań $f:\Omega\longrightarrow F$, dla których $f''(a)$ istnieje oznaczamy przez $\mathcal{D}^2(\Omega,F;a)$.

Oczywiście, dla $E=\mathbb{R}$ powyższa definicja jest równoważna istnieniu $f''(a)$ (w sensie klasycznym) oraz $f''(a)(\xi_1,\xi_2)=f''(a)\xi_1\xi_2$, $\xi_1,\xi_2\in\mathbb{R}$.

Twierdzenie 9.5.2. *Jeżeli $f''(a)$ istnieje, to dla dowolnego $\eta\in E$ odwzorowanie $x\longmapsto f'(x)(\eta)$ ma pochodną w punkcie a oraz $f''(a)(\xi,\eta)=(x\longmapsto f'(x)(\eta))'(a)(\xi)$, $\xi,\eta\in E$. W szczególności:*

- *dla dowolnych $\xi,\eta\in E$ pochodna kierunkowa $\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}(a)$ istnieje oraz $f''(a)(\xi,\eta)=\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}(a)$;*
- *jeżeli $E=\mathbb{R}^n$, to wszystkie drugie pochodne cząstkowe $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(a)$, $i,j=1,\dots,n$, istnieją oraz*
$$f''(a)(\xi,\eta)=\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(a)\xi_j\eta_i,\quad \xi=(\xi_1,\dots,\xi_n),\ \eta=(\eta_1,\dots,\eta_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Dowód. Wiemy, że $f'(a+\xi) = f'(a) + f''(a)(\xi) + \|\xi\|\alpha(\xi)$ (równość w $\mathcal{L}(E,F)$), gdzie $\lim\limits_{\xi\to 0}\alpha(\xi) = 0$. Stąd: $f'(a+\xi)(\eta) = f'(a)(\eta) + f''(a)(\xi,\eta) + \|\xi\|\alpha(\xi)(\eta)$, co daje żądany wynik. $\square$

Obserwacja 9.5.3. Pojawia się naturalne pytanie, czy jeżeli $f \in \mathcal{D}(\Omega, F)$ i dla dowolnego $\eta \in E$ odwzorowanie $x \longmapsto f'(x)(\eta)$ ma pochodną w punkcie a, to $f''(a)$ istnieje.

Twierdzenie 9.5.4. *Jeżeli $E = \mathbb{R}^n$, to odpowiedź na pytanie z Obserwacji 9.5.3.*

Dowód. Wiemy, że $f'(x)(h) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)h_i$, czyli $f'(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\cdot \mathrm{pr}_i$, gdzie $\mathrm{pr}_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ oznacza projekcję na i-tą współrzędną. Biorąc $\eta = \boldsymbol{e}_i$ wnioskujemy, że pochodna $\big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\big)'(a)$ istnieje. Stąd, korzystając z reguł różniczkowania, wnioskujemy, że pochodna $f''(a)$ istnieje. $\square$

Definicja 9.5.5. Niech $\mathcal{L}^2_s(E,F)$ oznacza zbiór wszystkich odwzorowań symetrycznych z $\mathcal{L}^2(E,F)$.

Odnotujmy, że $\mathcal{L}^2_s(E,F)$ jest podprzestrzenią domkniętą $\mathcal{L}^2(E,F)$. W szczególności, jeżeli F jest Banacha, to przestrzeń $\mathcal{L}^2_s(E,F)$ jest Banacha.

Twierdzenie 9.5.6 (Twierdzenie o symetrii drugiej różniczki)**.** *$f''(a) \in \mathcal{L}^2_s(E,F)$. W szczególności (por. Twierdzenie 9.5.2), dla $E = \mathbb{R}^n$ dostajemy $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$, $i,j = 1,\dots,n$.*

Dowód. (Por. dowód Twierdzenia 9.1.11.) Ustalmy $\xi,\eta \in E$. Chcemy pokazać, że $f''(a)(\xi,\eta) = f''(a)(\eta,\xi)$. Możemy założyć, że $\|\xi\|=\|\eta\|=1$. Niech kula $B(a,3r) \subset \Omega$ będzie taka, że $f'(x)$ istnieje dla dowolnego punktu $x \in B(a,3r)$. Zdefiniujmy

$$\Phi(t) := f(a+t\xi+t\eta) - f(a+t\xi) - f(a+t\eta) + f(a) - t^2 f''(a)(\xi,\eta), \quad |t| \leqslant r.$$

Pokażemy, że $\Phi(t)/t^2 \longrightarrow 0$ przy $t \longrightarrow 0+$, co wobec symetrii wyrażenia

$$f(a+t\xi+t\eta) - f(a+t\xi) - f(a+t\eta) + f(a),$$

da żądany wynik. Ustalmy $0 < t \leqslant r$ i niech

$$g(y) := f(a+t\xi+y\eta) - f(a+y\eta) - tyf''(a)(\xi,\eta), \quad 0 \leqslant y \leqslant r.$$

Mamy $\Phi(t) = g(t) - g(0)$. Ponadto, $g'(y) = f'(a+t\xi+y\eta)(\eta) - f'(a+y\eta)(\eta) - tf''(a)(\xi,\eta)$. Na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych, mamy $\|\Phi(t)\| \leqslant t\sup\{\|g'(y)\| : 0 \leqslant y \leqslant t\}$. Niech

$$f'(a+h) = f'(a) + f''(a)(h) + \alpha(h)\|h\|, \quad \|h\| < 3r$$

(równość w $\mathcal{L}(E,F)$), gdzie $\lim\limits_{h\to 0}\alpha(h) = 0$. Wynika stąd, że dla $0 \leqslant y \leqslant t$ mamy

$$\begin{aligned} g'(y) &= f'(a)(\eta) + f''(a)(t\xi+y\eta)(\eta) + \alpha(t\xi+y\eta)(\eta)\|t\xi+y\eta\| \\ &\quad - f'(a)(\eta) - f''(a)(y\eta)(\eta) - \alpha(y\eta)(\eta)\|y\eta\| - tf''(a)(\xi)(\eta) \\ &= \alpha(t\xi+y\eta)(\eta)\|t\xi+y\eta\| - \alpha(y\eta)(\eta)\|y\eta\|, \text{ a stąd} \\ &\sup\{\|g'(y)\| : 0 \leqslant y \leqslant t\} \leqslant 3t\sup\{\|\alpha(\mu\xi+\nu\eta)\| : 0 \leqslant \mu,\nu \leqslant t\}. \end{aligned}$$

Ostatecznie, $\frac{\|\Phi(t)\|}{t^2} \leqslant 3\sup\{\|\alpha(\mu\xi+\nu\eta)\| : 0 \leqslant \mu,\nu \leqslant t\} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$. $\square$

Definicja 9.5.7. Niech E, F będą przestrzeniami unormowanymi nad $\mathbb{K}$. Odwzorowanie $Q : E \longrightarrow F$ nazywamy *wielomianem jednorodnym stopnia* 2 *(formą kwadratową)* ($Q \in \underline{\mathcal{H}}^2(E,F)$), jeżeli istnieje odwzorowanie $\widetilde{Q} \in \mathrm{Hom}^2(E,F)$ takie, że $Q(x) = \widetilde{Q}(x,x)$, $x \in E$.

Przez $\mathcal{H}^2(E,F)$ oznaczamy przestrzeń wszystkich ciągłych wielomianów z $\underline{\mathcal{H}}^2(E,F)$.

Obserwacja 9.5.8. (a) $\underline{\mathcal{H}}^2(E,F)$ i $\mathcal{H}^2(E,F)$ są $\mathbb{K}$–przestrzeniami wektorowymi.

(b) Jeżeli $Q(x) = \widetilde{Q}(x,x)$, $x \in E$, gdzie $\widetilde{Q} \in \mathrm{Hom}^2(E,F)$, to odwzorowanie

$$\widehat{Q}(x,y) := \tfrac{1}{2}(\widetilde{Q}(x,y) + \widetilde{Q}(y,x)), \quad x,y \in E,$$

jest dwuliniowe, symetryczne ($\widehat{Q} \in \mathrm{Hom}^2_s(E,F)$) i $Q(x) = \widehat{Q}(x,x)$, $x \in E$. W takim razie odwzorowanie

$$\mathrm{Hom}^2_s(E,F) \ni W \overset{\Lambda}{\longmapsto} (E \ni x \longmapsto W(x,x) \in F) \in \underline{\mathcal{H}}^2(E,F)$$

jest epimorfizmem. Jest ono również injektywne bowiem

$$\widehat{Q}(x,y) = \tfrac{1}{2}\big(\widehat{Q}(x+y,x+y) - \widehat{Q}(x,x) - \widehat{Q}(y,y)\big) = \tfrac{1}{4}\big(\widehat{Q}(x+y,x+y) - \widehat{Q}(x-y,x-y)\big),$$
$$x,y \in E, \quad \widehat{Q} \in \operatorname{Hom}^2_s(E,F).$$

Oznacza to, że $\Lambda : \operatorname{Hom}^2_s(E,F) \longmapsto \underline{\mathcal{H}}^2(E,F)$ jest izomorfizmem algebraicznym, przy czym odwzorowanie odwrotne $\Xi := \Lambda^{-1}$ jest dane wzorem

$$\underline{\mathcal{H}}^2(E,F) \ni Q \overset{\Xi}{\longmapsto} \widehat{Q} \in \operatorname{Hom}^2_s(E,F), \quad E\times E \ni (x,y) \overset{\widehat{Q}}{\longmapsto} \tfrac{1}{4}\big(Q(x+y) - Q(x-y)\big) \in F.$$

(c) $\mathcal{H}^2(E,F) = \Lambda(\mathcal{L}^2_s(E,F))$.

(d) W przestrzeni $\mathcal{H}^2(E,F)$ wprowadzamy normę $\|Q\| := \sup\{\|Q(x)\| : \|x\| \leqslant 1\}$. Wobec nierówności $\|Q(x)\| = \|\widehat{Q}(x,x)\| \leqslant \|\widehat{Q}\|\|x\|^2$, norma $\|Q\|$ jest poprawnie określona. Przy takim unormowaniu

$$\Lambda \in \operatorname{Isom}(\mathcal{L}^2_s(E,F), \mathcal{H}^2(E,F)), \quad \|\Lambda\| \leqslant 1,\ \|\Xi\| \leqslant 2.$$

Odnotujmy, że oszacowanie $\|\Xi\| \leqslant 2$ nie musi być optymalne (Twierdzenie 9.5.9).

(e) Korzystając z powyższych identyfikacji będziemy pisać $f''(a)(h) := f''(a)(h,h)$, $h \in E$ (z pełną świadomością, że czasem może to prowadzić do wieloznaczności).

(f) Jeżeli F jest Banacha, to $\mathcal{H}^2(E,F)$ jest Banacha.

Twierdzenie 9.5.9. *Jeżeli $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ jest rzeczywistą przestrzenią unitarną ($E \neq \{0\}$), to Λ jest izometrią, tzn. $\|\widehat{Q}\| = \|Q\|$ dla dowolnego $Q \in \mathcal{H}^2(E,F)$.*

Przypomnijmy, że zawsze mamy $\|Q\| \leqslant \|\widehat{Q}\|$, $Q \in \mathcal{H}^2(E,F)$.

Dowód. Na wstępie zauważmy, że można założyć, że $\dim E \leqslant 2$. Istotnie, przypuśćmy, że twierdzenie zachodzi dla przestrzeni o wymiarze $\leqslant 2$. Niech $x_1, x_2 \in \overline{B}(1)$ i niech $V := \mathbb{R}x_1 + \mathbb{R}x_2$. Wtedy, dla dowolnego $Q \in \mathcal{H}^2(E,F)$, mamy $\|\widehat{Q}(x_1,x_2)\| \leqslant \|\widehat{Q}|_{V\times V}\| = \|Q_V\| \leqslant \|Q\|$, co dowodzi, że $\|\widehat{Q}\| = \|Q\|$, a więc $\|\Lambda\| = 1$.

Możemy więc założyć, że $\dim E \leqslant 2$. Ustalmy $Q \in \mathcal{H}^2(E,F)$. Zbiór $\overline{B}(1)\times\overline{B}(1)$ jest zwarty i w związku z tym $\|\widehat{Q}\|$ jest zrealizowana dla pewnych $a_1, a_2 \in \partial B(1)$, tzn. $\|\widehat{Q}\| = \|\widehat{Q}(a_1,a_2)\|$. Jeżeli $a_1 = \pm a_2$ dowód jest zakończony (tak jest zawsze, gdy $\dim E = 1$). Przypuśćmy, że $a_1 \neq \pm a_2$ i niech $b := \frac{a_1+a_2}{\|a_1+a_2\|}$. Pokażemy, że wtedy $\|\widehat{Q}\| = \|\widehat{Q}(b,b)\|$, co zakończy dowód. Chcemy pokazać, że $\|Q(a_1+a_2)\| = \|\widehat{Q}\|\|a_1+a_2\|^2$. Gdyby $\|Q(a_1+a_2)\| < \|\widehat{Q}\|\|a_1+a_2\|^2$, to wówczas

$$\|\widehat{Q}\| = \|\widehat{Q}(a_1,a_2)\| = \tfrac{1}{4}\|Q(a_1+a_2) - Q(a_1-a_2)\| < \|\widehat{Q}\|\tfrac{1}{4}(\|a_1+a_2\|^2 + \|a_1-a_2\|^2)$$
$$\overset{(*)}{=} \|\widehat{Q}\|\tfrac{1}{2}(\|a_1\|^2 + \|a_2\|^2) \leqslant \|\widehat{Q}\|;$$

sprzeczność ((*) wynika z reguły równoległoboku (Obserwacja 5.11.25(a))). $\square$

[Wykład 26.10.2020 . . . .]

Twierdzenie 9.5.10. *Załóżmy, że $f \in \mathcal{D}^2(\Omega,F;a)$, $g \in \mathcal{D}^2(\Omega,G;a)$, $B \in \mathcal{L}(F,G;H)$. Wtedy $B(f,g) \in \mathcal{D}^2(\Omega,H;a)$ oraz*

$$(B(f,g))''(a)(\xi,\eta) = B(f''(a)(\xi,\eta), g(a)) + B(f'(a)(\eta), g'(a)(\xi))$$
$$+ B(f'(a)(\xi), g'(a)(\eta)) + B(f(a), g''(a)(\xi,\eta)), \quad (\xi,\eta) \in E\times E.$$

W szczególności,

$$(B(f,g))''(a)(h) = B(f''(a)(h), g(a)) + 2B(f'(a)(h), g'(a)(h)) + B(f(a), g''(a)(h)), \quad h \in E.$$

Oczywiście, tak jak poprzednio, możemy sformułować analogiczne wyniki dla mnożenia i iloczynu skalarnego — Ćwiczenie.

Dowód. Możemy założyć, że $f \in \mathcal{D}(\Omega,F)$, $g \in \mathcal{D}(\Omega,G)$. Wiemy, że $(B(f,g))' = B_1(f',g) + B_2(f,g')$, gdzie

$$B_1 : \mathcal{L}(E,F)\times G \longrightarrow \mathcal{L}(E,H), \quad B_1(L,y)(h) := B(L(h),y),$$
$$B_2 : F\times\mathcal{L}(E,G) \longrightarrow \mathcal{L}(E,H), \quad B_2(x,L)(h) := B(x,L(h)).$$

Widać, że są to operatory dwuliniowe i ciągłe. Teraz wystarczy już tylko skorzystać z Twierdzenia 9.2.6:

$$(B(f,g))''(a)(\xi) = B_1(f''(a)(\xi), g(a)) + B_1(f'(a), g'(a)(\xi)) + B_2(f'(a)(\xi), g'(a)) + B_2(f(a), g''(a)(\xi)),$$
$$\xi \in E \text{ (równość w } \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E,H))).$$

Po podstawieniu argumentów dostajemy szukany wzór. $\square$

Twierdzenie 9.5.11 (Różniczkowanie złożenia). *Niech G będzie przestrzenią unormowaną, niech $U \subset G$ będzie zbiorem otwartym, niech $\varphi : U \longrightarrow E$ i niech $t_0 \in U$. Załóżmy, że $\varphi \in \mathcal{D}^2(U, E; t_0)$, $f \in \mathcal{D}^2(\Omega, F; \varphi(t_0))$ i $\varphi(U) \subset \Omega$. Wtedy $f \circ \varphi \in \mathcal{D}^2(U, F; t_0)$ oraz*

$$(f \circ \varphi)''(t_0)(\xi, \eta) = f''(\varphi(t_0))(\varphi'(t_0)(\xi), \varphi'(t_0)(\eta)) + f'(\varphi(t_0))(\varphi''(t_0)(\xi, \eta)), \quad \xi, \eta \in G.$$

W szczególności,

$$(f \circ \varphi)''(t_0)(h) = f''(\varphi(t_0))(\varphi'(t_0)(h)) + f'(\varphi(t_0))(\varphi''(t_0)(h)), \quad h \in G.$$

Dowód. Możemy założyć, że $\varphi \in \mathcal{D}(U, E)$ i $f \in \mathcal{D}(\Omega, F)$. Wiemy, że $(f \circ \varphi)' = B(f' \circ \varphi, \varphi')$, gdzie

$$B : \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(G, E) \longrightarrow \mathcal{L}(G, F), \quad B(P, Q) := P \circ Q.$$

Wiadomo, że B jest operatorem dwuliniowym i ciągłym. Stąd, na podstawie Twierdzenia 9.2.6, mamy:

$$\begin{aligned}(f \circ \varphi)''(t_0)(\xi) &= B((f' \circ \varphi)'(t_0)(\xi), \varphi'(t_0)) + B(f'(\varphi(t_0)), \varphi''(t_0)(\xi)) \\ &= B(f''(\varphi(t_0))(\varphi'(t_0)(\xi)), \varphi'(t_0)) + B(f'(\varphi(t_0)), \varphi''(t_0)(\xi)) \text{ (równość w } \mathcal{L}(G, F)).\end{aligned}$$ $\square$

Definicja 9.5.12 (Ćwiczenie). W standardowy sposób definiujemy przestrzenie $\mathcal{D}^2(\Omega, F)$, $\mathcal{D}^2_b(\Omega, F)$, $\mathcal{C}^{2,\alpha}_b(\Omega, F)$, $\mathcal{C}^2(\Omega, F)$, $\mathcal{C}^2_b(\Omega, F)$ oraz normy $\|f\|_{\Omega,2} := \|f\|_\Omega + \|f'\|_\Omega + \|f''\|_\Omega$, $f \in \mathcal{D}^2_b(\Omega, F)$, $\|f\|_{\Omega,2,\alpha} := \|f\|_{\Omega,2} + |f''|_\alpha$, $f \in \mathcal{C}^{2,\alpha}_b(\Omega, F)$.

Obserwacja 9.5.13 (Ćwiczenie). (a) $f' \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathcal{L}(E, F)) \Longleftrightarrow f \in \mathcal{C}^2(\Omega, F)$.

(b) Jeżeli $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, F)$, $g \in \mathcal{C}^2(\Omega, G)$ i $B \in \mathcal{L}(F, G; H)$, to $B(f, g) \in \mathcal{C}^2(\Omega, H)$.

(c) Jeżeli $\varphi \in \mathcal{C}^2(U, E)$ i $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, F)$, to $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^2(U, F)$.

(d) Teraz przychodzi kolej na uogólnienie twierdzenia o różniczkowaniu szeregu wyraz po wyrazie (por. Twierdzenie 6.10.1).

(e) Jeżeli F jest Banacha, to $\mathcal{D}^2_b(\Omega, F)$, $\mathcal{C}^{2,\alpha}_b(\Omega, F)$, $\mathcal{C}^2_b(\Omega, F)$ są Banacha.

9.6. Odwzorowania wieloliniowe

Niech $E, E_1, \dots, E_k, F$ będą przestrzeniami unormowanymi nad $\mathbb{K}$.

Definicja 9.6.1. Przez $\operatorname{Hom}(E_1, \dots, E_k; F)$ oznaczamy przestrzeń odwzorowań k–liniowych $W : E_1 \times \dots \times E_k \longrightarrow F$. Jeżeli $E_1 = \dots = E_k = E$, to piszemy $\operatorname{Hom}^k(E, F)$. Przez $\operatorname{Hom}^k_s(E, F)$ oznaczamy przestrzeń wszystkich symetrycznych odwzorowań z przestrzeni $\operatorname{Hom}^k(E, F)$, tzn. tych odwzorowań $W \in \operatorname{Hom}^k(E, F)$, dla których

$$W(x_1, \dots, x_k) = W(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)})$$

dla dowolnych $x_1, \dots, x_k \in E$ i permutacji k–elementowej $\sigma \in S_k$.

Obserwacja 9.6.2. (a) Dla dowolnej permutacji $\sigma \in S_k$ mamy

$$\operatorname{Hom}(E_1, \dots, E_k; F) \simeq \operatorname{Hom}(E_{\sigma(1)}, \dots, E_{\sigma(k)}; F).$$

(b) $\operatorname{Hom}^1(E, F) = \operatorname{Hom}^1_s(E, F) = \operatorname{Hom}(E, F)$.

(c) Dla $1 \leqslant \ell \leqslant k-1$ rozważmy odwzorowanie

$$\operatorname{Hom}(E_1, \dots, E_k; F) \ni W \xmapsto{\Phi} \widehat{W} \in \operatorname{Hom}(E_1, \dots, E_\ell; \operatorname{Hom}(E_{\ell+1}, \dots, E_k; F)),$$

$$E_1 \times \dots \times E_\ell \ni (x_1, \dots, x_\ell) \xmapsto{\widehat{W}} W(x_1, \dots, x_\ell, \cdot, \dots, \cdot).$$

Bez trudu sprawdzamy, że Φ jest dobrze określone oraz, że Φ jest izomorfizmem algebraicznym, przy czym $\Psi := \Phi^{-1}$ jest dane wzorem:

$$\operatorname{Hom}(E_1, \dots, E_\ell; \operatorname{Hom}(E_{\ell+1}, \dots, E_k; F)) \ni A \xmapsto{\Psi} \widehat{A} \in \operatorname{Hom}(E_1, \dots, E_k; F),$$

$$E_1 \times \dots \times_k \ni (x_1, \dots, x_k) \xmapsto{\widehat{A}} A(x_1, \dots, x_\ell)(x_{\ell+1}, \dots, x_k) \in F.$$

(d) $\operatorname{Hom}(E_1,\dots,E_k;F)\simeq\operatorname{Hom}(E_1,\dots,E_\ell;\operatorname{Hom}(E_{\ell+1},\dots,E_k;F))$. W szczególności,

$$\operatorname{Hom}^k(E,F)\simeq\operatorname{Hom}^\ell(E,\operatorname{Hom}^{k-\ell}(E,F)).$$

Definicja 9.6.3. Niech $\underline{\mathcal{H}}^k(E,F)$ oznacza przestrzeń wszystkich *wielomianów jednorodnych stopnia k*, tzn. przestrzeń wszystkich tych odwzorowań $Q:E\longrightarrow F$, dla których istnieje $\widetilde{Q}\in\operatorname{Hom}^k(E,F)$ takie, że $Q(x)=\widetilde{Q}(x,\dots,x)$ dla dowolnego $x\in E$. Przyjmijmy dodatkowo $\underline{\mathcal{H}}^0(E,F):=F$.

Obserwacja 9.6.4. Jeżeli $Q(x)=\widetilde{Q}(x,\dots,x)$, $x\in E$, to wzór

$$\widehat{Q}(x_1,\dots,x_k):=\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}\widetilde{Q}(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(k)}),\quad x_1,\dots,x_k\in E,$$

zadaje odwzorowanie z $\operatorname{Hom}^k_s(E,F)$ o tej samej własności. Mamy więc epimorfizm

$$\operatorname{Hom}^k_s(E,F)\ni W\overset{\Lambda}{\longmapsto}(E\ni x\longmapsto W(x,\dots,x)\in F)\in\underline{\mathcal{H}}^k(E,F).$$

Twierdzenie 9.6.5 (Formuła polaryzacyjna)**.** *Dla $0\leqslant\ell\leqslant k$, $k\in\mathbb{N}$ i $Q\in\underline{\mathcal{H}}^\ell(E,F)$ zachodzi wzór*

$$\frac{1}{k!}\sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^k}(-1)^{k-|\varepsilon|}Q(x_0+\varepsilon_1x_1+\dots+\varepsilon_kx_k)=\begin{cases}\widehat{Q}(x_1,\dots,x_k), & \text{jeżeli } \ell=k\\ 0, & \text{jeżeli } 0\leqslant\ell\leqslant k-1\end{cases},\quad x_0,\dots,x_k\in E.$$

Dla $\ell=k\geqslant 2$ formuła polaryzacyjna pokazuje, że odwzorowanie Λ jest injektywne (a więc jest izomorfizmem) i daje ponadto wzór na $\Xi:=\Lambda^{-1}$ (zawsze można przyjąć $x_0=0$). Mamy więc

$$\operatorname{Hom}^k_s(E,F)\simeq\underline{\mathcal{H}}^k(E,F).$$

Dowód. Przypadek $\ell=0$ pozostawiamy jako Ćwiczenie. Dla $\ell\geqslant1$ mamy

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k!}\sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^k}(-1)^{k-|\varepsilon|}Q(x_0+\varepsilon_1x_1+\dots+\varepsilon_kx_k)\\
&=\frac{1}{k!}\sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^k}(-1)^{k-|\varepsilon|}\widehat{Q}(\underbrace{x_0+\varepsilon_1x_1+\dots+\varepsilon_kx_k,\dots,x_0+\varepsilon_1x_1+\dots+\varepsilon_kx_k}_{\ell\times})\\
&=\frac{1}{k!}\sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^k}(-1)^{k-|\varepsilon|}\sum_{\substack{j_0,\dots,j_k\in\mathbb{N}_0\\ j_0+\dots+j_k=\ell}}\frac{\ell!}{j_0!\dots j_k!}\varepsilon_1^{j_1}\dots\varepsilon_k^{j_k}\widehat{Q}(\underbrace{x_0,\dots,x_0}_{j_0\times},\dots,\underbrace{x_k,\dots,x_k}_{j_k\times})\\
&=\sum_{\substack{j_0,\dots,j_k\in\mathbb{N}_0\\ j_0+\dots+j_k=\ell}}\Big(\frac{1}{k!}\sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^k}(-1)^{k-|\varepsilon|}\frac{\ell!}{j_0!\dots j_k!}\varepsilon_1^{j_1}\dots\varepsilon_k^{j_k}\Big)\widehat{Q}(\underbrace{x_0,\dots,x_0}_{j_0\times},\dots,\underbrace{x_k,\dots,x_k}_{j_k\times})\\
&=:\sum_{\substack{j_0,\dots,j_k\in\mathbb{N}_0\\ j_0+\dots+j_k=\ell}}A_{j_0,\dots,j_k}\widehat{Q}(\underbrace{x_0,\dots,x_0}_{j_0\times},\dots,\underbrace{x_k,\dots,x_k}_{j_k\times}).
\end{aligned}$$

Ustalmy $j_0,\dots,j_k\in\mathbb{N}_0$ takie, że $j_0+\dots+j_k=\ell$ i rozważmy dwa przypadki:

- Istnieje $s\in\{1,\dots,k\}$ takie, że $j_s=0$ (ma to zawsze miejsce, gdy $\ell<k$, bo $j_1+\dots+j_k\leqslant\ell$). Wtedy $A_{j_0,\dots,j_k}=0$, bo $(-1)^{k-(\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_k)}$ zmienia znak, gdy przechodzimy od $\varepsilon_s=0$ do $\varepsilon_s=1$, a cała reszta pozostaje bez zmian.
- Przypadek przeciwny. Musi być $\ell=k$, $j_0=0$ i $j_1=\dots=j_k=1$. Wtedy

$$A_{0,1,\dots,1}=\frac{1}{k!}\sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^k}(-1)^{k-|\varepsilon|}k!\varepsilon_1\dots\varepsilon_k=1.\qquad\square$$

[Wykład 29.10.2020 . . . .]

Obserwacja 9.6.6. Załóżmy, że mamy dany wielomian jednorodny $Q\in\underline{\mathcal{H}}^k(E,F)$. Wzór polaryzacyjny pozwala nam wyznaczyć odwzorowanie $\widehat{Q}\in\operatorname{Hom}^k_s(E,F)$ takie, że $\widehat{Q}(x,\dots,x)=Q(x)$, $x\in E$. Niestety, w praktyce wiąże się niejednokrotnie z uciążliwymi rachunkami. Ponieważ odwzorowanie $\widehat{Q}$ jest wyznaczone jednoznacznie, czasami możemy postąpić innaczej. Najpierw próbujemy odgadnąć jakieś odwzorowanie

$W \in \operatorname{Hom}^k(E,F)$ takie, że $W(x,\dots,x) = Q(x)$, $x \in E$. Następnie symetryzujemy to odwzorowanie zgodnie ze wzorem

$$\widehat{W}(x_1,\dots,x_k) := \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k} W(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(k)}), \quad x_1,\dots,x_k \in E. \tag{*}$$

Pozornie niewiele to upraszcza, ale jeżeli nasz początkowy wybór W był w miarę trafny, to możemy sporo zyskać. Załóżmy mianowicie że zmienne $(x_1,\dots,x_k)$ możemy podzielić na ℓ grup $Z_1 := (1,\dots,x_{\beta_1})$, $Z_2 := (x_{\beta_1+1},\dots,x_{\beta_1+\beta_2}),\dots,Z_\ell := (x_{\beta_1+\dots+\beta_{\ell-1}+1},\dots,x_{\beta_1+\dots+\beta_\ell})$, gdzie $\beta_1,\dots,\beta_\ell \in \mathbb{N}$, $\beta_1+\dots+\beta_\ell = k$, w ten sposób, że W jest odwzorowaniem symetrycznym względem zmiennych z każdej grupy Z_j przy ustalonych pozostałych zmiennych $(^5)$. Patrząc na (*), porządkując zmienne tak by każdy z ciągów $Z_1(\sigma) := (\sigma(1),\dots,\sigma(\beta_1))$, $Z_2(\sigma) := (\sigma(\beta_1+1),\dots\sigma(\beta_1+\beta_2))$, $\dots$, $Z_\ell(\sigma) := (\sigma(\beta_1+\dots+\beta_{\ell-1}+1),\dots,\sigma(\beta_1+\dots+\beta_\ell))$ był ściśle rosnący, a nastepnie korzystając z oddzielnej symetrii, otrzymujemy (Ćwiczenie):

$$\widehat{W}(x_1,\dots,x_k) = \frac{\beta_1!\cdots\beta_\ell!}{k!}\sum_{\sigma\in S_{\beta_1,\dots,\beta_\ell}} W(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(k)}), \quad x_1,\dots,x_k \in E,$$

gdzie $S_{\beta_1,\dots,\beta_\ell} := \{\sigma \in S_k :$ każdy z ciągów $Z_1(\sigma),\dots,Z_\ell(\sigma)$ jest ściśle rosnący$\}$ $(^6)$.

Definicja 9.6.7. Odwzorowanie $Q : E \longrightarrow F$ nazywamy *wielomianem stopnia* $\leqslant k$, jeżeli istnieją $Q_j \in \underline{\mathcal{H}}^j(E,F)$, $j = 0,\dots,k$, takie, że $Q = Q_0+\dots+Q_k$. Przestrzeń wielomianów stopnia $\leqslant k$ będzie oznaczana przez $\underline{\mathcal{P}}_k(E,F)$.

Na podstawie formuły polaryzacyjnej wiemy, że Q_k jest wyznaczony jednoznacznie przez Q. Powtarzając to rozumowanie dla $Q - Q_k$ wnioskujemy, że Q_{k-1} jest wyznaczony jednoznacznie itd. Wynika stąd, że wszystkie wielomiany $Q_0,\dots,Q_k$ są wyznaczone jednoznacznie.

Definicja 9.6.8. $\mathcal{L}(E_1,\dots,E_k;F)$ oznacza przestrzeń wszystkich odwzorowań ciągłych z $\operatorname{Hom}(E_1,\dots,E_k;F)$. Jeżeli $E_1 = \dots = E_k = E$, to piszemy $\mathcal{L}^k(E,F)$.

$\mathcal{L}^k_s(E,F)$ oznacza przestrzeń ciągłych odwzorowań z $\operatorname{Hom}^k_s(E,F)$.

$\mathcal{H}^k(E,F)$ oznacza przestrzeń ciągłych wielomianów jednorodnych stopnia k.

$\mathcal{P}_k(E,F)$ oznacza przestrzeń ciągłych wielomianów stopnia $\leqslant k$.

Twierdzenie 9.6.9. *Niech $W \in \operatorname{Hom}(E_1,\dots,E_k;F)$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) $W \in \mathcal{L}(E_1,\dots,E_k;F)$;

(ii) *W jest ciągłe w 0;*

(iii) *istnieje punkt $a \in E_1\times\dots\times E_k$ taki, że W jest ciągłe w a;*

(iv) *istnieją $a = (a_1,\dots,a_k) \in E_1\times\dots\times E_k$, $r > 0$ i $R > 0$ takie, że $W(\overline{B}(a_1,r)\times\dots\times\overline{B}(a_k,r)) \subset \overline{B}(R)$;*

(v) *istnieje $C \geqslant 0$ takie, że $\|W(x_1\dots,x_k)\| \leqslant C\|x_1\|\cdots\|x_k\|$, $(x_1,\dots,x_k) \in E_1\times\dots\times E_k$.*

Dowód. Implikacje (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) są oczywiste.

(iv) $\Longrightarrow$ (v): Wystarczy pokazać, że $\|W(x_1,\dots,x_k)\| \leqslant C$ dla $\|x_1\| = \dots = \|x_k\| = r$ $(^7)$. Weźmy $(x_1,\dots,x_k) \in E_1\times\dots\times E_k$ takie, że $\|x_1\| = \dots = \|x_k\| = r$ i szacujemy:

$$\begin{aligned}\|W(x_1,\dots,x_k)\| &= \|W((a_1+x_1)-a_1,\dots,(a_k+x_k)-a_k)\| \\ &= \Big\|\sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^k}(-1)^{k-|\varepsilon|}W(a_1+\varepsilon_1x_1,\dots,a_k+\varepsilon_kx_k)\Big\| \leqslant 2^kR =: C.\end{aligned}$$

(v) $\Longrightarrow$ (i): Dla $\|h_1\|,\dots,\|h_k\| \leqslant 1$ szacujemy:

$$\|W(a_1+h_1,\dots,a_k+h_k)-W(a_1,\dots,a_k)\| = \Big\|\sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^k:\ |\varepsilon|\geqslant 1} W((1-\varepsilon_1)a_1+\varepsilon_1h_1,\dots,(1-\varepsilon_k)a_k+\varepsilon_kh_k)\Big\|$$

$(^5)$ Oczywiście, to założenie jest trywialnie spełnione dla $\ell = k$ i $\beta_1 = \dots = \beta_k = 1$, ale nie o taki przypadek nam chodzi.

$(^6)$ $\#S_{\beta_1,\dots,\beta_\ell} = \frac{k!}{\beta_1!\cdots\beta_\ell!}$ — Ćwiczenie.

$(^7)$ Wtedy $\|W(x_1,\dots,x_k)\| \leqslant (C/r^k)\|x_1\|\cdots\|x_k\|$ dla dowolnych $(x_1,\dots.x_k) \in E_1\times\dots\times E_k$.

$$\leqslant \sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^k:\ |\varepsilon|\geqslant 1} C\|a_1\|^{1-\varepsilon_1}\|h_1\|^{\varepsilon_1}\cdots\|a_k\|^{1-\varepsilon_k}\|h_k\|^{\varepsilon_k} \leqslant C\operatorname{const}(k,a)(\|h_1\|+\cdots+\|h_k\|). \qquad \square$$

Wniosek 9.6.10. *$\mathcal{L}(E_1,\dots,E_k;F)$ jest przestrzenią unormowaną poprzez funkcję*

$$\|W\| = \|W\|_{\mathcal{L}(E_1,\dots,E_k;F)} := \sup\{\|W(x_1,\dots,x_k)\| : \|x_1\|\leqslant 1,\dots,\|x_k\|\leqslant 1\},\ W\in\mathcal{L}(E_1,\dots,E_k;F).$$

Ponadto, jeżeli $E_j \neq \{0\}$, $j=1,\dots,k$, to

$$\begin{aligned}\|W\| &= \sup\Big\{\frac{\|W(x_1,\dots,x_k)\|}{\|x_1\|\cdots\|x_k\|} : (x_1,\dots,x_k)\in(E_1)_*\times\cdots\times(E_k)_*\Big\}\\ &= \sup\{\|W(x_1,\dots,x_k)\| : \|x_1\|=\cdots=\|x_k\|=1\}\end{aligned}$$

oraz $\|W\|$ jest najmniejszą stałą C taką, że Twierdzenie 9.6.9(v) *zachodzi. W szczególności,*

$$\|W(x_1,\dots,x_k)\| \leqslant \|W\|\|x_1\|\cdots\|x_k\|,\quad (x_1,\dots,x_k)\in E_1\times\cdots\times E_k.$$

Twierdzenie 9.6.11. *Niech Φ, Ψ będą takie, jak w Obserwacji 9.6.2*(c)*.*

(a) *$\Phi(\mathcal{L}(E_1,\dots,E_k;F)) = \mathcal{L}(E_1,\dots,E_\ell;\mathcal{L}(E_{\ell+1},\dots,E_k;F))$ oraz $\|\Phi(W)\| = \|W\|$ dla $W\in\mathcal{L}(E_1,\dots,E_k;F)$, a więc $\Phi\in\operatorname{Isom}(\mathcal{L}(E_1,\dots,E_k;F),\mathcal{L}(E_1,\dots,E_\ell;\mathcal{L}(E_{\ell+1},\dots,E_k;F)))$ i Φ jest izometrią.*

(b) *Jeżeli $E_1,\dots,E_k$ są skończenie wymiarowe, to $\mathcal{L}(E_1,\dots,E_k;F) = \operatorname{Hom}(E_1,\dots,E_k;F)$. W szczególności, jeżeli E jest skończenie wymiarowa, to $\mathcal{L}^k(E,F) = \operatorname{Hom}^k(E,F)$.*

(c) *Jeżeli F jest Banacha, to $\mathcal{L}(E_1,\dots,E_k;F)$ jest Banacha.*

(d) *Jeżeli F jest Banacha, to $\mathcal{L}^k_s(E,F)$ jest Banacha.*

Dowód. (a) Wystarczy skorzystać ze wzorów na Φ i Ψ.

(b) Stosujemy indukcję względem k:

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}(E_1,\dots,E_{k+1};F) \simeq \mathcal{L}(E_1,\dots,E_k;\mathcal{L}(E_{k+1},F))\\ &\qquad = \operatorname{Hom}(E_1,\dots,E_k;\operatorname{Hom}(E_{k+1},F)) = \operatorname{Hom}(E_1,\dots,E_{k+1};F).\end{aligned}$$

(c) Stosujemy indukcję względem k:

$$\mathcal{L}(E_1,\dots,E_{k+1};F) \simeq \mathcal{L}(E_1,\dots,E_k;\mathcal{L}(E_{k+1},F)).$$

(d) $\mathcal{L}^k_s(E,F)$ jest podprzestrzenią domkniętą w $\mathcal{L}^k(E,F)$. $\square$

Przestrzeń $\mathcal{H}^k(E,F)$ normujemy przy pomocy funkcji

$$\|Q\| = \|Q\|_{\mathcal{H}^k(E,F)} := \sup\{\|Q(x)\| : \|x\|\leqslant 1\},\quad Q\in\mathcal{H}^k(E,F).$$

Odnotujmy, że $\|Q\|$ jest dobrze określona, $\|Q\| \leqslant \|\widehat{Q}\|$ oraz $\|Q(x)\| \leqslant \|Q\|\|x\|^k$, $x\in E$.

Twierdzenie 9.6.12. (a) *$\Lambda(\mathcal{L}^k_s(E,F)) = \mathcal{H}^k(E,F)$, $\Lambda\in\operatorname{Isom}(\mathcal{L}^k_s(E,F),\mathcal{H}^k(E,F))$, $\|\Lambda\|\leqslant 1$, $\|\Xi\|\leqslant e^{2k}$.*

(b) *Dla wielomianu $Q = Q_0+\cdots+Q_k \in \underline{\mathcal{P}}_k(E,F)$ mamy $Q\in\mathcal{P}_k(E,F) \iff Q_j\in\mathcal{H}^j(E,F)$, $j=1,\dots,k$.*

(c) *Jeżeli $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ jest rzeczywistą przestrzenią unitarną, to Λ jest izometrią.*

Dowód. (a) Jeżeli $\|x_1\|,\dots,\|x_k\|\leqslant 1$, to

$$\|\widehat{Q}(x_1,\dots,x_k)\| \leqslant \frac{1}{k!}\sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^k}\|Q\||\varepsilon|^k = \|Q\|\frac{1}{k!}\sum_{\ell=1}^k\binom{k}{\ell}\ell^k \leqslant \|Q\|\frac{1}{k!}2^kk^k \leqslant e^{2k}\|Q\|,$$

a więc $\|\Xi\|\leqslant e^{2k}$.

(b) Przypuśćmy, że Q jest wielomianem ciągłym. Na podstawie formuły polaryzacyjnej mamy

$$\widehat{Q}_k(x_1,\dots,x_k) := \frac{1}{k!}\sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^k}(-1)^{k-|\varepsilon|}Q(\varepsilon_1x_1+\cdots+\varepsilon_kx_k),\quad x_1,\dots,x_k\in E,$$

skąd natychmiast wynika, że Q_k jest wielomianem jednorodnym ciągłym. Stosując to samo rozumowanie do wielomianu $Q-Q_k$ wnioskujemy, że Q_{k-1} jest wielomianem jednorodnym ciągłym. Skończona indukcja kończy dowód.

(c) (Por. dowód Twierdzenia 9.5.9.) Można założyć, że $\dim E < +\infty$ (Ćwiczenie). Ustalmy $Q \in \mathcal{H}^k(E,F)$, $k \geqslant 3$. Ponieważ E jest skończenie wymiarowa, zbiór $\big(\overline{B}(1)\big)^k$ jest zwarty i w związku z tym $\|\widehat{Q}\|$ jest zrealizowana dla pewnych $a_1,\dots,a_k \in \partial B(1)$. Niech $a \in \partial B(1)$ będzie taki, że $\langle a, a_j\rangle \neq 0$, $j=1,\dots,k$. Zastępując ewentualnie a_j przez $-a_j$ możemy założyć, że $\langle a, a_j\rangle \geqslant r > 0$, $j=1,\dots,k$. Niech

$$K := \{(x_1,\dots,x_k) \in \big(\partial B(1)\big)^k : \langle a, x_j\rangle \geqslant r,\ j=1,\dots,k,\ \|\widehat{Q}\| = \|\widehat{Q}(x_1,\dots,x_k)\|\}.$$

Zauważmy, że $(a_1,\dots,a_k) \in K$ oraz, że K jest zwarty. Zdefiniujmy $f(x_1,\dots,x_k) := \langle a, x_1\rangle + \dots + \langle a, x_k\rangle$ i niech $(b_1,\dots,b_k) \in K$ realizuje maksimum funkcji f na K. Pokażemy, że $\varepsilon_1 b_1 = \dots = \varepsilon_k b_k$ dla pewnych $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k \in \{-1,1\}$. Zauważmy, że to już zakończy dowód (Ćwiczenie). Przypuśćmy, że np. $b_1 \neq \pm b_2$. Zdefiniujmy $d := (b_1+b_2)/\|b_1+b_2\|$ i zauważmy, że (Ćwiczenie):

- $\|b_1+b_2\| < 2$,
- $\langle a, d\rangle = \frac{\langle a,b_1\rangle + \langle a,b_2\rangle}{\|b_1+b_2\|} \geqslant \frac{2r}{\|b_1+b_2\|} > r$,
- analogicznie jak w dowodzie Twierdzenia 9.5.9 mamy $\|\widehat{Q}(d,d,b_3,\dots,b_k)\| = \|\widehat{Q}\|$.

W takim razie $(d,d,b_3,\dots,b_k) \in K$ oraz $f(d,d,b_3,\dots,b_k) = 2\frac{\langle a,b_1\rangle + \langle a,b_2\rangle}{\|b_1+b_2\|} + \langle a,b_3\rangle + \dots + \langle a,b_k\rangle > f(b_1,\dots,b_k)$; sprzeczność. □

Twierdzenie 9.6.13. *Niech $Q = Q_0 + \dots + Q_k \in \underline{\mathcal{P}}_k(E,F)$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) *$Q \in \mathcal{P}_k(E,F)$;*
(ii) *Q jest ciągłe w 0;*
(iii) *istnieje punkt $a \in E$ taki, że Q jest ciągłe w a;*
(iv) *istnieją $a \in E$ i $r_0 > 0$ takie, że $Q(B(a,r_0))$ jest zbiorem ograniczonym;*
(v) *dla dowolnego $r > 0$, $Q(B(r))$ jest zbiorem ograniczonym (równoważnie: dla dowolnych $a \in E$ i $r > 0$, $Q(B(a,r))$ jest zbiorem ograniczonym).*

Dowód. Implikacje (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) są oczywiste.

(iv) $\Longrightarrow$ (v): Wobec formuły polaryzacyjnej (z $x_0 := a$) $\widehat{Q}_k(B(r_0/k) \times \dots \times B(r_0/k))$ jest zbiorem ograniczonym. Stąd na podstawie Twierdzenia 9.6.9, $\widehat{Q}_k$ jest ciągłe. W szczególności, $Q_k(B(r))$ jest zbiorem ograniczonym dla dowolnego $r > 0$. Teraz powtarzamy rozumowanie dla wielomianu $Q - Q_k$ i wnioskujemy, że $Q_{k-1}(B(r))$ jest zbiorem ograniczonym dla dowolnego $r > 0$ itd. Ostatecznie $Q_j(B(r))$ jest zbiorem ograniczonym dowolnych $j = 1,\dots,k$ i $r > 0$, skąd natychmiast wynika (v).

(v) $\Longrightarrow$ (i): Stosujemy poprzednie rozumowanie. □

Twierdzenie 9.6.14. (a) *Jeżeli $W \in \mathcal{L}(E_1,\dots,E_k;F)$, to $W'(a) \in \mathcal{L}(E_1 \times \dots \times E_k, F)$,*

$$W'(a)(h) = W(h_1,a_2,\dots,a_k) + W(a_1,h_2,a_3,\dots,a_k) + \dots + W(a_1,\dots,a_{k-1},h_k),$$
$$a = (a_1,\dots,a_k),\ h = (h_1,\dots,h_k) \in E_1 \times \dots \times E_k.$$

W szczególności, $W' = W_1 + \dots + W_k$, gdzie $W_j \in \mathcal{L}(E_1,\dots,E_{j-1},E_{j+1},\dots,E_k;\mathcal{L}(E_j,F))$, $j=1,\dots,k$. W konsekwencji,

$$W''(a)(h_1,h_2) = \sum_{\substack{1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant k\\ \sigma \in S_2}} W(a_1,\dots,a_{j_1-1},h_{\sigma(1),j_1},a_{j_1+1},\dots,a_{j_2-1},h_{\sigma(2),j_2},a_{j_2+1},\dots,a_k).$$

(b) *Jeżeli $Q \in \mathcal{H}^k(E,F)$, to $Q'(a)(h) = k\widehat{Q}(a,\dots,a,h)$, $a,h \in E$. W szczególności, $Q' \in \mathcal{H}^{k-1}(E, \mathcal{L}(E,\ F))$. W konsekwencji, $Q''(a)(h,h) = k(k-1)\widehat{Q}(a,\dots,a,h,h)$, $a,h \in E$.*

(c) *Jeżeli $Q \in \mathcal{P}_k(E,F)$, to $Q' \in \mathcal{P}_{k-1}(E,\mathcal{L}(E,F))$.*

Dowód. (a) — zob. dowód Obserwacji 9.2.5(e).

(b) $Q = \widehat{Q} \circ \pi$, gdzie $\pi : E \longrightarrow E^k$, $\pi(x) := (x,\dots,x)$. Stąd $Q'(a) = \widehat{Q}'(\pi(a)) \circ \pi'(a)$ i możemy skorzystać z (a).

(c) wynika z (b). □

9.7. Pochodne wyższych rzędów

Definicja 9.7.1. Niech E i F będą przestrzeniami unormowanymi nad $\mathbb{K}$, niech $\Omega \in \operatorname{top}(E)$, $f : \Omega \longrightarrow F$, $a \in \Omega$ i załóżmy, że $f^{(k-1)}(x) \in \mathcal{L}^{k-1}(E,F)$ istnieje dla $x \in V$, gdzie V jest pewnym otoczeniem a (wiemy już co to oznacza dla $k = 2, 3$). Mamy więc odwzorowanie $f^{(k-1)} : V \longrightarrow \mathcal{L}^{k-1}(E,F)$. Definiujemy *$k$-tą pochodną ($k$-tą różniczkę Frécheta)* odwzorowania f w punkcie a:

$$f^{(k)}(a) := (f^{(k-1)})'(a) \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}^{k-1}(E,F)) \simeq \mathcal{L}^k(E,F).$$

Aby uniknąć nieporozumień ustalamy identyfikację

$$\mathcal{L}(E, \mathcal{L}^{k-1}(E,F)) \ni A \longmapsto \widehat{A} \in \mathcal{L}^k(E,F), \quad E \times E^{k-1} \ni (\xi, \eta) \overset{\widehat{A}}{\longmapsto} A(\xi)(\eta) \in F, \text{ tzn.}$$
$$f^{(k)}(a)(\xi,\eta) \simeq f^{(k)}(a)(\xi)(\eta), \quad (\xi,\eta) \in E \times E^{k-1}.$$

Zbiór wszystkich odwzorowań $f : \Omega \longrightarrow F$, dla których $f^{(k)}(a)$ istnieje oznaczamy przez $\mathcal{D}^k(\Omega, F; a)$. Jak zwykle $\mathcal{D}^k(\Omega, F) := \bigcap_{x \in \Omega} \mathcal{D}(\Omega, F; x)$.

Obserwacja 9.7.2 (Ćwiczenie, por. Twierdzenie 9.6.14). (a) Jeżeli $W \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_k; F)$, to dla $1 \leqslant \ell \leqslant k$ mamy

$$W^{(\ell)}(a)(h^1, \dots, h^\ell) = \sum_{\substack{1 \leqslant j_1 < \dots < j_\ell \leqslant k \\ \sigma \in S_\ell}} W(a_1, \dots, a_{j_1 - 1}, h_{j_1}^{\sigma(1)}, a_{j_1+1}, \dots, a_{j_\ell - 1}, h_{j_\ell}^{\sigma(\ell)}, a_{j_\ell + 1}, \dots, a_k).$$

Ponadto, $W^{(\ell)} = 0$ dla $\ell \geqslant k+1$.

(b) Jeżeli $Q \in \mathcal{H}^k(E,F)$, to dla $1 \leqslant \ell \leqslant k$ mamy

$$Q^{(\ell)}(a)(\underbrace{h, \dots, h}_{\ell \times}) = \ell! \binom{k}{\ell} \widehat{Q}(\underbrace{a, \dots, a}_{(k-\ell)\times}, \underbrace{h, \dots, h}_{\ell\times}), \quad a, h \in E, \ \ell = 0, \dots, k;$$

w szczególności, $Q^{(k)}(a) = k! Q$, $a \in E$, a stąd $Q^{(\ell)} = 0$ dla $\ell \geqslant k+1$.

(c) Jeżeli $Q \in \mathcal{P}_k(E,F)$, to $Q^{(\ell)} = 0$ dla $\ell \geqslant k+1$.

(d) Załóżmy, że $D \subset E$ jest obszarem i $f \in \mathcal{D}^k(D,F)$. Wtedy $f \in \mathcal{P}_{k-1}(E,F) \iff f^{(k)} \equiv 0$.

Twierdzenie 9.7.3. (a) *Jeżeli $f^{(k)} \in \mathcal{D}^\ell(\Omega, \mathcal{L}^k(E,F); a)$, to $f \in \mathcal{D}^{k+\ell}(\Omega, F; a)$ oraz $(f^{(k)})^{(\ell)}(a) = f^{(k+\ell)}(a)$ (po utożsamieniu $\mathcal{L}^\ell(E, \mathcal{L}^k(E,F)) \simeq \mathcal{L}^{k+\ell}(E,F)$).*

(b) *Jeżeli $f \in \mathcal{D}^{k+\ell}(\Omega, F; a)$, to dla dowolnych $h_{\ell+1}, \dots, h_{k+\ell} \in E$ odwzorowanie*

$$x \longmapsto f^{(k)}(x)(h_{\ell+1}, \dots, h_{k+\ell})$$

ma ℓ-tą pochodną w punkcie a oraz

$$f^{(k+\ell)}(a)(h_1, \dots, h_{k+\ell}) = (x \longmapsto f^{(k)}(x)(h_{\ell+1}, \dots, h_{k+\ell}))^{(\ell)}(a)(h_1, \dots, h_\ell), \quad h_1, \dots, h_\ell \in E.$$

(c) *Jeżeli $f \in \mathcal{D}^k(\Omega, F; a)$, to dla dowolnych $h_1, \dots, h_k \in E$ pochodna kierunkowa $\frac{\partial^k f}{\partial h_1 \dots \partial h_k}(a)$ istnieje oraz $\frac{\partial^k f}{\partial h_1 \dots \partial h_k}(a) = f^{(k)}(a)(h_1, \dots, h_k)$.*

(d) *Dla $E = \mathbb{R}$ mamy: $f \in \mathcal{D}^k(\Omega, F; a)$ (w sensie Frécheta) wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{(k)}(a)$ istnieje w sensie klasycznym oraz $f^{(k)}(a)(h_1, \dots, h_k) = f^{(k)}(a) h_1 \cdots h_k$, $h_1, \dots, h_k \in \mathbb{R}$.*

(e) *Jeżeli $E = \mathbb{R}^n$ i $f \in \mathcal{D}^k(\Omega, F; a)$, to*

$$f^{(k)}(a)(h_1, \dots, h_k) = \sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a) h_{1,i_1} \cdots h_{k,i_k}, \quad h_j = (h_{j,1}, \dots, h_{j,n}) \in \mathbb{R}^n, \ j = 1, \dots, k.$$

Dowód. We wszystkich dowodach będziemy rozumować indukcyjnie.

(a) Dla $\ell = 1$ wystarczy skorzystać z definicji.

$\ell \rightsquigarrow \ell + 1$: $(f^{(k)})^{(\ell+1)}(a) = \big((f^{(k)})^{(\ell)}\big)'(a) = (f^{(k+\ell)})'(a) = f^{(k+\ell+1)}(a)$.

(b) $\ell = 1$ (por. Twierdzenie 9.5.2): Wiemy, że

$$f^{(k)}(a + h_1) = f^{(k)}(a) + f^{(k+1)}(a)(h_1) + o(\|h_1\|) \text{ przy } h_1 \longrightarrow 0 \text{ (równość w } \mathcal{L}^k(E,F)).$$

Podstawiając $h_2, \dots, h_{k+1}$ dostajemy:

$$f^{(k)}(a+h_1)(h_2,\dots,h_{k+1}) = f^{(k)}(a)(h_2,\dots,h_{k+1}) + f^{(k+1)}(a)(h_1,h_2,\dots,h_{k+1}) + o(\|h_1\|)$$
$$\text{przy } h_1 \longrightarrow 0,$$

co daje żądany wynik.

$\ell \rightsquigarrow \ell+1$: Załóżmy, że $f \in \mathcal{D}^{k+\ell}(U,F)$ dla pewnego otoczenia U punktu a. Ustalmy $h_{\ell+2}, \dots, h_{k+\ell+1} \in E$. Na podstawie założenia indukcyjnego odwzorowanie $U \ni x \overset{g}{\longmapsto} f^{(k)}(x)(h_{\ell+2},\dots,h_{k+\ell+1})$ jest ℓ–krotnie różniczkowalne w U oraz

$$g^{(\ell)}(x)(h_2,\dots,h_{\ell+1}) = f^{(k+\ell)}(x)(h_2,\dots,h_{k+\ell+1}), \quad x \in U,\ h_2,\dots,h_{\ell+1} \in E.$$

Z drugiej strony, ponieważ $f^{(k+\ell+1)}(a)$ istnieje, więc

$$f^{(k+\ell)}(a+h_1) = f^{(k+\ell)}(a) + f^{(k+\ell+1)}(a)(h_1) + o(\|h_1\|) \text{ przy } h_1 \longrightarrow 0 \text{ (równość w } \mathcal{L}^{k+\ell}(E,F)).$$

Podstawiając $h_{\ell+2},\dots,h_{k+\ell+1}$, dostajemy

$$g^{(\ell)}(a+h_1) = g^{(\ell)}(a) + f^{(k+\ell+1)}(a)(h_1,\cdot,\dots,\cdot,h_{\ell+2},\dots,h_{k+\ell+1}) + o(\|h_1\|)$$
$$\text{przy } h_1 \longrightarrow 0 \text{ (równość w } \mathcal{L}^{\ell}(E,F) \text{ po stosownym utożsamieniu).}$$

Wynika stąd, że $g^{(\ell+1)}(a)$ istnieje oraz $g^{(\ell+1)}(a) = f^{(k+\ell+1)}(a)(\cdot,\dots,\cdot,h_{\ell+2},\dots,h_{k+\ell+1})$, co kończy dowód.

(c) Przypadek $k=1$ jest oczywisty.

$k \rightsquigarrow k+1$: Na podstawie (b) mamy

$$\frac{\partial^{k+1} f}{\partial h_1 \dots \partial h_{k+1}}(a) = \frac{\partial}{\partial h_1}\frac{\partial^k f}{\partial h_2 \dots \partial h_{k+1}}(a) = \frac{\partial}{\partial h_1}\Big(x \longmapsto f^{(k)}(x)(h_2,\dots,h_{k+1})\Big)(a)$$
$$= (x \longmapsto f^{(k)}(x)(h_2,\dots,h_{k+1}))'(a)(h_1) = f^{(k+1)}(a)(h_1,\dots,h_{k+1}).$$

(d) Przypadek $k=1$ jest oczywisty.

$k \rightsquigarrow k+1$: Na podstawie (b) mamy

$$f^{(k+1)}(a)(h_1,\dots,h_{k+1}) = (x \longmapsto f^{(k)}(x)(h_2,\dots,h_{k+1}))'(a)(h_1)$$
$$= (x \longmapsto f^{(k)}(x)h_2 \cdots h_{k+1})'(a)(h_1) = f^{(k+1)}(a)h_1 \cdots h_{k+1}.$$

(e) Ćwiczenie. □

[Wykład 05.11.2020 . . . .]

Twierdzenie 9.7.4 (Twierdzenie o symetrii wyższych różniczek)**.** $f^{(k)}(a) \in \mathcal{L}^k_s(E,F)$. *W szczególności, jeżeli* $E=\mathbb{R}^n$*, to*

$$f^{(k)}(a)(h) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n:\ |\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(a) h^\alpha, \quad h \in \mathbb{R}^n,$$

gdzie dla $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ *i* $h=(h_1,\dots,h_n) \in \mathbb{R}^n$*:* $\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!$*,* $h^\alpha := h_1^{\alpha_1} \cdots h_n^{\alpha_n}$ $(0^0 := 1)$*,* $D^\alpha f(a) := (\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1} \circ \dots \circ (\frac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n} f(a)$*. Zauważmy, że wobec symetrii różniczki, operator* $\mathcal{D}^k(\Omega,F;a) \ni f \longmapsto D^\alpha f(a)$ *jest poprawnie określony.*

Dowód. Zastosujemy indukcję ze względu na k. Przypadek $k=2$ został rozwiązany w Twierdzeniu 9.5.6. Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla $k-1$ i niech σ będzie dowolną permutacją k elementową.

Przypadek $\sigma(1)=2$, $\sigma(2)=1$, $\sigma(j)=j$, $j=3,\dots,k$, redukuje się do przypadku $k=2$:

$$f^{(k)}(a)(h_2,h_1,h_3,\dots,h_k) = (x \longmapsto f^{(k-2)}(x)(h_3,\dots,h_k))''(a)(h_2,h_1)$$
$$= (x \longmapsto f^{(k-2)}(x)(h_3,\dots,h_k))''(a)(h_1,h_2) = f^{(k)}(a)(h_1,h_2,h_3,\dots,h_k).$$

Przypadek $\sigma(1)=1$ wynika z założenia indukcyjnego:

$$f^{(k)}(a)(h_1,h_{\sigma(2)},\dots,h_{\sigma(k)}) = (x \longmapsto f^{(k-1)}(x)(h_{\sigma(2)},\dots,h_{\sigma(k)}))'(a)(h_1)$$
$$= (x \longmapsto f^{(k-1)}(x)(h_2,\dots,h_k))'(a)(h_1) = f^{(k)}(a)(h_1,h_2,\dots,h_k).$$

Pozostałe przypadki wynikają z faktu, iż każda permutacja jest złożeniem pewnej liczby permutacji powyższych dwóch typów (por. dowód Wniosku 9.1.12). □

Twierdzenie 9.7.5 (Wzór Leibniza)**.** *Niech $f \in \mathcal{D}^k(\Omega, F; a)$, $g \in \mathcal{D}^k(\Omega, G; a)$ i $B \in \mathcal{L}(F, G; H)$. Wtedy $B(f, g) \in \mathcal{D}^k(\Omega, H; a)$ oraz*

(†) $(B(f,g))^{(k)}(a)(h) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} B(f^{(j)}(a)(h), g^{(k-j)}(a)(h))$, $h \in E$;

(‡) $(B(f,g))^{(k)}(a)(h_1, \dots, h_k) = \sum_{j=0}^{k} \sum_{\sigma \in S_{j,k-j}} B\big(f^{(j)}(a)(h_{\sigma(1)}, \dots, h_{\sigma(j)}), g^{(k-j)}(a)(h_{\sigma(j+1)}, \dots, h_{\sigma(k)})\big)$, $h_1, \dots, h_k \in E$, *gdzie przypomnijmy (Obserwacja 9.6.6)* $S_{j,k-j} = \{\sigma \in S_k : \sigma(1) < \dots < \sigma(j),\ \sigma(j+1) < \dots < \sigma(k)\}$.

Dowód. Rozumujemy indukcyjnie. Przypadek $k = 1$ jest dobrze znany.

$k \rightsquigarrow k+1$: Wiemy, że $(B(f,g))' = B_1(f', g) + B_2(f, g')$, gdzie B_1 i B_2 są operatorami dwuliniowymi i ciągłymi takimi, jak w dowodzie Twierdzenia 9.5.10. W takim razie, na podstawie założenia indukcyjnego, $(B(f,g))' \in \mathcal{D}^k(\Omega, \mathcal{L}(E, H); a)$, a stąd $B(f,g) \in \mathcal{D}^{k+1}(\Omega, H; a)$. Indukcyjny dowód pierwszego z wzorów pozostawiamy jako Ćwiczenie.

Aby dostać (‡) możemy oczywiście zastosować wzór polaryzacyjny (Twierdzenie 9.6.5), ale można prościej. Wystarczy zastosować Obserwację 9.6.6 do każdego z odwzorowań k-liniowych

$$E^k \ni (h_1, \dots, h_k) \overset{W}{\longmapsto} \binom{k}{j} B\big(f^{(j)}(a)(h_1, \dots, h_j), g^{(k-j)}(a)(h_{j+1}, \dots, h_k)\big) \in F,$$

przy $\beta_1 := j$, $\beta_2 := k - j$ — Ćwiczenie. □

Twierdzenie 9.7.6. *Niech G będzie przestrzenią unormowaną, niech $U \subset G$ będzie zbiorem otwartym, niech $\varphi : U \longrightarrow E$ i niech $t_0 \in U$. Załóżmy, że $\varphi \in \mathcal{D}^k(U, E; t_0)$, $f \in \mathcal{D}^k(\Omega, F; \varphi(t_0))$ i $\varphi(U) \subset \Omega$. Wtedy $f \circ \varphi \in \mathcal{D}^k(U, F; t_0)$.*

Dowód. Przypadek $k = 1$ jest dobrze znany.

$k \rightsquigarrow k+1$: Korzystamy ze wzoru $(f \circ \varphi)' = B(f' \circ \varphi, \varphi')$, gdzie B jest operatorem składania odwzorowań tak, jak w dowodzie Twierdzenia 9.5.11. Dalej rozumujemy standardowo. □

Definicja 9.7.7 (Ćwiczenie)**.** W standardowy sposób definiujemy przestrzenie $\mathcal{D}^k(\Omega, F)$, $\mathcal{D}_b^k(\Omega, F)$, $\mathcal{C}_b^{k,\alpha}(\Omega, F)$, $\mathcal{C}^k(\Omega, F)$, $\mathcal{C}_b^k(\Omega, F)$ oraz normy $\|f\|_{\Omega,k} := \sum_{j=0}^{k} \|f^{(j)}\|_\Omega$, $f \in \mathcal{D}_b^k(\Omega, F)$, $\|f\|_{\Omega,k,\alpha} := \|f\|_{\Omega,k} + |f^{(k)}|_\alpha$, $f \in \mathcal{C}_b^{k,\alpha}(\Omega, F)$. W przyszłości będziemy również korzystać z przestrzeni

$$\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega, F) := \{f \in \mathcal{C}^k(\Omega, F) : f^{(k)} \text{ spełnia lokalnie warunek Höldera z wykładnikiem } \alpha\}.$$

Obserwacja 9.7.8 (Ćwiczenie)**.** (a) $f' \in \mathcal{C}^{k-1}(\Omega, \mathcal{L}(E, F)) \iff f \in \mathcal{C}^k(\Omega, F)$.

(b) Jeżeli $f \in \mathcal{C}^k(\Omega, F)$, $g \in \mathcal{C}^k(\Omega, G)$ i $B \in \mathcal{L}(F, G; H)$, to $B(f, g) \in \mathcal{C}^k(\Omega, H)$.

(c) Jeżeli $\varphi \in \mathcal{C}^k(U, E)$ i $f \in \mathcal{C}^k(\Omega, F)$, to $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^k(U, F)$.

(d) Jeżeli Ω jest ograniczony, to dla $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$ mamy $|\ |_\beta \leqslant C|\ |_\alpha$, gdzie $C := (\operatorname{diam} \Omega)^{\alpha-\beta}$. W szczególności, jeżeli Ω jest ograniczony, to dla $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$ mamy: $\mathcal{C}_b^{k,\alpha}(\Omega, F) \subset \mathcal{C}_b^{k,\beta}(\Omega, F)$ oraz $\|\ \|_{\Omega,k,\beta} \leqslant C\|\ \|_{\Omega,k,\alpha}$, gdzie $C := \max\{1, (\operatorname{diam} \Omega)^{\alpha-\beta}\}$.

(e) Jeżeli Ω jest wypukły, to $\mathcal{D}_b^{k+1}(\Omega, F) \subset \mathcal{C}_b^{k,1}(\Omega, F)$ oraz $\|\ \|_{\Omega,k,1} \leqslant \|\ \|_{\Omega,k+1}$ (wystarczy skorzystać z twierdzenia o przyrostach skończonych).

(f) Dla $f \in \mathcal{B}(\Omega, F)$ mamy: $f \in \mathcal{C}_b^{k+1,\alpha}(\Omega, F) \iff f' \in \mathcal{C}_b^{k,\alpha}(\Omega, \mathcal{L}(E, F))$. Ponadto, $\|f\|_{\Omega,k+1,\alpha} = \|f\|_{\Omega,0} + \|f'\|_{\Omega,k,\alpha}$.

(g) $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega, F) = \{f \in \mathcal{C}^k(\Omega, F) : \forall_{a \in \Omega}\ \exists_{U_a} : f|_{U_a} \in \mathcal{C}_b^{k,\alpha}(U_a, F)\}$.

Twierdzenie 9.7.9. *Załóżmy, że Ω jest ograniczony i wypukły.*

(a) *Niech $B \in \mathcal{L}(F, G; H)$, $f \in \mathcal{C}_b^{k,\alpha}(\Omega, F)$, $g \in \mathcal{C}_b^{k,\alpha}(\Omega, G)$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}_0$. Wtedy $B(f, g) \in \mathcal{C}_b^{k,\alpha}(\Omega, H)$.*

(b) *Niech $U \subset G$ będzie otwarty wypukły i ograniczony, $f \in \mathcal{C}_b^{k,\alpha}(\Omega, F)$, $\varphi \in \mathcal{C}_b^{k,\alpha}(U, E)$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, $\varphi(U) \subset \Omega$. Wtedy $f \circ \varphi \in \mathcal{C}_b^{k,\alpha}(U, F)$*

Dowód. (a) Indukcja względem k (przy dowolnych pozostałych elementach). Dla $k = 0$ mamy:

$$\frac{\|B(f(x),g(x))-B(f(y),g(y))\|}{\|x-y\|^\alpha}\leqslant\frac{\|B(f(x)-f(y),g(y))\|+\|B(f(y),g(x)-g(y)\|}{\|x-y\|^\alpha}$$
$$\leqslant\|B\|(|f|_\alpha\|g\|_{\Omega,0}+\|f\|_{\Omega,0}|g|_\alpha).$$

Dla dowodu $k\rightsquigarrow k+1$ mamy $(B(f,g))'=B_1(f',g)+B_2(f,g')$ przy standardowej interpretacji operatorów dwuliniowych

$$B_1:\mathcal{L}(E,F)\times G\longrightarrow\mathcal{L}(E,H),\quad B_2:F\times\mathcal{L}(E,G)\longrightarrow\mathcal{L}(E,H).$$

Zauważmy, że $f'\in\mathcal{C}_b^{k,\alpha}(\Omega,\mathcal{L}(E,F))$, $g\in\mathcal{C}_b^{k,1}(\Omega,F)\subset\mathcal{C}_b^{k,\alpha}(\Omega,F)$. Korzystając z założenia indukcyjnego wnioskujemy, że $B_1(f',g)\in\mathcal{C}_b^{k,\alpha}(\Omega,\mathcal{L}(E,G))$. Analogicznie dowodzimy, że $B_2(f,g')\in\mathcal{C}_b^{k,\alpha}(\Omega,\mathcal{L}(E,G))$. W takim razie $(B(f,g))'\in\mathcal{C}_b^{k,\alpha}(\Omega,\mathcal{L}(E,G))$, co daje $B(f,g)\in\mathcal{C}_b^{k+1,\alpha}(\Omega,G)$.

(b) Niech $B:\mathcal{L}(E,F)\times\mathcal{L}(G,E)\ni(A,B)\longmapsto A\circ B\in\mathcal{L}(G,F)$.

Dla $k=1$ mamy $(f\circ\varphi)'=(f'\circ\varphi)\circ\varphi'=B(f'\circ\varphi,\varphi')$. Wiemy, że $f'\in\mathcal{C}_b^{0,\alpha}(\Omega,\mathcal{L}(E,F))$, $\varphi\in\mathcal{C}_b^{0,1}(U,E)$ oraz $\varphi'\in\mathcal{C}_b^{0,\alpha}(U,\mathcal{L}(G,E))$. Łatwo widać, że $f'\circ\varphi\in\mathcal{C}_b^{0,\alpha}(U,\mathcal{L}(E,F))$ (por. Twierdzenie 4.6.12(b)). Na podstawie (a), $B(f'\circ\varphi,\varphi')\in\mathcal{C}_b^{0,\alpha}(U,\mathcal{L}(G,F))$, a stąd $f\circ\varphi\in\mathcal{C}_b^{1,\alpha}(U,F)$.

Dla dowodu kroku indukcyjnego $k\rightsquigarrow k+1$ Wiemy, że $f'\in\mathcal{C}_b^{k,\alpha}(\Omega,\mathcal{L}(E,F))$, $\varphi\in\mathcal{C}_b^{k,1}(U,E)$ oraz $\varphi'\in\mathcal{C}_b^{k,\alpha}(U,\mathcal{L}(G,E))$. Na podstawie założenie indukcyjnego mamy $f'\circ\varphi\in\mathcal{C}_b^{k,\alpha}(U,\mathcal{L}(E,F))$, Wobec (a), $B(f'\circ\varphi,\varphi')\in\mathcal{C}_b^{k,\alpha}(U,\mathcal{L}(G,F))$, a stąd $f\circ\varphi\in\mathcal{C}_b^{k+1,\alpha}(U,F)$. □

Wniosek 9.7.10. (a) *Niech $B\in\mathcal{L}(F,G;H)$, $f\in\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega,F)$, $g\in\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega,G)$ dla pewnego $k\in\mathbb{N}_0$. Wtedy $B(f,g)\in\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega,H)$.*

(b) *Niech $f\in\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega,F)$, $\varphi\in\mathcal{C}^{k,\alpha}(U,E)$ dla pewnego $k\in\mathbb{N}$, $\varphi(U)\subset\Omega$. Wtedy $f\circ\varphi\in\mathcal{C}^{k,\alpha}(U,F)$*

[Wykład 09.11.2020 . . . .]

Teraz przychodzi kolej na uogólnienie twierdzenia o różniczkowaniu szeregu wyraz po wyrazie (por. Twierdzenie 6.10.1).

Twierdzenie 9.7.11 (Twierdzenie o różniczkowaniu szeregu wyraz po wyrazie)**.** *Niech $D\subset E$ będzie obszarem takim, że ϱ_D^i jest funkcją ograniczoną (np. D jest ograniczonym obszarem gwiaździstym) i niech F będzie przestrzenią Banacha.*

(a) *Załóżmy, że mamy rodzinę $(f_i)_{i\in I}\subset\mathcal{D}^k(D,F)$ taką, że:*
- *$(f_i^{(k)})_{i\in I}$ jest rodziną jednostajnie sumowalną na D,*
- *dla dowolnego $j\in\{0,\dots,k-1\}$ istnieje punkt $c_j\in D$ taki, że rodzina $(f_i^{(j)}(c_j))_{i\in I}$ jest sumowalna.*

Wtedy dla dowolnego $j\in\{0,\dots,k-1\}$ rodzina $(f_i^{(j)})_{i\in I}$ jest jednostajnie sumowalna na D i jeżeli $g_j:=\sum_{i\in I}f_i^{(j)}$, to $g_0\in\mathcal{D}^k(D,F)$ oraz $g_0^{(j)}=g_j$, $j=1,\dots,k$, czyli $\big(\sum_{i\in I}f_i\big)^{(j)}=\sum_{i\in I}f_i^{(j)}$, $j=1,\dots,k$.

(b) *Załóżmy, że ciąg $(f_n)_{n=0}^\infty\subset\mathcal{D}^k(D,F)$ jest taki, że:*
- *szereg $\sum_{n=0}^\infty f_n^{(k)}$ jest zbieżny jednostajnie na D,*
- *dla dowolnego $j\in\{0,\dots,k-1\}$ istnieje punkt $c_j\in D$ taki, że szereg $\sum_{n=0}^\infty f_n^{(j)}(c_j)$ jest zbieżny.*

Wtedy dla dowolnego $j\in\{0,\dots,k-1\}$ szereg $\sum_{n=0}^\infty f_n^{(j)}$ jest zbieżny jednostajnie na D i jeżeli $g_j:=\sum_{n=0}^\infty f_n^{(j)}$, to $g_0\in\mathcal{D}^k(D,F)$ oraz $g_0^{(j)}=g_j$, $j=1,\dots,k$, czyli $\big(\sum_{n=0}^\infty f_n\big)^{(j)}=\sum_{n=0}^\infty f_n^{(j)}$, $j=1,\dots,k$.

(c) *Załóżmy, że ciąg $(f_n)_{n=1}^\infty\subset\mathcal{D}^k(D,F)$ jest taki, że:*
- *ciąg $(f_n^{(k)})_{n=1}^\infty$ jest zbieżny jednostajnie na D,*
- *dla dowolnego $j\in\{0,\dots,k-1\}$ istnieje punkt $c_j\in D$ taki, że ciąg $(f_n^{(j)}(c_j))_{n=1}^\infty$ jest zbieżny.*

Wtedy dla dowolnego $j\in\{0,\dots,k-1\}$ ciąg $(f_n^{(j)})_{n=1}^\infty$ jest zbieżny jednostajnie na D i jeżeli $g_j:=\lim_{n\to+\infty}f_n^{(j)}$, to $g_0\in\mathcal{D}^k(D,F)$ oraz $g_0^{(j)}=g_j$, $j=1,\dots,k$, czyli $\big(\lim_{n\to+\infty}f_n\big)^{(j)}=\lim_{n\to+\infty}f_n^{(j)}$, $j=1,\dots,k$.

Dowód. Ćwiczenie. □

Wniosek 9.7.12. *Jeżeli F jest Banacha, to $\mathcal{D}_b^k(\Omega,F)$, $\mathcal{C}_b^{k,\alpha}(\Omega,F)$, $\mathcal{C}_b^k(\Omega,F)$ są Banacha.*

Dowód. Ćwiczenie. □

9.8. Wzór Taylora

Niech E i F będą przestrzeniami unormowanymi nad $\mathbb{K}$, niech $\Omega \in \operatorname{top} E$, $f : \Omega \longrightarrow F$, $a \in \Omega$ i załóżmy, że $f \in \mathcal{D}^k(\Omega, F; a)$ (dla pewnego $k \in \mathbb{N}$).

Definicja 9.8.1. Definiujemy *k-tą resztę odwzorowania f w punkcie a*:

$$R_k(f, a, x) := f(x) - \Big(f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)\Big), \quad x \in \Omega.$$

Ponadto przyjmujemy $R_0(f, a, x) := f(x) - f(a)$.

Obserwacja 9.8.2. (a) $f(a+h) = f(a) + f'(a)(h) + \frac{1}{2}f''(a)(h) + \dots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(h) + R_k(f, a, a+h)$, $h \in \Omega - a$.

(b) Dla $k \geqslant 2$, funkcja $R_k(f, a, \cdot)$ jest różniczkowalna w pewnym otoczeniu U punktu a oraz

$$R_k(f, a, \cdot)'(x) = R_{k-1}(f', a, x), \quad x \in U.$$

Istotnie, jeżeli $f \in \mathcal{D}(U, F)$, to na podstawie Obserwacji 9.7.2 mamy:

$$\begin{aligned} R_k(f, a, \cdot)'(x)(h) &= f'(x)(h) - \Big(f'(a)(h) + 2 \cdot \tfrac{1}{2}f''(a)(x-a, h) + \dots + k \cdot \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a, \dots, x-a, h)\Big) \\ &= R_{k-1}(f', a, x)(h), \quad x \in U. \end{aligned}$$

Twierdzenie 9.8.3 (Wzór Taylora)**.** (a) (Wzór Taylora z resztą Peano.) *Jeżeli $f^{(k)}(a)$ istnieje, to*

$$\lim_{h \to 0} \frac{R_k(f, a, a+h)}{\|h\|^k} = 0.$$

(b) (Wzór Taylora dla funkcji klasy $\mathcal{C}^k$.) *Jeżeli $f \in \mathcal{C}^k(\Omega, F)$, to dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset \Omega$ mamy:*

$$\lim_{\delta \to 0} \sup\Big\{\frac{\|R_k(f, a, a+h)\|}{\|h\|^k} : a \in K,\ 0 < \|h\| \leqslant \delta\Big\} = 0.$$

(c) (Wzór Taylora dla funkcji klasy $\mathcal{C}^{k,\alpha}$.)
Jeżeli $f \in \mathcal{C}^k(\Omega, F)$ i $|f^{(k)}|_\alpha < +\infty$, to

$$\frac{\|R_k(f, a, a+h)\|}{\|h\|^{k+\alpha}} \leqslant |f^{(k)}|_\alpha, \quad [a, a+h] \subset \Omega.$$

W szczególności, dla dowolnego zbioru $A \subset \Omega$ takiego, że $A + B(r) \subset \Omega$ dla pewnego $r > 0$ (np. dla dowolnego zbioru zwartego) mamy

$$\lim_{r > \delta \to 0+} \sup\Big\{\frac{\|R_k(f, a, a+h)\|}{\|h\|^{k+\beta}} : a \in A,\ 0 < \|h\| \leqslant \delta\Big\} = 0, \quad 0 < \beta < \alpha.$$

(d) (Wzór Taylora dla funkcji klasy $\mathcal{D}^{k+1}$.) *Załóżmy, że Ω jest gwiaździsty względem a, $f \in \mathcal{D}^{k+1}(\Omega, F)$ oraz $\|f^{(k+1)}(x)\| \leqslant M$, $x \in \Omega$. Wtedy*

$$\|R_k(f, a, a+h)\| \leqslant \frac{M\|h\|^{k+1}}{(k+1)!}, \quad h \in \Omega - a, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Dowód. We wszystkich przypadkach zastosujemy indukcję względem k (przy dowolnych pozostałych elementach).

(a) Przypadek $k = 1$ jest oczywisty.

$k \rightsquigarrow k+1$: Na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych, dla małych $0 \neq h \in \Omega - a$ mamy:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|h\|^{k+1}}\|R_{k+1}(f, a, a+h)\| &= \frac{1}{\|h\|^{k+1}}\|R_{k+1}(f, a, a+h) - R_{k+1}(f, a, a)\| \\ &\leqslant \frac{1}{\|h\|^k}\sup\{\|R_{k+1}(f, a, \cdot)'(x)\| : x \in [a, a+h]\} = \frac{1}{\|h\|^k}\sup\{\|R_k(f', a, a+\xi)\| : \xi \in [0, h]\} \\ &\leqslant \sup\Big\{\frac{1}{\|\xi\|^k}\|R_k(f', a, a+\xi)\| : \xi \in (0, h]\Big\} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

(b) Przypadek $k = 1$ wynika z twierdzenia o przyrostach skończonych. Istotnie, dla $0 < \delta < \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$ mamy:

$$\begin{aligned}
&\sup\Big\{\frac{\|R_1(f,a,a+h)\|}{\|h\|} : a \in K,\ 0 < \|h\| \leqslant \delta\Big\}\\
&= \sup\Big\{\frac{\|f(a+h) - f(a) - f'(a)(h)\|}{\|h\|} : a \in K,\ 0 < \|h\| \leqslant \delta\Big\}\\
&\leqslant \sup\{\|f'(x) - f'(a)\| : a \in K,\ x \in [a, a+h],\ 0 < \|h\| \leqslant \delta\} \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

(ostatni fakt wynika z jednostajnej ciągłości funkcji f' na K — por. Twierdzenie 4.4.9).

$k \rightsquigarrow k+1$: Na podstawie dowodu (a), dla małych $\delta > 0$, mamy:

$$\sup\Big\{\frac{\|R_{k+1}(f,a,a+h)\|}{\|h\|^{k+1}} : a \in K,\ 0 < \|h\| \leqslant \delta\Big\}
\leqslant \sup\Big\{\frac{\|R_k(f',a,a+\xi)\|}{\|\xi\|^k} : a \in K,\ 0 < \|\xi\| \leqslant \delta\Big\} \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

(c) Dla $k = 0$ wystarczy skorzystać z definicji $|f|_\alpha$.

Dla dowodu $k \rightsquigarrow k+1$ mamy:

$$\frac{\|R_{k+1}(f,a,a+h)\|}{\|h\|^{k+1+\alpha}} \leqslant \frac{\sup\{\|R_k(f',a,a+\xi)\| : \xi \in (0,h]\}}{\|h\|^{k+\alpha}}
\leqslant \frac{\sup\{|(f')^{(k)}|_\alpha \|\xi\|^{k+\alpha} : \xi \in (0,h]\}}{\|h\|^{k+\alpha}} \leqslant |f^{(k+1)}|_\alpha.$$

(d) Przypadek $k = 0$ wynika z twierdzenia o przyrostach skończonych.

$k \rightsquigarrow k+1$: Mamy $\|R_k(f',a,a+h)\| \leqslant \frac{M\|h\|^{k+1}}{(k+1)!}$, $h \in \Omega - a$. Ustalmy $h \in \Omega - a$ i niech

$$g(t) := R_{k+1}(f,a,a+th), \quad \varphi(t) := \frac{M\|h\|^{k+2}t^{k+2}}{(k+2)!}, \quad t \in [0,1].$$

Wobec poprzedniej nierówności mamy

$$\|g'(t)\| = \|R_{k+1}(f,a,\cdot)'(a+th)(h)\| = \|R_k(f',a,a+th)(h)\| \leqslant \frac{M\|th\|^{k+1}}{(k+1)!}\|h\| = \varphi'(t), \quad t \in [0,1].$$

Stąd, na podstawie zwykłego twierdzenia o przyrostach skończonych,

$$\|R_{k+1}(f,a,a+h)\| = \|g(1) - g(0)\| \leqslant \varphi(1) - \varphi(0) = \frac{M\|h\|^{k+2}}{(k+2)!}. \qquad \square$$

[Wykład 12.11.2020 . . . .]

Wniosek 9.8.4 (Jednoznaczność wzoru Taylora)**.** *Jeżeli $f^{(k)}(a)$ istnieje, $Q = Q_0 + \dots + Q_k \in \underline{\mathcal{P}}_k(E,F)$ oraz $f(a+h) = Q(h) + o(\|h\|^k)$, przy $\longrightarrow 0$, to $Q_j = \frac{1}{j!}f^{(j)}(a)$, $j = 0,\dots,k$.*

Dowód. Na podstawie wzoru Taylora z resztą Peano, mamy:

$$\begin{aligned}
&f(a) + f'(a)(h) + \tfrac{1}{2}f''(a)(h) + \dots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(h)\\
&\qquad = Q_0(h) + Q_1(h) + Q_2(h) + \dots + Q_k(h) + o(\|h\|^k), \quad \text{przy } h \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Ustalmy $h \in E$. Zastępując w powyższym wzorze h przez th ($t \in \mathbb{R}$) dostajemy

$$\begin{aligned}
&f(a) + f'(a)(h)t + \tfrac{1}{2}f''(a)(h)t^2 + \dots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(h)t^k\\
&\qquad = Q_0(h) + Q_1(h)t + Q_2(h)t^2 + \dots + Q_k(h)t^k + o(t^k), \quad \text{przy } t \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

skąd natychmiast wynika, że $Q_j(h) = \frac{1}{j!}f^{(j)}(a)(h)$, $j = 0,\dots,k$ (por. dowód Twierdzenia 5.6.5). $\square$

Obserwacja 9.8.5. Jeżeli $f : \Omega \longrightarrow F$ jest taka, że $f(a+h) = Q(h) + o(\|h\|^k)$, przy $\longrightarrow 0$, pewnego wielomianu $Q = Q_0 + \dots + Q_k \in \mathcal{P}_k(E,F)$ ($k \geqslant 1$), to Q_j nazywamy *j-tą różniczką Peano odwzorowania f w punkcie a*, $j = 0,\dots,k$. Oczywiście, wtedy $Q_0 = f(a)$, $f'(a)$ istnieje i $Q_1 = f'(a)$. Wiemy również, $f^{(j)}(a)$ dla $1 \leqslant j \leqslant k$ nie musi istnieć (Obserwacja 5.6.6).

Twierdzenie 9.8.6 (Wzór na k–tą pochodną złożenia)**.** *Niech E, F, G będą przestrzeniami unormowanymi, niech $U \subset G$, $\Omega \subset E$ będą zbiorami otwartymi i niech $t_0 \in U$. Załóżmy, że $\varphi \in \mathcal{D}^k(U,E;t_0)$, $\varphi(U) \subset \Omega$, $f \in \mathcal{D}^k(\Omega,F;\varphi(t_0))$. Wtedy (por. Twierdzenie 5.6.12):*

(†) $$(f\circ\varphi)^{(k)}(t_0)(\xi) = \sum_{\alpha\in\Pi_k} \frac{k!}{\alpha!} f^{(\alpha_1+\dots+\alpha_k)}(\varphi(t_0))\Big(\underbrace{\frac{\varphi'(t_0)(\xi)}{1!},\dots,\frac{\varphi'(t_0)(\xi)}{1!}}_{\alpha_1\times},\dots,\underbrace{\frac{\varphi^{(k)}(t_0)(\xi)}{k!},\dots,\frac{\varphi^{(k)}(t_0)(\xi)}{k!}}_{\alpha_k\times}\Big),\ \xi\in G;$$

(‡) $$(f\circ\varphi)^{(k)}(t_0)(\xi_1,\dots,\xi_k) = \sum_{\alpha\in\Pi_k}\frac{1}{\alpha!} \sum_{\sigma\in S_{\beta(\alpha)}} \varPhi_\alpha(\xi_{\sigma(1)},\dots,\xi_{\sigma(k)}),\quad (\xi_1,\dots,\xi_k)\in G^k, \text{ gdzie}$$

- $\beta(\alpha) := (\underbrace{1,\dots,1}_{\alpha_1\times},\underbrace{2,\dots,2}_{\alpha_2\times},\dots,\underbrace{k,\dots,k}_{\alpha_k\times})$ *(zob. Obserwacja 9.6.6 z $\ell = \alpha_1+\dots+\alpha_k$),*
- $\varPhi_\alpha(\xi_1,\dots,\xi_k) := f^{(\alpha_1+\dots+\alpha_k)}(\varphi(t_0))\big(\varphi'(t_0)(\xi_1),\dots,\varphi'(t_0)(\xi_{\alpha_1}),\dots,\varphi^{(k)}(t_0)(\xi_1,\dots,\xi_k)\big)$.

Pamiętamy, że $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + k\alpha_k = k$. Oczywiście, jeżeli $\alpha_i = 0$, to w $\beta(\alpha)$ pomijamy odpowiednią grupę. Jeżeli $\alpha_k \neq 0$, to $\alpha_1 = \dots = \alpha_{k-1} = 0$, $\alpha_k = 1$. Zauważmy, że $\#S_{\beta(\alpha)} = \frac{k!}{\prod_{i=1}^k (i!)^{\alpha_i}}$ — Ćwiczenie.

Dowód. Skorzystamy z Wniosku 9.8.4 (podobnie, jak dla jednej zmiennej). Przyjmijmy oznaczenia:

$$\varphi_j := \frac{1}{j!}\varphi^{(j)}(t_0),\ a := \varphi(t_0),\ f_j := \frac{1}{j!}f^{(j)}(a),\quad j = 0,\dots,k.$$

Mamy: $f(a+h) = \sum_{i=0}^k f_i(h) + \alpha(h)\|h\|^k$, $\varphi(t_0+\xi) = \sum_{j=0}^k \varphi_j(\xi) + \beta(\xi)\|\xi\|^k$, gdzie $\lim_{h\to 0}\alpha(h) = 0$, $\lim_{\xi\to 0}\beta(\xi) = 0$. Korzystając z Wniosku 9.8.4 wystarczy wyznaczyć wielomian jednorodny stopnia k w rozwinięciu $(f\circ\varphi)(t_0+\xi)$. Liczymy:

$$\begin{aligned}
(f\circ\varphi)(t_0+\xi) &= \sum_{i=0}^k f_i\Big(\sum_{j=1}^k \varphi_j(\xi) + \beta(\xi)\|\xi\|^k\Big) + \alpha\big(\varphi(t_0+\xi)-\varphi(t_0)\big)\Big\|\sum_{j=1}^k\varphi_j(\xi)+\beta(\xi)\|\xi\|^k\Big\|^k \\
&= \sum_{i=0}^k f_i\Big(\sum_{j=1}^k\varphi_j(\xi)\Big) + o(\|\xi\|^k) \\
&= \sum_{i=0}^k \sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathbb{N}_0\\ \alpha_1+\dots+\alpha_k=i}} \frac{i!}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}\ f_i\Big(\underbrace{\varphi_1(\xi),\dots,\varphi_1(\xi)}_{\alpha_1\times},\dots,\underbrace{\varphi_k(\xi),\dots,\varphi_k(\xi)}_{\alpha_k\times}\Big) + o(\|\xi\|^k) \\
&= \sum_{\nu=0}^k\Big(\sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathbb{N}_0\\ \alpha_1+2\alpha_2+\dots+k\alpha_k=\nu}} \frac{(\alpha_1+\dots+\alpha_k)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!} f_{\alpha_1+\dots+\alpha_k}\Big(\underbrace{\varphi_1(\xi),\dots,\varphi_1(\xi)}_{\alpha_1\times},\dots,\underbrace{\varphi_k(\xi),\dots,\varphi_k(\xi)}_{\alpha_k\times}\Big) + o(\|\xi\|^k).
\end{aligned}$$

Dla dowodu (‡), postąpimy podobnie jak w dowodzie wzoru Leibniza (Twierdzenie 9.7.5) i zastosujemy Obserwację 9.6.6 do każdego z odwzorowań

$$G^k \ni (\xi_1,\dots,\xi_k) \overset{W}{\longmapsto} \frac{k!}{\alpha!} f^{(\alpha_1+\dots+\alpha_k)}(\varphi(t_0))\Big(\frac{\varphi'(t_0)(\xi_1)}{1!},\dots,\frac{\varphi'(t_0)(\xi_{\alpha_1})}{1!},\dots,\frac{\varphi^{(k)}(t_0)(\xi_1,\dots,\xi_k)}{k!}\Big) \in F$$

przy $\beta := \beta(\alpha)$ — Ćwiczenie. $\square$

9.9. Szereg Taylora

Definicja 9.9.1. Niech F będzie przestrzenią Banacha i niech $f : \Omega \longrightarrow F$. Załóżmy, że dla pewnego $a \in \Omega$ pochodna $f^{(k)}(a)$ istnieje dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$. Wtedy definiujemy *szereg Taylora funkcji f w punkcie a*

$$(T_a f)(x) := \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(a)(x-a);$$

$(T_a f)(a+h)$ jest szeregiem wielomianów jednorodnych zmiennej h.

Twierdzenie 9.9.2 (Borel, por. Twierdzenie 6.12.3)**.** *Niech $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ będzie rzeczywistą przestrzenią unitarną (np. $\mathbb{R}^n$ ze zwykłym iloczynem skalarnym), zaś F — przestrzenią Banacha. Wtedy, dla dowolnego ciągu wielomianów jednorodnych $Q_\nu \in \mathcal{H}^\nu(E,F)$, $\nu \in \mathbb{N}_0$, istnieje funkcja $f \in \mathcal{C}^\infty(E,F)$ taka, że*

$$T_0 f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} Q_\nu(x), \ \text{ czyli } \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(0) = Q_\nu, \ \nu \in \mathbb{N}_0.$$

Dowód. Na wstępie zauważmy, że

(*) wystarczy udowodnić, że dla dowolnego $N \in \mathbb{N}_0$ istnieje funkcja $g_N \in \mathcal{C}^\infty(E,F) \cap \mathcal{D}_b^N(E,F)$ taka, że $g_N = 0$ w pewnym otoczeniu zera oraz $\|Q_{N+1} - g_N\|_{E,N} \leqslant \frac{1}{2^N}$ ((*) pozostaje prawdziwa dla dowolnej przestrzeni unormowanej E).

Istotnie, jeżeli g_N, $N \in \mathbb{N}_0$, są takie jak w (*), to definiujemy, $f := Q_0 + \sum\limits_{N=0}^{\infty}(Q_{N+1} - g_N)$. Szereg jest zbieżny normalnie w $\mathcal{C}^k(E,F)$ dla dowolnego k. W takim razie $f \in \mathcal{C}^\infty(E,F)$. Oczywiście, $f(0) = Q_0$.

Dla dowolnego ν szereg $\sum\limits_{N=0}^{\infty}(Q_{N+1} - g_N)^{(\nu)}$ jest zbieżny jednostajnie na E. Na podstawie twierdzenia o różniczkowaniu szeregu wyraz po wyrazie, wynika stąd w szczególności, że

$$f^{(\nu)}(0) = \sum_{N=0}^{\infty}(Q_{N+1} - g_N)^{(\nu)}(0) = \sum_{N=0}^{\infty} Q_{N+1}^{(\nu)}(0) = \nu! Q_\nu, \quad \nu \in \mathbb{N} \ \text{ por. Obserwacja 9.7.2(b).}$$

Teraz pokażemy, że dla znalezienia funkcji g_N wystarczy mieć funkcję $\varphi \in \mathcal{C}_b^\infty(E,[0,1])$ taką, że $\varphi(x) = 0$ dla $\|x\| \leqslant 1/2$, $\varphi(x) = 1$ dla $\|x\| \geqslant 1$ (ta część dowodu również pozostaje prawdziwa dla dowolnej przestrzeni unormowanej).

Istotnie, niech $C_k := \sup\{\|\varphi^{(k)}(x)\| : \|x\| \leqslant 1\}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Ustalmy $N \in \mathbb{N}_0$. Przypomnijmy, że

$$Q_{N+1}^{(\mu)}(a)(X) = \mu! \binom{N+1}{\mu} \widehat{Q}_{N+1}(\underbrace{a, \dots, a}_{(N+1-\mu)\times}, \underbrace{X, \dots, X}_{\mu\times}).$$

W szczególności, $\|Q_{N+1}^{(\mu)}(a)\| \leqslant \mu!\binom{N+1}{\mu}\|\widehat{Q}_{N+1}\|\|a\|^{N+1-\mu}$. Niech $M_\mu := \mu!\binom{N+1}{\mu}\|\widehat{Q}_{N+1}\|$, $\mu = 0, \dots, N+1$. Połóżmy $h_\varepsilon(x) := \varphi(x/\varepsilon)Q_{N+1}(x)$, $x \in E$, $\varepsilon > 0$. Wtedy dla $0 < \varepsilon \leqslant 1$, korzystając ze wzoru Leibniza (por. Twierdzenie 9.7.5), mamy

$$\begin{aligned}
&\|Q_{N+1} - h_\varepsilon\|_{E,N} = \|Q_{N+1} - h_\varepsilon\|_{B(\varepsilon),N} = \sum_{\nu=0}^{N} \sup_{\|x\| \leqslant \varepsilon} \Big\| \Big((1 - \varphi(\cdot/\varepsilon))Q_{N+1}\Big)^{(\nu)}(x) \Big\| \\
&= \sum_{\nu=0}^{N} \sup_{\|x\| \leqslant \varepsilon,\ \|\xi\| \leqslant 1} \Big\| \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} (1 - \varphi(\cdot/\varepsilon))^{(\nu-\mu)}(x)(\xi) Q_{N+1}^{(\mu)}(x)(\xi) \Big\| \\
&= \sum_{\nu=0}^{N} \sup_{\|x\| \leqslant \varepsilon,\ \|\xi\| \leqslant 1} \Big\| -\sum_{\mu=0}^{\nu-1} \binom{\nu}{\mu} \varphi^{(\nu-\mu)}(x/\varepsilon)(\xi)\varepsilon^{\mu-\nu} Q_{N+1}^{(\mu)}(x)(\xi) + (1 - \varphi(x/\varepsilon)) Q_{N+1}^{(\nu)}(x)(\xi) \Big\| \\
&\leqslant \sum_{\nu=0}^{N} \Big(\sum_{\mu=0}^{\nu-1} \binom{\nu}{\mu} C_{\nu-\mu}\varepsilon^{\mu-\nu} M_\mu \varepsilon^{N+1-\mu} + M_\nu \varepsilon^{N+1-\nu} \Big) \leqslant \varepsilon \sum_{\nu=0}^{N}\sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} C_{\nu-\mu} M_\mu = \varepsilon\, \mathrm{const}(N).
\end{aligned}$$

Teraz jako g_N wystarczy wziąć h_ε ze stosownie małym ε.

Do znalezienia funkcji φ skorzystamy z unitarności przestrzeni E. Niech $E \ni x \overset{\Phi}{\longmapsto} \|x\|^2 = \langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$. Mamy $\Phi'(a)(X) = 2\langle a, X\rangle$, $\Phi''(a)(X,X) = 2\langle X, X\rangle$, $\Phi^{(k)}(a) = 0$, $k \geqslant 3$. Niech $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, [0,1])$, $\psi(t) = 0$ dla $t \leqslant 1/4$, $\psi(t) = 1$ dla $t \geqslant 1$. Zdefiniujmy $\varphi(x) := \psi(\langle x, x\rangle) = \psi\circ\Phi(x)$, $x \in E$. Wtedy $\varphi(x) = 0$ dla $\|x\| \leqslant 1/2$, $\varphi(x) = 1$ dla $\|x\| \geqslant 1$ oraz $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(E, [0,1])$. Niech $C_k := \sup\{\|\varphi^{(k)}(x)\| : \|x\| \leqslant 1\}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Zauważmy, że $C_0 = 1$ oraz $C_k < +\infty$, $k \in \mathbb{N}$. Istotnie, niech $c_\ell := \sup\{|\psi^{(\ell)}(t)| : t \in \mathbb{R}\} < +\infty$. Dla $x, h \in E$, $\|x\| \leqslant 1$, $\|h\| \leqslant 1$, mamy

$$|\varphi^{(k)}(x)(h)| = |(\psi\circ\Phi)^{(k)}(x)(h)| = \Big| \sum_{\alpha\in\Pi_k} \frac{k!}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}\psi^{(\alpha_1+\dots+\alpha_k)}(\Phi(x))\Big(\frac{\Phi'(x)(h)}{1!}\Big)^{\alpha_1}\cdots\Big(\frac{\Phi^{(k)}(x)(h)}{k!}\Big)^{\alpha_k}\Big|$$

$$= \Big| \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{N}_0\\ \alpha_1+2\alpha_2=k}} \frac{k!}{\alpha_1!\alpha_2!}\psi^{(\alpha_1+\alpha_2)}(\Phi(x))\Big(\frac{2\langle x,h\rangle}{1!}\Big)^{\alpha_1}\Big(\frac{2\langle h,h\rangle}{2!}\Big)^{\alpha_2}\Big| \leqslant \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{N}_0\\ \alpha_1+2\alpha_2=k}} \frac{k!}{\alpha_1!\alpha_2!}c_{\alpha_1+\alpha_2}2^{\alpha_1} < +\infty. \qquad \square$$

[Wykład 16.11.2020 . . . .]

Twierdzenie 9.9.3 (Twierdzenie Whitneya ([8])). *Niech $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ będzie dowolną ośrodkową przestrzenią unitarną (np. $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym). Wtedy dla dowolnego zbioru domkniętego $S \subset E$ istnieje funkcja $f \in \mathcal{C}^\infty(E, \mathbb{R}_+)$ taka, że $S = f^{-1}(0)$ oraz $f^{(j)} = 0$ na S dla dowolnego $j \in \mathbb{N}_0$.*

Dowód. Możemy założyć, że $\varnothing \neq S \neq E$. Niech $\Phi(x) := \langle x, x\rangle$, $x \in E$ i niech $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, [0,1])$ będzie dowolną funkcją taką $\psi = 1$ na $[0, 1/2]$ oraz $[0,1) = \{x \in \mathbb{R}_+ : \psi(x) > 0\}$. Zdefiniujmy $\varphi := \psi \circ \Phi$ (por. dowód Twierdzenia 9.9.2). Niech $C_j := \sup\{\|\varphi^{(j)}(x)\| : \|x\| \leqslant 1\}$, $j \in \mathbb{N}_0$. Ponieważ E jest ośrodkowa, zbiór $E \setminus S$ zawiera podzbiór przeliczalny gęsty, powiedzmy $\{q_1, q_2, \dots\}$. Niech $d_k := \operatorname{dist}(q_k, S)$, $k \in \mathbb{N}$.

$$a_k := \frac{1}{2^k}\min\Big\{\frac{d_k^j}{C_j} : j \leqslant k\Big\}, \quad f(x) := \sum_{k=1}^\infty a_k\,\varphi\Big(\frac{x - q_k}{d_k}\Big), \quad x \in E.$$

Sprawdzamy, że f spełnia wszystkie wymagane warunki:

- $f \in \mathcal{C}^\infty(E, \mathbb{R}_+)$: Wystarczy pokazać, że dla dowolnego $j \in \mathbb{N}_0$, szereg $\sum_{k=1}^\infty a_k\Big|\Big(\varphi\Big(\frac{\cdot - q_k}{d_k}\Big)\Big)^{(j)}\Big|$ jest zbieżny jednostajnie w E. Mamy

$$\sum_{k=1}^\infty a_k\Big|\Big(\varphi\Big(\frac{\cdot - q_k}{d_k}\Big)\Big)^{(j)}(x)\Big| = \sum_{k=1}^\infty a_k\frac{1}{d_k^j}\Big|\varphi^{(j)}\Big(\frac{x-q_k}{d_k}\Big)\Big| \leqslant \sum_{k=1}^\infty a_k\frac{C_j}{d_k^j} \leqslant \sum_{k=1}^{j-1} a_k\frac{C_j}{d_k^j} + \sum_{k=j}^\infty \frac{1}{2^k}, \quad x \in E.$$

- $f(x) > 0$ dla $x \in E \setminus S$: Ustalmy punkt $x_0 \in E \setminus S$ i niech $B(x_0, 2r) \subset E \setminus S$ dla pewnego $0 < r < 1$. Weźmy dowolny punkt $q_{k_0} \in B(x_0, r)$. Wtedy $d_{k_0} > r$, a stąd $x_0 \in B(q_{k_0}, d_{k_0})$, a więc $f(x_0) \geqslant a_{k_0}\,\varphi(\frac{x_0 - q_{k_0}}{d_{k_0}}) > 0$.
- $f^{(j)} = 0$ na S dla dowolnego j: Jeżeli $x_0 \in S$, to $\|x_0 - q_k\| \geqslant d_k$, a więc $\varphi^{(j)}(\frac{x_0 - q_k}{d_k}) = 0$ dla dowolnego k, a stąd $f^{(j)}(x_0) = 0$. $\square$

Z nazwiskiem Whitneya często łączy się następujące ważne twierdzenie.

Twierdzenie* 9.9.4 (Twierdzenie Whitneya, ([9])). *Niech $S \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem domkniętym, $k \in \mathbb{N}$ i niech $S \ni a \overset{P}{\longmapsto} P_a \in \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n, F)$ będzie odwzorowaniem takim, że dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset S$ mamy:*

$$\sup\Big\{\frac{\|P_x^{(j)}(x) - P_a^{(j)}(x)\|}{\|x - a\|^{k-j}} : a, x \in K,\ 0 < \|x - a\| \leqslant \delta,\ j = 0, \dots, k\Big\} \underset{\delta\to 0+}{\longrightarrow} 0. \qquad (\dagger)$$

Wtedy istnieje odwzorowanie $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n, F)$ takie, że $f^{(j)}(x) = P_x^{(j)}(x)$, $x \in S$, $j = 0, \dots, k$.

Warunek występujący w powyższym twierdzeniu można uznać z definicję funkcji klasy $\mathcal{C}^k$ na zbiorze domkniętym. Aby lepiej zrozumieć ten warunek udowodnimy następujące elementarne twierdzenie.

([8]) Hassler Whitney (1907–1989).
([9]) Zob. H. Federer, *Geometric measure theory*, Springer Verlag, Berlin, 1969, Theorem 3.1.14.

Twierdzenie 9.9.5. *Niech $\Omega \in \operatorname{top}\mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$ i $f : \Omega \longrightarrow F$. Wtedy $f \in \mathcal{C}^k(\Omega, F)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje odwzorowanie $\Omega \ni a \overset{P}{\longmapsto} P_a \in \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n, F)$ takie, że dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset \Omega$ zachodzi (†). Ponadto,*

$$P_a(x) = \overset{(k)}{T_a} f(x) := \sum_{\nu=0}^{k} \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(a)(x-a), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{*}$$

W szczególności, $P_x(x) = f(x)$, $x \in \Omega$.

Dowód. Niech $f \in \mathcal{C}^k(\Omega, F)$. Dla $a \in \Omega$ niech P_a będzie dane wzorem (*). Oczywiście $P_a \in \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n, F)$ oraz $P_a(x) = f(x) - R_k(f; a, x)$ dla $x \in \Omega$. W szczególności, $P_a'(x) = f'(x) - R_{k-1}(f'; a, x) = \overset{(k-1)}{T_a} f'(x)$ i w konsekwencji $P_a^{(j)}(x) = \overset{(k-j)}{T_a} f^{(j)}(x)$, $x \in \Omega$, $j = 0, \dots, k$. Zauważmy, że $P_a^{(j)}(a) = f^{(j)}(a)$, $j = 0, \dots, k$. Stąd, dla $x \in \Omega$, dostajemy

$$P_x^{(j)}(x) - P_a^{(j)}(x) = f^{(j)}(x) - \overset{(k-j)}{T_a} f^{(j)}(x) = R_{k-j}(f^{(j)}; a, x).$$

Teraz, wobec wzoru Taylora dla funkcji klasy $\mathcal{C}^k$ (Twierdzenie 9.8.3(b)), dla $K \subset\subset \Omega$ dostajemy (†).

Niech teraz odwzorowanie $\Omega \ni a \overset{P}{\longmapsto} P_a \in \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n, F)$ spełnia (†) dla dowolnego $K \subset\subset \Omega$. Pokażemy, że odwzorowanie $\Omega \ni x \overset{f}{\longmapsto} P_x(x) \in F$ jest klasy $\mathcal{C}^k$ i $\overset{(k)}{T_a} f = P_a$, $a \in \Omega$. Wobec (†) mamy

$$\|f(x) - f(a)\| = \|P_x(x) - P_a(a)\| \leqslant \frac{\|P_x(x) - P_a(x)\|}{\|x-a\|^k}\|x-a\|^k + \|P_a(x) - P_a(a)\| \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} 0,$$

skąd wynika, że $f \in \mathcal{C}(\Omega, F)$. Przypuśćmy, że już wiemy, że $f^{(j)}(x) = P_x^{(j)}(x)$, $x \in \Omega$, $j = 0, \dots, \ell$, dla pewnego $\ell \in \{0, \dots, k\}$. Teraz, korzystając z (†), wnioskujemy, że

$$\|f^{(\ell)}(x) - f^{(\ell)}(a)\| = \|P_x^{(\ell)}(x) - P_a^{(\ell)}(a)\| \leqslant \frac{\|P_x^{(\ell)}(x) - P_a^{(\ell)}(x)\|}{\|x-a\|^{k-\ell}}\|x-a\|^{k-\ell} + \|P_a^{(\ell)}(x) - P_a^{(\ell)}(a)\| \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} 0,$$

skąd wynika, że $f^{(\ell)}$ jest odwzorowaniem ciągłym. Ponadto, jeżeli $\ell \leqslant k-1$, to dla dowolnego $a \in \Omega$ i $h \in (\mathbb{R}^n)_*$ mamy

$$\begin{aligned}\frac{f^{(\ell)}(a+h) - f^{(\ell)}(a) - P_a^{(\ell+1)}(a)(h)}{\|h\|} &= \frac{P_{a+h}^{(\ell)}(a+h) - P_a^{(\ell)}(a) - P_a^{(\ell+1)}(a)(h)}{\|h\|} \\ &= \frac{P_{a+h}^{(\ell)}(a+h) - P_a^{(\ell)}(a+h)}{\|h\|^{k-\ell}}\|h\|^{k-\ell-1} + \frac{P_a^{(\ell)}(a+h) - P_a^{(\ell)}(a) - P_a^{(\ell+1)}(a)(h)}{\|h\|} \underset{h \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

(równości w przestrzeni $\mathcal{L}^\ell(\mathbb{R}^n, F)$. Oznacza to, że $f^{(\ell+1)}(a)$ istnieje i $f^{(\ell+1)}(a) = P_a^{(\ell+1)}(a)$. Teraz skończona indukcja względem ℓ kończy łatwo dowód. □

9.10. Ekstrema lokalne

Niech E będzie przestrzenią unormowaną nad $\mathbb{K}$, niech $\Omega \in \operatorname{top} E$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \Omega$. Przypomnijmy pewne definicje.

Definicja 9.10.1. Powiemy, że f ma w punkcie a *minimum lokalne* (odp. *silne minimum lokalne*), jeżeli istnieje otoczenie $U \subset \Omega$ punktu a takie, że $f(x) \geqslant f(a)$ dla $x \in U$ (odp. $f(x) > f(a)$ dla $x \in U \setminus \{a\}$).

Zmieniając kierunki nierówności definiujemy *maksimum lokalne* i *silne maksimum lokalne*. Zamieniając f na $-f$ możemy zawsze ograniczyć nasze rozważania do minimów lokalnych.

Definicja 9.10.2. Niech $Q \in \underline{\mathcal{H}}^k(E, \mathbb{R})$. Powiemy, że:

- Q jest *nieujemnie określony (półokreślony dodatnio)*, jeżeli $Q(h) \geqslant 0$, $h \in E$,
- Q jest *dodatnio określony*, jeżeli $Q(h) > 0$, $h \in E_*$,
- Q jest *silnie dodatnio określony*, jeżeli istnieje stała $c > 0$ taka, że $Q(h) \geqslant c\|h\|^k$, $h \in E$.

Zmieniając kierunki nierówności definiujemy pojęcie *niedodatniej określoności (półokreśloności ujemnej)*, *ujemnej określoności* i *silnej ujemnej określoności* $\left(^{10}\right)$. Zamieniając Q na $-Q$ możemy zawsze ograniczyć nasze rozważania do dodatniej określoności.

Obserwacja 9.10.3. (a) Jeżeli k jest nieparzyste i $Q \neq 0$, to Q nie jest ani nieujemnie ani niedodatnio określony, czyli jest *nieokreślony*. Istotnie, jeżeli k jest nieparzyste, to $Q(-h) = -Q(h)$.

(b) Jeżeli E jest skończenie wymiarowa, to dodatnia określoność jest równoważna silnej dodatniej określoności. Tak nie musi być gdy $\dim E = \infty$ — Ćwiczenie. Istotnie, jeżeli E jest skończenie wymiarowa i Q jest dodatnio określony, to $c := \inf\{Q(h) : \|h\| = 1\} > 0$ (bo sfera jest zwarta) i dla $h \neq 0$ mamy $Q(h) = \|h\|^k Q(\frac{h}{\|h\|}) \geqslant c\|h\|^k$.

(c) Jeżeli $E = \mathbb{R}^n$, $k = 2$ i $Q = [Q_{i,j}]_{i,j=1,\dots,n}$ jest macierzą symetryczną, to następujące warunki są równoważne:

(i) forma $Q(h) = h^t Q h = \sum\limits_{i,j=1}^{n} Q_{i,j} h_i h_j$, $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ jest nieujemnie określona; odnotujmy, że $Q(h) = \widehat{Q}(h,h)$, $h \in \mathbb{R}^n$, gdzie $\widehat{Q}(x,y) := x^t Q y$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, oraz że $Q_{i,j} = \widehat{Q}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$, $i, j = 1, \dots, n$.

(ii) $D(i_1, \dots, i_s) \geqslant 0$ dla dowolnych $1 \leqslant i_1 < \dots < i_s \leqslant n$, gdzie

$$D(i_1, \dots, i_s) := \det \begin{bmatrix} Q_{i_1,i_1}, \dots, Q_{i_1,i_s} \\ \vdots \\ Q_{i_s,i_1}, \dots, Q_{i_s,i_s} \end{bmatrix}, \quad 1 \leqslant i_1 < \dots < i_s \leqslant n.$$

(iii) wszystkie wartości własne macierzy Q są nieujemne.

Minor $D(i_1, \dots, i_s)$ nosi nazwę *minora głównego rzędu s*. Minor $D(1, \dots, s)$ nosi nazwę *wiodącego minora głównego rzędu s*. Z kryterium tego wynika oczywiście, że Q jest niedodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy $(-1)^s D(i_1, \dots, i_s) \geqslant 0$ dla dowolnych $1 \leqslant i_1 < \dots < i_s \leqslant n$.

Istotnie, wiadomo, że jeżeli $Q = Q^t$, to $Q = P^t \varDelta P$, gdzie P jest macierzą ortogonalną ($PP^t = \mathbb{I}_n$), zaś $\varDelta$ jest macierzą diagonalną mającą na przekątnej wartości własne $d_1, \dots, d_n$ macierzy A. Wynika stąd, że forma Q jest dodatnio (nieujemnie) określona wtedy i tylko wtedy, gdy forma skojarzona z macierzą $\varDelta$ jest dodatnio (nieujemnie) określona, co z kolei jest równoważne temu, że $d_1, \dots, d_n > 0$ ($d_1, \dots, d_n \geqslant 0$). W szczególności, (i) $\Longleftrightarrow$ (iii).

Ponieważ $\det Q = \det \varDelta = d_1 \cdots d_n$, wnioskujemy stąd również, że jeżeli Q jest dodatnio (nieujemnie) określona, to $\det Q > 0$ ($\det Q \geqslant 0$). Ustalmy $1 \leqslant i_1 < \dots < i_s \leqslant n$. Zauważmy, że $D(i_1, \dots, i_s)$ jest wyznacznikiem reprezentacji macierzowej formy G, gdzie $G : \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$G(t) := Q(0, \dots, 0, \underset{i_1}{t_1}, 0, \dots, 0, \underset{i_2}{t_2}, 0, \dots, 0, \underset{i_s}{t_s}, 0, \dots, 0), \quad t = (t_1, \dots, t_s) \in \mathbb{R}^s.$$

Jest jasne, że jeżeli Q jest dodatnio (nieujemnie) określona, to G jest dodatnio (nieujemnie) określona, a stąd $D(i_1, \dots, i_s) > 0$ ($D(i_1, \dots, i_s) \geqslant 0$).

Pozostaje wykazać, że (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Wiadomo, że równanie charakterystyczne $\det(A - \lambda \mathbb{I}_n) = 0$ macierzy A ma postać

$$(-\lambda)^n + \sum_{s=1}^{n} \Big(\sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_s \leqslant n} D(i_1, \dots, i_s) \Big) (-\lambda)^{n-s} = 0.$$

Jeżeli więc $D(i_1, \dots, i_s) \geqslant 0$ dla dowolnych $1 \leqslant i_1 < \dots < i_s \leqslant n$, to każdy pierwiastek tego równania (czyli wartość własna) musi być $\geqslant 0$ (Ćwiczenie).

Ćwiczenie: Czy dla nieujemnej określoności formy Q wystarczy, by $D(1, \dots, s) \geqslant 0$, $s = 1, \dots, n$?

(d) Jeżeli $E = \mathbb{R}^n$, $k = 2$ i $Q = [Q_{i,j}]_{i,j=1,\dots,n}$ jest macierzą symetryczną, to następujące warunki są równoważne:

(i) forma skojarzona z macierzą Q jest dodatnio określona;

(ii) $D(1, \dots, s) > 0$, $s = 1, \dots, n$ $\left(^{11}\right)$;

(iii) wszystkie wartości własne macierzy Q są dodatnie.

$\left(^{10}\right)$ W tym ostatnim przypadku żądamy istnienia stałej $c < 0$ takiej, że $Q(h) \leqslant c\|h\|^k$ dla dowolnego $h \in E$.

$\left(^{11}\right)$ Q jest ujemnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy $(-1)^s D(1, \dots, s) > 0$, $s = 1, \dots, n$.

Istotnie, wiemy już, że (i) $\Longleftrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (ii). Pozostaje wykazać, że (ii) $\Longrightarrow$ (i). Dowód ten przeprowadzimy indukcyjnie ze względu na n. Przypadek $n = 1$ jest oczywisty. Załóżmy, że wynik zachodzi dla $n - 1$. Oznacza to w szczególności, że $Q((x', 0)) > 0$ dla $x' \in (\mathbb{R}^{n-1})_*$. Niech $\widehat{Q}(x, y) := x^t Q y$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, oznacza dwuliniowe odwzorowanie symetryczne generujące formę Q. Wtedy istnieje $w^0 = (w', 1) \in \mathbb{R}^n$ takie, że $\widehat{Q}(w^0, \boldsymbol{e}_j) = 0$, $j = 1, \dots, n-1$. Istotnie problem polega na rozwiązaniu kwadratowego układu równań:

$$\sum_{s=1}^{n-1} Q_{s,j} w_j = -Q_{n,j}, \quad s = 1, \dots, n-1,$$

którego wyznacznik to $D(1, \dots, n-1) > 0$.

Łatwo również stwierdzić, że forma Q jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy $Q((x', 0)) > 0$ dla $x' \in (\mathbb{R}^{n-1})_*$ oraz $Q(w^0) > 0$. Istotnie, wektory $(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_{n-1}, w^0)$ tworzą bazę. Forma Q jest dodatnio określona $\Longleftrightarrow \forall_{x' \in \mathbb{R}^{n-1}} \forall_{t \neq 0} : 0 < Q((x', 0) + tw^0) = Q((x', 0)) + 2t\widehat{Q}((x', 0), w^0) + t^2 Q(w^0) = Q((x', 0)) + t^2 Q(w^0)$.

Pozostaje więc sprawdzenie, że $Q(w^0) > 0$. Niech R oznacza reprezentację macierzową formy Q w bazie $e_1, \dots, e_{n-1}, w^0$. Wiemy, że $\det R > 0$. Pozostaje zauważyć, że $\det R = D(1, \dots, n-1) Q(w^0)$ (Ćwiczenie).

Twierdzenie 9.10.4 (Warunki konieczne na ekstrema lokalne). *Załóżmy, że f ma w punkcie a minimum lokalne i $f^{(k)}(a)$ istnieje. Wtedy:*

- *$f'(a) = 0$, tzn. a jest punktem* krytycznym *f.*
- *jeżeli $k \geqslant 2$, $f'(a) = 0, \dots, f^{(k-1)}(a) = 0$ i $f^{(k)}(a) \neq 0$, to k jest parzyste i różniczka $f^{(k)}(a)$ jest nieujemnie określona.*

Dowód. Ustalmy $h \in E_*$. Funkcja $g(t) = f(a+th)$ jest poprawnie określona dla $|t| \leqslant \delta$ (przy dostatecznie małym δ) i ma minimum lokalne w punkcie $t = 0$. Widać, że $g^{(k)}(0)$ istnieje. Stąd, na podstawie teorii dla jednej zmiennej rzeczywistej, $0 = g'(0) = f'(a)(h)$.

Jeżeli teraz $f'(a) = 0, \dots, f^{(k-1)}(a) = 0$, to $g'(0) = 0, \dots, g^{(k-1)}(0) = 0$ i $g^{(k)}(0) = f^{(k)}(a)(h)$. Z klasycznej teorii funkcji jednej zmiennej rzeczywistej dostajemy teraz, że $f^{(k)}(a)(h) \geqslant 0$ oraz, że k musi być parzyste. $\square$

[Wykład 19.11.2020 . . . .]

Twierdzenie 9.10.5 (Warunki dostateczne na ekstrema lokalne). (a) *Przypuśćmy, że $f^{(k)}(a)$ istnieje, $f'(a) = 0, \dots, f^{(k-1)}(a) = 0$, a różniczka $f^{(k)}(a)$ jest silnie dodatnio określona* [12]. *Wtedy f ma w punkcie a silne minimum lokalne.*

(b) *Przypuśćmy, że $f \in \mathcal{D}^k(U, \mathbb{R})$, gdzie U jest otwartym otoczeniem punktu a, $f'(a) = 0, \dots, f^{(k-1)}(a) = 0$, a różniczka $f^{(k)}(x)$ jest nieujemnie określona dla dowolnego $x \in U$. Wtedy f ma w punkcie a minimum lokalne.*

Dowód. (a) Niech $c > 0$ będzie takie, że $\frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(h) \geqslant c\|h\|^k$, $h \in E$. Wtedy, na podstawie wzoru Taylora z resztą Peano, mamy

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(h) + o(\|h\|^k) \geqslant f(a) + \frac{c}{2}\|h\|^k > f(a), \quad 0 < \|h\| \ll 1.$$

(b) Niech $\overline{B}(a, r) \subset U$. Dla dowolnego $h \in E$, $\|h\| \leqslant r$, niech $g(t) := f(a+th)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Wtedy $g^{(j)}(t) = f^{(j)}(a+th)(h)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $j = 1, \dots, k$. Korzystając z jednowymiarowego wzoru Taylora z resztą Lagrange'a, wnioskujemy, że istnieje liczba $\theta(h) \in [0, 1]$ taka, że

$$f(a+h) - f(a) = g(1) - g(0) = \frac{1}{k!} g^{(k)}(\theta(h)) = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a + \theta(h)h)(h) \geqslant 0. \qquad \square$$

Definicja 9.10.6. Powiemy, że funkcja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ jest *wypukła*, jeżeli dla dowolnego segmentu $[a, b] \subset \Omega$, funkcja $[0, 1] \ni t \longmapsto f(a + t(b-a)) \in \mathbb{R}$ jest wypukła (por. Definicja 5.9.1). Funkcję $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *wklęsłą*, jeżeli funkcja $-f$ jest wypukła.

Ćwiczenie 9.10.7 (Funkcje wypukłe). Udowodnić, że jeżeli $f \in \mathcal{D}^2(\Omega)$, to f jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $x \in \Omega$, druga różniczka $f''(x)$ jest nieujemnie określona.

---

(12) W szczególności, k musi być parzyste.

9.11. Odwzorowania analityczne

Niech E, F, G będą przestrzeniami Banacha.

Definicja 9.11.1. Niech $\Omega \in \operatorname{top} E$. Powiemy, że odwzorowanie $f : \Omega \longrightarrow F$ jest *analityczne* ($f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, F)$), jeżeli dla dowolnego $a \in \Omega$ istnieją $r > 0$ i ciąg wielomianów jednorodnych $Q_k \in \mathcal{H}^k(E, F)$, $k \in \mathbb{N}_0$, taki że $B(a, r) \subset \Omega$ oraz $f(a + h) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} Q_k(h)$, $h \in B(r)$.

Obserwacja 9.11.2. Jeżeli $E = \mathbb{R}$, to powyższa definicja jest zgodna z Definicją 6.7.1.

Rozpoczniemy od pewnej obserwacji dotyczącej wielomianów jednorodnych.

Lemat 9.11.3. *Niech E, F będą przestrzeniami Banacha i niech $Q_k \in \mathcal{H}^k(E, F)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Załóżmy, że dla pewnego $r > 0$, szereg $\sum\limits_{k=0}^{\infty} Q_k(h)$ jest zbieżny dla dowolnego $h \in \overline{B}(r)$. Wtedy istnieją stałe $C, \varrho > 0$ takie, że $\|\widehat{Q}_k\| \leqslant \frac{C}{\varrho^k}$, $k \in \mathbb{N}_0$.*

W szczególności, dla dowolnego $h \in B(\theta\varrho)$, $0 < \theta < 1$, mamy $\|Q_k(h)\| \leqslant C\theta^k$, $k \in \mathbb{N}_0$, skąd wynika, że szereg $\sum\limits_{k=0}^{\infty} Q_k$ jest zbieżny normalnie w każdej kuli $B(\theta\varrho)$, $0 < \theta < 1$.

Z powyższego lematu wynika, że w definicji odwzorowania analitycznego możemy zawsze zakładać, że istnieje stała $C > 0$ taka, że $\|\widehat{Q}_k\| \leqslant \frac{C}{r^k}$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Dowód. Niech $F_s := \{h \in \overline{B}(r) : \forall_{k \in \mathbb{N}} : \|Q_k(h)\| \leqslant s\}$. Zbiory F_s są oczywiście domknięte, $F_s \subset F_{s+1}$, oraz $\overline{B}(r) = \bigcup_{s=1}^{\infty} F_s$. Ponieważ $\overline{B}(r)$ jest przestrzenią zupełną, twierdzenie Baire'a implikuje, że istnieje $s_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $\operatorname{int} F_{s_0} \neq \varnothing$. Niech $\overline{B}(x_0, \tau) \subset F_{s_0}$. Teraz na podstawie wzoru polaryzacyjnego (Twierdzenie 9.6.5), dla $h_1, \dots, h_k \in \overline{B}(\tau/k)$, dostajemy $\|\widehat{Q}_k(h_1, \dots, h_k)\| \leqslant \frac{1}{k!} 2^k s_0$, skąd wynika, że

$$\|\widehat{Q}_k\| \leqslant \frac{1}{k!} \frac{2^k s_0}{(\frac{\tau}{k})^k} = \frac{(2k)^k}{k!} \frac{s_0}{\tau^k} \leqslant e^{2k} \frac{s_0}{\tau^k} = \frac{s_0}{(e^{-2}\tau)^k}, \quad k \in \mathbb{N}. \qquad \square$$

Obserwacja 9.11.4. Niech $Q_k \in \mathcal{H}^k(E, F)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Wtedy, korzystając z Twierdzenia 9.6.12(a), wnioskujemy, że następujące warunki są równoważne:

(i) $\exists_{C,\, r>0}\ \forall_{k \in \mathbb{N}}\ \forall_{h_1, \dots, h_k \in \overline{B}(r)} : \ \|\widehat{Q}_k(h_1, \dots, h_k)\| \leqslant C$;

(ii) $\exists_{C,\, r>0}\ \forall_{k \in \mathbb{N}} : \ \|\widehat{Q}_k\| \leqslant \frac{C}{r^k}$;

(iii) $\exists_{C,\, r>0}\ \forall_{k \in \mathbb{N}} : \ \|Q_k\| \leqslant \frac{C}{r^k}$;

(iv) $\exists_{C,\, r>0}\ \forall_{k \in \mathbb{N}}\ \forall_{h \in \overline{B}(r)} : \ \|Q_k(h)\| \leqslant C$.

Twierdzenie 9.11.5. *Odwzorowanie* $\operatorname{Isom}(E, F) \ni L \overset{\varLambda}{\longmapsto} L^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$ *jest analityczne.*

Dowód. Ustalmy $L_0 \in \operatorname{Isom}(E, F)$. Na podstawie Twierdzenia 6.5.4, dla dowolnego $H \in \mathcal{L}(E, F)$ takiego, że $\|H\| < 1/\|L_0^{-1}\|$, mamy

$$\varLambda(L_0 + H) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (L_0^{-1} \circ H)^k \circ L_0^{-1} =: \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(H).$$

Zauważmy, że $Q_k(H) = \widetilde{Q}_k(H, \dots, H)$, gdzie

$$\widetilde{Q}_k(H_1, \dots, H_k) := (-1)^k (L_0^{-1} \circ H_1) \circ \dots \circ (L_0^{-1} \circ H_k) \circ L_0^{-1}, \quad H_1, \dots, H_k \in \mathcal{L}(E, F).$$

Widać, że $\widetilde{Q}_k \in \mathcal{L}^k(\mathcal{L}(E, F), \mathcal{L}(F, E))$. $\square$

Twierdzenie 9.11.6. *Niech $f(a+h) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} Q_k(h)$, $h \in B(r)$, gdzie $Q_k \in \mathcal{H}^k(E, F)$, $\|\widehat{Q}_k\| \leqslant \frac{C}{r^k}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Wtedy:*

(a) *$f \in \mathcal{C}^\omega(B(a, r), F)$;*

(b) *$f^{(j)}(a + h) = \sum\limits_{k=j}^{\infty} j! \binom{k}{j} \widehat{Q}_k(\underbrace{h, \dots, h}_{(k-j)\times}, \underbrace{\cdot, \dots, \cdot}_{j\times})$, $h \in B(r)$ (równość w $\mathcal{H}^j(E, F)$), $j \in \mathbb{N}_0$; w szczególności, $\mathcal{C}^\omega(B(a, r), F) \subset \mathcal{C}^\infty(B(a, r), F)$;*

(c) $Q_j = \frac{1}{j!} f^{(j)}(a)$, $j \in \mathbb{N}_0$, *czyli* $f(a+h) = T_a f(h)$, $h \in B(r)$;

(d) $f^{(j)} \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathcal{H}^j(E,F))$ *dla dowolnego odwzorowania* $f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, F)$, $j \in \mathbb{N}$.

Dowód. (a) Niech $b \in B(a,r)$ i niech $\varrho := r - \|b-a\|$. Dla $\|h\| < \varrho$, policzmy formalnie

$$f(b+h) = f(a + (h+b-a)) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(h + (b-a)) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \widehat{Q}_k(\underbrace{h,\dots,h}_{j\times}, \underbrace{b-a,\dots,b-a}_{(k-j)\times})$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \binom{k}{j} \widehat{Q}_k(\underbrace{h,\dots,h}_{j\times}, \underbrace{b-a,\dots,b-a}_{(k-j)\times}) =: \sum_{j=0}^{\infty} P_j(h).$$

Powyższe formalne przekształcenia staną się poprawne, jeżeli rodzina

$$\sum_{(k,j)\in\mathbb{N}_0^2:\ j\leqslant k} \binom{k}{j} \widehat{Q}_k(\underbrace{h,\dots,h}_{j\times}, \underbrace{b-a,\dots,b-a}_{(k-j)\times})$$

będzie sumowalna. Wynika to natychmiast z oszacowania

$$\Big\|\binom{k}{j} \widehat{Q}_k(\underbrace{h,\dots,h}_{j\times}, \underbrace{b-a,\dots,b-a}_{(k-j)\times})\Big\| \leqslant \binom{k}{j} C \Big(\frac{\|h\|}{r}\Big)^j \Big(\frac{\|b-a\|}{r}\Big)^{k-j}.$$

Niech

$$\widehat{P}_j(h_1,\dots,h_j) := \sum_{k=j}^{\infty} \binom{k}{j} \widehat{Q}_k(h_1,\dots,h_j, \underbrace{b-a,\dots,b-a}_{(k-j)\times}), \quad h_1,\dots,h_j \in E.$$

Mamy

$$\Big\|\binom{k}{j} \widehat{Q}_k(h_1,\dots,h_j, \underbrace{b-a,\dots,b-a}_{(k-j)\times})\Big\| \leqslant \binom{k}{j} C \frac{\|h_1\|}{r} \cdots \frac{\|h_j\|}{r} \Big(\frac{\|b-a\|}{r}\Big)^{k-j},$$

a stąd

$$\Big\|\binom{k}{j} \widehat{Q}_k(\underbrace{\cdot,\dots,\cdot}_{j\times}, \underbrace{b-a,\dots,b-a}_{(k-j)\times})\Big\| \leqslant C \Big(\frac{1}{r}\Big)^j \binom{k}{j} \Big(\frac{\|b-a\|}{r}\Big)^{k-j}.$$

Szereg definiujący $\widehat{P}_j$ jest zatem zbieżny w $\mathcal{L}_s^j(E,F)$, a stąd $\widehat{P}_j \in \mathcal{L}_s^j(E,F)$.

(b) W przestrzeni $\mathcal{L}(E,F)$ rozważmy szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} Q_k'(h) = \sum_{k=1}^{\infty} k \widehat{Q}_k(\underbrace{h,\dots,h}_{(k-1)\times}, \cdot)$$

(zob. Twierdzenie 9.6.14(b)). Dla $h \in \overline{B}(\theta r)$, $0 < \theta < 1$, mamy

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \|k\widehat{Q}_k(h,\dots,h,\cdot)\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leqslant k\theta^{k-1} \frac{C}{r}.$$

Zauważmy, że $\lim\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{k\theta^{k-1}\frac{C}{r}} = \theta < 1$. Teraz wystarczy już tylko (Ćwiczenie) skorzystać z twierdzenia o różniczkowaniu szeregu wyraz po wyrazie (Twierdzenie 9.4.9) i Lematu 9.11.4.

(c) i (d) wynika z (b). □

[Wykład 23.11.2020 . . . .]

Twierdzenie 9.11.7 (Zasada identyczności, por. Twierdzenie 6.9.3)**.** *Jeżeli Ω jest spójny, $f, g \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, F)$ i $f = g$ na pewnym niepustym zbiorze otwartym $U \subset \Omega$, to $f \equiv g$.*

Dowód. Zastępując f, g przez $f-g, 0$, sprowadzamy dowód do przypadku $g \equiv 0$. Niech $\Omega_0 := \{z_0 \in \Omega : f = 0$ w pewnym otoczeniu otwartym punktu $z_0\}$. Wiemy, że $\Omega_0 \neq \varnothing$. Wprost z definicji wynika, że Ω_0 jest otwarty. Pozostaje pokazać, że Ω_0 jest domknięty w Ω. Niech b będzie punktem skupienia Ω_0 w Ω. Wiemy, że $f \in \mathcal{C}^\infty$ oraz $f = 0$ na Ω_0. Stąd $f^{(k)}(b) = 0$, $k \in \mathbb{N}_0$. W takim razie $T_b f = 0$, co oznacza, że $b \in \Omega_0$. □

Twierdzenie 9.11.8 (Por. Twierdzenie 6.11.3)**.** *Niech $\varOmega \subset E$ będzie zbiorem otwartym i niech $f \in \mathcal{C}^\infty(\varOmega, F)$. Wtedy*

$$f \in \mathcal{C}^\omega(\varOmega, F) \Longleftrightarrow \forall_{a\in\varOmega}\ \exists_{C>0,\ B(a,r)\subset\varOmega}\ \forall_{h\in B(r)}\ \forall_{k\in\mathbb{N}_0}: \ \frac{1}{k!}\|f^{(k)}(a+h)\| \leqslant \frac{C}{r^k}.$$

Dowód. ($\Longleftarrow$): Niech $a \in \varOmega$ i niech C, $r > 0$ będą takie, jak w warunku. Korzystając ze wzoru Taylora dla funkcji klasy $\mathcal{D}^{k+1}$ (Twierdzenie 9.8.3(d)), dla $h \in B(r)$ mamy:

$$\Big\|f(a+h) - \sum_{\nu=0}^{k} \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(a)(h)\Big\| = \|R_k(f, a, a+h)\| \leqslant \frac{\sup_{x\in B(a,r)} \|f^{(k+1)}(x)\|}{(k+1)!}\|h\|^{k+1}$$
$$\leqslant C\Big(\frac{\|h\|}{r}\Big)^{k+1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

($\Longrightarrow$): Niech $a \in \varOmega$. Przypuśćmy, że $f(a+h) := \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(h)$, $h \in B(2r)$, gdzie $Q_k \in \mathcal{H}^k(E, F)$, $\|\widehat{Q}_k\| \leqslant \frac{C}{(2r)^k}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $B(a, 2r) \subset \varOmega$. Niech $\varphi(t) := \frac{1}{1-t}$. Korzystając z Twierdzenia 9.11.6(b) oraz z dowodu Twierdzenia 6.11.1(e), dostajemy dla $h \in B(r)$:

$$\|f^{(j)}(a+h)\| \leqslant \Big\|\sum_{k=j}^{\infty} j!\binom{k}{j}\|\widehat{Q}_k(\underbrace{h, \dots, h}_{(k-j)\times}, \underbrace{\cdot, \dots, \cdot}_{j\times})\Big\| \leqslant C\sum_{k=j}^{\infty} j!\binom{k}{j}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{k-j}\Big(\frac{1}{2r}\Big)^{j}$$
$$= C\Big(\frac{1}{2r}\Big)^{j}\varphi^{(j)}(\tfrac{1}{2}) = C\Big(\frac{1}{2r}\Big)^{j} j!2^{j+1} = j!\frac{2C}{r^j}, \quad j \in \mathbb{N}. \qquad \square$$

Mając Twierdzenie 9.11.8, możemy skorzystać z metody dowodu Twierdzenia 6.11.4 i dostaniemy (Ćwiczenie) następujące ważne twierdzenie.

Twierdzenie 9.11.9. *Niech $U \in \operatorname{top} G$, $\varOmega \in \operatorname{top} E$, niech $\varphi \in \mathcal{C}^\omega(U, E)$, $\varphi(U) \subset \varOmega$, $f \in \mathcal{C}^\omega(\varOmega, F)$. Wtedy $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^\omega(U, F)$.*

9.12. Dyfeomorfizmy

Definicja 9.12.1. Załóżmy, że E, F, G są przestrzeniami Banacha, $U \in \operatorname{top} E$, $V \in \operatorname{top} F$ i niech $\mathcal{F} \in \{\mathcal{D}^k, \mathcal{C}^k, \mathcal{C}^{k,\alpha}\}$ dla pewnego $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$, gdzie

$$\mathcal{C}^{k,\alpha}(\varOmega, G) := \{f \in \mathcal{C}^k(\varOmega, G) : \forall_{a\in\varOmega}\ \exists_{U_a} : f|_U \in \mathcal{C}_b^{k,\alpha}(U_a, G)\}.$$

Powiemy, że bijekcja $f : U \longrightarrow V$ jest *dyfeomorfizmem klasy* $\mathcal{F}$, jeżeli $f \in \mathcal{F}(U, F)$ oraz $g := f^{-1} \in \mathcal{F}(V, E)$.

Obserwacja 9.12.2. Jeżeli $f : U \longrightarrow V$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{D}^1$, to różniczkując związki $g \circ f = \mathrm{id}_U$, $f \circ g = \mathrm{id}_V$, łatwo wnioskujemy, że $f'(x) \in \operatorname{Isom}(E, F)$, $x \in U$, oraz $g'(y) = (f'(g(y))^{-1} \in \operatorname{Isom}(F, E)$, $y \in V$. Innymi słowy, $g' = \varLambda \circ f' \circ g$, gdzie $\varLambda : \operatorname{Isom}(E, F) \longrightarrow \operatorname{Isom}(F, E)$ oznacza operator odwracania (Twierdzenie 6.5.4).

Twierdzenie 9.12.3. *Załóżmy, że $U \in \operatorname{top} E$, $V \in \operatorname{top} F$ i $f : U \longrightarrow V$ jest homeomorfizmem takim, że $f \in \mathcal{D}(\varOmega, F)$ i $f'(x) \in \operatorname{Isom}(E, F)$, $x \in U$. Wtedy:*

(a) *Jeżeli f jest klasy $\mathcal{D}^k$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, to f jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{D}^k$.*
(b) *Jeżeli f jest klasy $\mathcal{C}^k$ dla pewnego $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, to f jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$.*
(c) *Jeżeli f jest klasy $\mathcal{C}^\omega$, to f jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^\omega$.*
(d) *Jeżeli f jest klasy $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, to f jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^{k,\alpha}$.*

Dowód. (a) Na podstawie Twierdzenia 9.2.9 f jest $\mathcal{D}^1$-dyfeomorfizmem oraz $g' = \varLambda \circ f' \circ g$. Przypuśćmy, że g jest klasy $\mathcal{D}^\ell$ dla $\ell \leqslant k-1$. Wtedy ze wzoru $g' = \varLambda \circ f' \circ g$ wynika, że g' jest klasy $\mathcal{D}^\ell$. Znaczy to, że g jest klasy $\mathcal{D}^{\ell+1}$.

(b) Dowód jest analogiczny jak w (a) — Ćwiczenie.

(c) Mając Twierdzenia 9.11.5, 9.11.8, 9.11.9 i 9.12.3, możemy skorzystać z metody dowodu Twierdzenia 6.11.5 — Ćwiczenie.

(d) Na podstawie (b) wiemy, że g jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$. Wiemy, że $g' = \varLambda \circ f' \circ g$. Wiemy również, że dla dowolnego $\ell \in \mathbb{N}$ lokalnie $\varLambda \in \mathcal{C}^{\ell,1}$.

$k = 1$: Mamy $g' = \Lambda \circ f' \circ g$, gdzie $\Lambda \in \mathcal{C}^{0,1}$, $f' \in \mathcal{C}^{0,\alpha}$, $g \in \mathcal{C}^{0,1}$. Stąd $g' \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(V, \mathcal{L}(F, E))$ (por. Twierdzenie 4.6.12(b)). W konsekwencji, $g \in \mathcal{C}^{1,\alpha}(V, E)$.

Dalej rozumujemy tak jak w (a), korzystając z Wniosku 9.7.10 — Ćwiczenie. $\square$

9.13. Twierdzenie o odwzorowaniu odwrotnym i twierdzenie o odwzorowaniu uwikłanym

Twierdzenie 9.13.1 (Twierdzenie o odwzorowaniu odwrotnym)**.** *Załóżmy, że E, F są przestrzeniami Banacha, $\Omega \in \operatorname{top} E$ i $f \in \mathcal{C}^k(\Omega, F)$ dla pewnego $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$. Załóżmy, że punkt $a \in \Omega$ jest taki, że $f'(a) \in \operatorname{Isom}(E, F)$. Wtedy istnieje otoczenie otwarte $U \subset \Omega$ punktu a takie, że:*

$V := f(U)$ jest zbiorem otwartym,

$f|_U : U \longrightarrow V$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$.

Ponadto, jeżeli $f \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega, F)$, to $g \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(V, E)$.

Obserwacja 9.13.2. Rozważmy dla treningu przypadek $E = F = \mathbb{R}$. Założenie $f'(a) \in \operatorname{Isom}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ oznacza oczywiście, że $f'(a) \neq 0$. Istnieje więc przedział otwarty $U \subset \Omega$ taki, że $a \in U$ oraz $f'(x) \neq 0$ dla dowolnego $x \in U$ (w szczególności, funkcja $f|_U$ jest ściśle monotoniczna). Zbiór $V := f(U)$ jest wtedy przedziałem otwartym. Na podstawie Twierdzenia 5.5.6, $f|U$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$ dla $k \leqslant +\infty$. Przypadek $k = \omega$ wynika z Twierdzenia 6.11.5.

Twierdzenie 9.13.3 (Twierdzenie o odwzorowaniu uwikłanym)**.** *Załóżmy, że E_1, E_2, F są przestrzeniami Banacha, $\Omega \in \operatorname{top} E_1 \times E_2$ i $f \in \mathcal{C}^k(\Omega, F)$ dla pewnego $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$. Załóżmy, że punkt $a = (a_1, a_2) \in \Omega$ jest taki, że $\frac{\partial f}{\partial E_2}(a) \in \operatorname{Isom}(E_2, F)$. Wtedy istnieją otoczenia otwarte $U_1 \subset E_1$, $U_2 \subset E_2$ punktów a_1 i a_2 oraz odwzorowanie $\varphi : U_1 \longrightarrow U_2$ klasy $\mathcal{C}^k$ takie, że $U_1 \times U_2 \subset \Omega$, $\{x \in U_1 \times U_2 : f(x) = f(a)\} = \{(t, \varphi(t)) : t \in U_1\}$.*

Ponadto, jeżeli $f \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega, F)$, to $\varphi \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(U_1, E_2)$.

Obserwacja 9.13.4. Zauważmy, że $\varphi'(t) = -\Big(\frac{\partial f}{\partial E_2}(t, \varphi(t))\Big)^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial E_1}(t, \varphi(t))$ dla $t \in U_1$ takich, że $\frac{\partial f}{\partial E_2}(t, \varphi(t)) \in \operatorname{Isom}(E_2, F)$. Istotnie, mamy $f(t, \varphi(t)) = f(a)$ dla dowolnego $t \in U_1$. Różniczkując dostajemy

$$\frac{\partial f}{\partial E_1}(t, \varphi(t)) + \frac{\partial f}{\partial E_2}(t, \varphi(t)) \circ \varphi'(t) = 0.$$

Obserwacja 9.13.5. Rozważmy dla treningu przypadek $E_1 = E_2 = F = \mathbb{R}$. Niech $(a, b) \in \Omega$ będzie ustalonym punktem takim, że $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$. Możemy założyć, że $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) > 0$ dla dowolnego $(x, y) \in \Omega$ oraz, że Ω jest prostokątem. Ustalmy $\varepsilon > 0$ takie, że $(a, b \pm \varepsilon) \in \Omega$. Oczywiście

$$f(a, b - \varepsilon) < f(a, b) < f(a, b + \varepsilon).$$

Niech $\delta > 0$ będzie takie, że $f(x, b - \varepsilon) < f(a, b) < f(x, b + \varepsilon)$, $x \in (a - \delta, a + \delta)$. Wynika stąd, że dla dowolnego $x \in (a - \delta, a + \delta)$ istnieje dokładnie jeden punkt $y = \varphi(x) \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ taki, że $f(x, \varphi(x)) = f(a, b)$.

Pozostaje sprawdzić, że $\varphi : (a - \delta, a + \delta) \longrightarrow (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ jest klasy $\mathcal{C}^k$. Na wstępie zauważmy, że powtarzając powyższe rozumowanie dla dowolnego punktu $(x_0, y_0) \in P := (a - \delta, a + \delta) \times (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ i dowolnego $0 < \varepsilon^* \ll 1$, wnioskujemy, że istnieje $\delta^* > 0$ oraz funkcja

$$\varphi^* : (x_0 - \delta^*, x_0 + \delta^*) \longrightarrow (y_0 - \varepsilon^*, y_0 + \varepsilon^*)$$

takie, że $P^* := (x_0 - \delta^*, x_0 + \delta^*) \times (y_0 - \varepsilon^*, y_0 + \varepsilon^*) \subset P$ oraz $y = \varphi^*(x)$ jest jedynym rozwiązaniem równania $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ w prostokącie P^*. Jeżeli $y_0 = \varphi(x_0)$, to oczywiście $\varphi^* = \varphi$ na $(x_0 - \delta^*, x_0 + \delta^*)$, co w szczególności, wobec dowolności ε^*, oznacza, że φ jest funkcją ciągłą.

Zauważmy, że cały problem leży w różniczkowalności φ. Jeżeli bowiem φ jest różniczkowalna, to równość $f(x, \varphi(x)) = f(a, b)$ implikuje, że

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))\, \varphi'(x) = 0, \text{ a stąd} \tag{*}$$

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}, \quad x \in (a - \delta, a + \delta),$$

co z kolei pokazuje, że φ' jest funkcją ciągłą, a więc φ jest klasy $\mathcal{C}^1$. Jeżeli już wiemy, że φ jest klasy $\mathcal{C}^\ell$ dla pewnego $\ell \in \{1, \dots, k - 1\}$, to powyższa równość pokazuje, że φ jest klasy $\mathcal{C}^{\ell+1}$.

Przechodzimy do różniczkowalności. Ustalmy $x_0 \in (a-\delta, a+\delta)$. Dla małych $h \in \mathbb{R}$ mamy:

$$0 = f(x_0+h, \varphi(x_0+h)) - f(x_0, \varphi(x_0)) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(h), \varphi(x_0+h))h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta(h))(\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)),$$

gdzie $\xi(h) \in [x_0, x_0+h]$ i $\eta(h) \in [\varphi(x_0), \varphi(x_0+h)]$. Wynika stąd, że

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(h), \varphi(x_0+h)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta(h))\frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h}.$$

Teraz przechodząc z h do 0 (i korzystając z ciągłości φ) otrzymujemy różniczkowalność funkcji φ w punkcie x_0.

Jeżeli $k \geqslant 2$, to różniczkując (*), dostajemy

$$f''_{x,x}(x, \varphi(x)) + 2f''_{x,y}(x, \varphi(x))\ \varphi'(x) + f''_{y,y}(x, \varphi(x))(\varphi'(x))^2 + f'_y(x, \varphi(x))\ \varphi''(x) = 0;$$

stosujemy tu tradycyjne oznaczenia $f'_x := \frac{\partial f}{\partial x}$, $f''_{x,y} := \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ itd. Stąd, po uwzględnieniu (*), mamy (dla uproszczenia zapisu pomijamy argument funkcji φ):

$$\varphi''(x) = -\frac{f''_{x,x}(x,\varphi)(f'_y(x,\varphi))^2 - 2f''_{x,y}(x,\varphi)f'_x(x,\varphi)f'_y(x,\varphi) + f''_{y,y}(x,\varphi)(f'_x(x,\varphi))^2}{(f'_y(x,\varphi))^3}$$

(Ćwiczenie). W szczególności, jeżeli $\varphi'(x_0) = 0$ dla pewnego x_0, to

$$\varphi''(x_0) = -\frac{f''_{x,x}(x_0, \varphi(x_0))}{f'_y(x_0, \varphi(x_0))}.$$

Prowadzi to do następującego warunku dostatecznego na ekstrema lokalne funkcji $y = \varphi(x)$ uwikłanej równaniem $f(x, y) = 0$, gdzie $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (Ćwiczenie):

Jeżeli $f'_y(a, b) \neq 0$, $f'_x(a, b) = 0$, $f''_{x,x}(a, b) \neq 0$, to równanie $f(x, y) = 0$ da się w otoczeniu punktu (a, b) rozwikłać oraz funkcja uwikłana $y = \varphi(x)$, $\varphi(a) = b$, ma w punkcie a ekstremum lokalne; ponadto, jeżeli $f''_{x,x}(a, b)f'_y(a, b) < 0$, to jest to minimum, a w przypadku przeciwnym — maksimum.

Ćwiczenie 9.13.6. Korzystając z metody użytej w poprzedniej obserwacji, przeprowadzić dowód twierdzenia o odwzorowaniu uwikłanym w przypadku, gdy $E_1 = \mathbb{R}^n$, $E_2 = F = \mathbb{R}$. W przypadku, gdy $k \geqslant 2$, wyprowadzić wzór na $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k}$. Korzystając z tych wzorów, sformułować warunek dostateczny na ekstrema lokalne funkcji $y = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ uwikłanej równaniem $f(x_1, \dots, x_n, y) = 0$, gdzie $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

[Wykład 26.11.2020 . . . .]

Dowód tego, że twierdzenie o odwzorowaniu uwikłanym implikuje twierdzenie o odwzorowaniu odwrotnym. Niech E, F, Ω, f, a będą takie, jak w założeniach twierdzenia o odwzorowaniu odwrotnym. Zdefiniujmy

$$E_1 := F, \quad E_2 := E, \quad \widetilde{\Omega} := F \times \Omega, \quad \widetilde{a} := (f(a), a), \quad \widetilde{f} : \widetilde{\Omega} \longrightarrow F, \quad \widetilde{f}(y, x) := f(x) - y.$$

Zauważmy, że $\widetilde{f}$ jest klasy $\mathcal{C}^k$, $\widetilde{f}(\widetilde{a}) = 0$ oraz $\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial E_2}(\widetilde{a}) = f'(a) \in \operatorname{Isom}(E_2, F)$. Niech $\widetilde{U}_1$, $\widetilde{U}_2$ i g będą takie, jak w twierdzeniu o odwzorowaniu uwikłanym dla $E_1, E_2, F, \widetilde{\Omega}, \widetilde{f}, \widetilde{a}$, tzn. $\widetilde{U}_1 \subset F$, $\widetilde{U}_2 \subset \Omega$ są otwarte, $g : \widetilde{U}_1 \longrightarrow \widetilde{U}_2$ jest klasy $\mathcal{C}^k$ oraz

$$\{(y, x) \in \widetilde{U}_1 \times \widetilde{U}_2 : y = f(x)\} = \{(y, g(y)) : y \in \widetilde{U}_1\}. \tag{†}$$

Niech $U := \widetilde{U}_2 \cap f^{-1}(\widetilde{U}_1)$, $V := \widetilde{U}_1$. Wobec (†) wnioskujemy, że $f|_U : U \longrightarrow V$ jest bijekcją oraz $(f|_U)^{-1} = g$. □

Dowód tego, że twierdzenie o odwzorowaniu odwrotnym implikuje twierdzenie o odwzorowaniu uwikłanym. Niech $E_1, E_2, F, \Omega, f, a$ będą takie, jak w założeniach twierdzenia o odwzorowaniu uwikłanym. Zdefiniujmy

$$\widetilde{E} := E_1 \times E_2, \quad \widetilde{F} := E_1 \times F, \quad \widetilde{f} : \Omega \longrightarrow \widetilde{F}, \quad \widetilde{f}(x_1, x_2) := (x_1, f(x_1, x_2)).$$

Oczywiście, $\widetilde{f}$ jest klasy $\mathcal{C}^k$, $\widetilde{f}(a) = (a_1, f(a))$ oraz

$$\widetilde{f}'(a)(X_1, X_2) = \Big(X_1, \frac{\partial f}{\partial E_1}(a)(X_1) + \frac{\partial f}{\partial E_2}(a)(X_2)\Big) =: (X_1, A(a)(X_1) + B(a)(X_2)),\ (X_1, X_2) \in E_1 \times E_2.$$

W szczególności, $\widetilde{f}'(a) \in \operatorname{Isom}(\widetilde{E}, \widetilde{F})$ ponieważ

$$(\widetilde{f}'(a))^{-1}(Y_1, Y_2) = (Y_1, (B(a))^{-1}(Y_2 - A(a)(Y_1))), \quad (Y_1, Y_2) \in E_1 \times F.$$

Niech teraz $\widetilde{U}$, $\widetilde{V}$ będą takie, jak w twierdzeniu o odwzorowaniu odwrotnym dla $\widetilde{E}$, $\widetilde{F}$, Ω, $\widetilde{f}$ i a, tzn. $\widetilde{U} \subset \Omega$ jest otwartym otoczeniem a, $\widetilde{V} \subset \widetilde{F}$ jest otwarty i $\widetilde{f}|_{\widetilde{U}} : \widetilde{U} \longrightarrow \widetilde{V}$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$. Oczywiście $\widetilde{f}'(x) \in \operatorname{Isom}(\widetilde{E}, \widetilde{F})$ dla dowolnego $x \in \widetilde{U}$. Wynika stąd, że $\frac{\partial f}{\partial E_2}(x) \in \operatorname{Isom}(E_2, F)$, $\quad x \in \widetilde{U}$. Istotnie, ponieważ

$$\widetilde{f}'(x)(X_1, X_2) = \Big(X_1, \frac{\partial f}{\partial E_1}(x)(X_1) + \frac{\partial f}{\partial E_2}(x)(X_2)\Big)$$
$$=: (X_1, A(x)(X_1) + B(x)(X_2)), \quad (X_1, X_2) \in E_1 \times E_2,$$

zatem dla $x \in \widetilde{U}$ mamy: $(B(x))^{-1}(Y) = \operatorname{pr}_{E_2}((\widetilde{f}'(x))^{-1}(0, Y))$, $Y \in F$. Niech $\widetilde{g} := (\widetilde{f}|_{\widetilde{U}})^{-1}$. Z postaci odwzorowania $\widetilde{f}$ wynika, że $\widetilde{g}(x_1, y) = (x_1, h(x_1, y))$, $(x_1, y) \in \widetilde{V}$, gdzie $h : \widetilde{V} \longrightarrow E_2$ jest pewnym odwzorowaniem klasy $\mathcal{C}^k$, dla którego $h(a_1, f(a)) = a_2$. Zdefiniujmy

$$W := \{x_1 \in E_1 : (x_1, f(a)) \in \widetilde{V}\}, \quad \varphi(x_1) := h(x_1, f(a)).$$

Zauważmy, że $\varphi(a_1) = a_2$. Dobierzmy teraz otoczenia otwarte $U_1 \subset E_1$ i $U_2 \subset E_2$ punktów a_1 i a_2 tak, że $U_1 \times U_2 \subset \widetilde{U}$, $U_1 \subset W$ i $\varphi(U_1) \subset U_2$. Liczymy

$$\{(t, \varphi(t)) : t \in U_1\} = \{(x_1, h(x_1, f(a))) : x_1 \in U_1\} = \{\widetilde{g}(x_1, f(a)) : x_1 \in U_1\}$$
$$= \{(x_1, x_2) \in \widetilde{U} : x_1 \in U_1,\ f(x_1, x_2) = f(a)\} = \{x \in U_1 \times U_2 : f(x) = f(a)\}. \quad \square$$

Dowód twierdzenia o odwzorowaniu odwrotnym.

Lemat 9.13.7. *Niech E, F będą przestrzeniami Banacha, niech $\Omega \subset E$ będzie zbiorem otwartym i niech $f : \Omega \longrightarrow F$ będzie odwzorowaniem różniczkowalnym takim, że f' jest ciągła w x_0 oraz $f'(x_0) \in \operatorname{Isom}(E, F)$ dla pewnego $x_0 \in \Omega$. Wtedy, dla dostatecznie małych $\tau > 0$, zbiór $f(B(x_0, \tau))$ jest otoczeniem punktu $f(x_0)$.*

Dowód. Niech $P : \widetilde{E} \longrightarrow E$, $Q : F \longrightarrow \widetilde{F}$ będą dowolnymi dyfeomorfizmami klasy $\mathcal{C}^1$, gdzie $\widetilde{E}$ i $\widetilde{F}$ są przestrzeniami Banacha. Zdefiniujmy

$$\widetilde{\Omega} := P^{-1}(\Omega), \quad \widetilde{f} := Q \circ f \circ P : \widetilde{\Omega} \longrightarrow \widetilde{F}, \quad \widetilde{x}_0 := P^{-1}(x_0).$$

Zauważmy, że $\widetilde{f}'(\widetilde{x}_0) \in \operatorname{Isom}(\widetilde{E}, \widetilde{F})$. Jest rzeczą widoczną, że wystarczy pokazać, że dla dostatecznie małych $\widetilde{\tau} > 0$ zbiór $\widetilde{f}(B(\widetilde{x}_0, \widetilde{\tau}))$ zawiera pewne otoczenie punktu $\widetilde{f}(\widetilde{x}_0)$.

Powyższa uwaga pozwala najpierw zredukować problem do przypadku $x_0 = 0$ i $f(x_0) = 0$ (poprzez translacje: $\widetilde{E} := E$, $P(x) = x + x_0$, $\widetilde{F} := F$, $Q(y) := y - f(x_0)$), a następnie do przypadku $F = E$ i $f'(0) = -\operatorname{id}_E$ (biorąc $\widetilde{E} := E$, $P := \operatorname{id}_E$, $\widetilde{F} := E$, $Q := -(f'(0))^{-1}$).

Ustalmy $\tau > 0$ takie, że $X := \overline{B}(\tau) \subset \Omega$ oraz $\|f'(x) + \operatorname{id}_E\| \leqslant \frac{1}{2}$, $\quad x \in X$. Pokażemy, że $B(\frac{\tau}{2}) \subset f(X)$. Ustalmy $y^* \in B(\frac{\tau}{2})$ i niech $T : X \longrightarrow E$, $T(x) := f(x) - y^* + x$. Zauważmy, że jeżeli $T(x^*) = x^*$, to $f(x^*) = y^*$. Będziemy chcieli zastosować twierdzenie Banacha o punkcie stałym Na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych, dla $x', x'' \in X$, mamy

$$\|T(x') - T(x'')\| = \|f(x') - f(x'') + (x' - x'')\|$$
$$\leqslant \sup\{\|f'(x) + \operatorname{id}_E\| : x \in [x', x'']\}\|x' - x''\| \leqslant \tfrac{1}{2}\|x' - x''\|.$$

Stąd, dla $x \in X$, mamy $\|T(x)\| \leqslant \|T(x) - T(0)\| + \|T(0)\| \leqslant \frac{1}{2}\|x\| + \|y^*\| \leqslant \tau$. $\square$

Przechodzimy do zasadniczego dowodu twierdzenia o odwzorowaniu odwrotnym. Niech E, F, Ω, f, a będą takie, jak w założeniach. Ponieważ zbiór $\operatorname{Isom}(E, F)$ jest otwarty w $\mathcal{L}(E, F)$, a operator odwracania Λ jest homeomorfizmem, możemy założyć, że $f'(x) \in \operatorname{Isom}(E, F)$ dla dowolnego $x \in \Omega$. Niech $A := f'(a)$, $\eta := 1/\|A^{-1}\|$. Ustalmy dowolną kulę $B(a, r) \subset \Omega$ tak małą, by $\|f'(x) - A\| \leqslant \frac{\eta}{2}$, $x \in B(a, r)$. Teraz, na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych, dla dowolnych $x', x'' \in B(a, r)$ mamy:

$$\|f(x') - f(x'')\| \geqslant \|A(x' - x'')\| - \|f(x') - f(x'') - A(x' - x'')\|$$

$$\geqslant \eta\|x'-x''\| - \sup\{\|f'(x)-A\| : x \in [x',x'']\}\|x'-x''\| \geqslant \frac{\eta}{2}\|x'-x''\|.$$

Wynika stąd, że $f|_{B(a,r)}$ jest odwzorowaniem injektywnym oraz, że odwzorowanie

$$g := (f|_{B(a,r)})^{-1} : f(B(a,r)) \longrightarrow B(a,r)$$

jest ciągłe (spełnia warunek Lipschitza). Wobec Twierdzenia 9.2.9, pozostaje jeszcze zauważyć, że $f(B(a,r))$ jest zbiorem otwartym, co wynika z Lematu 9.13.7. □ □

[Wykład 30.11.2020 . . . .]
W przypadku, gdy $E = F = \mathbb{R}^n$, twierdzenie o odwzorowaniu odwrotnym można istotnie wzmocnić.

Twierdzenie 9.13.8 (Twierdzenie o odwzorowaniu odwrotnym)**.** *Załóżmy, że $\Omega \in \operatorname{top}\mathbb{R}^n$, $a \in \Omega$ i $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ jest odwzorowaniem różniczkowalnym takim, że:*
- *pochodna f' jest ciągła w punkcie $a \in \Omega$,*
- *$f'(a) \in \operatorname{Isom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ (tzn. $\det Jf(a) \neq 0$).*

Wtedy istnieje otoczenie otwarte $U \subset \Omega$ punktu a takie, że
- *$V := f(U)$ jest zbiorem otwartym,*
- *$f|_U : U \longrightarrow V$ jest $\mathcal{D}^1$-dyfeomorfizmem.*

Dowód. Zachowajmy oznaczenia z dowodu Twierdzenia 9.13.1. Tak jak poprzednio, znajdujemy $r > 0$ takie, że $\det Jf(x) \neq 0$ dla dowolnego $x \in \mathbb{B}(a,r) \subset\subset \Omega$ oraz

$$\|f(x') - f(x'')\| \geqslant \frac{\eta}{2}\|x'-x''\|, \quad x', x'' \in \mathbb{B}(a,r)$$

(wszystkie obliczenia wykonujemy w normie euklidesowej), gdzie $0 < \eta \leqslant \min\{1/\|A^{-1}\|,\ 1\}$, $A := f'(a)$. W szczególności, $f|_{\mathbb{B}(a,r)}$ jest odwzorowaniem injektywnym oraz odwzorowanie $g := (f|_{\mathbb{B}(a,r)})^{-1} : f(\mathbb{B}(a,r)) \longrightarrow \mathbb{B}(a,r)$ jest ciągłe. Podobnie jak poprzednio, pozostaje jeszcze pokazać, że zbiór $f(\mathbb{B}(a,r))$ jest otwarty. Poprzednio robiliśmy to w oparciu o Lemat 9.13.7 (którego użycie wymagało założenia, że f' jest ciągła w każdym punkcie $x_0 \in \mathbb{B}(a,r)$). Obecnie zastosujemy inną metodę.

Ustalmy punkt $x_0 \in \mathbb{B}(a,r)$. Wystarczy pokazać, że $\mathbb{B}(f(x_0),\tau) \subset f(\mathbb{B}(x_0,r_0))$, gdzie

$$r_0 := r - \|x_0 - a\|, \quad \tau := (\eta/4)r_0.$$

Ustalmy $y^* \in \mathbb{B}(f(x_0),\tau)$. Szukamy $x^* \in \mathbb{B}(x_0,r_0)$ tak, by $f(x^*) = y^*$.

Niech $T(x) := \|f(x) - y^*\|$, $x \in \Omega$. Odnotujmy, że T^2 jest odwzorowaniem różniczkowalnym oraz

$$(T^2)'(x)(X) = 2\langle f(x) - y^*, f'(x)(X)\rangle, \quad x \in \Omega,\ X \in \mathbb{R}^n.$$

Wynika stąd w szczególności, że jeżeli $(T^2)'(x) = 0$ i $\det Jf(x) \neq 0$, to $f(x) = y^*$.

Ustalmy $0 < s < r_0$ tak, by $y^* \in \mathbb{B}(f(x_0),(\eta/4)s)$. Ponieważ $\overline{\mathbb{B}}(x_0,s)$ jest zbiorem zwartym (tu korzystamy istotnie z założenia, iż $E = F = \mathbb{R}^n$), zatem istnieje punkt $x^* \in \overline{\mathbb{B}}(x_0,s)$ taki, że $T(x^*) = \min\{T(x) : x \in \overline{\mathbb{B}}(x_0,s)\}$. Zauważmy, że $T(x_0) < (\eta/4)s$, a więc $T(x^*) < (\eta/4)s$. Pokażemy, że $x^* \in \mathbb{B}(x_0,s)$. Przypuśćmy, że $\|x^* - x_0\| = s$. Wtedy

$$T(x^*) = \|f(x^*)-f(x_0)-(y^*-f(x_0))\| \geqslant \|f(x^*)-f(x_0)\|-\|y^*-f(x_0)\| > (\eta/2)\|x^*-x_0\|-(\eta/4)s = (\eta/4)s;$$

sprzeczność.

Tak więc $x^* \in \mathbb{B}(x_0,s)$, a stąd $(T^2)'(x^*) = 0$, co wobec poprzedniej obserwacji, daje $f(x^*) = y^*$. □

9.14. Twierdzenie o rzędzie

Twierdzenie 9.14.1 (Twierdzenie o rzędzie)**.** *Niech $\Omega \in \operatorname{top}\mathbb{R}^n$ i niech $f \in \mathcal{C}^k(\Omega,\mathbb{R}^m)$, $k \in \mathbb{N}\cup\{\infty,\ \omega\}$, będzie odwzorowaniem takim, że $\operatorname{rank} f'(x) = r$, $x \in \Omega$, dla pewnego $r \in \{0,\dots,\min\{n,m\}\}$. Niech $\Delta := (-1,1) \subset \mathbb{R}$. Wtedy dla dowolnego punktu $a \in \Omega$ istnieje:*
- *otoczenie otwarte $U \subset \Omega$ punktu a,*
- *otoczenie otwarte $V \subset \mathbb{R}^m$ punktu $f(a)$, $f(U) \subset V$,*
- *dyfeomorfizm klasy $\mathcal{C}^k$ $\Phi : \Delta^n \longrightarrow U$, $\Phi(0) = a$,*
- *dyfeomorfizm klasy $\mathcal{C}^k$ $\Psi : V \longrightarrow \Delta^m$, $\Psi(f(a)) = 0$,*

takie, że $(\Psi \circ f \circ \Phi)(t_1, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_r, 0, \dots, 0)$, $(t_1, \dots, t_n) \in \Delta^n$.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] & V \arrow[d, "\Psi"] \\ \Delta^n \arrow[u, "\Phi"] \arrow[r, "(\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^r}, 0)"] & \Delta^m \end{tikzcd}$$

Dowód. Przypadek $r = 0$: Wtedy $f \equiv f(a) = \text{const}$ w składowej spójnej zbioru Ω, do której należy punkt a. Dobierzmy $\tau > 0$ takie, że $U := a + \tau\Delta^n \subset \Omega$ i zdefiniujmy $V := f(a) + \Delta^m$, $\Phi(t) := a + \tau t$, $\Psi(u) := u - f(a)$.

Przypadek $r \geqslant 1$: Niech $P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ i $Q : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ będą dowolnymi izomorfizmami afinicznymi. Zdefiniujmy $\widetilde{\Omega} := P^{-1}(\Omega)$, $\widetilde{f} := Q \circ f \circ P : \widetilde{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\widetilde{a} := P^{-1}(a)$. Zauważmy, że odwzorowanie $\widetilde{f}$ jest klasy $\mathcal{C}^k$ oraz $\operatorname{rank} \widetilde{f}'(x) = r$ dla dowolnego $x \in \widetilde{\Omega}$. Przypuśćmy, że twierdzenie o rzędzie zachodzi dla odwzorowania $\widetilde{f}$ w punkcie $\widetilde{a}$ i niech $\widetilde{U}$, $\widetilde{V}$, $\widetilde{\Phi}$ i $\widetilde{\Psi}$ będą dobrane do odwzorowania $\widetilde{f}$ zgodnie z tym twierdzeniem. Niech $U := P(\widetilde{U})$, $V := Q^{-1}(\widetilde{V})$, $\Phi := P \circ \widetilde{\Phi}$, $\Psi := \widetilde{\Psi} \circ Q$.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] & V \arrow[d, "Q"] \\ \widetilde{U} \arrow[u, "P"] \arrow[r, "\widetilde{f}"] & \widetilde{V} \arrow[d, "\widetilde{\Psi}"] \\ \Delta^n \arrow[u, "\widetilde{\Phi}"] \arrow[r, "(\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^r}, 0)"] & \Delta^m \end{tikzcd}$$

Mamy $(\Psi \circ f \circ \Phi)(t) = ((\widetilde{\Psi} \circ Q) \circ f \circ (P \circ \widetilde{\Phi}))(t) = (\widetilde{\Psi} \circ \widetilde{f} \circ \widetilde{\Phi})(t) = (t_1, \dots, t_r, 0, \dots, 0)$, czyli twierdzenie o rzędzie zachodzi dla odwzorowania f w punkcie a.

Stosując powyższe rozumowanie do $P(x) := x + a$ i $Q(y) := y - f(a)$, redukujemy dowód do przypadku $a = 0$ i $f(0) = 0$. Z algebry liniowej wiadomo, że istnieją izomorfizmy liniowe $P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ i $Q : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ takie, że $Q \circ f'(0) \circ P = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ [13]. Dowód redukuje się więc do przypadku, gdy $f'(0) = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Niech $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $g(x) := (f_1(x), \dots, f_r(x), x_{r+1}, \dots, x_n)$. Oczywiście g jest klasy $\mathcal{C}^k$, $g(0) = 0$ oraz $g'(0) = \mathbb{I}_n$. Na podstawie twierdzenia o odwzorowaniu odwrotnym istnieje otoczenie otwarte zera $U \subset \Omega$ oraz $\tau > 0$ takie, że odwzorowanie $g|_U : U \longrightarrow \tau\Delta^n$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$. Niech $\widetilde{\Phi} := (g|_U)^{-1} : \tau\Delta^n \longrightarrow U$, $\varphi := f \circ \widetilde{\Phi} : \tau\Delta^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Zauważmy, że φ jest klasy $\mathcal{C}^k$, $\varphi(0) = 0$ oraz $\operatorname{rank} \varphi'(t) = r$ dla dowolnego $t \in \tau\Delta^n$. Ponadto, $\varphi(t) = (t_1, \dots, t_r, \varphi_{r+1}(t), \dots, \varphi_m(t))$, a więc w szczególności $\varphi(\tau\Delta^n) \subset (\tau\Delta)^r \times \mathbb{R}^{m-r}$ oraz

$$\varphi'(t) = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_r & 0_{r,n-r} \\ *_{m-r,r} & \left[\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial t_\nu}(t)\right]_{\substack{\mu=r+1,\dots,m \\ \nu=r+1,\dots,n}} \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $\operatorname{rank} \varphi'(t) = r$, wnioskujemy stąd, że $\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial t_\nu}(t) = 0$, $t \in \tau\Delta^n$, $\mu = r+1, \dots, m$, $\nu = r+1, \dots, n$. Innymi słowy, funkcje $\varphi_{r+1}, \dots, \varphi_m$ zależą jedynie od $t_1, \dots, t_r$. Niech

$$\widetilde{\Psi} : (\tau\Delta^r) \times \mathbb{R}^{m-r} \longrightarrow (\tau\Delta^r) \times \mathbb{R}^{m-r}, \;\; \widetilde{\Psi}(u', u_{r+1}, \dots, u_m) := (u', u_{r+1} - \varphi_{r+1}(u'), \dots, u_m - \varphi_m(u')).$$

Widać, że $\widetilde{\Psi}$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$ [14] i $\widetilde{\Psi}(0) = 0$. Ponadto,

$$(\widetilde{\Psi} \circ \varphi)(t) = (\widetilde{\Psi} \circ f \circ \widetilde{\Phi})(t) = (t', 0), \quad t = (t', t'') \in (\tau\Delta^r) \times (\tau\Delta^{n-r}).$$

Niech teraz $\Phi : \Delta^n \longrightarrow U$, $\Phi(t) := \widetilde{\Phi}(\tau t)$, $V := \widetilde{\Psi}^{-1}(\tau\Delta^m)$, $\Psi : V \longrightarrow \Delta^m$, $\Psi(y) := \frac{1}{\tau}\widetilde{\Psi}(y)$. Odwzorowania Φ i Ψ są dyfeomorfizmami klasy $\mathcal{C}^k$ oraz

$$(\Psi \circ f \circ \Phi)(t) = \frac{1}{\tau}(\widetilde{\Psi} \circ f \circ \widetilde{\Phi})(\tau t) = \frac{1}{\tau}(\tau t', 0) = (t', 0), \quad t = (t', t'') \in \Delta^r \times \Delta^{n-r}. \qquad \square$$

---

(13) $\mathbb{I}_r$ oznacza $(r \times r)$–wymiarową macierz jednostkową.

(14) $\widetilde{\Psi}^{-1}(v', v_{r+1}, \dots, v_m) := (v', v_{r+1} + \varphi_{r+1}(v'), \dots, v_m + \varphi_m(v'))$.

ROZDZIAŁ 10

Podrozmaitości

[Wykład 03.12.2020 . . . .]

10.1. Podrozmaitości lokalne

Definicja 10.1.1. Niech $\varnothing \neq M \subset \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{N}_0 \cap [0, n]$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty,\ \omega\}$. Mówimy, że zbiór M jest *d–wymiarową podrozmaitością lokalną klasy $\mathcal{C}^k$ w $\mathbb{R}^n$* (1), jeżeli:

– dla $d = 0$: M jest zbiorem dyskretnym, tzn. dowolny punkt $a \in M$ ma otoczenie otwarte $U \subset \mathbb{R}^n$ takie, że $M \cap U = \{a\}$; zauważmy, że $\#M \leqslant \aleph_0$ — Ćwiczenie; w szczególności, dla $d = 0$ klasa $\mathcal{C}^k$ jest obojętna;

– dla $1 \leqslant d \leqslant n$: spełniony jest następujący warunek: $\forall_{a\in M}\ \exists_{P\in \operatorname{top}\mathbb{R}^d}\ \exists_{U\in\operatorname{top} M:\ a\in U}\ \exists_{p:P\to U}$:
- $p : P \longrightarrow U$ jest homeomorfizmem,
- $p \in \mathcal{C}^k(P, \mathbb{R}^n)$,
- $\operatorname{rank} p'(t) = d$, $t \in P$.

Zwykle będziemy pomijać słowo „lokalna” i będziemy mówić o *d–wymiarowej podrozmaitości klasy $\mathcal{C}^k$ w $\mathbb{R}^n$* lub też pisać krótko $M \in \mathcal{M}^k_d(\mathbb{R}^n)$ (oznaczenie to ma charakter lokalny).

W powyższej sytuacji mówimy, że $p : P \longrightarrow U$ jest *lokalną parametryzacją* (dla U), zaś $p^{-1} : U \longrightarrow P$ jest *mapą* (na U). Każdą rodzinę map $p_i^{-1} : U_i \longrightarrow P_i$, $i \in I$, taką że $\bigcup_{i\in I} U_i = M$ nazywamy *atlasem na M*. Zauważmy, że na podstawie twierdzenia Lindelöfa (2), z dowolnego atlasu na M można wybrać podatlas przeliczalny.

Dla $d = n$, na podstawie twierdzenia o odwzorowaniu odwrotnym, powyższe warunki oznaczają, że $M \in \operatorname{top}\mathbb{R}^n$. W szczególności, dla $d = n$ klasa $\mathcal{C}^k$ jest obojętna.

Obserwacja 10.1.2. (a) W $\mathbb{R}$ nie ma nietrywialnych podrozmaitości.

(b) Jeżeli $M \in \mathcal{M}^k_d(\mathbb{R}^n)$ i $\varnothing \neq N \in \operatorname{top} M$, to $N \in \mathcal{M}^k_d(\mathbb{R}^n)$.

(c) Jeżeli $p : P \longrightarrow U$ jest lokalną parametryzacją, zaś $\varphi : Q \longrightarrow P$ jest dowolnym dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$ ($Q \in \operatorname{top}\mathbb{R}^d$), to $p \circ \varphi : Q \longrightarrow U$ jest również lokalną parametryzacją.

(d) Jeżeli $M \in \mathcal{M}^k_d(\mathbb{R}^n)$, $d \geqslant 1$, to dla każdego punktu $a \in M$ istnieje lokalna parametryzacja $p : \mathit{\Delta}^d \longrightarrow U$ ($\mathit{\Delta} := (-1, 1)$) taka, że $p(0) = a$.

(e) Każda podrozmaitość klasy $\mathcal{C}^k$ jest klasy $\mathcal{C}^\ell$ dla dowolnego $1 \leqslant \ell \leqslant k - 1$.

(f) Jeżeli $M := \{(t, \varphi(t)) : t \in P\}$, gdzie $1 \leqslant d \leqslant n - 1$, $P \in \operatorname{top}\mathbb{R}^d$ i $\varphi \in \mathcal{C}^k(P, \mathbb{R}^{n-d})$, to $M \in \mathcal{M}^k_d(\mathbb{R}^n)$.

(g) Jeżeli $M \in \mathcal{M}^k_d(\mathbb{R}^n)$ oraz $\mathit{\Phi} : \mathit{\Omega} \longrightarrow \mathit{\Omega}'$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$, gdzie $M \subset \mathit{\Omega}$, to $\mathit{\Phi}(M) \in \mathcal{M}^k_d(\mathbb{R}^n)$.

Istotnie, przypadki $d = 0$ i $d = n$ są trywialne. Dla $1 \leqslant d \leqslant n - 1$, wystarczy pokazać, że jeżeli $p : P \longrightarrow U$ jest lokalną parametryzacją dla $U \in \operatorname{top} M$, to $\mathit{\Phi}\circ p : P \longrightarrow \mathit{\Phi}(U)$ jest lokalną parametryzacją dla $\mathit{\Phi}(U)$. Jedyną wątpliwość może budzić ostatni warunek z rzędem. Mamy: $(\mathit{\Phi} \circ p)'(t) = \mathit{\Phi}'(p(t)) \circ p'(t)$. Ponadto, $\mathit{\Phi}'(x)$ jest macierzą nieosobliwą dla dowolnego $x \in \mathit{\Omega}$. Stąd $\operatorname{rank}(\mathit{\Phi} \circ p)'(t) = \operatorname{rank} p'(t) = d$ dla dowolnego $t \in P$.

(h) Każda d–wymiarowa płaszczyzna afiniczna $M \subset \mathbb{R}^n$ jest d–wymiarową podrozmaitością w $\mathbb{R}^n$ klasy $\mathcal{C}^\omega$. Istotnie, przypadki $d = 0$ i $d = n$ są trywialne. Dla $1 \leqslant d \leqslant n - 1$, jeżeli $M = x_0 + V$, gdzie V jest d–wymiarową podprzestrzenią wektorową $\mathbb{R}^n$, to dla dowolnej bazy $v_1, \dots, v_d$ przestrzeni V

---

(1) Można również mówić o rozmaitościach klasy $\mathcal{C}^{k,\alpha}$.

(2) Ernst Lindelöf (1870–1946).

odwzorowanie $\mathbb{R}^d \ni (t_1,\dots,t_d) \longmapsto x_0 + t_1v_1 + \dots + t_dv_d \in M$ jest (globalną) parametryzacją M klasy $\mathcal{C}^\omega$ — ĆWICZENIE.

(i) $(n-1)$–wymiarowa jednostkowa sfera euklidesowa $\mathbb{S}_{n-1}$ $\mathbb{S}_{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\} = \partial\mathbb{B}_n$ jest $(n-1)$–wymiarową podrozmaitością w $\mathbb{R}^n$ klasy $\mathcal{C}^\omega$. Istotnie, jeżeli np. $U_n^+ := \{x \in \mathbb{S}_{n-1} : x_n > 0\}$, to odwzorowanie $\mathbb{B}_{n-1} \ni x' \longmapsto (x', \sqrt{1-\|x'\|^2}) \in U_n^+$ jest lokalną parametryzacją U_n^+ klasy $\mathcal{C}^\omega$. Podobnie możemy sparametryzować każdy z $2n$ zbiorów $U_j^\pm := \{x \in \mathbb{S}_{n-1} : \pm x_j > 0\}$, $j = 1,\dots,n$.

Zauważmy, do parametryzacji $\mathbb{S}_2$ wystarczą dwa rzuty stereograficzne z przeciwnych biegunów.

(j) Zbiór $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 = y^2\}$ nie jest jednowymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$ w $\mathbb{R}^2$, ale odwzorowanie $p : \mathbb{R} \longrightarrow M$, $p(t) := (t^2, t^3)$, jest homeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^\omega$. Zauważmy, że $p'(0) = (0,0)$, a więc p nie jest lokalną parametryzacją.

Istotnie, przypuśćmy, że $q = (f,g) : \varDelta \longrightarrow M$ jest odwzorowaniem różniczkowalnym w $t = 0$ takim, że $q(0) = (0,0)$. Wtedy $f^3 \equiv g^2$. Po podzieleniu przez t^2 i przejściu z t do zera dostajemy $(f'(0))^2 f(0) = (g'(0))^2$, co daje $g'(0) = 0$. Dzieląc z kolei przez t^3 mamy: $(f(t)/t)^3 = (g(t)/t)^2(\frac{1}{t})$. Przy $t \longrightarrow 0$ lewa strona zmierza do $(f'(0))^3$, zaś prawa jest $\leqslant 0$ dla $t < 0$ i $\geqslant 0$ dla $t > 0$. Stąd: $f'(0) = 0$. Tak więc $q'(0) = (0,0)$, a zatem q nie może być parametryzacją.

Twierdzenie 10.1.3. *Niech $\varOmega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i niech $f : \varOmega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ będzie odwzorowaniem klasy $\mathcal{C}^k$ ($k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$) o stałym rzędzie d. Wtedy dowolny punkt $a \in \varOmega$ ma otoczenie otwarte $U \subset \varOmega$ takie, że $f(U)$ jest d–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$ w $\mathbb{R}^m$.*

Dowód. Przypadek $d = 0$ jest trywialny, bowiem wtedy f jest stałe na każdej składowej zbioru $\varOmega$. Niech $1 \leqslant d \leqslant \min\{m,n\}$. Ustalmy $a \in \varOmega$. Na podstawie twierdzenia o rzędzie istnieją zbiory otwarte $U \subset \varOmega$, $V \subset \mathbb{R}^m$ i dyfeomorfizmy klasy $\mathcal{C}^k$ $\alpha : \varDelta^n \longrightarrow U$, $\beta : V \longrightarrow \varDelta^m$ takie, że $\alpha(0) = a$, $\beta(f(a)) = 0$, $f(U) \subset V$, $\beta \circ f \circ \alpha(t_1,\dots,t_n) = (t_1,\dots,t_d,\underbrace{0,\dots,0}_{(m-d)\times})$, $t = (t_1,\dots,t_n) \in \varDelta^n$.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ {\scriptstyle\alpha}\big\uparrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\beta} \\ \varDelta^n & \xrightarrow{(\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^d},0)} & \varDelta^m \end{array}$$

W tej sytuacji $f(U) = \beta^{-1}(\varDelta^d \times \{0\}^{m-d})$, a zatem odwzorowanie $\varDelta^d \ni t \longmapsto \beta^{-1}(t_1,\dots,t_d,0,\dots,0)$ jest parametryzacją $f(U)$ klasy $\mathcal{C}^k$. $\square$

Twierdzenie 10.1.4 (Opisy podrozmaitości)**.** *Niech $M \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leqslant d \leqslant n-1$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) *M jest d–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$ w $\mathbb{R}^n$;*

(ii) $\forall_{a\in M}\ \exists_{d'\geqslant d}\ \exists_{P\in\mathrm{top}\,\mathbb{R}^{d'}}\ \exists_{U\in\mathrm{top}\,M:\,a\in U}\ \exists_{p:P\to U}$ *: $p : P \longrightarrow U$ jest odwzorowaniem otwartym* [3], *$p(P) = U$, $p \in \mathcal{C}^k(P,\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{rank} p'(t) = d$, $t \in P$;*

(iii) $\forall_{a\in M}\ \exists_{\varOmega\in\mathrm{top}\,\mathbb{R}^n:\,a\in\varOmega}\ \exists_{\varPhi:\varOmega\longrightarrow\varDelta^n}$ *: $\varPhi$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$, $\varPhi(M \cap \varOmega) = \varDelta^d \times \{0\}^{n-d}$* [4]*;*

(iv) $\forall_{a\in M}\ \exists_{\varOmega\in\mathrm{top}\,\mathbb{R}^n:\,a\in\varOmega}\ \exists_{Q\in\mathrm{top}\,\mathbb{R}^n}\ \exists_{V\subset\mathbb{R}^n}\ \exists_{\varPhi:\varOmega\longrightarrow Q}$ *: V jest d–wymiarową podprzestrzenią wektorową $\mathbb{R}^n$, $\varPhi$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$, $\varPhi(M \cap \varOmega) = V \cap Q$;*

(v) $\forall_{a\in M}\ \exists_{\ell\geqslant n-d}\ \exists_{\varOmega\in\mathrm{top}\,\mathbb{R}^n:\,a\in\varOmega}\ \exists_{f\in\mathcal{C}^k(\varOmega,\mathbb{R}^\ell)}$ *: $M \cap \varOmega = f^{-1}(0)$, $\operatorname{rank} f'(x) = n-d$, $x \in \varOmega$;*

(vi) $\forall_{a\in M}\ \exists_{\varOmega\in\mathrm{top}\,\mathbb{R}^n:\,a\in\varOmega}\ \exists_{f\in\mathcal{C}^k(\varOmega,\mathbb{R}^{n-d})}$ *: $M \cap \varOmega = f^{-1}(0)$, $\operatorname{rank} f'(x) = n-d$, $x \in \varOmega$;*

(vii) $\forall_{a\in M}\ \exists_{\varOmega\in\mathrm{top}\,\mathbb{R}^n:\,a\in\varOmega}\ \exists_{P\in\mathrm{top}\,\mathbb{R}^d}\ \exists_{\varphi\in\mathcal{C}^k(P,\mathbb{R}^{n-d})}\ \exists_{\sigma\in S_n}$ *: P jest wypukły, $\sigma(M \cap \varOmega) = \{(t,\varphi(t)) : t \in P\}$, gdzie $\sigma : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\sigma(x_1,\dots,x_n) := (x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)})$;*

(viii) $\forall_{a\in M}\ \exists_{\varOmega\in\mathrm{top}\,\mathbb{R}^n:\,a\in\varOmega}\ \exists_{P\in\mathrm{top}\,\mathbb{R}^d}\ \exists_{p:P\longrightarrow M\cap\varOmega}\ \exists_{s:\varOmega\longrightarrow P}$ *: P jest wypukły, $p \in \mathcal{C}^k(P,\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathcal{C}^k(\varOmega,\mathbb{R}^d)$, $M \cap \varOmega = p(P)$, $s \circ p = \mathrm{id}_P$.*

Zauważmy, że w warunku (viii) odwzorowanie $r := p \circ s : \varOmega \longrightarrow M \cap \varOmega$ jest retrakcją klasy $\mathcal{C}^k$.

Dowód. Implikacje (i) $\Longrightarrow$ (ii), (iii) $\Longrightarrow$ (iv) są oczywiste. Implikacja (ii) $\Longrightarrow$ (iii) wynika z dowodu Twierdzenia 10.1.3.

---

[3] Tzn. $p(\mathrm{top}\,P) \subset \mathrm{top}\,U$.

[4] Takie odwzorowanie $\varPhi$ będziemy nazywać *odwzorowaniem rozpłaszczającym*.

(iv) $\Longrightarrow$ (v): Niech $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie izomorfizmem liniowym takim, że $L(V) = \{0\}^{n-d} \times \mathbb{R}^d$. Zdefiniujmy $g := L \circ \varPhi$, $f := (g_1, \dots, g_{n-d}) : \varOmega \longrightarrow \mathbb{R}^{n-d} = \mathbb{R}^\ell$.

(v) $\Longrightarrow$ (vi): Na podstawie twierdzenia o rzędzie istnieją zbiory otwarte $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^\ell$ oraz dyfeomorfizmy klasy $\mathcal{C}^k$ $\alpha : \varDelta^n \longrightarrow A$, $\beta : B \longrightarrow \varDelta^\ell$ takie, że $a \in A \subset \varOmega$, $\alpha(0) = a$, $f(A) \subset B$, $\beta(0) = 0$, $\beta \circ f \circ \alpha(t) = (t_1, \dots, t_{n-d}, 0, \dots, 0)$, $t \in \varDelta^n$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[d, "\beta"] \\ \varDelta^n \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "(\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{n-d}}, 0)"'] & \varDelta^m \end{tikzcd}$$

Niech $g := \alpha^{-1}$, $h := (g_1, \dots, g_{n-d}) : A \longrightarrow \mathbb{R}^{n-d}$. Oczywiście $\operatorname{rank} h'(x) = n - d$, $x \in \varDelta^n$, oraz $M \cap A = \{x \in A : f(x) = 0\} = \{x \in A : \beta \circ f(x) = 0\} = \{x \in A : (\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{n-d}}, 0) \circ \alpha^{-1}(x) = 0\} = h^{-1}(0)$.

(vi) $\Longrightarrow$ (vii): Po permutacji zmiennych, można założyć, że $\det \big[\frac{\partial f_i}{\partial x_{d+j}}(a)\big]_{i,j=1,\dots,n-d} \neq 0$. Teraz wystarczy tylko skorzystać z twierdzenia o odwzorowaniu uwikłanym (zbiór U_1 w twierdzeniu o odwzorowaniu uwikłanym (a więc P w (vii)) można zawsze wybrać w klasie obszarów wypukłych).

(vii) $\Longrightarrow$ (viii): Niech $p(t) := \sigma^{-1}(t, \varphi(t))$, $t \in P$, $s(x) := \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^d}(\sigma(x))$, $x \in \mathbb{R}^n$. Oczywiście, $M \cap \varOmega = p(P)$ oraz $s \circ p = \mathrm{id}_P$. Pozostaje tylko zmodyfikować zbiór $\varOmega$ i zastąpić go przez $s^{-1}(P)$.

(viii) $\Longrightarrow$ (i): Niech $U := M \cap \varOmega$. Oczywiście $p : P \longrightarrow U$ jest homeomorfizmem ($p^{-1} = s|_U$). Pozostaje zauważyć, że ze związku $s'(p(t)) \circ p'(t) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d}$, $t \in P$, wynika łatwo, że $\operatorname{rank} p'(t) = d$ dla $t \in P$. □

Przykład 10.1.5. Niech $\varOmega := (\mathbb{R}^n)_*$, $f(x) := \|x\|^2 - 1$, $x \in \varOmega$. Wtedy $\operatorname{rank} f'(x) = 1$, $x \in \varOmega$, oraz $f^{-1}(0) = \mathbb{S}_{n-1}$, a zatem na podstawie Twierdzenia 10.1.4(vi), $\mathbb{S}_{n-1}$ jest $(n-1)$–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^\omega$ (por. Obserwacja 10.1.2(i)).

[Wykład 07.12.2020 . . . .]

Odnotujmy, że prawdziwe jest następujące wysoce nietrywialne twierdzenie (zob. również Twierdzenie 10.1.22).

Twierdzenie* 10.1.6 (Twierdzenie o retrakcji [5][6])**.** *Niech $M \subset \mathbb{R}^n$ będzie niepustym zbiorem spójnym i niech $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Wtedy M jest podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$ w $\mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją zbiór otwarty $\varOmega \supset M$ oraz retrakcja $r : \varOmega \longrightarrow M$ klasy $\mathcal{C}^k$.*

Dowód implikacji ($\Longleftarrow$) w Twierdzeniu 10.1.6. Niech $d := \max\{\operatorname{rank} r'(x) : x \in \varOmega\}$. Jeżeli $d = 0$, to r jest odwzorowaniem stałym na składowej spójnej zbioru $\varOmega$ zawierającej M, a wtedy M musi być punktem.

Załóżmy, że $1 \leqslant d \leqslant n$. Ponieważ, $r \circ r = r$, zatem $r'(r(a)) \circ r'(a) = r'(a)$ dla dowolnego $a \in \varOmega$. W szczególności, $r'(a) \circ r'(a) = r'(a)$ dla dowolnego $a \in M$, a stąd $r'(a)(X) = X$ dla dowolnego wektora $X \in V_a := r'(a)(\mathbb{R}^n)$, $a \in M$. Niech $\varOmega_0 := \{x \in \varOmega : \operatorname{rank} r'(x) = d\}$, $M_0 := M \cap \varOmega_0$. Zauważmy, że $\varOmega_0$ jest niepustym zbiorem otwartym. Na wstępie zauważmy, że $r(\varOmega_0) = M_0$. Istotnie, dla $a \in \varOmega_0$ mamy $d \geqslant \operatorname{rank} r'(r(a)) = \dim r'(r(a))(\mathbb{R}^n) \geqslant \dim r'(r(a))(r'(a)(\mathbb{R}^n)) = \dim r'(a)(\mathbb{R}^n) = d$.

Na podstawie Twierdzenia 10.1.3, każdy punkt $a \in M_0$ posiada otoczenie $U \subset \varOmega_0$ takie, że $r(U)$ jest d-wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$. Wtedy również $U \cap r(U)$ jest d–wymiarową rozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$ w $\mathbb{R}^n$. Z drugiej strony, $U \cap r(U) = U \cap M_0$, co pokazuje, że $U \cap r(U)$ jest otwarty w M_0. W takim razie M_0 jest d–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$ w $\mathbb{R}^n$.

Teraz pokażemy, że $M_0 = M$ (co zakończy dowód). Ponieważ M_0 jest niepustym podzbiorem otwartym M, a M jest spójne, więc wystarczy pokazać, że M_0 jest domknięte w M. Przypomnijmy, że $r'(a)(V_a) = V_a$, $a \in M$, oraz $\dim V_a = d$, $a \in M_0$. Dla $a \in M_0$ niech $L_a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie izometrią ($L_a L_a^t = \mathbb{I}_n$) taką, że $L_a(V_a) = \mathbb{R}^d \times \{0\}^{n-d}$ i niech $W_a := L_a r'(a) L_a^{-1}$. Wtedy $W_a(X) = X$ dla $X \in \mathbb{R}^d \times \{0\}^{n-d}$, co oznacza, że $W_a = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_d & , & *_{d \times (n-d)} \\ 0_{(n-d) \times d} & , & *_{(n-d) \times (n-d)} \end{bmatrix}$.

Niech teraz $M_0 \ni a_s \longrightarrow a_0 \in M$. Ponieważ macierze L_{a_s} są ortogonalne, możemy (przechodząc do podciągu) założyć, że $L_{a_s} \longrightarrow L$, gdzie L jest ortogonalna. Wtedy $W_{a_s} = L_{a_s} r'(a_s) L_{a_s}^{-1} \longrightarrow L r'(a) L^{-1}$, co oznacza, że $\operatorname{rank} V_a = d$, a więc $a \in M_0$. □

---

(5) Zob. H. Federer, *Geometric measure theory*, Springer Verlag, Berlin, 1969, Theorem 3.1.20.

(6) Herbert Federer (1920–2010).

Twierdzenie 10.1.7. *Niech $M \in \mathcal{M}_d^k(\mathbb{R}^n)$, $d \geqslant 1$ i niech $p : P \longrightarrow U$, $q : Q \longrightarrow V$ będą dwiema lokalnymi parametryzacjami takimi, że $U \cap V \neq \varnothing$. Wtedy odwzorowanie $\varphi := p^{-1} \circ q : q^{-1}(U \cap V) \longrightarrow p^{-1}(U \cap V)$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$; odwzorowanie φ nosi nazwę* funkcji przejścia.

Dowód. Przypadek $d = n$ jest oczywisty. Załóżmy, że $d \leqslant n - 1$. Oczywiście, φ jest homeomorfizmem. Wystarczy więc sprawdzić, że jest klasy $\mathcal{C}^k$ (a następnie zamienić rolami p i q). Problem ma teraz charakter lokalny. Ustalmy $a \in U \cap V$ i niech $p(t_0) = a = q(u_0)$. Na podstawie twierdzenia o rzędzie istnieją otoczenie A_1 punktu t_0 w P, otoczenie A_2 punktu u_0 w Q, otoczenia B_1, B_2 punktu a w $\mathbb{R}^n$, dyfeomorfizmy klasy $\mathcal{C}^k$ $\alpha_j : \varDelta^d \longrightarrow A_j$, $\beta_j : B_j \longrightarrow \varDelta^n$, $j = 1, 2$, takie, że: $p(A_1) \subset B_1$, $q(A_2) \subset B_2$, $\alpha_1(0) = t_0$, $\alpha_2(0) = u_0$, $\beta_j(a) = 0$, $j = 1, 2$, $\beta_1 \circ p \circ \alpha_1(\xi) = (\xi, 0)$, $\xi \in \varDelta^d$, $\beta_2 \circ q \circ \alpha_2(\eta) = (\eta, 0)$, $\eta \in \varDelta^d$.

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "p"] & B_1\ B_2 \arrow[d, "\beta_1\ \beta_2"] & A_2 \arrow[l, "q"'] \\
\varDelta^d \arrow[u, "\alpha_1"] \arrow[r, "(\mathrm{id},0)"] & \varDelta^n & \varDelta^d \arrow[u, "\alpha_2"'] \arrow[l, "(\mathrm{id},0)"']
\end{tikzcd}$$

Stąd wynika, że na zbiorze $q^{-1}(p(A_1) \cap B_2)$ zachodzi równość

$$\varphi = p^{-1} \circ q = \alpha_1 \circ \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^d} \circ \beta_1 \circ \beta_2^{-1} \circ (\alpha_2^{-1}, 0),$$

która dowodzi, że φ jest klasy $\mathcal{C}^k$ w otoczeniu u_0. $\square$

Definicja 10.1.8. Niech $M \in \mathcal{M}_d^k(\mathbb{R}^n)$, $d \geqslant 1$ i niech F będzie dowolną przestrzenią unormowaną. Powiemy, że odwzorowanie $f : M \longrightarrow F$ jest *k–krotnie różniczkowalne w punkcie $a \in M$* ($f \in \mathcal{D}^k(M, F; a)$), jeżeli dla dowolnej parametryzacji lokalnej $p : P \longrightarrow U$ takiej, że $a \in U$, mamy $f \circ p \in \mathcal{D}^k(P, F; p^{-1}(a))$. Podobnie, powiemy, że odwzorowanie $f : M \longrightarrow F$ jest *klasy $\mathcal{C}^k$ na M* ($f \in \mathcal{C}^k(M, F)$), jeżeli dla dowolnej parametryzacji lokalnej $p : P \longrightarrow U$ odwzorowanie $f \circ p$ jest klasy $\mathcal{C}^k(P, F)$.

Obserwacja 10.1.9. (a) Zauważmy, że definiujemy tylko pojęcie różniczkowalności, ale nie definujemy $f^{(k)}(a)$.

(b) Dla $d = n$ wprowadzone powyżej pojęcia są zgodne ze standardowymi definicjami.

(c) $\mathcal{D}^k(M, F; a)$ i $\mathcal{C}^k(M, F)$ są przestrzeniami wektorowymi.

(d) Jeżeli $f \in \mathcal{D}^k(M, F; a)$ i $\psi \in \mathcal{D}^k(\varOmega, G; f(a))$, gdzie $\varOmega$ jest zbiorem otwartym w F, G jest przestrzenią unormowaną i $f(M) \subset \varOmega$, to $\psi \circ f \in \mathcal{D}^k(M, G; a)$.

(e) Jeżeli $f \in \mathcal{C}^k(M, F)$, $f(M) \subset \varOmega$ i $\psi \in \mathcal{C}^k(\varOmega, G)$, to $\psi \circ f \in \mathcal{C}^k(M, G)$.

Twierdzenie 10.1.10. *Dla dowolnego odwzorowania $f : M \longrightarrow F$ i punktu $a \in M$ następujące warunki są równoważne:*

(i) *$f \in \mathcal{D}^k(M, F; a)$;*

(ii) *istnieje lokalna parametryzacja $p : P \longrightarrow U$ taka, że $a \in U$ i $f \circ p \in \mathcal{D}^k(P, F; p^{-1}(a))$;*

(iii) *istnieje otoczenie $\varOmega \subset \mathbb{R}^n$ punktu a oraz $\widetilde{f} : \varOmega \longrightarrow F$ takie, że $\widetilde{f} \in \mathcal{D}^k(\varOmega, F; a)$ oraz $\widetilde{f} = f$ na $M \cap \varOmega$.*

Dowód. To, że (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) wynika wprost z Twierdzenia 10.1.7.

(i) $\Longrightarrow$ (iii): Niech $\varOmega$, P, p, s będą takie, jak w Twierdzeniu 10.1.4(viii). Przypomnijmy, że $p : P \longrightarrow M \cap \varOmega$ jest lokalną parametryzacją (por. dowód implikacji (viii) $\Longrightarrow$ (i) w Twierdzeniu 10.1.4). Zdefiniujmy $\widetilde{f} := (f \circ p) \circ s$. Oczywiście, $\widetilde{f} = f$ na $M \cap \varOmega$ oraz $\widetilde{f} \in \mathcal{D}^k(\varOmega, F; a)$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): Rozważmy dowolną parametryzację lokalną $p : P \longrightarrow U$ ($a \in U$) i niech $p(t_0) = a$. Niech $\varOmega$, $\widetilde{f}$ będą jak w (iii). Możemy założyć, że $U \subset \varOmega$. Wtedy $f \circ p = \widetilde{f} \circ p$, a stąd oczywiście wynika, że $f \circ p \in \mathcal{D}^k(P, F; t_0)$. $\square$

W ten sam sposób można wykazać następujący wynik (Ćwiczenie).

Twierdzenie 10.1.11. *Dla dowolnego odwzorowania $f : M \longrightarrow F$ następujące warunki są równoważne:*

(i) *$f \in \mathcal{C}^k(M, F)$;*

(ii) *dla dowolnego punktu $a \in M$ istnieje lokalna parametryzacja $p : P \longrightarrow U$ taka, że $a \in U$ i $f \circ p \in \mathcal{C}^k(P, F)$;*

(iii) *dla dowolnego punktu $a \in M$ istnieje otoczenie $\varOmega \subset \mathbb{R}^n$ oraz $\widetilde{f} \in \mathcal{C}^k(\varOmega, F)$ takie, że $\widetilde{f} = f$ na $M \cap \varOmega$.*

Obserwacja 10.1.12. (a) Jeżeli $p : P \longrightarrow U$ jest lokalną parametryzacją klasy $\mathcal{C}^k$, to $p^{-1} \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^d)$.

(b) Jeżeli $\varphi \in \mathcal{D}^k(\Omega, \mathbb{R}^n; u_0)$ ($\Omega \in \operatorname{top} E$, zaś E jest przestrzenią unormowaną), $\varphi(\Omega) \subset M$ i $f \in \mathcal{D}^k(M, F; \varphi(u_0))$, to $f \circ \varphi \in \mathcal{D}^k(\Omega, F; u_0)$.

Istotnie, wystarczy wykorzystać Twierdzenie 10.1.10(iii) i zauważyć, że w otoczeniu punktu u_0 mamy $f \circ \varphi = \widetilde{f} \circ \varphi$.

(c) Jeżeli $\varphi \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\varphi(\Omega) \subset M$ i $f \in \mathcal{C}^k(M, F)$, to $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^k(\Omega, F)$.

Istotnie, wystarczy wykorzystać lokalnie Twierdzenie 10.1.11(iii).

Definicja 10.1.13. Niech M będzie d–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$ w $\mathbb{R}^n$ ($1 \leqslant d \leqslant n$). Niech $a \in M$ i niech $p : P \longrightarrow U$ będzie dowolną lokalną parametryzacją taką, że $a \in U$. Przyjmijmy, że $a = p(t_0)$. Przestrzeń $T_aM := p'(t_0)(\mathbb{R}^d)$ nazywamy *przestrzenią styczną do M w punkcie a.*

Oczywiście, jeżeli $d = n$, to $T_aM = \mathbb{R}^n$.

Zauważmy, że definicja jest poprawna, bowiem na podstawie Twierdzenia 10.1.7, jeżeli $q : Q \longrightarrow V$ jest jakąś inną parametryzacją taką, że $q(u_0) = a$, to $q = p \circ \varphi$, gdzie φ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^1$, $\varphi(u_0) = t_0$. W szczególności, ponieważ $\varphi'(u_0)$ jest izomorfizmem, zatem $q'(u_0)(\mathbb{R}^d) = p'(t_0)(\varphi'(u_0)(\mathbb{R}^d)) = p'(t_0)(\mathbb{R}^d)$.

Przyjmujemy ponadto, że $T_aM := \{0\}$, jeżeli $d = 0$.

Oczywiście $\dim T_aM = d$.

Twierdzenie 10.1.14. *Niech M będzie d–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$ w $\mathbb{R}^n$ ($1 \leqslant d \leqslant n-1$), $a \in M$ i niech $\Omega \in \operatorname{top} \mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^\ell)$ będzie takie, że $a \in \Omega$, $M \cap \Omega = f^{-1}(0)$ i $\operatorname{rank} f'(x) = n - d$, $x \in \Omega$ (7). Wtedy $T_aM = \operatorname{Ker} f'(a)$.*

Dowód. Niech $V := \operatorname{Ker} f'(a)$. Odnotujmy, że $\dim V = d$. Niech $p : P \longrightarrow U$, $U \subset \Omega$, będzie dowolną lokalną parametryzacją, $p(t_0) = a$. Ponieważ $f \circ p \equiv 0$, zatem $f'(a) \circ p'(t_0) = 0$, a stąd $T_aM \subset V$, co wobec równości wymiarów, daje żądaną równość. $\square$

[Wykład 10.12.2020 . . . .]

Twierdzenie 10.1.15 (Równoważne opisy przestrzeni stycznej)**.** *Niech M będzie d–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$ w $\mathbb{R}^n$ ($1 \leqslant d \leqslant n-1$), $a \in M$, $X \in \mathbb{R}^n$. Następujące warunki są równoważne:*

(i) *$X \in T_aM$;*

(ii) *istnieje $\varepsilon > 0$ oraz odwzorowanie $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ klasy $\mathcal{C}^k$ (8) takie, że $\gamma(0) = a$, $\gamma'(0) = X$;*

(iii) *istnieją ciągi $(a_\nu)_{\nu=1}^\infty \subset M$, $(r_\nu)_{\nu=1}^\infty \subset (0, +\infty)$ takie, że $a_\nu \longrightarrow a$, $r_\nu(a_\nu - a) \longrightarrow X$ (9).*

Dowód. Dla $X = 0$ równoważność warunków jest oczywista. Przyjmujemy dalej, że $X \neq 0$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Niech $p : P \longrightarrow U$ będzie lokalną parametryzacją, $p(t_0) = a$. Niech $Y \in \mathbb{R}^d$ będzie taki, że $X = p'(t_0)(Y)$. Wtedy $X = \gamma'(0)$, gdzie $\gamma(\tau) := p(t_0 + \tau Y)$, $|\tau| < \varepsilon$ (ε małe).

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Wystarczy przyjąć $a_\nu := \gamma(\frac{1}{\nu})$, $r_\nu := \nu$, $\nu \gg 1$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): Niech $p : P \longrightarrow U$ będzie lokalną parametryzacją, $p(t_0) = a$. Możemy założyć, że $a_\nu = p(t_\nu)$, $t_\nu \in P$, $\nu \geqslant 1$. Oczywiście $t_\nu \longrightarrow t_0$ (10). Możemy również założyć, że $t_\nu \neq t_0$, $\nu \geqslant 1$, oraz (przechodząc do podciągu), że $Y_\nu := \frac{t_\nu - t_0}{\|t_\nu - t_0\|} \longrightarrow Y$ dla pewnego $Y \in \mathbb{R}^d$.

Zauważmy, że $r_\nu \|a_\nu - a\| \longrightarrow \|X\|$, a zatem $\frac{a_\nu - a}{\|a_\nu - a\|} \longrightarrow \frac{X}{\|X\|}$. Niech $p(t) = p(t_0) + p'(t_0)(t - t_0) + \alpha(t)\|t - t_0\|$, gdzie $\alpha(t) \longrightarrow 0$ przy $t \longrightarrow t_0$. Ostatecznie mamy:

$$\frac{X}{\|X\|} = \lim_{\nu \to +\infty} \frac{p'(t_0)(Y_\nu) + \alpha(t_\nu)}{\|p'(t_0)(Y_\nu) + \alpha(t_\nu)\|} = \frac{p'(t_0)(Y)}{\|p'(t_0)(Y)\|},$$

co kończy dowód (bo T_aM jest przestrzenią wektorową). $\square$

Twierdzenie 10.1.16. *Niech M będzie d–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$ w $\mathbb{R}^n$ ($1 \leqslant d \leqslant n - 1$), $a \in M$ i niech $f \in \mathcal{D}(M, F; a)$. Wtedy $\widetilde{f}'(a)|_{T_aM}$ nie zależy od wyboru lokalnego przedłużenia $\widetilde{f}$ różniczkowalnego w punkcie a (11).*

(7) Por. Twierdzenie 10.1.4(v).

(8) Jako odwzorowanie $(-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

(9) Odnotujmy czysto geometryczny charakter warunku (iii).

(10) Ponieważ p jest homeomorfizmem.

(11) Przedłużenie takie istnieje na mocy Twierdzenia 10.1.10((iii).

Dowód. Wystarczy pokazać, że jeżeli $g : \Omega \longrightarrow F$ jest odwzorowaniem różniczkowalnym w punkcie a i takim, że $g = 0$ na $M \cap \Omega$, to $g'(a)|_{T_a M} \equiv 0$.

Istotnie, niech $p : P \longrightarrow U$ będzie dowolną parametryzacją lokalną, $a = p(t_0) \in U \subset \Omega$. Mamy $g \circ p \equiv 0$. Zatem $g'(a) \circ p'(t_0) = 0$, co daje żądaną równość. $\square$

Definicja 10.1.17. W powyższej sytuacji kładziemy

$$f'(a) : T_a M \longrightarrow F, \quad f'(a) := \widetilde{f}'(a)|_{T_a M}.$$

Odnotujmy, że $f'(a) \in \mathcal{L}(T_a M, F)$. Odwzorowanie $f'(a)$ nazywamy *różniczką odwzorowania f w punkcie a*.

Twierdzenie 10.1.18. *Niech M będzie d–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$ w $\mathbb{R}^n$ i niech M' będzie d'–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$ w $\mathbb{R}^{n'}$. Niech $f : M \longrightarrow M'$ będzie różniczkowalne w punkcie $a \in M$. Wtedy $f'(a)(T_a M) \subset T_{f(a)} M'$. W szczególności, $f'(a) \in \mathcal{L}(T_a M, T_{f(a)} M')$.*

Jeżeli ponadto f jest bijektywne i f^{-1} jest klasy $\mathcal{C}^1$ (tzn. f jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^1$*), to $f'(a) \in \operatorname{Isom}(T_a M, T_{f(a)} M')$.*

Dowód. Załóżmy, że $M' \cap \Omega' = g^{-1}(0)$, gdzie $\Omega' \in \operatorname{top} \mathbb{R}^{n'}$, $g \in \mathcal{C}^1(\Omega', \mathbb{R}^{n'-d'})$, $\operatorname{rank} g'(y) = n' - d'$, $y \in \Omega'$, $f(a) \in \Omega'$ (por. Twierdzenie 10.1.4(vi)). Niech $\widetilde{f}$ będzie lokalnym przedłużeniem odwzorowania f na otoczenie Ω punktu a. Możemy założyć, że $\widetilde{f}(\Omega) \subset \Omega'$. Wtedy $g \circ \widetilde{f} = 0$ na $M \cap \Omega$, zatem $(g \circ \widetilde{f})'(a) = 0$ na $T_a M$ (por. Twierdzenie 10.1.16). Oznacza to, że $g'(f(a)) \circ \widetilde{f}'(a) = 0$ na $T_a M$, co wobec Twierdzenia 10.1.14, daje żądany wynik. $\square$

Prawdziwe jest następujące fundamentalne twierdzenie

Twierdzenie* 10.1.19 (Whitney, (12))**.** *Dla dowolnej d-wymiarowej ($d \geqslant 1$) podrozmaitości $M \subset \mathbb{R}^n$ klasy $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, istnieje d-wymiarowa podrozmaitość $M' \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ klasy $\mathcal{C}^\omega$ taka, że M i M' są $\mathcal{C}^k$-dyfeomorficzne.*

Uwaga 10.1.20. Dla rozmaitości klasy $\mathcal{C}^2$ i odwzorowań $f : M \longrightarrow F$ mających drugą pochodną w punkcie a należy oprzeć się pokusie zdefiniowania drugiej różniczki w punkcie a jako odwzorowania $f''(a) : T_a M \times T_a M \longrightarrow F$ danego wzorem $f''(a) = \widetilde{f}''(a)|_{T_a M \times T_a M}$, gdzie $\widetilde{f}$ jest lokalnym przedłużeniem f takim, że $\widetilde{f}''(a)$ istnieje.

Istotnie, $\widetilde{f}''(a)|_{T_a M \times T_a M}$ może zależeć od wyboru przedłużenia.

Niech np. $M := \{(t, t^2) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}$, $F := \mathbb{R}$, $f := 0$, $a := (0, 0)$. Zauważmy, że $T_a M = \mathbb{R} \times \{0\}$. Niech $\widetilde{f}(x, y) := x^2 - y$. Oczywiście $\widetilde{f}$ jest przedłużeniem f, ale $\widetilde{f}''(a)((h_1, 0), (h_2, 0)) = 2h_1 h_2$, $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$.

Lemat 10.1.21 (Lemat o jednoczesnej parametryzacji)**.** *Niech M będzie d–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$ w $\mathbb{R}^n$ i niech M' będzie d'–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$ w $\mathbb{R}^n$ taką, że $M' \subset M$. Wtedy*

(a) *$d' \leqslant d$;*

(b) *jeżeli $d' = d$, to M' jest podzbiorem otwartym w M;*

(c) *jeżeli $d' < d \leqslant n$, to dla dowolnego punktu $a \in M'$ istnieje lokalna parametryzacja $p : \Delta^d \longrightarrow U$ podrozmaitości M, $a \in U$, taka, że $p(0) = a$ i $p(\Delta^{d'} \times \{0\}^{d-d'}) = M' \cap U$ (13).*

W szczególności, jeżeli $d' \geqslant 1$, to odwzorowanie $\widetilde{p} : \Delta^{d'} \longrightarrow M' \cap U$, $\widetilde{p}(v) := p(v, 0)$, jest lokalną parametryzacją dla M' (14).

Dowód. Dla $d' = 0$ twierdzenie jest oczywiste. Załóżmy, że $d' \geqslant 1$. W szczególności, $d \geqslant 1$.

(a) Wobec Twierdzenia 10.1.15(ii) mamy: $T_a M' \subset T_a M$, $a \in M'$. Stąd $d' = \dim T_a M' \leqslant \dim T_a M = d$.

(b) Weźmy dowolny punkt $a \in M'$ i niech $p : P \longrightarrow U$, $q : Q \longrightarrow V$ będą parametryzacjami lokalnymi dla M i M' takimi, że $a \in U \cap V$ ($P, Q \in \operatorname{top} \mathbb{R}^d$). Możemy założyć, że $V = U \cap M'$. Rozważmy homeomorfizm $\varphi := p^{-1} \circ q : Q \longrightarrow p^{-1}(V)$. Na podstawie Obserwacji 10.1.12 jest to odwzorowanie klasy $\mathcal{C}^k$. Mamy $p \circ \varphi = q$. W szczególności, $p'(\varphi(u)) \circ \varphi'(u) = q'(u)$, skąd wynika, że $\operatorname{rank} \varphi'(u) = d$, $u \in Q$.

---

(12) Zob. H. Whitney, *Differentiable manifolds*, Annals Math. 37 (1936), 645–680, Ch. II, § 8.

(13) Dla $d' = 0$ warunek ten oznacza, że $p(0) = M' \cap U$.

(14) Uwaga na warunek: $\operatorname{rank} \widetilde{p}'(v) = d'$, $v \in \Delta^{d'}$.

Teraz, na podstawie np. twierdzenia o odwzorowaniu odwrotnym, $p^{-1}(V)$ jest podzbiorem otwartym w P, a więc $U \cap M'$ jest zbiorem otwartym w M.

(c) Weźmy dowolną parametryzację lokalną $p : P \longrightarrow U$ podrozmaitości M taką, że $a = p(t_0) \in U$. Niech $N := p^{-1}(M' \cap U)$. Zauważmy, że N jest d'–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$ w $\mathbb{R}^d$. Istotnie, dla dowolnego $u_0 \in N$, niech $q : Q \longrightarrow V$ będzie lokalną parametryzacją klasy $\mathcal{C}^k$ podrozmaitości M' i $p(u_0) \in V \subset M' \cap U$. Niech $\varphi := p^{-1} \circ q : Q \longrightarrow p^{-1}(V)$. Oczywiście, tak jak w (b), φ jest homeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$ i $p'(\varphi(u)) \circ \varphi'(u) = q'(u)$, $u \in Q$. Stąd $\operatorname{rank} \varphi'(u) = d'$, $u \in Q$. Tak więc φ jest lokalną parametryzacją podrozmaitości N w otoczeniu u_0.

Teraz, na podstawie Twierdzenia 10.1.4(iii) (zastosowanego do podrozmaitości N) istnieją zbiór otwarty $\Omega \in \operatorname{top} P$, $t_0 \in \Omega$, oraz $\mathcal{C}^k$–dyfeomorfizm $\Phi : \Omega \longrightarrow \Delta^d$ takie, że $\Phi(N \cap \Omega) = \Delta^{d'} \times \{0\}^{d-d'}$.

Poszukiwaną parametryzacją będzie: $p \circ \Phi^{-1} : \Delta^d \longrightarrow p(\Omega)$. □

[Wykład 14.12.2020 . . . .]

Obecnie pokażemy następującą prostszą wersję twierdzenia o globalnej retrakcji.

Twierdzenie 10.1.22. *Dla dowolnej d–wymiarowej podrozmaitości M klasy $\mathcal{C}^k$ ($k \in \mathbb{N}_2 \cup \{\infty, \omega\}$) istnieje otoczenie otwarte $M \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ oraz globalna retrakcja $\pi : \Omega \longrightarrow M$ klasy $\mathcal{C}^{k-1}$ taka, że dla dowolnego $x \in \Omega$ mamy $\|x - \pi(x)\| = \operatorname{dist}(x, M)$, przy czy punkt $\pi(x)$ jest jedynym punktem realizującym tę odległość (norma i odległość są euklidesowe).*

Dowód. Możemy założyć, że $1 \leqslant d \leqslant n-1$. Rozpocznijmy od elementarnej obserwacji, że dla $a \in M$ oraz $x \in \mathbb{B}(a, r)$ mamy $\operatorname{dist}(x, M) = \operatorname{dist}(x, M \cap \mathbb{B}(a, 3r))$ (Ćwiczenie). Pozwala to na lokalizację problemu. Ponadto, problem jest oczywiście niezmienniczy względem izometrii euklidesowych. Pozwala to dla dowolnego $a \in M$ na przejście do następującego zagadnienia lokalnego. Najpierw redukujemy sytuację do $a = 0$ oraz $T_a M = \mathbb{R}^d \times \{0\}^{n-d}$. Niech $p : P \longrightarrow U$ będzie dowolną lokalną parametryzacją, $0 \in P$, $p(0) = 0 \in U$. Warunek $p'(0)(\mathbb{R}^d) = \mathbb{R}^d \times \{0\}^{n-d}$ oznacza, że $\frac{\partial p_j}{\partial u_k}(0) = 0$, $j = d+1, \dots, n$, $k = 1, \dots, d$. Wynika stąd, że $\det[\frac{\partial p_j}{\partial u_k}(0)]_{j,k=1,\dots,d} \neq 0$. Wobec twierdzenia o odwzorowaniu odwrotnym, możemy więc założyć, że $\psi := (p_1, \dots, p_d) : P \longrightarrow Q$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$. Wtedy $q := p \circ \psi^{-1} : Q \longrightarrow U$ oraz $q(t) = (t, f(t))$, przy czym $f(0) = 0$ oraz $f'(0) = 0$ [15]. Ostatecznie więc mamy:

$M := \{(t, f(t)) : t \in \Delta^d(r)\}$, gdzie $\Delta^\ell(r) := (-r, r)^\ell \subset \mathbb{R}^\ell$, $f : \Delta^d(r) \longrightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ jest klasy $\mathcal{C}^k$ oraz $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$.

W konsekwencji, dla $x = (x', x'') \in \Delta^d(s) \times \Delta^{n-d}(s)$ przy $0 < s \ll 1$ mamy

$$\operatorname{dist}^2(x, M) = \min\{\|t - x'\|^2 + \|f(t) - x''\|^2 : t \in \Delta^d(r)\} =: \min\{g(x, t) : t \in \Delta^d(r)\}.$$

Jedynego punktu realizującego odległość będziemy szukać w postaci $(\varphi(x), f(\varphi(x)))$, gdzie $\varphi : \Delta^n(s) \longrightarrow \Delta^d(r)$ jest klasy $\mathcal{C}^{k-1}$ (wtedy będziemy mogli przyjąć $\pi(x) := (\varphi(x), f(\varphi(x)))$, $x \in \Delta^n(s)$, $0 < s \ll 1$). Zauważmy, że

$$\frac{\partial g}{\partial t_k}(x, t) = 2\Big(t_k - x_k + \sum_{j=1}^{n-d} (f_j(t) - x_{d+j}) \frac{\partial f_j}{\partial t_k}(t)\Big) =: 2F_k(x, t), \quad k = 1, \dots, d.$$

Tak więc, w otoczeniu punktu $(0, 0)$, $t = \varphi(x)$ powinno być jedynym rozwiązaniem układu równań $F_k(x, t) = 0$, $k = 1, \dots, d$. Oczywiście F_k jest klasy $\mathcal{C}^{k-1}$. Ponadto, $F(0, 0) = 0$ oraz

$$\frac{\partial F_k}{\partial t_\ell}(x, t) = \delta_{k,\ell} + \sum_{j=1}^{n-d} \Big(\frac{\partial f_j}{\partial t_\ell}(t) \frac{\partial f_j}{\partial t_k}(t) + (f_j(t) - x_{d+j}) \frac{\partial^2 f_j}{\partial t_\ell \partial t_k}(t)\Big).$$

W szczególności,

$$\Big[\frac{\partial F_k}{\partial t_\ell}(0, 0)\Big]_{k,\ell=1,\dots,d} = \mathbb{I}_d.$$

W takim razie, na podstawie twierdzenia o odwzorowaniu uwikłanym, istnieją $0 < s_1, r_1 \ll 1$ oraz odwzorowanie $\varphi : \Delta^n(s_1) \longrightarrow \Delta^d(r_1)$ klasy $\mathcal{C}^{k-1}$ takie, że $t = \varphi(x)$ jest jedynym rozwiązaniem naszego układu dla $(x, t) \in \Delta^n(s_1) \times \Delta^d(r_1)$. Teraz wystarczy jeszcze tylko dobrać $0 < s < s_1$ tak by dla $x \in \Delta^n(s)$ było $\operatorname{dist}(x, M) = \operatorname{dist}(x, M \cap (\Delta^d(r_1) \times \mathbb{R}^{n-d}))$. □

---

[15] Zauważmy, że nasza konstrukcja pokazuje, że lokalnie M jest wykresem nad afiniczną przestrzenią styczną $a + T_a M$ (dla dowolnego $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$).

Przykład 10.1.23. Twierdzenie 10.1.22 nie jest prawdziwe dla $k = 1$. Niech $\theta \in (0, 1)$,

$$M := \{(t, |t|^{1+\theta}) : t \in \mathbb{R}\};$$

M jest jednowymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$, przy czym $T_0M = \mathbb{R} \times \{0\}$ (Ćwiczenie). Pokażemy, że dla dowolnego $y > 0$ istnieje $t > 0$ takie, że

$$\operatorname{dist}^2((0, y), M) \leqslant \|(0, y) - (t, t^{1+\theta})\|^2 = t^2 + (y - t^{1+\theta})^2 < y^2 = \|(0, y) - (0, 0)\|^2.$$

Oznacza to, że istnieją co najmniej dwa punkty rozmaitości M realizujące odległość. W konsekwencji ciągła retrakcja $\pi : \Omega \longrightarrow M$ taka, jak w Twierdzeniu 10.1.22 nie może istnieć.

Istotnie, warunek $t^2 + (y - t^{1+\theta})^2 < y^2$ oznacza, że $y > \frac{1}{2}(t^{1-\theta} + t^{1+\theta})$, co pozwala zawsze dobrać t.

10.2. Ekstrema warunkowe

Rozważmy następujący problem. Dane są: $M \in \mathcal{M}_d^k(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leqslant d \leqslant n - 1)$, punkt $a \in M$ i funkcja $f \in \mathcal{D}^k(M; a)$. Problem polega na znalezieniu (różniczkowych) warunków koniecznych i dostatecznych na to, by f miała w punkcie a ekstremum lokalne, zwane *ekstremum warunkowym*. Nazwa bierze się stąd, że ponieważ problem ma charakter lokalny, to możemy założyć (korzystając z Twierdzenia 10.1.10 i zmniejszając ewentualnie M), że $f = \widetilde{f}|_M$, gdzie $\widetilde{f} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $M \subset \Omega \in \operatorname{top} \mathbb{R}^n$ i $\widetilde{f}$ jest k–krotnie różniczkowalne w punkcie a, a zatem szukamy ekstremów lokalnych funkcji $\widetilde{f}$ przy warunku „punkt leży na M”.

Twierdzenie 10.2.1 (Warunek konieczny na ekstremum warunkowe)**.** *Jeżeli f ma w punkcie a ekstremum warunkowe, to $f'(a) = 0$.*

Dowód. Niech $p : P \longrightarrow U$ będzie lokalną parametryzacją, $p(t_0) = a$. Wtedy $\widetilde{f} \circ p$ ma ekstremum lokalne w punkcie t_0, a zatem $f'(a) \circ p'(t_0) = 0$, co daje żądany wynik. □

Twierdzenie 10.2.2 (Warunek dostateczny na ekstremum warunkowe)**.** *Załóżmy, że dla pewnego $k \geqslant 2$ mamy:*

$$\widetilde{f}'(a) = 0 \text{ na } \mathbb{R}^n, \dots, \widetilde{f}^{(k-1)}(a) = 0 \text{ na } \mathbb{R}^n, \quad \widetilde{f}^{(k)}(a) \not\equiv 0 \text{ na } T_aM.$$

Wtedy:

(a) *jeżeli $\widetilde{f}^{(k)}(a)(X) > 0$ dla $X \in (T_aM)_*$ (16), to f ma w punkcie a silne minimum warunkowe;*

(b) *jeżeli $\widetilde{f}^{(k)}(a)(X) < 0$ dla $X \in (T_aM)_*$, to f ma w punkcie a silne maksimum warunkowe;*

(c) *jeżeli $\widetilde{f}^{(k)}(a)$ przyjmuje na T_aM wartości różnych znaków (17), to f nie ma w punkcie a lokalnego ekstremum warunkowego.*

Dowód. Niech $p : P \longrightarrow U$ będzie dowolną lokalną parametryzacją, $p(t_0) = a$. Niech $g := \widetilde{f} \circ p$. Musimy zbadać ekstremum lokalne (w sensie klasycznym) funkcji g w punkcie t_0. Ze wzoru na pochodną złożenia (Twierdzenie 9.8.6), dla $j = 1, \dots, k$, mamy

$$\begin{aligned} g^{(j)}(t_0)(Y) &= (\widetilde{f} \circ p)^{(j)}(t_0)(Y) \\ &= \sum_{\alpha \in \Pi_j} \frac{j!}{\alpha!} \widetilde{f}^{(\alpha_1 + \dots + \alpha_j)}(a)\Big(\underbrace{\frac{p'(t_0)(Y)}{1!}, \dots, \frac{p'(t_0)(Y)}{1!}}_{\alpha_1 \times}, \dots, \underbrace{\frac{p^{(j)}(t_0)(Y)}{j!}, \dots, \frac{p^{(j)}(t_0)(Y)}{j!}}_{\alpha_j \times}\Big), \quad Y \in \mathbb{R}^d, \end{aligned}$$

co wobec naszych założeń daje

$$g^{(j)}(t_0) = 0, \quad j = 1, \dots, k - 1, \qquad g^{(k)}(t_0)(Y) = \widetilde{f}^{(k)}(a)(p'(t_0)(Y)), \quad Y \in \mathbb{R}^d.$$

Przypomnijmy, że $p'(t_0)(Y) \in (T_aM)_*$ dla $Y \in (\mathbb{R}^d)_*$, a zatem $g^{(k)}(t_0)$ zachowuje się (w sensie określoności) tak, jak $\widetilde{f}^{(k)}(a)$ na T_aM. Teraz wystarczy już tylko zastosować klasyczne twierdzenie o ekstremach lokalnych. □

---

(16) W szczególności, k musi być parzyste.

(17) W szczególności, gdy k jest nieparzyste.

Obserwacja 10.2.3. (a) Z dowodu Twierdzenia 10.2.2 wynika, że odwzorowanie $\widetilde{f}^{(k)}(a)|_{(T_aM)^k}$ nie zależy od wyboru rozszerzenia $\widetilde{f}$ (w klasie rozszerzeń spełniających założenia twierdzenia). Tak więc wystarczy zbadać określoność $\widetilde{f}^{(k)}(a)$ na T_aM dla jednego ustalonego rozszerzenia $\widetilde{f}$ funkcji f takiego, że $\widetilde{f}^{(j)}(a) = 0$, $j = 1, \dots, k-1$ (k parzyste).

(b) Niech $k = 2$. Zauważmy, że warunek $\widetilde{f}'(a) = 0$ nie może zostać zastąpiony warunkiem $f'(a) = 0$. Niech np. $n = 2$, $M := \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$, $a = (0, 0)$, $f(x, x^2) := x^3$ (oczywiście f nie ma ekstremum warunkowego w punkcie a). Niech $\widetilde{f}(x, y) = x^2 - y + x^3$. Widać, że $\widetilde{f} = f$ na M. Ponadto, $f'(a) = 0$ na $T_aM = \mathbb{R} \times \{0\}$ i $\widetilde{f}''(a)((h, 0)) = 2h^2$, $h \in \mathbb{R}$ (a więc spełniony jest warunek (a) z Twierdzenia 10.2.2).

(c) Patrząc na Twierdzenie 10.2.2 (i pamiętając o (a)) widzimy, iż przeszkodą w stosowaniu Twierdzenia 10.2.2 będzie następująca sytuacja: Dla pewnego $1 \leqslant m \leqslant k-1$ znaleźliśmy rozszerzenie $\widetilde{f}$ takie, że:

- $\widetilde{f}$ jest k–krotnie różniczkowalne w punkcie a,
- $\widetilde{f}^{(j)}(a) = 0$, $j = 1, \dots, m-1$ (warunek ten jest pusty dla $m = 1$),
- $\widetilde{f}^{(m)}(a) \neq 0$,
- $\widetilde{f}^{(m)}(a) = 0$ na T_aM (dla $m = 1$ jest to po prostu warunek konieczny na ekstremum warunkowe).

Rozszerzenie takie na nic się nam nie przyda. Pytamy więc, czy możemy znaleźć inne rozszerzenie takie, że $\widetilde{f}^{(j)}(a) = 0$, $j = 1, \dots, m$. Jeżeli tak, to będziemy mieli pewną szansę, że Twierdzenie 10.2.2 rozstrzygnie o ekstremum.

Możemy zawsze założyć, że $M \cap \Omega = g^{-1}(0)$, gdzie $g \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^\ell)$ i $\operatorname{rank} g'(x) = n - d$, $x \in \Omega$. Zauważmy, że dla dowolnego odwzorowania $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_\ell) \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^\ell)$, odwzorowanie

$$\widetilde{f}_\varphi := \widetilde{f} - \varphi_1 g_1 - \dots - \varphi_\ell g_\ell$$

jest przedłużeniem f oraz, że jest ono k–krotnie różniczkowalne w punkcie a.

[Wykład 17.12.2020 . . . .]

Twierdzenie 10.2.4 (Metoda mnożników Lagrange'a)**.** (a) *Dla $m = 1$, jeżeli $f'(a) = 0$ na T_aM, to istnieje $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$ takie, że dla funkcji $\widetilde{f}_\lambda := \widetilde{f} - \lambda_1 g_1 - \dots - \lambda_\ell g_\ell$ spełniony jest związek $\widetilde{f}'_\lambda(a) = 0$ na $\mathbb{R}^n$. Liczby $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ noszą nazwę* mnożników Lagrange'a.

(b) *Dla $2 \leqslant m \leqslant k-1$, jeżeli*

- *$\widetilde{f}$ jest k–krotnie różniczkowalne w punkcie a,*
- *$\widetilde{f}^{(j)}(a) = 0$, $j = 1, \dots, m-1$,*
- *$\widetilde{f}^{(m)}(a) = 0$ na T_aM,*

to istnieją wielomiany jednorodne $Q_1, \dots, Q_\ell \in \mathcal{H}^{m-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ takie, że dla odwzorowania

$$\widetilde{f}_Q(x) := \widetilde{f}(x) - \frac{1}{m!} \sum_{i=1}^{\ell} Q_i(x-a) g_i(x), \quad x \in \Omega,$$

mamy: $\widetilde{f}_Q^{(j)}(a) = 0$, $j = 1, \dots, m$.

Dowód. (a) Przypomnijmy, że $T_aM = \operatorname{Ker} g'(a)$ (Twierdzenie 10.1.14). W tej sytuacji warunek $\widetilde{f}'(a) = 0$ na T_aM oznacza, że $\operatorname{Ker} g_1'(a) \cap \dots \cap \operatorname{Ker} g_\ell'(a) \subset \operatorname{Ker} \widetilde{f}'(a)$, a to, na podstawie znanych wyników z algebry, implikuje istnienie λ (zob. dowód (b)).

(b) Na wstępie zauważmy, że dla dowolnych $Q_1, \dots, Q_\ell \in \mathcal{H}^{m-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, na podstawie wzoru Leibniza, mamy:

$$\widetilde{f}_Q^{(j)}(a)(h) = \widetilde{f}^{(j)}(a)(h) - \frac{1}{m!} \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{s=0}^{j} \binom{j}{s} Q_i^{(s)}(0)(h) g_i^{(j-s)}(a)(h), \quad h \in \mathbb{R}^n, \ j = 1, \dots, m.$$

Przypomnijmy, że $Q_i^{(s)} \in \mathcal{H}^{m-1-s}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$. W szczególności, mamy $Q_i^{(s)}(0) = 0$ dla $s = 0, \dots, m-2$. Z drugiej strony $g_i(a) = 0$. Tak więc dla $j = 1, \dots, m-1$, otrzymujemy $\widetilde{f}_Q^{(j)}(a)(h) = 0$. Wiemy, że $Q_i^{(m-1)}(0) = (m-1)! Q_i$. Stąd dla $j = m$ mamy:

$$\widetilde{f}_Q^{(m)}(a)(h) = \widetilde{f}^{(m)}(a)(h) - \frac{1}{m!} \sum_{i=1}^{\ell} \binom{m}{m-1} Q_i^{(m-1)}(0)(h) g_i'(a)(h) = \widetilde{f}^{(m)}(a)(h) - \sum_{i=1}^{\ell} Q_i(h) g_i'(a)(h),$$

$h \in \mathbb{R}^n.$

Tak więc cały problem sprowadza się do doboru $Q_i \in \mathcal{H}^{m-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $i = 1, \dots, \ell$, w ten sposób by

$$\widetilde{f}^{(m)}(a)(h) = \sum_{i=1}^{\ell} Q_i(h) g_i'(a)(h), \quad h \in \mathbb{R}^n.$$

Ponieważ $W := \widetilde{f}^{(m)}(a) \in \mathcal{H}^m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ i $W = 0$ na $T_a M$, zatem wystarczy już tylko wykorzystać znane wyniki z algebry, aby stwierdzić, że W da się przedstawić w żądanej postaci. Możemy skorzystać np. z takiego rozumowania: Niech $L_1, \dots, L_{n-d}$ będzie dowolnym liniowo niezależnym podukładem układu $g_1'(a), \dots, g_\ell'(a)$. Wybierzmy d form liniowych $L_{n-d+1}, \dots, L_n$ w ten sposób, że odwzorowanie $L := (L_1, \dots, L_n) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ jest izomorfizmem. Niech $V := W \circ L^{-1}$. Wtedy $V \in \mathcal{H}^m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ i $V = 0$ na $\{0\}^{n-d} \times \mathbb{R}^d$. Oznacza to, że wielomian V można zapisać w postaci $V(x) = x_1 V_1(x) + \dots + x_{n-d} V_{n-d}(x)$, gdzie $V_i \in \mathcal{H}^{m-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $i = 1, \dots, n-d$ (postać tę łatwo uzyskać przez zwykłe grupowanie wyrazów z wykorzystaniem warunku $V(0, \dots, 0, x_{n-d+1}, \dots, x_n) \equiv 0$). Zdefiniujmy $Q_i := V_i \circ L$, $i = 1, \dots, n-d$. Ostatecznie $W = Q_1 L_1 + \dots + Q_{n-d} L_{n-d}$. $\square$

Przykład 10.2.5. Niech $M := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + \dots + x_n = c,\ x_1, \dots, x_n > 0\}$, gdzie $n \geqslant 2$ i $c > 0$ jest ustaloną stałą (M jest $(n-1)$–wymiarową podrozmaitością w $\mathbb{R}^n$). Niech dalej $\widetilde{f}(x_1, \dots, x_n) := x_1 \cdots x_n$. Szukamy ekstremów warunkowych $\widetilde{f}$ na M.

Stosujemy metodę mnożników Lagrange'a. Niech $\widetilde{f}_\lambda(x) := \widetilde{f}(x) - \lambda(x_1 + \dots + x_n - c)$. Punkt podejrzany o ekstremum warunkowe, to punkt $a \in M$ taki, że

$$\frac{\partial \widetilde{f}_\lambda}{\partial x_j}(a) = \prod_{k \neq j} a_k - \lambda = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Dostajemy stąd łatwo $a = (c/n, \dots, c/n)$ i $\lambda = (c/n)^{n-1}$. Teraz przechodzimy do badania zachowania się $\widetilde{f}_\lambda''(a)$ na $T_a M$. Oczywiście $T_a M = \{(X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n : X_1 + \dots + X_n = 0\}$, zaś

$$\widetilde{f}_\lambda''(a)(X) = \sum_{j \neq k} \Big(\frac{c}{n}\Big)^{n-2} X_j X_k, \quad X \in \mathbb{R}^n.$$

Wynika stąd, że

$$\widetilde{f}_\lambda''(a)(X) = -\Big(\frac{c}{n}\Big)^{n-2} \|X\|^2 < 0, \quad X \in (T_a M)_*,$$

a więc $\widetilde{f}$ ma w punkcie a maksimum warunkowe, czyli

$$x_1 \cdots x_n \leqslant \Big(\frac{c}{n}\Big)^n = \Big(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\Big)^n, \quad x_1, \dots, x_n \geqslant 0.$$

10.3. Orientacja

Definicja 10.3.1. Niech E będzie n–wymiarową rzeczywistą przestrzenią wektorową ($1 \leqslant n < \infty$) i niech $\boldsymbol{B}(E)$ oznacza rodzinę wszystkich baz E. Dla dowolnych dwóch baz $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_n)$, $\boldsymbol{f} = (f_1, \dots, f_n) \in \boldsymbol{B}(E)$ niech $A = A(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})$ oznacza macierz przejścia od $\boldsymbol{e}$ do $\boldsymbol{f}$, tzn. $f_j = \sum_{k=1}^{n} A_{k,j} e_k$, $j = 1, \dots, n$.

Oczywiście $A(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}) = \mathrm{id}$, $A(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}) = A(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})^{-1}$, $A(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{g}) = A(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}) \cdot A(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g})$. W zbiorze $\boldsymbol{B}(E)$ wprowadzamy relację $\boldsymbol{e} \sim \boldsymbol{f} :\Longleftrightarrow \det A(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}) > 0$. Jest to relacja równoważnościowa. Niech $\mathcal{O}(E) := \boldsymbol{B}(E)/\!\sim$. Każdą klasę równoważności z $\mathcal{O}(E)$ nazywamy *orientacją* E.

Dla bazy $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_n)$ niech $\widehat{\boldsymbol{e}} := (-e_1, e_2, \dots e_n)$. Zauważmy, że $\det A(\boldsymbol{e}, \widehat{\boldsymbol{e}}) = -1 < 0$, a więc $\boldsymbol{e} \not\sim \widehat{\boldsymbol{e}}$, czyli $[\boldsymbol{e}]_\sim \neq [\widehat{\boldsymbol{e}}]_\sim$. Ponadto, dla dowolnej bazy $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{B}(E)$ albo $\boldsymbol{f} \sim \boldsymbol{e}$ albo $\boldsymbol{f} \sim \widehat{\boldsymbol{e}}$. Oznacza to, że na E istnieją dokładnie dwie orientacje. Żadna z nich nie jest wyróżniona. Jeżeli ustalimy jedną, np. O, to drugą oznaczamy przez $-O$.

W przypadku gdy $E = \mathbb{R}^n$, możemy wyróżnić orientację wyznaczoną przez bazę kanoniczną. Orientację tę oznaczamy przez $[\mathbb{R}^n]_+$ i nazywamy *orientacją kanoniczną*. Niech $[\mathbb{R}^n]_- := -[\mathbb{R}^n]_+$. Dla $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_n) \in \boldsymbol{B}(\mathbb{R}^n)$, $e_j = (e_{j,1}, \dots, e_{j,n})$, $j = 1, \dots, n$ mamy: $[\boldsymbol{e}]_\sim = [\mathbb{R}^n]_+ \iff \det[e_{j,k}] > 0$.

Jest oczywiste, że dowolny izomorfizm $L : E \longrightarrow F$ generuje bijekcję $\mathcal{O}(E) \longrightarrow \mathcal{O}(F)$, $[\boldsymbol{e}]_\sim \longmapsto [L(\boldsymbol{e})]_\sim$.

Jeżeli $E = F \oplus G$, $\dim F = p$, $\dim G = q$, $p, q \geqslant 1$, $p + q = n$, to mamy naturalne odwzorowanie $\varTheta : \boldsymbol{B}(F) \times \boldsymbol{B}(G) \longrightarrow \boldsymbol{B}(E)$ dane wzorem $\varTheta((f_1, \dots, f_p), (g_1, \dots, g_q)) := (e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q)$. Jeżeli ustalimy jakąś orientację $O_0 \in \mathcal{O}(E)$, to $\varTheta$ indukuje odwzorowanie $\varPhi : \mathcal{O}(F) \longrightarrow \mathcal{O}(G)$ poprzez relację $\varPhi([\boldsymbol{f}]_\sim) = [\boldsymbol{g}]_\sim :\iff [\varTheta(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g})]_\sim = O_0$. Zauważmy, że $A(\varTheta(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}), \varTheta(\boldsymbol{f}', \boldsymbol{g}')) = \begin{bmatrix} A(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}') & 0 \\ 0 & A(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{g}') \end{bmatrix}$, a więc $\varPhi$ jest dobrze określone i injektywne. Ponadto, dla dowolnych $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{B}(F)$ i $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{B}(G)$ albo $\varPhi([\boldsymbol{f}]_\sim) = [\boldsymbol{g}]_\sim$ albo $\varPhi([\widehat{\boldsymbol{f}}]_\sim) = [\boldsymbol{g}]_\sim$, a więc $\varPhi$ jest bijekcją. W tym sensie „zadać orientację F” to to samo, co „zadać orientację G” (przy ustalonej orientacji O_0).

Powyższą konstrukcję będziemy stosować do sytuacji: $E = \mathbb{R}^n$, $F = V$, $1 \leqslant \dim V = d \leqslant n - 1$, $G = V^\perp := \{a \in \mathbb{R}^n : \forall_{x \in V} : \langle a, x \rangle = 0\}$, gdzie $\langle\ ,\ \rangle$ oznacza standardowy iloczyn skalarny, $O_0 = [\mathbb{R}^n]_+$. Dla $O \in \mathcal{O}(V)$ będziemy krótko pisać $O^\perp := \varPhi(O)$.
[Wykład 21.12.2020 . . . .]

Definicja 10.3.2. Niech teraz $M \in \mathcal{M}^1_d(\mathbb{R}^n)$. Jeżeli $d = 0$, to przez *orientację* M rozumiemy dowolne odwzorowanie $O : M \longrightarrow \{-1, +1\}$.

Jeżeli $d \geqslant 1$, to przez *orientację* M rozumiemy dowolne odwzorowanie $M \ni x \overset{O}{\longmapsto} O(x) \in \mathcal{O}(T_x M)$ takie, że dla dowolnego punktu $a \in M$ istnieje lokalna parametryzacja $p : P \longrightarrow U$, $a \in U$, taka, że $O(p(t)) = p'(t)([\mathbb{R}^d]_+)$, $t \in P$. W tej sytuacji mówimy, że parametryzacja $p : P \longrightarrow U$ jest *zgodna z orientacją* O.

Niech $\mathcal{O}(M)$ oznacza zbiór wszystkich orientacji M. Powiemy, że rozmaitość jest *orientowalna*, jeżeli $\mathcal{O}(M) \neq \varnothing$. Dalej zajmować się będziemy jedynie przypadkiem $d \geqslant 1$.

Obserwacja 10.3.3. (a) Niech $p : P \longrightarrow U$, $q : Q \longrightarrow U$ będą dwiema parametryzacjami i niech $\varphi := p^{-1} \circ q : Q \longrightarrow P$. Wiadomo, że $\det \varphi'(u) \neq 0$, $u \in Q$. Niech $\varepsilon(u) := \operatorname{sgn}(\det \varphi'(u))$, $u \in Q$. Ponieważ $q = p \circ \varphi$, zatem $q'(u)([\mathbb{R}^d]_+) = p'(\varphi(u))(\varphi'(u)([\mathbb{R}^d]_+)) = p'(\varphi(u))(\varepsilon(u)[\mathbb{R}^d]_+) = \varepsilon(u)p'(\varphi(u))([\mathbb{R}^d]_+)$, $u \in Q$.

(b) Dla dowolnej parametryzacji $p : P \longrightarrow U$ niech $\widehat{p} : \widehat{P} \longrightarrow U$ będzie dane wzorem: $\widehat{p} := p \circ \widehat{I}$, $\widehat{P} := \widehat{I}^{-1}(P)$, gdzie $\widehat{I} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $\widehat{I}(t) = \widehat{t} := (-t_1, t_2, \dots, t_d)$. Widać, że $\widehat{p} : \widehat{P} \longrightarrow U$ jest również lokalną parametryzacją. Ponadto, na podstawie (a), jeżeli $p : P \longrightarrow U$ jest zgodna z O, to $\widehat{p}'(t)([\mathbb{R}^d]_+) = -p'(\widehat{t})([\mathbb{R}^d]_+) = -O(p(\widehat{t}))$, $t \in \widehat{P}$. Wynika stąd, że $-O \in \mathcal{O}(M)$, gdzie $(-O)(x) := -O(x)$, $x \in M$.

(c) Jeżeli $p : P \longrightarrow U$ jest parametryzacją zgodną z O taką, że P jest obszarem, to, na podstawie (a), dowolna parametryzacja $q : Q \longrightarrow U$ jest zgodna albo z O albo z $-O$ (bowiem funkcja ε, jako funkcja ciągła o wartościach w $\{-1, +1\}$, jest stała).

Definicja 10.3.4. Niech $\mathcal{A} = (p_i : P_i \longrightarrow U_i)_{i \in I}$ będzie dowolnym *atlasem na* M. Jeżeli każda z parametryzacji $p_i : P_i \longrightarrow U_i$ jest zgodna z orientacją O, to mówimy, że atlas $\mathcal{A}$ jest *zgodny z* O.

Na podstawie Obserwacji 10.3.3(a) otrzymujemy bez trudu następujący wynik.

Twierdzenie 10.3.5. *Jeżeli $\mathcal{A} = (p_i : P_i \longrightarrow U_i)_{i \in I}$ jest atlasem zgodnym z orientacją O, to dla odwzorowań przejścia $\varphi_{i,j} := p_i^{-1} \circ p_j : p_j^{-1}(U_i \cap U_j) \longrightarrow p_i^{-1}(U_i \cap U_j)$ mamy:*

$$\det \varphi'_{i,j}(u) > 0, \quad u \in p_j^{-1}(U_i \cap U_j), \quad i, j \in I. \tag{†}$$

Twierdzenie 10.3.6. *Niech $\mathcal{A} = (p_i : P_i \longrightarrow U_i)_{i \in I}$ będzie atlasem na M takim, że dla wszystkich odwzorowań przejścia mamy (†). Wtedy na M istnieje orientacja O taka, że atlas $\mathcal{A}$ jest zgodny z O.*

Oznacza to, że „zadać orientację M” to to samo, co „zadać atlas spełniający (†)”. Takie atlasy będziemy nazywać *orientującymi*.

Dowód. Niech $O(x) := p_i'(p_i^{-1}(x))([\mathbb{R}^d]_+)$ o ile $x \in U_i$. Jedyny problem to poprawność definicji. Przypuśćmy, że $x \in U_i \cap U_j$ i $x = p_i(t) = p_j(u)$, zatem $t = \varphi_{i,j}(u)$. Wtedy

$$p_j'(u)([\mathbb{R}^d]_+) = p_i'(\varphi_{i,j}(u))(\varphi'_{i,j}(u)([\mathbb{R}^d]_+)) = p_i'(t)([\mathbb{R}^d]_+). \qquad \square$$

Twierdzenie 10.3.7. *Jeżeli M jest podrozmaitością spójną i orientowalną, to na M istnieją dokładnie dwie różne orientacje. W szczególności, jeżeli M ma s składowych spójnych i jest orientowalna, to na M istnieje dokładnie 2^s różnych orientacji.*

Dowód. Niech O będzie ustaloną orientacją M. Wtedy $-O$ jest również orientacją i $-O \neq O$. Pozostaje pokazać, że dla każdej innej orientacji O' mamy albo $O' = O$ albo $O' = -O$. Niech

$$M_+ := \{x \in M : O'(x) = O(x)\}, \quad M_- := \{x \in M : O'(x) = -O(x)\}.$$

Oczywiście $M_+ \cap M_- = \varnothing$ i $M = M_+ \cup M_-$. Na podstawie Obserwacji 10.3.3(a) oba te zbiory są otwarte. Stąd, wobec spójności, albo $M_+ = M$ albo $M_- = M$. $\square$

Twierdzenie 10.3.8. *Jeżeli $d = 1$, to M jest orientowalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje odwzorowanie ciągłe $\boldsymbol{s} : M \longrightarrow \mathbb{S}_{n-1}$ takie, że $\boldsymbol{s}(x) \in T_xM$, $x \in M$. Ponadto, dla dowolnej orientacji O rozmaitości M istnieje odwzorowanie ciągłe $\boldsymbol{s} : M \longrightarrow \mathbb{S}_{n-1}$ takie, że $\boldsymbol{s}(x) \in T_xM$ i $O(x) = [\boldsymbol{s}(x)]_\sim$, $x \in M$.*

W powyższej sytuacji mówimy, że $\boldsymbol{s}$ jest *orientującym polem wektorów stycznych.*

Można pokazać, że dowolna jednowymiarowa podrozmaitość jest orientowalna. Z tego też powodu, powyższa propozycja nie stanowi, w gruncie rzeczy, kryterium na orientowalność, ale daje jedynie opis orientacji.

Dowód. Niech O będzie pewną orientacją na podrozmaitości M. Jeżeli $\mathcal{A} = (p_i : P_i \longrightarrow U_i)_{i \in I}$ jest atlasem zgodnym z O, to definiujemy $\boldsymbol{s}(x) := \boldsymbol{v}(p_i'(p_i^{-1}(x)))$, gdy $x \in U_i$, gdzie $\boldsymbol{v}(X) := X/\|X\|$ oznacza wersor wektora $X \in (\mathbb{R}^n)_*$. Jedyny problem to, czy definicja jest poprawna. Rozumujemy lokalnie: jeżeli $p : P \longrightarrow U$ i $q : Q \longrightarrow U$ są parametryzacjami zgodnymi z O oraz $q = p \circ \varphi$, to (korzystając z tego, że $\varphi'(u) > 0$, $u \in Q$) mamy: $\boldsymbol{v}(q'(u)) = \boldsymbol{v}(p'(\varphi(u))\varphi'(u)) = \boldsymbol{v}(p'(\varphi(u)))$.

W drugą stronę: kładziemy $O(x) := [\boldsymbol{s}(x)]_\sim \in \mathcal{O}(T_xM)$, $x \in M$. Trzeba sprawdzić, że O jest orientacją. Ustalmy punkt $a \in M$ oraz dowolną parametryzację $p : P \longrightarrow U$, $a = p(t_0)$, taką, że P jest przedziałem i $p'(t_0)([\mathbb{R}]_+) = O(a)$ (taka parametryzacja zawsze istnieje — pamiętajmy, że możemy zastąpić wyjściową parametryzację przez $\widehat{p} : \widehat{P} \longrightarrow U$). Mamy $\boldsymbol{s}(p(t)) = \varepsilon(t)\boldsymbol{v}(p'(t))$, $t \in P$, gdzie $\varepsilon : P \longrightarrow \{-1, +1\}$ jest funkcją ciągłą (bo $\boldsymbol{s}$ jest odwzorowaniem ciągłym) i $\varepsilon(t_0) = +1$. Zatem $\varepsilon \equiv +1$, co kończy dowód. $\square$

Twierdzenie 10.3.9. *Jeżeli $d = n-1$, to M jest orientowalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje odwzorowanie ciągłe $\boldsymbol{n} : M \longrightarrow \mathbb{S}_{n-1}$ takie, że $\boldsymbol{n}(x) \in (T_xM)^\perp$, $x \in M$. Ponadto, dla dowolnej orientacji O rozmaitości M istnieje odwzorowanie ciągłe $\boldsymbol{n} : M \longrightarrow \mathbb{S}_{n-1}$ takie, że $\boldsymbol{n}(x) \in (T_xM)^\perp$ i $O(x) = ([\boldsymbol{n}(x)]_\sim)^\perp$, $x \in M$.*

W powyższej sytuacji mówimy, że $\boldsymbol{n}$ jest *orientującym polem wektorów normalnych.*

Przypadek podrozmaitości wymiaru $2 \leqslant d \leqslant n-2$ zostanie scharakteryzowany w Obserwacji 13.2.7.

Dowód. Niech O będzie pewną orientacją na M. Ustalmy $x \in M$. Zauważmy, że układ warunków: $w \in \mathbb{R}^n$, $\|w\| = 1$, $w \perp T_xM$ i $([w]_\sim)^\perp = O(x)$ wyznacza jednoznacznie wektor w. Kładziemy $\boldsymbol{n}(x) := w$. Pozostaje sprawdzić ciągłość odwzorowania $x \longmapsto \boldsymbol{n}(x)$. Ustalmy punkt $a \in M$ oraz parametryzację $p : P \longrightarrow U$, $a = p(t_0)$, zgodną z O. Zauważmy, że dla $t \in P$ wektor $w = \boldsymbol{n}(p(t))$ jest wyznaczony (jednoznacznie) przez układ warunków (18): $w \in \mathbb{R}^n$, $\|w\| = 1$, $w \perp T_{p(t)}M$, $\det\big[w, \frac{\partial p}{\partial t_1}(t), \dots, \frac{\partial p}{\partial t_{n-1}}(t)\big] > 0$. Niech teraz $t_\nu \longrightarrow t_0$ i przypuśćmy, że $w_\nu := \boldsymbol{n}(p(t_\nu)) \longrightarrow w_0$. Wtedy w_0 spełnia powyższy układ z $t = t_0$, a więc $w_0 = \boldsymbol{n}(p(t_0))$.

W drugą stronę: kładziemy $O(x) := ([\boldsymbol{n}(x)]_\sim)^\perp \in \mathcal{O}(T_xM)$, $x \in M$. Trzeba sprawdzić, że O jest orientacją. Ustalmy punkt $a \in M$ oraz dowolną parametryzację $p : P \longrightarrow U$, $a = p(t_0)$, taką, że P jest obszarem i $p'(t_0)([\mathbb{R}^{n-1}]_+) = O(a)$. Mamy $p'(t)([\mathbb{R}^{n-1}]_+) = \varepsilon(t)O(p(t))$, $t \in P$, gdzie $\varepsilon : P \longrightarrow \{-1, +1\}$ i $\varepsilon(t_0) = +1$. Pozostaje wykazać, że ε jest funkcją ciągłą. W tym celu wystarczy tylko zauważyć, że wprost z definicji $([\boldsymbol{n}(x)]_\sim)^\perp$ mamy:

$$\varepsilon(t) = \operatorname{sgn}\Big(\det\Big[\boldsymbol{n}(p(t)), \frac{\partial p}{\partial t_1}(t), \dots, \frac{\partial p}{\partial t_{n-1}}(t)\Big]\Big), \quad t \in P. \qquad \square$$

Obserwacja 10.3.10 (Iloczyn wektorowy)**.** Niech $a_j \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, n-1$. Z wektorów tych utwórzmy $(n-1) \times n$–wymiarową macierz A poprzez ustawienie ich jako wiersze. Dla $k \in \{1, \dots, n\}$ niech A_k oznacza podmacierz macierzy A powstałą poprzez opuszczenie k-tej kolumny. Niech $w_k := (-1)^{k+1} \det A_k$, $w = (w_1, \dots, w_n)$. Zauważmy, że wektory $a_1, \dots, a_{n-1}$ są liniowo zależne wtedy i tylko wtedy, gdy $w = 0$. Dla $j \in \{1, \dots, n-1\}$ niech B_j oznacza $n \times n$–wymiarową macierz postałą z A poprzez dołożenie a_j jako

(18) Uwaga: jeżeli $w \in \mathbb{R}^n$, $\|w\| = 1$, $w \perp T_{p(t)}M$, to $\det\big[w, \frac{\partial p}{\partial t_1}(t), \dots, \frac{\partial p}{\partial t_{n-1}}(t)\big] \neq 0$.

pierwszego wiersza. Stosując do tej macierzy rozwinięcie Laplace'a (19) (względem pierwszego wiersza) wnioskujemy, że:

$$\langle w, a_j\rangle = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_{j,k}\det A_k = \det B_j = 0,$$

tak więc $w \perp a_j$, $j = 1,\dots,n-1$. Dalej mamy:

$$\det[w, a_1,\dots,a_{n-1}] = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}w_k\det A_k = \sum_{k=1}^{n}(\det A_k)^2 = \|v\|^2.$$

Wektor w nazywamy *iloczynem wektorowym* wektorów $a_1,\dots,a_{n-1}$ i oznaczamy $a_1\times\dots\times a_{n-1}$. Zauważmy, że operacja $(\mathbb{R}^n)^{n-1} \ni (a_1,\dots,a_{n-1}) \longmapsto a_1\times\dots\times a_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ jest $(n-1)$–liniowa.

Jeżeli układ $(a_1,\dots,a_{n-1})$ jest bazą pewnej podprzestrzeni V przestrzeni $\mathbb{R}^n$, wyznaczającą na V orientację O, to $([W]_\sim)^\perp = O$. W szczególności, w sytuacji opisanej w Twierdzeniu 10.3.9 mamy:

$$\boldsymbol{n}(p(t)) = \boldsymbol{v}\Big(\frac{\partial p}{\partial t_1}(t)\times\dots\times\frac{\partial p}{\partial t_{n-1}}(t)\Big).$$

[Wykład 07.01.2021 . . . .]

Obserwacja 10.3.11. Istnieją podrozmaitości nieorientowalne, np. *wstęga Möbiusa* (20):
$M := p((-1,1)\times[0,\pi])$, gdzie $p:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $p(t,u) := \big((2+t\cos u)\cos 2u, (2+t\cos u)\sin 2u, t\sin u\big)$.
Mamy

$$p'(t,u) = \begin{bmatrix}\cos u\cos 2u, & -4\sin 2u - t(\sin u\cos 2u + 2\cos u\sin 2u)\\ \cos u\sin 2u, & 4\cos 2u - t(\sin u\sin 2u - 2\cos u\cos 2u)\\ \sin u, & t\cos u\end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial t}(t,u)\times\frac{\partial p}{\partial u}(t,u) = \Big(&\begin{vmatrix}\cos u\sin 2u, & 4\cos 2u - t(\sin u\sin 2u - 2\cos u\cos 2u)\\ \sin u, & t\cos u\end{vmatrix},\\ -&\begin{vmatrix}\cos u\cos 2u, & -4\sin 2u - t(\sin u\cos 2u + 2\cos u\sin 2u)\\ \sin u, & t\cos u\end{vmatrix},\\ &\begin{vmatrix}\cos u\cos 2u, & -4\sin 2u - t(\sin u\cos 2u + 2\cos u\sin 2u)\\ \cos u\sin 2u, & 4\cos 2u - t(\sin u\sin 2u - 2\cos u\cos 2u)\end{vmatrix}\Big)\end{aligned}$$

$$= (-4\sin u\cos 2u + t\sin 2u(1+\cos 2u), -4\sin u\sin 2u - t(\cos 2u + \sin^2 2u), 4\cos u + 2t\cos^2 u).$$

Stąd

$$\Big\|\frac{\partial p}{\partial t}(t,u)\times\frac{\partial p}{\partial u}(t,u)\Big\|^2 = 16 + 16t\cos u + 4t^2(1+\cos^2 u).$$

W szczególności, $\|\frac{\partial p}{\partial t}(t,u)\times\frac{\partial p}{\partial u}(t,u)\| > 0$, $-1 < t < 1$, $0 \leqslant u \leqslant \pi$. Wynika stąd w szczególności, że M jest 2–wymiarową podrozmaitością w $\mathbb{R}^3$ klasy $\mathcal{C}^\infty$ (por. Twierdzenie 10.1.3). Dla $t = 0$ dostajemy

$$\boldsymbol{n}(p(0,u)) = \boldsymbol{n}(2\cos 2u, 2\sin 2u, 0) := \boldsymbol{v}\Big(\frac{\partial p}{\partial t}(0,u)\times\frac{\partial p}{\partial u}(0,u)\Big) = (-\sin u\cos 2u, -\sin u\sin 2u, \cos u).$$

Zauważmy, że $(2,0,0) = p(0,0) = p(0,\pi)$, ale $\boldsymbol{n}(p(0,0)) = (0,0,1)$, zaś $\boldsymbol{n}(p(0,\pi)) = (0,0,-1)$. Oznacza to, że nie istnieje ciągłe pole wersorów normalnych $M \supset p(\{0\}\times[0,\pi]) \ni (x,y,z) \longmapsto \boldsymbol{n}(x,y,z)$, a więc, na podstawie Twierdzenia 10.3.9, M nie jest orientowalna.

Obserwacja 10.3.12. Załóżmy, że M jest d–wymiarową orientowalną podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$ w $\mathbb{R}^n$ i niech $D \subset M$ będzie obszarem (w sensie topologii indukowanej) takim, że $\operatorname{int}_M(\operatorname{cl}_M D) = D$, tzn. D jest *tłusty* (cały czas w sensie topologii indukowanej). Załóżmy dalej, że $\partial_M D =: M'$ jest $(d-1)$–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$ w $\mathbb{R}^n$. Ustalmy pewną orientację $O \in \mathcal{O}(M)$. Pokażemy, że orientacja ta indukuje w sposób naturalny pewną orientację O' rozmaitości M'.

Postępujemy następująco: ustalmy punkt $a \in M'$. Na podstawie Lematu 10.1.21, istnieje parametryzacja $p : P \longrightarrow U$ podrozmaitości M, $a \in U$, taka, że P jest otwartą kostką w $\mathbb{R}^d$ i jeżeli $\widetilde{P} := \operatorname{pr}_{\mathbb{R}^{d-1}}(P)$,

---

(19) Pierre Simon de Laplace (1749–1827).
(20) August Möbius (1790–1868).

to $\{0\} \times \widetilde{P} \subset P$ i $p(\{0\} \times \widetilde{P}) = M' \cap U$. Dla $d = 1$ oznacza to, że $P \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem otwartym, $0 \in P$ i $\{p(0)\} = M' \cap U$.

Na wstępie rozważymy przypadek $d \geqslant 2$. Zbiór $\{0\} \times \widetilde{P}$ dzieli P na dwie składowe spójne $P_- := P \cap \{t_1 < 0\}$ i $P_+ := P \cap \{t_1 > 0\}$. Ponieważ p jest homeomorfizmem, zatem $M' \cap U$ dzieli U na dwie składowe $V_\pm := p(P_\pm)$. Każdy punkt składowej $V_\pm$ należy albo do $D_- := D \cap U$ albo do $D_+ := (M \setminus \operatorname{cl}_M D) \cap U$. Zauważmy, że tłustość zbioru gwarantuje, że $D_+ \neq \varnothing$. Wobec spójności, oznacza to, że mamy jedną z dwóch możliwości:

(a) $V_- = D_-$ i $V_+ = D_+$,

(b) $V_- = D_+$ i $V_+ = D_-$: w tym przypadku zastępujemy wyjściową parametryzację przez parametryzację $t \longmapsto p(-t_1, t_2, \dots, t_d)$ i sprowadzamy sytuację do (a).

Tak więc możemy przyjąć, że $V_\pm = D_\pm$. Teraz, zastępując ewentualnie wyjściową parametryzację przez $t \longmapsto p(t_1, -t_2, t_3, \dots, t_d)$ (tu jest istotne, że $d \geqslant 2$), możemy założyć, że parametryzacja jest zgodna z O (wystarczy ją uzgodnić w jednym punkcie i skorzystać ze spójności P). Dostajemy w ten sposób pewną parametryzację $\widetilde{p} : \widetilde{P} \longrightarrow M' \cap U$, $\widetilde{p}(u) := p(0, u)$.

Przypuśćmy teraz, że analogiczną konstrukcję przeprowadziliśmy dla jakiejś innej parametryzacji $q : Q \longrightarrow U$, która spełnia te same warunki, co p i w efekcie konstrukcji dostaliśmy nową parametryzację $\widetilde{q} : \widetilde{Q} \longrightarrow M' \cap U$. Wiemy, że $q = p \circ \varphi$ i $\det \varphi'(u) > 0$, $u \in Q$ (bo obie parametryzacje są zgodne z O). Niech $\widetilde{\varphi} := \widetilde{p}^{-1} \circ \widetilde{q} : \widetilde{Q} \longrightarrow \widetilde{P}$. Pokażemy, że $\det \widetilde{\varphi}'(v) > 0$ dla $v \in \widetilde{Q}$. Mamy: $\widetilde{q}(v) = q(0, v) = p(\varphi(0, v)) = \widetilde{p}(\widetilde{\varphi}(v)) = p(0, \widetilde{\varphi}(v))$, a więc $\varphi_1(0, v) = 0$ i $\widetilde{\varphi}(v) = (\varphi_2(0, v), \dots, \varphi_d(0, v))$. Zauważmy, że $\varphi(Q_\pm) = P_\pm$, a stąd: $\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}(0, v) \geqslant 0$. Ponadto, $\varphi'(0, v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}(0, v) & 0 \\ * & \widetilde{\varphi}'(v) \end{bmatrix}$, a stąd $\det \varphi'(0, v) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}(0, v) \det \widetilde{\varphi}'(v)$, co kończy dowód.

Oznacza to, że potrafimy skonstruować rodzinę lokalnych parametryzacji $(p_i : P_i \longrightarrow U_i)_{i \in I}$ zgodną z O taką, że rodzina $(\widetilde{p}_i : \widetilde{P}_i \longrightarrow M' \cap U_i)_{i \in I}$ jest atlasem orientującym na M'. Atlas ten wprowadza na M' pewną orientację O'. Z konstrukcji wynika, że O' zależy wyłącznie od O. Orientację O' nazywamy *orientacją indukowaną przez* O.

Teraz przypadek $d = 1$. W tej sytuacji nie zajmujemy się uzyskaniem zgodności $V_\pm = D_\pm$, ale jedynie, poprzez ewentualną zamianę parametryzacji p na parametryzację $t \longmapsto p(-t)$, uzyskujemy zgodność parametryzacji z orientacją O. Mamy dwa możliwe przypadki:

(a) $V_- = D_-$ i $V_+ = D_+$: wtedy przyjmujemy $O'(p(0)) := +1$,

(b) $V_- = D_+$ i $V_+ = D_-$: wtedy przyjmujemy $O'(p(0)) := -1$.

Musimy jeszcze sprawdzić, że O' nie zależy od wyboru parametryzacji. Niech $q : Q \longrightarrow U$ będzie inną parametryzacją zgodną z O. Wiemy, że $q = p \circ \varphi$, $\varphi : Q \longrightarrow P$, $\varphi'(u) > 0$, $u \in Q$. Oznacza to, że $\varphi(P_\pm) = Q_\pm$, skąd od razu wynika, że (a) zachodzi dla p wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi dla q.

Ponownie uzyskaliśmy *orientację indukowaną przez* O na M'.

ROZDZIAŁ 11

Całka Riemanna

[Wykład 11.01.2021 . . . .] Zasadniczym celem rozdziału jest przeniesienie wyników przedstawionych w Rozdziale 7 na przypadek wielowymiarowy. Te dowody, które są prostym uogólnieniem przypadku jednowymiarowego pozostawiamy jako Ćwiczenie.

11.1. Całka Riemanna na kostce

Definicja 11.1.1. *Kostką* (domkniętą) nazywamy dowolny zbiór postaci $P := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$, gdzie $a_j < b_j$, $j = 1, \dots, n$ (rozważamy tylko kostki niezdegenerowane).

Objętością kostki P nazywamy liczbę $|P| := (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$; zauważmy, że $|P| > 0$ oraz, że $|x_0 + P| = |P|$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Podziałem kostki P nazywamy dowolną skończoną rodzinę kostek $\pi = \{P_1, \dots, P_m\}$ taką, że $P = P_1 \cup \cdots \cup P_m$ oraz $\operatorname{int} P_j \cap \operatorname{int} P_k = \varnothing$ dla $j \neq k$; dla $n = 1$ podział kostki $P = [a, b]$ możemy utożsamiać z ciągiem $\pi = (x_0, \dots, x_m)$, gdzie $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$.

Podziałem prostym kostki P nazywamy podział postaci $\{P_{k_1,\dots,k_n} : 1 \leqslant k_j \leqslant m_j,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$, gdzie $P_{k_1,\dots,k_n} = [x_{1,k_1-1}, x_{1,k_1}] \times \cdots \times [x_{n,k_n-1}, x_{n,k_n}]$, zaś $(x_{j,0}, \dots, x_{j,m_j})$ jest podziałem $[a_j, b_j]$, $j = 1, \dots, n$. Podział ten składa się z $m_1 \cdots m_n$ kostek. Typowym przypadkiem jest sytuacja, gdy $x_{j,k} := a_j + (k/m_j)(b_j - a_j)$ (tzn. dzielimy krawędzie na równe części).

Niech $\pi_1 = \{P_1, \dots, P_m\}$, $\pi_2 = \{Q_1, \dots, Q_r\}$ będą podziałami kostki P. Powiemy, że π_2 *jest wpisany w* π_1 lub też, że π_2 *jest zagęszczeniem* π_1, jeżeli dla dowolnego $j \in \{1, \dots, m\}$ rodzina $\{Q_k : Q_k \subset P_j\}$ jest podziałem P_j; innymi słowy, jeżeli $\operatorname{int} P_j \cap \operatorname{int} Q_k \neq \varnothing$, to $Q_k \subset P_j$. W tej sytuacji piszemy $\pi_2 \preccurlyeq \pi_1$.

Średnicą podziału $\pi = \{P_1, \dots, P_m\}$ nazywamy liczbę $\operatorname{diam} \pi := \max\{\operatorname{diam} P_1, \dots, \operatorname{diam} P_m\}$.

Niech $(\pi_k)_{k=1}^{\infty}$ będzie ciągiem podziałów kostki P. Powiemy, że jest to *normalny ciąg podziałów*, jeżeli $\operatorname{diam} \pi_k \longrightarrow 0$.

Obserwacja 11.1.2. (a) Relacja $\preccurlyeq$ jest przechodnia.

(b) Dla dowolnych podziałów π_1, π_2 kostki P istnieje podział prosty π taki, że $\pi \preccurlyeq \pi_j$, $j = 1, 2$, tzn. π jest *wspólnym zagęszczeniem podziałów* π_1 *i* π_2.

(c) Dla dowolnego podziału $\pi = \{P_1, \dots, P_m\}$ mamy $|P| = |P_1| + \cdots + |P_m|$.

Istotnie, najpierw sprawdzamy przypadek podziału prostego:

$$\sum_{k_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{m_n} |P_{k_1,\dots,k_n}| = \sum_{k_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{m_n} \prod_{j=1}^{n} (x_{j,k_j} - x_{j,k_j-1}) = \prod_{j=1}^{n} \sum_{k_j=1}^{m_j} (x_{j,k_j} - x_{j,k_j-1}) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j) = |P|.$$

Dla dowolnego podziału znajdujemy najpierw wpisany podział prosty $\pi' = \{Q_1, \dots, Q_r\}$, a następnie rozumujemy następująco: $|P| = \sum\limits_{k=1}^{r} |Q_k| = \sum\limits_{j=1}^{m} \sum\limits_{\substack{k \in \{1,\dots,r\}: \\ Q_k \subset P_j}} |Q_k| = \sum\limits_{j=1}^{m} |P_j|$.

Definicja 11.1.3. Niech $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją ograniczoną. Zdefiniujmy:

$$m(f, P) := \inf f(P), \quad M(f, P) := \sup f(P).$$

Niech teraz $\pi = \{P_1, \dots, P_m\}$ będzie dowolnym podziałem kostki P. Połóżmy:

$$L(f, \pi) := \sum_{j=1}^{m} m(f, P_j)|P_j|, \quad U(f, \pi) := \sum_{j=1}^{m} M(f, P_j)|P_j|.$$

Liczbę $L(f,\pi)$ nazywamy *sumą aproksymacyjną dolną dla funkcji f przy podziale π*. Analogicznie, $U(f,\pi)$ nazywamy *sumą aproksymacyjną górną*. Czasami mówi się o *sumach Darboux*. Niech

$$\int_{*P} f := \sup_{\pi} L(f,\pi), \qquad \int_P^* f := \inf_{\pi} U(f,\pi),$$

gdzie supremum i infimum bierzemy po wszystkich podziałach kostki P. Liczbę $\int_{*P} f$ nazywamy *całką dolną z funkcji f po kostce P*. Analogicznie, liczbę $\int_P^* f$ nazywamy *całką górną*.

Powiemy, że funkcja f jest *całkowalna w sensie Riemanna na kostce P* ($f \in \mathcal{R}(P)$), jeżeli $\int_{*P} f = \int_P^* f$. Wtedy wspólną wartość tych całek oznaczamy przez $\int_P f$ i nazywamy *całką Riemanna z funkcji f po kostce P*.

Niech teraz $\varphi : P \longrightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją ograniczoną. Powiemy, że φ *jest całkowalna w sensie Riemanna na P* ($\varphi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$), jeżeli $\operatorname{Re}\varphi$, $\operatorname{Im}\varphi \in \mathcal{R}(P)$. Kładziemy wtedy $\int_P \varphi := \int_P \operatorname{Re}\varphi + i\int_P \operatorname{Im}\varphi$ i nazywamy tę liczbę *całką Riemanna z funkcji φ po kostce P*.

Oczywiście każda funkcja stała $c \in \mathbb{C}$ jest całkowalna w sensie Riemanna i $\int_P c = c|P|$.

Przykład 11.1.4. Niech $f := \chi_{P\cap\mathbb{Q}^n}$. Przypomnijmy, że χ_A oznacza funkcję charakterystyczną zbioru $A \subset P$. Funkcję f nazywamy *funkcją Dirichleta* w kostce P. Wtedy $L(f,\pi) = 0$ oraz $U(f,\pi) = |P|$ dla dowolnego podziału π. Tak więc $\int_{*P} f = 0$ oraz $\int_P^* f = |P|$, czyli $f \notin \mathcal{R}(P)$.

Poniżej przedstawimy szereg (mniej lub bardziej elementarnych) własności całki Riemanna; $f,g : P \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi,\psi : P \longrightarrow \mathbb{C}$ oznaczają funkcje ograniczone, π, π_1, π_2 — podziały kostki P. Większość dowodów przebiega analogicznie, jak dla $n = 1$ i te pozostawiamy jako Ćwiczenie.

Obserwacja 11.1.5. (a) Dla dowolnego $c \in \mathbb{R}$ mamy: $L(f+c,\pi) = L(f,\pi)+c|P|$ oraz $U(f+c,\pi) = U(f,\pi) + c|P|$. Wynika stąd natychmiast, że $\int_{*P}(f + c) = \int_{*P} f + c|P|$ oraz $\int_P^*(f + c) = \int_P^* f + c|P|$. W szczególności, $f \in \mathcal{R}(P) \Longleftrightarrow f+c \in \mathcal{R}(P)$ oraz $\int_P(f+c) = \int_P f+\int_P c$. Wynik przenosi się natychmiast na funkcje ograniczone $\varphi : P \longrightarrow \mathbb{C}$ i $c \in \mathbb{C}$: $\varphi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C}) \Longleftrightarrow \varphi+c \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$ oraz $\int_P(\varphi+c) = \int_P \varphi+\int_P c$.

(b) Jeżeli $f \leqslant g$, to $L(f,\pi) \leqslant L(g,\pi)$ i $U(f,\pi) \leqslant U(g,\pi)$. W szczególności, $\int_{*P} f \leqslant \int_{*P} g$ oraz $\int_P^* f \leqslant \int_P^* g$. Jeżeli ponadto $f,g \in \mathcal{R}(P)$, to $\int_P f \leqslant \int_P g$ *(monotoniczność całki)*.

(c) $L(-f,\pi) = -U(f,\pi)$. W szczególności,
- $\int_{*P}(-f) = -\int_P^* f$,
- $\varphi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C}) \Longleftrightarrow (-\varphi) \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$ oraz $\int_P(-\varphi) = -\int_P \varphi$,
- $\varphi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C}) \Longleftrightarrow \overline{\varphi} \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$ i $\int_P \overline{\varphi} = \overline{\int_P \varphi}$.

(d) Jeżeli $\pi_1 \preccurlyeq \pi_2$, to $L(f,\pi_1) \geqslant L(f,\pi_2)$, $U(f,\pi_1) \leqslant U(f,\pi_2)$. W szczególności,
- $L(f,\pi_1) \leqslant U(f,\pi_2)$ dla dowolnych π_1, π_2,
- $\int_{*P} f \leqslant \int_P^* f$.

(e) $f \in \mathcal{R}(P) \Longleftrightarrow \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_\pi : U(f,\pi) - L(f,\pi) \leqslant \varepsilon$.

(f) Dla każdego normalnego ciągu podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ mamy: $L(f,\pi_k) \longrightarrow \int_{*P} f$, $U(f,\pi_k) \longrightarrow \int_P^* f$.

Ograniczymy się do sum górnych. Można założyć, że $f \geqslant 0$. Weźmy $\varepsilon > 0$ i niech $\pi = \{Q_1,\dots,Q_m\}$ będzie podziałem takim, że $U(f,\pi) - \int_P^* f \leqslant \varepsilon$. Niech $\pi_k = \{P_{k,1},\dots,P_{k,m_k}\}$. Wtedy

$$U(f,\pi_k) = \sum_{\substack{j\in\{1,\dots,m_k\}\\ \exists_{i\in\{1,\dots,m\}}: P_{k,j}\subset Q_i}} M(f,P_{k,j})|P_{k,j}| + \sum_{\substack{j\in\{1,\dots,m_k\}\\ \forall_{i\in\{1,\dots,m\}}: P_{k,j}\not\subset Q_i}} M(f,P_{k,j})|P_{k,j}| \leqslant U(f,\pi) + M(f,P)\eta_k, \text{ gdzie}$$

$$\eta_k := \sum_{\substack{j\in\{1,\dots,m_k\}\\ \forall_{i\in\{1,\dots,m\}}:\\ P_{k,j}\not\subset Q_i}} |P_{k,j}|, \quad k \geqslant 1.$$

Zauważmy, że $\eta_k \longrightarrow 0$. Istotnie, jeżeli $P_{k,j} \not\subset Q_i$, $i = 1,\dots,m$, to $P_{k,j}$ musi przecinać którąś ze ścian którejś z kostek $Q_1,\dots, Q_m$. Stąd $\eta_k \leqslant c \operatorname{diam}\pi_k$, $k \geqslant 1$, gdzie $c > 0$ jest pewną stałą (Ćwiczenie). Ostatecznie

$$\int_P^* f \leqslant \liminf_{k\to+\infty} U(f,\pi_k) \leqslant \limsup_{k\to+\infty} U(f,\pi_k) \leqslant \int_P^* f + \varepsilon,$$

co, wobec dowolności $\varepsilon > 0$, kończy dowód.

Definicja 11.1.6. Niech $\pi = \{P_1, \dots, P_m\}$ będzie podziałem kostki P i niech $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$, $\xi_j \in P_j$, $j = 1, \dots, m$. Dla $\varphi : P \longrightarrow \mathbb{C}$, sumę $M(\varphi, \pi, \xi) := \sum_{j=1}^{m} \varphi(\xi_j)|P_j|$ nazywamy *sumą aproksymacyjną pośrednią dla funkcji φ przy podziale π i punktach pośrednich ξ*. Czasami mówimy o *sumie Cauchy'ego–Riemanna*.

Obserwacja 11.1.7. (a) Jest rzeczą widoczną, iż:
- $M(\alpha\varphi + \beta\psi, \pi, \xi) = \alpha M(\varphi, \pi, \xi) + \beta M(\psi, \pi, \xi)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
- $M(\varphi, \pi, \xi) = M(\operatorname{Re}\varphi, \pi, \xi) + iM(\operatorname{Im}\varphi, \pi, \xi)$.
- $|M(\varphi, \pi, \xi)| \leqslant M(|\varphi|, \pi, \xi)$.
- dla $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ mamy: $L(f, \pi) \leqslant M(f, \pi, \xi) \leqslant U(f, \pi)$.

(b) Następujące warunki są równoważne:

(i) $\varphi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$;

(ii) istnieje $c \in \mathbb{C}$ takie, że dla dowolnego normalnego ciągu podziałów $(\pi_k)_{k=1}^{\infty}$ oraz dla dowolnego wyboru punktów pośrednich $(\xi_k)_{k=1}^{\infty}$ (tzn. ξ_k jest zbiorem punktów pośrednich dla π_k) mamy $M(\varphi, \pi_k, \xi_k) \longrightarrow c$;
równoważnie: dla dowolnego normalnego ciągu podziałów $(\pi_k)_{k=1}^{\infty}$ oraz dla dowolnego wyboru punktów pośrednich $(\xi_k)_{k=1}^{\infty}$ istnieje $c \in \mathbb{C}$ takie, że $M(\varphi, \pi_k, \xi_k) \longrightarrow c$;

(iii) istnieje $c \in \mathbb{C}$ takie, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla dowolnego podziału π o średnicy $\leqslant \delta$ oraz dla dowolnego wyboru punktów pośrednich ξ mamy $|M(\varphi, \pi, \xi) - c| \leqslant \varepsilon$;

(iv) istnieje $c \in \mathbb{C}$ oraz normalny ciąg podziałów $(\pi_k)_{k=1}^{\infty}$ takie, że dla dowolnego wyboru punktów pośrednich $(\xi_k)_{k=1}^{\infty}$, mamy $M(\varphi, \pi_k, \xi_k) \longrightarrow c$;
równoważnie: istnieje normalny ciąg podziałów $(\pi_k)_{k=1}^{\infty}$ taki, że dla dowolnego wyboru punktów pośrednich $(\xi_k)_{k=1}^{\infty}$, istnieje $c \in \mathbb{C}$ takie, że $M(\varphi, \pi_k, \xi_k) \longrightarrow c$.

(c) $\mathcal{R}(P, \mathbb{C})$ jest zespoloną przestrzenią wektorową, a operator $\mathcal{R}(P, \mathbb{C}) \ni \varphi \longmapsto \int_P \varphi \in \mathbb{C}$ jest $\mathbb{C}$–liniowy.

(d) Jeżeli $\psi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$ oraz $|\varphi(x') - \varphi(x'')| \leqslant |\psi(x') - \psi(x'')|$, $x', x'' \in P$, to $\varphi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$.

(e) Jeżeli $\varphi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$, to $|\varphi| \in \mathcal{R}(P)$ oraz $\left|\int_P \varphi\right| \leqslant \int_P |\varphi|$.

(f) Jeżeli φ, $\psi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$, to $\varphi \cdot \psi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$.

(g) Operator $\mathcal{R}(P, \mathbb{C}) \times \mathcal{R}(P, \mathbb{C}) \ni (\varphi, \psi) \overset{\Phi}{\longmapsto} \int_P \varphi\overline{\psi} \in \mathbb{C}$ jest semi-iloczynem skalarnym. W szczególności, na podstawie nierówności Schwarza, mamy $\left|\int_P \varphi\overline{\psi}\right|^2 \leqslant \left(\int_P |\varphi|^2\right)\left(\int_P |\psi|^2\right)$, $\varphi, \psi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$. Ponadto, funkcja $\mathcal{R}(P, \mathbb{C}) \ni \varphi \longmapsto \left(\int_P |\varphi|^2\right)^{1/2}$ jest *seminormą*.

(h) $\mathcal{C}(P, \mathbb{C}) \subset \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$.

(i) (Twierdzenie o wartości średniej) Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{C}(P)$ istnieje $\xi \in P$ taki, że $f(\xi) = \frac{1}{|P|} \int_P f$.

[Wykład 14.01.2021 . . . .]

Definicja 11.1.8. Mówimy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ ma *objętość zero* ($|A| = 0$), jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje skończona rodzina kostek $P_1, \dots, P_m$ taka, że $A \subset P_1 \cup \dots \cup P_m$ i $|P_1| + \dots + |P_m| \leqslant \varepsilon$.

Obserwacja 11.1.9. (a) Każdy zbiór o objętości zero jest ograniczony.

(b) Każdy zbiór skończony ma objętość zero.

(c) Jeżeli $|A| = 0$, to $|\overline{A}| = 0$.

(d) Podzbiór zbioru o objętości zero ma objętość zero.

(e) Suma skończonej liczby zbiorów o objętości zero ma objętość zero.

(f) Jeżeli $\mathbb{R}^n \ni a_\nu \longrightarrow a_0 \in \mathbb{R}^n$, to zbiór $\{a_\nu : \nu \geqslant 0\}$ ma objętość zero.

(g) Jeżeli $A \subset \mathbb{R}^n$ ma objętość zero, to dla dowolnego zbioru ograniczonego $B \subset \mathbb{R}^m$ zbiór $A \times B$ ma objętość zero.

Twierdzenie 11.1.10. (a) *Niech $Q \subset \mathbb{R}^d$ będzie kostką i niech $\varphi : Q \longrightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ będzie dowolnym odwzorowaniem ciągłym, $1 \leqslant d \leqslant n - 1$. Wtedy wykres $A := \{(t, \varphi(t)) : t \in Q\}$ ma objętość zero.*

W szczególności, dla dowolnej kostki ograniczonej $R \subset \mathbb{R}^n$ [1] mamy $|\partial R| = 0$.

---

[1] Tzn. zbioru R takiego, że istnieje kostka P, dla której $\operatorname{int} P \subset R \subset P$.

(b) *Niech $Q \subset \mathbb{R}^d$ będzie kostką i niech $p : Q \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie odwzorowaniem spełniającym warunek Höldera z wykładnikiem α. Wówczas:*

(b_1) *Jeżeli $\alpha n > d$, to zbiór $A := p(Q)$ ma objętość zero.* (2)

(b_2) *Jeżeli $\alpha n \geqslant d$, to zbiór $A := p(Z)$ ma objętość zero dla dowolnego zbioru $Z \subset Q$ o objętości zero.*

(b_3) *Jeżeli p spełnia warunek Lipschitza (np. $p \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, gdzie Ω jest otoczeniem Q), to:*

- *jeżeli $n > d$, to $|p(Q)| = 0$,*
- *jeżeli $n \geqslant d$, to $|p(Z)| = 0$ dla dowolnego zbioru $Z \subset Q$ o objętości zero.* (3)

(c) *Jeżeli $M \in \mathcal{M}_d^1(\mathbb{R}^n)$, $0 \leqslant d \leqslant n-1$, to każdy zwarty podzbiór $A \subset M$ ma objętość zero* (4).

Dowód. (a) Ustalmy $\varepsilon > 0$. Wobec jednostajnej ciągłości odwzorowania φ istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$\|\varphi(t') - \varphi(t'')\|_\infty \leqslant \varepsilon \text{ o ile } \|t' - t''\| \leqslant \delta.$$

Niech $\pi = \{Q_1, \dots, Q_m\}$ będzie podziałem kostki Q takim, że $\operatorname{diam} \pi \leqslant \delta$. Ustalmy $t_j \in Q_j$ i niech

$$P_j := Q_j \times (\varphi(t_j) + [-\varepsilon, \varepsilon]^{n-d}).$$

Oczywiście $A \subset P_1 \cup \dots \cup P_m$ oraz $|P_1| + \dots + |P_m| = |Q_1|(2\varepsilon)^{n-d} + \dots + |Q_m|(2\varepsilon)^{n-d} = |Q|(2\varepsilon)^{n-d}$.

(b) Przypuśćmy, że $\|p(t') - p(t''))\|_\infty \leqslant C\|t' - t''\|^\alpha$, $t', t'' \in Q$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Przypadki (b_1) i (b_2) rozpatrzymy jednocześnie. Niech $X := Q$ (odp. $X := Z$) i niech $\varkappa := 2|Q|$ (odp. $\varkappa > 0$, gdzie $\varkappa$ jest dowolne). Niech $\pi = \{Q_1, \dots, Q_m\}$ będzie układem kostek takim, że

- $Q_j = u_j + [-\eta, \eta]^d$, gdzie $u_j \in \mathbb{R}^d$, $j = 1, \dots, m$, $\eta \in (0, 1]$,
- $X \subset Q_1 \cup \dots \cup Q_m$, $Q_j \cap Q \neq \varnothing$, $j = 1, \dots, m$,
- $m(2\eta)^d = |Q_1| + \dots + |Q_m| \leqslant \varkappa$.

Niech $\delta := C(2\sqrt{d}\eta)^\alpha$. Ustalmy $t_j \in Q_j \cap Q$ i niech $P_j := p(t_j) + [-\delta, \delta]^n$, $j = 1, \dots, m$. Oczywiście $A \subset P_1 \cup \dots \cup P_m$ oraz $|P_1| + \dots + |P_m| = m(2C(2\sqrt{d}\eta)^\alpha)^n \leqslant \big(2^{(\alpha+1)n-d}\varkappa(Cd^{\alpha/2})^n\big)\eta^{\alpha n - d}$.

Gdy $\alpha n > d$, to dla małych $\eta > 0$ ostatnia liczba będzie dowolnie mała (odp. gdy $\alpha n = d$, to dobierając $\varkappa > 0$ stosownie małe, możemy uczynić tę ostatnią liczbę dowolnie małą).

(b_3) wynika z (b_1) i (b_2).

(c) wynika z (b). $\square$

Obserwacja 11.1.11. (a) Jeżeli zbiór $N_P(\varphi) := \{a \in P : \varphi \text{ nie jest ciągła w punkcie } a\}$ ma objętość zero, to $\varphi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$ (por. Obserwacja 11.1.7(g)).

(b) Niech $\pi = \{P_1, \dots, P_m\}$ będzie ustalonym podziałem. Wtedy $\varphi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C}) \iff \varphi|_{P_j} \in \mathcal{R}(P_j, \mathbb{C})$, $j = 1, \dots, m$. Ponadto, $\int_P \varphi = \int_{P_1} \varphi + \dots + \int_{P_m} \varphi$.

(c) Jeżeli zbiór $D_P(\varphi, \psi) := \{a \in P : \varphi(a) \neq \psi(a)\}$ ma objętość zero, to $\varphi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C}) \iff \psi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$. Ponadto, $\int_P \varphi = \int_P \psi$.

(d) Jeżeli $\varphi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$, to $\varphi|_Q \in \mathcal{R}(Q, \mathbb{C})$ dla dowolnej kostki $Q \subset P$ oraz $\int_Q \varphi = \int_P \varphi_0$, gdzie $\varphi_0 := \varphi$ na Q i $\varphi_0 := 0$ na $P \setminus Q$.

(e) Relacja $\varphi \sim \psi \overset{\text{df}}{\iff} |D_P(\varphi, \psi)| = 0$ jest relacją równoważnościową w $\mathcal{R}(P, \mathbb{C})$; całka Riemanna jest dobrze określonym operatorem liniowym $\mathcal{R}(P, \mathbb{C})/\sim \longrightarrow \mathbb{C}$.

(f) Jeżeli $\mathcal{R}(P, \mathbb{C}) \ni \varphi_\nu \longrightarrow \varphi$ jednostajnie na P, to $\varphi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$ i $\int_P \varphi_\nu \longrightarrow \int_P \varphi$.

(g) Jeżeli $0 \leqslant f \in \mathcal{C}(P)$ i $\int_P f = 0$, to $f \equiv 0$. W szczególności, odwzorowanie

$$\mathcal{C}(P, \mathbb{C}) \times \mathcal{C}(P, \mathbb{C}) \ni (\varphi, \psi) \longmapsto \int_P \varphi\overline{\psi}$$

jest iloczynem skalarnym. Niestety przestrzeń $\mathcal{C}(P, \mathbb{C})$ z tym iloczynem skalarnym nie jest przestrzenią Hilberta.

(h) Jeżeli $0 \leqslant f \in \mathcal{R}(P)$ i $\int_P f = 0$, to zbiór $Z_f := \{x \in P : f(x) > 0\}$ jest przeliczalną sumą zbiorów o objętości zero. Zbiór Z_f może nie mieć objętości zero.

---

(2) Warto w tym miejscu przypomnieć o istnieniu krzywej $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ takiej, że $\gamma([0, 1]) = [0, 1] \times [0, 1]$. Z ($b_1$) wynika, że γ nie może spełniać warunku Höldera z wykładnikiem $\alpha > 1/2$.

(3) Jeżeli $n < d$, to biorąc jako p projekcję $\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{d-n}}$, zaś jako Z zbiór postaci $A \times B \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{d-n}$, gdzie $|A| = 0$, a B jest ograniczony, widzimy, że $p(Z) = B$ nie musi być zbiorem o objętości zero nawet, gdy p jest liniowe.

(4) Dla przykładu, $|\mathbb{S}_{n-1}| = 0$.

Definicja 11.1.12. Mówimy, że zbiór ograniczony $A \subset \mathbb{R}^n$ jest *mierzalny w sensie Jordana (regularny dla całki Riemanna)* ($A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$), jeżeli $\chi_A \in \mathcal{R}(P)$ dla pewnej kostki $P \supset A$. Liczbę $|A| := \int_P \chi_A$ nazywamy *miarą Jordana (objętością) zbioru* A

Obserwacja 11.1.13. (a) Jeżeli $\chi_A \in \mathcal{R}(P)$ dla pewnej kostki $P \supset A$, to $\chi_A \in \mathcal{R}(Q)$ dla dowolnej kostki $Q \supset A$. Ponadto, $\int_P \chi_A = \int_Q \chi_A$ (por. Obserwacja 11.1.11(b)).

(b) Dla zbioru ograniczonego $A \subset \mathbb{R}^n$ mamy: $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|\partial A| = 0$.

Niech P będzie dowolną kostką taką, że $A \subset\subset P$. Ponieważ $N_P(\chi_A) \subset \partial A$, implikacja ($\Longleftarrow$) wynika z Obserwacji 11.1.11(a)).

Dla dowodu ($\Longrightarrow$), przypuśćmy, że $\chi_A \in \mathcal{R}(P)$. Chcemy pokazać, że $|\partial A| = 0$. Ustalmy dowolne $\varepsilon > 0$. Z całkowalności funkcji χ_A wynika, że istnieje podział $\pi = \{P_1, \dots, P_m\}$ kostki P taki, że $U(\chi_A, \pi) - L(\chi_A, \pi) \leqslant \varepsilon/2$. Warunek ten oznacza, że $\sum\limits_{i \in I} |P_i| \leqslant \varepsilon/2$, gdzie $I := \{i \in \{1, \dots, m\} : P_i \cap A \neq \varnothing,\ P_i \not\subset A\}$. Niech $B := \bigcup\limits_{j=1}^{m} \partial P_j$. Wiemy, że $|B| = 0$. W szczególności, istnieje skończone pokrycie zbioru B kostkami $Q_1, \dots, Q_r$ takie, że $|Q_1| + \dots + |Q_r| \leqslant \varepsilon/2$. Wystarczy jeszcze pokazać, że $(\partial A) \setminus B \subset \bigcup\limits_{i \in I} P_i$. Niech $a \in (\partial A) \setminus B$. Wtedy istnieje i_0 takie, że $a \in \operatorname{int} P_{i_0}$. Stąd $P_{i_0} \cap A \neq \varnothing$. Gdyby $P_{i_0} \subset A$, to mielibyśmy $a \in \operatorname{int} A$. Tak więc $i_0 \in I$, co kończy dowód.

(c) Jeżeli $|A| = 0$ w sensie Definicji 11.1.8, to $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ oraz $|A| = 0$ (wystarczy skorzystać z Obserwacji 11.1.11(a)).

(d) Każda kostka jest regularna.

(e) Jeżeli $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, to $\operatorname{int} A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$; implikacja przeciwna nie jest prawdziwa (Ćwiczenie).

(f) Jeżeli $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, to zbiór $\overline{A} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$; implikacja przeciwna nie jest prawdziwa (Ćwiczenie).

(g) Jeżeli $A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, to $A \cup B$, $A \cap B, A \setminus B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, tzn. $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ jest *algebrą zbiorów*.

(h) Jeżeli $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^m)$, to $A \times B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{n+m})$ (por. Obserwacja 11.1.9(g)).

[Wykład 18.01.2021 . . . .]

11.2. Całka Riemanna na zbiorze mierzalnym w sensie Jordana

Naszym najbliższym celem jest zbudowanie teorii całki Riemanna na zbiorach regularnych.

Definicja 11.2.1. Niech $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $A \subset P$, gdzie P jest kostką. Dla funkcji ograniczonej $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{C}$ niech $\varphi_0 := \begin{cases} \varphi, & \text{na } A \\ 0, & \text{na } P \setminus A \end{cases}$. Powiemy, że φ jest *całkowalna w sensie Riemanna na* A ($\varphi \in \mathcal{R}(A, \mathbb{C})$), jeżeli $\varphi_0 \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$. Kładziemy wtedy $\int_A \varphi := \int_P \varphi_0$. Jak zwykle, $\mathcal{R}(A) := \{\varphi \in \mathcal{R}(A, \mathbb{C}) : \varphi(A) \subset \mathbb{R}\}$.

Bez trudu widać, że taka definicja jest poprawna, tzn. nie zależy od wyboru kostki $P \supset A$.

Poniżej przedstawimy listę podstawowych własności tak zdefiniowanej całki Riemanna. Dowody poszczególnych własności polegają na wykorzystaniu znanych własności całki Riemanna na kostce.

Obserwacja 11.2.2. (a) Jeżeli $|A| = 0$, to każda funkcja ograniczona $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{C}$ jest całkowalna oraz $\int_A \varphi = 0$.

(b) Jeżeli zbiór $N_A(\varphi) := \{a \in A : \varphi \text{ nie jest ciągła w } a\}$ ma objętość zero, to $\varphi \in \mathcal{R}(A, \mathbb{C})$. W szczególności, $\mathcal{C}_b(A, \mathbb{C}) \subset \mathcal{R}(A, \mathbb{C})$.

(c) $1 \in \mathcal{R}(A)$ oraz $\int_A 1 = |A|$, gdzie $|A|$ oznacza miarę Jordana zbioru A (w sensie Definicji 11.1.12).

(d) $\mathcal{R}(A, \mathbb{C})$ jest algebrą, operator $\mathcal{R}(A) \ni \varphi \longmapsto \int_A \varphi \in \mathbb{C}$ jest liniowy i monotoniczny. W szczególności, jeżeli $A \subset B$, gdzie B jest także regularny, to $|A| \leqslant |B|$ (tzn. miara Jordana jest monotoniczna).

(e) Jeżeli $\varphi \in \mathcal{R}(A, \mathbb{C})$, to $|\varphi| \in \mathcal{R}(A)$ oraz $|\int_A \varphi| \leqslant \int_A |\varphi|$.

(f) Operator $\mathcal{R}(A, \mathbb{C}) \times \mathcal{R}(A, \mathbb{C}) \ni (\varphi, \psi) \longmapsto \int_A \varphi\overline{\psi} \in \mathbb{C}$ jest semi-iloczynem skalarnym. W szczególności, zachodzi nierówność Schwarza: $\big|\int_A \varphi\overline{\psi}\big|^2 \leqslant \big(\int_A |\varphi|^2\big)\big(\int_A |\psi|^2\big)$, $\varphi, \psi \in \mathcal{R}(A, \mathbb{C})$.

(g) Dla funkcji ograniczonych $\varphi, \psi : A \longrightarrow \mathbb{C}$, jeżeli zbiór $D_A(\varphi, \psi) := \{a \in A : \varphi(a) \neq \psi(a)\}$ ma objętość zero, to $\varphi \in \mathcal{R}(A, \mathbb{C}) \iff \psi \in \mathcal{R}(A, \mathbb{C})$. Ponadto, $\int_A \varphi = \int_A \psi$.

(h) Jeżeli $B \subset A$ jest zbiorem regularnym, to dla funkcji $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{C}$ mamy: $\varphi|_B \in \mathcal{R}(B, \mathbb{C}) \iff \varphi \cdot \chi_B \in \mathcal{R}(A, \mathbb{C})$.

(i) Jeżeli $A = A_1 \cup A_2$, gdzie $A_1, A_2 \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, i $|A_1 \cap A_2| = 0$, to $\varphi \in \mathcal{R}(A, \mathbb{C}) \iff \varphi|_{A_j} \in \mathcal{R}(A_j, \mathbb{C})$, $j = 1, 2$. Ponadto $\int_A \varphi = \int_{A_1} \varphi + \int_{A_2} \varphi$. W szczególności,

- miara Jordana jest *skończenie addytywna*, tzn. $|A \cup B| = |A| + |B|$ dla $A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ takich, że $A \cap B = \varnothing$;
- jeżeli $B \subset A$ jest zbiorem regularnym i $\varphi \in \mathcal{R}(A, \mathbb{C})$, to $\varphi|_B \in \mathcal{R}(B, \mathbb{C})$;
- dla dowolnej funkcji ograniczonej $\varphi : \overline{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ mamy: $\varphi \in \mathcal{R}(A, \mathbb{C}) \iff \varphi \in \mathcal{R}(\overline{A}, \mathbb{C})$ oraz $\int_A \varphi = \int_{\overline{A}} \varphi$;
- dla dowolnej funkcji ograniczonej $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{C}$ mamy: $\varphi \in \mathcal{R}(A, \mathbb{C}) \iff \varphi \in \mathcal{R}(\operatorname{int} A, \mathbb{C})$ oraz $\int_A \varphi = \int_{\operatorname{int} A} \varphi$.

Twierdzenie 11.2.3. *Niech $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{n-1})$, niech $f \in \mathcal{R}(A)$ i niech B oznacza wykres funkcji f, tzn. zbiór $B := \{(x, f(x)) : x \in A\} \subset \mathbb{R}^n$. Wtedy $|B| = 0$.*

Dowód. Niech $A \subset P$, gdzie P jest kostką, niech f_0 oznacza standardowe przedłużenie funkcji f i niech $B_0 := \{(x, f_0(x)) : x \in P\}$. Zauważmy, że $|B| = 0 \iff |B_0| = 0$ (Ćwiczenie). Wynika stąd w szczególności, że możemy założyć, że $A = P$ jest kostką.

Dla $\varepsilon > 0$, niech $\pi = \{P_1, \dots, P_m\}$ będzie podziałem kostki P takim, że $U(f, \pi) - L(f, \pi) \leqslant \varepsilon$. Połóżmy, $Q_j := P_j \times [m(f, P_j), M(f, P_j)]$, $j = 1, \dots, m$. Wtedy $B \subset Q_1 \cup \dots \cup Q_m$ oraz

$$|Q_1| + \dots + |Q_m| = \sum_{j=1}^{m} |P_j|(M(f, P_j) - m(f, P_j)) \leqslant \varepsilon. \qquad \square$$

Twierdzenie 11.2.4 (Twierdzenie o całkach iterowanych)**.** *Niech $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^m)$ i niech $\varphi \in \mathcal{R}(A \times B, \mathbb{C})$ (por. Obserwacja 11.1.13*(h)*). Załóżmy, że $\varphi(x, \cdot) \in \mathcal{R}(B, \mathbb{C})$ dla dowolnego $x \in A$* (5)*. Wtedy funkcja $A \ni x \longmapsto \int_B \varphi(x, y)dy \in \mathbb{R}$ jest całkowalna na A oraz*

$$\int_{A \times B} \varphi(x, y)dxdy = \int_A \Big(\int_B \varphi(x, y)dy \Big) dx. \quad (6)$$

W szczególności, powyższy wzór stosuje się dla funkcji klasy $\mathcal{C}_b(A \times B, \mathbb{C})$.

Dowód. W oczywisty sposób dowód sprowadza się do przypadku, gdy $A = P$ i $B = Q$ są kostkami oraz $\varphi = f$ ma wartości rzeczywiste. Ustalmy dowolne podziały $\pi' = \{P_1, \dots, P_r\}$ kostki P i $\pi'' = \{Q_1, \dots, Q_s\}$ kostki Q. Wtedy rodzina $\pi := \{P_j \times Q_k : j = 1, \dots, r,\ k = 1, \dots, s\}$ jest podziałem kostki $P \times Q$. Wybierzmy dowolne punkty pośrednie ξ dla podziału π'. Wtedy

$$m(f, P_j \times Q_k)|Q_k| \leqslant \int_{Q_k} f(\xi_j, y)dy \leqslant M(f, P_j \times Q_k)|Q_k|, \quad (7)$$

skąd po pomnożeniu przez $|P_j|$, zsumowaniu najpierw względem k, a potem względem j, mamy:

$$L(f, \pi) \leqslant \sum_{j=1}^{r} \int_Q f(\xi_j, y)dy|P_j| \leqslant U(f, \pi).$$

Pozostaje rozważyć normalne ciągi podziałów i zastosować Obserwację 11.1.7(b). $\square$

Wniosek 11.2.5. *Niech $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^m)$ i niech $\varphi \in \mathcal{R}(A, \mathbb{C})$, $\psi \in \mathcal{R}(B, \mathbb{C})$. Wtedy $\varphi \otimes \psi \in \mathcal{R}(A \times B, \mathbb{C})$* (8) *oraz*

$$\int_{A \times B} \varphi(x)\psi(y)dxdy = \Big(\int_A \varphi(x)dx \Big) \Big(\int_B \psi(y)dy \Big).$$

Dowód. Jedynym problemem jest całkowalność $\varphi \otimes \psi$ na $A \times B$. Możemy założyć, że $A = P$, $B = Q$ są kostkami oraz, że $\varphi = f$ i $\psi = g$ mają wartości rzeczywiste (Ćwiczenie). Ustalmy dowolne podziały

(5) Odnotujmy, że nie wynika to z całkowalności φ na $A \times B$. Dla przykładu: $A = B = [0, 1]$, $\varphi(0, \cdot) = \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$, $\varphi(x, \cdot) := 0$ dla $x \in (0, 1]$.

(6) Stosujemy tu wygodny tradycyjny zapis całki Riemanna z uwidocznieniem zmiennych.

(7) Z całkowalności funkcji $f(\xi_j, \cdot)$ na Q wynika jej całkowalność na Q_k.

(8) $(f \otimes g)(x, y) := f(x)g(y)$

$\pi' = \{P_1, \dots, P_r\}$ kostki P i $\pi'' = \{Q_1, \dots, Q_s\}$ kostki Q i niech π będzie jak w dowodzie Twierdzenia 11.2.4. Załóżmy, że $|f|, |g| \leqslant c$. Wtedy

$$U(f \otimes g, \pi) - L(f \otimes g, \pi) \leqslant c\Big((U(f, \pi') - L(f, \pi'))|Q| + (U(g, \pi'') - L(g, \pi''))|P|\Big)$$

i dalej możemy rozumować standardowo. $\square$

Twierdzenie 11.2.6 (Całka jako miara objętości)**.** *Niech $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{n-1})$ i niech $\alpha, \beta \in \mathcal{C}_b(A)$, $\alpha \leqslant \beta$. Połóżmy $B := \{(x, y) \in A \times \mathbb{R} : \alpha(x) \leqslant y \leqslant \beta(x)\}$. Wtedy $B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ oraz dla dowolnej funkcji $\varphi \in \mathcal{R}(B, \mathbb{C})$ takiej, że $f(x, \cdot) \in \mathcal{R}([\alpha(x), \beta(x)], \mathbb{C})$, $x \in A$,* (9) *funkcja $A \ni x \longmapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \varphi(x, y)dy \in \mathbb{C}$ jest całkowalna i mamy:*

$$\int_B \varphi(x, y)dxdy = \int_A \Big(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \varphi(x, y)dy\Big)dx.$$

W szczególności, $|B| = \int_A (\beta - \alpha)$ (por. Przykład 7.5.1(1)).

Dowód. Niech $|\alpha|, |\beta| \leqslant c$. Zauważmy, że

$$\partial B \subset ((\partial A) \times [-c, c]) \cup \{(x, \alpha(x)) : x \in A\} \cup \{(x, \beta(x)) : x \in A\} =: Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3.$$

Istotnie, niech $B \ni (x_s, y_s) \longrightarrow (x_0, y_0) \in \partial B$. Jeżeli $x_0 \in \partial A$, to oczywiście $(x_0, y_0) \in Z_1$. Jeżeli $x_0 \in \operatorname{int} A$, to wobec ciągłości funkcji α i β, mamy $\alpha(x_0) \leqslant y_0 \leqslant \beta(x_0)$. Ponownie korzystając z ciągłości tych funkcji, wnioskujemy, że wykluczone jest, aby $\alpha(x_0) < y_0 < \beta(x_0)$.

Teraz regularność zbioru wynika z Obserwacji 11.1.9(g) oraz Twierdzenia 11.2.3.

Niech $\varphi_0 : A \times [-c, c] \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie trywialnym rozszerzeniem funkcji φ (poprzez wartości zerowe). Wtedy na podstawie twierdzenia o całkach iterowanych (Twierdzenie 11.2.4) mamy:

$$\int_B \varphi(x, y)dxdy = \int_{A \times [-c,c]} \varphi_0(x, y)dxdy = \int_A \Big(\int_{[-c,c]} \varphi_0(x, y)dy\Big)dx = \int_A \Big(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \varphi(x, y)dy\Big)dx. \quad \square$$

Twierdzenie* 11.2.7 (Twierdzenie o zmianie zmiennych w całce Riemanna)**.** *Niech $\Phi : U \longrightarrow V$ będzie dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^1$ zbiorów otwartych $U, V \subset \mathbb{R}^n$ i niech $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $A \subset\subset U$. Wtedy:*

- *$\Phi(A) \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$,*
- *dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{R}(\Phi(A))$ funkcja $(f \circ \Phi) \cdot |\Phi'|$ jest całkowalna na A, gdzie $|\Phi'|$ oznacza moduł wyznacznika macierzy Jacobiego odwzorowania Φ* (10)*,*
- *$\int_{\Phi(A)} f = \int_A (f \circ \Phi) \cdot |\Phi'|, \quad f \in \mathcal{R}(\Phi(A))$.*

Dowód zostanie podany później (Wniosek 12.15.10). Teraz tylko zauważmy, że regularność $\Phi(A)$ wynika z Twierdzenia 11.1.10(b_2) ($A = \operatorname{int} A \cup Z$, gdzie $|Z| = 0$) oraz że twierdzenie jest prawdziwe dla translacji.

Ćwiczenie 11.2.8. Wyznaczyć $\det \Phi'$, sprawdzić czy $\Phi|_U$ jest dyfeomorfizmem oraz wyznaczyć $V := \Phi(U)$ dla następujących transformacji i obszarów U ($a, b, c > 0$ oznaczają stałe):

- (współrzędne biegunowe) $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\Phi(r, \varphi) := (ar \cos \varphi, br \sin \varphi)$, $U := \mathbb{R}_{>0} \times (0, 2\pi)$;
- (współrzędne walcowe) $\Phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\Phi(r, \varphi, z) := (ar \cos \varphi, br \sin \varphi, cz)$, $U := \mathbb{R}_{>0} \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$;
- (wspórzędne sferyczne) $\Phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\Phi(r, \varphi, \theta) := (ar \cos \varphi \cos \theta, br \sin \varphi \cos \theta, cr \sin \theta)$, $U := \mathbb{R}_{>0} \times (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$;
- (współrzędne sferyczne w $\mathbb{R}^n$) $\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
\Phi_1(r, \omega) &:= r \cos \omega_1 \cos \omega_2 \cos \omega_3 \dots \cos \omega_{n-2} \cos \omega_{n-1},\\
\Phi_2(r, \omega) &:= r \sin \omega_1 \cos \omega_2 \cos \omega_3 \dots \cos \omega_{n-2} \cos \omega_{n-1},\\
\Phi_3(r, \omega) &:= r \sin \omega_2 \cos \omega_3 \dots \cos \omega_{n-2} \cos \omega_{n-1},\\
&\dots\\
\Phi_{n-1}(r, \omega) &:= r \sin \omega_{n-2} \cos \omega_{n-1},
\end{aligned}$$

(9) Np. $\varphi \in \mathcal{C}_b(B, \mathbb{C})$.

(10) Tzn. $|\Phi'|(x) := |\det[\frac{\partial \Phi_j}{\partial x_k}(x)]_{j,k=1,\dots,n}|$.

$\Phi_n(r,\omega) := r\sin\omega_{n-1}$,

$U := \mathbb{R}_{>0} \times (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{n-2}$.

Ćwiczenie 11.2.9. Niech $a_1, \dots, a_n > 0$, $\mathbb{E} := \Big\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n^2} \leqslant 1\Big\}$. Obliczyć $|\mathbb{E}|$.

[Wykład 21.01.2021 . . . .]

11.3. Funkcje dane całką

Twierdzenie 11.3.1 (Twierdzenie o funkcjach danych całką)**.** *Niech Ω będzie zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^m$, niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie regularnym zbiorem zwartym* (11) *i niech $f : \Omega \times A \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie odwzorowaniem takim, że dla pewnego $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ mamy:*

- *$f(\cdot, t) \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ dla dowolnego $t \in A$,*
- *odwzorowanie $\Omega \times A \ni (x,t) \longmapsto D_x^\alpha f(x,t) \in \mathbb{R}$ jest ciągłe dla $|\alpha| \leqslant k$* (12)*.*

Wtedy odwzorowanie $\Omega \ni x \overset{\varphi}{\longmapsto} \int_A f(x,t)dt$ jest klasy $\mathcal{C}^k(\Omega)$ oraz $D^\alpha\varphi(x) = \int_A D_x^\alpha f(x,t)dt$, $x \in \Omega$, $|\alpha| \leqslant k$.

Dowód. Ćwiczenie— por. Twierdzenie 7.7.1. □

Twierdzenie 11.3.2 (Twierdzenie o funkcjach danych całką niewłaściwą)**.** *Niech Ω będzie zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^m$, niech $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ i niech $f : \Omega \times [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie odwzorowaniem takim, że dla pewnego $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ mamy:*

- *$f(\cdot, t) \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ dla dowolnego $t \in [a,b)$,*
- *odwzorowanie $\Omega \times [a,b) \ni (x,t) \longmapsto D_x^\alpha f(x,t) \in \mathbb{R}$ jest ciągłe dla $|\alpha| \leqslant k$,*
- *dla dowolnego $|\alpha| \leqslant k$ istnieje odwzorowanie $g_\alpha \in \mathfrak{R}([a,b))$ takie, że $|D_x^\alpha f(x,t)| \leqslant g_\alpha(t)$ dla $(x,t) \in \Omega \times [a,b)$.*

Wtedy odwzorowanie $\Omega \ni x \overset{\varphi}{\longmapsto} \int_a^b f(x,t)dt$ jest klasy $\mathcal{C}^k(\Omega)$ oraz $D^\alpha\varphi(x) = \int_a^b D_x^\alpha f(x,t)dt$, $x \in \Omega$, $|\alpha| \leqslant k$. (13)

Odnotujmy, że analogiczny wynik zachodzi, gdy przedział $[a,b)$ zastąpimy przedziałem $(a,b]$ ($-\infty \leqslant a < b < +\infty$) lub też przedziałem (a,b) ($-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$).

Dowód. Ćwiczenie— por. Twierdzenie 7.7.2. □

11.4. Twierdzenie Morse'a

Twierdzenie 11.4.1. *Niech $D \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem gwiaździstym względem punktu $a = (a_1, \dots, a_n) \in D$* (14) *i niech $f \in \mathcal{C}^k(D)$ ($k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$). Wtedy istnieją funkcje $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}^{k-1}(D)$ takie, że*

$$f(x) - f(a) = \sum_{j=1}^n (x_j - a_j) f_j(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in D.$$

Zauważmy, że musi być $f_j(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$, $j = 1, \dots, n$. Istotnie,

$$\frac{f(a + he_j) - f(a)}{h} = f_j(a + he_j) \longrightarrow f_j(a), \quad j = 1, \dots, n.$$

Dowód Twierdzenia 11.4.1. Możemy założyć, że $a = 0$. Niech

$$f_j(x) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx)dt, \quad x \in D.$$

Wtedy $f_j \in \mathcal{C}^{k-1}(D)$, $j = 1, \dots, n$ (zob. Twierdzenie 11.3.1). Ponadto, mamy:

$$\sum_{j=1}^n x_j f_j(x) = \int_0^1 \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx)dt = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx)dt = f(x) - f(0). \qquad \square$$

(11) Np. $A = P$ – kostka.
(12) Dla $k = 0$ warunek ten oznacza po prostu ciągłość f.
(13) Zauważmy, że nasze założenia gwarantują zbieżność wszystkich występujących w tezie całek niewłaściwych.
(14) Tzn. $a + t(x - a) \in D$ dla $x \in D$ i $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Wniosek 11.4.2. *Niech $D \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem gwiaździstym względem punktu 0 i niech $f \in \mathcal{C}^k(D)$ ($k \in \mathbb{N}_2 \cup \{\infty\}$), $f(0) = 0$, $\operatorname{grad} f(0) = 0$. Wtedy istnieją funkcje $f_{j,k} \in \mathcal{C}^{k-2}(D)$, $j,k = 1,\dots,n$, takie, że*

$$f(x) = \sum_{j,k=1}^{n} x_j x_k f_{j,k}(x), \quad x = (x_1,\dots,x_n) \in D, \ \textit{przy czym } f_{j,k} = f_{k,j}.$$

Zauważmy, że musi być $f_{j,k}(0) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(0)$, $j,k = 1,\dots,n$. Istotnie, na podstawie wzoru Taylora mamy:

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(0) x_j x_k + o(\|x\|^2) = \sum_{j,k=1}^{n} x_j x_k f_{j,k}(x), \quad x \longrightarrow 0, \ \text{a stąd}$$
$$\sum_{j,k=1}^{n} x_j x_k \Big(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(0) - f_{j,k}(x)\Big) = o(\|x\|^2), \quad x \longrightarrow 0.$$

W szczególności, biorąc $x = x(t) := te_j + te_k$ dla $j \neq k$, lub też $x = x(t) := te_j$ dla $j = k$, dostajemy

$$t^2\Big(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(0) - f_{j,k}(x(t))\Big) = o(t^2), \quad t \longrightarrow 0,$$

skąd natychmiast wynika żądany wzór.

Dowód Wniosku 11.4.2. Na podstawie Twierdzenia 11.4.1 mamy $f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(x)$, $x \in D$, gdzie $f_j \in \mathcal{C}^{k-1}(D)$ oraz $f_j(0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(0) = 0$, $j = 1,\dots,n$. Stosując to samo twierdzenie do funkcji f_j, dostajemy

$$f(x) = \sum_{j,k=1}^{n} x_j x_k f_{j,k}(x), \quad x \in D,$$

gdzie $f_{j,k} \in \mathcal{C}^{k-2}(D)$, $j,k = 1,\dots,n$. Zastępując funkcję $f_{j,k}$ przez $\frac{1}{2}(f_{j,k} + f_{k,j})$ zapewniamy sobie symetrię. □

Definicja 11.4.3. Niech $\Omega \in \operatorname{top}\mathbb{R}^n$, niech $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ i niech $a \in \Omega$. Załóżmy, że $f'(a) = 0$ (tzn. a jest punktem krytycznym funkcji f). Powiemy, że jest to *punkt krytyczny nieosobliwy*, jeżeli odwzorowanie $f''(a)$ (rozumiane jako $n \times n$–wymiarowa macierz symetryczna) ma rząd n. W przeciwnym przypadku mówimy, że punkt krytyczny jest *osobliwy*.

Przykład 11.4.4 (Punkty krytyczne osobliwe)**.** (a) $f(x) = x^3$: $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$. Punkt $x = 0$ jest jedynym punktem krytycznym; jest to punkt osobliwy.

(b) $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}\sin^2(1/x), & \text{jeżeli } x \neq 0 \\ 0, & \text{jeżeli } x = 0 \end{cases}$: $f'(0) = f''(0) = 0$, 0 jest punktem krytycznym nieizolowanym (Ćwiczenie).

(c) $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$: $f'(x,y) = [3x^2 - 3y^2, -6xy]$, $f''(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & -6y \\ -6y & -6x \end{bmatrix}$; $f'(0,0) = 0$, $f''(0,0) = 0$.

(d) $f(x,y) = x^2$: $f'(x,y) = [2x, 0]$, $f''(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Zbiór punktów krytycznych to prosta $x = 0$; wszystkie punkty krytyczne są osobliwe.

(e) $f(x,y) = x^2y^2$: $f'(x,y) = [2xy^2, 2x^2y]$, $f''(x,y) = \begin{bmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{bmatrix}$. Zbiór punktów krytycznych to dwie proste $xy = 0$; wszystkie punkty krytyczne są osobliwe.

Obserwacja 11.4.5 (Diagonalizacja form kwadratowych)**.** Rozważmy formę kwadratową $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \not\equiv 0$, postaci $f(x) = \sum_{j,k=1}^{n} a_{j,k} x_j x_k = x^t A x$, gdzie $A := [a_{j,k}]$ jest macierzą symetryczną. Jeżeli $x = Px'$ zadaje zmianę współrzędnych (P jest macierzą nieosobliwą), to w nowych współrzędnych macierz formy

f ma postać P^tAP (jest to macierz przystająca do macierzy A). Proces *diagonalizacji* formy f polega na znalezieniu takich współrzędnych x', w których forma f ma postać

$$f(Px') = {x'_1}^2 + \cdots + {x'_k}^2 - {x'}^2_{k+1} - \cdots - {x'_r}^2$$

dla pewnych $0 \leqslant k \leqslant r \leqslant n$. Wiadomo, że taka diagonalizacja jest zawsze możliwa. Jest oczywiste, że $r = \operatorname{rank} A$ (w szczególności, $r = n$, o ile A jest nieosobliwa). Wiadomo również, że liczby k, r zależą wyłącznie od f.

Twierdzenie 11.4.6 (Twierdzenie Morse'a [15])**.** *Niech $\varOmega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym, niech $f \in \mathcal{C}^\infty(\varOmega)$ i niech $a \in \varOmega$ będzie punktem krytycznym nieosobliwym z $f(a) = 0$. Wtedy istnieje dyfeomorfizm $\varPhi : U \longrightarrow \varPhi(U) \subset \varOmega$ klasy $\mathcal{C}^\infty$, gdzie U jest pewnym otoczeniem zera, taki że $\varPhi(0) = a$ oraz*

$$f \circ \varPhi(t) = t_1^2 + \cdots + t_k^2 - t_{k+1}^2 - \cdots - t_n^2, \quad t = (t_1, \ldots, t_n) \in U, \ \textit{dla pewnego } k \in \{0, \ldots, n\}.$$

Obserwacja 11.4.7. $\operatorname{grad}(f \circ \varPhi)(t) = 0 \iff t = 0$, skąd w szczególności wynika, że punkty krytyczne nieosobliwe odwzorowań klasy $\mathcal{C}^\infty$ są izolowane.

Dowód Twierdzenia Morse'a. Możemy założyć, że $a = 0$. Zastosujemy indukcję. Pokażemy, że dla dowolnego $r \in \{1, \ldots, n+1\}$ istnieje lokalna $\mathcal{C}^\infty$–dyfeomorficzna zmiana układu współrzędnych $\varPhi_r$, $\varPhi_r(0) = 0$, po której, dla x w pewnym otoczeniu zera, mamy:

$$f \circ \varPhi_r(x) = \sum_{i=1}^{r-1} \sigma_i x_i^2 + \sum_{j,k=r}^{n} x_j x_k f_{j,k}(x),$$

gdzie $\sigma_1, \ldots, \sigma_{r-1} \in \{-1, 1\}$, $f_{j,k}$ są klasy $\mathcal{C}^\infty$ oraz $f_{j,k} = f_{k,j}$, $j, k = r, \ldots, n$. Zauważmy, że przypadek $r = 1$, to Wniosek 11.4.2, zaś $r = n+1$, to teza Twierdzenia Morse'a. Przechodzimy do kroku indukcyjnego $r \rightsquigarrow r+1$.

Niech $g := f \circ \varPhi_r$. Wiemy, że $g''(0)(h) = f''(0)(\varPhi_r'(0)(h)) + f'(0)(\varPhi_r''(0)(h)) = f''(0)(\varPhi_r'(0)(h))$, skąd, w szczególności, wynika, że macierz $g''(0)$ jest nieosobliwa. Zauważmy, że dla $p \in \{1, \ldots, r-1\}$ i $q \in \{r, \ldots, n\}$ mamy

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_p \partial x_q}(0) = \frac{\partial}{\partial x_q}\Big(2\sigma_p x_p + \sum_{j,k=r}^{n} x_j x_k \frac{\partial f_{j,k}}{\partial x_p}(x)\Big)\Big|_{x=0} = 0.$$

Stąd

$$g''(0) = \begin{bmatrix} 2\sigma_1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \ldots & 2\sigma_{r-1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & f_{r,r}(0) & \ldots & f_{r,n}(0) \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \ldots & 0 & f_{n,r}(0) & \ldots & f_{n,n}(0) \end{bmatrix}.$$

Ponieważ macierz $g''(0)$ jest nieosobliwa, zatem macierz $[f_{j,k}(0)]_{j,k=r,\ldots,n}$ musi być również nieosobliwa. Po liniowej zmianie współrzędnych $x_r, \ldots, x_n$ możemy uzyskać sytuację, w której $f_{r,r}(0) \neq 0$. Oznaczmy przez $\widetilde{\varPhi}_r$ dyfeomorfizm powstały ze złożenia tej zmiany współrzędnych z dyfeomorfizmem $\varPhi_r$. Niech $\sigma_r := \operatorname{sgn}(f_{r,r}(0))$ i niech U będzie otoczeniem zera takim, że $\operatorname{sgn}(f_{r,r}(x)) = \sigma_r$, $x \in U$. Zdefiniujmy

$$x'_r = \varPsi_r(x) := x_r \sqrt{|f_{r,r}(x)|} + \sigma_r \sum_{j=r+1}^{n} x_j \frac{f_{r,j}(x)}{\sqrt{|f_{r,r}(x)|}}, \quad x \in U.$$

Odnotujmy, że $\varPsi_r(0) = 0$ oraz

$$\sigma_r {x'}^2_r = x_r^2 f_{r,r}(x) + 2 \sum_{j=r+1}^{n} x_r x_j f_{r,j}(x) + \sum_{j,k=r+1}^{n} x_j x_k g_{j,k}(x),$$

[15] Harold Morse (1892–1977).

gdzie $g_{j,k} := \frac{f_{r,j}f_{r,k}}{|f_{r,r}|} \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Rozważmy odwzorowanie

$$x' = \Psi(x) := (x_1, \dots, x_{r-1}, \Psi_r(x), x_{r+1}, \dots, x_n), \quad x \in U.$$

Mamy $\Psi(0) = 0$. Ponadto,

$$\frac{\partial \Psi_r}{\partial x_s}(0) = \delta_{r,r}\sqrt{|f_{r,r}(0)|} + \sigma_r \sum_{j=r+1}^{n} \delta_{j,s} \frac{f_{r,j}(0)}{\sqrt{|f_{r,r}(0)|}}.$$

W szczególności, $\frac{\partial \Psi_r}{\partial x_s}(0) = 0$ dla $s \leqslant r-1$, a wiec $\det \Psi_r'(0) = \frac{\partial \Psi_r}{\partial x_r}(0) = \sqrt{|f_{r,r}(0)|} \neq 0$. W konsekwencji Ψ jest $\mathcal{C}^\infty$–dyfeomorfizmem $V \longrightarrow \Psi(V)$ w pewnym otoczeniu zera $V \subset U$. Ostatecznie mamy

$$\begin{aligned} f \circ \widetilde{\Phi}_r(x) &= \sum_{i=1}^{r-1} \sigma_i x_i^2 + x_r^2 f_{r,r}(x) + 2\sum_{j=r+1}^{n} x_r x_j f_{r,j}(x) + \sum_{j,k=r+1}^{n} x_j x_k f_{j,k}(x) \\ &= \sum_{i=1}^{r-1} \sigma_i x_i^2 + \sigma_r {x_r'}^2 - \sum_{j,k=r+1}^{n} x_j x_k g_{j,k}(x) + \sum_{j=r+1}^{n} x_r x_j f_{r,j}(x) \\ &= \sum_{i=1}^{r} \sigma_i {x_i'}^2 + \sum_{j,k=r+1}^{n} x_j' x_k' h_{j,k}(x'). \end{aligned}$$ □

[Wykład 25.01.2021 . . . .]

11.5. Całki krzywoliniowe II

Twierdzenie 11.5.1 (Niezależność całki krzywoliniowej od drogi całkowania)**.** *Niech $D \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem i niech $V : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) *dla dowolnej drogi $\gamma : [0,1] \longrightarrow D$ całka $\int_\gamma V dx$ zależy jedynie od końców tej drogi;*

(ii) *pole V jest* potencjalne*, tzn. istnieje funkcja $\Phi \in \mathcal{C}^1(D)$ (zwana* potencjałem*) taka, że*

$$V_j = \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Warunek (i) pozwala zdefiniować dla $A, B \in D$ całkę $\int_A^B V dx$ rozumianą jako całka po dowolnej drodze łączącej A i B wewnątrz obszaru D. W szczególności, całka po dowolnej drodze zamkniętej jest równa zero.

Zauważmy, że potencjał pola jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do stałej.

Dowód. (ii) $\Longrightarrow$ (i): Na podstawie Twierdzenia 7.8.5 dostajemy

$$\int_\gamma V dx = \int_0^1 \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt = \int_0^1 (\Phi \circ \gamma)'(t) dt = \Phi(\gamma(1)) - \Phi(\gamma(0)).$$

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Ustalmy $A \in D$ i niech

$$\Phi(x) := \int_A^x V dx, \quad x \in D.$$

Wtedy dla $a \in D$ i dla $j \in \{1, \dots, n\}$, korzystając z niezależności całki od drogi, mamy

$$\begin{aligned} \Big|\frac{\Phi(a + he_j) - \Phi(a)}{h} - V_j(a)\Big| &= \Big|\frac{1}{h}\int_{[a,a+he_j]} V dx - V_j(a)\Big| = \Big|\int_0^1 V_j(a + the_j) dt - V_j(a)\Big| \\ &\leqslant \max\{|V_j(a + the_j) - V_j(a)| : 0 \leqslant t \leqslant 1\} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$ □

Twierdzenie 11.5.2 (Lemat Poincarégo [16])**.** *Niech $D \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem gwiaździstym względem punktu a i niech $V \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^n)$. Wtedy V jest polem potencjalnym wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\frac{\partial V_j}{\partial x_k} = \frac{\partial V_k}{\partial x_j}, \quad j, k = 1, \dots, n. \quad [17] \tag{$*$}$$

[16] Jules Henri Poincaré (1854–1912).

Przykład 11.5.3. Powinniśmy zawsze pamiętać o następującym przykładzie obszaru, w którym Lemat Poincarégo nie zachodzi.

Niech $D := (\mathbb{R}^2)_* = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\varphi(x,y) := \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$, $(x,y) \in D$, $P(x,y) := -\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $Q(x,y) := \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$. Wtedy $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$ (Ćwiczenie), a wiec pole $V := (P,Q)$ spełnia warunek (*). Gdyby to pole było potencjalne w obszarze D, to na podstawie Twierdzenia 11.5.1, całka z tego pola po dowolnej drodze zamkniętej leżącej w D byłaby równa zero. Z drugiej strony, biorąc jako drogę okrąg jednostkowy mamy

$$\int_\gamma Pdx + Qdy = \int_0^{2\pi} \big(P(\cos t, \sin t)(-\sin t) + Q(\cos t, \sin t)\cos t\big)dt = 2\pi,$$

co daje sprzeczność.

Dowód Twierdzenia 11.5.2. Oczywiście, jeżeli pole V jest potencjalne i Φ jest jego potencjałem, to Φ musi być klasy $\mathcal{C}^2$, a zatem:

$$\frac{\partial V_j}{\partial x_k} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial V_k}{\partial x_j}, \quad j,k = 1,\dots,n.$$

W drugą stronę: możemy założyć, że $a = 0$. Niech

$$\Phi(x) := \int_{[0,x]} V dx = \int_0^1 \langle V(tx), x\rangle dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n V_i(tx)x_i dt, \quad x \in D.$$

Na podstawie twierdzenia o funkcjach danych całką funkcja Φ jest klasy $\mathcal{C}^1$. Ponadto dla $x \in D$ i $j \in \{1,\dots,n\}$ mamy:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}(x) = \int_0^1 \Big(\sum_{i=1}^n \frac{\partial V_i}{\partial x_j}(tx)tx_i + V_j(tx)\Big)\Big)dt \overset{\text{na mocy } (*)}{=} \int_0^1 \Big(t\sum_{i=1}^n \frac{\partial V_j}{\partial x_i}(tx)x_i + V_j(tx)\Big)\Big)dt$$
$$= \int_0^1 \Big(t\frac{d}{dt}V_j(tx) + V_j(tx)\Big)dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}(tV_j(tx))dt = tV_j(tx)|_0^1 = V_j(x). \qquad \square$$

[Wykład 28.01.2021 . . . .]

11.6. Wzór Greena

Przypomnijmy (Definicja 4.5.1), że krzywa Jordana na płaszczyżnie to homemorficzny obraz okręgu $\sigma : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, który utożsamiamy z krzywą zamkniętą $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ($\gamma(t) := \sigma(e^{2\pi i t})$). Wiadomo, że każda krzywa Jordana $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dzieli płaszczyznę na dwa obszary:

- ograniczony, zwany *wnętrzem krzywej* γ i oznaczany $\operatorname{int}\gamma$,
- nieograniczony, zwany *zewnętrzem krzywej* γ i oznaczany $\operatorname{ext}\gamma$,

takie, że $\partial(\operatorname{int}\gamma) = \partial(\operatorname{ext}\gamma) = \gamma^*$.

Definicja 11.6.1. Niech $D \subset \mathbb{R}^2$ będzie obszarem ograniczonym takim, że dla pewnego $N \in \mathbb{N}_0$ mamy:

(†) $\partial D = \gamma_0^* \cup \dots \cup \gamma_N^*$, gdzie $\gamma_j : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ jest drogą Jordana(18) *zorientowaną dodatnio względem* D, tzn. „gdy idziemy po γ_j^* zgodnie z przebiegiem parametru, to obszar D mamy po lewej ręce”, $j = 0,\dots,N$,
$\gamma_j^* \subset \operatorname{int}\gamma_0$, $j = 1,\dots,N$,
$\gamma_j^* \subset \operatorname{ext}\gamma_k^*$ dla $j,k = 1,\dots,N$, $j \neq k$.

Powiemy, że dla obszaru ograniczonego $D \subset \mathbb{R}^2$ spełniającego warunek (†) zachodzi *wzór Greena* (19), jeżeli dla dowolnych funkcji $P,Q \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, gdzie Ω jest pewnym otoczeniem $\overline{D}$, zachodzi wzór:

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \int_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big). \quad (20)$$

(17) Mamy $\binom{n}{2}$ nietrywialnych warunków.
(18) Tzn. drogą będącą krzywą Jordana.
(19) George Green (1793–1841).

Zauważmy, że na mocy Twierdzenia 11.1.10 obszar D jest regularny oraz, że całki po obu stronach powyższego wzoru istnieją. Problemem jest równość.

Obserwacja 11.6.2. (a) Przypuśćmy, że D jest *normalny względem osi* x, tzn.

$$D = \{(x,y) \in (a,b) \times \mathbb{R} : \varphi(x) < y < \psi(x)\},$$

gdzie $\varphi, \psi \in \mathcal{C}([a,b]) \cap \mathcal{C}'^1([a,b])$ i $\varphi(x) < \psi(x)$ dla $x \in (a,b)$ (21). Niech dalej $Q := 0$. Wtedy, na podstawie twierdzenia o całkach iterowanych, mamy:

$$\int_D \Big(\frac{\partial 0}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) = -\int_a^b \Big(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy\Big) dx = \int_a^b \big(P(x,\varphi(x)) - P(x,\psi(x))\big) dx$$
$$= \int_{[a,b]\ni t \longrightarrow (t,\varphi(t))} Pdx + 0dy + \int_{\ominus\big([a,b]\ni t \longrightarrow (t,\psi(t))\big)} Pdx + 0dy = \int_{\partial D} Pdx + 0dy.$$

(b) Jeżeli D jest normalny względem osi y, to $\int_D \big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial 0}{\partial y}\big) = \int_{\partial D} 0dx + Qdy$.

(c) *Wzór Greena zachodzi dla obszarów normalnych względem obu osi* (np. dla prostokątów, trójkątów, elips, wielokątów wypukłych itd).

(d) *Wzór Greena zachodzi dla obszarów, które dają się podzielić na skończoną liczbę obszarów normalnych względem obu osi* (np. dla wielokątów (mogących mieć „dziury”)).

(e) Jeżeli dla obszaru D zachodzi wzór Greena, to $|D| = \frac{1}{2}\int_{\partial D} -ydx + xdy$. Wzór ten był podstawą budowy *planimetru*.

Definicja 11.6.3. Aby poznać ogólniejszą klasę obszarów, dla których zachodzi wzór Greena, rozważmy następującą konstrukcję. Niech $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ będzie krzywą Jordana. Dla dowolnego podziału $\pi = (t_0, \dots, t_m)$ odcinka $[0,1]$, niech $\gamma_\pi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ oznacza łamaną wpisaną w γ wyznaczoną przez podział π, tzn. $\gamma_\pi = [\gamma(t_0), \dots, \gamma(t_m)]$.

Obserwacja 11.6.4. Niech $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ będzie normalnym ciągiem podziałów odcinka $[0,1]$.

(a) $\gamma_{\pi_k} \longrightarrow \gamma$ jednostajnie na $[0,1]$.

(b) Wobec (a), jeżeli krzywe $\gamma_{0,\pi_k}, \dots, \gamma_{N,\pi_k}$ są Jordana, to dla $k \gg 1$ spełniają one (†) dla pewnego obszaru D_{π_k}. Ponadto, jeżeli $\overline{D} \subset \Omega$, to $\overline{D}_{\pi_k} \subset \Omega$, $k \gg 1$.

(c) (Ćwiczenie*) Istnieje droga Jordana γ taka, że pewnego normalnego ciągu podziałów γ_{π_k} nie jest Jordana dla dowolnego k.

(d) Jeżeli γ jest klasy $\mathcal{C}^1$ oraz $\gamma_j'(t) \neq 0$, $t \in [0,1]$, to γ_{π_k} jest Jordana dla $k \gg 1$.

Istotnie, przypuśćmy, że istnieje normalny ciąg podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ oraz punkty $u_k', u_k'' \in [0,1]$, $k = 1,2,\dots$, takie że $|u_k' - u_k''| < 1$ oraz $\gamma_{\pi_k}(u_k') = \gamma_{\pi_k}(u_k'')$, $k = 1,2,\dots$. Możemy założyć, że $u_k' \longrightarrow u_0'$, $u_k'' \longrightarrow u_0''$. Na podstawie (a) wnioskujemy, że $\gamma(u_0') = \gamma(u_0'')$.

Odwzorowanie γ przedłuża się w sposób naturalny do odwzorowania $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, klasy $\mathcal{C}^1$, okresowego o okresie 1 i takiego, że $\gamma'(t) \neq 0$ dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$. Korzystając z twierdzenia o funkcji uwikłanej, widzimy, że dla dowolnego $u \in [0,1]$ istnieje ograniczony prostokąt otwarty $P_u = P_{u,x} \times P_{u,y}$ o środku w punkcie $\gamma(u)$ taki, że $\gamma^* \cap P_u$ jest wykresem (względem którejś osi) funkcji klasy $\mathcal{C}^1$. Niech dla przykładu $\gamma^* \cap P_u = \{(t,\varphi(t)) : t \in P_{u,x}\}$, gdzie $\varphi : P_{u,x} \longrightarrow P_{u,y}$ jest klasy $\mathcal{C}^1$. Weźmy dowolne prostokątne otoczenie $Q_u \subset\subset P_u$ punktu $\gamma(u)$. Zauważmy, że $\gamma_{\pi_k}^* \cap \overline{Q}_u$ musi być łukiem Jordana dla $k \geqslant k(u) \gg 1$. Dobierzmy $u_1, \dots, u_N \in [0,1]$ tak, że $\gamma^* \subset Q_{u_1} \cup \dots \cup Q_{u_N}$.

W przypadku, gdy $u_0' = u_0'' =: t_0$, niech $\gamma(t_0) \in Q_{u_{j_0}}$. Wtedy $\gamma_{\pi_k}(u_k'), \gamma_{\pi_k}(u_k'') \in Q_{u_{j_0}}$ dla $k \gg 1$, a więc $\gamma_{\pi_k}(u_k') \neq \gamma_{\pi_k}(u_k'')$ dla $k \gg 1$ — sprzeczność. W przypadku, gdy np. $u_0' = 0$, $u_0'' = 1$, wystarczy skorzystać z okresowości.

Twierdzenie 11.6.5 (Wzór Greena)**.** *Niech $D \subset \mathbb{R}^2$ będzie obszarem spełniającym (†) i niech $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ będzie normalnym ciągiem podziałów takim, że dla dowolnych $k \in \mathbb{N}$ i $j \in \{0, \dots, N\}$ mamy:*

- *γ_{j,π_k} jest krzywą Jordana,*
- *jeżeli $\pi_k = (t_{k,0}, \dots, t_{k,m_k})$, to $\gamma_j|_{[t_{k,i-1}, t_{k,i}]} \in \mathcal{C}^1([t_{k,i-1}, t_{k,i}])$, $i = 1, \dots, m_k$.*

---

(20) Stosujemy tu tradycyjne oznaczenia: $\int_{\partial D} Pdx + Qdy := \sum_{j=0}^{N} \int_{\gamma_j} Pdx + Qdy$.

(21) Nie wykluczamy równości na końcach przedziału.

*Wtedy wzór Greena zachodzi. W szczególności, jeżeli $\gamma_j : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ jest krzywą Jordana klasy $\mathcal{C}^1$, $\gamma_j'(t) \neq 0$, $t \in [0,1]$, $j = 0,\dots,N$, to wzór Greena zachodzi (Obserwacja 11.6.4(*d*)).*

W przyszłości pokażemy, że powyższe dodatkowe założenia można pominąć, a więc *wzór Greena zachodzi dla dowolnego obszaru spełniającego* (†) — zob. § 13.3.

Dowód. Niech Ω, P i Q będą jak w Definicji 11.6.1. Wobec Obserwacji 11.6.4(b), możemy założyć, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$, krzywe γ_{j,π_k}, $j = 0,\dots,N$, spełniają (†) i ograniczają pewien obszar $D_{\pi_k} \subset\subset \Omega$. Na podstawie Obserwacji 11.6.2(d), wzór Greena zachodzi dla D_{π_k}, tzn. $\int_{\partial D_{\pi_k}} Pdx + Qdy = \int_{D_{\pi_k}} \big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\big)$, $k \gg 1$. Jeżeli pokażemy zbieżność do siebie odpowiednich całek gdy $k \longrightarrow +\infty$, to uzyskamy wzór Greena dla D.

Ustalmy $k \in \mathbb{N}$ i $j \in \{0,\dots,N\}$. Dla uproszczenia oznaczeń niech $V = (P,Q)$, $\pi := \pi_k = (t_0,\dots,t_m)$, $\gamma = \gamma_j$. Możemy założyć (zmniejszając Ω), że V jest odwzorowaniem ograniczonym i jednostajnie ciągłym na Ω oraz że $f := \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ jest funkcją ograniczoną na Ω. Mamy:

$$\gamma_\pi(t) := \gamma(t_{i-1}) + \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})), \quad t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i, \quad i = 1,\dots,m.$$

Liczymy:

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{\gamma_\pi} V dx - \int_\gamma V dx\Big| &\leqslant \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Big|\Big\langle V(\gamma_\pi(t)), \gamma_\pi'(t)\Big\rangle - \Big\langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\Big\rangle\Big|\, dt \\
&= \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Big|\Big\langle V(\gamma_\pi(t)), \frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\Big\rangle - \Big\langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\Big\rangle\Big|\, dt \\
&\leqslant \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Big|\Big\langle V(\gamma_\pi(t)), \frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) - \gamma'(t)(t_i - t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\Big\rangle\Big|\, dt \\
&\quad + \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Big|\Big\langle V(\gamma_\pi(t)) - V(\gamma(t)), \gamma'(t)\Big\rangle\Big|\, dt \\
&\leqslant \big(\sup_\Omega \|V\|\big)\omega_{\gamma'}(\operatorname{diam}\pi) + \big(\max_{\gamma^*} \|\gamma'\|\big)\omega_V(\omega_\gamma(\operatorname{diam}\pi)).
\end{aligned}$$

Wynika stąd natychmiast, że $\int_{\partial D_{\pi_k}} Pdx + Qdy \longrightarrow \int_{\partial D} Pdx + Qdy$.

Niech $|f| \leqslant c$ na Ω. Wtedy $\Big|\int_{D_{\pi_k}} f - \int_D f\Big| \leqslant c(|D \setminus D_{\pi_k}| + |D_{\pi_k} \setminus D|)$; zauważmy, że zbiory $D \setminus D_{\pi_k}$, $D_{\pi_k} \setminus D$ są regularne. Pozostaje udowodnić, że $|D \setminus D_{\pi_k}| + |D_{\pi_k} \setminus D| \longrightarrow 0$, gdy $k \longrightarrow +\infty$. Istotnie, niech $\varepsilon > 0$ i niech $Q_1,\dots,Q_r$ będą kwadratami takimi, że $\partial D \subset \operatorname{int} Q_1 \cup \dots \cup \operatorname{int} Q_r$ i $|Q_1| + \dots + |Q_r| \leqslant \varepsilon$ (por. dowód Twierdzenia 11.1.10). Wtedy, jeżeli $k \gg 1$, to $(D \setminus D_{\pi_k}) \cup (D_{\pi_k} \setminus D) \subset Q_1 \cup \dots \cup Q_r$, a zatem $|D \setminus D_{\pi_k}| + |D_{\pi_k} \setminus D| \leqslant |Q_1| + \dots + |Q_r| \leqslant \varepsilon$. □