Sprawy organizacyjne

Literatura

Wykład będzie w zasadzie „samowystarczalny”. Oto kilka pozycji przydatnej literatury uzupełniającej (wszystkie pozycje zostały wydane przez PWN, z wyjątkiem książek H. Cartana i H. Federera):

Andrzej Birkholc, *Analiza matematyczna.*
Henri Cartan, *Calcul différentiel. Formes différentielles*, Herman, Paris.
Ryszard Engelking, *Topologia ogólna.*
Herbert Federer, *Geometric measure theory*, Springer Verlag, Berlin.
Grigorij Michajłowicz Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. I–III.
Franciszek Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy.*
Witold Kołodziej, *Analiza matematyczna.*
Kazimierz Kuratowski, *Rachunek różniczkowy i całkowy.*
Stanisław Łojasiewicz, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych.*
Krzysztof Maurin, *Analiza*, t. I–II.
Walter Rudin, *Podstawy analizy matematycznej.*
Walter Rudin, *Analiza rzeczywista i zespolona.*
Laurent Schwartz, *Kurs analizy matematycznej*, t. I–II.

Program wykładu

(1) Rpetytorium z teorii miary i całki.
  (a) σ-algebry i zbiory borelowskie.
  (b) Odwzorowania mierzalne.
  (c) Odwzorowania proste.
  (d) Funkcje Baire’a.
  (e) Miary.
  (f) Miary zewnętrzne. Warunek Carathéodory’ego.
  (g) Regularność miary.
  (h) Konstrukcja Carathéodory’ego.
  (i) Miary Hausdorffa.
  (j) Miara Lebesgue’a.
  (k) Ogólna teoria całki.
(2) Całka Riemanna a całka Lebesgue’a.
(3) Zasada Cavalieriego. Twierdzenia Tonellego i Fubiniego.
(4) Twierdzenie o zmianie zmiennych w całce Lebesgue’a.
(5) Funkcje dane całką.
(6) Gęstość $\mathcal{C}_0(\Omega, \mathbb{C})$ w $L^p(\Omega, \mathbb{C}, \mathcal{L}^n)$.
(7) Splot.
(8) Regularyzacja.
(9) Rozkład jedności.
(10) Miara i całka Lebesgue’a na podrozmaitościach w $\mathbb{R}^n$.
(11) Całkowanie form różniczkowych.
(12) Twierdzenie Stokesa.
(13) Miara i ko-miara odwzorowań lipschitzowskich.

(14) Szeregi Fouriera — uzupełnienia.
(15) Transformacja Fouriera.

Zaliczanie ćwiczeń

Sposób zaliczania ćwiczeń ustala prowadzący ćwiczenia.

Egzaminy

Egzamin będzie ustny.

W ciągu całego semestru, aż do rozpoczęcia zimowej sesji egzaminacyjnej, można zdawać w trybie zdalnym egzaminy częściowe, po wcześniejszym umówieniu terminu przy pomocy emaila. Egzamin częściowy może obejmować dowolny fragment wykładu. Zdane fragmenty wykładu nie obowiązują podczas głównego egzaminu w sesji egzaminacyjnej.

ROZDZIAŁ 13

Teoria miary i całki

Teoria miary i całki jest treścią niezależnego wykładu. W konsekwencji, znaczna część tego rozdziału ma na celu przypomnienie podstawowych pojęć i ustalenie oznaczeń. Dla kompletności wykładu pewne twierdzenia zostały podane z dowodami.

13.1. σ-algebry i zbiory borelowskie

Definicja 13.1.1 (σ-algebra)**.** Powiemy, że rodzina podzbiorów $\mathfrak{M} \subset \mathcal{P}(X)$ jest *σ–algebrą na X*, jeżeli:

(1) $\varnothing \in \mathfrak{M}$,

(2) $A \in \mathfrak{M} \Longrightarrow X \setminus A \in \mathfrak{M}$,

(3) $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M} \Longrightarrow \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{M}$.

Odnotujmy, że rodzina $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ wszystkich podzbiorów $\mathbb{R}^n$, które są mierzalne w sensie Jordana nie jest σ–algebrą.

Obserwacja 13.1.2 (Własności σ–algebr)**.** Poniżej $\mathfrak{M}$ oznacza σ–algebrę na X.

(a) $X \in \mathfrak{M}$.

(b) $\mathfrak{M} := \mathcal{P}(X)$ jest maksymalną σ–algebrą na X.

(c) $\mathfrak{M} := \{\varnothing, X\}$ jest minimalną σ–algebrą na X.

(d) $A_1, \ldots, A_N \in \mathfrak{M} \Longrightarrow A_1 \cup \cdots \cup A_N \in \mathfrak{M}$.

(e) $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M} \Longrightarrow \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{M}$.

(f) $A_1, \ldots, A_N \in \mathfrak{M} \Longrightarrow A_1 \cap \cdots \cap A_N \in \mathfrak{M}$.

(g) $A, B \in \mathfrak{M} \Longrightarrow A \setminus B \in \mathfrak{M}$.

(h) Dla dowolnego zbioru Y i dla dowolnego odwzorowania $f : X \longrightarrow Y$ rodzina

$$f_*\mathfrak{M} := \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathfrak{M}\}$$

jest σ–algebrą na Y. Zauważmy, że dla $g : Y \longrightarrow Z$ mamy: $g_* f_* \mathfrak{M} = (g \circ f)_* \mathfrak{M}$.

(i) Dla dowolnego zbioru $Y \subset X$ rodzina $\mathfrak{M}|_Y := \{A \cap Y : A \in \mathfrak{M}\}$ jest σ–algebrą na Y. Zauważmy, że jeżeli $Y \in \mathfrak{M}$, to $\mathfrak{M}|_Y = \{A \in \mathfrak{M} : A \subset Y\} \subset \mathfrak{M}$.

(j) Dla dowolnej rodziny $(\mathfrak{M}_t)_{t\in T}$ σ–algebr na X ($T \neq \varnothing$) rodzina $\bigcap\limits_{t\in T} \mathfrak{M}_t = \{A \subset X : \forall_{t\in T} : A \in \mathfrak{M}_t\}$ jest σ–algebrą na X. W szczególności, dla dowolnej rodziny $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ istnieje najmniejsza σ–algebra na X zawierająca $\mathcal{F}$, którą będziemy oznaczać przez $\sigma(\mathcal{F})$.

(k) Dla dowolnej rodziny $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ oraz zbioru $Y \subset X$ mamy $\sigma(\mathcal{F}|_Y) = \sigma(\mathcal{F})|_Y$.

inkluzji $\sigma(\mathcal{F}|_Y) \supset \sigma(\mathcal{F})|_Y$, niech $\mathfrak{M} := \{A \in \sigma(\mathcal{F}) : A \cap Y \in \sigma(\mathcal{F}|_Y)\}$. Oczywiście, $\mathcal{F} \subset \mathfrak{M}$. Ponadto, $\mathfrak{M}$ jest σ–algebrą (Ćwiczenie). Stąd $\mathfrak{M} = \sigma(\mathcal{F})$.

Definicja 13.1.3 (Zbiory borelowskie)**.** Jeżeli X jest przestrzenią topologiczną, to $\mathcal{B}(X) := \sigma(\operatorname{top} X)$ nazywamy *σ–algebrą zbiorów borelowskich na X*.

Definicja 13.1.4 (Kostki)**.**

$$\Delta_{\varepsilon,\alpha} := \varepsilon(\alpha + [0,1]^n), \quad \Delta^o_{\varepsilon,\alpha} := \varepsilon(\alpha + [0,1)^n), \quad \varepsilon > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}^n,$$

$$\mathcal{S}_k := \{\Delta_{1/2^k,\alpha} : \alpha \in \mathbb{Z}^n\}, \quad \mathcal{S} := \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{S}_k, \qquad \mathcal{S}^o_k := \{\Delta^o_{1/2^k,\alpha} : \alpha \in \mathbb{Z}^n\}, \quad \mathcal{S}^o := \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{S}^o_k;$$

zbiory typu $\Delta^o_{\varepsilon,\alpha}$ nazywa się czasami *kostką z narożnikiem*.

Obserwacja 13.1.5 (Własności kostek). (a) Dla dowolnych $k \in \mathbb{N}$ oraz $x \in \mathbb{R}^n$, istnieje dokładnie jedna kostka z narożnikiem $Q \in \mathcal{S}_k^o$ taka, że $x \in Q$.

(b) Dla dowolnych $k, \ell \in \mathbb{N}$ oraz $Q \in \mathcal{S}_k^o$, $R \in \mathcal{S}_\ell^o$, jeżeli $k < \ell$, to albo $Q \cap R = \varnothing$ albo $R \subset Q$.

(c) Dowolny zbiór $\varnothing \neq \Omega \operatorname{top} \mathbb{R}^n$ jest sumą co najwyżej przeliczalnej liczby kostek z rodziny $\mathcal{S}$, $\Omega = \bigcup_{j=1}^\infty P_j$, przy czym $\operatorname{int} P_i \cap \operatorname{int} P_j = \varnothing$ dla $i \neq j$.

(d) Dowolny zbiór $\varnothing \neq \Omega \operatorname{top} \mathbb{R}^n$ jest sumą co najwyżej przeliczalnej liczby parami rozłącznych kostek z narożnikiem z rodziny $\mathcal{S}^o$, $\Omega = \bigcup_{j=1}^\infty Q_j$.

Rodzinę tych kostek oznaczmy przez $\mathcal{F}_0$. Jest to rodzina co najwyżej przeliczalna (może być pusta). Niech teraz $\mathcal{F}_1$ oznacza rodzinę wszystkich kostek $P \in \mathcal{S}_2$ (odp. $P \in \mathcal{S}_2^o$) takich, że $P \subset \Omega$ oraz $P \not\subset \bigcup\limits_{Q \in \mathcal{F}_0} Q$. W ten sam sposób konstruujemy $\mathcal{F}_k$ jako rodzinę wszystkich kostek $P \in \mathcal{S}_k$ (odp. $P \in \mathcal{S}_k^o$) takich, że $P \subset \Omega$ oraz $P \cap \bigcup\limits_{j=0}^{k-1} \bigcup\limits_{Q \in \mathcal{F}_j} Q = \varnothing$, $k \geqslant 2$. Teraz, jako pokrycie zbioru Ω wystarczy wziąć rodzinę $\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \mathcal{F}_k$.

Obserwacja 13.1.6 (Własności zbiorów borelowskich). (a) $\mathcal{B}(X) = \sigma(\operatorname{cotop}(X))$. Zbiory typu $\mathcal{G}_\delta$[1] oraz zbiory typu $\mathcal{F}_\sigma$[2] są borelowskie.

(b) Korzystając z Obserwacji 13.1.5(c), wnioskujemy natychmiast, że $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{F})$, gdzie

$$\mathcal{F} := \{P \subset \mathbb{R}^n : P \text{ jest kostką}\}.$$

(c) Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie dowolnym zbiorem gęstym (np. $A = \mathbb{Q}$). Wtedy $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma(\mathcal{F})$, gdzie $\mathcal{F}$ jest jedną z następujących rodzin przedziałów:

- rodzina wszystkich przedziałów $\Delta \subset \overline{\mathbb{R}}$,
- rodzina wszystkich przedziałów $\Delta \subset \overline{\mathbb{R}}$ o końcach w $A \cup \{-\infty, +\infty\}$,
- $\{[-\infty, \alpha) : \alpha \in A\}$,
- $\{[-\infty, \alpha] : \alpha \in A\}$,
- $\{(\alpha, +\infty] : \alpha \in A\}$,
- $\{[\alpha, +\infty] : \alpha \in A\}$.

13.2. Odwzorowania mierzalne

Definicja 13.2.1. Niech $\mathfrak{M}$ będzie σ–algebrą na X i niech Y będzie przestrzenią topologiczną. Powiemy, że odwzorowanie $f : X \longrightarrow Y$ jest $\mathfrak{M}$*–mierzalne* (krótko: *mierzalne*), jeżeli $f^{-1}(\Omega) \in \mathfrak{M}$ dla dowolnego $\Omega \in \operatorname{top} Y$, tzn. $\operatorname{top} Y \subset f_*\mathfrak{M}$. Piszemy wtedy $f \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M})$ lub krótko:

- $f \in \mathcal{M}(X, Y)$, o ile z kontekstu jasno wynika, co to jest $\mathfrak{M}$,
- $f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$, o ile z kontekstu jasno wynika, co to jest Y, w szczególności, gdy $Y = \overline{\mathbb{R}}$ (z topologią naturalną),
- $f \in \mathcal{M}(X)$, o ile z kontekstu jasno wynika, co to jest Y i $\mathfrak{M}$.

Jeżeli X jest przestrzenią topologiczną, to odwzorowania $\mathcal{B}(X)$–mierzalne nazywamy *borelowskimi*.

Uwaga: We wszystkich istotnych przypadkach zakłada się dodatkowo, że $\operatorname{top} Y$ ma bazę przeliczalną, np. że Y jest ośrodkową przestrzenią metryczną. Bez dodatkowych założeń (o X lub/i Y), wprowadzone powyżej pojęcie odwzorowania mierzalnego jest zbyt ogólne i nie pozwala na uzyskanie interesujących wyników. W praktyce można się ograniczyć do przypadku, gdy $Y \in \{\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{C}\}$.

Obserwacja 13.2.2 (Własności odwzorowań mierzalnych). (a) $f \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M}) \iff \mathcal{B}(Y) \subset f_*\mathfrak{M}$.

(b) $\mathcal{C}(X, Y) \subset \mathcal{M}(X, Y, \mathcal{B}(X))$.

(c) Jeżeli $f \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M})$, $g \in \mathcal{M}(Y, Z, \mathcal{B}(Y))$ (np. $g \in \mathcal{C}(Y, Z)$), to $g \circ f \in \mathcal{M}(X, Z, \mathfrak{M})$ ($\mathcal{B}(Z) \subset g_*\mathcal{B}(Y) \subset g_*f_*\mathfrak{M} = (g \circ f)_*\mathfrak{M}$). W szczególności:

- jeżeli $f \in \mathcal{M}(X, \mathbb{C}_*, \mathfrak{M})$, to $\frac{1}{f} \in \mathcal{M}(X, \mathbb{C}_*, \mathfrak{M})$;
- jeżeli $f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$, to $|f| \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$;
- jeżeli $f \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M})$, gdzie $(Y, \| \, \|)$ jest przestrzenią unormowaną, to $\|f\| \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$;
- jeżeli $f = (f_1, f_2) \in \mathcal{M}(X, Y_1 \times Y_2, \mathfrak{M})$, to $f_j \in \mathcal{M}(X, Y_j, \mathfrak{M})$, $j = 1, 2$.

---

[1] Tzn. zbiory postaci $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \Omega_j$, gdzie $\Omega_j \in \operatorname{top} X$, $j \in \mathbb{N}$.

[2] Tzn. zbiory postaci $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} F_j$, gdzie F_j jest domknięty w X, $j \in \mathbb{N}$.

(d) Dla $f : X \longrightarrow Y \subset Z$ mamy: $f \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M}) \iff f \in \mathcal{M}(X, Z, \mathfrak{M})$.

(e) Każde odwzorowanie stałe jest mierzalne.

(f) $\chi_A \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M}) \iff A \in \mathfrak{M}$.

(g) Niech $f_j \in \mathcal{M}(X, Y_j, \mathfrak{M})$, $j = 1, 2$. Załóżmy, że $\operatorname{top} Y_j$ ma bazę przeliczalną, $j = 1, 2$ ([3]). Wtedy $f := (f_1, f_2) \in \mathcal{M}(X, Y_1 \times Y_2, \mathfrak{M})$.

Istotnie, dowolny zbiór otwarty $\Omega \subset Y_1 \times Y_2$ ma postać $\Omega = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \Omega_j^{(1)} \times \Omega_j^{(2)}$, gdzie $\Omega_j^{(i)} \in \operatorname{top} Y_i$, $j \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$. Wynika stąd, że $f^{-1}(\Omega) = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} f_1^{-1}(\Omega_j^{(1)}) \cap f_2^{-1}(\Omega_j^{(2)}) \in \mathfrak{M}$.

(h) Niech Y będzie przestrzenią topologiczną i niech $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(Y)$ będzie dowolną rodziną taką, że $\mathcal{B}(Y) \subset \sigma(\mathcal{F})$. Załóżmy $f : X \longrightarrow Y$ jest taka, że $f^{-1}(A) \in \mathfrak{M}$ dla dowolnego $A \in \mathcal{F}$. Wtedy $f \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M})$.

Istotnie, ponieważ $\mathcal{F} \subset f_*\mathfrak{M}$, zatem $\mathcal{B}(Y) \subset \sigma(\mathcal{F}) \subset f_*\mathfrak{M}$ i korzystamy z (a).

W szczególności, wobec Obserwacji 13.1.6(c), dla $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ następujące warunki są równoważne:

- $f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$;
- $f^{-1}(\Delta) \in \mathfrak{M}$ dla dowolnego przedziału $\Delta \subset \overline{\mathbb{R}}$;
- $\{x \in X : f(x) < \alpha\} \in \mathfrak{M}$ dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{Q}$;
- $\{x \in X : f(x) \leqslant \alpha\} \in \mathfrak{M}$ dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{Q}$;
- $\{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathfrak{M}$ dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{Q}$;
- $\{x \in X : f(x) \geqslant \alpha\} \in \mathfrak{M}$ dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{Q}$.

(i) $\mathcal{C}^{\uparrow}(X) \subset \mathcal{M}(X, \overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(X))$ (zob. Definicja 5.8.1). W szczególności, na podstawie (c), jeżeli $f \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M})$, $g \in \mathcal{C}^{\uparrow}(Y)$, to $g \circ f \in \mathcal{M}(X, Z, \mathfrak{M})$.

(j) Jeżeli $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$, to $\{f < g\}, \{f \leqslant g\} \in \mathfrak{M}$.

Istotnie, $\{f < g\} = \bigcup\limits_{\alpha \in \mathbb{Q}} \{f < \alpha\} \cap \{g > \alpha\}$ oraz $\{f \leqslant g\} = X \setminus \{g < f\}$.

(k) Jeżeli $f, g \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M})$, gdzie Y jest przestrzenią Hausdorffa z bazą przeliczalną, to $\{f = g\}, \{f \neq g\} \in \mathfrak{M}$.

Istotnie, niech $h := (f, g) : X \longrightarrow Y^2$. Na podstawie (g), h jest odwzorowaniem mierzalnym. Niech $\Delta := \{(y, y) : y \in Y\}$. Jest to zbiór domknięty. W szczególności, $\{f = g\} = h^{-1}(\Delta) \in \mathfrak{M}$. Mierzalność $\{f \neq g\}$ wynika teraz ze związku $\{f \neq g\} = X \setminus \{f = g\}$.

(l) Jeżeli $X = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} X_j$, gdzie $X_j \in \mathfrak{M}$, $j \in \mathbb{N}$, to dla $f : X \longrightarrow Y$ mamy: $f \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M}) \iff f|_{X_j} \in \mathcal{M}(X_j, Y, \mathfrak{M})$ ([4]), $j \in \mathbb{N}$.

(m) Niech $f_j \in \mathcal{M}(X, Y_j, \mathfrak{M})$, gdzie Y_j jest przestrzenią unormowaną z bazą przeliczalną, $j = 1, 2$. Niech $A \in \mathcal{L}(Y_1 \times Y_2, Z)$, $B \in \mathcal{L}(Y_1, Y_2; Z)$, gdzie Z jest przestrzenią unormowaną. Wtedy

$$A(f_1, f_2),\ B(f_1, f_2) \in \mathcal{M}(X, Z, \mathfrak{M}).$$

W szczególności,

- jeżeli $f_j \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M})$, $j = 1, 2$, gdzie Y jest przestrzenią unormowaną z bazą przeliczalną, to $f_1 + f_2 \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M})$;
- jeżeli $f_1 \in \mathcal{M}(X, \mathbb{K}, \mathfrak{M})$, $f_2 \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M})$, gdzie Y jest $\mathbb{K}$–przestrzenią unormowaną z bazą przeliczalną, to $f_1 \cdot f_2 \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M})$;
- $\mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M})$ jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$.

(n) Dla $f \in \mathcal{M}(X, \mathbb{C}, \mathfrak{M})$ istnieje funkcja $\alpha \in \mathcal{M}(X, \mathbb{S}_1, \mathfrak{M})$ taka, że $f = \alpha|f|$.

Istotnie, kładziemy

$$\alpha(x) := \begin{cases} f(x)/|f(x)|, & \text{jeżeli } f(x) \neq 0 \\ 1, & \text{jeżeli } f(x) = 0 \end{cases}$$

i korzystamy z (l).

(o) Dla dowolnych $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$ zbiór $A := \{x \in X : f(x) + g(x) \text{ istnieje}\}$ należy do $\mathfrak{M}$ oraz $f + g \in \mathcal{M}(A, \mathfrak{M})$. Ponadto, $f \cdot g \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$ przy zastosowaniu konwencji $0 \cdot \infty := 0$.

([3]) Np. $Y_j = \overline{\mathbb{R}}$, $j = 1, 2$.

([4]) Tu i dalej stosujemy następującą umowę: jeżeli $A \in \mathfrak{M}$ i $f : A \longrightarrow Y$, to pisząc „$f \in \mathcal{M}(A, Y, \mathfrak{M})$" mamy na myśli „$f \in \mathcal{M}(A, Y, \mathfrak{M}|_A)$".

Istotnie, niech $B := \{x \in X : f(x),\ g(x) \in \mathbb{R}\}$. Wiemy, że $B \in \mathfrak{M}$ oraz, że $f+g, f\cdot g \in \mathcal{M}(B,\mathfrak{M})$ (korzystamy z (m)). Zbiór $A \setminus B$ jest równy

$$\{f > -\infty,\ g = +\infty\} \cup \{f = -\infty,\ g < +\infty\} \cup \{f < +\infty,\ g = -\infty\} \cup \{f = +\infty,\ g > -\infty\} =: B_1 \cup \cdots \cup B_4.$$

Oczywiście $B_j \in \mathfrak{M}$, $j = 1,\dots,4$. Tak więc $A \in \mathfrak{M}$. Ponadto $f+g$ jest odwzorowaniem stałym na każdym ze zbiorów B_j. Teraz stosujemy (l).

Przypadek iloczynu jest analogiczny: zbiór $X \setminus B$ rozpada się na zbiory z $\mathfrak{M}$, na których iloczyn $f\cdot g$ jest stały ([5]).

(p) Jeżeli $(f_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}(X,\mathfrak{M})$, to $\inf\{f_j : j \in \mathbb{N}\}, \sup\{f_j : j \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{M}(X,\mathfrak{M})$.

Istotnie, $\{x \in X : \inf\{f_j(x) : j \in \mathbb{N}\} < \alpha\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{x \in X : f_j(x) < \alpha\}$. Podobnie dla supremum.

(q) W szczególności:

- jeżeli $f, g \in \mathcal{M}(X,\mathfrak{M})$, to $\max\{f,g\}, \min\{f,g\} \in \mathcal{M}(X,\mathfrak{M})$;
- jeżeli $f \in \mathcal{M}(X,\mathfrak{M})$, to $f_+ := \max\{f,0\}$, $f_- := \max\{-f,0\} \in \mathcal{M}(X,\mathfrak{M})$; ([6])
- jeżeli $(f_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}(X,\mathfrak{M})$, to $\liminf\limits_{j\to+\infty} f_j$, $\limsup\limits_{j\to+\infty} f_j \in \mathcal{M}(X,\mathfrak{M})$.

Istotnie, $\liminf\limits_{j\to+\infty} f_j = \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf\{f_j : j \geqslant k\}$. Podobnie dla $\limsup$.

(r) Jeżeli $(f_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}(X,\mathfrak{M})$, to $A := \{x \in X : \lim\limits_{j\to+\infty} f_j(x) \text{ istnieje}\} \in \mathfrak{M}$ oraz $\lim\limits_{j\to+\infty} f_j \in \mathcal{M}(A,\mathfrak{M})$ ([7]). W szczególności, każda funkcja $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ n–tej klasy Baire'a jest $\mathcal{B}(X)$–mierzalna ([8]). Dla przykładu, każda oddzielnie ciągła funkcja $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$–mierzalna .

(s) Jeżeli $(f_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}(X,Y,\mathfrak{M})$, gdzie (Y,ϱ) jest przestrzenią metryczną, oraz $f_j \longrightarrow f$ punktowo na X, to $f \in \mathcal{M}(X,Y,\mathfrak{M})$.

Istotnie, dla $\Omega \in \operatorname{top} Y$, $\Omega \neq Y$, niech $\Omega_\varepsilon := \{y \in \Omega : \varrho(y, Y\setminus\Omega) > \varepsilon\}$ i niech $Y_\varepsilon := Y$. Widać, że Ω_ε jest zbiorem otwartym oraz $\overline{\Omega_\varepsilon} \subset \Omega_{\varepsilon'}$ dla $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. Pozostaje jeszcze tylko zauważyć, że $f^{-1}(\Omega) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} f_j^{-1}(\Omega_{1/i})$.

(t) Niech $\Omega \in \operatorname{top}\mathbb{R}^n$ i niech $f \in \mathcal{M}(\Omega,\mathbb{R},\mathcal{B}(\Omega))$. Przypuśćmy, że $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ i dla pewnego $j \in \{1,\dots,n\}$ pochodna $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ istnieje przy dowolnym $x \in A$. Wtedy $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathcal{M}(A,\mathbb{R},\mathcal{B}(\Omega))$.

Istotnie, na podstawie (l), wystarczy pokazać, że $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathcal{M}(A\cap\Omega_{1/k},\mathbb{R},\mathcal{B}(\Omega))$. Ustalmy $k \in \mathbb{N}$. Niech

$$f_\ell(x) := \frac{f(x+\frac{1}{\ell}e_j) - f(x)}{\frac{1}{\ell}}, \quad x \in \Omega_{1/k}, \quad \ell \geqslant k.$$

Na podstawie (c), funkcje f_ℓ, $\ell \geqslant k$, są mierzalne oraz $\lim\limits_{\ell\to+\infty} f_\ell = \frac{\partial f}{\partial x_j}$ na $A\cap\Omega_{1/k}$. Teraz możemy skorzystać bezpośrednio z (r).

(u) Niech $\Omega \in \operatorname{top}\mathbb{R}^n$ i niech $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Dla $j \in \{1,\dots,n\}$ niech

$$A_j := \Big\{x \in \Omega : \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \text{ istnieje}\Big\}.$$

Wtedy $A_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ oraz (na podstawie (t)) $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathcal{M}(A_j,\mathbb{R},\mathcal{B}(\Omega))$.

Istotnie, podobnie jak w (t), wystarczy pokazać, że $A_j \cap \Omega_{1/k} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$. Ustalmy $k \in \mathbb{N}$ i niech

$$\varphi_\nu(x) := \inf\Big\{\frac{f(x+te_j)-f(x)}{t} : 0 < |t| < \frac{1}{\nu}\Big\}, \quad x \in \Omega_{1/k},\ \nu \geqslant k.$$

Jest to funkcja $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$–mierzalna, bowiem (korzystając z ciągłości f) mamy:

$$\varphi_\nu(x) := \inf\Big\{\frac{f(x+te_j)-f(x)}{t} : 0 < |t| < \frac{1}{\nu},\ t \in \mathbb{Q}\Big\}, \quad x \in \Omega_{1/k}.$$

([5]) Np. $f\cdot g = -\infty$ na $\{f=-\infty,\ g>0\}\cup\{f=+\infty,\ g<0\}\cup\{f>0,\ g=-\infty\}\cup\{f<0,\ g=+\infty\}$. Przypadki $f\cdot g = +\infty$ i $f\cdot g = 0$ rozpatrujemy podobnie.

([6]) Zauważmy, że $f = f_+ - f_-$ (działanie jest zawsze wykonalne) oraz $|f| = f_+ + f_-$.

([7]) $A = \{x \in X : \liminf\limits_{j\to+\infty} f_j(x) = \limsup\limits_{j\to+\infty} f_j(x)\}$ i korzystamy z (k) i (q).

([8]) Formalnie rzecz biorąc, klasy Baire'a były definiowane dla funkcji $X \longrightarrow \mathbb{R}$, ale nic nie stoi na przeszkodzie, aby rozszerzyć tę definicję na funkcje $X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

Analogicznie, niech

$$\psi_\nu(x) := \sup\Big\{\frac{f(x+te_j)-f(x)}{t} : 0<|t|<\frac{1}{\nu}\Big\}, \quad x\in\Omega_{1/k},\ \nu\geqslant k.$$

Jest to również funkcja $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$–mierzalna.

Zauważmy, że $A_j\cap\Omega_{1/k}=\{x\in\Omega_{1/k} : \lim\limits_{\nu\to+\infty}\varphi_\nu(x)=\lim\limits_{\nu\to+\infty}\psi_\nu(x)\}$. Stąd, na podstawie (r), wnioskujemy, że $A_j\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

13.3. Odwzorowania proste

Definicja 13.3.1. Niech Y będzie przestrzenią unormowaną z bazą przeliczalną. Powiemy, że odwzorowanie $f: X\longrightarrow Y$ jest *proste* ($f\in\mathcal{M}_0(X,Y,\mathfrak{M})$), jeżeli $f\in\mathcal{M}(X,Y,\mathfrak{M})$ oraz zbiór $f(X)$ jest skończony. Zgodnie z ogólną umową, będziemy również stosować oznaczenia $\mathcal{M}_0(X,Y)$, $\mathcal{M}_0(X,\mathfrak{M})$ i $\mathcal{M}_0(X)$.

Niech $\mathcal{M}_0^+(X,\mathfrak{M})$ oznacza zbiór nieujemnych funkcji prostych $f: X\longrightarrow\mathbb{R}_+$. Jak zwykle, będziemy również stosować oznaczenie $\mathcal{M}_0^+(X)$.

Niech $\mathcal{M}^+(X,\mathfrak{M})$ oznacza zbiór nieujemnych funkcji mierzalnych $f: X\longrightarrow[0,+\infty]$. Będziemy również stosować oznaczenie $\mathcal{M}^+(X)$.

Obserwacja 13.3.2 (Własności odwzorowań prostych). (a) Niech $f\in\mathcal{M}_0(X,Y,\mathfrak{M})$, $f(X)=\{a_1,\ldots,a_N\}$, $a_j\neq a_k$ dla $j\neq k$. Wtedy $A_j:=f^{-1}(\{a_j\})\in\mathfrak{M}$, $j=1,\ldots,N$ ([9]), oraz $f=\sum\limits_{j=1}^N a_j\chi_{A_j}$. Postać tę nazywamy *postacią kanoniczną odwzorowania* f.

(b) Niech $B_j\in\mathfrak{M}$, $j=1,\ldots,N$, $B_j\cap B_k=\varnothing$ dla $j\neq k$, $\bigcup\limits_{j=1}^N B_j=X$ i niech $b_1,\ldots,b_N\in Y$ ([10]). Wtedy $f:=\sum\limits_{j=1}^N b_j\chi_{B_j}\in\mathcal{M}_0(X,Y,\mathfrak{M})$.

(c) $\mathcal{M}_0^+(X,\mathfrak{M})\subset\mathcal{M}^+(X,\mathfrak{M})$. Ponadto, $\mathcal{M}_0^+(X,\mathfrak{M})$ oraz $\mathcal{M}^+(X,\mathfrak{M})$ są wypukłymi stożkami ([11]).

(d) $\mathcal{M}_0(X,Y,\mathfrak{M})$ jest przestrzenią wektorową.

Twierdzenie 13.3.3. *Dla dowolnej funkcji $f\in\mathcal{M}^+(X,\mathfrak{M})$ istnieje ciąg $(f_n)_{n=1}^\infty\subset\mathcal{M}_0^+(X,\mathfrak{M})$ taki, że $f_n\nearrow f$ punktowo na X. Ponadto, jeżeli f jest ograniczona, to $f_n\longrightarrow f$ jednostajnie na X.*

Dowód. Niech

$$A_{n,j}:=\{x\in X:\frac{j-1}{2^n}\leqslant f(x)<\frac{j}{2^n}\},\quad j=1,\ldots,n2^n,\quad A_n:=\{x\in X: f(x)\geqslant n\},$$

$$f_n:=\Big(\sum_{j=1}^{n2^n}\frac{j-1}{2^n}\chi_{A_{n,j}}\Big)+n\chi_{A_n},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Oczywiście $f_n\in\mathcal{M}_0^+(X,\mathfrak{M})$, $f_n\leqslant f$, $n\in\mathbb{N}$. Jeżeli $f(x_0)=+\infty$, to $f_n(x_0)=n\nearrow+\infty$. Jeżeli $f(x_0)<N<+\infty$, to $f(x_0)-f_n(x_0)<1/2^n$ dla $n\geqslant N$. Daje to zbieżność punktową $f_n\longrightarrow f$ na X oraz zbieżność jednostajną w przypadku, gdy f jest ograniczona. Monotoniczność pozostawiamy jako Ćwiczenie. □

13.4. Funkcje Baire'a

Definicja 13.4.1. Dla przestrzeni topologicznej X, niech $\underline{\mathcal{B}}(X)$ oznacza najmniejszą rodzinę $\mathcal{F}\subset\overline{\mathbb{R}}^X$, która spełnia następujące dwa warunki:

(*) $\mathcal{C}(X)\subset\mathcal{F}$,

(**) jeżeli $(f_k)_{k=1}^\infty\subset\mathcal{F}$ i $f_k\longrightarrow f_0$ punktowo na X, to $f_0\in\mathcal{F}$.

Zauważmy, że rodzina $\underline{\mathcal{B}}(X)$ jest poprawnie zdefiniowana — wystarczy wziąć przecięcie wszystkich rodzin spełniających (*) i (**).

Funkcje z $\underline{\mathcal{B}}(X)$ nazywamy *funkcjami Baire'a*. Oczywiście, każda funkcja n–tej klasy Baire'a jest funkcją Baire'a.

([9]) Zauważmy, że $A_1,\ldots,A_N$ są parami rozłączne oraz, że w sumie dają X.

([10]) Nie zakładamy, że $b_1,\ldots,b_N$ są parami różne.

([11]) Podzbiór S przestrzeni wektorowej E jest *wypukłym stożkiem*, jeżeli $tx+uy\in S$ dla dowolnych $t,u\geqslant 0$, $x,y\in S$.

Twierdzenie 13.4.2 (Funkcje Baire'a). *Niech X będzie przestrzenią metryczną. Wtedy $\mathcal{M}(X,\mathcal{B}(X))=\underline{\mathcal{B}}(X)$.*

Dowód. Na podstawie Obserwacji 13.2.2(b,r), rodzina $\mathcal{M}(X,\mathcal{B}(X))$ spełnia (*) i (**). Wynika stąd natychmiast, że $\underline{\mathcal{B}}(X)\subset\mathcal{M}(X,\mathcal{B}(X))$.

Dla dowodu przeciwnej inkluzji pokażemy najpierw, że

(†) jeżeli $f,g\in\underline{\mathcal{B}}(X)$, $f,g:X\longrightarrow\mathbb{R}$, to $f\cdot g,\ \alpha f+\beta g\in\underline{\mathcal{B}}(X)$ dla dowolnych $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Ustalmy $g\in\underline{\mathcal{B}}(X)$, $g:X\longrightarrow\mathbb{R}$, oraz $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Niech

$$\mathcal{F}_g:=\{f\in\underline{\mathcal{B}}(X):f\cdot g,\ \alpha f+\beta g\in\underline{\mathcal{B}}(X)\}.$$

Jest widoczne, że rodzina $\mathcal{F}_g$ spełnia (**). Ponadto, $\mathcal{F}_g$ spełnia oczywiście (*), gdy $g\in\mathcal{C}(X)$. Wynika stąd, że $\mathcal{F}_g=\underline{\mathcal{B}}(X)$ dla $g\in\mathcal{C}(X)$. Zamieniając rolami f i g, wnioskujemy stąd, że $\mathcal{F}_g$ spełnia (*) dla dowolnego g. Ostatecznie, $\mathcal{F}_g=\underline{\mathcal{B}}(X)$ dla dowolnego g, co kończy dowód (†).

Dla dowodu inkluzji $\mathcal{M}(X,\mathcal{B}(X))\subset\underline{\mathcal{B}}(X)$ ustalmy $f\in\mathcal{M}(X,\mathcal{B}(X))$. Wobec Obserwacji 13.2.2(q), warunku (**) oraz (†), możemy założyć, że $f:X\longrightarrow\mathbb{R}_+$. Teraz korzystając z Twierdzenia 13.3.3, warunku (**) oraz (†), redukujemy dowód do przypadku, gdy $f=\chi_A$ dla pewnego $A\in\mathcal{B}(X)$. Niech $\mathfrak{M}:=\{B\in\mathcal{B}(X):\chi_B\in\underline{\mathcal{B}}(X)\}$. Zauważmy, że $\operatorname{top}X\subset\mathfrak{M}$, bowiem dla zbioru otwartego $\Omega\subset X$, jego funkcja charakterystyczna χ_Ω jest półciągła z dołu, a więc w szczególności, I klasy Baire'a (por. Twierdzenie 4.7.6 ([12])). Wobec definicji $\mathcal{B}(X)$, pozostaje pokazać, że $\mathfrak{M}$ jest σ–algebrą.

Niech $B\in\mathfrak{M}$. Wtedy $\chi_{X\setminus B}=1-\chi_B\in\underline{\mathcal{B}}(X)$ na podstawie (†), co oznacza, że $X\setminus B\in\mathfrak{M}$.

Niech teraz $B,C\in\mathfrak{M}$. Ponieważ $\chi_{B\setminus C}=\chi_B-\chi_B\chi_C$, zatem (†) daje $B\setminus C\in\mathfrak{M}$. Jeżeli $B\cap C=\varnothing$, to $\chi_{B\cup C}=\chi_B+\chi_C$, więc $B\cup C\in\mathfrak{M}$. Ogólnie, $B\cup C=(B\setminus C)\cup C\in\mathfrak{M}$.

Przypuśćmy, że $(B_k)_{k=1}^\infty\subset\mathfrak{M}$. Chcemy pokazać, że $B:=\bigcup_{k=1}^\infty B_k\in\mathfrak{M}$. Mamy $\chi_B=\lim\limits_{k\to+\infty}\chi_{C_k}$, gdzie $C_k:=B_1\cup\dots\cup B_k$, $k=1,2,\dots$. Z poprzednich rozważań wynika, że $(C_k)_{k=1}^\infty\subset\mathfrak{M}$, a stąd $\chi_B\in\underline{\mathcal{B}}(X)$. □

Ćwiczenie* 13.4.3. Czy Twierdzenie 13.4.2 pozostaje prawdziwe dla dowolnej przestrzeni topologicznej ? (por. Obserwacja 4.7.7).

13.5. Miary

Definicja 13.5.1. Niech $\mathfrak{M}$ będzie σ–algebrą na X. Funkcję $\mu:\mathfrak{M}\longrightarrow[0,+\infty]$ nazywamy *miarą nieujemną na* $\mathfrak{M}$, jeżeli:

(1) $\mu(\varnothing)=0$,

(2) $(A_j)_{j=1}^\infty\subset\mathfrak{M}$, $A_j\cap A_k=\varnothing$ dla $j\neq k\Longrightarrow\mu(\bigcup\limits_{j=1}^\infty A_j)=\sum\limits_{j=1}^\infty\mu(A_j)$ (jest to tzw. *przeliczalna addytywność*).

W ten sam sposób możemy zdefiniować pojęcie *miary zespolonej* $\mu:\mathfrak{M}\longrightarrow\mathbb{C}$ jako funkcji spełniającej (2), z tym, że warunek (2) zawiera w sobie żądanie zbieżności szeregu $\sum\limits_{j=1}^\infty\mu(A_j)$ ([13]). Niech

- $\mathbb{M}(\mathfrak{M})$ oznacza rodzinę wszystkich *miar nieujemnych* $\mu:\mathfrak{M}\longrightarrow[0,+\infty]$,
- $\mathbb{M}(\mathfrak{M},\mathbb{C})$ oznacza rodzinę wszystkich miar zespolonych $\mu:\mathfrak{M}\longrightarrow\mathbb{C}$,
- $\mathbb{M}(\mathfrak{M},\mathbb{R})$ oznacza podrodzinę rodziny $\mathbb{M}(\mathfrak{M},\mathbb{C})$ złożoną ze wszystkich *miar rzeczywistych* $\mu:\mathfrak{M}\longrightarrow\mathbb{R}$,
- $\mathbb{M}(\mathfrak{M},\mathbb{R}_+)$ oznacza rodzinę wszystkich *ograniczonych miar nieujemnych* $\mu:\mathfrak{M}\longrightarrow\mathbb{R}_+$.

Obserwacja 13.5.2 (Własności miar). (a) $\mathbb{M}(\mathfrak{M},\mathbb{K})$ jest $\mathbb{K}$–przestrzenią wektorową. Rodziny $\mathbb{M}(\mathfrak{M})$ i $\mathbb{M}(\mathfrak{M},\mathbb{R}_+)$ są wypukłymi stożkami.

(b) W definicji miary nieujemnej warunek (1) można zastąpić warunkiem $\mu\not\equiv+\infty$. $\mu(A_1)=\mu(A_1)+\sum\limits_{j=2}^\infty\mu(\varnothing)$, skąd wynika, że $\mu(\varnothing)=0$.

(c) Dla $\mu\in\mathbb{M}(\mathfrak{M},\mathbb{C})$ jest zawsze spełniony warunek (1).

([12]) Tu korzystamy z założenia, że X jest przestrzenią metryczną.

([13]) Oczywiście szereg ten musi być zbieżny bezwarunkowo, a więc bezwzględnie.

(d) Dla dowolnego $x_0 \in X$ funkcja $\delta_{x_0}(A) := \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } x_0 \in A \\ 0, & \text{jeżeli } x_0 \notin A \end{cases}$ jest miarą nieujemną na $\mathcal{P}(X)$; jest to tzw. *miara Diraca* $\binom{14}{}$.

(e) Funkcja $\mu(A) := \begin{cases} \#A & \text{gdy } A \text{ jest skończony} \\ +\infty & \text{gdy } A \text{ jest nieskończony} \end{cases}$ jest miarą na $\mathcal{P}(X)$; jest to tzw. *miara licząca*).

(f) Jeżeli μ jest miarą $\binom{15}{}$, to $\mu(A_1 \cup \dots \cup A_N) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_N)$ dla dowolnych $A_1, \dots, A_N \in \mathfrak{M}$ takich, że $A_j \cap A_k = \varnothing$ dla $j \neq k$; jest to tzw. *skończona addytywność.*

(g) Jeżeli $\mu \in \mathbb{M}(\mathfrak{M})$, to $\mu(A) \leqslant \mu(B)$ dla $A \subset B$. Ponadto, dla dowolnej miary oraz dla $A \subset B$ mamy: $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ o ile liczba $\mu(A)$ jest skończona.

(h) Jeżeli $\mu \in \mathbb{M}(\mathfrak{M})$, to dla dowolnych zbiorów $(B_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}$ mamy: $\mu(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(B_j)$; jest to tzw. *przeliczalna podaddytywność.* $\binom{16}{}$.

(i) Jeżeli $\mu \in \mathbb{M}(\mathfrak{M})$, to $\mu(B_1 \cup \dots \cup B_N) \leqslant \mu(B_1) + \dots + \mu(B_N)$ dla dowolnych $B_1, \dots, B_N \in \mathfrak{M}$ (jest to tzw. *skończona podaddytywność*).

(j) Jeżeli μ jest miarą i $B_N \nearrow B$, to $\mu(B_N) \longrightarrow \mu(B)$. mamy:

$$\mu(B) = \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{j=1}^{N} \mu(A_j) = \lim_{N\to+\infty} \mu(\bigcup_{j=1}^{N} A_j) = \lim_{N\to+\infty} \mu(B_N).$$

(k) Jeżeli μ jest miarą, $B_j \searrow B$ i $\mu(B_1)$ jest skończona $\binom{17}{}$, to $\mu(B_j) \longrightarrow \mu(B)$ $\binom{18}{}$.

(l) Niech $\mu \in \mathbb{M}(\mathfrak{M})$ i niech $\mathcal{Z} := \{A \in \mathfrak{M} : \mu(A) = 0\}$. Wtedy:

- $\mathfrak{M} \ni A \subset Z \in \mathcal{Z} \Longrightarrow A \in \mathcal{Z}$,
- $(Z_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{Z} \Longrightarrow \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} Z_j \in \mathcal{Z}$,
- jeżeli $A \in \mathfrak{M}$ i $Z \in \mathcal{Z}$, to $\mu(A \cup Z) = \mu(A \setminus Z) = \mu(A)$.

Definicja 13.5.3 (Miara zupełna)**.** Powiemy, że miara $\mu \in \mathbb{M}(\mathfrak{M})$ jest *zupełna*, jeżeli dla dowolnego zbioru $Z \in \mathfrak{M}$ takiego, że $\mu(Z) = 0$ i dla dowolnego zbioru $A \subset Z$ mamy $A \in \mathfrak{M}$.

Twierdzenie 13.5.4 (Uzupełnianie miary)**.** *Dla dowolnej miary $\mu \in \mathbb{M}(\mathfrak{M})$ istnieje σ–algebra $\mathfrak{M}^*$ oraz miara zupełna $\mu^* \in \mathbb{M}(\mathfrak{M}^*)$ takie, że*

- $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}^*$,
- $\mu^*|_{\mathfrak{M}} = \mu$,
- *dla dowolnej σ–algebry $\mathfrak{N}$ i miary zupełnej $\nu \in \mathbb{M}(\mathfrak{N})$, jeżeli $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$ i $\nu|_{\mathfrak{M}} = \mu$, to $\mathfrak{M}^* \subset \mathfrak{N}$ i $\nu|_{\mathfrak{M}^*} = \mu^*$* $\binom{19}{}$.

Dowód. Zdefiniujmy $\mathfrak{M}^* := \{A \subset X : \exists_{L,R\in\mathfrak{M}} : L \subset A \subset R,\ \mu(R \setminus L) = 0\}$. Oczywiście $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}^*$. Udowodnimy, że $\mathfrak{M}^*$ jest σ–algebrą. Dla dowodu, że $X \setminus A \in \mathfrak{M}^*$ dla $A \in \mathfrak{M}^*$ wystarczy zauważyć, że jeżeli L, R są takie jak w definicji, to $X \setminus R \subset X \setminus A \subset X \setminus L$ i $(X \setminus L) \setminus (X \setminus R) = R \setminus L$. Dla dowodu, że $A := \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{M}^*$ dla dowolnego ciągu $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}^*$ dobieramy dla każdego A_j zbiory L_j i R_j tak, jak w definicji i mamy: $L := \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} L_j \subset A \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} R_j := R$ oraz $R \setminus L \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} (R_j \setminus L_j)$.

Teraz określimy μ^*. Kładziemy $\mu^*(A) := \mu(L)$, gdy L, R są takie, jak w definicji. Takie określenie jest poprawne, bo jeżeli (L_1, R_1) jest inną parą zbiorów takich, że $L_1 \subset A \subset R_1$ i $\mu(R_1 \setminus L_1) = 0$, to $(L \setminus L_1) \cup (L_1 \setminus L) \subset (R_1 \setminus L_1) \cup (R \setminus L)$. Oczywiście $\mu^* = \mu$ na $\mathfrak{M}$. Bez trudu również sprawdzamy, że μ^* jest miarą:

$\binom{14}{}$ Paul Dirac (1902–1984).

$\binom{15}{}$ Tu i dalej, pisząc „μ jest miarą" mamy na myśli to, że μ jest miarą nieujemną, lub miarą zespoloną.

$\binom{16}{}$ $\mu(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j) = \mu(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\mu(A_j) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(B_j)$.

$\binom{17}{}$ Oczywiście ten ostatni warunek jest istotny wyłącznie dla miar nieujemnych.

$\binom{18}{}$ Żądanie skończoności $\mu(B_1)$ można zastąpić żądaniem aby $\mu(B_N)$ było skończone dla pewnego N. Jeżeli nic nie założymy, to twierdzenie przestaje być prawdziwe: np. $X := \mathbb{N}$, μ – miara licząca, $B_j := [j, +\infty) \cap \mathbb{N}$, $B := \varnothing$.

$\binom{19}{}$ Tzn. para $(\mathfrak{M}^*, \mu^*)$ jest minimalna. W szczególności, jeżeli μ jest zupełna, to $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}$ i $\mu^* = \mu$.

niech $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}^*$ będzie ciągiem zbiorów parami rozłącznych i niech L_j, R_j będą skojarzone z A_j. Wtedy $(L_j)_{j=1}^{\infty}$ są parami rozłączne oraz

$$\mu^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} L_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(L_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j).$$

Dla dowodu zupełności, niech $B \subset A \in \mathfrak{M}^*$, $\mu^*(A) = 0$. Chcemy pokazać, że $B \in \mathfrak{M}^*$. Niech $L \subset A \subset R$ będą takie, jak w definicji $\mathfrak{M}^*$. Wtedy $\mu(R \setminus L) = 0$. Ponadto $\mu(L) = \mu^*(A) = 0$, a zatem $\mu(R) = 0$. Wystarczy więc zauważyć, że $\varnothing \subset B \subset R$ i $\mu(R \setminus \varnothing) = 0$.

Pozostaje sprawdzić minimalność. Niech $(\mathfrak{N}, \nu)$ będą jak w wypowiedzi propozycji. Ustalmy $A \in \mathfrak{M}^*$ i niech L, R będą takie, jak w definicji. Wtedy $A \setminus L \in \mathfrak{N}$ (bo $A \setminus L \subset R \setminus L \in \mathfrak{N}$ i $\nu(R \setminus L) = \mu(R \setminus L) = 0$, a ν jest zupełna). Wynika stąd, że $A = L \cup (A \setminus L) \in \mathfrak{N}$. Zgodność miary wynika bezpośrednio z definicji miary μ^*. □

13.6. Miary zewnętrzne. Warunek Carathéodory'ego.

Definicja 13.6.1. Powiemy, że funkcja $\varphi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ jest *miarą zewnętrzną na* X, jeżeli:

(1) $\varphi(\varnothing) = 0$,

(2) $A \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \Longrightarrow \varphi(A) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{\infty} \varphi(A_j)$.

Miara zewnętrzna jest monotoniczna, tzn. $A \subset B \Longrightarrow \varphi(A) \leqslant \varphi(B)$. Ponadto, jeżeli $A \subset A_1 \cup \cdots \cup A_N$, to $\varphi(A) \leqslant \varphi(A_1) + \cdots + \varphi(A_N)$.

Twierdzenie 13.6.2 (Warunek Carathéodory'ego)**.** *Niech $\varphi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ będzie miarą zewnętrzną na X. Zdefiniujmy*

$$\mathfrak{M}(\varphi) := \{A \subset X : \forall_{T \subset X} : \varphi(T) \geqslant \varphi(T \cap A) + \varphi(T \setminus A)\}. \quad (20)$$

Wtedy $\mathfrak{M}(\varphi)$ jest σ–algebrą, zaś $\varphi|_{\mathfrak{M}(\varphi)}$ — miarą zupełną.

Zbiory z $\mathfrak{M}(\varphi)$ nazywamy zbiorami *mierzalnymi* (*φ-mierzalnymi*).

Dowód. Krok 1^0: $\varphi(A) = 0 \Longrightarrow A \in \mathfrak{M}$. Tak więc np. $\varnothing \in \mathfrak{M}$. W szczególności, wobec monotoniczności miar zewnętrznych, jeżeli już pokażemy, że $\mathfrak{M}$ jest σ–algebrą i φ jest miarą na $\mathfrak{M}$, to musi to być miara zupełna. Istotnie, jeżeli $\varphi(a) = 0$, to $\varphi(T \cap A) + \varphi(T \setminus A) \leqslant \varphi(A) + \varphi(T) = \varphi(T)$.

Krok 2^0: $A \in \mathfrak{M} \Longrightarrow X \setminus A \in \mathfrak{M}$. Istotnie, $\varphi(T \cap (X \setminus A)) + \varphi(T \setminus (X \setminus A)) = \varphi(T \setminus A) + \varphi(T \cap A) \leqslant \varphi(T)$.

Krok 3^0: $A, B \in \mathfrak{M} \Longrightarrow A \cap B \in \mathfrak{M}$. W konsekwencji, $A_1, \ldots, A_N \in \mathfrak{M} \Longrightarrow A_1 \cap \cdots \cap A_N \in \mathfrak{M}$. Istotnie, $\varphi(T \cap (A \cap B)) + \varphi(T \setminus (A \cap B)) \overset{(2)}{\leqslant} \varphi((T \cap A) \cap B) + \varphi(T \setminus A) + \varphi((T \cap A) \setminus B) \overset{B \in \mathfrak{M}}{\leqslant} \varphi(T \cap A) + \varphi(T \setminus A) \overset{A \in \mathfrak{M}}{\leqslant} \varphi(T)$.

Krok 4^0: $A, B \in \mathfrak{M} \Longrightarrow A \setminus B \in \mathfrak{M}$. Istotnie, $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$ i korzystamy z 2^0 i 3^0.

Krok 5^0: $A, B \in \mathfrak{M} \Longrightarrow A \cup B \in \mathfrak{M}$. W konsekwencji, $A_1, \ldots, A_N \in \mathfrak{M} \Longrightarrow A_1 \cup \cdots \cup A_N \in \mathfrak{M}$. Istotnie, $A \cup B = X \setminus ((X \setminus A) \cap (X \setminus B))$ i korzystamy z 2^0 i 3^0.

Krok 6^0: $A_1, \ldots, A_N \in \mathfrak{M}, \quad A_j \cap A_k = \varnothing$ dla $j \neq k \Longrightarrow \varphi(A_1 \cup \cdots \cup A_N) = \varphi(A_1) + \cdots + \varphi(A_N)$ (tzn. φ jest skończenie addytywna na $\mathfrak{M}$). Zastosujemy indukcję względem N. Trzeba tylko sprawdzić krok indukcyjny: $\varphi(A_1 \cup \cdots \cup A_{N+1}) \overset{A_{N+1} \in \mathfrak{M}}{=} \varphi((A_1 \cup \cdots \cup A_{N+1}) \cap A_{N+1}) + \varphi((A_1 \cup \cdots \cup A_{N+1}) \setminus A_{N+1}) = \varphi(A_{N+1}) + \varphi(A_1 \cup \cdots \cup A_N) \overset{\text{zał. ind.}}{=} \varphi(A_1) + \cdots + \varphi(A_{N+1})$.

Krok 7^0: $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}$, $A_j \cap A_k = \varnothing$ dla $j \neq k \Longrightarrow \varphi(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \varphi(A_j)$. W szczególności, jeżeli już pokażemy, że $\mathfrak{M}$ jest σ–algebrą, to φ będzie miarą na $\mathfrak{M}$. Istotnie, na mocy 6^0 mamy:

$$\varphi(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \geqslant \lim_{N \to +\infty} \varphi(\bigcup_{j=1}^{N} A_j) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{j=1}^{N} \varphi(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(A_j).$$

Krok 8^0: Zauważmy, że dla dowolnego zbioru $Y \subset X$ funkcja $\psi := \varphi|_{\mathcal{P}(Y)}$ jest miarą zewnętrzną na Y. Możemy więc zdefiniować rodzinę $\mathfrak{M}(\psi)$ będącą odpowiednikiem rodziny $\mathfrak{M}(\varphi)$. Rodzina ta ma oczywiście

(20) Zauważmy, że zawsze $\varphi(T) \leqslant \varphi(T \cap A) + \varphi(T \setminus A)$, a zatem warunek Carathéodory'ego można w sposób równoważny zapisać w postaci równości.

wszystkie dotychczas sprawdzone własności względem obciętej miary. Dla nas ważna będzie następująca zależność: $A \in \mathfrak{M}(\varphi) \Longrightarrow A \cap Y \in \mathfrak{M}(\psi)$. Istotnie, dla $T \subset Y$ mamy:

$$\psi(T \cap (A \cap Y)) + \psi(T \setminus (A \cap Y)) = \varphi(T \cap A) + \varphi(T \setminus A) = \varphi(T) = \psi(T).$$

Krok 9^0: $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}$, $A_j \cap A_k = \varnothing$ dla $j \neq k \Longrightarrow \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{M}$. Istotnie,

$$\begin{aligned}
&\varphi(T \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) + \varphi(T \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \varphi(\bigcup_{j=1}^{\infty}(T \cap A_j)) + \varphi(T \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \\
&\leqslant \lim_{N \to +\infty} \Big(\sum_{j=1}^{N} \varphi(T \cap A_j) + \varphi(T \setminus \bigcup_{j=1}^{N} A_j) \Big) \overset{6^0+8^0}{=} \lim_{N \to +\infty} \Big(\varphi(T \cap \bigcup_{j=1}^{N} A_j) + \varphi(T \setminus \bigcup_{j=1}^{N} A_j) \Big) \overset{5^0}{=} \varphi(T).
\end{aligned}$$

Krok 10^0 (i ostatni). $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M} \Longrightarrow \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{M}$. Istotnie, $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j$, gdzie $B_1 := A_1$, $B_j := A_j \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{j-1})$, $j \geqslant 2$, i możemy skorzystać z 4^0, 5^0 i 9^0. □

Twierdzenie 13.6.3. *Dla $\mu \in \mathbb{M}(\mathfrak{M})$ zdefiniujmy $\varphi(A) = \varphi_\mu(A) := \inf\{\mu(B) : A \subset B \in \mathfrak{M}\}$, $A \subset X$. Wtedy*

(a) *$\varphi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ jest miarą zewnętrzną taką, że $\varphi = \mu$ na $\mathfrak{M}$,*
(b) *$\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}(\varphi)$,*
(c) *$\varphi = \sup\{\psi : \psi$ jest miarą zewnętrzną taką, że $\psi = \mu$ na $\mathfrak{M}\}$.*

Obserwacja 13.6.4. Z powyższego twierdzenia wynika w szczególności ważny wniosek, że rozważając miary nieujemne μ zawsze możemy założyć, że $\mu = \varphi|_{\mathfrak{M}(\varphi)}$ dla pewnej miary zewnętrznej $\varphi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$. Tym samym, traci na znaczeniu Twierdzenie 16.4.4.

Dowód Twierdzenie 13.6.3. (a) Jest rzeczą widoczną, że $\varphi = \mu$ na $\mathfrak{M}$. Przypuśćmy, że $A \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$. Jeżeli $\varphi(A_j) = +\infty$ dla pewnego j, to oczywiście $\varphi(A) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{\infty} \varphi(A_j)$. Przypuśćmy więc, że $\varphi(A_j) < +\infty$ dla dowolnego j. Weźmy $\varepsilon > 0$ i niech $B_j \in \mathfrak{M}$ będzie taki, że $A_j \subset B_j$ i $\mu(B_j) \leqslant \varphi(A_j) + \varepsilon 2^{-j}$, $j \in \mathbb{N}$. Wtedy $A \subset B := \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathfrak{M}$ oraz $\varphi(A) \leqslant \mu(B) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{\infty} \varphi(A_j) + \varepsilon$.

(b) Niech $A \in \mathfrak{M}$ i niech $T \subset X$. Przypuśćmy, że $T \subset B \in \mathfrak{M}$. Wtedy $T \cap A \subset B \cap A \in \mathfrak{M}$ i $T \setminus A \subset B \setminus A \in \mathfrak{M}$. Stąd $\varphi(T \cap A) + \varphi(T \setminus A) \leqslant \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A) = \mu(B)$, a więc $\varphi(T \cap A) + \varphi(T \setminus A) \leqslant \varphi(T)$.

(c) Niech ψ będzie miarą zewnętrzną taką, że $\psi = \mu$ na $\mathfrak{M}$. Niech $A \subset B \in \mathfrak{M}$. Wtedy $\mu(B) = \psi(B) \geqslant \psi(A)$, skąd wynika, że $\varphi(A) \geqslant \psi(A)$ dla dowolnego $A \subset X$. □

Twierdzenie 13.6.5. *Niech $\varphi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ będzie miarą zewnętrzną i niech $\mathfrak{M} := \mathfrak{M}(\varphi)$.*

(a) *Dla $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mamy:*

$$f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M}) \Longleftrightarrow \forall_{-\infty<\alpha<\beta<\infty} \, \forall_{T \subset X} : \varphi(T) \geqslant \varphi(T \cap \{f \leqslant \alpha\}) + \varphi(T \cap \{f \geqslant \beta\}). \tag{*}$$

(b) *Dla dowolnej przestrzeni metrycznej (Y, ϱ) i dla $f : X \longrightarrow Y$ mamy:*

$$f \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M}) \Longleftrightarrow \forall_{A,B \subset Y : \varrho(A,B)>0} \, \forall_{T \subset X} : \varphi(T) \geqslant \varphi(T \cap f^{-1}(A)) + \varphi(T \cap f^{-1}(B)). \quad \big(^{21}\big) \quad (**)$$

Dowód. Na wstępie odnotujmy, że (b) $\Longrightarrow$ (a) (Ćwiczenie) oraz, że w obu twierdzeniach implikacje $\Longrightarrow$ zawsze zachodzą. Istotnie, w (a) mamy:

$$\begin{aligned}
f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M}) &\Longleftrightarrow \forall_{\alpha \in \mathbb{R}} : \{f \leqslant \alpha\} \in \mathfrak{M} \Longrightarrow \forall_{\alpha<\beta} \, \forall_{T \subset X} : \\
&\varphi(T) \geqslant \varphi(T \cap \{f \leqslant \alpha\}) + \varphi(T \cap \{f > \alpha\}) \geqslant \varphi(T \cap \{f \leqslant \alpha\}) + \varphi(T \cap \{f \geqslant \beta\}) = (*).
\end{aligned}$$

$\big(^{21}\big)$ $\varrho(A, B) := \inf\{\varrho(a, b) : a \in A, \ b \in B\}$ (pamiętamy, że $\inf \varnothing := +\infty$). Jeżeli $\varrho(A, B) > 0$, to mówimy, że A i B są *metrycznie odseparowane*.

W (b) mamy:

$$\begin{aligned} f\in\mathcal{M}(X,Y,\mathfrak{M}) &\iff \forall_{U\in\operatorname{top} Y}: f^{-1}(U)\in\mathfrak{M}\\ &\implies \forall_{A,B\subset Y:\, r=\varrho(A,B)>0}: f^{-1}(U^r)\in\mathfrak{M},\ \text{gdzie } U^r:=\bigcup_{x\in A}B(x,r/2)\\ &\implies \forall_{A,B\subset Y:\, r:=\varrho(A,B)>0}\ \forall_{T\subset X}: \varphi(T)\geqslant\varphi(T\cap f^{-1}(U^r))+\varphi(T\setminus f^{-1}(U^r))\\ &\implies \forall_{A,B\subset Y:\,\varrho(A,B)>0}\ \forall_{T\subset X}: \varphi(T)\geqslant\varphi(T\cap f^{-1}(A))+\varphi(T\cap f^{-1}(B))=(**). \end{aligned}$$

Najpierw pokażemy, że (a) $\implies$ (b). Przypuśćmy, że warunek (**) jest spełniony. Chcemy pokazać, że dla dowolnego zbioru domkniętego $C\subset Y$ zbiór $f^{-1}(C)$ należy do $\mathfrak{M}$. Niech $g(y):=\varrho(y,C)$, $y\in Y$. Zauważmy, że $g^{-1}(0)=C$. Pokażemy, że funkcja $g\circ f$ spełnia warunek (*). Ustalmy $-\infty<\alpha<\beta<\infty$. Niech $A:=\{g\leqslant\alpha\}$, $B:=\{g\geqslant\beta\}$. Łatwo widać, że $\varrho(A,B)\geqslant\beta-\alpha>0$. W takim razie, dla dowolnego $T\subset X$ mamy $\varphi(T\cap\{g\circ f\leqslant\alpha\})+\varphi(T\cap\{g\circ f\geqslant\beta\})=\varphi(T\cap f^{-1}(A))+\varphi(T\cap f^{-1}(B))\leqslant\varphi(T)$. Ponieważ założyliśmy prawdziwość twierdzenia (a), zatem $g\circ f\in\mathcal{M}(X,\mathfrak{M})$. W szczególności, $f^{-1}(C)=(g\circ f)^{-1}(0)\in\mathfrak{M}$.

Pozostaje sprawdzić $\Longleftarrow$ w twierdzeniu (a). Przypuśćmy, że warunek (*) zachodzi. Chcemy pokazać, że dla dowolnego $\alpha\in\mathbb{R}$ zbiór $A:=\{f\leqslant\alpha\}$ należy do $\mathfrak{M}$. Ustalmy α. Całość dowodu zasadza się na pokazaniu, że

(†) $\forall_{T\subset X:\,\varphi(T)<+\infty}\ \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n=n(T,\varepsilon)\in\mathbb{N}}: \varphi(T\cap\{\alpha<f\leqslant\alpha+\frac{1}{n}\})\leqslant\varepsilon$.

Istotnie, przypuśćmy na chwilę, że (†) jest spełniony. Wtedy mamy:

$$\varphi(T\cap A)+\varphi(T\setminus A)\leqslant\varphi(T\cap\{f\leqslant\alpha\})+\varphi(T\cap\{f>\alpha+\tfrac{1}{n}\})+\varphi(T\cap\{\alpha<f\leqslant\alpha+\tfrac{1}{n}\})\leqslant\varphi(T)+\varepsilon,$$

co, wobec dowolności ε, zakończy dowód. Przechodzimy do wykazania (†). Ustalamy T i ε. Niech

$$B_j:=T\cap\{\alpha+\tfrac{1}{j+1}\leqslant f\leqslant\alpha+\tfrac{1}{j}\},\quad j\in\mathbb{N}.$$

Zauważmy, że $\varphi(T\cap\{\alpha<f\leqslant\alpha+\frac{1}{n}\})\leqslant\sum\limits_{j=n}^{\infty}\varphi(B_j)$, $n\in\mathbb{N}$. Wystarczy więc pokazać, że szereg $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\varphi(B_j)$ jest zbieżny. Pokażemy, że każdy z szeregów $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\varphi(B_{2j})$, $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\varphi(B_{2j+1})$ jest zbieżny. Rozumowanie przeprowadzimy dla szeregu złożonego z wyrazów parzystych (pozostały przypadek jest analogiczny). Udowodnimy indukcyjnie, że

$$\sum_{j=1}^{N}\varphi(B_{2j})\leqslant\varphi(\bigcup_{j=1}^{N}B_{2j})\leqslant\varphi(T)<+\infty,\quad N\in\mathbb{N}.$$

Oczywiście, problemem jest tu jedynie pierwsza z nierówności. Trzeba sprawdzić krok indukcyjny od N do $N+1$. Zastosujemy warunek (*) z liczbami $\alpha+\frac{1}{2N+2}$ i $\alpha+\frac{1}{2N+1}$ i zbiorem $T:=\bigcup\limits_{j=1}^{N+1}B_{2j}$. Mamy:

$$\varphi(\bigcup_{j=1}^{N+1}B_{2j})\geqslant\varphi(B_{2(N+1)})+\varphi(\bigcup_{j=1}^{N}B_{2j})\overset{\text{zał. ind.}}{\geqslant}\sum_{j=1}^{N+1}\varphi(B_{2j}).$$ □

Dla nas najważniejszym wnioskiem z Twierdzenia 13.6.5(b) będzie następujący wynik.

Twierdzenie 13.6.6. *Niech (X,ϱ) będzie przestrzenią metryczną, niech $\varphi:\mathcal{P}(X)\longrightarrow[0,+\infty]$ będzie miarą zewnętrzną. Wtedy*

$$\mathcal{B}(X)\subset\mathfrak{M}(\varphi)\iff\forall_{A,B\subset X:\,\varrho(A,B)>0}:\ \varphi(A\cup B)\geqslant\varphi(A)+\varphi(B).$$

Dowód. Na podstawie Twierdzenia 13.6.5(b) (zastosowanego do odwzorowania $\mathrm{id}_X: X\longrightarrow X$) mamy:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(X)\subset\mathfrak{M}&\iff\mathrm{id}_X\in\mathcal{M}(X,X,\mathfrak{M})\iff\forall_{A,B\subset X:\,\varrho(A,B)>0}\ \forall_{T\subset X}:\varphi(T)\geqslant\varphi(T\cap A)+\varphi(T\cap B)\\ &\iff\forall_{A,B\subset X:\,\varrho(A,B)>0}:\varphi(A\cup B)\geqslant\varphi(A)+\varphi(B).\end{aligned}$$

Ostatnia implikacja $\Longleftarrow$ wynika z tego, że $\varphi(T)\geqslant\varphi((T\cap A)\cup(T\cap B))$ i stosujemy warunek do zbiorów $T\cap A$ i $T\cap B$. □

13.7. Regularność miary

Definicja 13.7.1. Jeżeli $\varphi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,+\infty]$ jest miarą zewnętrzną, to powiemy, że φ jest *regularna*, jeżeli dla dowolnego $A \subset X$ istnieje zbiór $\widehat{A} \in \mathfrak{M}(\varphi)$ taki, że $A \subset \widehat{A}$ i $\varphi(\widehat{A}) = \varphi(A)$ $\big({}^{22}\big)$.

Jeżeli X jest przestrzenią topologiczną i $\varphi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,+\infty]$ jest miarą zewnętrzną taką, że $\mathcal{B}(X) \subset \mathfrak{M}(\varphi)$, to powiemy, że φ jest $\mathcal{B}$*–regularna (regularna w sensie borelowskim)*, jeżeli dla dowolnego $A \subset X$ istnieje zbiór $\widehat{A} \in \mathcal{B}(X)$ taki, że $A \subset \widehat{A}$ i $\varphi(\widehat{A}) = \varphi(A)$ $\big({}^{23}\big)$.

Jeżeli X jest przestrzenią topologiczną i $\mu \in \mathbb{M}(\mathfrak{M})$ jest taka, że $\mathcal{B}(X) \subset \mathfrak{M}$, to powiemy, że μ jest $\mathcal{B}$*–regularna* jeżeli φ_μ jest $\mathcal{B}$–regularna, gdzie φ_μ jest rozszerzeniem miary μ do miary zewnętrznej z Twierdzenia 13.6.3 $\big({}^{24}\big)$.

Obserwacja 13.7.2. μ jest miarą $\mathcal{B}$–regularną wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $A \in \mathfrak{M}$ istnieje zbiór $\widehat{A} \in \mathcal{B}(X)$ taki, że $A \subset \widehat{A}$ i $\mu(\widehat{A}) = \mu(A)$. Odnotujmy, że ostatni warunek ma charakter „wewnętrzny" — nie występuje w nim rozszerzenie φ_μ.

Istotnie, ustalmy zbiór $A \subset X$ taki, że $\varphi_\mu(A) < +\infty$. Wtedy dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ znajdziemy zbiór $B_k \in \mathcal{B}(X)$ taki, że $A \subset B_k$ i $\mu(B_k) \leqslant \varphi_\mu(A) + \frac{1}{k}$. Niech $\widehat{A} := \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_k$. Wtedy $A \subset \widehat{A} \in \mathcal{B}(X)$ oraz $\varphi_\mu(\widehat{A}) = \varphi_\mu(A)$.

Definicja 13.7.3. Dla rodziny $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ rozważmy następujące warunki:

(1) $\varnothing \in \mathcal{F}$,

(2) $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j,\ \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}$.

Oczywiście, każda σ–algebra spełnia (1), (2). Jeżeli $\mathcal{F}$ spełnia (1), (2), to $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{F} \Longrightarrow A_1 \cup \dots \cup A_N,\ A_1 \cap \dots \cap A_N \in \mathcal{F}$. Jeżeli $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ jest dowolną rodziną rodzin spełniających (1), (2), to $\bigcap\limits_{t\in T} \mathcal{F}_t$ spełnia (1), (2). W szczególności, dla dowolnej rodziny $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ istnieje najmniejsza rodzina zawierająca $\mathcal{S}$ i spełniającą (1), (2). Oznaczymy ją roboczo $[\![\mathcal{S}]\!]$. Oczywiście, $[\![\mathcal{S}]\!] \subset \sigma(\mathcal{S})$ $\big({}^{25}\big)$.

Twierdzenie 13.7.4. (a) *Jeżeli $\varnothing \in \mathcal{S}$ oraz $X \setminus A \in [\![\mathcal{S}]\!]$ dla dowolnego $A \in \mathcal{S}$, to $[\![\mathcal{S}]\!] = \sigma(\mathcal{S})$.*

(b) *Niech X będzie przestrzenią topologiczną, w której każdy zbiór otwarty jest typu $\mathcal{F}_\sigma$, np. przestrzenią metryczną* $\big({}^{26}\big)$. *Wtedy $[\![\operatorname{cotop}(X)]\!] = \mathcal{B}(X)$.*

Dowód. (a) Niech $\mathcal{F} := \{A \in [\![\mathcal{S}]\!] : X \setminus A \in [\![\mathcal{S}]\!]\}$. Chcemy pokazać, że $\mathcal{F} = [\![\mathcal{S}]\!]$. Z założenia wynika, że $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}$. Wystarczy więc jeszcze zauważyć, że $\mathcal{F}$ spełnia (2).

(b) wynika z (a) □

Pojęcie $\mathcal{B}$-regularności w pełni charakteryzuje następujące ważne twierdzenie.

Twierdzenie 13.7.5. *Niech X będzie przestrzenią topologiczną, w której każdy zbiór otwarty jest typu $\mathcal{F}_\sigma$ i niech $\varphi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,+\infty]$ będzie miarą zewnętrzną taką, że $\mathcal{B}(X) \subset \mathfrak{M}(\varphi)$. Załóżmy, że $X = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \Omega_j$, gdzie Ω_j jest otwarty w X i $\varphi(\Omega_j) < +\infty$, $j \in \mathbb{N}$* $\big({}^{27}\big)$.

Wtedy, jeżeli φ jest $\mathcal{B}$-regularna, to dla dowolnego zbioru $B \in \mathfrak{M}(\varphi)$ zachodzą następujące równoważne warunki:

(R1) *Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór $C \in \operatorname{cotop} X$ taki, że $C \subset B$ i $\varphi(B \setminus C) \leqslant \varepsilon$.*

(R2) *Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór $C \in \operatorname{top} X$ taki, że $B \subset C$ i $\varphi(C \setminus B) \leqslant \varepsilon$.*

(R3) *$B = C \cup Z$, gdzie $C \in \mathcal{F}_\sigma(X)$, zaś Z jest miary zero.*

(R4) *$B = C \setminus Z$, gdzie $C \in \mathcal{G}_\delta(X)$, zaś Z jest miary zero.*

$\big({}^{22}\big)$ Zauważmy, że jeżeli $\varphi(A) = +\infty$, to można zawsze przyjąć $\widehat{A} := X$, a więc warunek wystarczy sprawdzić dla zbiorów A takich, że $\varphi(A) < +\infty$.

$\big({}^{23}\big)$ Podobnie jak poprzednio, warunek ten wystarczy sprawdzić dla zbiorów A takich, że $\varphi(A) < +\infty$.

$\big({}^{24}\big)$ Przypomnijmy, że $\mathcal{B}(X) \subset \mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}(\varphi_\mu)$.

$\big({}^{25}\big)$ Przypomnijmy, że $\sigma(\mathcal{S})$, to najmniejsza σ–algebra zawierająca $\mathcal{S}$.

$\big({}^{26}\big)$ $\Omega = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \{x \in \Omega : \varrho(x, X \setminus \Omega) \geqslant \frac{1}{j}\}$.

$\big({}^{27}\big)$ Zawsze możemy założyć, $\Omega_j \subset \Omega_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}$.

Ponadto, jeżeli $B \subset X$ spełnia którykolwiek z tych warunków, to $B \in \mathfrak{M}(\varphi)$.

Dowód. Dowód będzie podzielony na 9 etapów.

Krok 1^0: (R1) $\Longrightarrow$ (R3). Istotnie, niech $C_j \in \operatorname{cotop}$ będzie taki, że $C_j \subset B$ i $\varphi(B \setminus C_j) \leqslant \frac{1}{j}$, $j \in \mathbb{N}$. Zdefiniujmy, $C := \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$, $Z := B \setminus C$. Wtedy $\varphi(Z) \leqslant \varphi(B \setminus C_j) \leqslant \frac{1}{j}$, $j \in \mathbb{N}$, a zatem Z jest miary zero.

Krok 2^0: (R2) $\Longrightarrow$ (R4). Istotnie, niech $C_j \in \operatorname{top} X$ będzie taki, że $B \subset C_j$ i $\varphi(C_j \setminus B) \leqslant \frac{1}{j}$, $j \in \mathbb{N}$. Zdefiniujmy, $C := \bigcap_{j=1}^{\infty} C_j$, $Z := C \setminus B$. Wtedy $\varphi(Z) \leqslant \varphi(C_j \setminus B) \leqslant \frac{1}{j}$, $j \in \mathbb{N}$, a zatem Z jest miary zero.

Krok 3^0: Jeżeli B spełnia (R3) lub (R4), to $B \in \mathfrak{M}(\varphi)$. Wynika, to z tego, iż $\{Z \subset X : \varphi(Z) = 0\} \subset \mathfrak{M}(\varphi)$ (por. Krok 1^0 w dowodzie Twierdzenia 13.6.2).

Krok 4^0: (R1) zachodzi dla B wtedy i tylko wtedy, gdy (R2) zachodzi dla $X \setminus B$. W szczególności, (R1) zachodzi dla dowolnego $B \in \mathfrak{M}(\varphi)$ (odp. dla dowolnego $B \in \mathcal{B}(X)$) wtedy i tylko wtedy, gdy (R2) zachodzi dla dowolnego $B \in \mathfrak{M}(\varphi)$ (odp. dla dowolnego $B \in \mathcal{B}(X)$).

Krok 5^0: (R1) zachodzi dla dowolnego $B \in \mathcal{B}(X)$ takiego, że $\varphi(B) < +\infty$. Niech

$$\mathcal{F} := \{A \in \mathcal{B}(X) : \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{C \subset A,\ C \in \operatorname{cotop} X} : \varphi((A \setminus C) \cap B) \leqslant \varepsilon\}.$$

Chcemy pokazać, że $B \in \mathcal{F}$. W tym celu zauważmy najpierw, że oczywiście $\operatorname{cotop} X \subset \mathcal{F}$. Jeżeli pokażemy, że $\mathcal{F}$ spełnia warunek (2) z Definicji 13.7.1, to na podstawie Twierdzenia 13.7.4(b) będziemy mieli zawieranie $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{F}$ i, w szczególności, będziemy wiedzieć, że $B \in \mathcal{F}$.

Niech $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$, $\varepsilon > 0$ i niech $(C_j)_{j=1}^{\infty} \subset \operatorname{cotop} X$ będą takie, że $C_j \subset A_j$ i $\varphi((A_j \setminus C_j) \cap B) < \varepsilon 2^{-j}$, $j \in \mathbb{N}$. Mamy

$$\varphi\Big((\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} C_j) \cap B\Big) \leqslant \varphi\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}((A_j \setminus C_j) \cap B)\Big) < \varepsilon, \text{ a więc } \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F};$$

$$\lim_{N \to +\infty} \varphi\Big((\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \setminus \bigcup_{j=1}^{N} C_j) \cap B\Big) = \varphi\Big((\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j) \cap B\Big) \leqslant \varphi\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}((A_j \setminus C_j) \cap B)\Big) < \varepsilon, \text{ a więc } \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}.$$

Przejście graniczne to jedyne miejsce, w którym korzystamy ze skończoności miary zbioru B — por. Twierdzenie 13.5.2(k)).

Krok 6^0: (R2) zachodzi dla dowolnego zbioru $B \in \mathcal{B}(X)$ (co, wobec Kroku 4^0, oznacza, że (R1) zachodzi dla dowolnego zbioru $B \in \mathcal{B}(X)$).

Istotnie, na podstawie Kroku 5^0 dla dowolnego j istnieje zbiór domknięty $C_j \subset \Omega_j \setminus B$ taki, że $\varphi((\Omega_j \setminus B) \setminus C_j) \leqslant \varepsilon 2^{-j}$. Niech $C := \bigcup_{j=1}^{\infty} (\Omega_j \setminus C_j)$. Oczywiście C jest otwarty, $B \subset C$ oraz $\varphi(C \setminus B) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \varphi((\Omega_j \setminus C_j) \setminus B) \leqslant \varepsilon$.

Krok 7^0: (R1) zachodzi dla dowolnego $B \in \mathfrak{M}(\varphi)$ takiego, że $\varphi(B) < +\infty$.

Niech $\widehat{B} \in \mathcal{B}(X)$ będzie taki, że $B \subset \widehat{B}$ i $\varphi(\widehat{B}) = \varphi(B)$. Ponieważ, $B \in \mathfrak{M}$, zatem $\varphi(\widehat{B} \setminus B) = \varphi(\widehat{B}) - \varphi(B) = 0$. Niech $B' := \widehat{\widehat{B} \setminus B}$, tzn. $B' \in \mathcal{B}(X)$, $\widehat{B} \setminus B \subset B'$ i $\varphi(B') = \varphi(\widehat{B} \setminus B) = 0$. Zdefiniujmy $B_- := \widehat{B} \setminus B'$. Wtedy $B_- \subset B$ i $B_- \in \mathcal{B}(X)$. Na podstawie (c), dla dowolnego $\varepsilon > 0$, istnieje zbiór domknięty $C \subset B_-$ taki, że $\varphi(B_- \setminus C) \leqslant \varepsilon$. Wynika stąd, że $\varphi(B \setminus C) \leqslant \varphi(B \setminus B_-) + \varphi(B_- \setminus C) \leqslant \varepsilon$.

Krok 8^0: (R2) zachodzi dla dowolnego $B \in \mathfrak{M}(\varphi)$ (co, wobec Kroku 4^0, oznacza, że (R1) zachodzi dla dowolnego zbioru $B \in \mathfrak{M}(\varphi)$).

Wystarczy skorzystać z metody dowodu Kroku 6^0. □

13.8. Konstrukcja Carathéodory'ego

Definicja 13.8.1. Niech (X, ϱ) będzie przestrzenią metryczną, niech $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$, $\varnothing \in \mathcal{F}$ i niech $\boldsymbol{\zeta} : \mathcal{F} \longrightarrow [0, +\infty]$ będzie dowolnym odwzorowaniem takim, że $\boldsymbol{\zeta}(\varnothing) = 0$. Funkcję $\boldsymbol{\zeta}$ będziemy czasem nazywać *funkcją tworzącą*. Dla dowolnego $0 < \delta \leqslant +\infty$ niech $\varphi_\delta, \varphi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ będą zdefiniowane następująco:

$$\varphi_\delta(A) := \inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty} \boldsymbol{\zeta}(A_j) : A_j \in \mathcal{F},\ \operatorname{diam} A_j \leqslant \delta\ (j \in \mathbb{N}),\ A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big\}, \quad A \subset X, \quad \varphi := \sup_{\delta>0} \varphi_\delta.$$

Przypomnijmy, że $\operatorname{diam} \varnothing = 0$ i $\inf \varnothing = +\infty$. Powyższa konstrukcja nosi nazwę *konstrukcji Carathéodory'ego.*

Zauważmy, że jeżeli $\delta' \leqslant \delta''$, to $\varphi_{\delta'} \geqslant \varphi_{\delta''}$. Tak więc $\varphi = \lim\limits_{\delta\to 0+} \varphi_\delta$.

Twierdzenie 13.8.2. (a) *Odwzorowania φ_δ oraz φ są miarami zewnętrznymi.*

(b) $\mathcal{B}(X) \subset \mathfrak{M}(\varphi)$.

(c) *Jeżeli $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}(X)$, to miara φ jest $\mathcal{B}$-regularna.*

Dowód. (a) jest elementarne (Ćwiczenie).

(b) Niech $A, B \subset X$, $\varrho(A,B) = \delta_0 > 0$. Wtedy $\varphi_\delta(A\cup B) = \varphi_\delta(A) + \varphi_\delta(B)$ dla $0 < \delta < \delta_0$. Wynika stąd, że $\varphi(A\cup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$ i możemy skorzystać z Twierdzenia 13.6.6.

(c) Ustalmy $A \subset X$ i $\delta > 0$. Jeżeli $\varphi_\delta(A) = +\infty$, to przyjmujemy $B^{(\delta)} := X$. Jeżeli $\varphi_\delta(A) < +\infty$, to dla $\varepsilon > 0$ niech $(A_j^{(\delta,\varepsilon)})_{j=1}^\infty$ będzie pokryciem zbioru A zbiorami z $\mathcal{F}$ o średnicy $\leqslant \delta$ takim, że $\sum\limits_{j=1}^\infty \boldsymbol{\zeta}(A_j^{(\delta,\varepsilon)}) \leqslant \varphi_\delta(A) + \varepsilon$. Połóżmy $B^{(\delta)} := \bigcap\limits_{k=1}^\infty \bigcup\limits_{j=1}^\infty A_j^{(\delta,1/k)}$. Oczywiście $A \subset B^{(\delta)} \in \mathcal{B}(X)$ oraz

$$\varphi_\delta(A) \leqslant \varphi_\delta(B^{(\delta)}) \leqslant \varphi_\delta\Big(\bigcup_{j=1}^\infty A_j^{(\delta,1/k)}\Big) \leqslant \varphi_\delta(A) + \frac{1}{k},$$

co przy $k \longrightarrow +\infty$ daje $\varphi_\delta(A) = \varphi_\delta(B^{(\delta)})$. Niech $B := \bigcap\limits_{\ell=1}^\infty B^{(1/\ell)}$. Widać, że $A \subset B \in \mathcal{B}(X)$ oraz

$$\varphi(A) \leqslant \varphi(B) = \lim_{\ell\to+\infty} \varphi_{1/\ell}(B) \leqslant \lim_{\ell\to+\infty} \varphi_{1/\ell}(B^{(1/\ell)}) = \lim_{\ell\to+\infty} \varphi_{1/\ell}(A) = \varphi(A). \qquad \square$$

13.9. Miary Hausdorffa

Niech $\mathcal{F} := \operatorname{cotop} X$, niech $m \geqslant 0$ i niech

$$\boldsymbol{\zeta}_m(A) := \boldsymbol{\alpha}(m)\Big(\frac{\operatorname{diam} A}{2}\Big)^m, \text{ gdzie } \boldsymbol{\alpha}(m) := \frac{(\Gamma(\frac{1}{2}))^m}{\Gamma(1+\frac{m}{2})}. \quad \big({}^{28}\big)$$

Konstrukcja Carathéodory'ego zastosowana dla funkcji tworzącej $\boldsymbol{\zeta}_m : \mathcal{F} \longrightarrow [0,+\infty]$ daje:

- miary zewnętrzne $\mathcal{H}_\delta^m := \varphi_{m,\delta}$, $\mathcal{H}^m := \varphi_m$,
- σ–algebrę $\mathcal{H}_m := \mathfrak{M}(\mathcal{H}^m)$;

takie, że

- $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{H}_m$,
- $\mathcal{H}^m$ jest $\mathcal{B}$–regularna i zupełna (tzn. $\mathcal{H}^m|_{\mathcal{H}_m}$ jest zupełna).

Miara $\mathcal{H}^m$ nosi nazwę *m-tej (m–wymiarowej) miary Hausdorffa*, a zbiory z $\mathcal{H}_m$ — zbiorami mierzalnymi w sensie m-tej miary Hausdorffa.

Obserwacja 13.9.1. (a) Ponieważ $\operatorname{diam} A = \operatorname{diam} \overline{A}$, rodzinę wszystkich zbiorów domkniętych w definicji miary Hausdorffa możemy zastąpić rodziną wszystkich zbiorów borelowskich czy też nawet rodziną wszystkich zbiorów.

(b) $\mathcal{H}^0$ jest miarą liczącą ($\mathcal{H}_0 = \mathcal{P}(X)$).

(c) Jeżeli $\mathcal{H}^m(A) < +\infty$, to $\mathcal{H}^n(A) = 0$ dla $n > m \geqslant 0$.

Istotnie, jeżeli $A \subset \bigcup\limits_{j=1}^\infty A_j$, gdzie A_j jest domknięty, $\operatorname{diam} A_j \leqslant \delta$ ($j \in \mathbb{N}$), to

$$\mathcal{H}_\delta^n(A) \leqslant \sum_{j=1}^\infty \boldsymbol{\zeta}_n(A_j) \leqslant \frac{\boldsymbol{\alpha}(n)2^m}{\boldsymbol{\alpha}(m)2^n} \sum_{j=1}^\infty \boldsymbol{\zeta}_m(A_j)\delta^{n-m}, \text{ skąd } \mathcal{H}_\delta^n(A) \leqslant \frac{\boldsymbol{\alpha}(n)2^m}{\boldsymbol{\alpha}(m)2^n}\mathcal{H}_\delta^m(A)\delta^{n-m},$$

co przy $\delta \longrightarrow 0+$ daje tezę.

(d) Niech $\dim_{\mathcal{H}}(A) := \inf\{m \geqslant 0 : \mathcal{H}^m(A) < +\infty\}$. Liczba $\dim_{\mathcal{H}}(A) \in [0,+\infty]$ nosi nazwę *wymiaru Hausdorffa zbioru A*. Wobec (c), $\mathcal{H}^m(A) = 0$ dla $m > \dim_{\mathcal{H}}(A)$.

(e) Załóżmy dodatkowo, że X jest przestrzenią wektorową i ϱ jest niezmiennicza względem translacji, tzn. $\varrho(x+x_0, y+x_0) = \varrho(x,y)$ dla dowolnych $x, y, x_0 \in X$. Tak jest np. gdy $(X, \|\ \|)$ jest przestrzenią unormowaną i $\varrho(x,y) = \|x-y\|$. Podstawowym przykładem jest tu oczywiście $X = \mathbb{R}^n$ z jedną z klasycznych norm.

$\big({}^{28}\big)$ $(\operatorname{diam}\varnothing)^0 := 0$. Można pokazać, że dla $m \in \mathbb{N}$: $\boldsymbol{\alpha}(m) = |\mathbb{B}_m|$ (Ćwiczenie). Zauważmy, że $\boldsymbol{\alpha}(0) = 1$.

Wtedy miary $\mathcal{H}^m_\delta$ i $\mathcal{H}^m$ są niezmiennicze względem translacji, tzn. dla dowolnego zbioru $A \subset X$ i dla dowolnego $x_0 \in X$ mamy $\mathcal{H}^m_\delta(A+x_0) = \mathcal{H}^m_\delta(A)$, $\mathcal{H}^m(A+x_0) = \mathcal{H}^m(A)$. Ponadto, $A + x_0 \in \mathcal{H}_m \iff A \in \mathcal{H}_m$.

Istotnie, pierwsza równość wynika z tego, że $\operatorname{diam}(A+x_0) = \operatorname{diam}(A)$, a stąd $\boldsymbol{\zeta}_m(A+x_0) = \boldsymbol{\zeta}_m(A)$. Druga równość jest konsekwencją pierwszej. Dla dowodu równoważności mamy

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^m(T\cap(A+x_0)) + \mathcal{H}^m(T\setminus(A+x_0)) &= \mathcal{H}^m(((T-x_0)\cap A)+x_0) + \mathcal{H}^m(((T-x_0)\setminus A)+x_0)\\ &= \mathcal{H}^m((T-x_0)\cap A) + \mathcal{H}^m((T-x_0)\setminus A) \leqslant \mathcal{H}^m(T-x_0) = \mathcal{H}^m(T).\end{aligned}$$

(f) Załóżmy dodatkowo, że X jest przestrzenią unormowaną (np. $X = \mathbb{R}^n$). Wtedy $\mathcal{H}^m(rA) = r^m\mathcal{H}^m(A)$ oraz $rA \in \mathcal{H}_m \iff A \in \mathcal{H}_m$, $A \subset X$, $r > 0$.

Istotnie, jeżeli $A \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$, gdzie $\operatorname{diam} A_j \leqslant \delta$, $j \in \mathbb{N}$, to $rA \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} rA_j$, gdzie $\operatorname{diam} A_j \leqslant r\delta$, $j \in \mathbb{N}$. Stąd $\mathcal{H}^m_{r\delta}(rA) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{\infty} \boldsymbol{\zeta}_m(rA_j) = r^m \sum\limits_{j=1}^{\infty} \boldsymbol{\zeta}_m(A_j)$. W takim razie $\mathcal{H}^m_{r\delta}(rA) \leqslant r^m\mathcal{H}^m_\delta(A)$, co przy $\delta \longrightarrow 0+$ daje $\mathcal{H}^m(rA) \leqslant r^m\mathcal{H}^m(A) = r^m\mathcal{H}^m(\frac{1}{r}(rA)) \leqslant \mathcal{H}^m(rA)$. Ponadto,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^m(T\cap(rA)) + \mathcal{H}^m(T\setminus(rA)) &= \mathcal{H}^m(r(\tfrac{1}{r}T\cap A)) + \mathcal{H}^m(r(\tfrac{1}{r}T\setminus A))\\ &= r^m\mathcal{H}^m(\tfrac{1}{r}T\cap A) + r^m\mathcal{H}^m(\tfrac{1}{r}T\setminus A) \leqslant r^m\mathcal{H}^m(\tfrac{1}{r}T) = \mathcal{H}^m(T).\end{aligned}$$

(g) Jeżeli $X = \mathbb{R}^n$, to jako $\mathcal{F}$ można wziąć rodzinę wszystkich zbiorów zwartych i wypukłych (ponieważ $\operatorname{diam} A = \operatorname{diam}(\overline{\operatorname{conv} A})$).

Twierdzenie 13.9.2. *Niech F będzie dowolną przestrzenią unormowaną, niech $V \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i niech $\Psi : V \longrightarrow F$ spełnia lokalnie warunek Höldera z wykładnikiem $\alpha \in (0,1]$. Wtedy:*

(a) *$\mathcal{H}^{n/\alpha}(\Psi(K)) < +\infty$ dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset V$. W szczególności, na podstawie Obserwacji 13.9.1*(c)*, $\mathcal{H}^m(\Psi(V)) = 0$ dla dowolnego $m > n/\alpha$.*

(b) *Dla $X = \mathbb{R}^n$ miara $\mathcal{H}^n$ jest skończona na zbiorach zwartych. W konsekwencji, na podstawie Twierdzenia 13.7.5, $\mathcal{H}^n$ spełnia warunki* (R1) − (R4).

Dowód. (a) Wobec twierdzenie Lindelöfa, wystarczy pokazać, $\mathcal{H}^{n/\alpha}(\Psi(P)) < +\infty$, gdzie $P \subset\subset V$ jest dowolną kostką zwartą o wszystkich krawędziach równych ℓ taką, że $\|\Psi(x') - \Psi(x'')\| \leqslant C\|x'-x''\|^\alpha_\infty, \quad x', x'' \in P$. Dla dowolnego $N \in \mathbb{N}$ podzielmy kostkę P na N^n małych kostek o krawędzi ℓ/N. Niech P' będzie taką małą kostką. Wtedy $\operatorname{diam}\Psi(P') \leqslant C(\ell/N)^\alpha =: \delta_N$. Wynika stąd, że

$$\mathcal{H}^{n/\alpha}_{\delta_N}(\Psi(P)) \leqslant \boldsymbol{\alpha}(n/\alpha)N^n(\tfrac{1}{2}C(\ell/N)^\alpha)^{n/\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(n/\alpha)(\tfrac{1}{2}C)^{n/\alpha}\ell^n =: M.$$

Gdy $N \longrightarrow +\infty$, wnioskujemy stąd, że $\mathcal{H}^{n/\alpha}(\Psi(P)) \leqslant M < +\infty$.

(b) Stosujemy (a) do $F = \mathbb{R}^n$, $\Psi = \mathrm{id}$ ($\alpha = 1$). □

13.10. Miara Lebesgue'a

Niech $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F} := \{\varnothing\} \cup \{P : P \text{ jest kostką}\}$, $\zeta(\varnothing) := 0$, $\zeta(P) := |P|$. Konstrukcja Carathéodory'ego daje:

- miary zewnętrzne $\mathcal{L}^n_\delta := \varphi_\delta$, $\mathcal{L}^n := \varphi$,
- σ–algebrę $\mathcal{L}_n := \mathfrak{M}(\mathcal{L}^n)$

takie, że

- $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}_n$,
- $\mathcal{L}^n$ jest $\mathcal{B}$–regularna i zupełna.

Miarę $\mathcal{L}^n$ nazywamy *n–wymiarową miarą Lebesgue'a na* $\mathbb{R}^n$, a zbiory z $\mathcal{L}_n$ − zbiorami mierzalnymi w sensie Lebesgue'a.

Obserwacja 13.10.1. (a) Dowolną kostkę $P \subset \mathbb{R}^n$ można, dla dowolnego $\delta > 0$, rozbić na skończoną liczbę kostek o średnicy $\leqslant \delta$. To implikuje, że

$$\mathcal{L}^n_\delta(A) = \mathcal{L}^n(A) = \inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty}|P_j| : (P_j)_{j=1}^\infty \subset \mathcal{F},\ A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j\Big\}, \quad A \subset \mathbb{R}^n.$$

W szczególności, jeżeli $|A| = 0$, to $\mathcal{L}^n(A) = 0$.

(b) $\mathcal{H}^1 = \mathcal{L}^1$ (wobec Obserwacji 13.9.1(g)).

(c) $\mathcal{L}^n(P) = |P|$ dla dowolnej kostki $P \subset \mathbb{R}^n$. W szczególności, warunki (R1) – (R4) z Twierdzenia 13.7.5 zachodzą dla dowolnego $B \in \mathcal{L}_n$.

Oczywiście $\mathcal{L}^n(P) \leqslant |P|$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Niech $P \subset \bigcup_{j=1}^{N} P_j$ i $\sum_{j=1}^{N} |P_j| \leqslant \mathcal{L}^n(P) + \varepsilon$, gdzie $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Zwiększając nieco każdą kostkę P_j dostajemy nową kostkę Q_j taką, że $P_j \subset \operatorname{int} Q_j$ i $|Q_j| \leqslant |P_j| + \varepsilon 2^{-j}$. Oczywiście $P \subset \bigcup_{j=1}^{N} \operatorname{int} Q_j$. Ponieważ kostka P jest zwarta, zatem istnieje $N_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $P \subset \bigcup_{j=1}^{N_0} \operatorname{int} Q_j$. Stąd na mocy własności całki Riemanna mamy:

$$|P| = \int_P \chi_P \leqslant \int_P \Big(\sum_{j=1}^{N_0} \chi_{Q_j}\Big) \leqslant \sum_{j=1}^{N_0} |Q_j| \leqslant \mathcal{L}^n(P) + 2\varepsilon.$$

(d) Miara $\mathcal{L}^n$ jest *niezmiennicza względem translacji*, tzn. dla $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mamy: $\mathcal{L}^n(A + x_0) = \mathcal{L}^n(A)$ dla dowolnego $A \subset \mathbb{R}^n$ oraz $A \in \mathcal{L}_n \iff (A + x_0) \in \mathcal{L}_n$ – Ćwiczenie (por. Obserwacja 13.9.1(e)).

(e) $\mathcal{L}^n(rA) = r^n \mathcal{L}^n(A)$ oraz $rA \in \mathcal{L}_n \iff A \in \mathcal{L}_n$, $A \subset X$, $r > 0$ – Ćwiczenie (por. Obserwacja 13.9.1(f)).

(f) $\mathcal{L}^n(A) = \inf\{\mathcal{L}^n(\Omega) : A \subset \Omega \in \operatorname{top} \mathbb{R}^n\}$.

Odnotujmy, że w rzeczywistości prawdziwe jest następujące (trudne) twierdzenie.

Twierdzenie* 13.10.2. [29] $\mathcal{H}^n(A) = \mathcal{L}^n(A)$, $A \subset \mathbb{R}^n$.

Dowód nierówności $\mathcal{H}^n \leqslant \mathcal{L}^n$ w Twierdzeniu 13.10.2. Wobec Obserwacji 13.10.1(f), wystarczy pokazać, że dla dowolnego $\Omega \in \operatorname{top} \mathbb{R}^n$ takiego, że $\mathcal{L}^n(\Omega) < +\infty$, oraz dla dowolnego $0 < \delta < +\infty$, mamy $\mathcal{H}^n_\delta(\Omega) \leqslant \mathcal{L}^n(\Omega)$. Ustalamy Ω i δ. Niech $\mathcal{F} := \{\overline{\mathbb{B}}(a,r) : \overline{\mathbb{B}}(a,3r) \subset \Omega,\ 6r \leqslant \delta\}$. Oczywiście, $\sup_{B\in\mathcal{F}} \operatorname{diam} B \leqslant \frac{\delta}{3} < +\infty$. Ponadto, $\zeta_n(B) = \mathcal{L}^n(B)$, $B \in \mathcal{F}$. Do rodziny $\mathcal{F}$ stosujemy Twierdzenie o pokryciu 10.9.1 z $\tau_0 := 2$. Otrzymujemy rodzinę $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ parami rozłącznych kul takich, że dla dowolnej kuli $B = \overline{\mathbb{B}}(a,r) \in \mathcal{F}$ istnieje kula $B_0 = \overline{\mathbb{B}}(a_0,r_0) \in \mathcal{F}_0$ taka, że $\|a - a_0\| \leqslant r + r_0$ i $r \leqslant 2r_0$. Dla dowolnej skończonej podrodziny $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}_0$ mamy

$$\sum_{B\in\mathcal{G}} \mathcal{L}^n(B) \leqslant \mathcal{L}^n(\Omega) < +\infty.$$

Oznacza to w szczególności, że rodzina $(\mathcal{L}^n(B))_{B\in\mathcal{F}_0}$ jest sumowalna, a więc, w szczególności, rodzina $\mathcal{F}_0$ jest co najwyżej przeliczalna (Obserwacja 6.2.7(c)). Na podstawie kryterium Cauchy'ego (Twierdzenie 6.2.6(iv)), dla dowolnego $\varepsilon > 0$, istnieje skończona podrodzina $\mathcal{G}_\varepsilon \subset \mathcal{F}_0$ taka, że

$$\sum_{B\in\mathcal{F}_0\setminus\mathcal{G}_\varepsilon} \mathcal{L}^n(B) \leqslant \varepsilon.$$

Niech $K_\varepsilon := \bigcup_{B\in\mathcal{G}_\varepsilon} B$. Zbiór K_ε jest zwarty. Weźmy dowolne $a \in \Omega \setminus K_\varepsilon$. Niech kula $B = \overline{\mathbb{B}}(a,r)$ będzie taka, że $\overline{\mathbb{B}}(a,3r) \subset \Omega\setminus K_\varepsilon$, $6r \leqslant \delta$. Oczywiście $B \in \mathcal{F}$. Dobierzmy kulę $B_0 = \overline{\mathbb{B}}(a_0,r_0) \in \mathcal{F}_0$ tak, że $\|a-a_0\| \leqslant r+r_0$ i $r \leqslant 2r_0$. Oczywiście, $B_0 \in \mathcal{F}_0 \setminus \mathcal{G}_\varepsilon$. Ponadto, $a \in \overline{\mathbb{B}}(a_0, r + r_0) \subset \overline{\mathbb{B}}(a_0, 3r_0)$. Tak więc

$$\Omega \setminus K_\varepsilon \subset \bigcup_{\overline{\mathbb{B}}(b,s)\in\mathcal{F}_0\setminus\mathcal{G}_\varepsilon} \overline{\mathbb{B}}(b,3s).$$

Wynika stąd, że rodzina kul $\mathcal{G}_\varepsilon \cup \{\overline{\mathbb{B}}(b,3s) : \overline{\mathbb{B}}(b,s) \in \mathcal{F}_0 \setminus \mathcal{G}_\varepsilon\}$ jest co najwyżej przeliczalnym pokryciem zbioru Ω zbiorami wypukłymi i zwartymi o średnicach $\leqslant \delta$. Wprost z definicji, mamy więc:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^n_\delta(\Omega) &\leqslant \sum_{B\in\mathcal{G}_\varepsilon} \zeta_n(B) + \sum_{\overline{\mathbb{B}}(b,s)\in\mathcal{F}_0\setminus\mathcal{G}_\varepsilon} \zeta_n(\overline{\mathbb{B}}(b,3s)) \\ &\leqslant \sum_{B\in\mathcal{F}_0} \mathcal{L}^n(B) + 3^n \sum_{B\in\mathcal{F}_0\setminus\mathcal{G}_\varepsilon} \mathcal{L}^n(B) \leqslant \mathcal{L}^n(\Omega) + 3^n\varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \quad \square\end{aligned}$$

Obserwacja 13.10.3. Kluczem do dowodu nierówności $\mathcal{L}^n \leqslant \mathcal{H}^n$ w Twierdzeniu 13.10.2 jest następująca *nierówność izodiametryczna*:

$$\mathcal{L}^n(A) \leqslant \boldsymbol{\zeta}_n(A), \quad A \subset \mathbb{R}^n.$$

---

[29] Zob. np. U. Storch, H. Wiebe, *Lehrbuch der Mathematik, t. 3, Analysis mehrerer Veränderlicher, Integrationstheorie*, Spektrum Akademischer Verlag, 1993, § 13.C.

Istotnie, jeżeli ona zachodzi, to na podstawie Obserwacji 13.9.1(g), dla $A \subset \mathbb{R}^n$ i $\delta > 0$, mamy:

$$\mathcal{H}^n_\delta(A) = \inf\Big\{ \sum_{j=1}^\infty \zeta_n(A_j) : \forall_{j\in\mathbb{N}} : A_j \text{ jest zwarty i wypukły, } \operatorname{diam} A_j \leqslant \delta,\ A \subset \bigcup_{j=1}^\infty A_j \Big\}$$
$$\geqslant \inf\Big\{ \sum_{j=1}^\infty \mathcal{L}^n(A_j) : \forall_{j\in\mathbb{N}} : A_j \text{ jest zwarty i wypukły, } \operatorname{diam} A_j \leqslant \delta,\ A \subset \bigcup_{j=1}^\infty A_j \Big\} \geqslant \mathcal{L}^n(A).$$

Zauważmy, że nierówność izodiametryczną wystarczy sprawdzić jedynie dla A zwartych i wypukłych takich, że $\operatorname{diam} A > 0$.

Przykład 13.10.4 (Przykład Vitaliego [30]). $\mathcal{L}_n \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Niech $P := [0,1]^n$. Dla $x, y \in P$ niech $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}^n$. Oczywiście jest to relacja równoważnościowa. Na podstawie pewnika wyboru istnieje zbiór $A \subset P$ taki, że $A \cap [x]_\sim$ jest zbiorem dokładnie jednoelementowym dla dowolnego $x \in P$. Przypuśćmy, że A jest mierzalny. Zauważmy, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{Q}^n$, $x \neq y$, zbiory $A + x$ i $A + y$ są rozłączne (jeżeli $a + x = b + y$ dla $a, b \in A$, to $a \sim b$, a stąd, wobec własności A, dostajemy $a = b$, czyli $x = y$ – sprzeczność). Niech $Q := [-1,1]^n$, $R := [-1,2]^n$, $B := \bigcup\limits_{r\in\mathbb{Q}^n\cap Q} (A + r) \subset R$. Wobec niezmienniczości miary Lebesgue'a względem translacji dostajemy: $\mathcal{L}^n(B) = \sum\limits_{r\in\mathbb{Q}^n\cap Q} \mathcal{L}^n(A + r) = \sum\limits_{r\in\mathbb{Q}^n\cap Q} \mathcal{L}^n(A) \leqslant \mathcal{L}^n(R) < +\infty$. Zatem $\mathcal{L}^n(A) = 0$, a stąd $\mathcal{L}^n(B) = 0$. Z drugiej strony $P \subset B$ (dla dowolnego $x \in P$ niech $A \cap [x]_\sim = \{a\}$; wtedy $x - a \in \mathbb{Q}^n$ oraz $x - a \in Q$), a więc $\mathcal{L}^n(B) > 0$ – sprzeczność.

Twierdzenie 13.10.5. *$A \times B \in \mathcal{L}_{p+q}$ dla dowolnych $A \in \mathcal{L}_p$, $B \in \mathcal{L}_q$.*

Dowód. Ponieważ $A \times B = (A \times \mathbb{R}^q) \cap (\mathbb{R}^p \times B)$, wystarczy rozważyć przypadek $B = \mathbb{R}^q$. Ponieważ miara Lebesgue'a spełnia (R3) (Obserwacja 13.10.1(c)), mamy $A = F \cup Z$, gdzie F jest typu $\mathcal{F}_\sigma$, zaś Z jest miary zero. Oczywiście $F \times \mathbb{R}^q$ jest typu $\mathcal{F}_\sigma$. Wystarczy pokazać, że $Z \times \mathbb{R}^q$ jest miary zero. W tym celu wystarczy pokazać, że $Z \times Q$ jest miary zero, gdzie Q jest dowolną kostką. Rozumujemy z definicji: dla dowolnego $\varepsilon > 0$, jeżeli $Z \subset \bigcup\limits_{j\in J} P_j$, gdzie $\sum\limits_{j\in J} |P_j| \leqslant \varepsilon$, to $Z \times Q \subset \bigcup\limits_{j\in J} (P_j \times Q)$ oraz $\sum\limits_{j\in J} |P_j \times Q| \leqslant \varepsilon |Q|$. □

Twierdzenie 13.10.6 (Por. Twierdzenie 11.1.10(b)). *Niech $V \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i niech $\Psi : V \longrightarrow \mathbb{R}^m$ spełnia lokalnie warunek Höldera z wykładnikiem $\alpha \geqslant n/m$ (np. $\Psi \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R}^m)$, $m \geqslant n$ i $\alpha = 1$). Wtedy:*

(a) *jeżeli $\alpha > n/m$, to $\mathcal{L}^m(\Psi(V)) = 0$;*
(b) *jeżeli $\alpha = n/m$ i $\mathcal{L}^n(A) = 0$ dla pewnego $A \subset V$, to $\mathcal{L}^m(\Psi(A)) = 0$;*
(c) *jeżeli $\alpha = n/m$ i $A \in \mathcal{L}_n$ dla pewnego $A \subset V$, to $\Psi(A) \in \mathcal{L}_m$.*

Dowód. (a) Wobec twierdzenia Lindelöfa, wystarczy pokazać, że każdy punkt $a \in V$ ma otoczenie U_a takie, że $\mathcal{L}^m(\Psi(U_a)) = 0$. Ustalmy $a \in V$ i niech $P \subset\subset V$ będzie kostką taka, że $a \in \operatorname{int} P$ oraz Ψ spełnia w P warunek Höldera z wykładnikiem α. Na podstawie Twierdzenia 11.1.10(b_1) wiemy, że $|\Psi(P)| = 0$, a stąd $\mathcal{L}^m(\Psi(P)) = 0$.

(b) Podobnie, jak poprzednio, wystarczy pokazać, że każdy punkt $a \in V$ ma otoczenie U_a takie, że $\mathcal{L}^m(\Psi(A \cap U_a)) = 0$. Ustalmy $a \in V$ i niech $P \subset\subset V$ będzie kostką taka, że $a \in \operatorname{int} P$ oraz Ψ spełnia w P warunek Höldera z wykładnikiem α: $\|\Psi(x') - \Psi(x'')\|_\infty \leqslant C\|x' - x''\|^\alpha_\infty$, $x', x'' \in P$. Ustalmy kostkę $Q \subset \operatorname{int} P$ taką, że $a \in Q$. Dla $\varepsilon > 0$, niech $(P_j)_{j\in J}$ będzie co najwyżej przeliczalną rodziną kostek taką, że $A \cap Q \subset \bigcup\limits_{j\in J} P_j$, oraz $\sum\limits_{j\in J} |P_j| < \varepsilon$. Możemy założyć, że $P_j \subset \operatorname{int} P$ oraz (zwiększając nieco kostkę P_j i dzieląc ją na mniejsze kostki), że P_j ma równe krawędzie r_j. Zauważmy teraz, że dla dowolnego $j \in J$, zbiór $\Psi(P_j)$ jest zawarty w pewnej kostce Q_j o krawędzi $\leqslant 2Cr_j^\alpha$. Mamy więc $\Psi(A \cap Q) \subset \bigcup\limits_{j\in J} Q_j$ oraz

$$\sum_{j\in J} |Q_j| \leqslant \sum_{j\in J} (2Cr_j^\alpha)^m = (2C)^m \sum_{j\in J} r_j^n \leqslant (2C)^m \varepsilon.$$

Stąd $\mathcal{L}^m(\Psi(A \cap Q)) = 0$.

(c) Ponieważ miara Lebesgue'a spełnia (R3) (por. Obserwacja 13.10.1(c)), zatem $A = F \cup Z$, gdzie $F \in \mathcal{F}_\sigma$, zaś Z jest miary zero. Oczywiście zbiór F może być przedstawiony w postaci $F = \bigcup\limits_{j=1}^\infty K_j$, gdzie każdy zbiór

[30] Giuseppe Vitali (1875–1932).

K_j jest zwarty. Na podstawie (b), zbiór $\Psi(Z)$ jest miary zero. Każdy ze zbiorów $\Psi(K_j)$ jest zwarty. Ostatecznie więc, $\Psi(A)=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\Psi(K_j)\cup\Psi(Z)$ jest mierzalny. □

13.11. Ogólna teoria całki

Niech $\mu:\mathfrak{M}\longrightarrow[0,+\infty]$ będzie ustaloną miarą (możemy myśleć o mierze generowanej poprzez konstrukcję Carathéodory'ego). Naszym celem będzie określenie pewnych klas funkcji $f:X\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$, czy też $f:X\longrightarrow\mathbb{C}$, dla których zdefiniujemy całkę $\int_X f d\mu$ względem miary μ.

Definicja 13.11.1 (Całka dla funkcji prostych)**.** Dla funkcji $f\in\mathcal{M}_0^+(X)$, jeżeli $f=\sum\limits_{j=1}^{N}a_j\chi_{A_j}$ jest jej postacią kanoniczną, to kładziemy

$$\int_X f d\mu:=\sum_{j=1}^{N}a_j\mu(A_j)\in[0,+\infty]$$

z zachowaniem konwencji $0\cdot(+\infty):=0$.

Obserwacja 13.11.2 (Własności całki dla funkcji prostych)**.** (a) Definicja całki $\int_X f d\mu$ nie zależy od wyboru postaci funkcji f w tym sensie, że jeżeli funkcja f, o postaci kanonicznej jak powyżej, da się również przedstawić w postaci $f=\sum\limits_{k=1}^{M}b_k\chi_{B_k}$, gdzie $B_1,\dots,B_M\in\mathfrak{M}$, $B_j\cap B_k=\varnothing$ dla $j\neq k$, $X=\bigcup\limits_{j=1}^{M}B_j$ i $b_1,\dots,b_M\in\mathbb{R}_+$, to

$$\sum_{k=1}^{M}b_k\mu(B_k)=\sum_{k=1}^{M}b_k\sum_{j=1}^{N}\mu(B_k\cap A_j)=\sum_{j=1}^{N}a_j\sum_{k=1}^{M}\mu(A_j\cap B_k)=\sum_{j=1}^{N}a_j\mu(A_j).$$

(b) $\int_X(\alpha f)d\mu=\alpha\int_X f d\mu$, $\alpha\geqslant 0$, $f\in\mathcal{M}_0^+(X)$.

(c) $\int_X(f+g)d\mu=\int_X f d\mu+\int_X g d\mu$, $f,g\in\mathcal{M}_0^+(X)$.

$$\begin{aligned}\int_X(f+g)d\mu&=\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{M}(a_j+b_k)\mu(A_j\cap B_k)=\sum_{j=1}^{N}a_j\sum_{k=1}^{M}\mu(A_j\cap B_k)+\sum_{k=1}^{M}b_k\sum_{j=1}^{N}\mu(B_k\cap A_j)\\&=\sum_{j=1}^{N}a_j\mu(A_j)+\sum_{k=1}^{M}b_k\mu(B_k)=\int_X f d\mu+\int_X g d\mu.\end{aligned}$$

(d) Dla $f,g\in\mathcal{M}_0^+(X)$, jeżeli $f\leqslant g$, to $\int_X f d\mu\leqslant\int_X g d\mu$.

(e) Jeżeli $\int_X f d\mu=0$ dla pewnej funkcji $f\in\mathcal{M}_0^+(X)$, to $\mu(\{f>0\})=0$.

(f) Dla $A\in\mathfrak{M}$ mamy $\int_A(f|_A)d\mu=\int_X(\chi_A\cdot f)d\mu$, $f\in\mathcal{M}_0^+(X)$; w szczególności, jeżeli $X=A_1\cup\dots\cup A_N$, gdzie $A_1,\dots,A_N\in\mathfrak{M}$, $A_j\cap A_k=\varnothing$ dla $j\neq k$, to $\int_X f d\mu=\int_{A_1}f d\mu+\dots+\int_{A_N}f d\mu$ dla dowolnego $f\in\mathcal{M}_0^+(X)$.

Definicja 13.11.3. Niech W będzie pewną własnością przysługującą punktom zbioru X. Powiemy, że W *zachodzi μ–prawie wszędzie na X*, jeżeli istnieje zbiór miary zero Z taki, że

$$\{x\in X:W(x)\text{ nie zachodzi}\}\subset Z.$$

Definicja 13.11.4 (Całka dla funkcji mierzalnych nieujemnych)**.** Dla $f\in\mathcal{M}^+(X)$, jeżeli $(f_n)_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{M}_0^+(X)$, $f_n\nearrow f$ (por. Twierdzenie 13.3.3), to

$$\int_X f d\mu:=\lim_{n\to+\infty}\int_X f_n d\mu\in[0,+\infty].$$

Lemat 13.11.5. *Powyższa definicja jest poprawna, tzn. nie zależy od wyboru ciągu $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ oraz pokrywa się z poprzednią definicją dla $f\in\mathcal{M}_0^+(X)$.*

Dowód. Niech $f=\sum\limits_{j=1}^{N}a_j\chi_{A_j}$ i niech $\mathcal{M}_0^+(X)\ni f_n\nearrow f\in\mathcal{M}_0^+(X)$. Dla $0<t<1$ połóżmy

$$A_{n,j}(t):=\{x\in A_j:f_n(x)\geqslant ta_j\},\quad j=1,\dots,N,\ n\in\mathbb{N}.$$

Zauważmy, że $A_{n,j}(t) \nearrow A_j$, gdy $n \nearrow +\infty$. Mamy

$$\sum_{j=1}^{N} t a_j \mu(A_{n,j}(t)) \leqslant \int_X f_n d\mu \leqslant \int_X f d\mu.$$

Stąd, przechodząc z n do $+\infty$, dostajemy:

$$t \int_X f d\mu \leqslant \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu \leqslant \int_X f d\mu.$$

Teraz przechodzimy z t to 1 i dostajemy $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.

Przechodzimy do dowodu niezależności definicji od wyboru ciągu. Niech

$$\mathcal{M}_0^+(X) \ni f_n \nearrow f \in \mathcal{M}^+(X), \quad \mathcal{M}_0^+(X) \ni g_n \nearrow f.$$

Ustalmy $k \in \mathbb{N}$ i zdefiniujmy $h_n := \min\{f_n, g_k\}$. Oczywiście, $h_n \in \mathcal{M}_0^+(X)$ oraz $h_n \nearrow g_k$. Na podstawie pierwszej części dowodu wnioskujemy, że $\int_X h_n d\mu \nearrow \int_X g_k d\mu$, a stąd

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu \geqslant \lim_{n\to+\infty} \int_X h_n d\mu = \int_X g_k d\mu.$$

Wobec dowolności k, dostajemy $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu \geqslant \lim_{k\to+\infty} \int_X g_k d\mu$. Zmieniając rolami ciągi $(f_n)_{n=1}^\infty$, $(g_n)_{n=1}^\infty$ dostajemy poszukiwaną równość. □

Obserwacja 13.11.6 (Własności całki dla funkcji mierzalnych nieujemnych)**.**

(a) $\int_X (\alpha f) d\mu = \alpha \int_X f d\mu$, $\alpha \geqslant 0$, $f \in \mathcal{M}^+(X)$.

(b) $\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$, $f, g \in \mathcal{M}^+(X)$.

(c) Dla $f, g \in \mathcal{M}^+(X)$, jeżeli $f \leqslant g$, to $\int_X f d\mu \leqslant \int_X g d\mu$.

(d) Dla $A \in \mathfrak{M}$ mamy $\int_A (f|_A) d\mu = \int_X (\chi_A \cdot f) d\mu$, $f \in \mathcal{M}^+(X)$; w szczególności, jeżeli $X = A_1 \cup \cdots \cup A_N$, gdzie $A_1, \ldots, A_N \in \mathfrak{M}$, $A_j \cap A_k = \varnothing$ dla $j \neq k$, to $\int_X f d\mu = \int_{A_1} f d\mu + \cdots + \int_{A_N} f d\mu$ dla dowolnego $f \in \mathcal{M}^+(X)$.

(e) Jeżeli $\int_X f d\mu = 0$ dla pewnej funkcji $f \in \mathcal{M}^+(X)$, to $\mu(\{f > 0\}) = 0$. $\mu(A_j) = 0$, $j \in \mathbb{N}$.

(f) Jeżeli $\int_X f d\mu < +\infty$ dla pewnej funkcji $f \in \mathcal{M}^+(X)$, to $\mu(\{f = +\infty\}) = 0$.

Twierdzenie 13.11.7 (Twierdzenie o monotonicznym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki)**.** *Jeżeli* $\mathcal{M}^+(X) \ni f_n \nearrow f$ ([31])*, to* $\int_X f_n d\mu \nearrow \int_X f d\mu$.

Dowód. Oczywiście $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu \leqslant \int_X f d\mu$. Niech $\mathcal{M}_0^+(X) \ni f_{n,k} \nearrow f_n$, gdy $k \nearrow +\infty$, $n \in \mathbb{N}$. Zdefiniujmy $g_n := \max\{f_{1,n}, f_{2,n}, \ldots, f_{n,n}\}$. Oczywiście $g_n \in \mathcal{M}_0^+(X)$. Widać również, że $g_n \leqslant f_n$, $n \in \mathbb{N}$. łatwo pokazać, że $g_n \nearrow f$ (Ćwiczenie). W takim razie, $\int_X f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X g_n d\mu \leqslant \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu$. □

Wniosek 13.11.8. *Dla dowolnego ciągu* $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{M}^+(X)$ *mamy* $\int_X \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \Big) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu$.

Wniosek 13.11.9. *Dla dowolnego* $f \in \mathcal{M}^+(X)$ *funkcja* $\nu(A) := \int_A f d\mu$, $A \in \mathfrak{M}$, *jest miarą nieujemną na* $\mathfrak{M}$. *Ponadto,* $\int_X g d\nu = \int_X f g d\mu$, $g \in \mathcal{M}^+(X)$. (*)

Dowód. Niech $(A_j)_{j=1}^\infty \subset \mathfrak{M}$, $A_j \cap A_k = \varnothing$ dla $j \neq k$. Mamy:

$$\nu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \int_X \chi_{\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j} \cdot f d\mu = \int_X \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \chi_{A_j} \cdot f \Big) d\mu \overset{\text{Wniosek 13.11.8}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \int_X \chi_{A_j} \cdot f d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j).$$

Wzór (*) zachodzi oczywiście, gdy $g = \chi_A$ dla $A \in \mathfrak{M}$. Zachodzi więc dla nieujemnych funkcji prostych, a stąd, na podstawie twierdzenia o monotonicznym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki, dla dowolnych funkcji z $\mathcal{M}^+(X)$. □

Wniosek 13.11.10. *Jeżeli* $\mathcal{M}^+(X) \ni f_n \searrow f$ ([32]) *i* $\int_X f_1 d\mu < +\infty$, *to* $\int_X f_n d\mu \searrow \int_X f d\mu$ ([33]).

([31]) Oczywiście, $f \in \mathcal{M}^+(X)$.

([32]) Oczywiście $f \in \mathcal{M}^+(X)$.

([33]) Można oczywiście założyć, że $\int_X f_N d\mu < +\infty$ dla pewnego N. Bez żadnych dodatkowych założeń twierdzenie nie jest prawdziwe — Ćwiczenie.

Dowód. Niech $Z := \{f_1 = +\infty\}$. Wiemy, że $\mu(Z) = 0$. Na zbiorze $X \setminus Z$ rozważmy ciąg $f_1 - f_n$, $n \in \mathbb{N}$. Stosując do niego twierdzenie o monotonicznym przechodzeniu do granicy pod znakiem mamy: $\int_{X\setminus Z}(f_1 - f_n)d\mu \nearrow \int_{X\setminus Z}(f_1 - f)d\mu$. Stąd: $\int_X f_n d\mu = \int_{X\setminus Z} f_n d\mu \searrow \int_{X\setminus Z} f d\mu = \int_X f d\mu$. □

Wniosek 13.11.11 (Lemat Fatou [34]). *Dla dowolnego ciągu $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}^+(X)$ mamy:*

$$\int_X (\liminf_{n\to+\infty} f_n)d\mu \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Odnotujmy, że nawet jeżeli granica $f := \lim_{n\to+\infty} f_n$ istnieje, to bez dodatkowych założeń mamy: $\int_X f d\mu < \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu$, np. $X := \mathbb{N}$, $\mu -$ miara licząca, $f_n := \chi_{\{n\}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Dowód. Mamy $f := \liminf_{n\to+\infty} f_n = \sup\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$, gdzie $g_n := \inf\{f_k : k \geqslant n\}$. Zauważmy, że $g_n \leqslant g_{n+1}$ oraz $g_n \leqslant f_n$. Stąd $\int_X f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X g_n d\mu \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu$. □

Definicja 13.11.12 (Całka)**.** Niech

$$L^1(X) = L^1(X,\mu) := \Big\{f \in \mathcal{M}(X) : \int_X |f|d\mu < +\infty\Big\},$$
$$L^1(X,\mathbb{C}) = L^1(X,\mathbb{C},\mu) := \Big\{f \in \mathcal{M}(X,\mathbb{C}) : \int_X |f|d\mu < +\infty\Big\}.$$

Jeżeli $f \in L^1(X)$, to $\int_X f_+ d\mu < +\infty$ i $\int_X f_- d\mu < +\infty$, a zatem możemy zdefiniować *całkę*

$$\int_X f d\mu := \int_X f_+ d\mu - \int_X f_- d\mu.$$

Z powyższego wzoru wynika, że pojęcie całki możemy rozszerzyć na takie funkcje, dla których $\int_X f_+ d\mu < +\infty$ lub $\int_X f_- d\mu < +\infty$ (chodzi o wykonalność działań).

$L^1(X,\mathbb{C})$ jest zespoloną przestrzenią wektorową. Jeżeli $f = u + iv \in L^1(X,\mathbb{C})$, to $u, v \in L^1(X)$, a zatem możemy określić *całkę* $\int_X f d\mu := \int_X u d\mu + i\int_X v d\mu$. Oczywiście dla $f, g \in \mathcal{M}(X)$ (odp. $f, g \in \mathcal{M}(X,\mathbb{C})$) takich, że $f = g$ μ–prawie wszędzie na X mamy: $f \in L^1(X) \iff g \in L^1(X)$ (odp. $f \in L^1(X,\mathbb{C}) \iff g \in L^1(X,\mathbb{C})$). Ponadto $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$.

Od tej chwili, mówiąc o funkcji klasy L^1, będziemy mieć na myśli całą klasę równoważności względem powyższej relacji $\sim$ równości μ–prawie wszędzie na X. Innymi słowy, zamiast przestrzeni $L^1(X)$ (odp. $L^1(X,\mathbb{C})$) rozważamy $L^1(X)/\sim$ (odp. $L^1(X,\mathbb{C})/\sim$). Nie będziemy wprowadzać specjalnych oznaczeń na te przestrzenie ilorazowe i oznaczymy je ponownie przez $L^1(X)$ (odp. $L^1(X,\mathbb{C})$). Utożsamienie to pozwala również zaliczać do przestrzeni $L^1(X)$ (odp. $L^1(X,\mathbb{C})$) (i w konsekwencji – całkować) funkcje określone prawie wszędzie. Postępujemy następująco: jeżeli $f \in \mathcal{M}(X \setminus Z)$ (odp. $f \in \mathcal{M}(X \setminus Z,\mathbb{C})$), gdzie Z jest zbiorem miary zero w X, to rozszerzamy f do funkcji mierzalnej f_0 na X kładąc $f_0 := 0$ na Z i definiujemy $f \in L^1(X) \iff f_0 \in L^1(X)$ (odp. $f \in L^1(X,\mathbb{C}) \iff f_0 \in L^1(X,\mathbb{C})$). Ponadto kładziemy $\int_X f d\mu := \int_X f_0 d\mu$.

Powyższe umowy będą w dalszym ciągu stosowane automatycznie bez specjalnych komentarzy.

Obserwacja 13.11.13 (Własności całki)**.** (a) Jeżeli $f \in L^1(X)$, to $\{f = -\infty\} \cup \{f = +\infty\}$ jest zbiorem miary zero. Wynika stąd bardzo ważny wniosek, że w gruncie rzeczy zamiast $L^1(X)$ wystarczy rozważać $L^1(X,\mathbb{R})$, a więc pewną podprzestrzeń $L^1(X,\mathbb{C})$. W tym sensie np. $L^1(X)$ jest rzeczywistą przestrzenią wektorową.

(b) Całka $L^1(X,\mathbb{K}) \ni f \longmapsto \int_X f d\mu \in \mathbb{K}$ jest operatorem $\mathbb{K}$–liniowym.

Istotnie, wystarczy rozważyć jedynie przypadek rzeczywisty. Dla dowodu jednorodności wystarczy zaobserwować, że $(-f)_+ = f_-$ i $(-f)_- = f_+$. Dla dowodu addytywności, niech $f, g \in L^1(X)$, $h := f + g$. Wtedy $h_+ - h_- = f_+ - f_- + g_+ - g_-$. Stąd $h_+ + f_- + g_- = h_- + f_+ + g_+$, a zatem $\int_X h_+ d\mu + \int_X f_- d\mu + \int_X g_- d\mu = \int_X h_- d\mu + \int_X f_+ d\mu + \int_X g_+ d\mu$, co daje żądany wynik.

(c) Dla $f, g \in L^1(X)$, jeżeli $f \leqslant g$, to $\int_X f d\mu \leqslant \int_X g d\mu$.

---

[34] Pierre Fatou (1878–1929).

(d) $|\int_X f d\mu| \leqslant \int_X |f| d\mu$, $f \in L^1(X,\mathbb{C})$. Ponadto, równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\alpha \in \mathbb{S}_1$ takie, że $|f| = \alpha f$ μ–prawie wszędzie.

Istotnie, niech $|\int_X f d\mu| = e^{i\theta_0} \int_X f d\mu$. Wtedy korzystając z liniowości całki mamy:

$$\Big|\int_X f d\mu\Big| = \mathrm{Re}\Big(\int_X (e^{i\theta_0} f) d\mu\Big) = \int_X \mathrm{Re}(e^{i\theta_0} f) d\mu \leqslant \int_X |f| d\mu.$$

Jeżeli $|\int_X f d\mu| = \int_X |f| d\mu$, to na podstawie powyższych równości, $\int_X (|f| - \mathrm{Re}(e^{i\theta_0} f)) d\mu = 0$, a stąd $|f| = \mathrm{Re}(e^{i\theta_0} f)$ μ–prawie wszędzie. W konsekwencji $\mathrm{Im}(e^{i\theta_0} f) = 0$ μ–prawie wszędzie i ostatecznie $|f| = e^{i\theta_0} f$ μ–prawie wszędzie.

Twierdzenie 13.11.14 (Ciągłość całki względem zbioru)**.** *Jeżeli $f \in L^1(X,\mathbb{C})$, to dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że jeżeli $A \in \mathfrak{M}$ i $\mu(A) \leqslant \delta$, to $|\int_A f d\mu| \leqslant \varepsilon$.*

Dowód. Wobec Obserwacji 13.11.13(d) wystarczy rozważyć przypadek, gdy $f \in \mathcal{M}^+(X)$, $\int_X f d\mu < +\infty$. Niech $g \in \mathcal{M}_0^+(X)$ będzie taka, że $g \leqslant f$ i $\int_X (f-g) d\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Przyjmijmy $C := \max_X g$. Wtedy $\int_A f d\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \int_A g d\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + C\mu(A)$. □

Wniosek 13.11.15. *Jeżeli $f \in L^1((a,b), \mathcal{L}^1)$, gdzie $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, to funkcja*

$$(a,b) \ni x \overset{f}{\longmapsto} \int_{(a,x]} f d\mathcal{L}^1$$

jest absolutnie ciągła*, tzn. dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla dowolnych punktów $a < a_1 < b_1 \leqslant a_2 < \cdots < b_{N-1} \leqslant a_N < b_N < b$, jeżeli $\sum_{j=1}^N (b_j - a_j) < \delta$, to $\sum_{j=1}^N |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon$. W szczególności, funkcja ta jest jednostajnie ciągła.*

Twierdzenie 13.11.16 (Twierdzenie Lebesgue'a o zmajoryzowanym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki)**.** *Jeżeli $(f_n)_{n=1}^\infty \subset L^1(X,\mathbb{C})$, $f_n \longrightarrow f$ oraz $|f_n| \leqslant g$, $n \in \mathbb{N}$, gdzie $g \in L^1(X)$, to $\int_X f_n d\mu \longrightarrow \int_X f d\mu$.*

Dowód. Oczywiście wystarczy rozważyć tylko przypadek rzeczywisty. Mamy $|f_n - f| \leqslant 2g, \quad n \in \mathbb{N}$. Stąd, na podstawie Lematu Fatou, dostajemy

$$\int_X (2g) d\mu \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \int_X (2g - |f_n - f|) d\mu = \int_X (2g) d\mu - \limsup_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f| d\mu,$$

skąd bezpośrednio wynika teza. □

Wniosek 13.11.17. *Jeżeli $(f_n)_{n=1}^\infty \subset L^1(X,\mathbb{C})$ oraz $\sum_{n=1}^\infty |f_n| \in L^1(X)$, to szereg $\sum_{n=1}^\infty f_n$ jest zbieżny μ–prawie wszędzie oraz $\int_X \Big(\sum_{n=1}^\infty f_n\Big) d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_X f_n d\mu$. W szczególności, jeżeli $\sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) < +\infty$, to zbiór $\{x \in X :$ x należy do nieskończenie wielu $A_n\}$ jest miary zero.*

Dowód. Ponieważ $\sum_{n=1}^\infty |f_n| \in L^1(X)$, zatem na podstawie Obserwacji 13.11.13(a), $\sum_{n=1}^\infty |f_n| < +\infty$ μ–prawie wszędzie, co daje zbieżność szeregu. Wzór wynika z twierdzenia Lebesgue'a. □

Wniosek 13.11.18. *Dla $f \in L^1(X,\mathbb{C})$ funkcja $\mathfrak{M} \ni A \overset{\nu}{\longmapsto} \int_A f d\mu \in \mathbb{C}$ jest miarą zespoloną.*

Dowód. Przeliczalna addytywność wynika z Wniosku 13.11.17. Niech mianowicie $(A_j)_{j=1}^\infty \subset \mathfrak{M}$, $A_j \cap A_k = \varnothing$ dla $j \neq k$. Mamy:

$$\nu(\bigcup_{j=1}^\infty A_j) = \int_X \chi_{\bigcup_{j=1}^\infty A_j} \cdot f d\mu = \int_X \Big(\sum_{j=1}^\infty \chi_{A_j} \cdot f\Big) d\mu = \sum_{j=1}^\infty \int_X \chi_{A_j} \cdot f d\mu = \sum_{j=1}^\infty \nu(A_j)$$

ponieważ $\int_X \sum_{j=1}^\infty |\chi_{A_j} \cdot f| d\mu \leqslant \int_X |f| d\mu$. □

Twierdzenie 13.11.19. *Niech $f \in L^1(X,\mathbb{C})$ i $\int_A f d\mu = 0$ dla dowolnego $A \in \mathfrak{M}$. Wtedy $f = 0$ μ–prawie wszędzie.*

Dowód. Wystarczy rozważyć przypadek $f \in L^1(X)$. Wiemy, że twierdzenie zachodzi dla $f \in \mathcal{M}^+(X)$ (Obserwacja 13.11.6(e)). Wystarczy więc pokazać, że $\int_X f_+ d\mu = \int_X f_- d\mu = 0$. Istotnie, np. niech $A := \{f \geqslant 0\}$. Wtedy $0 = \int_A f d\mu = \int_A f_+ d\mu = \int_X f_+ d\mu$. □

Twierdzenie 13.11.20 (Średnia całkowa)**.** *Załóżmy, że $\mu(X) < +\infty$. Niech $C \subset \mathbb{C}$ będzie dowolnym zbiorem domkniętym. Przypuśćmy, że dla $f \in L^1(X, \mathbb{C})$, przy dowolnym $A \in \mathfrak{M}$ takim, że $\mu(A) > 0$ mamy $S_A(f) := \frac{1}{\mu(A)} \int_A f d\mu \in C$. Wtedy $f(x) \in C$ dla μ–prawie wszystkich $x \in X$.*

Dowód. Ustalmy ciąg kół domkniętych $(\overline{K}(a_j, r_j))_{j=1}^{\infty}$ taki, że $\mathbb{C} \setminus C = \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{K}(a_j, r_j)$ (Ćwiczenie). Wystarczy pokazać, że $f^{-1}(\overline{K}(a_j, r_j))$ jest zbiorem miary zero dla dowolnego j. Ustalmy j i niech $a := a_j$, $r := r_j$, $A := f^{-1}(\overline{K}(a, r))$. Przypuśćmy, że $\mu(A) > 0$. Wtedy:

$$|S_A(f) - a| = \frac{1}{\mu(A)} \Big| \int_A (f - a) d\mu \Big| \leqslant \frac{1}{\mu(A)} \int_A |f - a| d\mu \leqslant r,$$

co oznacza, że $S_A(f) \in \overline{K}(a, r) \subset \mathbb{C} \setminus C$ – sprzeczność. □

Twierdzenie 13.11.21 (Nierówność Jensena [35])**.** *Załóżmy, że $\mu(X) = 1$ i niech $f \in L^1(X, \mathbb{R})$. Niech $P \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem takim, że $f(x) \in P$ dla μ-p.w. $x \in X$. Wtedy dla dowolnej funkcji wypukłej $g : P \longrightarrow \mathbb{R}$ mamy: $g\Big(\int_X f d\mu \Big) \leqslant \int_X (g \circ f) d\mu$.*

Dowód. Przypomnijmy (Twierdzenie 5.8.11), że $g \in \mathcal{C}^{\uparrow}(P)$. Zauważmy, że $\int_X f d\mu \in P$ oraz, że $g \circ f \in \mathcal{M}(X)$ (Obserwacja 13.2.2(i)). Niech $t_0 := \int_X f d\mu$. Przypomnijmy (Definicja 5.8.1), że

$$\frac{g(t) - g(s)}{t - s} \leqslant \frac{g(u) - g(t)}{u - t}, \quad s, t, u \in P,\ s < t < u$$

W szczególności, $\frac{g(u) - g(t_0)}{u - t_0} \geqslant C, \quad t_0 < u$, gdzie $C := \sup \Big\{ \frac{g(t_0) - g(s)}{t_0 - s} : s < t_0 \Big\}$.

Tak więc, $g(u) \geqslant g(t_0) + C(u - t_0)$ dla dowolnego $u \in P$. W szczególności, $g \circ f \geqslant g(t_0) + C(f - t_0)$ μ–prawie wszędzie. Całkując stronami dostajemy (por. Obserwacja 13.11.13(c))

$$\int_X (g \circ f) d\mu \geqslant g(t_0) + C\Big(\int_X f d\mu - t_0 \Big).$$ □

Uwaga 13.11.22. (a) Jeszcze raz przypomnijmy, że w teorii całki nie jest istotne to, co się dzieje na zbiorach miary zero. W związku z tym, poprzednie wyniki można przeformułować tak, aby odpowiednie założenia i warunki były spełnione μ–prawie wszędzie. Tezy pozostaną bez zmian. To, czy użyjemy sformułowania „prawie wszędzie", czy nie jest w gruncie rzeczy kwestią naszego wyboru: zawsze można przecież zmniejszyć X o stosowny zbiór miary zero i mieć już sformułowanie „wszędzie". Uwaga ta dotyczy oczywiście założeń, a nie tezy (np. we Wniosku 13.11.17).

(b) Pojęcie całki (oraz większość twierdzeń) można rozszerzyć na funkcje $f : X \longrightarrow E$, gdzie E jest ośrodkową przestrzenią Banacha.

13.12. Przestrzenie L^p

Niech $\mu : \mathfrak{M} \longrightarrow [0, +\infty]$ będzie ustaloną miarą i niech $Y \in \{\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{C}\}$.

Definicja 13.12.1. Dla $0 < p < +\infty$ zdefiniujmy

$$L^p(X, \mu) := \Big\{ f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M}) : \int_X |f|^p d\mu < +\infty \Big\},$$
$$L^p(X, Y, \mu) := \Big\{ f \in \mathcal{M}(X, \mathbb{C}, \mathfrak{M}) : \int_X |f|^p d\mu < +\infty \Big\}.$$

Obowiązują skróty $L^p(X, \mu)$, $L^p(X)$ oraz zasada utożsamiania funkcji równych μ–prawie wszędzie. Niech

$$\|f\|_{L^p} := \Big(\int_X |f|^p d\mu \Big)^{1/p}.$$

[35] Johan Jensen (1859–1925).

Dla $f \in \mathcal{M}(X)$ niech $\operatorname{ess\,sup}_X f := \inf\{C \in \mathbb{R} : f \leqslant C \ \mu\text{–prawie wszędzie}\}$. Zauważmy, że $f \leqslant \operatorname{ess\,sup}_X f$ μ–prawie wszędzie, tzn. zbiór $\{f > \operatorname{ess\,sup}_X f\}$ jest miary zero. Istotnie, niech $C := \operatorname{ess\,sup}_X f$ i niech $f \leqslant C + \frac{1}{j}$ na $X \setminus Z_j$, gdzie Z_j jest miary zero, $j \in \mathbb{N}$. Wtedy $f \leqslant C$ na $X \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} Z_j$.

Niech $L^\infty(X) = L^\infty(X,\mu) := \{f \in \mathcal{M}(X) : |f| \text{ jest ograniczona } \mu\text{–prawie wszędzie}\}$. W ten sam sposób definiujemy $L^\infty(X,\mathbb{C}) = L^\infty(X,\mathbb{C},\mu)$. Połóżmy $\|f\|_{L^\infty} := \operatorname{ess\,sup}_X |f|$.

$L^p(X,\mathbb{C})$ jest zespoloną przestrzenią wektorową, $0 < p \leqslant +\infty$. Istotnie, przypadek $p = +\infty$ jest oczywisty. W przypadku $0 < p < +\infty$, wystarczy skorzystać z nierówności $(a+b)^p \leqslant 2^p(a^p + b^p)$, $a, b \geqslant 0$.

Podobnie jak w przypadku L^1, zamiast przestrzeni $L^p(X)$ możemy rozważać przestrzeń $L^p(X,\mathbb{R})$ jako podprzestrzeń $L^p(X,\mathbb{C})$. Aby uniknąć przypadków trywialnych, dalej zakładamy, że zakładamy $\mu(X) > 0$.

Powiemy, że liczby $1 \leqslant p, q \leqslant +\infty$ są sprzężone, jeżeli $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ([36]).

Twierdzenie 13.12.2 (Nierówność Höldera). *Jeżeli $p, q \geqslant 1$ są sprzężone, to dla dowolnych funkcji $f \in L^p(X,\mathbb{C})$, $g \in L^q(X,\mathbb{C})$, funkcja fg jest klasy $L^1(X,\mathbb{C})$ oraz zachodzi* nierówność Höldera*:*

$$\|fg\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

Ponadto, dla $1 < p, q < +\infty$, równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $\alpha, \beta \geqslant 0$ takie, że $\alpha + \beta > 0$ oraz $\alpha|f|^p = \beta|g|^q$ μ–prawie wszędzie na X. (†)

Dowód. Nierówność jest oczywista dla $p = 1, q = +\infty$ i $p = +\infty, q = 1$. Dla $1 < p, q < +\infty$ rozumujemy następująco. Po pierwsze możemy założyć, że $f \neq 0$ i $g \neq 0$. Po drugie, zastępując f przez $f/\|f\|_{L^p}$ i g przez $g/\|g\|_{L^q}$, możemy założyć, że $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^q} = 1$. Mamy pokazać, że $\int_A |fg|d\mu \leqslant 1$, gdzie $A := \{fg \neq 0\}$. Funkcja $t \longmapsto \exp(t)$ jest wypukła. W szczególności, $e^{\frac{t}{p}+\frac{u}{q}} \leqslant \frac{1}{p}e^t + \frac{1}{q}e^u$, $t, u \in \mathbb{R}$, przy czym równość zachodzi jedynie, gdy $t = u$. Dla dowolnego $x \in A$ dobieramy $t, u \in \mathbb{R}$ takie, że $|f(x)| = \exp(t/p)$, $|g(x)| = \exp(u/q)$. Stąd $|f(x)g(x)| \leqslant \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q$, $x \in A$. Całkując stronami dostajemy żądaną nierówność.

Załóżmy, że $1 < p, q < +\infty$. Jeżeli spełniony jest warunek (†) i np. $\beta > 0$, to $|g| = c|f|^{p/q}$ μ–prawie wszędzie na X, gdzie $c \geqslant 0$, a stąd $\|g\|_{L^q} = c(\int_X |f|^p)^{1/q}$ i $\|fg\|_{L^1} = c\int_X |f|^p d\mu$.

Załóżmy, że w nierówności Höldera zachodzi równość. Możemy pominąć przypadek, gdy $f = 0$ lub $g = 0$. Wtedy, dla postaci zredukowanej, musimy mieć $|fg| = \frac{1}{p}|f|^p + \frac{1}{q}|g|^q$ μ–prawie wszędzie na A, co oznacza, że $|f|^p = |g|^q$ μ–prawie wszędzie na A. Wracając do postaci niezredukowanej, dostajemy (†) μ-prawie wszędzie na A. Pozostaje pokazać, że warunek ten zachodzi μ-prawie wszędzie na X. Wystarczy pokazać, że zbiory $\{f \neq 0\} \setminus A$ i $\{g \neq 0\} \setminus A$ są miary zero. Wynika to z ciągu nierówności $\|f\|_{L^p(X)}\|g\|_{L^q(X)} = \int_X |fg|d\mu = \int_A |fg|d\mu = \|f\|_{L^p(A)}\|g\|_{L^q(A)} \leqslant \|f\|_{L^p(\{f\neq 0\})}\|g\|_{L^q(\{g\neq 0\})}$. □

Twierdzenie 13.12.3 (Nierówność Minkowskiego). *Dla dowolnego $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ i dla dowolnych $f, g \in L^p(X,\mathbb{C})$ zachodzi* nierówność Minkowskiego

$$\|f+g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Ponadto, dla $1 < p < +\infty$ równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby $\alpha, \beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$, takie, że $|f| = \alpha|f+g|$, $|g| = \beta|f+g|$ μ–prawie wszędzie. (‡)

W szczególności, $(L^p(X,\mathbb{K}), \|\ \|_{L^p})$ jest przestrzenią unormowaną nad $\mathbb{K}$ dla dowolnego $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Przestrzeń $L^2(X,\mathbb{C})$ wraz z iloczynem skalarnym $(f,g) \longmapsto \langle f,g\rangle_{L^2} := \int_X f\overline{g}d\mu$ jest przestrzenią unitarną, a nierówność Höldera to po prostu nierówność Schwarza.

Obserwacja 13.12.4. Zauważmy, że warunki (‡) są równoważne istnieniu liczby $t \geqslant 0$ takiej, że $f = tg$ μ–prawie wszędzie lub $g = tf$ μ–prawie wszędzie.

Istotnie, jeżeli np. $f = tg$, to $|f| = (t/(t+1))|f+g|$ i $|g| = (1/(t+1))|f+g|$ (równości μ–prawie wszędzie).

Odwrotnie, jeżeli (‡) zachodzi, to rozumujemy następująco: Przypadek $\alpha = 0$ (odp. $\beta = 0$) sprowadza się do równości $f = 0g$ (odp. $g = 0f$). Możemy więc założyć, że $\alpha, \beta > 0$. Niech $t := \alpha/\beta$. Zauważmy, że $|f| = t|g|$. W szczególności, $A := \{f = 0\} = \{g = 0\}$ (z dokładnością do zbioru miary zero). Pozostaje sprawdzić, że $\operatorname{Arg} f = \operatorname{Arg} g$ poza A. Ponieważ $\alpha + \beta = 1$, dostajemy równość $|f| + |g| = |f+g|$, czyli $|f|^2 + 2|f||g| + |g|^2 = |f|^2 + 2\operatorname{Re} f\overline{g} + |g|^2$. Stąd $|f||g| = \operatorname{Re} f\overline{g}$, co daje równość argumentów poza A.

([36]) W szczególności, 1 i $+\infty$ są sprzężone.

Dowód Twierdzenia 13.12.3. Nierówność jest oczywista dla $p=1$ i $p=+\infty$. Dla $1<p<+\infty$ rozumujemy następująco. Wiemy, że L^p jest przestrzenią wektorową, a więc $f+g\in L^p$. Możemy oczywiście założyć, że $\|f+g\|_{L^p}>0$. Niech q będzie sprzężone z p. Mamy $\int_X|f+g|^p d\mu\leqslant\int_X(|f|+|g|)^p d\mu$ oraz

$$\int_X(|f|+|g|)^p d\mu=\int_X|f|(|f|+|g|)^{p-1}d\mu+\int_X|g|(|f|+|g|)^{p-1}d\mu$$
$$\overset{\text{Hölder}}{\leqslant}\|f\|_{L^p}\Big(\int_X(|f|+|g|)^{(p-1)q}d\mu\Big)^{1/q}+\|g\|_{L^p}\Big(\int_X(|f|+|g|)^{(p-1)q}d\mu\Big)^{1/q}.$$

Ponieważ $(p-1)q=p$, więc dzieląc powyższą nierówność przez $\int_X(|f|+|g|)^p d\mu)^{1/q}$ dostajemy żądaną nierówność Minkowskiego.

Jeżeli dla $1<p<+\infty$ w nierówności Minkowskiego zachodzi równość i pominiemy przypadek trywialny, gdy $f=0$ lub $g=0$, to na podstawie powyższych nierówności mamy $|f+g|=|f|+|g|$ μ–prawie wszędzie oraz (korzystając z Twierdzenia 13.12.2) $|f|^p=c(|f|+|g|)^{(p-1)q}$, $|g|^p=d(|f|+|g|)^{(p-1)q}$ μ–prawie wszędzie, gdzie $c,d>0$. Wynika stąd, że $\alpha(|f|+|g|)=|f|$ i $\beta(|f|+|g|)=|g|$ μ–prawie wszędzie, gdzie $\alpha,\beta>0$. Pozostaje zauważyć, że $\alpha+\beta=1$.

Jeżeli spełniony jest warunek (‡), to $|f|^p=\alpha^p(|f+g|)^p$, $|g|^p=\beta^p(|f+g|)^p$ μ–prawie wszędzie, a więc mamy równość. □

Twierdzenie 13.12.5. *Jeżeli $\mu(X)<+\infty$, to dla dowolnych $1\leqslant r<s\leqslant+\infty$ mamy: $L^s(X,\mathbb{C})\subset L^r(X,\mathbb{C})$* ([37]). *Ponadto, operator* $\mathrm{id}: L^s(X,\mathbb{C})\longrightarrow L^r(X,\mathbb{C})$ *jest ciągły.*

Dowód. Dla $s=+\infty$ mamy $\|f\|_{L^r}\leqslant(\mu(X))^{1/r}\|f\|_{L^\infty}$, $f\in L^\infty(X,\mathbb{C})$.

Gdy $s<+\infty$, stosujemy nierówność Höldera z $p:=\frac{s}{s-r}$ i $q:=\frac{s}{r}$:

$$\|f\|_{L^r}=\Big(\int_X|f|^r d\mu\Big)^{1/r}=\Big(\int_X 1\cdot|f|^r d\mu\Big)^{1/r}$$
$$\leqslant\Big(\Big(\int_X 1 d\mu\Big)^{1/p}\Big(\int_X|f|^{rq}d\mu\Big)^{1/q}\Big)^{1/r}=(\mu(X))^{1/r-1/s}\|f\|_{L^s},\quad f\in L^s(X,\mathbb{C}).\quad\square$$

Twierdzenie 13.12.6. *$L^p(X,\mathbb{C})$ jest przestrzenią Banacha dla dowolnego $1\leqslant p\leqslant+\infty$. W szczególności, $L^2(X,\mathbb{C})$ jest przestrzenią Hilberta.*

Dowód. Niech $(f_k)_{k=1}^\infty\subset L^p(X,\mathbb{C})$ będzie dowolnym ciągiem Cauchy'ego.

- Przypadek $1\leqslant p<+\infty$. Wystarczy pokazać, że pewien jego podciąg jest zbieżny. Niech $(f_{n_k})_{k=1}^\infty$ będzie podciągiem takim, że $\|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\|_{L^p}\leqslant 2^{-k}$, $k\geqslant 1$. Zdefiniujmy

$$g_N:=\sum_{k=1}^N|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|,\quad g:=\lim_{N\to+\infty}g_N=\sum_{k=1}^\infty|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|.$$

Zauważmy, że $g_N\in\mathcal{M}^+(X)\cap L^p(X)$, $\|g_N\|_{L^p}<1$, $n\in\mathbb{N}$, $g_N^p\nearrow g^p\in\mathcal{M}^+(X)$. W takim razie $\int_X g^p d\mu\leqslant 1$. W szczególności, $g<+\infty$ μ–prawie wszędzie. Oznacza to, że szereg $\sum\limits_{k=1}^\infty(f_{n_{k+1}}-f_{n_k})$ jest zbieżny bezwzględnie na $X\setminus Z$, gdzie Z jest miary zero. Połóżmy $f:=f_{n_1}+\sum\limits_{k=1}^\infty(f_{n_{k+1}}-f_{n_k})$ na $X\setminus Z$ oraz $f=0$ na Z. Wtedy $f_{n_k}\longrightarrow f$ μ–prawie wszędzie na X. Ponieważ $f-f_{n_\ell}=\sum\limits_{k=\ell}^\infty(f_{n_{k+1}}-f_{n_k})$ μ–prawie wszędzie oraz $\sum\limits_{k=\ell}^\infty\|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\|_{L^p}\leqslant\sum\limits_{k=\ell}^\infty 2^{-k}$, zatem $f\in L^p(X,\mathbb{C})$ oraz $\|f_{n_\ell}-f\|_{L^p}\longrightarrow 0$.

- Przypadek $p=+\infty$ jest znacznie prostszy — postępujemy następująco. Niech

$$Z:=\bigcup_{k=1}^\infty\{|f_k|>\|f_k\|_{L^\infty}\}\cup\bigcup_{k,\ell=1}^\infty\{|f_k-f_\ell|>\|f_k-f_\ell\|_{L^\infty}\}.$$

Wtedy Z jest zbiorem miary zero oraz $(f_k|_{X\setminus Z})_{k=1}^\infty$ jest ciągiem Cauchy'ego w $\mathcal{B}(X\setminus Z,\mathbb{C})$. W takim razie $f_k\longrightarrow f$ jednostajnie na $X\setminus Z$, gdzie $f\in\mathcal{M}(X\setminus Z,\mathbb{C})\cap\mathcal{B}(X\setminus Z,\mathbb{C})$. Zdefiniujmy $f:=0$ na Z. Wtedy $f\in L^\infty(X,\mathbb{C})$ oraz $\|f_k-f\|_{L^\infty}\longrightarrow 0$. □

([37]) Ćwiczenie: Czy własność ta zachodzi w przypadku, gdy $\mu(X)=+\infty$?

Twierdzenie* 13.12.7. *Niech* $0 < p < 1$.

(a) *Funkcja*

$$\varrho_p(f,g) := \|f-g\|_{L^p}^p = \int_X |f-g|^p d\mu, \quad f,g \in L^p(X,\mathbb{C}),$$

jest metryką translatywną na $L^p(X,\mathbb{C})$.

(b) *Działania w przestrzeni* $L^p(X,\mathbb{C})$ *są ciągłe w topologii zadanej przez metrykę* ϱ_p.

(c) *Przestrzeń* $(L^p(X,\mathbb{C}),\varrho_p)$ *jest zupełna.*

ROZDZIAŁ 14

Całka Lebesgue'a

14.1. Całka Riemanna a całka Lebesgue'a

Twierdzenie 14.1.1 (Porównanie całki Riemanna z całką Lebesgue'a). *Załóżmy, że $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ i niech $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją ograniczoną. Wtedy:*

(a) $A \in \mathcal{L}_n$.

(b) $f \in \mathcal{R}(A) \Longrightarrow f \in L^1(A)$ ([1]). *Ponadto* $\int_A f = \int_A f d\mathcal{L}^n$.

(c) $f \in \mathcal{R}(A) \Longleftrightarrow \mathcal{L}^n(N_A(f)) = 0$, *gdzie* $N_A(f) := \{a \in A : f$ *nie jest ciągła w* $a\}$.

Dowód. Ponieważ $A = (\operatorname{int} A) \cup Z$, gdzie $|Z| = 0$, a zbiory o objętości zero mają miarę zero, zatem $A \in \mathcal{L}_n$.

Dla pozostałej części dowodu możemy założyć, $A = P$ jest kostką ([2]). Ponadto możemy założyć, że $f \geqslant 0$.

Ustalmy normalny ciąg podziałów prostych $(\pi_k)_{k=1}^{\infty}$ taki, że $\pi_{k+1} \preccurlyeq \pi_k$, $k \geqslant 1$. Niech $\pi_k = \{P_{k,1}, \ldots, P_{k,m_k}\}$. Ustalmy w dowolny sposób przynależność ścian, tak by z kostek $P_{k,1}, \ldots, P_{k,m_k}$ otrzymać „kostki" rozłączne $Q_{k,1}, \ldots, Q_{k,m_k}$ dające w sumie P. Dla każdego k otrzymaliśmy rozbicie P na zbiory $\mathcal{L}_n$–mierzalne. Niech

$$L_k := \sum_{j=1}^{m_k} m(f, P_{k,j}) \chi_{Q_{k,j}}, \quad U_k := \sum_{j=1}^{m_k} M(f, P_{k,j}) \chi_{Q_{k,j}}.$$

Oczywiście, $L_k, U_k \in \mathcal{M}_0^+(P, \mathcal{L}_n)$. Niech $Z := \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{m_k} \partial P_{k,j}$. Zbiór Z jest miary zero i jak łatwo widać $L_k \leqslant f \leqslant U_k$ na $P \setminus Z$. Ponadto, $L_k \leqslant L_{k+1}$ i $U_k \geqslant U_{k+1}$ na $P \setminus Z$, $k \geqslant 1$. Zdefiniujmy $L := \lim_{k \to +\infty} L_k$ na $P \setminus Z$ i $L := 0$ na Z. Analogicznie, niech $U := \lim_{k \to +\infty} U_k$ na $P \setminus Z$ i $U := 0$ na Z. Wtedy $L, U \in \mathcal{M}^+(P, \mathcal{L}_n)$ i $L \leqslant f \leqslant U$ na $P \setminus Z$. Na podstawie twierdzeń o monotonicznym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki oraz Obserwacji 12.1.5(f) mamy:

$$L(\pi_k, f) = \int_P L_k d\mathcal{L}^n \nearrow \int_P L d\mathcal{L}^n, \quad L(\pi_k, f) \nearrow \int_{*P} f,$$
$$U(\pi_k, f) = \int_P U_k d\mathcal{L}^n \searrow \int_P U d\mathcal{L}^n, \quad U(\pi_k, f) \searrow \int_P^* f.$$

Tak więc $\int_P^* f - \int_{*P} f = \int_P (U - L) d\mathcal{L}^n$. Wynika stąd, że $f \in \mathcal{R}(P) \Longleftrightarrow L = U$ $\mathcal{L}^n$–prawie wszędzie. Ponadto, jeżeli $L = U$ $\mathcal{L}^n$–prawie wszędzie, to wobec zupełności miary $\mathcal{L}^n$, mamy $f \in \mathcal{M}^+(P, \mathcal{L}_n)$ oraz

$$\int_P f d\mathcal{L}^n = \int_P L d\mathcal{L}^n = \int_P U d\mathcal{L}^n,$$

a więc $f \in L^1(P)$ oraz $\int_P f d\mathcal{L}^n = \int_P f$. Pozostaje zauważyć, że

$$L = U \quad \mathcal{L}^n\text{–prawie wszędzie}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{L}^n(N_P(f)) = 0$

Istotnie, niech $x_0 \in P \setminus (Z \cup N_P(f))$ i niech $\varepsilon > 0$. Wobec ciągłości funkcji f w punkcie x_0, istnieje kostka $Q \subset P$ o środku w punkcie x_0 taka, że $|f(x') - f(x'')| \leqslant \varepsilon$ dla dowolnych $x', x'' \in Q$. Ponieważ $\operatorname{diam} \pi_k \longrightarrow 0$, zatem dla dostatecznie dużych k mamy następującą sytuację: jeżeli $x_0 \in P_{k,j(k)}$, to $P_{k,j(k)} \subset Q$ (zauważmy, że $j(k)$ jest jednoznacznie wyznaczone). W takim razie $U_k(x_0) - L_k(x_0) \leqslant \varepsilon$, $k \gg 1$.

W drugą stronę: Niech $L = U$ na $P \setminus Z_0$, gdzie $Z \subset Z_0$ i Z_0 jest miary zero. Weźmy $x_0 \in P \setminus Z_0$ i $\varepsilon > 0$. Wtedy $U_k(x_0) - L_k(x_0) \leqslant \varepsilon$ dla $k \geqslant k_0$. Przypuśćmy, że $x_0 \in \operatorname{int} P_{k_0,j_0} =: W$. Wtedy dla $x \in W$ mamy $L_{k_0}(x_0) = L_{k_0}(x) \leqslant f(x) \leqslant U_{k_0}(x) = U_{k_0}(x_0)$, a stąd $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$. □

([1]) Tu i dalej, $L^p(A) := L^p(A, \mathcal{L}^n)$.

([2]) Przy własności (c) trzeba zauważyć, że gdy $A \subset P$, to $N_A(f) \subset N_P(f_0) \subset N_A(f) \cup \partial A$.

14.2. Zasada Cavalieriego. Twierdzenia Tonellego i Fubiniego

Twierdzenie 14.2.1 (Zasada Cavalieriego [3]). *Niech $A \in \mathcal{L}_{p+q}$ $(p,q \in \mathbb{N})$. Wtedy:*

(a) *istnieje zbiór $Z(A) \subset \mathbb{R}^p$ miary zero taki, że przekrój*

$$A(t) := \{u \in \mathbb{R}^q : (t,u) \in A\}$$

należy do $\mathcal{L}_q$ dla $t \in \mathbb{R}^p \setminus Z(A)$;

(b) *odwzorowanie $\mathbb{R}^p \ni t \overset{\Phi_A}{\longmapsto} \mathcal{L}^q(A(t)) \in [0,+\infty]$ jest $\mathcal{L}_p$–mierzalne* [4];

(c) $\mathcal{L}^{p+q}(A) = \int_{\mathbb{R}^p} \Phi_A d\mathcal{L}^p = \int_{\mathbb{R}^p} \mathcal{L}^q(A(t)) d\mathcal{L}^p(t)$;

(d) *jeżeli $\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^p}(A) \in \mathcal{L}_p$, to $\mathcal{L}^{p+q}(A) = \int_{\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^p}(A)} \mathcal{L}^q(A(t)) d\mathcal{L}^p(t)$.*

W szczególności, jeżeli $B \in \mathcal{L}_p$, $C \in \mathcal{L}_q$, to $\mathcal{L}^{p+q}(B \times C) = \mathcal{L}^p(B) \cdot \mathcal{L}^q(C)$ (por. Twierdzenie 13.10.5).

Oczywiście (d) wynika z (c).

Zauważmy, że zbiór $\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^p}(A)$ może nie być mierzalny (np. $A := B \times C$, gdzie B nie jest mierzalny, a C jest miary zero).

Dowód. Niech $\mathcal{F}$ oznacza rodzinę wszystkich $A \in \mathcal{L}_{p+q}$, dla których (a), (b) i (c) zachodzą. Zauważmy od razu, że $\varnothing \in \mathcal{F}$. Udowodnimy kolejno, że:

1^0: Dla dowolnych kostek $P \subset \mathbb{R}^p$, $Q \subset \mathbb{R}^q$ oraz dla dowolnych zbiorów $\mathrm{int}\, P \subset B \subset P$, $\mathrm{int}\, Q \subset C \subset Q$ mamy $A := B \times C \in \mathcal{F}$. Ponadto $Z(B \times C) = \varnothing$.

2^0: Jeżeli $(A_j)_{j=1}^\infty \subset \mathcal{F}$ i $A_j \cap A_k = \varnothing$ dla $j \neq k$, to $A := \bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{F}$. Ponadto, $Z(A) \subset \bigcup_{j=1}^\infty Z(A_j)$.

3^0: Jeżeli $(A_j)_{j=1}^\infty \subset \mathcal{F}$ i $A_j \subset A_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}$, to $A := \bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{F}$. Ponadto, $Z(A) \subset \bigcup_{j=1}^\infty Z(A_j)$.

4^0: $\mathrm{top}\, \mathbb{R}^{p+q} \subset \mathcal{F}$ oraz $Z(\Omega) = \varnothing$ dla dowolnego zbioru otwartego Ω.

5^0: Wszystkie zbiory typu $\mathcal{F}_\sigma$ należą do $\mathcal{F}$ oraz $Z(A) = \varnothing$ dla dowolnego zbioru typu $\mathcal{F}_\sigma$.

6^0: Jeżeli $(A_j)_{j=1}^\infty \subset \mathcal{F}$ i $A_j \supset A_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}$, oraz A_1 jest ograniczony, to $A := \bigcap_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{F}$. Ponadto, $Z(A) \subset \bigcup_{j=1}^\infty Z(A_j)$.

7^0: Wszystkie zbiory miary zero należą do $\mathcal{F}$.

Przypomnijmy (Twierdzenie 13.7.5), że każdy zbiór mierzalny $A \in \mathcal{L}_{p+q}$ jest postaci $C \cup Z$, gdzie C jest typu $\mathcal{F}_\sigma$, zaś Z jest miary zero i $C \cap Z = \varnothing$ [5]. Tak więc $2^0 + 5^0 + 7^0 \Longrightarrow \mathcal{F} = \mathcal{L}_{p+q}$, co zakończy dowód. Przechodzimy do dowodów poszczególnych punktów $1^0 - 7^0$.

1^0: Oczywiście $A(t) = C$ dla $t \in B$ i $A(t) = \varnothing$ dla $t \notin B$, a więc (a) zachodzi ($Z(A) = \varnothing$). Ponadto, $\Phi_A(t) = \mathcal{L}^q(A(t)) = \mathcal{L}^q(C) = |Q|$ dla $t \in B$ i $\Phi_A(t) = 0$ dla $t \notin B$. W szczególności, odwzorowanie Φ_A jest mierzalne i $\mathcal{L}^{p+q}(A) = |P \times Q| = |P| \cdot |Q| = \mathcal{L}^p(B) \cdot \mathcal{L}^q(C) = \int_{\mathbb{R}^p} \Phi_A d\mathcal{L}^p$.

2^0: Zauważmy, że $A(t) = \bigcup_{j=1}^\infty A_j(t)$, $t \in \mathbb{R}^p$. Wynika stąd, że (a) zachodzi przy $Z(A) := \bigcup_{j=1}^\infty Z(A_j)$. Ponadto, wobec rozłączności zbiorów A_j, $j \in \mathbb{N}$, mamy $\Phi_A = \sum_{j=1}^\infty \Phi_{A_j}$ na $\mathbb{R}^p \setminus Z(A)$. Wynika stąd (b) oraz, że

$$\int_{\mathbb{R}^p} \Phi_A d\mathcal{L}^p = \sum_{j=1}^\infty \int_{\mathbb{R}^p} \Phi_{A_j} d\mathcal{L}^p = \sum_{j=1}^\infty \mathcal{L}^{p+q}(A_j) = \mathcal{L}^{p+q}(A)$$

(na podstawie twierdzenia o monotonicznym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki).

---

[3] Bonaventura Cavalieri (1598–1647).

[4] Uwaga: W tym wzorze $\mathcal{L}^q$ oznacza zewnętrzną miarę Lebesgue'a — oczywiście jest to istotne jedynie na zbiorze $Z(A)$.

[5] Formalnie, z Twierdzenia 13.7.5 wnioskujemy, że dowolny zbiór $A \in \mathcal{L}_{p+q}$ jest postaci $C \cup Z'$, gdzie C jest typu $\mathcal{F}_\sigma$, zaś Z' jest miary zero. Kładziemy teraz $Z := Z' \setminus C$.

3^0: Mamy $A_j(t) \nearrow A(t)$, $t \in \mathbb{R}^p$, a więc (a) zachodzi przy $Z(A) := \bigcup_{j=1}^{\infty} Z(A_j)$. Ponadto, $\Phi_{A_j} \nearrow \Phi_A$ na $\mathbb{R}^p \setminus Z(A)$. Wynika stąd, że (b) zachodzi oraz, że

$$\int_{\mathbb{R}^p} \Phi_A d\mathcal{L}^p = \lim_{j\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^p} \Phi_{A_j} d\mathcal{L}^p = \lim_{j\to+\infty} \mathcal{L}^{p+q}(A_j) = \mathcal{L}^{p+q}(A)$$

(na podstawie Twierdzenia 13.11.7).

4^0: Każdy zbiór otwarty jest sumą co najwyżej przeliczalnej rodziny parami rozłącznych „kostek" takich jak w 1^0 (por. Obserwacja 13.1.5) i możemy skorzystać z 2^0.

5^0: Wobec 3^0 wystarczy sprawdzić, że każdy zbiór domknięty należy do $\mathcal{F}$. Ponownie korzystając z 3^0, widzimy, że można się ograniczyć do zbiorów domkniętych i ograniczonych. Niech A będzie takim zbiorem, niech Q będzie otwartą kostką ograniczoną taką, że $A \subset Q$ i niech $\Omega := Q \setminus A$. Mamy $A(t) = Q(t) \setminus \Omega(t)$, $t \in \mathbb{R}^p$, a więc, na podstawie 1^0 i 4^0, warunek (a) zachodzi ($Z(A) := \varnothing$). Ponadto, $\Phi_A = \Phi_Q - \Phi_\Omega$ na $\mathbb{R}^p$, więc (b) również jest spełnione. Na koniec $\int_{\mathbb{R}^p} \Phi_A d\mathcal{L}^p = \int_{\mathbb{R}^p} \Phi_Q d\mathcal{L}^p - \int_{\mathbb{R}^p} \Phi_\Omega d\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^{p+q}(Q) - \mathcal{L}^{p+q}(\Omega) = \mathcal{L}^{p+q}(A)$.

6^0: Mamy $A_j(t) \searrow A(t)$, $t \in \mathbb{R}^p$, a więc (a) zachodzi przy $Z(A) := \bigcup_{j=1}^{\infty} Z(A_j)$. Ponadto, $\Phi_{A_j} \searrow \Phi_A$ na $\mathbb{R}^p \setminus Z(A)$. Wynika stąd, że (b) zachodzi oraz, że

$$\int_{\mathbb{R}^p} \Phi_A d\mathcal{L}^p = \lim_{j\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^p} \Phi_{A_j} d\mathcal{L}^p = \lim_{j\to+\infty} \mathcal{L}^{p+q}(A_j) = \mathcal{L}^{p+q}(A).$$

7^0: Wobec 3^0 wystarczy rozważyć ograniczone zbiory miary zero. Niech A będzie takim zbiorem. Trzeba pokazać, że $\Phi_A = 0$ $\mathcal{L}^p$–prawie wszędzie. Ustalmy kostkę $P \subset \mathbb{R}^{p+q}$ taką, że $A \subset P$. Na podstawie definicji miary Lebesgue'a, dla dowolnego $j \in \mathbb{N}$ istnieje zbiór $A_j \subset P$ typu $\mathcal{F}_\sigma$ taki, że $A \subset A_j$, $\mathcal{L}^{p+q}(A_j) \leqslant \frac{1}{j}$ [6] oraz $A_{j+1} \subset A_j$ [7], $j \in \mathbb{N}$. Niech $A_0 := \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$. Oczywiście $A \subset A_0$ oraz A_0 jest miary zero. Na podstawie 6^0 wnioskujemy, że $A_0 \in \mathcal{F}$ ($Z(A_0) = \varnothing$). W takim razie $0 = \mathcal{L}^{p+q}(A_0) = \int_{\mathbb{R}^p} \Phi_{A_0} d\mathcal{L}^p$. Wynika stąd, że $\Phi_{A_0} = 0$ $\mathcal{L}^p$–prawie wszędzie. Ponieważ $\Phi_A \leqslant \Phi_{A_0}$, wnioskujemy stąd, że $\Phi_A = 0$ $\mathcal{L}^p$–prawie wszędzie. □

Twierdzenie 14.2.2 (Twierdzenie Tonellego [8]). *Niech $A \in \mathcal{L}_{p+q}$. Wtedy dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{M}^+(A, \mathcal{L}_{p+q})$ mamy:*

(a) *dla $\mathcal{L}^p$–prawie wszystkich $t \in \mathbb{R}^p$ odwzorowanie*

$$A(t) \ni u \longmapsto f(t,u)$$

jest $\mathcal{L}_q$–mierzalne [9]*;*

(b) *odwzorowanie $\mathbb{R}^p \ni t \longmapsto \int_{A(t)} f(t,u) d\mathcal{L}^q(u)$ jest $\mathcal{L}_p$–mierzalne* [10]*,*

(c) $\int_A f d\mathcal{L}^{p+q} = \int_{\mathbb{R}^p} \big(\int_{A(t)} f(t,u) d\mathcal{L}^q(u) \big) d\mathcal{L}^p(t)$.

(d) *Jeżeli $B := \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^p}(A) \in \mathcal{L}_p$, to*

$$\int_A f d\mathcal{L}^{p+q} = \int_B \Big(\int_{A(t)} f(t,u) d\mathcal{L}^q(u) \Big) d\mathcal{L}^p(t).$$

Dowód. Jeżeli f jest funkcją charakterystyczną zbioru mierzalnego, twierdzenie sprowadza się do Zasady Cavalieriego. Stąd łatwo widać, że twierdzenie jest prawdziwe dla $f \in \mathcal{M}_0^+(A, \mathcal{L}_{p+q})$. Teraz wystarczy już tylko zastosować twierdzenie o monotonicznym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki. Istotnie, jeżeli $\mathcal{M}_0^+(A, \mathcal{L}_{p+q}) \ni f_n \nearrow f$ i odwzorowanie

$$A(t) \ni u \longmapsto f_n(t,u)$$

---

[6] $A_j = P \cap$ stosowna suma kostek z definicji.
[7] Wystarczy zastąpić A_{j+1} przez $A_{j+1} \cap A_j$.
[8] Leonida Tonelli (1885–1946).
[9] Oczywiście każde odwzorowanie określone na zbiorze pustym jest mierzalne.
[10] Odwzorowanie to jest określone $\mathcal{L}^p$–prawie wszędzie i oczywiście $\int_\varnothing \cdots = 0$.

jest mierzalne dla $t \in \mathbb{R}^p \setminus Z_n$, gdzie Z_n jest miary zero, $n \in \mathbb{N}$, to

$$A(t) \ni u \longmapsto f(t,u)$$

jest mierzalne dla $t \in \mathbb{R}^p \setminus Z$, gdzie $Z := \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$. Ponadto, jeżeli

$$\mathbb{R}^p \ni t \longmapsto \int_{A(t)} f_n(t,u)d\mathcal{L}^q(u)$$

jest mierzalne dla $n \in \mathbb{N}$, to (na podstawie twierdzenia o monotonicznym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki) odwzorowanie

$$\mathbb{R}^p \ni t \longmapsto \int_{A(t)} f(t,u)d\mathcal{L}^q(u)$$

jest mierzalne. Wzór otrzymujemy stosując obustronnie twierdzenie o monotonicznym przechodzeniu do granicy. □

Twierdzenie 14.2.3 (Twierdzenie Fubiniego $\binom{11}{}$)**.** *Niech $A \in \mathcal{L}_{p+q}$. Wtedy dla dowolnej funkcji $f \in L^1(A,\mathbb{C},\mathcal{L}^{p+q})$ mamy:*

(a) *dla $\mathcal{L}^p$–prawie wszystkich $t \in \mathbb{R}^p$ odwzorowanie*

$$A(t) \ni u \longmapsto f(t,u)$$

jest klasy $L^1(A(t),\mathbb{C},\mathcal{L}^q)$;

(b) *odwzorowanie*

$$\mathbb{R}^p \ni t \longmapsto \int_{A(t)} f(t,u)d\mathcal{L}^q(u)$$

jest klasy $L^1(\mathbb{R}^p,\mathbb{C},\mathcal{L}^p)$,

(c) $\int_A f d\mathcal{L}^{p+q} = \int_{\mathbb{R}^p} \big(\int_{A(t)} f(t,u)d\mathcal{L}^q(u)\big)d\mathcal{L}^p(t)$.

(d) *Jeżeli $B := \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^p}(A) \in \mathcal{L}_p$, to*

$$\int_A f d\mathcal{L}^{p+q} = \int_B \Big(\int_{A(t)} f(t,u)d\mathcal{L}^q(u)\Big)d\mathcal{L}^p(t).$$

Dowód. Wystarczy rozważyć przypadek, gdy $f \in L^1(X,\mathbb{R})$. Najpierw stosujemy Twierdzenie Tonellego do $|f|$ i dostajemy (a) i (b). Następnie stosujemy Twierdzenie Tonellego oddzielnie do f_+ i f_- i dostajemy wzory

$$\int_A f_\pm d\mathcal{L}^{p+q} = \int_{\mathbb{R}^p} \Big(\int_{A(t)} f_\pm(t,u)d\mathcal{L}^q(u)\Big)d\mathcal{L}^p(t).$$

Odejmujemy je stronami i wobec rozkładu $f = f_+ - f_-$ dostajemy (c). □

Uwaga 14.2.4. W poznanych powyżej twierdzeniach Cavalieriego, Tonellego i Fubiniego wyróżniona jest projekcja $\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^p} : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Oczywiście, nic nie stoi na przeszkodzie, aby zastąpić ją projekcją na $\mathbb{R}^q$, czy też ogólnie — projekcją na pewne p osi spośród $(p+q)$ osi w $\mathbb{R}^{p+q}$. Szczegóły pozostawiamy jako Ćwiczenie.

Twierdzenie 14.2.5. *Niech $B \in \mathcal{L}_n$, $\alpha,\beta \in \mathcal{M}(B,\mathcal{L}_n)$, $\alpha(t) \leqslant \beta(t)$, $t \in B$. Zdefiniujmy $A := \{(t,u) \in B \times \mathbb{R} : \alpha(t) \leqslant u \leqslant \beta(t)\}$. Wtedy $A \in \mathcal{L}_{n+1}$ oraz dla $f \in \mathcal{M}^+(A,\mathcal{L}_{n+1})$ lub $f \in L^1(A,\mathcal{L}^{n+1})$ mamy:*

$$\int_A f d\mathcal{L}^{n+1} = \int_B \Big(\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(t,u)d\mathcal{L}^1(u)\Big)d\mathcal{L}^n(t). \quad \binom{12}{}$$

W szczególności,

$$\mathcal{L}^{n+1}(A) = \int_B (\beta - \alpha)d\mathcal{L}^n. \quad \binom{13}{}$$

$\binom{11}{}$ Guido Fubini (1879–1943).

$\binom{12}{}$ $\int_\alpha^\beta := \int_{[\alpha,\beta]}$.

$\binom{13}{}$ Por. Twierdzenie 12.2.6.

Dowód. Mierzalność zbioru A wynika z mierzalności funkcji

$$B\times\mathbb{R}\ni(t,u)\longmapsto\alpha(t),\quad B\times\mathbb{R}\ni(t,u)\longmapsto\beta(t),\quad B\times\mathbb{R}\ni(t,u)\longmapsto u.$$

Wzór wynika z Twierdzenia Fubiniego bowiem dla $f\in L^1(A,\mathcal{L}^{n+1})$ mamy:

$$\int_A f d\mathcal{L}^{n+1}=\int_B\Big(\int_{A(t)}f(t,u)d\mathcal{L}^1(u)\Big)d\mathcal{L}^n(t)=\int_B\Big(\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}f(t,u)d\mathcal{L}^1(u)\Big)d\mathcal{L}^n(t).\qquad\square$$

14.3. Twierdzenie o zmianie zmiennych w całce Lebesgue'a

Rozważmy następującą sytuację. Niech $U,V\in\operatorname{top}\mathbb{R}^n$ będą zbiorami otwartymi i niech $\Phi:U\longrightarrow V$ będzie odwzorowaniem bijektywnym spełniającym lokalnie warunek Lipschitza i takim, że $\Phi'(x)$ istnieje dla p.w. $x\in U$. Odnotujmy, że w rzeczywistości to ostatnie założenie jest zawsze spełnione, bowiem prawdziwe jest następujące ważne twierdzenie.

Twierdzenie* 14.3.1 (Twierdzenie Rademachera [14] [15])**.** *Niech $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i niech $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^m$ będzie odwzorowaniem spełniającym lokalnie warunek Lipschitza. Wtedy f jest $\mathcal{L}^n$–prawie wszędzie różniczkowalne (w sensie Frécheta).*

Obserwacja 14.3.2. (a) Dla dowolnego zbioru $A\in\mathcal{L}_n|_U$, mamy $\Phi(A)\in\mathcal{L}_n$ (Twierdzenie 13.10.6(c)).

(b) Jeżeli $\mathcal{L}^n(A)=0$, to $\mathcal{L}^n(\Phi(A))=0$ (Twierdzenie 13.10.6(b)).

(c) Określone $\mathcal{L}^n$–prawie wszędzie odwzorowanie $U\ni x\longmapsto|\Phi'|(x)$ jest $\mathcal{L}_n$–mierzalne (Obserwacja 13.2.2(t, u)).

Definicja 14.3.3. Mówimy, że dla odwzorowania Φ zachodzi *twierdzenie o zmianie zmiennych w całce Lebesgue'a* jeżeli:

(1) $\mathcal{L}^n(\Phi(A))=\int_A|\Phi'|d\mathcal{L}^n$, $A\in\mathcal{L}_n|_U$,

(2) dla dowolnego zbioru $A\in\mathcal{L}_n|_U$ i dla dowolnej funkcji $f\in\mathcal{M}^+(\Phi(A),\mathcal{L}_n)$ (odp. $f\in L^1(\Phi(A),\mathcal{L}^n)$) funkcja $(f\circ\Phi)|\Phi'|$ jest mierzalna na A (odp. jest klasy $L^1(A,\mathcal{L}^n)$) oraz zachodzi wzór

$$\int_{\Phi(A)}f d\mathcal{L}^n=\int_A(f\circ\Phi)|\Phi'|d\mathcal{L}^n.$$

Lemat 14.3.4. (1) $\Longrightarrow$ (2).

Dowód. Standardowe rozumowanie redukuje dowód (2) do przypadku $f=\chi_B$, gdzie $B\in\mathcal{L}_n|_\Phi(A)$.

Wiemy, że $\Phi^{-1}(B)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ dla dowolnego zbioru $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ (Obserwacja 13.2.2(b)). Korzystając z (1) dla zbioru $\Phi^{-1}(B)$, wnioskujemy, że (2) zachodzi dla $f:=\chi_B$, $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)|_V$.

Wobec regularności miary Lebesgue'a, pozostaje sprawdzić przypadek, gdy $f=\chi_Z$, gdzie $Z\subset\Phi(A)$ jest miary zero. Mamy pokazać, że $(\chi_Z\circ\Phi)|\Phi'|=0$ prawie wszędzie na $\Phi^{-1}(Z)$ [16]. Ponieważ $\mathcal{L}^n$ jest regularna, zatem istnieje zbiór miary zero $Z_0\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ taki, że $Z\subset Z_0$. Zastępując Z_0 poprzez $Z_0\cap V$, możemy założyć, że $Z_0\subset V$ (tu korzystamy z założenia, że Φ jest surjekcją na zbiór otwarty). Dla zbioru Z_0 sytuacja jest jasna: $0=\mathcal{L}^n(Z_0)=\int_{\Phi(U)}\chi_{Z_0}=\int_U(\chi_{Z_0}\circ\Phi)|\Phi'|d\mathcal{L}^n=\int_{\Phi^{-1}(Z_0)}|\Phi'|d\mathcal{L}^n$ oraz $\Phi^{-1}(Z_0)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Stąd natychmiast dostajemy $|\Phi'|=0$ prawie wszędzie na $\Phi^{-1}(Z_0)\supset\Phi^{-1}(Z)$. $\square$

Lemat 14.3.5. *Przypuśćmy, że dla dowolnego $a\in U$ istnieje otoczenie otwarte $U_a\subset U$ takie, że* (1) *zachodzi dla dowolnego $A\in\mathcal{L}_n|_{U_a}$. Wtedy* (1) *zachodzi w pełnej ogólności.*

Dowód. Na podstawie twierdzenia Lindelöfa znajdziemy ciąg punktów $(a_j)_{j=1}^\infty\subset U$ taki, że $U=\bigcup\limits_{j=1}^\infty U_{a_j}$. Przyjmijmy dla uproszczenia $U_j:=U_{a_j}$. Dla dowolnego $A\in\mathcal{L}_n$, $A\subset U$, niech $A_1:=A\cap U_1$, $A_j:=A\cap(U_j\setminus(U_1\cup\dots\cup U_{j-1}))$, $j\geqslant 2$. Warunek (1) zachodzi dla każdego ze zbiorów A_j. Stąd

$$\mathcal{L}^n(\Phi(A))=\mathcal{L}^n\Big(\Phi\Big(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\Big)\Big)=\mathcal{L}^n\Big(\bigcup_{j=1}^\infty\Phi(A_j)\Big)=\sum_{j=1}^\infty\mathcal{L}^n(\Phi(A_j))=\sum_{j=1}^\infty\int_{A_j}|\Phi'|d\mathcal{L}^n=\int_A|\Phi'|d\mathcal{L}^n.\quad\square$$

Lemat 14.3.6. *Jeżeli warunek* (1) *zachodzi dla kostek, to zachodzi w pełnej ogólności.*

---

[14] Zob. H. Federer, *Geometric measure theory*, Springer Verlag, Berlin, 1969, Theorem 3.1.6.

[15] Hans Rademacher (1892–1969).

[16] Uwaga: Nie twierdzimy, że zbiór $\Phi^{-1}(Z)$ musi być mierzalny.

Dowód. Przypomnijmy, że (1) zachodzi dla zbiorów miary zero. Zachodzi więc dla dowolnych zbiorów A takich, że $\operatorname{int} P \subset A \subset P$ dla pewnej kostki $P \subset U$. W takim razie zachodzi dla dowolnego zbioru otwartego $\Omega \subset U$ (Obserwacja 13.1.5). Stąd dostajemy przypadek $A = (\operatorname{int} P) \setminus \Omega$, gdzie $P \subset U$ jest kostką, a $\Omega \subset U$ jest otwarty. Kolejno dostajemy przypadek, gdy $A \subset \operatorname{int} P$ jest zbiorem typu $\mathcal{F}_\sigma$. Teraz, korzystając z regularności miary Lebesgue'a dostajemy przypadek, gdy $A \subset \operatorname{int} P$ jest dowolnym zbiorem mierzalnym. Pozostaje skorzystać z Lematu 14.3.5. □

Wniosek 14.3.7. *Aby sprawdzić, że dla odwzorowania Φ zachodzi twierdzenie o zmianie zmiennych wystarczy udowodnić warunek* (1) *dla małych kostek.*

Wniosek 14.3.8. *Twierdzenie o zmianie zmiennych zachodzi zawsze dla $n = 1$.*

Twierdzenie 14.3.9 (I Twierdzenie o zmianie zmiennych w całce Lebesgue'a)**.** *Jeżeli $\Phi : U \longrightarrow V$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^1$, to dla Φ zachodzi twierdzenie o zmianie zmiennych.*

Dowód. Wiemy, że wystarczy sprawdzić (1) dla małych kostek.

Krok 1^0: Jeżeli twierdzenie zachodzi dla dyfeomorfizmów $\Phi : U \longrightarrow V$ i $\Psi : V \longrightarrow W$, to zachodzi dla $\Psi \circ \Phi : U \longrightarrow W$.

Istotnie, ponieważ $(\Psi \circ \Phi)' = (\Psi' \circ \Phi) \circ \Phi'$, zatem korzystając z (2) dla Φ i $f = |\Psi'|$, dostajemy

$$\mathcal{L}^n(\Psi(\Phi(A))) = \int_{\Phi(A)} |\Psi'| d\mathcal{L}^n = \int_A (|\Psi'| \circ \Phi)|\Phi'| d\mathcal{L}^n = \int_A |(\Psi \circ \Phi)'| d\mathcal{L}^n.$$

Krok 2^0: Twierdzenie zachodzi dla $n = 1$.

Krok 3^0: Jeżeli twierdzenie jest prawdziwe dla $n-1$, to jest prawdziwe dla n i dyfeomorfizmów postaci

$$\Phi(x) = \Phi(x_1, \dots, x_n) = (\Phi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \Phi_{n-1}(x_1, \dots, x_n), x_n), \quad x \in U.$$

Istotnie, ustalmy kostkę $P \subset U$, $P = Q \times R \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ i niech $x = (u, t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Dla $t \in R$ niech

$$U(t) \ni u \overset{\Phi_t}{\longmapsto} (\Phi_1(u, t), \dots, \Phi_{n-1}(u, t)) \in V(t).$$

Bez trudu widzimy, że $\Phi_t : U(t) \longrightarrow V(t)$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^1$ oraz $|\Phi_t'|(u) = |\Phi'|(u, t)$. Teraz na podstawie tego, że (1) zachodzi dla $n-1$ oraz na podstawie zasady Cavalieriego i twierdzenia Tonellego mamy:

$$\mathcal{L}^n(\Phi(P)) = \int_R \mathcal{L}^{n-1}(\Phi_t(Q)) d\mathcal{L}^1(t) = \int_R \Big(\int_Q |\Phi_t'|(u) d\mathcal{L}^{n-1}(u) \Big) d\mathcal{L}^1(t) = \int_P |\Phi'| d\mathcal{L}^n.$$

Krok 4^0: Jeżeli twierdzenie jest prawdziwe dla $n-1$, to jest prawdziwe dla n i dyfeomorfizmów postaci

$$\Phi(x) = (\Phi_1(x), \dots, \Phi_{j-1}(x), x_k, \Phi_{j+1}(x), \dots, \Phi_n(x)), \quad x \in U,$$

gdzie $j, k \in \{1, \dots, n\}$. Dyfeomorfizmy tej postaci nazywamy *przywiedlnymi.*

Krok 5^0 (i ostatni). Na podstawie poprzednich części dowodu widać, że wystarczy jeszcze pokazać, że każdy dyfeomorfizm jest lokalnie złożeniem (co najwyżej trzech) dyfeomorfizmów przywiedlnych.

Istotnie, ustalmy dyfeomorfizm klasy $\mathcal{C}^1$ $\Phi : U \longrightarrow V$ i $a \in U$. Zastępując Φ przez $\Phi \circ P$, gdzie P jest stosownie wybraną permutacją zmiennych ([17]), możemy założyć, że $\frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n}(a) \neq 0$. Zmniejszając U (i V) możemy założyć, że $\frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n}(x) \neq 0$, $x \in U$. Niech $x = (u, t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Rozważmy odwzorowanie:

$$U \times \mathbb{R} \ni (u, t, v) \overset{f}{\longmapsto} \Phi_n(u, t) - v \in \mathbb{R}.$$

Oczywiście $\frac{\partial f}{\partial t}(u, t, v) \neq 0$, $(u, t, v) \in U \times \mathbb{R}$ oraz $f(u_0, t_0, v_0) = 0$, gdzie $(u_0, t_0) = a$, $v_0 := \Phi_n(a)$. Na podstawie twierdzenia o odwzorowaniu uwikłanym istnieje otoczenie otwarte Ω punktu (u_0, t_0, v_0) i odwzorowanie $\varphi : U_1 \longrightarrow U_2$ klasy $\mathcal{C}^1$ takie, że $\varphi(u_0, v_0) = t_0$ i równość $f(u, t, v) = 0$ jest dla $(u, t, v) \in \Omega$ równoważna temu, że $t = \varphi(u, v)$. Zdefiniujmy:

$$\Psi(u, v) := (\Phi_1(u, \varphi(u, v)), \dots, \Phi_{n-1}(u, \varphi(u, v)), v), \quad (u, v) \in \text{ otoczenie punktu } (u_0, v_0),$$
$$\Theta(u, t) := (u, \Phi_n(u, t)), \quad (u, t) \in \text{ otoczenie punktu } a.$$

([17]) Zauważmy, że permutacje zmiennych są dyfeomorfizmami przywiedlnymi.

Oczywiście Ψ i Θ są klasy $\mathcal{C}^1$ oraz $\Theta(a)=(u_0,v_0)$. W takim razie złożenie $\Psi\circ\Theta$ ma sens w pewnym otoczeniu punktu a. Wystarczy pokazać, $\Psi\circ\Theta=\Phi$ w małym otoczeniu a ([18]). Równość ta wynika z faktu, że wobec definicji φ, mamy $\varphi(u,\Phi_n(u,t))=t$ dla (u,t) w małym otoczeniu a. □

Twierdzenie 14.3.10 (Twierdzenie o zmianie zmiennych w całce Riemanna — por. Twierdzenie 12.2.7)**.** *Jeżeli $\Phi: U\longrightarrow V$ będzie dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^1$, to dla dowolnego zbioru regularnego $A\subset\subset U$ i dla dowolnej funkcji $f\in\mathcal{R}(\Phi(A))$ ([19]) funkcja $(f\circ\Phi)\cdot|\Phi'|$ jest całkowalna w sensie Riemanna na A oraz*

$$\int_{\Phi(A)} f=\int_A (f\circ\Phi)\cdot|\Phi'|$$

Dowód. Korzystamy z Twierdzeń 14.1.1 i 14.3.9: $N_A((f\circ\Phi)|\Phi'|)=\Phi^{-1}(N_{\Phi(A)}(f))$. □

Twierdzenie 14.3.11 (II twierdzenie o zmianie zmiennych w całce Lebesgue'a)**.** *Jeżeli $\Phi: U\longrightarrow V$ jest odwzorowaniem bijektywnym klasy $\mathcal{C}^1$, to dla Φ zachodzi twierdzenie o zmianie zmiennych.*

Lemat 14.3.12. *Jeżeli $f\in\mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$, to $\mathcal{L}^n(f(S_{n-1}))=0$, gdzie $S_{n-1}:=\{x\in\Omega:\det f'(x)=0\}$.*

Odnotujmy, że jest to specjalny przypadek następującego Twierdzenia Sarda.

Twierdzenie* 14.3.13 (Twierdzenie Sarda ([20]) ([21]))**.** *Niech $f:\Omega\longrightarrow F$ będzie odwzorowaniem klasy $\mathcal{C}^k$ ($k\in\mathbb{N}$) zbioru otwartego $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ w przestrzeń unormowaną F. Zdefiniujmy*

$$S_r:=\{x\in\Omega:\operatorname{rank} f'(x):=\dim f'(x)(\mathbb{R}^n)\leqslant r\}.$$

Wtedy

$$\mathcal{H}^{r+(n-r)/k}(f(S_r))=0,\quad r=0,\dots,n-1.$$

Dowód Lematu 14.3.12. Wystarczy pokazać, że $f(S_{n-1}\cap Q)$ jest miary zero dla dowolnej kostki $Q\subset\subset\Omega$ o wszystkich krawędziach równych ℓ. Niech

$$\|f(x')-f(x'')\|\leqslant L\|x'-x''\|,\quad x',x''\in Q,$$

gdzie $L:=\max\{\|f'(x)\|:x\in Q\}$ (norma operatorowa). Ustalmy $\varepsilon>0$. Podzielmy kostkę Q na N^n równych kostek tak, że dla dowolnej kostki Q' z tego podziału mamy

$$\|f'(x')-f'(x'')\|\leqslant\varepsilon,\quad x',x''\in Q'.$$

Ustalmy kostkę Q' taką, że $S_{n-1}\cap Q'\neq\varnothing$. Będziemy się starać oszacować miarę zbioru $f(Q')$. Ustalmy $x_0\in S_{n-1}\cap Q'$ i niech W będzie $(n-1)$–wymiarową podprzestrzenią wektorową $\mathbb{R}^n$ taką, że $f'(x_0)(\mathbb{R}^n)\subset W$. Niech $W':=f(x_0)+W$; W' jest $(n-1)$–wymiarową płaszczyzną afiniczną. Niech $x\in Q'$. Na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych mamy:

$$\|f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)\|\leqslant\varepsilon\|x-x_0\|\leqslant\varepsilon\sqrt{n}\ell/N,$$
$$\|f(x)-f(x_0)\|\leqslant L\|x-x_0\|\leqslant L\sqrt{n}\ell/N.$$

Ponieważ $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\in W'$, zatem

$$\operatorname{dist}(f(x),W')\leqslant\varepsilon\sqrt{n}\ell/N.$$

Oznacza to, że $f(Q')$ leży w walcu

$$\{y'+y'':y',y''\in\mathbb{R}^n,\ y'\in W',\ y''\in W^\perp,\ \|y'-f(x_0)\|\leqslant L\sqrt{n}\ell/N,\ \|y''\|\leqslant\varepsilon\sqrt{n}\ell/N\}.\quad([22])$$

W takim razie, na podstawie zasady Cavalieriego, mamy

$$\mathcal{L}^n(f(Q'))\leqslant\mathcal{L}^{n-1}(\mathbb{B}_{n-1})(L\sqrt{n}\ell/N)^{n-1}(2\varepsilon\sqrt{n}\ell/N)=:C_0\varepsilon/N^n.$$

a stąd

$$\mathcal{L}^n(f(S_{n-1}\cap Q))\leqslant C_0\varepsilon.$$ □

([18]) Bo wtedy $\Psi'(u_0,v_0)\circ\Theta'(a)=\Phi'(a)$, skąd, na podstawie twierdzenia o lokalnym dyfeomorfizmie, Ψ i Θ muszą być dyfeomorfizmami w otoczeniu, odpowiednio, (u_0,v_0) i a — będą to poszukiwane dyfeomorfizmy przywiedlne dające rozkład Φ w otoczeniu a.

([19]) Przypomnijmy, że wiemy już, że zbiór $\Phi(A)$ jest regularny.

([20]) Zob. H. Federer, *Geometric measure theory*, Springer Verlag, Berlin, 1969, § 3.4.1.

([21]) Arthur Sard (1909–1980).

([22]) Tu i dalej: $W^\perp:=\{\xi\in\mathbb{R}^n:\forall_{\eta\in W}\ \langle\xi,\eta\rangle=0\}$, gdzie $\langle\ ,\ \rangle$ jest standardowym iloczynem skalarnym w $\mathbb{R}^n$.

Dowód Twierdzenia 14.3.11. Niech $S := \{x \in U : \det \Phi'(x) = 0\}$. Wobec Lematu 14.3.12 mamy $\mathcal{L}^n(\Phi(S)) = 0$. Na podstawie twierdzenia o lokalnym dyfeomorfizmie wiemy, że zbiór $V \setminus \Phi(S) = \Phi(U \setminus S)$ jest otwarty oraz, że $\Phi|_{U\setminus S} : U \setminus S \longrightarrow V \setminus \Phi(S)$ jest dyfeomorfizmem. Teraz możemy skorzystać z I twierdzenia o zmianie zmiennych w całce Lebesgue'a:

$$\mathcal{L}^n(\Phi(A)) = \mathcal{L}^n(\Phi(A) \setminus \Phi(S)) = \mathcal{L}^n(\Phi(A \setminus S)) = \int_{A\setminus S} |\Phi'| d\mathcal{L}^n = \int_A |\Phi'| d\mathcal{L}^n. \qquad \square$$

Twierdzenie 14.3.14 (III twierdzenie o zmianie zmiennych, zob. Obserwacja 16.4.7(b))**.** *Jeżeli $\Phi : U \longrightarrow V$ jest odwzorowaniem bijektywnym spełniającym lokalnie warunek Lipschitza, to dla Φ zachodzi twierdzenie o zmianie zmiennych.*

14.4. Funkcje dane całką

Załóżmy, że Ω jest pewnym zbiorem, $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ jest przestrzenią z miarą nieujemną [23], zaś $f : \Omega \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ — funkcją taką, że $f(x, \cdot) \in L^1(X, \mu)$ dla dowolnego $x \in \Omega$. Definiujmy *funkcję daną całką*

$$\varphi(x) := \int_X f(x,t) d\mu(t), \quad x \in \Omega;$$

por. Twierdzenie 11.3.1. Interesuje nas, jak własności funkcji f (np. ciągłość, różniczkowalność) przenoszą się na funkcję φ.

Twierdzenie 14.4.1 (Twierdzenie o funkcjach danych całką [24])**.** (a) *Załóżmy dodatkowo, że Ω jest przestrzenią metryczną, $x_0 \in \Omega$ oraz*

- *$f(\cdot, t) \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C}; x_0)$ dla dowolnego $t \in X$,*
- *$|f(x,t)| \leqslant g_0(t)$, $(x,t) \in \Omega \times X$, gdzie $g_0 \in L^1(X,\mu)$ [25].*

Wtedy $\varphi \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C}; x_0)$. W szczególności, jeżeli

- *$f(\cdot, t) \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C})$ dla dowolnego $t \in X$,*
- *$|f(x,t)| \leqslant g_0(t)$, $(x,t) \in \Omega \times X$, gdzie $g_0 \in L^1(X,\mu)$,*

to $\varphi \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C})$.

(b) *Załóżmy dodatkowo, że Ω jest zbiorem otwartym w pewnej przestrzeni unormowanej E, $k \in \mathbb{N}$ i $\xi_1, \dots, \xi_k \in E$. Jeżeli*

- *$\frac{\partial^k f(\cdot,t)}{\partial \xi_k \cdots \partial \xi_1}(x)$ istnieje dla dowolnego $(x,t) \in \Omega \times X$,*
- *$|\frac{\partial^j f(\cdot,t)}{\partial \xi_j \cdots \partial \xi_1}(x)| \leqslant g_j(t)$, $(x,t) \in \Omega \times X$, gdzie $g_j \in L^1(X,\mu)$, $j = 0, \dots, k$,*

to dla dowolnego $x \in \Omega$, funkcja $X \ni t \overset{\psi_k^x}{\longmapsto} \frac{\partial^k f(\cdot,t)}{\partial \xi_k \cdots \partial \xi_1}(x)$ jest całkowalna, pochodna $\frac{\partial^k \varphi}{\partial \xi_k \cdots \partial \xi_1}(x)$ istnieje oraz

$$\frac{\partial^k \varphi}{\partial \xi_k \cdots \partial \xi_1}(x) = \int_X \frac{\partial^k f(\cdot,t)}{\partial \xi_k \cdots \partial \xi_1}(x) d\mu(t).$$

Dowód. (a) Niech $x_s \longrightarrow x_0$, $\psi_s := f(x_s, \cdot) - f(x_0, \cdot)$. Wtedy $\psi_s \longrightarrow 0$ punktowo na X oraz $|\psi_s| \leqslant 2g_0$. Stąd, na podstawie twierdzenia Lebesgue'a o zmajoryzowanym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki, dostajemy $\varphi(x_s) - \varphi(x_0) = \int_X \psi_s d\mu \longrightarrow 0$.

(b) Zastosujemy indukcję ze względu na k. Dla $k = 1$ ustalmy $x_0 \in \Omega$. Mamy

$$\frac{\partial f(\cdot,t)}{\partial \xi_1}(x_0) = \lim_{\mathbb{N} \ni s \to +\infty} \frac{f(x_0 + \frac{1}{s}\xi_1, t) - f(x_0,t)}{\frac{1}{s}},$$

skąd, na podstawie Obserwacji 13.2.2(r), wnioskujemy, że funkcja $\psi_1^{x_0}$ jest mierzalna. Ponieważ $|\psi_1^{x_0}| \leqslant g_1$, funkcja $\psi_1^{x_0}$ jest również całkowalna. Zauważmy, że

$$\frac{\varphi(x_0 + h\xi_1) - \varphi(x_0)}{h} - \int_X \frac{\partial f(\cdot,t)}{\partial \xi_1}(x_0) d\mu(t) = \int \Big(\frac{f(x_0 + h\xi_1, t) - f(x_0,t)}{h} - \frac{\partial f(\cdot,t)}{\partial \xi_1}(x_0) \; Big) d\mu(t)$$
$$=: \int_X F(h,t) d\mu(t), \quad 0 < |h| < r \ll 1.$$

---

[23] Możemy myśleć o przypadku, gdy $X \in \mathcal{L}_n$, zaś μ jest miarą Lebesgue'a.

[24] Por. Twierdzenie 11.3.1.

[25] Odnotujmy, że warunek ten jest spełniony np. gdy $\mu(X) < +\infty$, zaś f jest ograniczona.

Na podstawie twierdzenia o wartości średniej mamy $|F(h,t)|\leqslant 2g_1(t)$. Połóżmy dodatkowo $F(0,t):=0$. Teraz pozostaje skorzystać z (a) dla danych $(\Omega,X,f,g_0):=((-r,r),X,F,2g_1)$.

Aby wykonać krok indukcyjny $k-1\rightsquigarrow k$ wystarczy zastosować powyższe rozumowanie do danych $(k,f,g_1,\dots,g_k)=(1,(x,t)\longmapsto\psi^x_{k-1}(t)=\frac{\partial^{k-1}f(\cdot,t)}{\partial\xi_{k-1}\dots\partial\xi_1}(x),g_k)$. □

Uwaga 14.4.2. Powyższe wyniki mogą być uogólnione na przypadek, gdy $f:\Omega\times X\longrightarrow F$, gdzie F jest ośrodkową przestrzenią Banacha.

14.5. Gęstość $\mathcal{C}_0(\Omega,\mathbb{C})$ w $L^p(\Omega,\mathbb{C},\mathcal{L}^n)$

Lemat 14.5.1 (Rozkład jedności)**.** *Niech X będzie* lokalnie zwartą *przestrzenią metryczną. Wtedy dla dowolnego zbioru zwartego $K\subset X$ i dla dowolnego jego pokrycia otwartego $U_1,\dots,U_N$ istnieją funkcje $f_j\in\mathcal{C}_0(U_j,[0,1])$, $j=1,\dots,N$, takie, że $f_1+\dots+f_N\leqslant 1$ na X oraz $f_1+\dots+f_N=1$ na otwartym otoczeniu K.*

Dowód. Krok 1^o. Wiemy, że dla dowolnych dwóch zbiorów domkniętych i rozłącznych $A,B\subset X$ istnieje funkcja $f\in\mathcal{C}(X,[0,1])$ taka, że $f=1$ and A i $f=0$ na B, np. $f(x)=\frac{\varrho(x,B)}{\varrho(x,A)+\varrho(x,B)}$.

Krok 2^o. Dla dowolnego $a\in X$ oraz dla dowolnego jego otoczenia otwartego U istnieje otoczenie otwarte V punktu a takie, że $\overline{V}\subset U$ oraz $\overline{V}$ jest zbiorem zwartym.

Istotnie, dowód sprowadza się do znalezienia otoczenia V takiego, że $\overline{V}\subset U$. Stosujemy Krok 1^o do $A:=\{a\}$ i $B:=X\setminus U$. Niech $f\in\mathcal{C}(X,[0,1])$ będzie taka, że $f(a)=1$ i $f=0$ na B. Zdefiniujmy $V:=\{x\in X: f(x)>\frac12\}$. Wtedy $\overline{V}\subset\{x\in X: f(x)\geqslant\frac12\}\subset X\setminus B=U$.

Krok 3^o. Dla dowolnego zbioru zwartego i jego otoczenia otwartego U istnieje zbiór otwarty V taki, że $K\subset V\subset\overline{V}\subset U$ i $\overline{V}$ jest zbiorem zwartym.

Istotnie, dla dowolnego $a\in K$ dobieramy na podstawie Kroku 2^o otoczenie otwarte V_a takie, że $\overline{V}_a\subset U$ i $\overline{V}_a$ jest zbiorem zwartym. Wobec zwartości K istnieje skończona liczba punktów $a_1,\dots,a_k\in K$ takich, że $K\subset V_{a_1}\cup\dots\cup V_{a_k}=:V$.

Krok 4^o. Dla dowolnego otoczenia U zbioru zwartego K istnieje funkcja $f\in\mathcal{C}_0(U,[0,1])$ taka, że $f=1$ na K.

Istotnie, na podstawie Kroku 3^o istnieje zbiór otwarty V taki, że $K\subset V\subset\overline{V}\subset U$ i $\overline{V}$ jest zbiorem zwartym. Teraz stosujemy Krok 1^o do $A:=K$ i $B:=X\setminus V$.

Krok 5^o. Dla dowolnego $x\in K$ ustalmy $j(x)\in\{1,\dots,N\}$ tak, że $x\in U_{j(x)}$ i niech V_x będzie relatywnie zwartym otoczeniem punktu x takim, że $\overline{V}_x\subset U_{j(x)}$ Wobec zwartości K istnieje skończona liczba punktów $x_1,\dots,x_k\in K$ takich, że $K\subset V_{x_1}\cup\dots\cup V_{x_k}=:V$. Niech

$$L_j:=\bigcup_{i\in\{1,\dots,k\}:\,j(x_i)=j}\overline{V}_{x_i},\quad j=1,\dots,N.$$

Na podstawie Kroku 4^o istnieją funkcje $g_j\in\mathcal{C}_0(U_j,[0,1])$, $g_j=1$ na L_j, $j=1,\dots,N$. Zdefiniujmy

$$f_1:=g_1,\quad f_2:=(1-g_1)g_2,\dots,f_N:=(1-g_1)\dots(1-g_{N-1})g_N.$$

Oczywiście $f_j\in\mathcal{C}_0(U_j,[0,1])$, $j=1,\dots,N$. Ponadto, $f_1+\dots+f_N=1-(1-g_1)\dots(1-g_N)$, a stąd $f_1+\dots+f_N=1$ na V. □

Twierdzenie 14.5.2. *Dla dowolnego zbioru otwartego $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ i dla dowolnego $1\leqslant p<+\infty$ przestrzeń $\mathcal{C}_0(\Omega,\mathbb{C})$ jest gęsta w $L^p(\Omega,\mathbb{C},\mathcal{L}^n)$ w normie L^p.*

Twierdzenie nie jest prawdziwe dla $p=+\infty$, bowiem zbieżność ciągu funkcji z $\mathcal{C}_0(\Omega)$ w sensie normy L^∞, to zbieżność jednostajna, a więc granica musi być co najmniej funkcją ciągłą.

Dowód. Możemy się ograniczyć do funkcji rzeczywistych. Oczywiście

$$\mathcal{C}_0(\Omega)\subset L^p(\Omega,\mathcal{L}^n).$$

Ustalmy, $f\in L^p(\Omega,\mathcal{L}^n)$. Możemy założyć, że $f\geqslant 0$ [26]. Niech $\Omega_k:=\Omega\cap\mathbb{B}(k)$, $f_k:=f\cdot\chi_{\Omega_k}$, $k\geqslant 1$. Zauważmy, że $|f_k-f|^p\longrightarrow 0$ oraz $|f_k-f|^p\leqslant f^p$, $k\geqslant 1$, zatem, na podstawie Twierdzenia Lebesgue'a, $f_k\longrightarrow f$ w L^p. Możemy więc założyć, że Ω jest ograniczony. Niech $\mathcal{M}^+_0(\Omega)\ni f_k\nearrow f$. Tak jak powyżej $f_k\longrightarrow f$ w L^p, więc możemy przyjąć, że f jest funkcją prostą i dalej, że $f=\chi_A$, gdzie $A\in\mathcal{L}_n$, $A\subset\Omega$. Weźmy $\varepsilon>0$. Wiemy, że istnieją: zbiór domknięty $K\subset A$ oraz zbiór otwarty $U\supset A$ takie, że $\mathcal{L}^n(U\setminus K)\leqslant\varepsilon$. Możemy

[26] Jeżeli $f\in L^p$, to $f_\pm\in L^p$.

założyć, że $U \subset \Omega$. Ograniczoność Ω gwarantuje nam zwartość K. Na podstawie Lematu 14.5.1 istnieje funkcja $g \in \mathcal{C}_0(U)$ taka, że $0 \leqslant g \leqslant 1$ i $g = 1$ na K. Teraz mamy: $\|g - f\|_{L^p}^p = \int_{U\setminus K} |g-f|^p d\mathcal{L}^n \leqslant \varepsilon$. □

14.6. Splot

Definicja 14.6.1. Dla $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}, \mathcal{L}_n)$ zdefiniujmy

$$\mathcal{D}_{f*g} := \Big\{x \in \mathbb{R}^n : \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|\, d\mathcal{L}^n(y) < +\infty\Big\},$$
$$(f*g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\, d\mathcal{L}^n(y), \quad x \in \mathcal{D}_{f*g}.$$

Funkcję $f*g$ nazywamy *splotem* funkcji f i g.

Obserwacja 14.6.2. (a) Na podstawie twierdzenia o zmianie zmiennych dostajemy: $\mathcal{D}_{f*g} = \mathcal{D}_{g*f}$ oraz $f*g = g*f$.

(b) $\mathcal{D}_{f_1*g} \cap \mathcal{D}_{f_2*g} \subset \mathcal{D}_{(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)*g}$ oraz $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) * g = \alpha_1(f_1*g) + \alpha_2(f_2*g)$ na $\mathcal{D}_{f_1*g} \cap \mathcal{D}_{f_2*g}$. Oznacza to, że splot jest operacją dwuliniową symetryczną.

Twierdzenie 14.6.3. *Niech $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p,q \leqslant +\infty$. Załóżmy, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geqslant 1$ i niech $1 \leqslant r \leqslant +\infty$ będzie liczbą taką, że*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1.$$

Wtedy splot $f*g$ jest określony $\mathcal{L}^n$–prawie wszędzie na $\mathbb{R}^n$, $f*g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ oraz zachodzi następująca nierówność Younga:

$$\|f*g\|_{L^r} \leqslant \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

W szczególności, splot

$$L^p(\mathbb{R}^n) \times L^q(\mathbb{R}^n) \ni (f,g) \longmapsto f*g \in L^r(\mathbb{R}^n)$$

jest operacją dwuliniową, symetryczną i ciągłą.

Ponadto, jeżeli $r = +\infty$, tzn. jeżeli p i q są sprzężone, to splot $f*g$ jest określony wszędzie i jest funkcją ciągłą.

Dowód. Zauważmy, że $p \leqslant r$, $q \leqslant r$.

Rozważmy najpierw przypadek $r = +\infty$.

Wtedy, wobec nierówności Höldera oraz twierdzenia o zmianie zmiennych, dostajemy:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|\, d\mathcal{L}^n(y) \leqslant \|f(x-\cdot)\|_{L^p}\|g\|_{L^q} = \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Oznacza to, że $\mathcal{D}_{f*g} = \mathbb{R}^n$ oraz, że $\sup_{\mathbb{R}^n} |f*g| \leqslant \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$ [27].

Możemy założyć, że $p < +\infty$. Jeżeli $(f_\nu)_{\nu=1}^\infty \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ i $f_\nu \xrightarrow{L^p} f_0$, to

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |f_\nu * g - f_0 * g| \leqslant \|f_\nu - f_0\|_{L^p}\|g\|_{L^q},$$

a zatem $f_\nu * g \longrightarrow f_0 * g$ jednostajnie na $\mathbb{R}^n$. W szczególności, wobec Twierdzenia 14.5.2, aby pokazać, że $f*g$ jest funkcją ciągłą, możemy założyć, że $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

Ustalmy $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i $\varepsilon > 0$. Ponieważ f jest funkcją jednostajnie ciągłą na $\mathbb{R}^n$, istnieje $\delta \in (0,1)$ taka, że $|f(z') - f(z'')| \leqslant \varepsilon$ o ile $\|z' - z''\| \leqslant \delta$. Niech

$$K := -(\operatorname{supp} f) + \overline{\mathbb{B}}(x_0, 1) = \{y \in \mathbb{R}^n : \exists_{x \in \overline{\mathbb{B}}(x_0,1)} : x - y \in \operatorname{supp} f\}.$$

Teraz, dla $x \in \mathbb{B}(x_0, \delta)$, mamy:

$$\begin{aligned}
|f*g(x) - f*g(x_0)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x_0-y)||g(y)|\, d\mathcal{L}^n(y) \\
&\leqslant \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x_0-y)|^p\, d\mathcal{L}^n(y)\Big)^{1/p} \|g\|_{L^q} \\
&= \Big(\int_K |f(x-y) - f(x_0-y)|^p\, d\mathcal{L}^n(y)\Big)^{1/p} \|g\|_{L^q} \leqslant \varepsilon(\mathcal{L}^n(K))^{1/p}\|g\|_{L^q}.
\end{aligned}$$

[27] Uwaga: nie piszemy $\|f*g\|_{L^\infty}$ ponieważ jeszcze nie wiemy, czy $f*g$ jest funkcją mierzalną.

Niech teraz, $r = 1$ (tzn. $p = q = 1$). Wtedy, na podstawie twierdzenia Tonellego (i twierdzenia o zmianie zmiennych), mamy

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)g(y)|\,d\mathcal{L}^n(y)\Big)d\mathcal{L}^n(x) &= \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}|f(x-y)g(y)|\,d\mathcal{L}^{2n}(x,y)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|\,d\mathcal{L}^n(x)\Big)|g(y)|\,d\mathcal{L}^n(y)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\,d\mathcal{L}^n(x)\Big)|g(y)|\,d\mathcal{L}^n(y) = \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}.\end{aligned}$$

Wynika stąd, że funkcja $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\ni(x,y)\longmapsto f(x-y)g(y)$ jest klasy $L^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$. Stąd, na podstawie twierdzenia Fubiniego, splot $f*g$ jest określony $\mathcal{L}^n$–prawie wszędzie, jest klasy $L^1(\mathbb{R}^n)$ (w szczególności, jest funkcją mierzalną) i $\|f*g\|_{L^1}\leqslant\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}$.

Niech $1<r=p<+\infty$ (w ten sam sposób rozpatrujemy przypadek $1<r=q<+\infty$).

Zauważmy, że $q=1$. Niech $1<s<+\infty$ będzie liczbą sprzężoną z p. Przystępujemy do szacowania:

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)g(y)|\,d\mathcal{L}^n(y)\Big)^p d\mathcal{L}^n(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)||g(y)|^{1/p}|g(y)|^{1-1/p}\,d\mathcal{L}^n(y)\Big)^p d\mathcal{L}^n(x)\\ &\overset{(1)}{\leqslant} \int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^p|g(y)|\,d\mathcal{L}^n(y)\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|g(y)|^{s(1-1/p)}\,d\mathcal{L}^n(y)\Big)^{p/s}d\mathcal{L}^n(x)\\ &= \Big(\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^p|g(y)|\,d\mathcal{L}^n(y)\Big)d\mathcal{L}^n(x)\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|g(y)|\,d\mathcal{L}^n(y)\Big)^{p-1}\\ &\overset{(2)}{=} \Big(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p\,d\mathcal{L}^n(x)\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|g(y)|\,d\mathcal{L}^n(y)\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|g(y)|\,d\mathcal{L}^n(y)\Big)^{p-1}\\ &= (\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^1})^p,\end{aligned}$$

gdzie (1) wynika z nierówności Höldera (dla p i s), zaś (2) wynika z twierdzenia Tonellego.

Na koniec, niech $1<r<+\infty$, $p<r$ i $q<r$. Niech $1<s<+\infty$ będzie liczbą sprzężoną z r. Zdefiniujmy

$$a:=\frac{p}{s(1-p/r)},\quad b:=\frac{q}{s(1-q/r)}$$

oraz zauważmy, że są to również liczby sprzężone [28]. Ponadto:

$$\frac{r}{sa}=\frac{r}{p}-1,\quad \frac{r}{sb}=\frac{r}{q}-1.$$

Przystępujemy do szacowania:

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)g(y)|\,d\mathcal{L}^n(y)\Big)^r d\mathcal{L}^n(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^{p/r}|g(y)|^{q/r}|f(x-y)|^{1-p/r}|g(y)|^{1-q/r}\,d\mathcal{L}^n(y)\Big)^r d\mathcal{L}^n(x)\\ &\overset{(1)}{\leqslant} \int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^p|g(y)|^q d\mathcal{L}^n(y)\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^{s(1-p/r)}|g(y)|^{s(1-q/r)}d\mathcal{L}^n(y)\Big)^{r/s}d\mathcal{L}^n(x)\\ &\overset{(2)}{\leqslant} \int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^p|g(y)|^q d\mathcal{L}^n(y)\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^{as(1-p/r)}d\mathcal{L}^n(y)\Big)^{r/(as)}\times\\ &\qquad\times\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|g(y)|^{bs(1-q/r)}d\mathcal{L}^n(y)\Big)^{r/(bs)}d\mathcal{L}^n(x)\end{aligned}$$

---

[28] Istotnie,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=s\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}+\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\Big)=s\Big(1-\frac{1}{r}\Big)=1.$$

$$= \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p |g(y)|^q \, d\mathcal{L}^n(y) \Big) d\mathcal{L}^n(x) \Big) \|f\|_{L^p}^{r-p} \|g\|_{L^q}^{r-q}$$
$$\overset{(3)}{=} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, d\mathcal{L}^n(x) \Big) \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|^q \, d\mathcal{L}^n(y) \Big) \|f\|_{L^p}^{r-p} \|g\|_{L^q}^{r-q} = (\|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q})^r.$$

gdzie (1) wynika z nierówności Höldera dla r i s, (2) — z nierówności Höldera dla a i b, zaś (3) wynika z twierdzenia Tonellego. □

Wniosek 14.6.4. *Przypuśćmy, że $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $h \in L^r(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p, q, r \leqslant +\infty$. Załóżmy, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geqslant 1$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geqslant 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geqslant 2$ i niech $1 \leqslant s \leqslant +\infty$ będzie liczbą taką, że $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 2$. Wtedy:*

- *sploty $f * (g * h)$ i $(f * g) * h$ są określone $\mathcal{L}^n$–prawie wszędzie,*
- *$f * (g * h) = (f * g) * h$ (a więc możemy określić $f * g * h$),*
- *$f * g * h \in L^s(\mathbb{R}^n)$,*
- *$\|f * g * h\|_{L^s} \leqslant \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \|h\|_{L^r}$.*

Definicja 14.6.5. Wprowadzamy następującą konwencję dla funkcji mierzalnych $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ określonych na pewnym zbiorze X z miarą nieujemną $\mu : \mathfrak{M} \longrightarrow [0, +\infty]$. Piszemy „$\operatorname{supp} f \subset A$", gdzie $A \in \mathfrak{M}$, jeżeli $f = 0$ μ–p.w. na $X \setminus A$ ([29]). Jeżeli X jest przestrzenią topologiczną i $\mathcal{B}(X) \subset \mathfrak{M}$, to zdanie „$\operatorname{supp} f$ jest zbiorem zwartym" oznacza, że istnieje zbiór zwarty $K \subset X$ taki, że $\operatorname{supp} f \subset K$.

Twierdzenie 14.6.6. (a) *Niech f, g będą takie, jak w Twierdzeniu 14.6.3. Załóżmy, że $\operatorname{supp} f \subset K$ i $\operatorname{supp} g \subset L$, gdzie $K, L \subset \mathbb{R}^n$ są zbiorami zwartymi. Wtedy*

$$\operatorname{supp}(f * g) \subset K + L.$$

W szczególności, $\operatorname{supp}(f * g)$ jest również zbiorem zwartym.

(b) *Jeżeli $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} f \subset K \subset\subset \mathbb{R}^n$ i $g \in \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, to $f * g \in \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ oraz $D^\alpha(f * g) = f * (D^\alpha g)$ dla dowolnego wielowskaźnika α takiego, że $|\alpha| \leqslant k$ ($k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$).*

Dowód. (a) wynika bezpośrednio ze wzoru na splot.

Dla dowodu (b) zastosujemy Twierdzenie 14.4.1 do $\Omega := \mathbb{R}^n$, $X := K$ oraz do odwzorowania

$$\mathbb{R}^n \times K \ni (x, y) \overset{F}{\longmapsto} f(y) g(x - y).$$

Mamy $|D_x^\alpha F(x, y)| = |f(y) D^\alpha g(x-y)| \leqslant M_\alpha |f(y)|$, gdzie $M_\alpha := \max_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha g|$. Pozostaje zauważyć, że $M_\alpha |f| \in L^1(X, \mathbb{C}, \mathcal{L}^n)$. □

14.7. Regularyzacja

Definicja 14.7.1. Ustalmy funkcję $\Phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ taką, że:

- $\Phi \geqslant 0$,
- $\operatorname{supp} \Phi \subset \overline{\mathbb{B}}_n$,
- $\Phi(x_1 \dots, x_n) = \Phi(|x_1|, \dots, |x_n|)$,
- $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi d\mathcal{L}^n = 1$.

Każdą taką funkcję nazywamy *funkcją regularyzującą w $\mathbb{R}^n$*. Dla przykładu, niech

$$\Psi(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}}, & \text{jeżeli } \|x\| < 1 \\ 0, & \text{jeżeli } \|x\| \geqslant 1 \end{cases}, \quad c := \int_{\mathbb{B}_n} \Psi d\mathcal{L}^n.$$

Wtedy $\Phi := \frac{1}{c}\Psi$ jest funkcją regularyzującą.

Połóżmy

$$\Phi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \Phi(x/\varepsilon), \quad \varepsilon > 0, \ x \in \mathbb{R}^n,$$

i zauważmy, że na podstawie twierdzenia o zmianie zmiennych dostajemy

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\varepsilon \, d\mathcal{L}^n = 1.$$

Dla $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ($1 \leqslant p \leqslant +\infty$) zdefiniujmy *$\varepsilon$–regularyzację* funkcji f jako

$$f_\varepsilon := f * \Phi_\varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

([29]) Uwaga: Nie definiujemy w ten sposób zbioru $\operatorname{supp} f$, ale mówimy jedynie, co to znaczy, że $\operatorname{supp} f \subset A$.

Obserwacja 14.7.2. Wobec Twierdzenia 14.6.3 mamy:
- $f_\varepsilon \in L^p(\mathbb{R}^n)$,
- $\|f_\varepsilon\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^p}$.

Na podstawie twierdzenia o zmianie zmiennych dostajemy:

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{B}_n} f(x-\varepsilon y)\Phi(y)\, d\mathcal{L}^n(y), \quad \varepsilon > 0,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Twierdzenie 14.7.3. *Niech $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ($1 \leqslant p \leqslant \infty$) i niech $\operatorname{supp} f \subset K \subset\subset \mathbb{R}^n$ ([30]). Wtedy:*

(a) $f_\varepsilon \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} f_\varepsilon \subset K^{(\varepsilon)} := \bigcup_{x\in K} \overline{\mathbb{B}}(x,\varepsilon)$ ([31]);

(b) *jeżeli $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$, to $f_\varepsilon \longrightarrow f$ jednostajnie na $\mathbb{R}^n$ przy $\varepsilon \longrightarrow 0$;* ([32])

(c) *jeżeli $p < +\infty$, to $f_\varepsilon \xrightarrow{L^p} f$ przy $\varepsilon \longrightarrow 0$;*

(d) *jeżeli $f \in \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^n)$, to $D^\alpha(f_\varepsilon) = (D^\alpha f)_\varepsilon$ oraz $D^\alpha(f_\varepsilon) \longrightarrow D^\alpha f$ jednostajnie na $\mathbb{R}^n$ przy $\varepsilon \longrightarrow 0$ dla $|\alpha| \leqslant k$.*

Dowód. (a) wynika z Twierdzenia 14.6.6.

(b) Funkcja f jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}^n$. Mamy więc

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L^\infty} \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{B}_n} |f(x-\varepsilon y) - f(x)|\Phi(y)\, d\mathcal{L}^n(y) \leqslant \omega_f(\varepsilon) \longrightarrow 0, \ \text{ gdy } \varepsilon \longrightarrow 0,$$

gdzie — przypomnijmy —

$$\omega_f(\varepsilon) := \sup\{|f(x') - f(x'')| : \|x' - x''\| \leqslant \varepsilon\}.$$

(c) Niech $\eta > 0$. Na podstawie Twierdzenia 14.5.2 istnieje $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$ taka, że $\|g - f\|_{L^p} \leqslant \eta$. Na podstawie (b), mamy: $g_\varepsilon \xrightarrow{L^p} g$ gdy $\varepsilon \longrightarrow 0$. Dalej:

$$\begin{aligned}\|f_\varepsilon - f\|_{L^p} &\leqslant \|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_{L^p} + \|g_\varepsilon - g\|_{L^p} + \|g - f\|_{L^p} \\ &\leqslant \|f - g\|_{L^p} + \|g_\varepsilon - g\|_{L^p} + \eta \leqslant 2\eta + \|g_\varepsilon - g\|_{L^p} \leqslant 3\eta, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.\end{aligned}$$

(d) wynika z (b) i Twierdzenia 14.6.6(b). □

Jako natychmiastowy wniosek z Twierdzenia 14.5.2 i Twierdzenia 14.7.3 dostajemy następujący wynik.

Wniosek 14.7.4. *Dla dowolnego zbioru otwartego $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ i dla $1 \leqslant p < +\infty$ przestrzeń $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega, \mathbb{C})$ jest gęsta w $L^p(\Omega, \mathbb{C}, \mathcal{L}^n)$ w normie L^p.*

14.8. Rozkład jedności II

Wniosek 14.8.1. *Dla dowolnego zbioru otwartego $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ i dla dowolnego kompaktu $K \subset \Omega$ istnieje funkcja $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ taka, że $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$ i $\varphi = 1$ na K.*

Dowód. Jeżeli $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$, to niech $4r := \operatorname{dist}(K, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$. Dla $\Omega = \mathbb{R}^n$ ustalmy dowolne $r > 0$. Wystarczy wziąć

$$\varphi := \big(\chi_{K^{(2r)}}\big)_r$$

i skorzystać z Twierdzenia 14.7.3. Istotnie, $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, $\operatorname{supp}\varphi \subset (\operatorname{supp}\chi_{K^{(2r)}})^{(r)} \subset K^{(3r)} \subset \Omega$ oraz (wprost z definicji) $\varphi = 1$ na K. □

Twierdzenie 14.8.2 (Rozkład jedności)**.** *Niech $(\Omega_t)_{t\in T}$ będzie dowolną rodziną zbiorów otwartych w $\mathbb{R}^n$, $\Omega := \bigcup_{t\in T} \Omega_t$. Wtedy istnieje rodzina funkcji*

$$(\varphi_i)_{i\in I} \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n, [0,1]) \quad ([33])$$

taka, że:

([30]) W szczególności, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

([31]) Odnotujmy, że $K^{(\varepsilon)}$ jest zwarty.

([32]) W szczególności, wobec (a), $f_\varepsilon \xrightarrow{L^p} f$ gdy $\varepsilon \longrightarrow 0$ (przy dowolnym p).

([33]) Zwana *rozkładem jedności dla pokrycia* $(\Omega_t)_{t\in T}$.

- *istnieje odwzorowanie* $\tau : I \longrightarrow T$ *takie, że* $\operatorname{supp}\varphi_i \subset \Omega_{\tau(i)}$, $i \in I$, $\binom{34}{}$
- *rodzina* $(\operatorname{supp}\varphi_i)_{i\in I}$ *jest lokalnie skończona na* Ω $\binom{35}{}$,
- $\sum\limits_{i\in I} \varphi_i \equiv 1$ *na* Ω $\binom{36}{}$.

Dowód. Krok 1^0: Pokażemy, że

Dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset \Omega$ *istnieje rodzina*

$$(\psi_t)_{t\in T} \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n, [0,1])$$

taka, że:

- $\operatorname{supp}\psi_t \subset \Omega_t$, $t \in T$,
- $\psi_t \equiv 0$ *z wyjątkiem skończonej liczby indeksów* t,
- $\sum\limits_{t\in T} \psi_t = 1$ *na* K.

Istotnie, ponieważ K jest zwarty, zatem istnieje zbiór skończony $T_0 \subset T$ taki, że $K \subset \bigcup\limits_{t\in T_0} \Omega_t$. Zauważmy, że istnieją zbiory zwarte $K_t \subset \Omega_t$, $t \in T_0$, takie, że $K \subset \bigcup\limits_{t\in T_0} K_t$ $\binom{37}{}$. Na podstawie Wniosku 14.8.1, dla każdego $t \in T_0$ istnieje funkcja $\Theta_t \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_t, [0,1])$ taka, że $\Theta_t = 1$ na K_t $\binom{38}{}$. Niech $\Theta_0 := \sum\limits_{t\in T_0} \Theta_t$ i niech $U := \{x \in \Omega : \Theta_0(x) > 0\}$. Wtedy $K \subset U$. Korzystamy jeszcze raz z Wniosku 14.8.1 i dostajemy funkcję $\Theta \in \mathcal{C}_0^\infty(U, [0,1])$ taką, że $\Theta = 1$ na K. Teraz definiujemy:

$$\psi_t := \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } t \in T \setminus T_0 \\ \begin{cases} \Theta\frac{\Theta_t}{\Theta_0} & \text{na } U \\ 0 & \text{na } \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp}\Theta \end{cases}, & \text{jeżeli } t \in T_0 \end{cases}.$$

Widzimy, że $\psi_t \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_t, [0,1])$, $t \in T$, $\psi_t \equiv 0$ dla $t \notin T_0$ i $\sum\limits_{t\in T} \psi_t = 1$ na K.

Krok 2^0: Ustalmy ciąg kompaktów $(L_j)_{j=1}^\infty$ taki, że $L_j \subset \operatorname{int} L_{j+1} \subset \Omega$ i $\Omega = \bigcup\limits_{j=1}^\infty L_j$ $\binom{39}{}$. Niech $L_{-1} = L_0 := \varnothing$.

Dla każdego $j \in \mathbb{N}$ rozważamy kompakt $K_j := L_j \setminus \operatorname{int} L_{j-1}$ oraz jego pokrycie otwarte zbiorami $\Omega_{j,t} := (\operatorname{int} L_{j+1} \setminus L_{j-2}) \cap \Omega_t$, $t \in T$. Na podstawie Kroku 1^0, dla dowolnego $j \in \mathbb{N}$ istnieje podzbiór skończony $T_j \subset T$ oraz funkcje $\psi_{j,t} \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_{j,t}, [0,1])$, $t \in T_j$, takie, że $\sum\limits_{t\in T_j} \psi_{j,t} = 1$ na K_j. Ponieważ $\operatorname{supp}\psi_{j,t} \cap L_{j-2} = \varnothing$, zatem rodzina $\{\operatorname{supp}\psi_{j,t} : j \in \mathbb{N},\ t \in T_j\}$ jest lokalnie skończona na Ω. W szczególności, funkcja $\psi_0 := \sum\limits_{j=1}^\infty \sum\limits_{t\in T_j} \psi_{j,t}$ jest klasy $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Oczywiście $\psi_0 > 0$ na Ω. Teraz kładziemy $\varphi_{j,t} := \psi_{j,t}/\psi_0$, $(j,t) \in I := \{(j,t) : j \in \mathbb{N},\ t \in T_j\}$, $\tau(j,t) := t$. □

Twierdzenie 14.8.3 (Rozkład jedności)**.** *Niech* $(\Omega_t)_{t\in T}$ *będzie dowolną rodziną zbiorów otwartych w* $\mathbb{R}^n$, $\Omega := \bigcup\limits_{t\in T} \Omega_t$. *Wtedy istnieje rodzina funkcji* $(\varphi_t)_{t\in T} \subset \mathcal{C}^\infty(\Omega, [0,1])$ $\binom{40}{}$ *taka, że:*

- $\operatorname{supp}\varphi_t \subset \Omega_t$ $\binom{41}{}$, $t \in T$,

---

$\binom{34}{}$ Odwzorowanie τ nazywamy *odwzorowaniem wpisującym*. W trakcie dowodu zobaczymy, że można wybrać $I \subset \mathbb{N}\times T$ i $\tau(j,t) = t$.

$\binom{35}{}$ Tzn. każdy punkt $x \in \Omega$ ma otoczenie otwarte $U \subset \Omega$ takie, że zbiór $\{i \in I : \operatorname{supp}\varphi_i \cap U \neq \varnothing\}$ jest skończony.

$\binom{36}{}$ Wobec poprzedniej własności, dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^n$ istnieje jedynie skończona liczba $i \in I$ takich, że $\varphi_i(x) \neq 0$, więc $\sum\limits_{i\in I} \varphi_i(x)$ sprowadza się do sumy skończonej.

$\binom{37}{}$ Niech $K_{t,\varepsilon} := \{x \in \Omega_t \cap \overline{\mathbb{B}}(1/\varepsilon) : \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega_t) \geqslant \varepsilon\}$. Ponieważ $\bigcup\limits_{t\in T_C \text{ or } 13.20.10} \bigcup\limits_{\varepsilon>0} \operatorname{int} K_{t,\varepsilon} = \bigcup\limits_{t\in T_0} \Omega_t \supset K$, zatem istnieje $\varepsilon_0 > 0$ takie, że możemy przyjąć $K_t := K_{t,\varepsilon_0}$.

$\binom{38}{}$ Tu i dalej stosujemy oczywiste utożsamienie: $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dla dowolnego zbioru otwartego $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

$\binom{39}{}$ Niech $L_j := \{x \in \Omega \cap \overline{\mathbb{B}}(j) : \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) \geqslant 1/j\}$. Oczywiście L_j jest zwarty oraz $L_j \subset \{x \in \Omega \cap \mathbb{B}(j+1) : \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) > 1/(j+1)\} \subset \operatorname{int} L_{j+1}$. Ponadto, $\operatorname{int} L_j \nearrow \Omega$.

$\binom{40}{}$ Zwana również *rozkładem jedności dla pokrycia* $(\Omega_t)_{t\in T}$.

$\binom{41}{}$ $\operatorname{supp}\varphi_t$ jest relatywnie domkniętym podzbiorem Ω.

- *rodzina* $(\operatorname{supp}\varphi_t)_{t\in T}$ *jest lokalnie skończona na* Ω,
- $\sum\limits_{t\in T}\varphi_t\equiv 1$ *na* Ω.

Dowód. Zachowujemy oznaczenia z poprzedniego dowodu. Niech $\varphi_t := \sum\limits_{j=1}^{\infty}\varphi_{j,t}$, $t\in T$. Oczywiście $\varphi_t\in\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ i $\sum\limits_{t\in T}\varphi_t\equiv 1$ w Ω. Pozostaje zbadać, gdzie leży $\operatorname{supp}\varphi_t$. Oczywiście,

$$\{x\in\Omega:\varphi_t(x)\neq 0\}\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}\operatorname{supp}\varphi_{j,t}=:F_t\subset\Omega_t.$$

Ponieważ rodzina $(\operatorname{supp}\varphi_{j,t})_{j=1}^{\infty}$ jest lokalnie skończona na Ω zbiór F_t jest domknięty w Ω, a stąd $\operatorname{supp}\varphi_t\subset F_t\subset\Omega_t$. □

Wniosek 14.8.4. *Niech $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym, niech $F\subset\Omega$ będzie zbiorem domkniętym w Ω i niech $U\subset\Omega$ będzie otwartym otoczeniem F. Wtedy istnieje funkcja $\varphi\in\mathcal{C}^\infty(\Omega,[0,1])$ taka, że* $\operatorname{supp}\varphi\subset U$ *i* $\varphi=1$ *w pewnym otoczeniu zbioru F.*

Dowód. Stosujemy Twierdzenie 14.8.3 do pokrycia zbioru Ω złożonego z dwóch zbiorów $\Omega_1:=U$ i $\Omega_2:=\Omega\setminus F$. Niech φ_1,φ_2 będzie $\mathcal{C}^\infty$ rozkładem jedności przyporządkowanym temu pokryciu: $\varphi_j\in\mathcal{C}^\infty(\Omega,[0,1])$, $\operatorname{supp}\varphi_j\subset\Omega_j$, $j=1,2$, $\varphi_1+\varphi_2\equiv 1$. Niech $\varphi:=\varphi_1$. Wtedy oczywiście $\varphi\in\mathcal{C}^\infty(\Omega,[0,1])$, $\operatorname{supp}\varphi\subset U$. Ponadto, $\varphi=1$ na zbiorze $\Omega\setminus\operatorname{supp}\varphi_2$, który jest otoczeniem F. □

Wniosek 14.8.5. *Niech $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i niech $F_0,F_1\subset\Omega$ będą zbiorami domkniętymi w Ω i takimi, że $F_0\cap F_1=\varnothing$. Wtedy istnieje funkcja $\varphi\in\mathcal{C}^\infty(\Omega,[0,1])$ taka, że $\varphi=j$ w pewnym otoczeniu zbioru F_j, $j=0,1$.*

Dowód. Stosujemy Wniosek 14.8.4 do zbioru domkniętego $F:=F_1$ i jego otoczenia $U:=\Omega\setminus F_0$. Niech $\varphi\in\mathcal{C}^\infty(\Omega,[0,1])$ będzie funkcją taką, że $\operatorname{supp}\varphi\subset U$ i $\varphi=1$ w pewnym otoczeniu zbioru F_1. Wtedy $\varphi=0$ na zbiorze $\Omega\setminus\operatorname{supp}\varphi$, który jest otoczeniem F_0. □

14.9. Miara i całka Lebesgue'a na podrozmaitościach w $\mathbb{R}^n$

Definicja 14.9.1. Niech $M\in\mathcal{M}_d^1(\mathbb{R}^n)$.

- Jeżeli $d=0$, to przez miarę Lebesgue'a na M rozumiemy miarę liczącą. Kładziemy $\mathcal{L}_M:=\mathcal{P}(M)$ i $\mathcal{L}^M:=$ miara licząca.
- W przypadku, gdy $d=n$ podrozmaitość M jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^n$. Wtedy przyjmujemy $\mathcal{L}_M:=\mathcal{L}_n|_M$, $\mathcal{L}^M:=\mathcal{L}^n|_{\mathcal{L}_M}$.
- Pozostaje przypadek $1\leqslant d\leqslant n-1$. Zdefiniujmy $\mathcal{L}_M$ jako rodzinę wszystkich $A\subset M$ takich, że dla dowolnej lokalnej parametryzacji $p:P\longrightarrow U$ mamy $p^{-1}(A)\in\mathcal{L}_d$. Jest rzeczą widoczną, że $\mathcal{L}_M$ jest σ–algebrą oraz, że $\mathcal{B}(M)\subset\mathcal{L}_M$.

Twierdzenie 14.9.2. *Niech $(p_i:P_i\longrightarrow U_i)_{i\in I}$ będzie dowolnym, co najwyżej przeliczalnym, układem lokalnych parametryzacji takim, że* $\bigcup\limits_{i\in I}U_i=M$ [42].

(a) *Dla $A\subset M$ mamy: $A\in\mathcal{L}_M\iff\forall_{i\in I}:p_i^{-1}(A)\in\mathcal{L}_d$.*
(b) *Dla $f:M\longrightarrow Y$, gdzie Y jest przestrzenią topologiczną, następujące warunki są równoważne:*
  (i) $f\in\mathcal{M}(M,Y,\mathcal{L}_M)$;
  (ii) $f\circ p\in\mathcal{M}(P,Y,\mathcal{L}_d)$ *dla dowolnej lokalnej parametryzacji* $p:P\longrightarrow U$;
  (iii) $\forall_{i\in I}:f\circ p_i\in\mathcal{M}(P_i,Y,\mathcal{L}_d)$.

Dowód. (a) Niech $p:P\longrightarrow U$ będzie dowolną parametryzacją i niech $\varphi_i:=p^{-1}\circ p_i:p_i^{-1}(U\cap U_i)\longrightarrow p^{-1}(U\cap U_i)$, $i\in I$. Wtedy $p^{-1}(A)=p^{-1}(A\cap\bigcup\limits_{i\in I}U_i)=\bigcup\limits_{i\in I}p^{-1}(A\cap U_i)=\bigcup\limits_{i\in I}\varphi_i(p_i^{-1}(A)\cap p_i^{-1}(U))\in\mathcal{L}_d$ na podstawie założeń i Twierdzenia 13.10.6(c).

(b) (i) $\Longrightarrow$ (ii): $(f\circ p)^{-1}(\Omega)=p^{-1}(f^{-1}(\Omega))$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): oczywiste.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): $p_i^{-1}(f^{-1}(\Omega))=(f\circ p_i)^{-1}(\Omega)$ i korzystamy z (a). □

[42] Rodzina taka istnieje na podstawie twierdzenia Lindelöfa — zob. dowód Twierdzenia 14.9.5.

Dla odwzorowania różniczkowalnego $f = (f_1, \dots, f_n) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ gdzie Ω jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^d$, $d \leqslant n$, niech $J_d f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$,

$$J_d f := \Big(\sum_{I \in \Lambda_d^n} \Big| \frac{\partial(f_{i_1}, \dots, f_{i_d})}{\partial(t_1, \dots, t_d)} \Big|^2 \Big)^{1/2},$$

gdzie

$$\frac{\partial(f_{i_1}, \dots, f_{i_d})}{\partial(t_1, \dots, t_d)} := \det \Big[\frac{\partial f_{i_j}}{\partial t_k} \Big]_{j,k=1,\dots,d},$$

$$\Lambda_d^n := \{ I = (i_1, \dots, i_d) : 1 \leqslant i_1 < \dots < i_d \leqslant n \}.$$

Zauważmy, że dla $d = n$ symbol $J_d f$ pokrywa się z wprowadzonym poprzednio modułem wyznacznika macierzy Jacobiego $|f'|$. Odnotujmy również, że $J_d f(t_0) > 0 \iff \operatorname{rank} f'(t_0) = d$.

Obserwacja 14.9.3. Jeżeli $\varphi : G \longrightarrow \Omega$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ są odwzorowaniami różniczkowalnymi, gdzie G i Ω są podzbiorami otwartymi w $\mathbb{R}^d$ i $\varphi(G) \subset \Omega$, to

$$J_d(f \circ \varphi) = ((J_d f) \circ \varphi) \cdot |\varphi'|.$$

Twierdzenie 14.9.4. *Istnieje dokładnie jedna miara $\mathcal{L}^M : \mathcal{L}_M \longrightarrow [0, +\infty]$ taka, że dla dowolnej lokalnej parametryzacji $p : P \longrightarrow U$ mamy:*

$$\mathcal{L}^M(A \cap U) = \int_{p^{-1}(A)} J_d p \, d\mathcal{L}^d, \quad A \in \mathcal{L}_M. \tag{*}$$

Ponadto miara ta ma poniższe własności.

(a) *Jest zupełna, $\mathcal{B}$–regularna (Definicja 13.7.1) oraz istnieje ciąg $(\Omega_j)_{j=1}^\infty$ zbiorów otwartych i relatywnie zwartych w M, dla którego $M = \bigcup_{j=1}^\infty \Omega_j$ i $\mathcal{L}^M(\Omega_j) < +\infty$, $j \in \mathbb{N}$ ([43]). W szczególności, dla miary $\mathcal{L}^M$ zachodzą warunki* (R1), (R2), (R3), (R4) *z Twierdzenia 13.7.5.*

(b) *Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{M}^+(M, \mathcal{L}_M)$ oraz dla dowolnej parametryzacji lokalnej $p : P \longrightarrow U$ mamy:*

$$\int_U f d\mathcal{L}^M = \int_P (f \circ p) J_d p \, d\mathcal{L}^d. \tag{**}$$

(c) *Dla dowolnej funkcji $f \in L^1(M, \mathbb{C}, \mathcal{L}^M)$ oraz dla dowolnej parametryzacji lokalnej $p : P \longrightarrow U$ mamy: $(f \circ p) J_d p \in L^1(P, \mathbb{C}, \mathcal{L}^d)$ oraz zachodzi* (**).

Miara $\mathcal{L}^M$ nosi nazwę *miary Lebesgue'a na M*.

Dowód. Ustalmy przeliczalną rodzinę lokalnych parametryzacji $(p_j : P_j \longrightarrow U_j)_{j=1}^\infty$ taką, że $\bigcup_{j=1}^\infty U_j = M$. Niech $B_1 := U_1$, $B_j := U_j \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_{j-1})$, $j \geqslant 2$. Oczywiście $B_j \in \mathcal{B}(M) \subset \mathcal{L}_M$, $j \in \mathbb{N}$, oraz $\bigcup_{j=1}^\infty B_j = M$. Teraz dla zbioru $A \in \mathcal{L}_M$ kładziemy:

$$\mathcal{L}^M(A) := \sum_{j=1}^\infty \int_{p_j^{-1}(A \cap B_j)} J_d p_j \, d\mathcal{L}^d.$$

Udowodnimy, że jest to miara. Niech $(A_k)_{k=1}^\infty$ będzie ciągiem parami rozłącznych zbiorów mierzalnych. Wtedy:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^M\Big(\bigcup_{k=1}^\infty A_k \Big) &= \sum_{j=1}^\infty \int_{p_j^{-1}((\bigcup_{k=1}^\infty A_k) \cap B_j)} J_d p_j \, d\mathcal{L}^d = \sum_{j=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty \int_{p_j^{-1}(A_k \cap B_j)} J_d p_j \, d\mathcal{L}^d \\ &= \sum_{k=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty \int_{p_j^{-1}(A_k \cap B_j)} J_d p_j \, d\mathcal{L}^d = \sum_{k=1}^\infty \mathcal{L}^M(A_k). \end{aligned}$$

([43]) Por. Twierdzenie 13.7.5.

Teraz sprawdzimy wzór (*). Ustalmy lokalną parametryzację $p : P \longrightarrow U$ i niech $\varphi_j := p^{-1} \circ p_j : p_j^{-1}(U \cap U_j) \longrightarrow p^{-1}(U \cap U_j)$, $\psi_j := \varphi_j^{-1}$, $j \in \mathbb{N}$. Wtedy dla $A \in \mathcal{L}_M$, $A \subset U$, korzystając z twierdzenia o zmianie zmiennych i z Obserwacji 14.9.3, mamy:

$$\begin{aligned}\int_{p^{-1}(A)} J_d p \, d\mathcal{L}^d &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{p^{-1}(A\cap B_j)} J_d p \, d\mathcal{L}^d = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\varphi_j(p_j^{-1}(A\cap B_j\cap U))} J_d(p_j \circ \psi_j) \, d\mathcal{L}^d \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{p_j^{-1}(A\cap B_j)} ((J_d(p_j \circ \psi_j)) \circ \varphi_j) \cdot |\varphi_j'| \, d\mathcal{L}^d = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{p_j^{-1}(A\cap B_j)} J_d p_j \, d\mathcal{L}^d = \mathcal{L}^M(A).\end{aligned}$$

Niech $\mu : \mathcal{L}_M \longrightarrow [0, +\infty]$ będzie inną miarą spełniającą (*). Wtedy dla $A \in \mathcal{L}_M$ mamy:

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A \cap B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{p_j^{-1}(A\cap B_j)} J_d p_j \, d\mathcal{L}^d = \mathcal{L}^M(A),$$

a więc $\mathcal{L}^M$ jest jedyna.

(a) Zupełność. Niech $B \subset A \in \mathcal{L}_M$ i $\mathcal{L}^M(A) = 0$. Wtedy, na podstawie (*), dla dowolnej parametryzacji $p : P \longrightarrow U$, zbiór $p^{-1}(A)$ jest miary zero w $\mathbb{R}^d$. Ponieważ $p^{-1}(B) \subset p^{-1}(A)$, a $\mathcal{L}^d$ jest zupełna, więc $p^{-1}(B) \in \mathcal{L}_d$. Oznacza to, że $B \in \mathcal{L}_M$.

Regularność. Niech $A \in \mathcal{L}_M$. Ponieważ $\mathcal{L}^d$ jest $\mathcal{B}$–regularna (Twierdzenie 13.7.5), więc dla dowolnego j istnieje zbiór $C_j \subset P_j$ typu $\mathcal{G}_\delta$ oraz zbiór $Z_j \subset \mathbb{R}^d$ miary zero takie, że $p_j^{-1}(A \cap B_j) = C_j \setminus Z_j$. Niech $\widehat{A} := \bigcup_{j=1}^{\infty} p_j(C_j)$. Oczywiście $A \subset \widehat{A}$, $\widehat{A}$ jest borelowski oraz

$$\mathcal{L}^M(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{p_j^{-1}(A\cap B_j)} J_d p_j \, d\mathcal{L}^d = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{C_j} J_d p_j \, d\mathcal{L}^d = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^M(p_j(C_j)) \geqslant \mathcal{L}^M(\widehat{A}),$$

skąd wynika, że $\mathcal{L}^M(\widehat{A}) = \mathcal{L}^M(A)$.

Przechodzimy do sprawdzenia ostatniego warunku. Połóżmy

$$P_{j,k} := \Big\{ t \in P_j \cap \mathbb{B}(k) : \operatorname{dist}(t, \mathbb{R}^d \setminus P_j) > \frac{1}{k} \Big\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

i niech

$$\Omega_N := \bigcup_{j=1}^{N} p_j(P_{j,N}), \quad N \in \mathbb{N}.$$

Widać, że Ω_N jest otwarty i relatywnie zwarty w M, $\Omega_N \subset \Omega_{N+1}$, $\Omega_N \nearrow M$ oraz

$$\mathcal{L}^M(\Omega_N) \leqslant \sum_{j=1}^{N} \int_{P_{j,N}} J_d p_j \, d\mathcal{L}^d < +\infty.$$

(b) Dla $f = \chi_A$ wynik sprowadza się do (*). Dalej klasycznie: najpierw dla $\mathcal{M}_0^+(M, \mathcal{L}_M)$, a następnie przejście graniczne.

(c) Wystarczy rozważyć przypadek rzeczywisty. Całkowalność otrzymujemy z (b) zastosowanego do $|f|$. Wzór otrzymujemy z (b) zastosowanego do $f_\pm$. □

Twierdzenie 14.9.5. *Niech M' będzie d'–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$ w $\mathbb{R}^n$ taką, że $M' \subset M$. Jeżeli $d' < d \leqslant n$, to $\mathcal{L}^M(M') = 0$.*

Dowód. Przypadek $d' = 0$ jest oczywisty. Niech $1 \leqslant d' < d \leqslant n$. Na podstawie Lematu 11.1.21, dla dowolnego punktu $a \in M'$ istnieje lokalna parametryzacja $p_a : P_a \longrightarrow U_a$, $a \in U_a$, taka, że $P_a = P_a' \times P_a'' \subset \mathbb{R}^{d'} \times \mathbb{R}^{d-d'} = \mathbb{R}^d$ jest otwartą kostką i $p_a(P_a' \times \{0\}^{d-d'}) = M' \cap U_a$. W szczególności, $M' \cap U_a \in \mathcal{L}_M$. Na podstawie twierdzenia Lindelöfa z pokrycia $(U_a)_{a\in M}$ można wybrać pokrycie przeliczalne $(U_{a_j})_{j=1}^{\infty}$ rozmaitości M'. Dla uproszczenia, niech

$$(p_{a_j} : P_{a_j} \longrightarrow U_{a_j}) = (p_j : P_j \longrightarrow U_j).$$

Wtedy

$$\mathcal{L}^M(M') \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^M(M' \cap U_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{p_j^{-1}(M' \cap U_j)} J_d p_j \, d\mathcal{L}^d \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \int_{P'_j \times \{0\}^{d-d'}} J_d p_j \, d\mathcal{L}^d = 0. \qquad \square$$

ROZDZIAŁ 15

Twierdzenie Stokesa

15.1. Formy różniczkowe

Kontynujemy podrozdział 12.7. Następną ważną operacją jest *operacja podstawiania (zmiany zmiennych).*

Definicja 15.1.1. Niech $U \in \operatorname{top}\mathbb{R}^m$ i niech $f \in \mathcal{D}(U,\Omega)$. Definiujemy operator $f^* : \mathcal{F}_{(r)}(\Omega,F) \longrightarrow \mathcal{F}_{(r)}(U,F)$:

- jeżeli $r=0$, to kładziemy $f^*(u) = u\circ f$ $\binom{1}{}$;
- jeżeli $r \geqslant 1$, $u = \sum\limits_{I\in\Lambda^n_r} u_I dx_I$, to $f^*(u) := \sum\limits_{I\in\Lambda^n_r}(u_I\circ f)df_I = \sum\limits_{J\in\Lambda^m_r}\big(\sum\limits_{I\in\Lambda^n_r}(u_I\circ f)\frac{\partial(f_{i_1},\dots,f_{i_r})}{\partial(t_{j_1},\dots,t_{j_r})}\big)dt_J$,

gdzie $df_I := df_{i_1}\wedge\dots\wedge df_{i_r}$.

Obserwacja 15.1.2. (a) Gdy $m=r$, to $f^*(u) = \big(\sum\limits_{I\in\Lambda^n_r}(u_I\circ f)\frac{\partial(f_{i_1},\dots,f_{i_r})}{\partial(t_1,\dots,t_r)}\big)dt_1\wedge\dots\wedge dt_r$.

(b) Gdy $m=r=n$, to $f^*(\varphi dx_1\wedge\dots\wedge dx_r) = (\varphi\circ f)(\det f')dt_1\wedge\dots\wedge dt_r$.

Twierdzenie 15.1.3. (a) *Odwzorowanie $f^* : \mathcal{F}_{(r)}(\Omega,F)\longrightarrow\mathcal{F}_{(r)}(U,F)$ jest liniowe. Ponadto,*

- *jeżeli $f\in\mathcal{D}^{k+1}(U,\Omega)$, to $f^*(\mathcal{F}^k_{(r)}(\Omega,F))\subset\mathcal{F}^k_{(r)}(U,F)$,*
- *jeżeli $f\in\mathcal{C}^{k+1}(U,\mathbb{R}^n)$, to $f^*(\mathcal{C}^k_{(r)}(\Omega,F))\subset\mathcal{C}^k_{(r)}(U,F)$.*

(b) $f^*(\varphi dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_r}) = (\varphi\circ f)df_{i_1}\wedge\dots\wedge df_{i_r}$ *dla dowolnych* $i_1,\dots,i_r\in\{1,\dots,n\}$.

(c) *Jeżeli $F=\mathbb{R}$, to $f^*(u\wedge v) = f^*(u)\wedge f^*(v)$.*

(d) $f^*\circ d = d\circ f^*$ *na* $\mathcal{F}'_{(0)}(\Omega,F)$.

(e) *Jeżeli $f\in\mathcal{D}''(U,\Omega)$, to $f^*\circ d = d\circ f^*$ na $\mathcal{F}'_{(r)}(\Omega,F)$ dla dowolnego r* $\binom{2}{}$.

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{F}'_{(r)}(\Omega,F) & \xrightarrow{d} & \mathcal{F}_{(r+1)}(\Omega,F)\\ \downarrow{\scriptstyle f^*} & & \downarrow{\scriptstyle f^*}\\ \mathcal{F}'_{(r)}(U,F) & \xrightarrow{d} & \mathcal{F}_{(r+1)}(U,F)\end{array}$$

(f) *Jeżeli $V\in\operatorname{top}\mathbb{R}^p$ i $g\in\mathcal{D}(V,U)$, to $(f\circ g)^* = g^*\circ f^*$.*

Dowód. (a), (b), i (c) są elementarne.

(d) Na podstawie wzoru na różniczkowanie złożenia mamy:

$$d(f^*(u)) = d(u\circ f) = \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n\Big(\frac{\partial u}{\partial x_j}\circ f\Big)\frac{\partial f_j}{\partial t_i}dt_i = \sum_{j=1}^n\Big(\frac{\partial u}{\partial x_j}\circ f\Big)df_j = f^*(du).$$

(e) Wystarczy sprawdzić wzór dla form postaci φdx_I, gdzie $\varphi\in\mathcal{D}'(\Omega,F)$. Wobec Twierdzenia 12.7.10 mamy $d(f^*(\varphi dx_I)) = d((\varphi\circ f)df_I) = d(\varphi\circ f)\wedge df_I = f^*(d\varphi)\wedge df_I = f^*(d(\varphi dx_I))$ $\binom{3}{}$.

(f) $g^*(f^*(\varphi dx_I)) = g^*((\varphi\circ f)df_I) = ((\varphi\circ f)\circ g)g^*(df_I) \overset{(c,d)}{=} (\varphi\circ(f\circ g))d(f\circ g)_I = (f\circ g)^*(\varphi dx_I)$. □

Definicja 15.1.4. Powiemy, że obszar $D\subset\mathbb{R}^n$ jest *różniczkowo ściągalny w klasie $\mathcal{C}^k$ do punktu a*, jeżeli istnieje otoczenie otwarte $\Omega\supset[0,1]\times D$ oraz odwzorowanie $h:\Omega\longrightarrow D$ klasy $\mathcal{C}^k$ takie, że $h(0,x)=x$, $h(1,x)=a$, $x\in D$.

$\binom{1}{}$ Dla $r=0$ różniczkowalność f nie jest istotna.

$\binom{2}{}$ Uwaga: we wzorze każda z operacji f^*, d, d, f^* jest wykonywana na innej przestrzeni.

$\binom{3}{}$ Tu jest istotne, że f jest dwukrotnie różniczkowalne i dlatego $d(df_I)=0$.

Zauważmy, że każdy obszar gwiaździsty względem a jest ściągalny różniczkowo w klasie $\mathcal{C}^\infty$. Istotnie, wystarczy wziąć $h(t,x)=(1-t)x+ta$, $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, $\Omega:=h^{-1}(D)$.

Twierdzenie 15.1.5 (Lemat Poincarégo [4]). *Jeżeli obszar $D\subset\mathbb{R}^n$ jest różniczkowo ściągalny (do punktu a) w klasie $\mathcal{C}^{k+1}$ przy pomocy odwzorowania $h:\Omega\longrightarrow D$ ($k\geqslant 1$), to dla dowolnego $r\in\mathbb{N}$ i dla dowolnej formy $u\in\mathcal{C}^k_{(r)}(D)$ takiej, że $du=0$ istnieje $v\in\mathcal{C}^k_{(r-1)}(D)$ taka, że $dv=u$.*

Obserwacja 15.1.6. Twierdzenie 12.4.2, to przypadek, gdy D jest gwiaździsty i $r=k=1$. Przypomnijmy również Przykład 12.4.3.

Dowód Twierdzenia 15.1.5. Dowód polega na znalezieniu operatorów liniowych

$$\delta=\delta_{s,\ell}:\mathcal{C}^\ell_{(s+1)}(\Omega)\longrightarrow\mathcal{C}^\ell_{(s)}(D),\quad s,\ell\geqslant 0,$$

takich, że na $\mathcal{C}^\ell_{(s)}(\Omega)$, $s,\ell\geqslant 1$, mamy:

$$\delta\circ d+d\circ\delta=\sigma_1^*-\sigma_0^*,\ \text{gdzie}\ \sigma_j:D\longrightarrow\Omega,\ \sigma_j(x):=(j,x),\ j\in\{0,1\},\ x\in\mathbb{R}^n. \tag{†}$$

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{C}^\ell_{(s)}(\Omega) & \xrightarrow{\ d\ } & \mathcal{C}^{\ell-1}_{(s+1)}(\Omega)\\ \downarrow\delta & \searrow^{\sigma_1^*-\sigma_0^*} & \downarrow\delta\\ \mathcal{C}^\ell_{(s-1)}(D) & \xrightarrow{\ d\ } & \mathcal{C}^{\ell-1}_{(s)}(D)\end{array}$$

Przypuśćmy na chwilę, że mamy już operatory δ. Weźmy $v:=-\delta(h^*(u))$. Wtedy:

$$\begin{aligned}dv&=-d(\delta(h^*(u)))=-\sigma_1^*(h^*(u))+\sigma_0^*(h^*(u))+\delta(d(h^*(u)))\\&=-(h\circ\sigma_1)^*(u)+(h\circ\sigma_0)^*(u)+\delta(h^*(du))=-(\mathrm{const})^*(u)+\mathrm{id}^*(u)=u.\end{aligned}$$

Przechodzimy do konstrukcji δ. Oznaczmy zmienne w $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ przez (t,x). Niech

$$w=\sum_{I\in\Lambda^n_s}w_I dt\wedge dx_I+\sum_{J\in\Lambda^n_{s+1}}w'_J dx_J\in\mathcal{C}^\ell_{(s+1)}(\Omega).$$

Kładziemy $\delta(w):=\sum\limits_{I\in\Lambda^n_s}\big(\int_0^1 w_I(t,\cdot)dt\big)dx_I$. Na podstawie twierdzenia o funkcjach danych całką $\delta(w)\in\mathcal{C}^\ell_{(s)}(D)$. Widać, że operator δ jest liniowy. Pozostaje sprawdzić wzór (†). Wobec liniowości wystarczy sprawdzić wzór (†) dla form następujących dwóch typów:

1^0: $w=\varphi dx_J$, gdzie $J\in\Lambda^n_{s+1}$. Wtedy $\delta(w)=0$ oraz

$$\delta(dw)=\delta\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial t}dt\wedge dx_J+\ldots\Big)=\Big(\int_0^1\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,\cdot)dt\Big)dx_J=(\varphi(1,\cdot)-\varphi(0,\cdot))dx_J=\sigma_1^*(w)-\sigma_0^*(w).$$

2^0: $w=\varphi dt\wedge dx_I$, gdzie $I\in\Lambda^n_s$. Wtedy $\delta(w)=\big(\int_0^1\varphi(t,\cdot)dt\big)dx_I$, $\sigma_j^*(w)=0$, $j=0,1$, oraz

$$\begin{aligned}\delta(dw)+d(\delta(w))&=\delta\Big(\sum_{j=1}^n\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}dx_j\wedge dt\wedge dx_I\Big)+\sum_{j=1}^n\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\int_0^1\varphi(t,\cdot)dt\Big)dx_j\wedge dx_I\\&=-\sum_{j=1}^n\Big(\int_0^1\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(t,\cdot)dt\Big)dx_j\wedge dx_I+\sum_{j=1}^n\Big(\int_0^1\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(t,\cdot)dt\Big)dx_j\wedge dx_I=0.\end{aligned}$$

□

15.2. Całkowanie form różniczkowych

Definicja 15.2.1. Załóżmy, że $M\in\mathcal{M}^1_d(\mathbb{R}^n)$ jest orientowalna i niech O będzie ustaloną orientacją M. Niech $M\subset\Omega\in\operatorname{top}\mathbb{R}^n$ i niech $u\in\mathcal{F}_{(d)}(\Omega)$. Zakładamy, że u jest *mierzalna na* M, tzn. $u_I\in\mathcal{M}(M,\mathcal{L}_M)$ dla dowolnego I. Mówimy, że forma (funkcja) u jest *całkowalna na* M *przy orientacji* O, jeżeli:

- Dla $d=0$: $\sum\limits_{x\in M}|u(x)|<+\infty$ [5]. Kładziemy wtedy $\int_{M,O}u:=\sum\limits_{x\in M}O(x)u(x)$.

[4] Por. Twierdzenie 12.4.2.
[5] Przypomnijmy, że $\#M\leqslant\aleph_0$.

• Dla $d \geqslant 1$ postępujemy następująco. Dla dowolnej lokalnej parametryzacji $p : P \longrightarrow U$ zgodnej z O rozważamy formę $p^*(u) \in \mathcal{F}_{(d)}(P)$. Ponieważ jest to forma rzędu d, więc zgodnie z naszymi umowami, utożsamiamy ją z funkcją na P, tzn. $p^*(u) = p^*(u)dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_d$ ([6]). Przypomnijmy, że

$$p^*(u) = \sum_{I \in \Lambda_d^n} (u_I \circ p) \frac{\partial(p_{i_1}, \ldots, p_{i_d})}{\partial(t_1, \ldots, t_d)}.$$

Połóżmy $[u] := \frac{p^*(u)}{J_d p} \circ p^{-1} : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Oznaczenie to ma charakter roboczy. Zauważmy, że jeżeli $q : Q \longrightarrow U$ jest jakąś inną parametryzacją zgodną z O, to $q = p \circ \varphi$, gdzie $\det \varphi'(t) > 0$, $t \in Q$. Na podstawie Twierdzenia 15.1.3(f) mamy: $q^*(u) = \varphi^*(p^*(u)) = (\det \varphi')(p^*(u) \circ \varphi)$. Stąd:

$$\frac{q^*(u)}{J_d q} \circ q^{-1} = \frac{(\det \varphi')(p^*(u) \circ \varphi)}{((J_d p) \circ \varphi)|\det \varphi'|} \circ \varphi^{-1} \circ p^{-1} = \frac{p^*(u)}{J_d p} \circ p^{-1},$$

a więc funkcja $[u]$ nie zależy od parametryzacji zgodnej z O i może być w związku z tym określona na całym M. Zauważmy, że $[u]$ jest mierzalna na M.

Powiemy, że forma u jest *całkowalna na M przy orientacji O*, jeżeli $[u] \in L^1(M, \mathcal{L}^M)$. Piszemy wtedy $u \in L^1(M, O)$ i definiujemy $\int_{M,O} u := \int_M [u] d\mathcal{L}^M$.

Oczywiście $L^1(M, O)$ jest przestrzenią wektorową, zaś operacja $L^1(M, O) \ni u \longmapsto \int_{M,O} u \in \mathbb{R}$ jest liniowa.

Twierdzenie 15.2.2. (a) $u \in L^1(M, O) \iff u \in L^1(M, -O)$. *Ponadto,* $\int_{M,-O} u = -\int_{M,O} u$.

(b) $|[u]| \leqslant \|u\|$, *gdzie* $\|u\|(x) = \|u(x)\| = \big(\sum_I{}' u_I^2(x)\big)^{1/2}$. *W szczególności, jeśli* $\|u\| \in L^1(M, \mathcal{L}^M)$, *to* $u \in \mathcal{L}^1(M, O)$ *oraz* $\big|\int_{M,O} u\big| \leqslant \int_M \|u\| d\mathcal{L}^M$.

(c) *Jeżeli* $u \in L^1(M, O)$, *to dla dowolnej parametryzacji zgodnej z orientacją* $p : P \longrightarrow U$ *mamy* $\int_{U,O} u = \int_P p^*(u) d\mathcal{L}^d$.

Dowód. (a) $[u]$ zmienia znak przy zmianie orientacji na przeciwną.

(b) Dla lokalnej parametryzacji $p : P \longrightarrow U$ zgodnej z orientacją, korzystając z nierówności Schwarza, mamy:

$$|[u]|^2 \circ p = \frac{\big|\sum_I{}'(u_I \circ p)\frac{\partial(p_{i_1},\ldots,p_{i_d})}{\partial(t_1,\ldots,t_d)}\big|^2}{\sum_I{}'\big(\frac{\partial(p_{i_1},\ldots,p_{i_d})}{\partial(t_1,\ldots,t_d)}\big)^2} \leqslant \sum_I{}'(u_I \circ p)^2 = \|u\|^2 \circ p.$$

(c) jest elementarne. □

Przykład 15.2.3. (a) Dla $d = 1$, jeżeli $\boldsymbol{s} : M \longrightarrow \mathbb{S}_{n-1}$ jest orientującym polem wektorów stycznych, to $[u] = \langle \vec{u}, \boldsymbol{s} \rangle$, gdzie formę $u = \sum_{j=1}^n u_j dx_j$ utożsamiamy z polem wektorowym $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)$. W szczególności, $\int_{M,O} u = \int_M \langle \vec{u}, \boldsymbol{s} \rangle d\mathcal{L}^M$.

Istotnie, w lokalnej parametryzacji $p : P \longrightarrow U$ zgodnej z orientacją mamy $\langle \vec{u}, \boldsymbol{s} \rangle \circ p = \langle \vec{u} \circ p, \frac{p'}{\|p'\|} \rangle = [u] \circ p$.

(b) Dla $d = n - 1$, jeżeli $\boldsymbol{n} : M \longrightarrow \mathbb{S}_{n-1}$ jest orientującym polem wektorów normalnych, to $[u] = \langle \vec{u}, \boldsymbol{n} \rangle$, gdzie formę $u = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} u_k dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{k-1} \wedge dx_{k+1} \wedge \cdots \wedge dx_n$ utożsamiamy z polem wektorowym $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)$. W szczególności, $\int_{M,O} u = \int_M \langle \vec{u}, \boldsymbol{n} \rangle d\mathcal{L}^M$.

Istotnie, w lokalnej parametryzacji zgodnej z orientacją $p : P \longrightarrow U$ mamy:

$$\langle \vec{u}, \boldsymbol{n} \rangle \circ p = \sum_{k=1}^n (u_k \circ p)(\boldsymbol{n}_k \circ p) = \frac{1}{J_d p} \sum_{k=1}^n (u_k \circ p)(-1)^{k-1} \frac{\partial(p_1, \ldots, p_{k-1}, p_{k+1}, \ldots, p_n)}{\partial(t_1, \ldots, t_{n-1})} = \frac{p^*(u)}{J_d p} = [u] \circ p.$$

([6]) Zwracamy uwagę na niegroźną kolizję oznaczeń.

15.3. Twierdzenie Stokesa

Załóżmy, że:

(1) $M \subset \mathbb{R}^n$ jest d–wymiarową orientowalną podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$, $1 \leqslant d \leqslant n$,
(2) $D \subset M$ jest obszarem tłustym w M ($\operatorname{int}_M \operatorname{cl}_M D = D$),
(3) $\overline{D} = \operatorname{cl}_{\mathbb{R}^n} D$ jest zbiorem zwartym,
(4) $\overline{D} \subset \Omega \in \operatorname{top} \mathbb{R}^n$,
(5) $M' := \partial_M D$ jest albo zbiorem pustym albo $(d-1)$–wymiarową podrozmaitością $\mathbb{R}^n$ klasy $\mathcal{C}^1$,
(6) $\mathcal{L}^M(D) < +\infty$,
(7) $\mathcal{L}^{M'}(M') < +\infty$ (oczywiście, gdy $M' \neq \varnothing$),
(8) O jest ustaloną orientacją M,
(9) O' jest orientacją podrozmaitości M' indukowaną przez O (oczywiście, gdy $M' \neq \varnothing$),
(10) $u \in \mathcal{C}^1_{(d-1)}(\Omega)$.

Interesuje nas, kiedy prawdziwe jest *Twierdzenie Stokesa* $\binom{7}{}$ mówiące, że następujący *wzór Stokesa* jest prawdziwy

$$\int_{D,O} du = \int_{M',O'} u, \quad \binom{8}{}$$

gdzie prawą stronę rozumiemy jako zero, gdy $M' = \varnothing$.

Istnieje wiele wariantów twierdzenia Stokesa. My udowodnimy następujące dwa.

Twierdzenie 15.3.1 (I wersja Twierdzenia Stokesa)**.** *Wzór Stokesa zachodzi przy dodatkowym założeniu, że zbiór* $K := (\operatorname{supp} u) \cap (\operatorname{cl}_M D)$ $\binom{9}{}$ *jest zwarty* $\binom{10}{}$.

Twierdzenie 15.3.2 (II wersja Twierdzenia Stokesa)**.** *Wzór Stokesa zachodzi przy dodatkowych założeniach, że zbiór* $S := \overline{D} \setminus M$ *jest zwarty oraz* $\mathcal{L}^{d-1}(\operatorname{pr}_I(S)) = 0$ *dla dowolnego* $I \in \Lambda^n_{d-1}$*, gdzie* pr_I *oznacza projekcję na osie o numerach* $i_1, \dots, i_{d-1}$ *(*$d \geqslant 2$*).*

Obserwacja 15.3.3. (a) Niech $M = \mathbb{R}$, $O = [\mathbb{R}]_+$, $D = (a,b) \subset\subset \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{C}^1([a,b])$. Wtedy $M' = \{a,b\}$, $O'(a) = -1$, $O'(b) = +1$. W tym przypadku wzór Stokesa sprowadza się do wzoru:

$$\int_a^b u'(t)dt = u(b) - u(a),$$

który, jak wiemy, zawsze zachodzi.

(b) Niech $M \in \operatorname{top} \mathbb{R}^2$, $O = [\mathbb{R}^2]_+$, $u = Pdx + Qdy$. Wtedy wzór Stokesa sprowadza się do wzoru Greena $\binom{11}{}$:

$$\int_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dxdy = \int_{\partial_M D, O'} Pdx + Qdy.$$

Wzór Greena zostanie szczegółowo omówiony w Twierdzeniu 15.3.4.

(c) Niech $M \in \operatorname{top} \mathbb{R}^3$, $O = [\mathbb{R}^3]_+$,

$$u = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy. \quad \binom{12}{}$$

$\binom{7}{}$ George Stokes (1819–1903).

$\binom{8}{}$ Ponieważ du jest formą ciągłą na Ω, a $D \subset\subset \Omega$, więc funkcja $\|du\|$ jest ograniczona na $\overline{D}$, co, wobec skończoności miary D, implikuje, że całka po lewej stronie istnieje i jest skończona — por. Twierdzenie 15.2.2(b). Z analogicznych powodów całka po prawej stronie istnieje i jest skończona. Problemem jest więc równość.

$\binom{9}{}$ $\operatorname{supp} u := \bigcup_I \operatorname{supp} u_I$.

$\binom{10}{}$ K jest zwarty np. gdy $\overline{D} \subset M$.

$\binom{11}{}$ Por. Przykład 12.7.11.

Wtedy wzór Stokesa sprowadza się do *wzoru Gaussa–Ostrogradskiego* [13] [14]:

$$\int_D \Big(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\Big)dxdydz=\int_{\partial_M D,O'} Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy.$$

(d) Niech $M\in \operatorname{top}\mathbb{R}^n$, $O=[\mathbb{R}^n]_+$,

$$u=\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1}u_j dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{j-1}\wedge dx_{j+1}\wedge\cdots\wedge dx_n$$

i niech $\boldsymbol{n}:\partial_M D\longrightarrow \mathbb{S}_{n-1}$ będzie ciągłym polem wektorów normalnych zadających orientację O' (por. Przykład 15.2.3(b)). Wtedy

$$\int_D \Big(\sum_{j=1}^n \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\Big)\,d\mathcal{L}^n=\int_{\partial_M D,O'}\Big(\sum_{j=1}^n u_j\boldsymbol{n}_j\Big)d\mathcal{L}^{\partial_M D}.$$

W szczególności, mamy następujący *wzór na całkowanie przez części*: Jeżeli $f,g\in\mathcal{C}^1(\Omega)$, gdzie Ω jest pewnym otoczeniem $\overline{D}$, to

$$\int_D f\frac{\partial g}{\partial x_j}\,d\mathcal{L}^n=\int_{\partial D}(fg\boldsymbol{n}_j)d\mathcal{L}^{\partial D}-\int_D \frac{\partial f}{\partial x_j}g\,d\mathcal{L}^n,\quad j=1,\dots,n.$$

W konsekwencji, dla dowolnych $f,g\in\mathcal{C}^2(\Omega)$, mamy:

$$\int_D f(\Delta g)\,d\mathcal{L}^n=\int_{\partial D}\Big(f\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}}-g\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\Big)d\mathcal{L}^{\partial D}+\int_D(\Delta f)g\,d\mathcal{L}^n. \tag{‡}$$

gdzie Δ oznacza *operator Laplace'a* (*laplasjan*)

$$\Delta u:=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

Wzór (‡) nosi nazwę *wzoru Greena dla operatora Laplace'a.*

Istotnie,

$$\begin{aligned}\int_D f(\Delta g)\,d\mathcal{L}^n&=\sum_{j=1}^n\int_D f\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial g}{\partial x_j}\Big)d\mathcal{L}^n=\sum_{j=1}^n\int_{\partial D} f\frac{\partial g}{\partial x_j}\boldsymbol{n}_j d\mathcal{L}^{\partial D}-\sum_{j=1}^n\int_D\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial x_j}d\mathcal{L}^n\\&=\int_{\partial D} f\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}}d\mathcal{L}^{\partial D}-\sum_{j=1}^n\int_{\partial D}\frac{\partial f}{\partial x_j}g\boldsymbol{n}_j d\mathcal{L}^{\partial D}+\sum_{j=1}^n\int_D g\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big)d\mathcal{L}^n\\&=\int_{\partial D}\Big(f\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}}-g\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\Big)d\mathcal{L}^{\partial D}+\int_D(\Delta f)g\,d\mathcal{L}^n.\end{aligned}$$

(e) Niech $n=3$, $d=2$, $u=Pdx+Qdy+Rdz$. Wtedy wzór Stokesa sprowadza się do *klasycznego wzoru Stokesa*:

$$\int_{D,O}\Big(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\Big)dy\wedge dz+\Big(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\Big)dz\wedge dx+\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)dx\wedge dy=\int_{M',O'}Pdx+Qdy+Rdz.$$

Twierdzenie 15.3.4 (Wzór Greena)**.** *Niech $D\subset\mathbb{R}^2$ będzie obszarem takim, że $\partial D=\gamma_0^*\cup\cdots\cup\gamma_N^*$, gdzie $\gamma_j:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}^2$ jest krzywą Jordana klasy $\mathcal{C}^1$ zorientowaną dodatnio względem D, $j=0,\dots,N$. Wtedy dla D prawdziwy jest wzór Greena, tzn. dla dowolnych $P,Q\in\mathcal{C}^1(\overline{D})$ mamy:*

$$\int_{\partial D}Pdx+Qdy=\int_D\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)$$

---

[12] Ten zapis formy odpowiada poprzedniemu zapisowi $u=\sum_{j=1}^3(-1)^{j-1}u_j dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{j-1}\wedge dx_{j+1}\wedge\cdots\wedge dx_3$; por. (d).

[13] Michaił Wasyliewicz Ostrogradski (1801–1862).

[14] Por. Przykład 12.7.11.

Dowód. Wykorzystamy II wersję Twierdzenia Stokesa. Niech $T_j := \{t \in [0,1] : \gamma_j'(t) = 0\}$, $S := \bigcup_{j=0}^{N} \gamma_j(T_j)$. Zauważmy, że $\mathrm{pr}_i(S) = \bigcup_{j=1}^{N} \{\gamma_{j,i}(t) : \gamma_j'(t) = 0\} \subset \{\gamma_{j,i}(t) : \gamma_{j,i}'(t) = 0\}$, a stąd $\mathcal{L}^1(\mathrm{pr}_i(S)) = 0$, $i = 1, 2$, na mocy elementarnego twierdzenia Sarda (Lemat 14.3.12). Z twierdzenia o odwzorowaniu odwrotnym wynika, że $(\partial D) \setminus S$ jest jednowymiarową rozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$. Dla rozmaitości $\widehat{M} := M \setminus S$ mamy $D \subset \widehat{M}$ oraz $\partial_{\widehat{M}} D = (\partial_M D) \setminus S$. Z postaci zbioru S wynika, że $\int_{M,O'} P dx + Q dy = \int_{\partial_{\widehat{M}} D, O'} P dx + Q dy$ (Ćwiczenie). Ostatecznie, korzystając ze wzoru Stokesa dla $\widehat{M}$, dostatemy wzór Greena.

□

Wniosek 15.3.5. *Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i niech $u \in \mathcal{C}^1_{(n-1)}(\Omega)$, $\operatorname{supp} u \subset\subset \Omega$. Wtedy*

$$\int_\Omega du = 0.$$

Dowód. Dobierzmy kule $B_j = \mathbb{B}(a_j, r_j)$, $j = 1, \dots, N$, tak, że $\operatorname{supp} u \subset B_1 \cup \dots \cup B_N \subset\subset \Omega$ i niech $\varphi_1, \dots, \varphi_N \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ będą takie, że $\operatorname{supp} \varphi_j \subset\subset B_j$, $j = 1, \dots, N$, $\varphi_1 + \dots + \varphi_N = 1$ w otoczeniu $\operatorname{supp} u$. Teraz, na podstawie wzoru Stokesa dla kuli, mamy:

$$\int_{\Omega,\, [\mathbb{R}^n]_+} du = \int_{\Omega,\, [\mathbb{R}^n]_+} d((\varphi_1 + \dots + \varphi_N)u) = \sum_{j=1}^N \int_{B_j,\, [\mathbb{R}^n]_+} d(\varphi_j u) = \sum_{j=1}^N \int_{\partial B_j,\, [\mathbb{R}^n]'_+} \varphi_j u = 0. \qquad \square$$

Wniosek 15.3.6 (Wzór na całkowanie przez części)**.** *Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i niech $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$, $g \in \mathcal{C}^k_0(\Omega)$. Wtedy*

$$\int_\Omega f D^\alpha g \, d\mathcal{L}^n = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega (D^\alpha f) g \, d\mathcal{L}^n, \quad |\alpha| \leqslant k.$$

W szczególności, dla dowolnych $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, $g \in \mathcal{C}^2_0(\Omega)$ mamy

$$\int_\Omega f(\Delta g) \, d\mathcal{L}^n = \int_\Omega (\Delta f) g \, d\mathcal{L}^n.$$

Dowód. Wystarczy rozważyć przypadek $k = 1$, $\alpha = e_1$. Niech

$$u := f g dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n \in \mathcal{C}^1_{(n-1)}(\Omega).$$

Oczywiście $\operatorname{supp} u \subset \operatorname{supp} g \subset\subset \Omega$. Zauważmy, że

$$du = \Big(f \frac{\partial g}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_1} g\Big) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Pozostaje skorzystać z Wniosku 15.3.5. □

Na koniec podamy jedno bardzo nietrywialne zastosowanie wzoru Stokesa.

Twierdzenie 15.3.7 (Twierdzenie Brouwera o punkcie stałym [15])**.** *Każde odwzorowanie ciągłe $f : \overline{\mathbb{B}}_n \longrightarrow \overline{\mathbb{B}}_n$ ma punkt stały.*

Dowód. Krok 1^0: Można założyć, że f jest klasy $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Postępujemy następująco. Ponieważ $\overline{\mathbb{B}}_n$ jest zbiorem domkniętym, zatem istnieje ciągłe przedłużenie f do odwzorowania $\widetilde{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Mnożąc $\widetilde{f}$ przez funkcję $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{B}(2), [0,1])$, $g = 1$ na $\mathbb{B}(\frac{3}{2})$, możemy założyć, że $\widetilde{f}$ znika poza $\mathbb{B}(2)$. Do każdej składowej odwzorowania $\widetilde{f}$ stosujemy regularyzację i otrzymujemy odwzorowania klasy $\mathcal{C}^\infty$ $\widetilde{f}_\varepsilon : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ takie, że $\widetilde{f}_\varepsilon \longrightarrow \widetilde{f}$ jednostajnie na $\mathbb{R}^n$ (Twierdzenie 14.7.3(b)). W szczególności, dla dowolnego $\nu \in \mathbb{N}$ istnieje odwzorowanie klasy $\mathcal{C}^\infty$ $g_\nu : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ takie, że $\|g_\nu - \widetilde{f}\| \leqslant \frac{1}{\nu}$ na $\mathbb{R}^n$. Niech $f_\nu := g_\nu/(1 + 1/\nu)$. Widać, że $f_\nu : \overline{\mathbb{B}}_n \longrightarrow \overline{\mathbb{B}}_n$, $\nu \in \mathbb{N}$. Jeżeli twierdzenie jest prawdziwe dla odwzorowań klasy $\mathcal{C}^\infty$, to dla każdego ν istnieje punkt $x_\nu \in \overline{\mathbb{B}}_n$ taki, że $f_\nu(x_\nu) = x_\nu$, czyli $g_\nu(x_\nu) = (1 + \frac{1}{\nu}) x_\nu$. Możemy założyć, że $x_\nu \longrightarrow x_0 \in \overline{\mathbb{B}}_n$. Wtedy $f(x_0) = x_0$.

Krok 2^0: Zakładamy, że $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

[15] Luitzen Brouwer (1881–1966).

Przypuśćmy, że $f(x)\neq x$ dla każdego $x\in\overline{\mathbb{B}}_n$. Wtedy również, $f(x)\neq x$ dla $x\in U$, gdzie U jest otoczeniem $\overline{\mathbb{B}}_n$. Dla dowolnego $x\in\overline{\mathbb{B}}_n$ istnieje dokładnie jedna liczba $t=t(x)\geqslant 0$ taka, że $r(x):=x+t(x-f(x))\in\mathbb{S}_{n-1}$. Określiliśmy w ten sposób odwzorowanie $r:\overline{\mathbb{B}}_n\longrightarrow\mathbb{S}_{n-1}$. Widać, że r jest retrakcją. Pokażemy, że przedłuża się ono do odwzorowania klasy $\mathcal{C}^\infty$ w pewnym otoczeniu $\overline{\mathbb{B}}_n$. Istotnie, rozwiązując równanie

$$\|x+t(x-f(x))\|^2=\|x\|^2+2t\langle x,x-f(x)\rangle+t^2\|x-f(x)\|^2=1$$

wnioskujemy, że $\Delta(x):=4\langle x,x-f(x)\rangle^2+4(1-\|x\|^2)\|x-f(x)\|^2>0$ dla $x\in V$, gdzie $V\subset U$ jest otoczeniem $\overline{\mathbb{B}}_n$. Ponadto,

$$t(x)=\frac{-2\langle x,x-f(x)\rangle+\sqrt{\Delta(x)}}{2\|x-f(x)\|^2}.$$

Wynika stąd, że r jest klasy $\mathcal{C}^\infty(V,\mathbb{R}^n)$.

Mamy więc retrakcję $r=(r_1,\dots,r_n):\overline{\mathbb{B}}_n\longrightarrow\mathbb{S}_{n-1}$ klasy $\mathcal{C}^\infty(V,\mathbb{R}^n)$. Niech $u:=r_1dr_2\wedge\cdots\wedge dr_n\in\mathcal{C}^\infty_{(n-1)}(V)$. Na podstawie twierdzenia Stokesa (w I wersji z $M:=\mathbb{R}^n$, $D=\mathbb{B}_n$) mamy:

$$\int_{\mathbb{B}_n,[\mathbb{R}^n]_+}du=\int_{\mathbb{S}_{n-1},[\mathbb{R}^n]'_+}u.$$

Zauważmy, że

$$\int_{\mathbb{B}_n,[\mathbb{R}^n]_+}du=\int_{\mathbb{B}_n,[\mathbb{R}^n]_+}dr_1\wedge dr_2\wedge\cdots\wedge dr_n=\int_{\mathbb{B}_n,[\mathbb{R}^n]_+}(\det r')dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n=\int_{\mathbb{B}_n}(\det r')dx_1\dots dx_n.$$

Różniczkując związek $\|r\|^2=r_1^2+\cdots+r_n^2\equiv 1$ na $\mathbb{B}_n$ dostajemy

$$\sum_{j=1}^n r_j\frac{\partial r_j}{\partial x_k}=0\quad\text{ na }\mathbb{B}_n,\quad k=1,\dots,n.$$

W szczególności $\det r'\equiv 0$ na $\mathbb{B}_n$, a więc

$$\int_{\mathbb{S}_{n-1},[\mathbb{R}^n]'_+}u=0.$$

Niech $v:=x_1dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n$. Na podstawie wzoru Stokesa mamy:

$$\int_{\mathbb{S}_{n-1},[\mathbb{R}^n]'_+}v=\int_{\mathbb{B}^n,[\mathbb{R}^n]_+}dx_1\dots dx_n=\mathcal{L}^n(\mathbb{B}_n)>0.$$

Zauważmy, że $u=r^*(v)$. Rozważmy dowolną lokalną parametryzację $p:P\longrightarrow U$ sfery $\mathbb{S}_{n-1}$ zgodną z orientacją. Mamy $p^*(u)=(r\circ p)^*(v)=p^*(v)$ (bo r jest retrakcją). Stąd

$$0=\int_{\mathbb{S}_{n-1},[\mathbb{R}^n]'_+}u=\int_{\mathbb{S}_{n-1},[\mathbb{R}^n]'_+}x_1dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n>0;$$

sprzeczność. □

Twierdzenie 15.3.8 (Twierdzenie o retrakcji)**.** *Nie istnieje ciągła retrakcja* $\overline{\mathbb{B}}_n\longrightarrow\mathbb{S}_{n-1}$.

Dowód. Przypuśćmy, że $r:\overline{\mathbb{B}}_n\longrightarrow\mathbb{S}_{n-1}$ jest taką retrakcją i niech $f=-r:\overline{\mathbb{B}}_n\longrightarrow\mathbb{S}_{n-1}$. Na podstawie Twierdzenia Brouwera o punkcie stałym istnieje $x_0\in\overline{\mathbb{B}}_n$ taki, że $f(x_0)=x_0$. Oczywiście, $x_0\in\mathbb{S}_{n-1}$. W szczególności, $f(x_0)=-x_0$, bo r jest retrakcją — sprzeczność. □

Dowód I wersji Twierdzenia Stokesa 15.3.1. Dla dowolnego punktu $a\in K$ ustalmy parametryzację $p_a:P_a\longrightarrow U_a$ podrozmaitości M zgodną z O taką, że $a\in U_a$, P_a jest otwartą kostką i jeżeli $M'\cap U_a\neq\varnothing$, to $\widetilde{p}_a:\widetilde{P}_a\longrightarrow M'\cap U_a$ jest parametryzacją zgodną z O', gdzie $P_a=\Delta_a\times\widetilde{P}_a\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{d-1}$, $0\in\Delta_a$, $\widetilde{p}_a(\xi):=p(0,\xi)$, $\xi\in\widetilde{P}_a$. Przypomnijmy, że w przypadku $d\geqslant 2$ mamy: $p_a((P_a)_-)=D\cap U_a$, gdzie $(P_a)_\pm:=P_a\cap\{\pm t_1>0\}$, zaś w przypadku $d=1$ mamy: $p_a((P_a)_-)=D\cap U_a$, gdy $O(a)=+1$ i $p_a((P_a)_+)=D\cap U_a$, gdy $O(a)=-1$.

Ponieważ K jest zwarty, więc istnieje skończone pokrycie $U_{a_1}\cup\cdots\cup U_{a_N}\supset K$. Niech $U_{a_j}=M\cap G_j$, gdzie $G_j\in\operatorname{top}\mathbb{R}^n$, $G_j\subset\Omega$, $j=1,\dots,N$. Niech $\varphi_j\in\mathcal{C}^\infty_0(G_j,[0,1])$, $j=1,\dots,N$, będą takie, że $\sum\limits_{j=1}^N\varphi_j=1$

w otoczeniu G_0 zbioru K. Niech $u_j := \varphi_j u \in \mathcal{C}^1_{(d-1)}(\Omega)$, $j = 1,\dots,N$. Zauważmy, że $\sum\limits_{j=1}^N u_j = u$ na G_0. W szczególności, $\sum\limits_{j=1}^N du_j = du$ na G_0. Mamy:

$$\int_{D,O} du = \int_{D\cap G_0,O} du = \sum_{j=1}^N \int_{D\cap G_0,O} du_j = \sum_{j=1}^N \int_{D,O} du_j,$$
$$\int_{M',O'} u = \int_{M'\cap G_0,O'} u = \sum_{j=1}^N \int_{M'\cap G_0,O'} u_j = \sum_{j=1}^N \int_{M',O'} u_j,$$

więc wystarczy sprawdzić wzór Stokesa dla każdej formy u_j z osobna.

Ustalmy j i dla prostoty przyjmijmy, że $u = u_j$ oraz opuśćmy nieistotne wskaźniki. Tak więc $p : P \longrightarrow U$ jest wyróżnioną parametryzacją (posiadającą wszystkie poprzednio wymienione własności), $U = M \cap G$ i $\operatorname{supp} u \subset\subset G$.

Niech $L := p^*(du) \in \mathcal{C}^0_{(d)}(P)$, $R := \widetilde{p}^*(u) \in \mathcal{C}^0_{(d-1)}(\widetilde{P})$. Przypomnijmy, że

$$\operatorname{supp} L \subset\subset P, \quad \operatorname{supp} R \subset\subset \widetilde{P}.$$

W przypadku, gdy $U' := M' \cap U = \varnothing$ niech $Q := P$. W przypadku, gdy $U' \neq \varnothing$ niech $Q = P_-$ lub $Q = P_+$ tak by $p(Q) = D \cap U$ (jeżeli $d \geqslant 2$, to oczywiście $Q = P_-$). Nasz problem polega na pokazaniu, że

$$\int_{D,O} du = \int_Q L\, d\mathcal{L}^d = \left.\begin{cases} 0, & \text{jeżeli } U' = \varnothing \\ \int_{\widetilde{P}} R\, d\mathcal{L}^{d-1}, & \text{jeżeli } U' \neq \varnothing \end{cases}\right\} = \int_{M',O'} u.$$

Najpierw rozpatrzymy przypadek $d = 1$. Na podstawie Twierdzenia 15.1.3(e) mamy: $L = dv = v'dt$, gdzie $v := p^*(u) = u \circ p$. Niech $Q = (\alpha,\beta)$. W konsekwencji:

$$\int_Q L\, d\mathcal{L}^1 = \int_\alpha^\beta v'(t)dt = v(\beta) - v(\alpha) = u(p(\beta)) - u(p(\alpha))$$
$$= \left.\begin{cases} 0, & \text{jeżeli } U' = \varnothing \\ u(p(0)), & \text{jeżeli } U' \neq \varnothing,\ Q = P_- \\ -u(p(0)), & \text{jeżeli } U' \neq \varnothing,\ Q = P_+ \end{cases}\right\} = \int_{M',O'} u,$$

co kończy dowód dla $d = 1$.

Przypadek $d \geqslant 2$ jest znacznie bardziej skomplikowany. Wobec liniowości wszystkich operacji możemy się ograniczyć do form postaci $u = \varphi dx_I$, gdzie $\varphi \in \mathcal{C}^1_0(G)$, a $I \in \Lambda^n_{d-1}$.

Na wstępie, aby uchwycić zasadniczą myśl dowodu, przyjmijmy dodatkowo, że p jest klasy $\mathcal{C}^2$. Wtedy na podstawie Twierdzenia 15.1.3(f) mamy $p^*(du) = dv$, gdzie $v := p^*(u)$. Niech $\sigma : \mathbb{R}^{d-1} \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $\sigma(\xi) = (0,\xi)$. Odnotujmy, że $\widetilde{p} = p \circ \sigma$, a zatem $R = \sigma^*(v)$. Tak więc chcemy pokazać, że

$$\int_Q dv\, d\mathcal{L}^d = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } Q = P \\ \int_{\widetilde{P}} \sigma^*(v)\, d\mathcal{L}^{d-1}, & \text{jeżeli } Q \neq P \end{cases}.$$

Wobec liniowości możemy założyć, że

$$v = \psi dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{k-1} \wedge dt_{k+1} \wedge \dots \wedge dt_d$$

dla pewnego k. Kostkę Q przedstawiamy w postaci $A \times (\gamma,\delta) \times B \subset \mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-k}$. Niech $t = (t_A, t_k, t_B) \in \mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-k}$. Na podstawie twierdzenia Fubiniego dostajemy:

$$\int_Q dv\, d\mathcal{L}^d = \int_Q (-1)^{k-1} \frac{\partial\psi}{\partial t_k} dt = (-1)^{k-1} \int_A \int_B \Big(\int_\gamma^\delta \frac{\partial\psi}{\partial t_k} dt_k \Big) dt_A dt_B$$
$$= (-1)^{k-1} \int_A \int_B \Big(\psi(t_A,\delta,t_B) - \psi(t_A,\gamma,t_B) \Big) dt_A dt_B.$$

Ponieważ $\operatorname{supp} v \subset\subset P$, ostatnie wyrażenie jest równe zero, jeżeli $Q = P$ lub $k \geqslant 2$. Jeżeli $Q \neq P$ i $k = 1$, to jest ono równe

$$\int_{\widetilde{P}} \psi(0,\xi)\ d\mathcal{L}^{d-1}(\xi).$$

Z drugiej strony,

$$\int_{\widetilde{P}} \sigma^*(v)\ d\mathcal{L}^{d-1} = \int_{\widetilde{P}} (\psi\circ\sigma) d\sigma_1\wedge\cdots\wedge d\sigma_{k-1}\wedge d\sigma_{k+1}\wedge\cdots\wedge d\sigma_d)\ d\mathcal{L}^{d-1}$$
$$= \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } k\geqslant 2 \\ \int_{\widetilde{P}} \psi(0,\xi)\ d\mathcal{L}^{d-1}(\xi), & \text{jeżeli } k=1 \end{cases},$$

co kończy dowód przy dodatkowym założeniu.

W przypadku ogólnym zauważmy, że

$$L = p^*(du) = p^*(d\varphi\wedge dx_I) = p^*(d\varphi)\wedge dp_I = d(\varphi\circ p)\wedge dp_I$$

i $R = \sigma^*((\varphi\circ p) dp_I)$. Oznaczając $f_1 := \varphi\circ p$ i $f_j := p_{i_{j-1}}$, $j = 2,\dots,d$, sprowadzamy zagadnienie do pytania, czy

$$\int_{Q,[\mathbb{R}^d]_+} df_1\wedge\cdots\wedge df_d = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } Q = P \\ \int_{\widetilde{P},[\mathbb{R}^{d-1}]_+} \sigma^*(f_1 df_2\wedge\cdots\wedge df_d), & \text{jeżeli } Q\neq P \end{cases}.$$

Odnotujmy, że $f_1\in\mathcal{C}^1_0(P)$, $f_j\in\mathcal{C}^1(P)$, $j=2,\dots,d$. Jeżeli $f_2,\dots,f_d\in\mathcal{C}^2(P)$, to $d(f_1 df_2\wedge\cdots\wedge df_d) = df_1\wedge\cdots\wedge df_d$, a więc powyższy wzór sprowadza się do wzoru Stokesa dla Q, który to wzór, jak wynika z poprzedniej części dowodu, zachodzi.

Aby wykazać wzór w przypadku klasy $\mathcal{C}^1$ zastosujemy aproksymację. Na wstępie zauważmy, że możemy założyć, że $f_j\in\mathcal{C}^1_0(P)$ (zastępując f_j przez gf_j, gdzie $g\in\mathcal{C}^\infty_0(P)$ i $g=1$ w otoczeniu $\operatorname{supp} f_1$), $j=2,\dots,d$. Teraz wystarczy wykorzystać regularyzację z Twierdzenia 14.7.3 i zauważyć, że na podstawie Twierdzenia 14.7.3(d) mamy (Ćwiczenie):

$$df_1\wedge d(f_2)_\varepsilon\wedge\cdots\wedge d(f_d)_\varepsilon = \frac{\partial(f_1,(f_2)_\varepsilon,\dots,(f_d)_\varepsilon)}{\partial(t_1,\dots,t_d)}\ dt_1\wedge\cdots\wedge dt_d$$
$$\longrightarrow \frac{\partial(f_1,\dots,f_d)}{\partial(t_1,\dots,t_d)}\ dt_1\wedge\cdots\wedge dt_d = df_1\wedge\cdots\wedge df_d$$

jednostajnie na $\mathbb{R}^d$ przy $\varepsilon\longrightarrow 0$. Ponadto,

$$\sigma^*(f_1 d(f_2)_\varepsilon\wedge\cdots\wedge d(f_d)_\varepsilon) = (f_1\circ\sigma\frac{\partial((f_2)_\varepsilon\circ\sigma,\dots,(f_d)_\varepsilon\circ\sigma)}{\partial(\xi_1,\dots,\xi_{d-1})}\ d\xi_1\wedge\cdots\wedge d\xi_{d-1}$$
$$\longrightarrow (f_1\circ\sigma)\frac{\partial(f_2\circ\sigma,\dots,f_d\circ\sigma)}{\partial(\xi_1,\dots,\xi_{d-1})}\ d\xi_1\wedge\cdots\wedge d\xi_{d-1} = \sigma^*(f_1 df_2\wedge\cdots\wedge df_d)$$

jednostajnie na $\mathbb{R}^{d-1}$ przy $\varepsilon\longrightarrow 0$.

Gwarantuje to zbieżność odpowiednich całek

$$\int_{Q,[\mathbb{R}^d]_+} df_1\wedge d(f_2)_\varepsilon\wedge\cdots\wedge d(f_d)_\varepsilon \longrightarrow \int_{Q,[\mathbb{R}^d]_+} df_1\wedge\cdots\wedge df_d,$$
$$\int_{\widetilde{P},[\mathbb{R}^{d-1}]_+} \sigma^*(f_1 d(f_2)_\varepsilon\wedge\cdots\wedge d(f_d)_\varepsilon) \longrightarrow \int_{\widetilde{P},[\mathbb{R}^{d-1}]_+} \sigma^*(f_1 df_2\wedge\cdots\wedge df_d),$$

co kończy dowód. □

Dowód II wersji Twierdzenia Stokesa 15.3.2. Wystarczy rozważyć przypadek, gdy $u = \varphi dx_I$ dla pewnego $I\in\Lambda^n_{d-1}$. Niech $S_I := \operatorname{pr}_I(S)$. Zdefiniujmy:

$$\psi_\nu := 1 - (\chi_{S_I^{(2/\nu)}})_{1/\nu}\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{d-1},[0,1]),\quad \nu\in\mathbb{N}.$$

Wtedy $\psi_\nu = 1$ poza $S_I^{(3/\nu)}$, $\psi_\nu = 0$ na $S_I^{(1/\nu)}$. W szczególności

$$\psi_\nu\longrightarrow\chi_{\mathbb{R}^{d-1}\setminus S_I}$$

punktowo. Odnotujmy, że zbiór otwarty $G_\nu := \operatorname{int} S_I^{(1/\nu)}$ jest otoczeniem S_I. Określamy

$$u_\nu := (\psi_\nu \circ \operatorname{pr}_I)u = (\psi_\nu \circ \operatorname{pr}_I)\varphi dx_I.$$

Zauważmy, że

$$(\operatorname{supp} u_\nu) \cap (\operatorname{pr}_I^{-1}(G_\nu)) = \varnothing,$$

co oznacza, że zbiór $(\operatorname{supp} u_\nu) \cap (\operatorname{cl}_M D)$ jest zwarty. Na podstawie I wersji twierdzenia Stokesa mamy:

$$\int_{D,O} du_\nu = \int_{M',O'} u_\nu, \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Wystarczy pokazać, że

$$\int_{D,O} du_\nu \longrightarrow \int_{D,O} du, \quad \int_{M',O'} u_\nu \longrightarrow \int_{M',O'} u.$$

Niech $H := \operatorname{pr}_I^{-1}(S_I)$. Oczywiście $[u_\nu] \longrightarrow [u]$ punktowo na $M' \setminus H$. Ponadto $|[u_\nu]| \leqslant |[u]|$ na M'. Stąd, na podstawie twierdzenia Lebesgue'a, dostajemy

$$\int_{M'\setminus H,O'} u_\nu \longrightarrow \int_{M'\setminus H,O'} u.$$

Zauważmy, że

$$du_\nu = d(\psi_\nu \circ \operatorname{pr}_I) \wedge u + (\psi_\nu \circ \operatorname{pr}_I)du = (\psi_\nu \circ \operatorname{pr}_I)du.$$

Stąd $[du_\nu] \longrightarrow [du]$ punktowo na $M \setminus H$ oraz $|[du_\nu]| \leqslant |[du]|$. Mamy więc

$$\int_{D\setminus H,O} du_\nu \longrightarrow \int_{D\setminus H,O} du.$$

Pozostaje sprawdzić, co się dzieje na H. Potrzebny nam będzie następujący lemat.

Lemat 15.3.9. *Niech N będzie r–wymiarową orientowalną podrozmaitością w $\mathbb{R}^n$ i niech $B \subset \mathbb{R}^r$ będzie zbiorem domkniętym miary zero. Wtedy*

$$\int_{N\cap \operatorname{pr}_J^{-1}(B)} [f dx_J]\, d\mathcal{L}^N = 0$$

dla dowolnego $J \in \Lambda_r^n$ przy założeniu, że forma $f dx_J$ jest całkowalna na N.

Przyjmijmy lemat na chwilę. Jeżeli $M' \neq \varnothing$, to stosując lemat do $r = d-1$, $N = M'$, $B = S_I$, $J = I$ i $f dx_I = u$ lub $f dx_I = u_\nu$, wnioskujemy, że

$$\int_{M'\cap H} [u]\, d\mathcal{L}^{M'} = \int_{M'\cap H} [u_\nu]\, d\mathcal{L}^{M'} = 0.$$

Niech teraz $r = d$, $N = D$. Mamy $du = \sum\limits_{j\notin I} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I$ i podobnie dla du_ν. Bierzemy teraz $f dx_J = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I$, $J = (i_1, \ldots, i_{s-1}, j, i_s, \ldots, i_{d-1})$ i $B := \{(t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d : (t_1, \ldots, t_{s-1}, t_{s+1}, \ldots, t_d) \in S_I\}$ tak, że $\operatorname{pr}_J^{-1}(B) = H$. Z lematu wnioskujemy, że

$$\int_{D\cap H} [du]\, d\mathcal{L}^M = \int_{D\cap H} [du_\nu]\, d\mathcal{L}^M = 0.$$

Dowód II wersji twierdzenia Stokesa jest zakończony. □

Dowód Lematu 15.3.9. Niech $A := N \cap \operatorname{pr}_J^{-1}(B)$ i niech A_0 oznacza zbiór tych wszystkich punktów $a \in A$ takich, że przy dowolnej lokalnej parametryzacji $p : P \longrightarrow U$ w otoczeniu a mamy:

$$\frac{\partial(p_{j_1}, \ldots, p_{j_r})}{\partial(t_1, \ldots, t_r)}(p^{-1}(a)) = 0.$$

Oczywiście A_0 jest relatywnie domknięty i $[f dx_J] = 0$ na A_0. Pozostaje udowodnić, że

$$\int_{A\setminus A_0} [f dx_J]\, d\mathcal{L}^N = 0.$$

Rozumujemy lokalnie w otoczeniu ustalonego punktu $a \in A \setminus A_0$. Wobec definicji zbioru A_0, podrozmaitość N da się opisać w pewnym otoczeniu U punktu a jako wykres $x_{J'} = g(x_J)$, $x_J \in Q$, gdzie J' oznacza wielowskaźnik uzupełniający do J w $(1,\dots,n)$ (Ćwiczenie). Mamy stąd:

$$\int_{A\cap U} [f dx_J]\, d\mathcal{L}^N = \pm \int_{\{x_J:(x_J,g(x_J))\in A\}} f(x_J, g(x_J)) dx_J = 0$$

bo $\{x_J : (x_J, g(x_J)) \in A\} \subset B$. □

W praktyce, dla $d \geqslant 2$, twierdzenie Stokesa stosuje się najczęściej w następującej sytuacji.

Twierdzenie 15.3.10. *Załóżmy, że M, D, Ω, u spełniają warunki* (1)–(4), (8), (10). *Zamiast* (5) *zakładamy, że $\overline{D} \subset M$ (co automatycznie daje* (6)*) oraz, że $\partial_M D$ jest* kawałkami klasy $\mathcal{C}^1$*, co oznacza, że dowolnego punktu $a \in \partial_M D$ istnieje:*

- *lokalna parametryzacja $p_a : 2\Delta^d \longrightarrow U_a$, gdzie $U_a \in \operatorname{top} M$, $a \in U$, oraz*
- *$\ell_a \in \{1,\dots,d\}$*

takie, że $p_a(0) = a$, $D \cap U_a = p((-2,0)^{\ell_a} \times 2\Delta^{d-\ell_a})$.
Wtedy wzór Stokesa zachodzi.

Dowód. Zauważmy, że:

- Jeżeli $\ell_a = 1$, to $(\partial_M D)\cap U_a = p(\{0\}\times 2\Delta^{d-1})$. W szczególności, $(\partial_M D)\cap U_a$ jest $(d-1)$-wymiarową podrozmaitością U_a klasy $\mathcal{C}^1$.
- Jeżeli $\ell_a \geqslant 2$, to dla $E_a := p_a(\{t \in 2\Delta^d : \exists_{1\leqslant i<j\leqslant \ell_a} : t_i = t_j = 0\})$ mamy

$$(\partial_M D) \cap (U_a \setminus E_a) = \bigcup_{s=1}^{\ell_a} p_a((-2,0)^{s-1} \times \{0\} \times (-2,0)^{\ell_a - s} \times 2\Delta^{d-\ell_a}).$$

W szczególności, $(\partial_M D) \cap (U_a \setminus E_a)$ jest sumą ℓ_a parami rozłącznych $(d-1)$-wymiarowych podrozmaitości $U_a \setminus E_a$ klasy $\mathcal{C}^1$.

Niech $F_a := p_a(\{t \in \overline{\Delta}^d : \exists_{1\leqslant i<j\leqslant \ell_a} : t_i = t_j = 0\}) \subset E_a$.

Wobec zwartości $\partial_M D$ znajdziemy skończoną liczbę punktów $a_1,\dots,a_N \in \partial_M D$ takich, że $\partial_M D \subset \bigcup_{j=1}^N p_{a_j}(\Delta^d)$. Niech $F := \bigcup_{j=1}^N F_{a_j}$, gdzie $F_{a_j} := \varnothing$ jeżeli $\ell_{a_j} = 1$. Oczywiście, F jest zbiorem zwartym oraz $(\partial_M D) \cap (M \setminus F)$ jest $(d-1)$-wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$.

Niech $M_0 := M \setminus F$, $D_0 := D \cap M_0 = D \setminus F$. Zauważmy, że M_0, D_0, Ω, u spełniają (1)–(10) (Ćwiczenie). Będziemy chcieli zastosować II wersję twierdzenia Stokesa do M_0, D_0, Ω, u. Mamy $S := \overline{D}_0 \setminus M_0 \subset F$. Wystarczy więc pokazać, że dla każdego $j \in \{1,\dots,N\}$ takiego, że $\ell_{a_j} \geqslant 2$, zachodzi $\mathcal{L}^{d-1}(\operatorname{pr}_I(F_{a_j})) = 0$ przy dowolnym $I \in \Lambda^n_{d-1}$. Ustalmy I oraz j i przyjmijmy dla uproszczenia zapisu $a := a_j$. Wystarczy udowodnić, że $\mathcal{L}^{d-1}(\operatorname{pr}_I(H)) = 0$, gdzie $H := p_a(\{0\}^2 \times \overline{\Delta}^{d-2})$. Niech $f := \operatorname{pr}_I \circ p_a(0,\cdot) : 2\Delta^{d-1} \longrightarrow \mathbb{R}^{d-1}$. Zauważmy, że f spełnia lokalnie warunek Lipschitza. Teraz na podstawie Twierdzenia 13.10.6(b) wnioskujemy, że zbiór $\operatorname{pr}_I(H) = f(\{0\}\times[-1,1]^{d-2})$ jest miary zero.

Na podstawie Lematu 15.3.9, rozumując tak, jak w końcówce dowodu II wersji twierdzenia Stokesa, dostajemy $\int_{D,O} du = \int_{D_0,O} du$. Niech O' oznacza orientację indukowaną na $\partial_{M_0} D_0$ przez O. Ostatecznie więc, na podstawie II wersji twierdzenia Stokesa, mamy:

$$\int_{D,O} du = \int_{D_0,O} du = \int_{\partial_{M_0} D_0, O'} u =: \int_{\partial_M D, O'} u.$$ □

ROZDZIAŁ 16

Wybrane zagadnienia Analizy Matematycznej

16.1. Szeregi Fouriera — uzupełnienia

Niech

$$L^1_{2\pi}(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : f|_{[-\pi,\pi]} \in L^1([-\pi,\pi]),\ \forall_{x\in\mathbb{R}} : f(x+2\pi) = f(x)\}.$$

Oczywiście $\mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R}) \subset L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$. Definicję szeregu Fouriera (określonego dla funkcji klasy $\mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R})$) (por. Definicja 8.1.1) przenosimy bez trudu na funkcje klasy $L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$:

$$S(x) = S(f;x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad x \in \mathbb{R},$$

gdzie

$$a_n = a_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\ dt, \quad b_n = b_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\ dt, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Twierdzenie 16.1.1 (Riemanna–Lebesgue'a)**.** *Dla dowolnego przedziału $P \subset \mathbb{R}$ oraz dla dowolnej funkcji $f \in L^1(P)$ mamy:*

$$\lim_{|\alpha|\to+\infty}\int_P f(t)\cos\alpha t\ dt = \lim_{|\alpha|\to+\infty}\int_P f(t)\sin\alpha t\ dt = 0.$$

W szczególności, dla dowolnej funkcji $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ mamy:

$$a_n(f) \longrightarrow 0, \quad b_n(f) \longrightarrow 0 \text{ przy } n \longrightarrow +\infty.$$

Dowód. Por. dowód Twierdzenia 8.1.3.

W dowodzie ograniczymy się do funkcji cos. Pozostały przypadek jest analogiczny.

Krok 1^o. $f = \chi_Q$, gdzie Q jest przedziałem ograniczonym, $Q \subset P$.

Krok 2^o. Jeżeli twierdzenie zachodzi dla $f_1, f_2 \in L^1(P)$, to zachodzi dla $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ dla dowolnych $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Krok 3^o. Jeżeli $\mathcal{M}^+(P) \ni f_\nu \nearrow f \in L^1(P)$ i twierdzenie zachodzi dla każdej funkcji f_ν, $\nu \geqslant 1$, to zachodzi dla f.

Istotnie, na podstawie twierdzenia o monotonicznym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki, mamy:

$$\Big|\int_P f(t)\cos\alpha t\ dt - \int_P f_\nu(t)\cos\alpha t\ dt\Big| \leqslant \int_P (f(t) - f_\nu(t))dt \longrightarrow 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Teraz, dla danego $\varepsilon > 0$, najpierw dobieramy ν_0 takie, że

$$\Big|\int_P f(t)\cos\alpha t\ dt - \int_P f_{\nu_0}(t)\cos\alpha t\ dt\Big| \leqslant \varepsilon, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

a następnie korzystamy z tego, że $\int_P f_{\nu_0}(t)\cos\alpha t\ dt \longrightarrow 0$ gdy $|\alpha| \longrightarrow +\infty$.

Krok 4^o. Na podstawie 1^o, 2^o i 3^o, twierdzenie zachodzi dla dowolnej funkcji $f = \chi_U$, gdzie U jest zbiorem otwartym w P i $\chi_U \in L^1(P)$.

Krok 5^o. $f = \chi_A \in L^1(P)$, gdzie A jest zbiorem mierzalnym, $A \subset P$.

Istotnie, dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór U otwarty w P taki, że $A \subset U$ i $\mathcal{L}^1(U \setminus A) \leqslant \varepsilon$. Wtedy

$$\Big|\int_P \chi_U(t)\cos\alpha t\ dt - \int_P \chi_A(t)\cos\alpha t\ dt\Big| \leqslant \varepsilon$$

i możemy skorzystać z 4^o.

Krok 6^o. Wobec 5^o i 2^o, twierdzenie zachodzi dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{M}_0^+(P) \cap L^1(P)$. Stąd, na podstawie 3^o, zachodzi dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{M}^+(P) \cap L^1(P)$ i ostatecznie (poprzez rozkład $f = f_+ - f_-$) — dla dowolnej funkcji $f \in L^1(P)$. □

Tak, jak w rozdziale 8, dla $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$, definiujemy sumy częściowe:

$$S_k(x) = S_k(f;x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}_0.$$

Lemat 16.1.2. *Dla $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ mamy*

$$S_k(f;x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} \cdot \frac{\sin \frac{(2k+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} dt, \quad x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}_0.$$

W szczególności,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \frac{(2k+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} dt = 1, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Dowód. Ćwiczenie — por. dowód Lematu 8.2.2. □

Twierdzenie 16.1.3. *Dla $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ i dla dowolnego $0 < \delta < \pi$ mamy:*

$$\lim_{k\to+\infty} S_k(f;x) = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} \cdot \frac{\sin \frac{(2k+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

(w tym sensie, że obie granice jednocześnie istnieją i są równe).

W szczególności, prawdziwa jest następująca zasada lokalizacji*:*

O zbieżności i wartości $S(f;x_0)$ szeregu Fouriera funkcji f w punkcie x_0 decydują wyłącznie wartości funkcji f w dowolnie małym otoczeniu punktu x_0.

Dowód. Ćwiczenie — por. dowód Twierdzenia 8.2.3. □

Twierdzenie 16.1.4 (Kryterium Diniego)**.** *Niech $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ i niech $x_0, A \in \mathbb{R}$ będą takie, że funkcja*

$$(0,\pi] \ni t \overset{\psi}{\longmapsto} \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2A}{t}$$

jest całkowalna $\binom{1}{}$*. Wtedy*

$$S(f;x_0) = \lim_{k\to+\infty} S_k(f;x_0) = A.$$

Dowód. Ćwiczenie — por. dowód Twierdzenia 8.2.4. □

16.2. Transformacja Fouriera

Definicja 16.2.1. Dla dowolnej funkcji $f \in L^1(\mathbb{R}^n) := L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ definiujemy jej *transformatę Fouriera* wzorem

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \langle x,\xi\rangle} d\mathcal{L}^n(x), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \binom{2}{}$$

gdzie $\langle\ ,\ \rangle$ oznacza standardowy iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n$.

Obserwacja 16.2.2. (a) $\widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\mathcal{L}^n(x)$.

(b) $\widehat{f}$ jest funkcją ograniczoną oraz $\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)| \leqslant \|f\|_{L^1}$.

$\binom{1}{}$ Oczywiście, problemem jest tu całkowalność w otoczeniu zera.

$\binom{2}{}$ Uwaga: Czasami transformatę Fouriera definiuje się wzorem

$$(\mathcal{F}f)(\xi) := \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x,\xi\rangle} d\mathcal{L}^n(x).$$

(c) $\widehat{f}$ jest funkcją jednostajnie ciągłą.
Istotnie, dla dowolnych $\xi,\eta\in\mathbb{R}^n$ mamy

$$|\widehat{f}(\xi+\eta)-\widehat{f}(\xi)|\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)||e^{-2\pi i\langle x,\eta\rangle}-1|d\mathcal{L}^n(x)\underset{\eta\to 0}{\longrightarrow}0,$$

gdzie ostatnia zbieżność wynika z twierdzenia Lebesgue'a o zmajoryzowanym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki.

(d) Z Twierdzenia 14.4.1 o funkcjach danych całką wnioskujemy, że jeżeli $x^\alpha f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ dla $|\alpha|\leqslant k$ (np. $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ i $\operatorname{supp} f\subset\subset\mathbb{R}^n$), to $\widehat{f}\in\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ oraz $D^\alpha\widehat{f}=(-2\pi i)^{|\alpha|}\widehat{x^\alpha f}$, $|\alpha|\leqslant k$. W szczególności, jeżeli $f\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$, to $\widehat{f}\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$.

(e) $\widehat{e^{-a\|x\|^2}}\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$, $a>0$.

(f) Z Twierdzenia 15.3.6 o całkowaniu przez części wnioskujemy, że jeżeli $f\in\mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$, to $(2\pi i)^{|\alpha|}\xi^\alpha\widehat{f}=\widehat{D^\alpha f}$, $|\alpha|\leqslant k$.

(g) Jeżeli $f\in\mathcal{C}_0^{2k}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ dla pewnego $k\in\mathbb{N}_0$, to funkcja $\|\xi\|^{2k}\widehat{f}$ jest ograniczona. W szczególności, jeżeli $2k>n$, to $\widehat{f}\in L^1(\mathbb{R}^n)$. Istotnie, $\|\xi\|^{2k}\widehat{f}=(\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2)^k\widehat{f}=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n:|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}\xi^{2\alpha}\widehat{f}$ i możemy skorzystać z (f).

(h) Niech $\mathcal{X}:=\{f\in L^1(\mathbb{R}^n)\cap\mathcal{BC}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}):\widehat{f}\in L^1(\mathbb{R}^n)\}$. Odnotujmy, że $\mathcal{X}$ jest $\mathbb{C}$–przestrzenią wektorową oraz $\mathcal{X}\subset L^p(\mathbb{R}^n)$ dla dowolnego $p\geqslant 1$. Ponadto, na podstawie (g) mamy $\mathcal{C}_0^{2k}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})\subset\mathcal{X}$ o ile $2k>n$.

(i) Niech $\overset{\vee}{\varphi}(x):=\varphi(-x)$. Zauważmy, że

$$\overset{\vee}{\widehat{f}}=\widehat{\overset{\vee}{f}},\quad\overline{\widehat{f}}=\overset{\vee}{\widehat{\overline{f}}},\quad f\in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Definicja 16.2.3. Operację

$$L^1(\mathbb{R}^n)\ni f\overset{\mathcal{F}}{\longmapsto}\mathcal{F}f\in\mathcal{BC}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$$

nazywamy *transformacją Fouriera.*

Jest to oczywiście operator $\mathbb{C}$–liniowy i ciągły. Ponadto, $\|\mathcal{F}\|\leqslant 1$.

Lemat 16.2.4. *Dla dowolnych $f,g\in L^1(\mathbb{R}^n)$ mamy*

$$\widehat{g\cdot\widehat{f}}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{g}(x+\xi)f(x)d\mathcal{L}^n(x),\quad\xi\in\mathbb{R}^n.$$

W szczególności, dla $\xi=0$ dostajemy

$$\int_{\mathbb{R}^n}g\cdot\widehat{f}\,d\mathcal{L}^n=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{g}\cdot f\,d\mathcal{L}^n.$$

Dowód.

$$\widehat{g\cdot\widehat{f}}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}g(x)\widehat{f}(x)e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}d\mathcal{L}^n(x)=\int_{\mathbb{R}^n}g(x)\Big(\int_{\mathbb{R}^n}f(y)e^{-2\pi i\langle y,x\rangle}d\mathcal{L}^n(y)\Big)e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}d\mathcal{L}^n(x)$$
$$\overset{\text{Fubini}}{=}\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}g(x)e^{-2\pi i\langle x,y+\xi\rangle}d\mathcal{L}^n(x)\Big)f(y)d\mathcal{L}^n(y)=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{g}(y+\xi)f(y)d\mathcal{L}^n(y).\qquad\square$$

Lemat 16.2.5. *Dla dowolnego $a>0$:*

$$\mathcal{F}(e^{-a\|x\|^2})(\xi)=\Big(\sqrt{\frac{\pi}{a}}\Big)^n e^{-\frac{\pi^2}{a}\|\xi\|^2},\quad\xi\in\mathbb{R}^n.$$

W szczególności,

$$\mathcal{F}(e^{-\pi\|x\|^2})(\xi)=e^{-\pi\|\xi\|^2},\quad\xi\in\mathbb{R}^n.$$

Dowód. Wystarczy udowodnić przypadek $n=1$. Istotnie,

$$\mathcal{F}(e^{-a\|x\|^2})(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-a\|x\|^2}e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}d\mathcal{L}^n(x)=\int_{\mathbb{R}}e^{-ax_1^2}e^{-2\pi ix_1\xi_1}d\mathcal{L}^1(x_1)\cdots\int_{\mathbb{R}}e^{-ax_n^2}e^{-2\pi ix_n\xi_n}d\mathcal{L}^1(x_n)$$
$$=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\pi^2}{a}\xi_1^2}\cdots\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\pi^2}{a}\xi_n^2}=\Big(\sqrt{\frac{\pi}{a}}\Big)^n e^{-\frac{\pi^2}{a}\|\xi\|^2}.$$

W przypadku $n=1$, niech

$$f(\xi) := \mathcal{F}(e^{-ax^2})(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} e^{-2\pi i x\xi} d\mathcal{L}^1(x), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Na podstawie twierdzenia o funkcjach danych całką wiemy, że $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ oraz

$$\begin{aligned} f'(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}(-2\pi i x)e^{-2\pi i x\xi} dx = e^{-ax^2}\frac{\pi i}{a}e^{-2\pi i x\xi}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\frac{\pi i}{a}(-2\pi i\xi)e^{-2\pi i x\xi} dx \\ &= -\frac{2\pi^2}{a}\xi f(\xi). \end{aligned}$$

Rozwiązując to równanie różniczkowe dostajemy

$$f(\xi) = Ce^{-\frac{\pi^2}{a}\xi^2}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Pozostaje wyznaczyć stałą C. Mamy

$$C = f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \text{(Ćwiczenie).} \qquad \square$$

Twierdzenie 16.2.6. (a) $\widehat{\widehat{f}} = \overset{\vee}{f}$ *dla dowolnej funkcji* $f \in \mathcal{X}$. *W szczególności, transformacja Fouriera przekształca bijektywnie* $\mathcal{X}$ *na* $\mathcal{X}$ *oraz* $(\mathcal{F}|_{\mathcal{X}})^{-1}(f) = \overset{\vee}{\widehat{f}}$, $f \in \mathcal{X}$.

(b) $\widehat{f\cdot g} = \widehat{f} * \widehat{g}$ *dla dowolnych* $f, g \in \mathcal{X}$.

(c) $\widehat{f * g} = \widehat{f}\cdot\widehat{g}$ *dla dowolnych* $f, g \in \mathcal{X}$ [3].

(d) $\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}\cdot\overline{\widehat{g}}\, d\mathcal{L}^n = \int_{\mathbb{R}^n} f\cdot\overline{g}\, d\mathcal{L}^n$ *dla dowolnych* $f, g \in \mathcal{X}$. *W szczególności,* $\|\widehat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$, $f \in \mathcal{X}$ *(a więc* $\mathcal{F} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ *jest izometrią w sensie normy* L^2*).*

Dowód. (a) Niech $g_\varepsilon(x) := e^{-\pi\varepsilon^2\|x\|^2}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$. Zauważmy, że $g_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Na podstawie Lematów 16.2.4 i 16.2.5, mamy

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon(x)\widehat{f}(x)e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle} d\mathcal{L}^n(x) &= \widehat{g_\varepsilon}\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}_\varepsilon(x+\xi)f(x)d\mathcal{L}^n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}_\varepsilon(x)f(x-\xi)d\mathcal{L}^n(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\varepsilon^n}e^{-\frac{\pi}{\varepsilon^2}\|x\|^2} f(x-\xi)d\mathcal{L}^n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\|x\|^2} f(\varepsilon x-\xi)d\mathcal{L}^n(x). \end{aligned}$$

Ponieważ $g_\varepsilon \longrightarrow 1$ przy $\varepsilon \longrightarrow 0$ (punktowo na $\mathbb{R}^n$) oraz $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, zatem, na podstawie twierdzenia Lebesgue'a, lewa strona dąży do $\widehat{\widehat{f}}(\xi)$. Ponieważ f jest ciągła i ograniczona, zatem, ponownie korzystając z twierdzenia Lebesgue'a, wnioskujemy, że prawa strona dąży do $f(-\xi)$, co kończy dowód.

(b) Korzystamy z (a) i Lematu 16.2.4:

$$\widehat{f\cdot g}(\xi) = (g\cdot\overset{\widehat{\vee}}{\widehat{f}})\widehat{\ }(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(x+\xi)\overset{\vee}{\widehat{f}}(x)d\mathcal{L}^n(x) = (\widehat{f} * \widehat{g})(\xi).$$

(c) Korzystamy z (a) i (b):

$$\widehat{f * g} = (\overset{\widehat{\vee}}{\widehat{f}} * \overset{\widehat{\vee}}{\widehat{g}})\widehat{\ } = (\overset{\vee}{\widehat{f}}\cdot\overset{\vee}{\widehat{g}})\widehat{\ } = \widehat{f}\cdot\widehat{g}.$$

(d) Korzystamy z Lematu 16.2.4 oraz (a):

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}\cdot\overline{\widehat{g}}\, d\mathcal{L}^n = \int_{\mathbb{R}^n} f\cdot\overline{\widehat{\widehat{g}}}\, d\mathcal{L}^n = \int_{\mathbb{R}^n} f\cdot\overline{\overset{\widehat{\vee}}{\widehat{g}}}\, d\mathcal{L}^n = \int_{\mathbb{R}^n} f\cdot\overline{g}\, d\mathcal{L}^n. \qquad \square$$

Definicja 16.2.7. Mówimy, że funkcja $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ jest *szybkomalejąca* ($f \in \mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) jeżeli dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ mamy

$$\|f\|_{\alpha,\beta} := \sup\{|x^\alpha D^\beta f(x)| : x \in \mathbb{R}^n\} < +\infty.$$

[3] Wiadomo, że $f * g \in \mathcal{BC}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$, a więc nasze założenie oznacza, że $f * g \in \mathcal{X}$.

W szczególności, dla dowolnych $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ i $k \in \mathbb{N}_0$ mamy:

$$\lim_{r\to+\infty} r^k\Big(\max_{\|x\|=r}|D^\alpha f(x)|\Big) = 0.$$

Obserwacja 16.2.8 (Własności klasy $\mathcal{S}$). (a) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}) \subset \mathcal{S}$.

(b) $e^{-a\|x\|^2} \in \mathcal{S}$ dla dowolnego $a > 0$.

(c) Dla dowolnych $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ i $f \in \mathcal{S}$ mamy $D^\gamma f \in \mathcal{S}$.

(d) $\mathcal{S}$ jest zespoloną algebrą.

Jest widoczne, że $\mathcal{S}$ jest zespoloną przestrzenią wektorową. Ponadto, dla $f, g \in \mathcal{S}$ mamy:

$$\|f\cdot g\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\Big|x^\alpha\sum_{\gamma\leqslant\beta}\binom{\beta}{\gamma}D^\gamma f(x)D^{\beta-\gamma}g(x)\Big| \leqslant \sum_{\gamma\leqslant\beta}\binom{\beta}{\gamma}\|f\|_{\alpha,\gamma}\|g\|_{0,\beta-\gamma} < +\infty.$$

(e) Dla dowolnych $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ i $f \in \mathcal{S}$ mamy $x^\gamma f \in \mathcal{S}$. W konsekwencji, $P\cdot f \in \mathcal{S}$ dla dowolnego wielomianu $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ oraz $f \in \mathcal{S}$.

(f) Funkcja $\mathcal{S} \ni f \longmapsto \|f\|_{\alpha,\beta}$ jest seminormą (dla dowolnych $\alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n$). Pozwala to wprowadzić w $\mathcal{S}$ strukturę przestrzeni metrycznej ze zbieżnością zadaną przy pomocy relacji

$$\mathcal{S} \ni f_k \xrightarrow{\mathcal{S}} f \in \mathcal{S}, \text{ jeżeli } \|f_k - f\|_{\alpha,\beta} \longrightarrow 0 \text{ dla dowolnych } \alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n.$$

(g) $\mathcal{S}$ jest przestrzenią zupełną — Ćwiczenie!

(h) Operator $\mathcal{S} \ni f \longmapsto D^\gamma f \in \mathcal{S}$ jest ciągły.

(i) Dla dowolnego wielomianu P, operator $\mathcal{S} \ni f \longmapsto P\cdot f \in \mathcal{S}$ jest ciągły.

(j) $\mathcal{S} \subset L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Ponadto, istnieją stałe $C = C(n,p)$, $s = s(n,p)$ takie, że

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\max\{\|f\|_{\alpha,0} : |\alpha| \leqslant s\} = C\cdot \boldsymbol{N}_s(f), \quad f \in \mathcal{S}.$$

W szczególności, operator $\mathrm{id} : \mathcal{S} \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ jest ciągły.

Istotnie, przypadek $p = \infty$ jest oczywisty ($\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{0,0}$). Niech $1 \leqslant p < +\infty$.

Niech $m := \lfloor \frac{n}{2p} \rfloor + 1$. Wtedy

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^p} &= \Big(\int_{\mathbb{R}^n}|f|^p d\mathcal{L}^n\Big)^{1/p} = \Big(\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\frac{(1+\|x\|^2)^m|f(x)|}{(1+\|x\|^2)^m}\Big)^p d\mathcal{L}^n(x)\Big)^{1/p}\\ &\leqslant \mathrm{const}(n,m)\boldsymbol{N}_{2m}(f)\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{d\mathcal{L}^n(x)}{(1+\|x\|^2)^{mp}}\Big)^{1/p}\\ &= \mathrm{const}(n,m)\boldsymbol{N}_{2m}(f)\Big(\int_0^\infty\frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{mp}}dr\Big)^{1/p} = \mathrm{const}(n,p)\boldsymbol{N}_{2m}(f).\end{aligned}$$

Obserwacja 16.2.9 (Własności transformacji Fouriera w klasie $\mathcal{S}$). (a) $D^\alpha\widehat{f} = (-2\pi i)^{|\alpha|}\widehat{x^\alpha f}$, $f \in \mathcal{S}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ (por. Obserwacja 16.2.2(d)).

Wzór ten wynika natychmiast z twierdzenia o różniczkowaniu pod znakiem całki: jeżeli $f \in \mathcal{S}$, to $x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, a stąd mamy:

$$D^\alpha\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} D_\xi^\alpha(f(x)e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle})d\mathcal{L}^n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(-2\pi i)^{|\alpha|}x^\alpha e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}d\mathcal{L}^n(x) = (-2\pi i)^{|\alpha|}\widehat{x^\alpha f}(\xi).$$

(b) $\xi^\alpha\widehat{f} = (2\pi i)^{-|\alpha|}\widehat{D^\alpha f}$, $f \in \mathcal{S}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

Wzór wystarczy oczywiście sprawdzić jedynie dla $\alpha = e_j$. Na podstawie wzoru Stokesa (Obserwacja 15.3.3(d)) mamy:

$$\begin{aligned}&(2\pi i)^{-1}\widehat{\Big(\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big)}(\xi) = (2\pi i)^{-1}\lim_{r\to+\infty}\int_{\mathbb{B}(r)}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}d\mathcal{L}^n(x)\\ &= (2\pi i)^{-1}\lim_{r\to+\infty}\Big(\int_{\partial\mathbb{B}(r)}f(x)e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}\boldsymbol{n}_j(x)d\mathcal{L}^{\partial\mathbb{B}(r)}(x) - \int_{\mathbb{B}(r)}f(x)(-2\pi i\xi_j)e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}d\mathcal{L}^n(x)\Big)\\ &= (2\pi i)^{-1}\lim_{r\to+\infty}\int_{\partial\mathbb{B}(r)}f(x)e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}\frac{x_j}{r}d\mathcal{L}^{\partial\mathbb{B}(r)}(x) + \xi_j\int_{\mathbb{R}^n}f(x)e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}d\mathcal{L}^n(x)\\ &= (2\pi i)^{-1}\lim_{r\to+\infty}\int_{\partial\mathbb{B}(r)}f(x)e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}\frac{x_j}{r}d\mathcal{L}^{\partial\mathbb{B}(r)}(x) + \xi_j\widehat{f}(\xi).\end{aligned}$$

Pozostaje wykazać, że

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{\partial\mathbb{B}(r)} f(x)e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}\frac{x_j}{r}d\mathcal{L}^{\partial\mathbb{B}(r)}(x)=0.$$

Korzystając z definicji klasy $\mathcal{S}$ mamy:

$$\Big|\int_{\partial\mathbb{B}(r)} f(x)e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}\frac{x_j}{r}d\mathcal{L}^{\partial\mathbb{B}(r)}(x)\Big|\leqslant \mathrm{const}(n)r^{n-1}\Big(\max_{\|x\|=r}|f(x)|\Big)\underset{r\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

(c) $\|\widehat{f}\|_{\alpha,\beta}=(2\pi)^{|\beta|-|\alpha|}\sup_{\mathbb{R}^n}|\widehat{D^\alpha(x^\beta f)}|\leqslant(2\pi)^{|\beta|-|\alpha|}\|D^\alpha(x^\beta f)\|_{L^1}$, $f\in\mathcal{S}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^n$. W szczególności, operator $\mathcal{F}$ jest izomorfizmem algebraicznym i topologicznym przestrzeni $\mathcal{S}$ na siebie (oraz $\mathcal{S}\subset\mathcal{X}$).

(d) Jeżeli $\sum\limits_{|\alpha|\leqslant N}a_\alpha D^\alpha u=f$, gdzie $a_\alpha\in\mathbb{C}$, $u,f\in\mathcal{S}$, to $\Big(\sum\limits_{|\alpha|\leqslant N}a_\alpha(2\pi i)^{|\alpha|}\xi^\alpha\Big)\widehat{u}(\xi)=\widehat{f}(\xi)$, $\xi\in\mathbb{R}^n$. Tak więc, po zastosowaniu transformacji Fouriera, równanie różniczkowe zostało zamienione na (na ogół łatwiejszy) problem podzielności funkcji $\widehat{f}$ przez wielomian $P(\xi):=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant N}a_\alpha(2\pi i)^{|\alpha|}\xi^\alpha$ w klasie $\mathcal{S}$.

Definicja 16.2.10. Funkcjonały liniowe i ciągłe $T:\mathcal{S}\longrightarrow\mathbb{C}$ nazywamy *dystrybucjami temperowanymi* (tzn. jeżeli $f_k\overset{\mathcal{S}}{\longrightarrow}f$, to $T(f_k)\longrightarrow T(f)$). Zbiór wszystkich dystrybucji temperowanych oznaczamy przez $\mathcal{S}'=\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. W przestrzeni $\mathcal{S}'$ rozważamy topologię zbieżności punktowej ($T_k\overset{\mathcal{S}'}{\longrightarrow}T:\Longleftrightarrow\forall_{f\in\mathcal{S}}:\ T_k(f)\longrightarrow T(f)$).

Obserwacja 16.2.11 (Własności klasy $\mathcal{S}'$)**.** Niech $T\in\mathcal{S}'$.

(a) $\delta_a\in\mathcal{S}'$ dla dowolnego $a\in\mathbb{R}^n$.

(b) Dla $u\in L^2(\mathbb{R}^n)$, operator $\mathcal{S}\ni f\overset{[u]}{\longmapsto}\int_{\mathbb{R}^n}ufd\mathcal{L}^n$ jest dobrze określony i należy do $\mathcal{S}'$. W tym sensie $\mathcal{X}\subset L^2(\mathbb{R}^n)\subset\mathcal{S}'$.

Istotnie z nierówności Schwarza oraz Obserwacji 16.2.8 wynika, że

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^n}u\cdot f\,d\mathcal{L}^n\Big|\leqslant\|u\|_{L^2}\|f\|_{L^2}\leqslant C\|u\|_{L^2}\boldsymbol{N}_s(f),\quad f\in\mathcal{S},\ C:=C(n,2),\ s:=s(n,2).$$

(c) Operator $L^2(\mathbb{R}^n)\ni u\longmapsto[u]\in\mathcal{S}'$ jest ciągły.

(d) Dla funkcji mierzalnej $u:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{C}$ o wzroście wielomianowym, tzn.

$$|u(x)|\leqslant M(1+\|x\|^2)^m,\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

dla pewnych $M>0$ i $m\in\mathbb{N}_0$, operator $[u]$ jest dobrze określony i należy do $\mathcal{S}'$. Przykładem takich funkcji u są wielomiany.

Istotnie,

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\mathbb{R}^n}u\cdot f\,d\mathcal{L}^n\Big|&\leqslant M\int_{\mathbb{R}^n}(1+\|x\|^2)^m|f(x)|d\mathcal{L}^n(x)\leqslant M\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(1+\|x\|^2)^\sigma|f(x)|}{(1+\|x\|^2)^{\sigma-m}}\,d\mathcal{L}^n(x)\\&\leqslant M\,\mathrm{const}(n,m)\boldsymbol{N}_{2\sigma}(f),\quad f\in\mathcal{S},\ \sigma:=\lfloor m+n/2\rfloor+1.\end{aligned}$$

(e) Zdefiniujmy $(D^\alpha T)(f):=(-1)^{|\alpha|}T(D^\alpha f)$, $f\in\mathcal{S}$. Wtedy $D^\alpha T\in\mathcal{S}'$.

(f) Dla wielomianu P zdefiniujmy $(P\cdot T)(f):=T(P\cdot f)$, $f\in\mathcal{S}$. Wtedy $P\cdot T\in\mathcal{S}'$.

(g) Zdefiniujmy $\overset{\vee}{T}(f):=T(\overset{\vee}{f})$, $f\in\mathcal{S}$. Wtedy $\overset{\vee}{T}\in\mathcal{S}'$.

(h) Zdefiniujmy $\widehat{T}(f):=T(\widehat{f})$, $f\in\mathcal{S}$. Wtedy $\widehat{T}\in\mathcal{S}'$.

Definicja 16.2.12. Dystrybucję $\widehat{T}$ nazywamy *transformatą Fouriera dystrybucji* T.

Operację $\mathcal{S}'\ni T\overset{\mathcal{F}}{\longmapsto}\widehat{T}\in\mathcal{S}'$ nazywamy *transformacją Fouriera dystrybucji*.

Obserwacja 16.2.13 (Własności transformacji Fouriera w klasie $\mathcal{S}'$)**.** (a) Transformacja Fouriera

$$\mathcal{F}:\mathcal{S}'\longrightarrow\mathcal{S}'$$

jest izomorfizmem algebraicznym i topologicznym; $\mathcal{F}^{-1}(T)=\overset{\vee}{\widehat{T}}$.

(b) $\widehat{[u]}=[\widehat{u}]$, $u\in\mathcal{X}\supset\mathcal{S}$.

Istotnie, wtedy $u,\widehat{u}\in L^2(\mathbb{R}^n)$, skąd wynika, że $[u],[\widehat{u}]\in\mathcal{S}'$. Ponadto, na podstawie Lematu 16.2.4, mamy:

$$\widehat{[u]}(f)=[u](\widehat{f})=\int_{\mathbb{R}^n}u\cdot\widehat{f}\,d\mathcal{L}^n=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{u}\cdot f\,d\mathcal{L}^n=[\widehat{u}](f),\quad f\in\mathcal{S}.$$

(c) $\widehat{D^\alpha T} = (2\pi i)^{|\alpha|}\xi^\alpha \widehat{T}$, $T \in \mathcal{S}'$.

Istotnie, na podstawie Obserwacji 16.2.9, mamy

$$\widehat{D^\alpha T}(f) = D^\alpha T(\widehat{f}) = (-1)^{|\alpha|}T(D^\alpha \widehat{f}) = (-1)^{|\alpha|}T(\widehat{(-2\pi i)^{|\alpha|}x^\alpha f}) = (2\pi i)^{|\alpha|}(\xi^\alpha \widehat{T})(f), \quad f \in \mathcal{S}.$$

(d) $D^\alpha \widehat{T} = (-2\pi i)^{|\alpha|}\widehat{x^\alpha T}$, $T \in \mathcal{S}'$.

Istotnie,

$$D^\alpha \widehat{T}(f) = (-1)^{|\alpha|}\widehat{T}(D^\alpha f) = (-1)^{|\alpha|}T(\widehat{D^\alpha f}) = (-1)^{|\alpha|}T((2\pi i)^{|\alpha|}\xi^\alpha \widehat{f}) = (-2\pi i)^{|\alpha|}(\widehat{x^\alpha T})(f), \quad f \in \mathcal{S}.$$

(e) $\widehat{\delta}_0 = [1]$, $\widehat{[1]} = \delta_0$, $D^\alpha \delta_0 = (-2\pi i)^{|\alpha|}\widehat{[x^\alpha]}$.

Istotnie,

$$\widehat{\delta}_0(f) = \delta_0(\widehat{f}) = \widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)d\mathcal{L}^n(x) = [1](f), \quad f \in \mathcal{S},$$

$$\widehat{[1]} = \widehat{\widehat{\delta}_0} = \overset{\vee}{\delta}_0 = \delta_0, \quad D^\alpha \delta_0 = D^\alpha \widehat{[1]} = (-2\pi i)^{|\alpha|}\widehat{x^\alpha [1]} = (-2\pi i)^{|\alpha|}\widehat{[x^\alpha]}.$$

(f) $\widehat{[u]} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ dla $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Ponadto, $\|\widehat{[u]}\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}$, czyli operator $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ jest izometrią.

Ustalmy $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Zauważmy, że korzystając z Twierdzenia 16.2.6(d), mamy

$$|\widehat{[u]}(f)| = |[u](\widehat{f})| \leqslant \|u\|_{L^2}\|\widehat{f}\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}\|f\|_{L^2}, \quad f \in \mathcal{S}.$$

Przestrzeń $\mathcal{S}$ jest gęsta w $L^2(\mathbb{R}^n)$ w normie L^2. W takim razie, $\widehat{[u]}$ przedłuża się do funkcjonału liniowego i ciągłego $\Lambda : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ takiego, że $\|\Lambda\| \leqslant \|u\|_{L^2}$. Korzystając z twierdzenia Riesza $\binom{4}{}$, wnioskujemy, że istnieje funkcja $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ taka, że $\Lambda(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot g \, d\mathcal{L}^n$, $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, oraz $\|g\|_{L^2} = \|\Lambda\|$. Oznacza to, że $\widehat{[u]} = [g]$, czyli $\widehat{[u]} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ oraz $\|\widehat{[u]}\|_{L^2} \leqslant \|u\|_{L^2}$. Dla dowodu równości, zastosujmy poprzednią nierówność do funkcji $\widehat{[u]}$: $\|u\|_{L^2} = \|\overset{\vee}{u}\|_{L^2} = \|\overset{\vee}{[u]}\|_{L^2} = \|\widehat{\widehat{[u]}}\|_{L^2} \leqslant \|\widehat{[u]}\|_{L^2}$.

(g) Jeżeli $\sum\limits_{|\alpha|\leqslant N} a_\alpha D^\alpha U = T$, gdzie $a_\alpha \in \mathbb{C}$, $U, T \in \mathcal{S}'$, to $\Big(\sum\limits_{|\alpha|\leqslant N} a_\alpha (2\pi i)^{|\alpha|}\xi^\alpha\Big)\widehat{U} = \widehat{T}$. Tak więc, po zastosowaniu transformacji Fouriera, dystrybucyjne równanie różniczkowe zostało zamienione na (na ogół trudny) problem podzielności dystrybucji $\widehat{T}$ przez wielomian $P(\xi) := \sum\limits_{|\alpha|\leqslant N} a_\alpha (2\pi i)^{|\alpha|}\xi^\alpha$ w klasie $\mathcal{S}'$.

16.3. Twierdzenie Stokesa w wersji kohomologicznej

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym.

Powiemy, że forma $u \in \mathcal{C}^1_{(d)}(\Omega)$ jest *zamknięta* (jest *kocyklem*), jeżeli $du = 0$.

Jeżeli forma $u \in \mathcal{C}_{(d)}(\Omega)$ jest taka, że $u = dw$ dla pewnej formy $w \in \mathcal{C}^1_{(d-1)}(\Omega)$, to mówimy, że u jest *dokładna* (jest *kobrzegiem*).

Z faktu iż $d^2 = 0$ wynika, że jeżeli $u = dw$ jest formą dokładną i w jest klasy $\mathcal{C}^2$, to u jest zamknięta.

Definicja 16.3.1. Zdefiniujmy

$$\mathcal{Z}^d(\Omega) := \{u \in \mathcal{C}^\infty_{(d)}(\Omega) : du = 0\}, \quad d \geqslant 0,$$
$$\mathcal{B}^0(\Omega) := \{0\}, \qquad \mathcal{B}^d(\Omega) := \{dw : w \in \mathcal{C}^\infty_{(d-1)}(\Omega)\}, \quad d \geqslant 1;$$

$\mathcal{B}^d(\Omega)$ jest podprzestrzenią $\mathcal{Z}^d(\Omega)$. Niech

$$H^d(\Omega) := \mathcal{Z}^d(\Omega)/\mathcal{B}^d(\Omega), \quad d = 0, 1, 2, \ldots;$$

$H^d(\Omega)$ nazywamy *d-tą grupą kohomologii Ω*.

Obserwacja 16.3.2. (a) Formy z $\mathcal{Z}^0(\Omega)$ to funkcje lokalnie stałe. W szczególności, jeżeli $\Omega = D$ jest obszarem, to $\mathcal{Z}^0(D) \simeq \mathbb{R}$, a stąd $H^0(D) \simeq \mathbb{R}$.

(b) $\mathcal{Z}^n(\Omega) = \mathcal{C}^\infty_{(n)}(\Omega)$.

(c) Dla $d > n$ mamy: $\mathcal{Z}^d(\Omega) = \mathcal{B}^d(\Omega) = \{0\}$, a stąd $H^d(\Omega) = \{0\}$.

(d) Lemat Poincarégo (Twierdzenie 15.1.5) mówi, że jeżeli obszar D jest ściągalny różniczkowo do punktu w klasie $\mathcal{C}^\infty$ (np. D jest gwiaździsty), to $H^d(D) = \{0\}$ dla dowolnego $d \geqslant 1$.

$\binom{4}{}$ Frederic Riesz (1880–1956).

Definicja 16.3.3. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym. Przez d–wymiarowy *płat powierzchniowy* klasy $\mathcal{C}^k$ w Ω rozumiemy dowolne odwzorowanie $\gamma : P \longrightarrow \Omega$ klasy $\mathcal{C}^k$, gdzie $P \subset \mathbb{R}^d$ jest pewną kostką, $d \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Mówiąc, że γ jest klasy $\mathcal{C}^k$ rozumiemy, że γ przedłuża się do odwzorowania klasy $\mathcal{C}^k$ w pewnym otoczeniu P (otoczeniu zależnym od γ). Niech $\mathbf{P}^k_{(d)}(\Omega)$ oznacza rodzinę wszystkich d–wymiarowych płatów klasy $\mathcal{C}^k$ w Ω

Płat 0–wymiarowy to dowolne odwzorowanie zbioru jednopunktowego w $\mathbb{R}^n$, które będziemy utożsamiać z jego obrazem (dla $d = 0$ klasa płata nie odgrywa żadnej roli). Tak więc $\mathbf{P}^k_{(0)}(\Omega) \simeq \Omega$.

Płat 1–wymiarowy klasy $\mathcal{C}^k$ to krzywa klasy $\mathcal{C}^k$. Jeżeli $M \subset \Omega$ jest d–wymiarową podrozmaitością Ω klasy $\mathcal{C}^k$, to dla dowolnego punktu $a \in M$ istnieje d–wymiarowy płat powierzchniowy $\gamma : P \longrightarrow M$ taki, że $\gamma : P \longrightarrow \gamma(P)$ jest homeomorfizmem, $\operatorname{rank} \gamma'(t) = d$ dla dowolnego $t \in P$, oraz $a \in \operatorname{int}_M(\gamma(P))$.

Oznaczmy przez $\mathbf{Ł}^k_{(d)}(\Omega)$ przestrzeń wektorową wszystkich formalnych kombinacji o współczynnikach rzeczywistych elementów z $\mathbf{P}^k_{(d)}(\Omega)$. Elementy przestrzeni $\mathbf{Ł}^k_{(d)}(\Omega)$ nazywamy d–wymiarowymi *łańcuchami* klasy $\mathcal{C}^k$ w Ω.

Dla $\gamma \in \mathbf{P}^1_{(d)}(\Omega)$ ($\gamma : P \longrightarrow \Omega$) i $u \in \mathcal{C}_{(d)}(\Omega)$, niech

$$\int_\gamma u := \int_P \gamma^*(u)\, d\mathcal{L}^d. \quad (5)$$

Dla $d = 0$ przyjmujemy $\int_\gamma u := u(\gamma)$. Dla $d = 1$, całka $\int_\gamma u$, gdzie $u = u_1 dx_1 + \cdots + u_n dx_n$, pokrywa się z całką krzywoliniową zorientowaną po krzywej γ z pola $(u_1, \ldots, u_n)$. Dla dowolnego d, całka $\int_\gamma u$ stanowi uogólnienie całki po podrozmaitości z formy różniczkowej: jeżeli $\gamma : P \longrightarrow \Omega$ jest d–wymiarowym płatem klasy $\mathcal{C}^1$ takim, że $\gamma : P \longrightarrow \gamma(P)$ jest homeomorfizmem i $\operatorname{rank} \gamma'(t) = d$ dla dowolnego $t \in P$, to wtedy całka $\int_\gamma u$ pokrywa się z całką po podrozmaitości $\gamma(\operatorname{int} P)$ przy orientacji zadanej przez γ.

Powyższą definicję rozszerzamy liniowo na $\gamma \in \mathbf{Ł}^1_{(d)}(\Omega)$:

$$\int_{\sum_{i=1}^N \alpha_i \gamma_i} u := \sum_{i=1}^N \alpha_i \int_{\gamma_i} u.$$

Widać, że operacja

$$\mathbf{Ł}^1_{(d)}(\Omega) \times \mathcal{C}_{(d)}(\Omega) \ni (\gamma, u) \longmapsto \int_\gamma u \in \mathbb{R}$$

jest dwuliniowa.

Obserwacja 16.3.4. Jeżeli $\gamma : P \longrightarrow \Omega$ jest d–wymiarowym płatem klasy $\mathcal{C}^k$ ($k \geqslant 1$) i $\varphi : Q \longrightarrow P$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$, gdzie $Q \subset \mathbb{R}^d$ jest pewną kostką, to $\gamma \circ \varphi : Q \longrightarrow \Omega$ jest d–wymiarowym płatem klasy $\mathcal{C}^k$ oraz

$$\int_{\gamma\circ\varphi} u = \varepsilon \int_\gamma u, \quad u \in \mathcal{C}_{(d)}(\Omega),$$

gdzie $\varepsilon := \operatorname{sgn}(\det \varphi')$. Istotnie, niech $f := \gamma^*(u)$. Wtedy

$$(\gamma \circ \varphi)^*(u) = \varphi^*(\gamma^*(u)) = (f \circ \varphi) \det \varphi', \text{ a stąd}$$

$$\int_{\gamma\circ\varphi} u = \varepsilon \int_Q (f \circ \varphi) |\det \varphi'| d\mathcal{L}^d = \varepsilon \int_P f d\mathcal{L}^d = \varepsilon \int_\gamma u.$$

Powyższa obserwacja pozwala dokonywać zmiany parametryzacji płatów. Możemy zawsze zakładać, że płaty są sparametryzowane w kostce $[0, 1]^d$ (tak zwykle robiliśmy dla krzywych).

Twierdzenie 16.3.5. *Niech $u, v \in \mathcal{C}_{(d)}(\Omega)$. Wtedy*

$$u \equiv v \iff \forall_{\gamma \in \mathbf{P}^\infty_{(d)}(\Omega)} : \int_\gamma u = \int_\gamma v.$$

---

(5) Tu i dalej, w zależności od potrzeb, będziemy utożsamiać formę maksymalnego rzędu $v = \widetilde{v} dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_d$ ze współczynnikiem $\widetilde{v}$.

Dowód. Przypadek $d=0$ jest trywialny. Zastępując formy u i v formami $u-v$ i 0, sprowadzamy twierdzenie do przypadku $v=0$. Niech $u=\sum'_{|I|=d} u_I dx_I$. Ustalmy punkt $a\in\Omega$ oraz $I=(i_1,\dots,i_d)\in\Lambda^n_d$. Pokażemy, że $u_I(a)=0$. Dla uproszczenia przyjmijmy, że $I=(1,\dots,d)$. Rozważmy płat

$$[-\varepsilon,\varepsilon]^d\ni(t_1,\dots,t_d)\overset{\gamma}{\longmapsto}(a_1+t_1,\dots,a_d+t_d,a_{d+1},\dots,a_n).$$

Dla małych $\varepsilon>0$ jest to oczywiście d–wymiarowy płat klasy $\mathcal{C}^\infty$ w Ω. Tak więc, dla małych $\varepsilon>0$ mamy

$$0=\frac{1}{(2\varepsilon)^d}\int_\gamma u=\frac{1}{(2\varepsilon)^d}\int_{[-\varepsilon,\varepsilon]^d}u_I(\gamma(t))dt=u_I(\xi_\varepsilon),$$

gdzie ξ_ε jest pewnym punktem z $\gamma([-\varepsilon,\varepsilon]^d)$. Oczywiście $\xi_\varepsilon\longrightarrow a$, gdy $\varepsilon\longrightarrow 0$. Ostatecznie, korzystając z ciągłości, wnioskujemy, że $u_I(a)=0$. □

Definicja 16.3.6. Niech $\gamma\in\mathbf{P}^k_{(d)}(\Omega)$, $d\geqslant 1$, $\gamma:P\longrightarrow\Omega$, $P=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_d,b_d]=:Q_1\times\cdots\times Q_d$. Dla $d\geqslant 2$ definiujemy:

$$\begin{aligned}P_j&:=Q_1\times\cdots\times Q_{j-1}\times Q_{j+1}\times\cdots\times Q_d,\quad \sigma_j^-:P_j\longrightarrow P,\quad \sigma_j^+:P_j\longrightarrow P,\\ \sigma_j^-(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_d)&:=(x_1,\dots,x_{j-1},a_j,x_{j+1},\dots,x_d),\\ \sigma_j^+(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_d)&:=(x_1,\dots,x_{j-1},b_j,x_{j+1},\dots,x_d).\end{aligned}$$

W przypadku $d=1$ przyjmujemy $\sigma_1^-:=a_1$, $\sigma_1^+:=b_1$. Niech

$$\partial\gamma:=\sum_{j=1}^d(-1)^{j-1}\Big(\gamma\circ\sigma_j^+-\gamma\circ\sigma_j^-\Big)\in\mathbf{Ł}^k_{(d-1)}(\Omega).$$

Łańcuch $\partial\gamma$ nazywamy *brzegiem* płata γ. Operację brzegu przedłużamy liniowo na $\mathbf{Ł}^k_{(d)}(\Omega)$:

$$\partial:\mathbf{Ł}^k_{(d)}(\Omega)\longrightarrow\mathbf{Ł}^k_{(d-1)}(\Omega).$$

Przykład 16.3.7. (a) Jeżeli $d=1$, $\gamma:[a,b]\longrightarrow\Omega$, to

$$\partial\gamma=\gamma(b)-\gamma(a)\in\mathbf{Ł}^\infty_{(0)}(\Omega).$$

(b) Jeżeli $d=2$, $\gamma:[a,b]\times[c,d]\longrightarrow\Omega$, to

$$\partial\gamma=\gamma(b,\cdot)-\gamma(a,\cdot)-\gamma(\cdot,d)+\gamma(\cdot,c)\in\mathbf{Ł}^k_{(d-1)}(\Omega).$$

Twierdzenie 16.3.8. *Jeżeli $d\geqslant 2$, to $\partial\circ\partial=0$ na $\mathbf{Ł}^k_{(d)}(\Omega)$.*

Dowód. Oczywiście wystarczy pokazać, że $\partial\circ\partial=0$ na $\mathbf{P}^k_{(d)}(\Omega)$. Ustalmy $\gamma\in\mathbf{P}^k_{(d)}(\Omega)$, $\gamma:P\longrightarrow\Omega$, $P=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_d,b_d]=:Q_1\times\cdots\times Q_d$. Dla $1\leqslant i<j\leqslant d$ niech

$$P_{i,j}:=Q_1\times\cdots\times Q_{i-1}\times Q_{i+1}\times\cdots\times Q_{j-1}\times Q_{j+1}\times\cdots\times Q_d$$

oznacza $(d-2)$ wymiarową kostkę powstałą z P przez „pominięcie" dwóch przedziałów. Niech dalej

$$\sigma_{i,j}^{-,-}:P_{i,j}\longrightarrow P$$

oznacza odwzorowanie „wstawiające" na miejscach i i j, odpowiednio, a_i i a_j, tzn.

$$\sigma_{i,j}^{-,-}(z_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_d):=(x_1,\dots,x_{i-1},a_i,x_{i+1},\dots,x_{j-1},a_j,x_{j+1},\dots,x_d).$$

Podobnie tworzymy odwzorowania $\sigma_{i,j}^{-,+}$, $\sigma_{i,j}^{+,-}$ i $\sigma_{i,j}^{+,+}$ wstawiając, odpowiednio, pary (a_i,b_j), (b_i,a_j) i (b_i,b_j). Przy tych oznaczeniach mamy:

$$\begin{aligned}(\partial\circ\partial)(\gamma)&=\partial\Big(\sum_{j=1}^d(-1)^{j-1}(\gamma\circ\sigma_j^+-\gamma\circ\sigma_j^-)\Big)\\ &=\sum_{j=1}^d(-1)^{j-1}\Big(\sum_{i=1}^{j-1}(-1)^{i-1}(\gamma\circ\sigma_{i,j}^{+,+}-\gamma\circ\sigma_{i,j}^{-,+}-\gamma\circ\sigma_{i,j}^{+,-}+\gamma\circ\sigma_{i,j}^{-,-})\\ &\qquad+\sum_{i=j+1}^d(-1)^i(\gamma\circ\sigma_{j,i}^{+,+}-\gamma\circ\sigma_{j,i}^{+,-}-\gamma\circ\sigma_{j,i}^{-,+}+\gamma\circ\sigma_{j,i}^{-,-})\Big)\end{aligned}$$

$$= \sum_{i<j}(-1)^{i+j}(\dots) - \sum_{i>j}(-1)^{i+j}(\dots) = 0. \qquad \square$$

Łańcuchy $\gamma \in \mathbf{Ł}^k_{(d)}(\Omega)$ takie, że $\partial\gamma = 0$ nazywamy *cyklami*. Jeżeli $\gamma = \partial\delta$ dla pewnego $\delta \in \mathbf{Ł}^k_{(d+1)}(\Omega)$ to mówimy, że γ jest *brzegiem*.

Z faktu, że $\partial^2 = 0$ wynika, że każdy brzeg jest cyklem (ale nie odwrotnie — Ćwiczenie).

Definicja 16.3.9. Zdefiniujmy

$$\mathcal{Z}_d(\Omega) := \{\gamma \in \mathbf{Ł}^\infty_{(d)}(\Omega) : \partial\gamma = 0\},$$
$$\mathcal{B}_d(\Omega) := \{\partial\gamma : \gamma \in \mathbf{Ł}^\infty_{(d+1)}(\Omega)\}, \quad d \geqslant 1;$$

$\mathcal{B}_d(\Omega)$ jest podprzestrzenią $\mathcal{Z}_d(\Omega)$. Niech

$$H_d(\Omega) := \mathcal{Z}_d(\Omega)/\mathcal{B}_d(\Omega), \quad d = 1, 2, \dots;$$

$H_d(\Omega)$ nazywamy *d-tą grupą homologii Ω*.

Obserwacja 16.3.10. Rozważmy ciąg płatów $\gamma_\nu \in \mathbf{P}^1_{(d)}(\Omega)$,

$$\gamma_\nu : P \longrightarrow \Omega, \quad \nu \in \mathbb{N}_0,$$

określonych na tej samej kostce P ($d \geqslant 1$). Załóżmy, że

- $\gamma_\nu \longrightarrow \gamma_0$ jednostajnie na P oraz
- $\frac{\partial\gamma_\nu}{\partial t_j} \longrightarrow \frac{\partial\gamma_0}{\partial t_j}$ jednostajnie na P, $j = 1, \dots, d$.

Wtedy dla dowolnej formy $u \in \mathcal{C}^1_{(d-1)}(\Omega)$ mamy:

$$\int_{\gamma_\nu} du \longrightarrow \int_{\gamma_0} du, \quad \int_{\partial\gamma_\nu} u \longrightarrow \int_{\partial\gamma_0} u.$$

Istotnie, łatwo sprawdzić (Ćwiczenie), że:

- dla dowolnej formy $v \in \mathcal{C}_{(d)}(\Omega)$ mamy: $\gamma_\nu^*(v) \longrightarrow \gamma_0^*(v)$ jednostajnie na P oraz
- dla dowolnej $(d-1)$–wymiarowej „ściany” Q kostki P mamy:

$$(\gamma_\nu \circ \sigma)^*(u) \longrightarrow (\gamma_0 \circ \sigma)^*(u) \text{ jednostajnie na } Q,$$

gdzie $\sigma : Q \longrightarrow P$ oznacza „włożenie” ściany Q w kostkę P.

Twierdzenie 16.3.11 (Twierdzenie Stokesa)**.**

$$\int_\gamma du = \int_{\partial\gamma} u, \quad \gamma \in \mathbf{Ł}^1_{(\mathrm{d})}(\Omega),\ u \in \mathcal{C}^1_{(d-1)}(\Omega),\ d \geqslant 1.$$

Dowód. Możemy założyć, że $\gamma : P \longrightarrow \Omega$ jest płatem klasy $\mathcal{C}^1$.

Najpierw rozpatrzymy przypadek $d = 1$. Niech $P = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Mamy:

$$\int_\gamma du = \int_a^b \gamma^*(u'dx) = \int_a^b u'(\gamma(t))\gamma'(t) = u(\gamma(b)) - u(\gamma(a)) = \int_{\partial\gamma} u.$$

Niech teraz $d \geqslant 2$. Załóżmy dodatkowo, że γ jest klasy $\mathcal{C}^2(U)$, gdzie U jest pewnym otoczeniem P. Wtedy mamy

$$\int_\gamma du = \int_P \gamma^*(du) = \int_P d\gamma^*(u),$$

$$\int_{\partial\gamma} u = \sum_{j=1}^d (-1)^{j-1} \int_{P_j} \Big((\sigma_j^+)^*(\gamma^*(u)) - (\sigma_j^-)^*(\gamma^*(u))\Big).$$

Podstawiając $v := \gamma^*(u) \in \mathcal{C}^1_{(d-1)}(U)$, sprowadzamy problem do równości

$$\int_P dv = \sum_{j=1}^d \int_{P_j} (-1)^{j-1} \Big((\sigma_j^+)^*(v) - (\sigma_j^-)^*(v)\Big).$$

Bez szkody dla ogólności możemy przyjąć, że $v = f dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{d-1}$. Wtedy

$$dv = (-1)^{d-1} \frac{\partial f}{\partial t_d} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_d,$$

a stąd

$$\int_P dv = (-1)^{d-1}\int_{P_d\times[a_d,b_d]}\frac{\partial f}{\partial t_d}dxdt_d = (-1)^{d-1}\int_{P_d}(f(x,b)-f(x,a))dx.$$

Z drugiej strony,

$$\begin{aligned}(\sigma_j^{\pm})^*(v)&=0,\quad j=1,\dots,d-1,\\ (\sigma_d^-)^*(v)&=f(x_1,\dots,x_{d-1},a_d)dx_1\wedge\dots\wedge dx_{d-1},\\ (\sigma_d^+)^*(v)&=f(x_1,\dots,x_{d-1},b_d)dx_1\wedge\dots\wedge dx_{d-1},\end{aligned}$$

a stąd

$$\sum_{j=1}^d\int_{P_j}(-1)^{j-1}\Big((\sigma_j^+)^*(v)-(\sigma_j^-)^*(v)\Big)=(-1)^{d-1}\int_{P_d}\Big(f(x,b)-f(x,a)\Big)dx.$$

Teraz rozważymy przypadek, gdy γ jest tylko klasy $\mathcal{C}^1$ w pewnym otoczeniu U. Korzystając ze zwartości obrazu $\gamma(P)\subset\Omega$ oraz z własności regularyzacji znajdziemy ciąg funkcji $(\gamma_\nu)_{\nu=1}^\infty\subset\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^n)$ taki, że $\gamma_\nu(P)\subset\Omega$, $\nu\in\mathbb{N}$, oraz $\gamma_\nu\longrightarrow\gamma$ i $\frac{\partial\gamma_\nu}{\partial t_j}\longrightarrow\frac{\partial\gamma}{\partial t_j}$ jednostajnie na P, $j=1,\dots,d$. Wobec poprzedniej części dowodu, mamy

$$\int_{\gamma_\nu}du=\int_{\partial\gamma_\nu}u,\quad \nu\in\mathbb{N}.$$

Pozostaje skorzystać z Obserwacji 16.3.10. □

Twierdzenie 16.3.12. (a) *Załóżmy, że:*

- *łańcuch $\gamma\in\mathbf{Ł}^1_{(d)}(\Omega)$ jest brzegiem, $\gamma=\partial\zeta$ dla pewnego łańcucha $\zeta\in\mathbf{Ł}^1_{(d+1)}(\Omega)$, zaś forma $u\in\mathcal{C}^1_{(d)}(\Omega)$ jest zamknięta,*

lub

- *łańcuch $\gamma\in\mathbf{Ł}^1_{(d)}(\Omega)$ jest cyklem, zaś forma $u\in\mathcal{C}_{(d)}(\Omega)$ jest dokładna, $u=dw$ dla pewnej formy $w\in\mathcal{C}^1_{(d-1)}(\Omega)$.*

Wtedy $\int_\gamma u=0$.

(b) *W szczególności, dla dowolnych $\gamma\in\mathbf{Ł}^1_{(d)}(\Omega)$, $u\in\mathcal{C}^1_{(d)}(\Omega)$, $\zeta\in\mathbf{Ł}^1_{(d+1)}(\Omega)$, $w\in\mathcal{C}^1_{(d-1)}(\Omega)$, jeżeli $\partial\gamma=0$ i $du=0$, to*

$$\int_{\gamma+\partial\zeta}(u+dw)=\int_\gamma u.$$

Dla przykładu, operator

$$H_d(\Omega)\times H^d(\Omega)\ni([\gamma],[u])\longmapsto\int_\gamma u\in\mathbb{R}$$

jest poprawnie określony, $d=1,2,\dots$.

Dowód. (a) Jeżeli $\gamma=\partial\zeta$ i $du=0$, to na podstawie twierdzenia Stokesa mamy:

$$\int_\gamma u=\int_{\partial\zeta}u=\int_\zeta du=0.$$

Podobnie, jeżeli $\partial\gamma=0$ i $u=dw$, to

$$\int_\gamma u=\int_\gamma dw=\int_{\partial\gamma}w=0.$$

(b) wynika natychmiast z (a). □

Twierdzenie 16.3.13. *Niech $u\in\mathcal{C}^1_{(d)}(\Omega)$. Wtedy*

$$du=0\iff\forall_{\gamma\in\mathcal{B}_d(\Omega)}:\ \int_\gamma u=0.$$

Dowód. Implikacja ($\Longrightarrow$) wynika z poprzedniej propozycji. Dla dowodu implikacji ($\Longleftarrow$), na podstawie Propozycji 16.3.5, wystarczy pokazać, że

$$\int_\gamma du = 0, \quad \gamma \in \mathbf{P}^\infty_{(d+1)}(\Omega).$$

Ustalmy $\gamma \in \mathbf{P}^\infty_{(d+1)}(\Omega)$. Wtedy $\partial\gamma \in \mathcal{B}_d(\Omega)$. Na podstawie wzoru Stokesa i założeń mamy

$$\int_\gamma du = \int_{\partial\gamma} u = 0. \qquad \square$$

Twierdzenie 16.3.14. *Niech $w \in \mathcal{C}^1_{(d-1)}(\Omega)$ będzie taka, że $dw \in \mathcal{C}^1_{(d)}(\Omega)$. Wtedy $d(dw) = 0$* ([6]).

Dowód. Skorzystamy z poprzedniej propozycji. Niech $\gamma = \partial\zeta \in \mathcal{B}_d(\Omega)$. Wtedy na podstawie wzoru Stokesa mamy

$$\int_\gamma dw = \int_{\partial\gamma} w = \int_{\partial^2\zeta} w = 0. \qquad \square$$

Obserwacja 16.3.15. (a) Niech $\varphi : \Omega \longrightarrow \Omega'$ będzie dowolnym odwzorowaniem klasy $\mathcal{C}^k$. Dla płata $\gamma \in \mathbf{P}^k_{(d)}(\Omega)$ połóżmy $\varphi_*(\gamma) := \varphi \circ \gamma$. Operację tę przedłużamy liniowo na $\mathbf{Ł}^k_{(d)}(\Omega)$. Zauważmy, że $\varphi_* \circ \partial = \partial \circ \varphi_*$. W szczególności, jeżeli γ jest cyklem, to $\varphi_*(\gamma)$ jest również cyklem.

W przyszłości, jeżeli nie będzie to prowadzić do nieporozumień, będziemy pisać $\varphi(\gamma)$ zamiast $\varphi_*(\gamma)$ (dla dowolnego łańcucha γ).

(b) Przypuśćmy, że obszar $D \subset \mathbb{R}^n$ jest różniczkowo ściągalny do punktu $a \in D$ w klasie $\mathcal{C}^{k+1}$ (tak, jak w Lemacie Poincarégo (Twierdzenie 15.1.5)). Niech $h : \Omega \longrightarrow D$, $[0,1] \times D \subset \Omega$, będzie odwzorowaniem ściągającym klasy $\mathcal{C}^{k+1}$, $h(0,x) = a$, $h(1,x) = x$, $x \in D$. Niech $\gamma \in \mathbf{Ł}^{k+1}_{(d)}(D)$ będzie dowolnym cyklem. Wtedy $\gamma = a + \partial\zeta$ dla pewnego łańcucha $\zeta \in \mathbf{Ł}^{k+1}_{(d+1)}(D)$, gdzie a utożsamiamy z płatem stałym. W szczególności, na podstawie Propozycji 16.3.12(b), $\int_\gamma u = 0$ dla dowolnej formy zamkniętej $u \in \mathcal{C}^1_{(d)}(D)$, $d \geqslant 1$.

Istotnie, niech $\gamma = \sum_{i=1}^N \alpha_i\gamma_i$, $\gamma_i : P_i \longrightarrow D$, $i = 1,\dots,N$. Zdefiniujmy

$$\zeta := \sum_{i=1}^N \alpha_i\zeta_i, \quad \zeta_i : [0,1] \times P_i \longrightarrow D, \quad \zeta_i(s,t) := h(s,\gamma_i(t)), \quad i = 1,\dots,N.$$

Łatwo widać, że

$$\partial\zeta_i = h(1,\gamma_i) - h(0,\gamma_i) - h(\mathrm{id}_{[0,1]}, \partial\gamma_i), \quad i = 1,\dots,N.$$

Wynika stąd, że

$$\partial\zeta = h(1,\gamma) - h(0,\gamma) - h(\mathrm{id}_{[0,1]}, \partial\gamma) = h(1,\gamma) - h(0,\gamma) = \gamma - a,$$

co kończy dowód.

Twierdzenie* 16.3.16 (Twierdzenie de Rhama [7])**.** *Niech $u \in \mathcal{C}^k_{(d)}(D)$ ($k \geqslant 1$, $d \geqslant 1$). Wtedy $u = dw$ dla pewnej formy $w \in \mathcal{C}^k_{(d-1)}(D)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\int_\gamma u = 0$ dla dowolnego cyklu $\gamma \in \mathcal{Z}_d(D)$.*

Dowód twierdzenia de Rhama pomijamy.

Obserwacja 16.3.17. (a) Implikacja ($\Longrightarrow$) wynika oczywiście z Propozycji 16.3.12.

(b) Na podstawie Propozycji 16.3.13, spełnienie warunku po prawej stronie pociąga za sobą, iż u jest zamknięta.

(c) Na podstawie Obserwacji 16.3.15(b), jeżeli spełnione są założenia Lematu Poincarégo, to spełniony jest warunek po prawej stronie Twierdzenia de Rhama (tak więc, twierdzenie de Rhama jest uogólnieniem Lematu Poincarégo).

(d) W przypadku $d = 1$ twierdzenie de Rhama można udowodnić analogicznie do Twierdzenia 12.4.1. Niech $u = u_1dx_1 + \cdots + u_ndx_n \in \mathcal{C}^k_{(1)}(D)$. Na wstępie zauważmy, że w kategorii łamanych $\gamma : [0,1] \longrightarrow D$, całka $\int_\gamma u$ zależy jedynie od końców krzywej. W tym celu wystarczy pokazać, że $\int_\gamma u = 0$ dla dowolnej łamanej zamkniętej

---

[6] Uwaga: nie zakładamy, że w jest klasy $\mathcal{C}^2$.

[7] Georges de Rham (1903–1990).

$\gamma : [0,1] \longrightarrow D$. Ten zaś fakt wynika natychmiast z tego, że każda łamana jest krzywą klasy $\mathcal{C}^\infty$ (Ćwiczenie), a jeżeli jest zamknięta, to jest cyklem z $\mathcal{Z}_1(D)$.

Jeżeli już mamy niezależność całki od drogi całkowania w kategorii łamanych, to definiujemy $w(x) := \int_{[x_0,\dots,x]} u$, $x \in D$, gdzie $x_0 \in D$ jest ustalonym punktem, zaś $[x_0,\dots,x]$ oznacza dowolną łamaną łączącą w D punkt x_0 z punktem x. Analogicznie, jak w dowodzie Twierdzenia 12.4.1 sprawdzamy, że $\frac{\partial w}{\partial x_j} = u_j, j = 1,\dots,n$. Wynika stąd w szczególności, że $w \in \mathcal{C}^{k+1}(D)$ oraz $dw = u$.

16.4. Miara i komiara odwzorowań lipschitzowskich

Celem tego podrozdziału jest udowodnienie dwóch fundamentalnych twierdzeń (Twierdzenia 16.4.4, 16.4.5) łączących rachunek różniczkowy i teorię miary. Obok twierdzenia Stokesa, są one zwieńczeniem wykładu z Analizy. Metody dowodu głównych twierdzeń są oparte na monografii Federera [8]. Potrzebujemy kilku pomocniczych oznaczeń (część z nich już znamy).

Definicja 16.4.1. (a) Przypomnijmy (zob. podrozdział 10.1.1), że dla dowolnej macierzy $A \in \mathbb{M}(n\times m;\mathbb{R})$

$$J_d(A) := \Big(\sum_{I\in\Lambda_d^n,\ J\in\Lambda_d^m} (\det A_{I,J})^2\Big)^{1/2}, \quad 1 \leqslant d \leqslant \min\{m,n\},$$

gdzie $A_{I,J}$ oznacza podmacierz macierzy A powstałą przez wybranie wierszy o numerach $i_1,\dots,i_d$ i kolumn $j_1,\dots,j_d$, zaś $\Lambda_r^s := \{(k_1,\dots,k_r) : 1 \leqslant k_1 < \dots < k_r \leqslant s\}$. Jeżeli $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ jest odwzorowaniem takim, że $f'(a)$ istnieje, to przyjmujemy $J_d f(a) := J_d(f'(a))$.

(b) Dla $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ i $A \subset \mathbb{R}^m$ definiujemy $N_A(f,\cdot) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$,

$$N_A(f,y) := \begin{cases} \#(A\cap f^{-1}(y)), & \text{jeżeli zbiór } A\cap f^{-1}(y) \text{ jest skończony} \\ +\infty, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Zauważmy, że:
- $N_A(f,y) = 0 \iff y \notin f(A)$;
- jeżeli $f|A$ jest injektywne, to $N_A(f,\cdot) = \chi_{f(A)}$.

Definicja 16.4.2. Niech $\varnothing \neq C \subset \mathbb{R}^m$ będzie dowolnym zbiorem i niech $g : C \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ będzie dowolną funkcją. Definiujemy

$$\sum_{x\in C} g(x) := \int_C g d\mathcal{H}^0,$$

o ile całka ma sens, gdzie $\mathcal{H}^0$ to zerowa miara Hausdorffa w $\mathbb{R}^m$, czyli miara licząca.

Przypomnijmy, że $\mathcal{H}_0 = \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$, a wiec w szczególności wszystkie funkcje $C \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ są $\mathcal{H}_0$-mierzalne (Obserwacja 13.9.1(b)).

Obserwacja 16.4.3. (a) Łatwo pokazać (Ćwiczenie), że jeżeli $g : C \longrightarrow \mathbb{R}$ i $\int_C g d\mathcal{H}^0 \in \mathbb{R}$, to $\int_C g d\mathcal{H}^0$ pokrywa się z $\sum_{x\in C} g(x)$ w sensie rodzin sumowalnych.

Oczywiście, wystarczy rozważyć przypadek funkcji $g : C \longrightarrow \mathbb{R}_+$ takiej, że $\int_C g d\mathcal{H}^0 < +\infty$. Zauważmy, że każda funkcja $g : C \longrightarrow \mathbb{R}_+$ taka, że zbiór $D := \{x \in C : g(x) > 0\}$ jest skończony, może być uważana za funkcję prostą $\sum_{x\in D} g(x)\chi_{\{x\}}$. Stąd $\int_C g d\mathcal{H}^0 = \sum_{x\in D} g(x)$. Taką funkcją jest każda funkcja prosta taka, że $\int_C g d\mathcal{H}^0 \in \mathbb{R}$. Widać również, że dla dowolnej funkcji $g : C \longrightarrow \mathbb{R}_+$ i dla dowolnego zbioru skończonego $D \subset C$ mamy $\int_D g d\mathcal{H}^0 = \sum_{x\in D} g(x) \leqslant \int_C g d\mathcal{H}^0$. Niech $\mathcal{M}_0^+(C) \ni g_s \nearrow g$, $\int_C g_s d\mathcal{H}^0 = \sum_{x\in D_s} g_s(x)$, gdzie D_s jest skończony, $s \in \mathbb{N}$. Wtedy $\sum_{x\in D_s} g_s(x) \leqslant \sum_{x\in D_s} g(x) \leqslant \int_C g d\mathcal{H}^0$. Stąd $\sum_{x\in D_s} g(x) \longrightarrow \int_C g d\mathcal{H}^0$, co implikuje, że $\int_C g d\mathcal{H}^0 = \sum_{x\in C} g(x)$ w sensie rodzin sumowalnych.

(b) W szczególności, $N_A(f,y) = \sum_{x\in f^{-1}(y)} \chi_A(x)$, $y \in \mathbb{R}^n$.

A oto nasze główne twierdzenia o mierze i komierze Hausdorffa.

---

[8] Zob. H. Federer, *Geometric measure theory*, Springer Verlag, Berlin, 1969, § 3.2.

Twierdzenie 16.4.4 (m-wymiarowa miara Hausdorffa funkcji $f|_A$)**.** *Załóżmy, że $n \geqslant m$ i niech $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie odwzorowaniem spełniającym lokalnie warunek Lipschitza . Wtedy dla dowolnego zbioru $A \in \mathcal{L}_m$ mamy*

$$\int_{\mathbb{R}^n} N_A(f,y)d\mathcal{H}^m(y) = \int_{f(A)} N_A(f,y)d\mathcal{H}^m(y) = \int_A J_m f(x)d\mathcal{L}^m(x). \tag{†}$$

Całka $\int_{\mathbb{R}^n} N_A(f,y)d\mathcal{H}^m(y)$ nosi nazwę *m-wymiarowej miary Hausdorffa funkcji $f|_A$*.

Twierdzenie 16.4.5 ($(m-n)$-wymiarowa komiara Hausdorffa funkcji $f|_A$)**.** *Załóżmy, że $n < m$ i niech $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie odwzorowaniem spełniającym lokalnie warunek Lipschitza. Wtedy dla dowolnego zbioru $A \in \mathcal{L}_m$ mamy*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(y))d\mathcal{L}^n(y) = \int_A J_n f(x)d\mathcal{L}^m(x). \tag{‡}$$

Całka $\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(y))d\mathcal{L}^n(y)$ nosi nazwę *$(m-n)$-wymiarowej komiary Hausdorffa funkcji $f|_A$*.

Dowody obu twierdzeń są skomplikowane i będą przebiegały w wielu etapach. W dowodzie (‡) korzysta się z (†).

Najpierw kilka ogólnych uwag dotyczących poprawności wzorów (†) i (‡).

Obserwacja 16.4.6. (a) Na mocy Twierdzenia Rademachera 14.3.1, $f'(x)$ istnieje dla $x \in \Xi' = \mathbb{R}^m \setminus \Xi$, gdzie $\Xi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ jest miary zero. Zbiór Ξ nie jest oczywiście jednoznacznie wyznaczony. Wszystkie funkcje $\Xi' \ni x \longmapsto \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ są borelowskie (Obserwacja 13.2.2(u)). W szczególności, funkcja $\Xi' \ni x \longmapsto J_m f(x)$ jest borelowska, a więc prawe strony wzorów (†) i (‡) są poprawnie określone.

(b) We wzorze (†) $\mathcal{H}_m$-mierzalność funkcji $\mathbb{R}^n \ni y \overset{\varphi}{\longmapsto} N_A(f,y)$ nie jest oczywista i wymaga udowodnienia. Jeżeli φ byłaby $\mathcal{H}_m$-mierzalna, to $f(A) = \{\varphi \neq 0\} \in \mathcal{H}_m$ i pierwsze dwa wyrazy w (†) będą poprawnie określone.

(c) We wzorze (‡) $\mathcal{H}_{m-n}$-mierzalność zbioru $A \cap f^{-1}(y)$ dla $\mathcal{L}_n$-p.w. $y \in \mathbb{R}^n$ nie jest oczywista i wymaga udowodnienia. Podobnie, $\mathcal{L}_n$-mierzalność funkcji $\mathbb{R}^n \ni y \longmapsto \mathcal{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(y))$.

(d) Nie jest oczywiste, że (†) i (‡) zachodzą dla zbioru A miary zero (wtedy prawe strony są równe zero).

(e) Wobec twierdzenia Kirszbrauna 9.2.1, wzory (†) i (‡) można zastosować do dowolnego odwzorowania lipschitzowskiego $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^n$, gdzie zbiór $S \subset \mathbb{R}^m$ jest dowolny, oraz $\mathcal{L}_m \ni A \subset S$.

(f) Jeżeli $(A_i)_{i=1}^\infty$ jest rozbiciem zbioru A na zbiory mierzalne w sensie Lebesgue'a (tzn. $A_i \in \mathcal{L}_m$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ dla $i \neq j$ i $A = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$) oraz (†) lub (‡) zachodzi dla każdego zbioru A_i z osobna, to zachodzi dla A. Istotnie, w przypadku (†) mamy $N_A(f,y) = \sum_{i=1}^\infty N_{A_i}(f,y)$, $y \in \mathbb{R}^n$. Zaś w przypadku (‡), $\mathcal{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(y)) = \sum_{i=1}^\infty \mathcal{H}^{m-n}(A_i \cap f^{-1}(y))$ dla $\mathcal{L}_n$-p.w. $y \in \mathbb{R}^n$. Uwaga: ostatnia równość wymaga tego, aby wszystkie zbiory $A_i \cap f^{-1}(y)$, $i \in \mathbb{N}$, były $\mathcal{H}_{m-n}$-mierzalne.

(g) W szczególności, z (f) wynika, że zawsze możemy założyć, że $A \subset\subset \mathbb{R}^m$ oraz że f spełnia globalny warunek Lipschitza.

Istotnie, na podstawie twierdzenia Lindelöfa istnieje przeliczalne pokrycie otwarte zbioru A, $A \subset \bigcup_{i=1}^\infty U_i$, takie że dla dowolnego i mamy $U_i \subset\subset \mathbb{R}^m$ oraz f spełnia warunek Lipschitza na U_i. Wystarczy przyjąć $A_1 := A \cap U_1$, $A_j := A \cap (U_j \setminus (U_1 \cup \cdots \cup U_{j-1}))$, $j \geqslant 2$.

Obecnie przedstawimy szereg konsekwencji Twierdzenia (†).

Obserwacja 16.4.7. Przyjmujemy założenia takie, jak w twierdzeniu (†).

(a) Jeżeli $f|_A$ jest injektywne, to z (†) wynika fundamentalny wzór na m-tą miarę Hausdorffa zbioru $f(A)$:

$$\mathcal{H}^m(f(A)) = \int_A J_m f(x)d\mathcal{L}^m(x). \tag{*}$$

(b) Jeżeli $f|_A$ jest injektywne i $n = m$, to z (a) wynika *ogólne twierdzenie o zmianie zmiennych w całce Lebesgue'a*:

$$\mathcal{L}^m(f(A)) = \int_A |f'(x)|d\mathcal{L}^m(x)$$

(korzystamy tu z równości $\mathcal{H}^m = \mathcal{L}^m$ (Twierdzenie 13.10.2)).

(c) Zilustrujmy (a) przykładami z Obserwacji 7.5.3 (wtedy przyjmowaliśmy te przykłady „na wiarę").

(1) $m = 1$, $S = A := [a,b]$. Wtedy (*) to wzór na długość łuku $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ spełniającego warunek Lipschitza; $\mathcal{H}^1(\gamma^*) = \int_a^b \|\gamma'(x)\| d\mathcal{L}^1(x)$. Daje to uogólnienie poznanego wcześniej wzoru na długość krzywej.

(2) $m = n = 2$, $S = A := [a,b] \times [0,1]$, $f(x,t) := (x, \varphi(x) + t(\psi(x) - \varphi(x))$, gdzie $\varphi, \psi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniają warunek Lipschitza oraz $\varphi(x) < \psi(x)$, $x \in [a,b]$ [9]. Wtedy

$$J_2 f(x,t) = \Big| \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varphi'(x) + t(\psi'(x) - \varphi'(x)) & \psi(x) - \varphi(x) \end{bmatrix} \Big| = \psi(x) - \varphi(x),$$

a więc „pole" zbioru $f(A)$ wyraża się wzorem

$$\mathcal{H}^2(f(A)) = \int_A (\psi(x) - \varphi(x)) dx dt = \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x)) dx.$$

(3) $m = n = 2$, $S = A := (0,1] \times [\alpha, \beta)$, $f(t,\varphi) = (tR(\varphi)\cos\varphi, tR(\varphi)\sin\varphi)$, gdzie $\beta - \alpha \leqslant 2\pi$ oraz $R : [\alpha,\beta) \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ spełnia warunek Lipschitza. Wtedy

$$J_2 f(t,\varphi) = \Big| \det \begin{bmatrix} R(\varphi)\cos\varphi & tR'(\varphi)\cos\varphi - tR(\varphi)\sin\varphi \\ R(\varphi)\sin\varphi & tR'(\varphi)\sin\varphi + tR(\varphi)\cos\varphi \end{bmatrix} \Big| = tR^2(\varphi),$$

a więc „pole" zbioru $f(A)$ wyraża się wzorem

$$\mathcal{H}^2(f(A)) = \int_A tR^2(\varphi) dt d\varphi = \tfrac{1}{2} \int_\alpha^\beta R^2(\varphi) d\varphi.$$

(4) $m = n = 3$, $S = A := [a,b] \times (0,1] \times [0,2\pi)$, $f(x,t,\varphi) = (x, tR(x)\cos\varphi, tR(x)\sin\varphi)$, gdzie $R : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ spełnia warunek Lipschitza. Wtedy

$$J_3 f(x,t,\varphi) = \left| \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ tR'(x)\cos\varphi & R(x)\cos\varphi & -tR(x)\sin\varphi \\ tR'(x)\sin\varphi & R(x)\sin\varphi & tR(x)\cos\varphi \end{bmatrix} \right| = tR^2(x),$$

a więc „objętość" zbioru $f(A)$ wyraża się wzorem

$$\mathcal{L}^3(f(A)) = \int_A tR^2(x) dx dt d\varphi = \pi \int_a^b R^2(x) dx.$$

(5) $m = 2, n = 3$, $S = A := [a,b] \times [0, 2\pi)$, $f(x,\varphi) := (x, R(x)\cos\varphi, R(x)\sin\varphi)$, gdzie $R : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ spełnia warunek Lipschitza. Wtedy

$$f'(x,\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ R'(x)\cos\varphi & -R(x)\sin\varphi \\ R'(x)\sin\varphi & R(x)\cos\varphi \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} J_2^2(x,\varphi) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ R'(x)\cos\varphi & -R(x)\sin\varphi \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ R'(x)\sin\varphi & R(x)\cos\varphi \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} R'(x)\cos\varphi & -R(x)\sin\varphi \\ R'(x)\sin\varphi & R(x)\cos\varphi \end{vmatrix}^2 \\ &= R^2(x) + R^2(x)(R'(x))^2 = R^2(x)\big(1 + (R'(x))^2\big), \end{aligned}$$

a więc „pole" zbioru $f(A)$ wyraża się wzorem

$$\mathcal{H}^2(f(A)) = \int_A R(x)\sqrt{1 + (R'(x))^2} dx d\varphi = 2\pi \int_a^b R(x)\sqrt{1 + (R'(x))^2} dx.$$

(d) Z (†) wynika następujący ważny wniosek:

Przy założeniach z (†), dla dowolnej funkcji $g \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}_m)$ (odp. $g \in L^1(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}^m)$) mamy:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Big(\sum_{x \in f^{-1}(y)} g(x) \Big) d\mathcal{H}^m(y) = \int_{\mathbb{R}^m} g(x) J_m f(x) d\mathcal{L}^m(x).$$

Istotnie, przypadek, gdy $g = \chi_A$ to (†). Dalej rozumujemy standardowo, tzn. najpierw przenosimy wynik na $g \in \mathcal{M}_0^+(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}_m)$. Następnie na $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}_m)$ korzystając z tego, że jeżeli $\mathcal{M}_0^+(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}_m) \ni g_i \nearrow g$, to $\sum\limits_{x \in f^{-1}(y)} g_i(x) = \int_{f^{-1}(y)} g_i d\mathcal{H}^0 \nearrow \int_{f^{-1}(y)} g d\mathcal{H}^0 = \sum\limits_{x \in f^{-1}(y)} g(x)$ (zob. Obserwacja 16.4.3).

---

[9] Tu i dalej sprawdzenie tego, że $f|_A$ jest injektywne pozostawiamy jako Ćwiczenie.

Jeżeli $g \in L^1(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}^m)$, to stosujemy rozkład $g = g_+ - g_-$.

(e) Dla $n = m$ dostajemy

$$\int_{\mathbb{R}^m} \Big(\sum_{x \in f^{-1}(y)} g(x) \Big) d\mathcal{L}^m(y) = \int_{\mathbb{R}^m} g(x) |f'(x)| d\mathcal{L}^m(x).$$

Oznacza to, że (d) to uogólnienie twierdzenia o zmianie zmiennych.

Teraz kolej na wnioski z (‡).

Obserwacja 16.4.8. (a) W przypadku, gdy $f = \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^n}$ ($J_n f(x) = 1$, $f^{-1}(y) = \{y\} \times \mathbb{R}^{m-n}$), wzór (‡) daje

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}^{m-n}(\{z \in \mathbb{R}^{m-n} : (y,z) \in A\}) d\mathcal{L}^n(y) = \mathcal{L}^m(A).$$

Oznacza to, że (‡) uogólnia twierdzenie Cavalieriego. Innymi słowy, (‡) to uogólnione twierdzenie Cavalieriego, w którym włókna $f^{-1}(y)$ nie muszą być płaskie.

(b) Z (‡) wynika, że (Ćwiczenie):

Dla dla dowolnej funkcji $g \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}_m)$ (odp. $g \in L^1(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}^m)$) zachodzi

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{f^{-1}(y)} g(x) d\mathcal{H}^{m-n}(x) d\mathcal{L}^n(y) = \int_{\mathbb{R}^m} g(x) J_n f(x) d\mathcal{L}^m(x).$$

(c) Zastosujmy (b) do $n = 1$ i funkcji $f(x) := \|x\|$. Zauważmy, że $J_1 f(x) = 1$, $x \neq 0$. Dostajemy:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{f^{-1}(y)} g(x) d\mathcal{H}^{m-1}(x) d\mathcal{L}(y) = \int_{\mathbb{R}^m} g(x) d\mathcal{L}^m(x), \quad g \in L^1(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}^m),$$

czyli

$$\int_{\mathbb{R}^m} g(x) d\mathcal{L}^m(x) = \int_0^{+\infty} \int_{y\mathbb{S}_{m-1}} g(x) d\mathcal{H}^{m-1}(x) d\mathcal{L}(y) \overset{(*)}{=} \int_0^{+\infty} r^{m-1} \int_{\mathbb{S}_{m-1}} g(rx) d\mathcal{H}^{m-1}(x) d\mathcal{L}(r), \quad \text{(PC)}$$

gdzie (*) wynika z tego $\mathcal{H}^k(rA) = r^k \mathcal{H}^k(A)$, $A \subset \mathbb{R}^m$. Wzór (PC) to odpowiednik współrzędnych biegunowych w $\mathbb{R}^m$. W szczególności, biorąc $g := \chi_{\mathbb{B}_m}$, mamy:

$$\mathcal{L}^m(\mathbb{B}_m) = \int_0^1 r^{m-1} \mathcal{H}^{m-1}(\mathbb{S}_{m-1}) d\mathcal{L}(r) = \frac{1}{m} \mathcal{H}^{m-1}(\mathbb{S}_{m-1}).$$

(d) W przypadku, gdy $f = \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^n}$, dostajemy

$$\int_{\mathbb{R}^m} g d\mathcal{L}^m = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^{m-n}} g(x,y) d\mathcal{L}^{m-n}(x) d\mathcal{L}^n(y).$$

Oznacza to, że (c) uogólnia twierdzenie Fubiniego.

W kolejnym kroku postaramy się pokonać problemy z określonością wzorów (†) i (‡), które wynikają z Obserwacji 16.4.6(b)–(d). Wiemy, że możemy założyć, że $A \subset\subset \mathbb{R}^m$ oraz że f spełnia globalny warunek Lipschitza ze stałą $L > 0$ (Obserwacja 16.4.6(f)).

Najpierw Twierdzenie (†).

Propozycja 16.4.9. *Niech $n \geqslant m$ i niech $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $L > 0$.*

(a) *$\mathcal{H}^m(f(S)) \leqslant L^m \mathcal{H}^m(S) = L^m \mathcal{L}^m(S)$, $S \subset \mathbb{R}^m$. W szczególności, $\mathcal{H}^m(f(S)) = 0$, gdy $\mathcal{L}^m(S) = 0$.*

(b) *$f(S) \in \mathcal{H}_m$, $S \in \mathcal{L}_m$.*

(c) *Dla dowolnego $A \in \mathcal{L}_m$ funkcja $\mathbb{R}^n \ni y \longmapsto N_A(f,y)$ jest $\mathcal{H}_m$-mierzalna.*

W szczególności, (†) zachodzi, gdy $\mathcal{L}^m(A) = 0$.

Dowód. (a) Niech $S \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, przy czym $\operatorname{diam} A_j \leqslant \delta$, $j \in \mathbb{N}$. Wtedy $f(S) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} f(A_j)$ i $\operatorname{diam} f(A_j) \leqslant L \operatorname{diam} A_j \leqslant L\delta$, $j \in \mathbb{N}$. Stąd $\mathcal{H}^m_{L\delta}(f(S)) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_m(f(A_j)) \leqslant L^m \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_m(A_j)$. Tak więc $\mathcal{H}^m_{L\delta}(f(S)) \leqslant L^m \mathcal{H}^m_{\delta}(S)$. Teraz $\delta \longrightarrow 0+$.

(b) Przypadek $\mathcal{L}^m(S)=0$ wynika z (a) (i zupełności miary $\mathcal{H}^m$). W przypadku ogólnym rozumujemy tak, jak w dowodzie Twierdzenia 13.10.6(c): Ponieważ miara Lebesgue'a jest regularna, zatem $S=F\cup Z$, gdzie $F\in\mathcal{F}_\sigma$, zaś $\mathcal{L}^m(Z)=0$. Oczywiście zbiór F może być przedstawiony w postaci $F=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}K_j$, gdzie każdy zbiór K_j jest zwarty. Na podstawie (a), $\mathcal{H}^m(f(Z))=0$. Każdy ze zbiorów $f(K_j)$ jest zwarty. Ostatecznie więc, $f(S)=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}f(K_j)\cup f(Z)$ jest $\mathcal{H}_m$-mierzalny.

(c) Jak powyżej $A=S\cup Z$, gdzie $S\cap Z=\varnothing$, $S\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{L}^m(Z)=0$. Wobec (a), $\mathcal{H}^m(f(Z))=0$, więc wystarczy udowodnić $\mathcal{H}_m$-mierzalność funkcji $\mathbb{R}^n\ni y\longmapsto N_S(f,y)$.

Niech $(S_{s,j})_{s,j=1}^{\infty}$ będą zbiorami borelowskimi takimi, że $(S_{s,j})_{j=1}^{\infty}$ jest rozbiciem S, przy czym rozbicie $(S_{s+1,j})_{j=1}^{\infty}$ jest wpisane w $(S_{s,j})_{j=1}^{\infty}$ (w tym sensie, że $S_{s,j}=\bigcup\limits_{i\in I(s,j)}S_{s+1,i}$ dla pewnej rodziny $I(s,j)\subset\mathbb{N}$) oraz $\delta_s:=\sup\{\operatorname{diam}S_{s,j}:j\in\mathbb{N}\}\searrow 0$. Takie rozbicia uzyskamy np. biorąc $\{S_{s,j}:j\in\mathbb{N}\}:=\{S\cap\Delta^o_{1/2^s,\alpha}:\alpha\in\mathbb{Z}^n\}$ (zob. Obserwacja 12.1.5). Pokażemy, że

$$N_S(f,y)=\lim_{s\to+\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\chi_{f(S_{s,j})}(y),\quad y\in\mathbb{R}^n,$$

skąd natychmiast (wobec (b)) wyniknie, że funkcja $\mathbb{R}^n\ni y\longmapsto N_S(f,y)$ jest $\mathcal{H}_m$-mierzalna.

Ustalmy $y\in f(S)$. Jeżeli $S\cap f^{-1}(y)$ jest zbiorem skończonym, to dla $s\gg 1$ elementy zbioru $S\cap f^{-1}(y)$ muszą leżeć w różnych zbiorach z rozbicia $(S_{s,j})_{j=1}^{\infty}$ (tu korzystamy z tego, że $\delta_s\longrightarrow 0$). Oznacza to, że $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\chi_{f(S_{s,j})}(y)=N_S(f,y)$ dla $s\gg 1$. Jeżeli $S\cap f^{-1}(y)$ jest zbiorem nieskończonym, to dla dowolnych parami różnych elementów $x_1,\dots,x_k\in S\cap f^{-1}(y)$, jeżeli $s\gg 1$, to $x_1,\dots,x_k$ muszą leżeć w różnych zbiorach z rozbicia $(S_{s,j})_{j=1}^{\infty}$. Oznacza to $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\chi_{f(S_{s,j})}(y)\geqslant k$ dla $s\gg 1$. Wobec dowolności k dostajemy $\lim\limits_{s\to+\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}\chi_{f(S_{s,j})}(y)=+\infty=N_S(f,y)$. □

Teraz Twierdzenie (‡).

Propozycja 16.4.10. *Niech $f:\mathbb{R}^r\longrightarrow\mathbb{R}^s$ spełnia warunek Lipschitza za stałą $L>0$ i niech $0<k,\ell<+\infty$.*

(a) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^s}\mathcal{H}^k(S\cap f^{-1}(y))d\mathcal{H}^\ell(y)\leqslant L^\ell\beta_{k,\ell}\mathcal{H}^{k+\ell}(S),\quad S\subset\mathbb{R}^r$, *gdzie* $\beta_{k,\ell}:=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}(k)\boldsymbol{\alpha}(\ell)}{\boldsymbol{\alpha}(k+\ell)}$.

Uwaga: Ponieważ jeszcze nie wiemy, czy funkcja $y\longmapsto\mathcal{H}^k(S\cap f^{-1}(y))$ jest $\mathcal{H}_\ell$-mierzalna, powyższą nierówność rozumiemy tak, że istnieje funkcja $\mathcal{H}_\ell$-mierzalna $F:\mathbb{R}^s\longrightarrow[0,+\infty]$ taka, że $F(y)\geqslant\mathcal{H}^k(S\cap f^{-1}(y))$, $y\in\mathbb{R}^s$, oraz $\int_{\mathbb{R}^s}F(y)d\mathcal{H}^\ell(y)\leqslant L^\ell\beta_{k,\ell}\mathcal{H}^{k+\ell}(S)$.

W szczególności, $\int_{\mathbb{R}^s}\mathcal{H}^k(S\cap f^{-1}(y))d\mathcal{H}^\ell(y)=0$, gdy $\mathcal{H}^{k+\ell}(S)=0$.

(b) *Jeżeli $S\in\mathcal{H}_{k+l}$ oraz $\mathcal{H}^{k+l}(S)<+\infty$, to:*

- *zbiór $S\cap f^{-1}(y)$ jest $\mathcal{H}_k$-mierzalny dla $\mathcal{H}^\ell$-p.w. $y\in\mathbb{R}^s$,*
- *funkcja $\mathbb{R}^s\ni y\longmapsto\mathcal{H}^k(S\cap f^{-1}(y))$ jest $\mathcal{H}_\ell$-mierzalna.*

Dowód. (a) Niech $S\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_{j,i}$, przy czym $\operatorname{diam}A_{j,i}\leqslant\frac{1}{j}$ oraz $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\zeta_{k+\ell}(A_{j,i})\leqslant\mathcal{H}^{k+\ell}(S)+\frac{1}{j}$, $j\in\mathbb{N}$. Zdefiniujmy $B_{j,i}:=\overline{f(A_{j,i})}$. Oczywiście, $B_{j,i}$ jest zbiorem zwartym oraz $\operatorname{diam}B_{j,i}\leqslant\frac{L}{j}$. Zauważmy, że $S\cap f^{-1}(y)\subset\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}:\ y\in B_{j,i}}A_{j,i}$. W takim razie $\mathcal{H}^k_{1/j}(S\cap f^{-1}(y))\leqslant\sum\limits_{i\in\mathbb{N}:\ y\in B_{j,i}}\zeta_k(A_{j,i})=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\chi_{B_{j,i}}(y)\zeta_k(A_{j,i})=:F_j(y)$. Funkcja F_j jest oczywiście $\mathcal{H}_\ell$-mierzalna (bo jest borelowska). Mamy

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^s}F_j(y)d\mathcal{H}^\ell(y)&\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}^\ell(B_{j,i})\zeta_k(A_{j,i})\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\zeta_\ell(B_{j,i})\zeta_k(A_{j,i})\\&\leqslant L^\ell\sum_{i=1}^{\infty}\zeta_\ell(A_{j,i})\zeta_k(A_{j,i})\leqslant L^\ell\beta_{k,\ell}\sum_{i=1}^{\infty}\zeta_{k+\ell}(A_{j,i})\leqslant L^\ell\beta_{k,\ell}\big(\mathcal{L}^{k+\ell}(S)+\tfrac{1}{j}\big).\end{aligned}$$

Niech $F := \liminf\limits_{j\to+\infty} F_j$. Na podstawie lematu Fatou mamy

$$\int_{\mathbb{R}^s} F(y)d\mathcal{H}^\ell(y) \leqslant \liminf_{j\to+\infty} L^\ell\beta_{k,\ell}\big(\mathcal{H}^{k+\ell}(S)+\tfrac{1}{j}\big) = L^\ell\beta_{k,\ell}\mathcal{L}^{k+\ell}(S).$$

Z drugiej strony, $F(y) \geqslant \liminf\limits_{j\to+\infty} \mathcal{H}^k_{1/j}(S\cap f^{-1}(y)) = \mathcal{H}^k(S\cap f^{-1}(y))$.

(b) Wystarczy osobno rozważyć przypadek, gdy $\mathcal{H}^{k+\ell}(S)=0$ oraz gdy $S\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{k+\ell})$. Pierwszy przypadek wynika z (a). Drugi z tych przypadków sprowadza się do sytuacji, gdy S jest zwarty.

Wtedy $S\cap f^{-1}(y)$ jest też zwarty dla dowolnego y. Pozostaje mierzalność funkcji $\mathbb{R}^s\ni y\longmapsto \mathcal{H}^k(S\cap f^{-1}(y))$.

Niech $t>0$. Pokażemy, że $\{y\in\mathbb{R}^s : \mathcal{H}^k(S\cap f^{-1}(y))\leqslant t\} = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} V_j$, gdzie

$$V_j := \Big\{y\in\mathbb{R}^s : S\cap f^{-1}(y)\subset \bigcup_{i\in I(j,y)} V_{j,i},\ V_{j,i}\in\operatorname{top}\mathbb{R}^s,\ \#I(j,y)<+\infty,\ \operatorname{diam}V_{j,i}\leqslant\frac{1}{j},\ \sum_{i\in I(j,y)}\zeta_k(V_{j,i})<t+\frac{1}{j}\Big\}$$

oraz każdy zbiór V_j jest otwarty. Będzie stąd wynikało, że zbiór $\{y\in\mathbb{R}^s : \mathcal{H}^k(S\cap f^{-1}(y))\leqslant t\}$ jest borelowski (a przez to $\mathcal{H}_\ell$-mierzalny).

Istotnie, jeżeli $y\in\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} V_j$, to $\mathcal{H}^k_{1/j}(S\cap f^{-1}(y)) \leqslant \sum\limits_{i\in I(j,y)}\zeta_k(V_{j,i}) < t+\frac{1}{j}$. Wynika stąd, że $\mathcal{H}^k(S\cap f^{-1}(y))\leqslant t$.

W drugą stronę: jeżeli $\mathcal{H}^k(A\cap f^{-1}(y))\leqslant t$, to dla dowolnego $j\in\mathbb{N}$ istnieje pokrycie $(C_{j,i})_{i=1}^\infty$ zbioru $S\cap f^{-1}(y)$ zbiorami borelowskimi o średnicy $<\frac{1}{j}$ takie, że $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\zeta_k(C_{j,i})<t+\frac{1}{j}$. „Nadmuchując" nieco zbiory $C_{j,i}$, możemy założyć, że $C_{j,i}$ są otwarte. Ponieważ zbiór $S\cap f^{-1}(y)$ jest zwarty, z pokrycia $(C_{j,i})_{i=1}^\infty$ można wybrać pokrycie skończone $(V_{j,i})_{i\in I(j,y)}$ zbioru $S\cap f^{-1}(y)$ o żądanych własnościach.

Pozostaje wykazać, że każdy ze zbiorów jest V_j jest otwarty. Istotnie, przypuśćmy, że $y_0\in V_j$ oraz $y_t\longrightarrow y_0$ oraz $S\cap f^{-1}(y_t)\not\subset \bigcup\limits_{i\in I(j,y_0)} V_{j,i} =: \Omega$. Niech $x_t\in S$, $f(x_t)=y_t$ oraz $x_t\notin\Omega$. Możemy założyć, że $x_t\longrightarrow x_0\in S$. Wtedy $f(x_0)=y_0$ oraz $x_0\notin\Omega$; sprzeczność. □

Wniosek 16.4.11. *Dla $r=m>n=s$, $k=m-n$ i $\ell=n$, z Propozycji 16.4.10*(a) *wnioskujemy, że*

$$\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{H}^{m-n}(S\cap f^{-1}(y))d\mathcal{H}^n(y)\leqslant L^n\beta_{m-n,n}\mathcal{H}^m(S),\quad S\subset\mathbb{R}^m.$$

W szczególności, (‡) *zachodzi dla zbiorów miary zero.*

Kolejny etap to pokazanie, że w dowodach (†) i (‡) mozna zrobić dodatkowe założenia. Wiemy już, że możemy założyć, że $A\subset\Xi'$ (zob. Obserwacja 16.4.6(a)), $\mathcal{L}^m(A)>0$ oraz f spełnia globalny warunek Lipschitza ze stałą $L>0$. Najpierw (†). Wystarczy rozważyć dwa przypadki:

(†)$_1$ $A\subset\{x\in\Xi' : f'(x)\text{ jest injektywne}\} = \{x\in\Xi' : \operatorname{rank}f'(x)=m\}$.

(†)$_2$ $A\subset\{x\in\Xi' : f'(x)\text{ nie jest injektywne}\} = \{x\in\Xi' : \operatorname{rank}f'(x)<m\} = \{x\in\Xi' : J_mf(x)=0\}$.

Propozycja 16.4.12. *Jeżeli* (†) *zachodzi przy założeniu* (†)$_1$ *(dla dowolnych $n\geqslant m$ i f), to* (†) *zachodzi przy założeniu* (†)$_2$*, a więc dowód* (†) *sprowadza się do przypadku* (†)$_1$.

Dowód. Chcemy pokazać, że $\int_{f(A)} N_A(f,y)\mathcal{H}^m(y) = \int_{\mathbb{R}^m} J_mf(x)d\mathcal{L}^m(x)=0$. Wystarczy pokazać, że $\mathcal{H}^m(f(A))=0$. Dla $0<\varepsilon<1$ niech $\mathbb{R}^m\ni x\overset{g_\varepsilon}{\longmapsto}(f(x),\varepsilon x)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\ni(y,z)\overset{p}{\longmapsto}y\in\mathbb{R}^n$. Oczywiście $f=p\circ g_\varepsilon$. Odwzorowanie g_ε spełnia warunek Lipschitza oraz $A\subset\{x\in\Xi' : g'_\varepsilon(x)\text{ jest injektywne}\}$. Odwzorowanie p spełnia warunek Lipschitza ze stałą 1. Na podstawie Propozycji 16.4.9(a) oraz (†)$_1$ mamy $\mathcal{H}^m(f(A)) = \mathcal{H}^m(p(g_\varepsilon(A)))\leqslant\mathcal{H}^m(g_\varepsilon(A)) = \int_A J_mg_\varepsilon(x)d\mathcal{L}^m(x)$. Do zakończenia dowodu wystarczy pokazać, że $J_mg_\varepsilon(x)\leqslant C\varepsilon$, $x\in A$, gdzie C jest stałą niezależną od ε. Wtedy $\mathcal{H}^m(f(A))\leqslant C\varepsilon\mathcal{L}^m(A)\underset{\varepsilon\to0+}{\longrightarrow}0$.

Istotnie, obliczając $J_m g_\varepsilon(x)$ wybieramy nietrywialne $(m\times m)$ minory z macierzy $g'_\varepsilon(x)=\begin{bmatrix} f'(x)\\ \varepsilon\mathbb{I}_m\end{bmatrix}$. Pamiętając, że $J_m f(x)=0$, wnioskujemy, że wybierając taki minor musimy wybrać przynajmniej jeden wiersz z macierzy $\varepsilon\mathbb{I}_m$. Wiemy również, $|\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x)|\leqslant L$, $j=1,\dots,n$, $k=1,\dots,m$ (ponieważ f spełnia globalny warunek Lipschitza ze stałą L). Teraz oszacowanie $J_m g_\varepsilon(x)\leqslant C\varepsilon$, $x\in A$, jest widoczne (Ćwiczenie). □

Przechodzimy do (‡). Wystarczy rozważyć dwa przypadki:

(‡)$_1$ $A\subset\{x\in\Xi': f'(x)\text{ jest surjektywne}\}=\{x\in\Xi': f'(x)(\mathbb{R}^m)=\mathbb{R}^n\}=\{x\in\Xi':\operatorname{rank} f'(x)=n\}$.

(‡)$_2$ $A\subset\{x\in\Xi': f'(x)\text{ nie jest surjektywne}\}=\{x\in\Xi':\operatorname{rank} f'(x)<n\}=\{x\in\Xi': J_n f(x)=0\}$.

Propozycja 16.4.13. *Jeżeli* (‡) *zachodzi przy założeniu* (‡)$_1$ *(dla dowolnych $n<m$ i f), to* (‡) *zachodzi przy założeniu* (‡)$_2$*, a więc dowód* (‡) *sprowadza się do przypadku* (‡)$_1$.

Dowód. Chcemy pokazać, że $\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{H}^{m-n}(A\cap f^{-1}(y))d\mathcal{L}^n(y)=\int_A J_n f(x)d\mathcal{L}^m(x)=0$. Dla $0<\varepsilon<1$ zdefiniujmy

$$g_\varepsilon,p:\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n,\quad g_\varepsilon(x,z):=f(x)+\varepsilon z,\quad p(x,z):=z.$$

Jeżeli $(x,z)\in A\times\mathbb{R}^n$, to $g'_\varepsilon(x,z)(v,w)=f'(x)(v)+\varepsilon w$, $(v,w)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$. W szczególności, $g'_\varepsilon(x,z)(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n)=\mathbb{R}^n$. Ponadto, g_ε spełnia warunek Lipschitza oraz $J_n g_\varepsilon(x,z)\leqslant C_0\varepsilon$, gdzie C_0 jest niezależne od ε. Istotnie, $g'_\varepsilon(x)=\big[f'(x),\varepsilon\mathbb{I}_n\big]$ i dalej, rozumując analogicznie jak w dowodzie Propozycji 16.4.12, dostajemy $J_n f(x,z)\leqslant C_0\varepsilon$, $(x,z)\in A\times\mathbb{R}^n$ dla pewnej stałej $C_0>0$.

Z Propozycji 16.4.10(a) z $r=m+n$, $s=n$, $k=m-n$, $\ell=n$ ($k+\ell=m$), $f=p$ ($L=1$) i $S=(A\times\mathbb{B}_n)\cap g_\varepsilon^{-1}(y)$ dostajemy

$$\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{H}^{m-n}((A\times\mathbb{B}_n)\cap g_\varepsilon^{-1}(y)\cap p^{-1}(w))d\mathcal{L}^n(w)\leqslant\beta_{m-n,n}\mathcal{H}^m((A\times\mathbb{B}_n)\cap g_\varepsilon^{-1}(y)).\tag{+}$$

Zastosujmy (‡) (przy założeniach (‡)$_1$) do funkcji g_ε i zbioru $A\times\mathbb{B}_n$ (przez C_i, $i=0,1,2$, rozumiemy różne stałe dodatnie niezależne od ε):

$$\begin{aligned}
C_0\varepsilon\mathcal{L}^m(A)\mathcal{L}^n(\mathbb{B}_n)&\geqslant\int_{A\times\mathbb{B}_n}J_n g_\varepsilon(x,z)d\mathcal{L}^{m+n}(x,z)\overset{(‡)_1}{=}\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{H}^m((A\times\mathbb{B}_n)\cap g_\varepsilon^{-1}(y))d\mathcal{L}^n(y)\\
&\overset{(+)}{\geqslant}C_1\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{H}^{m-n}((A\times\mathbb{B}_n)\cap g_\varepsilon^{-1}(y)\cap p^{-1}(w))d\mathcal{L}^n(w)d\mathcal{L}^n(y)\\
&=C_1\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{B}_n}\mathcal{H}^{m-n}((A\cap f^{-1}(y-\varepsilon w))\times\{w\})d\mathcal{L}^n(w)d\mathcal{L}^n(y)\\
&\overset{\text{Fubini}}{=}C_1\int_{\mathbb{B}_n}\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{H}^{m-n}((A\cap f^{-1}(y-\varepsilon w))\times\{w\})d\mathcal{L}^n(y)d\mathcal{L}^n(w)\\
&\overset{y\mapsto y-\varepsilon w}{=}C_1\int_{\mathbb{B}_n}\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{H}^{m-n}((A\cap f^{-1}(y))\times\{w\})d\mathcal{L}^n(y)d\mathcal{L}^n(w)\\
&\geqslant\int_{\mathbb{B}_n}\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{H}^{m-n}(A\cap f^{-1}(y))d\mathcal{L}^n(y)d\mathcal{L}^n(w)\\
&=C_2\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{H}^{m-n}(A\cap f^{-1}(y))d\mathcal{L}^n(y).
\end{aligned}$$

Stąd, przy $\varepsilon\longrightarrow 0+$ dostajemy $\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{H}^{m-n}(A\cap f^{-1}(y))d\mathcal{L}^n(y)=0$, co kończy dowód. □

Na tym kończy się łatwa część dowodów (†) i (‡). Do zasadniczego dowodu (†)$_1$ będzie nam potrzebnych kilka pomocniczych wyników.

Twierdzenie 16.4.14 (Nierówność Hadamarda [10])**.** *Dla dowolnej macierzy $A=[a_1,\dots,a_m]\in\mathbb{M}(m\times m;\mathbb{R})$, $a_1,\dots,a_m\in\mathbb{M}(m\times 1;\mathbb{R})$, mamy* $|\det A|\leqslant\prod_{j=1}^m\|a_j\|$.

Dowód. Przypadek, gdy $\det A=0$ jest trywialny. Możemy więc założyć, że $a_1,\dots,a_m$ tworzą bazę $\mathbb{R}^m$. Wybierzmy w $\mathbb{R}^n$ bazę ortonormalną $b_1,\dots,b_m$ taką, że

$$\mathbb{R}\cdot b_1+\dots+\mathbb{R}\cdot b_k=\mathbb{R}\cdot a_1+\dots+\mathbb{R}\cdot a_k,\quad k=1,\dots,m\quad\text{(Ćwiczenie)}.$$

[10] Jacques Hadamard (1865–1963).

Wtedy $a_j = \sum_{k=1}^{j} \langle a_j, b_k\rangle b_k, \quad j = 1, \dots, m$. Stąd $A = BC$, gdzie $B := [b_1, \dots, b_m] \in \mathbb{M}(m \times m; \mathbb{R})$, zaś

$$C_{k,j} := \begin{cases} \langle a_j, b_k\rangle, & \text{jeżeli } k \leqslant j \\ 0, & \text{jeżeli } k > j \end{cases}.$$

Zauważmy, że B jest macierzą ortogonalną ($B^t B = \mathbb{I}_m$), zaś C jest macierzą trójkątną. Ostatecznie,

$$|\det A| = |\det(BC)| = |\det C| = \Big|\prod_{j=1}^{m} C_{j,j}\Big| = \prod_{j=1}^{m} |\langle a_j, b_j\rangle| \leqslant \prod_{j=1}^{m} \|a_j\|\|b_j\| = \prod_{j=1}^{m} \|a_j\|. \qquad \square$$

Ćwiczenie 16.4.15. Kiedy w nierówności Hadamarda zachodzi równość?

Wniosek 16.4.16. *Jeżeli $A = [a_1, \dots, a_m] \in \mathbb{M}(m \times m; \mathbb{R})$ oraz $\alpha\|v\| \leqslant \|Av\| \leqslant \beta\|v\|$, $v \in \mathbb{R}^m$, dla pewnych $\alpha, \beta > 0$, to $\alpha^m \leqslant |\det A| \leqslant \beta^m$.*

Dowód. Mamy $\|a_j\| = \|Ae_j\| \leqslant \beta, j = 1, \dots, m$. Stąd na podstawie nierówności Hadamarda mamy $|\det A| \leqslant \beta^m$. Drugą z nierówności otrzymujemy natychmiast wobec tego, że $\|A^{-1}u\| \leqslant \frac{1}{\alpha}\|u\|$, $u \in \mathbb{R}^m$. $\square$

Wniosek 16.4.17. *Jeżeli $A \in \mathbb{M}(n \times m; \mathbb{R})$, $n \geqslant m$, $U \in \mathbb{M}(m \times m; \mathbb{R})$, to $J_m(AU) = J_m(A)|\det U|$. W szczególności, jeżeli ponadto $|\det U| = 1$, to $J_m(AU) = J_m(A)$.*

Dowód. Na podstawie Wniosku 10.1.9 mamy

$$(J_m(AU))^2 = \det((AU)^t AU) = \det(U^t A^t AU)| = \det(U^t)\det(A^t A)\det U = (J_m(A)\det U)^2. \qquad \square$$

Wniosek 16.4.18. *Jeżeli $A \in \mathbb{M}(n \times m; \mathbb{R})$, $n \geqslant m$, oraz $\alpha\|v\| \leqslant \|Av\| \leqslant \beta\|v\|$, $v \in \mathbb{R}^m$, dla pewnych $\alpha, \beta > 0$, to $\alpha^m \leqslant J_m(A) \leqslant \beta^m$.*

Dowód. Niech $V := A(\mathbb{R}^m) \subset \mathbb{R}^n$. Ponieważ A jest injektywne, przestrzeń V jest m-wymiarowa. Niech $H : \mathbb{R}^m \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ będzie izomorfizmem ortogonalnym ($H^t H = \mathbb{I}_m$) [11] i niech $G := H^{-1} \circ A : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Zauważmy, że G is izomorfizmem. Mamy $A = H \circ G$. Stąd $\alpha\|v\| \leqslant \|Av\| = \|H \circ G(v)\| = \|G(v)\| \leqslant \beta\|v\|$, $v \in \mathbb{R}^m$. W takim razie na podstawie Wniosku 16.4.16 mamy $\alpha^m \leqslant |\det G| \leqslant \beta^m$. Z drugiej strony, na podstawie Wniosków 10.1.9 i 16.4.17, $J_m(A) = J_m(H \circ G) = J_m(H)|\det G| = |\det G|$. $\square$

Dowód (†) przy założeniu $(\dagger)_1$. Zakładamy, że $A \subset \{x \in \Xi' : f'(x) \text{ jest injektywne}\}$, $\mathcal{L}_m(A) > 0$ oraz $A \subset\subset \mathbb{R}^m$.

Ustalmy $\lambda > 1$ i niech $\varepsilon > 0$ będzie takie, że $\frac{1}{\lambda} + \varepsilon < 1 < \lambda - \varepsilon$. Będziemy chcieli pokazać, że

$$\frac{1}{\lambda^{2m}} \int_{\mathbb{R}^n} N_A(f, y) d\mathcal{H}^m(y) \leqslant \int_A J_m f d\mathcal{L}^m \leqslant \lambda^{2m} \int_{\mathbb{R}^n} N_A(f, y) d\mathcal{H}^m(y), \tag{**}$$

co przy $\lambda \longrightarrow 1+$ da tezę.

Kluczem do dowodu (**) będzie skonstruowanie pokrycia $(B_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ zbioru A oraz ciągu izomorfizmów liniowych $\Phi_j : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $j \in \mathbb{N}$, takich że dla $B = B_j$ i $\Phi = \Phi_j$ mamy:

$$f|_B \text{ jest injektywne}, \tag{1}$$

$$\text{funkcje } (f|_B) \circ \Phi^{-1} : \Phi(B) \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ \Phi \circ (f|_B)^{-1} : f(B) \longrightarrow \mathbb{R}^m \text{ spełniają warunek Lipschitza ze stałą } \lambda, \tag{2}$$

$$\frac{1}{\lambda}\|\Phi(v)\| \leqslant \|f'(x)(v)\| \leqslant \lambda\|\Phi(v)\|, \quad x \in B,\ v \in \mathbb{R}^m. \tag{3}$$

Od razu zauważmy, że (3) implikuje

$$\frac{1}{\lambda^m}|\det \Phi| \leqslant J_m f(x) \leqslant \lambda^m |\det \Phi|, \quad x \in B. \tag{4}$$

Istotnie, (3) jest równoważne warunkowi

$$\frac{1}{\lambda}\|u\| \leqslant \|f'(x) \circ \Phi^{-1}(u)\| \leqslant \lambda\|u\|, \quad x \in B,\ u \in \mathbb{R}^m,$$

[11] $H(t) = t_1 v_1 + \dots + t_m v_m$, gdzie $v_1, \dots, v_m$ jest bazą ortonormalną w V.

skąd, wobec Wniosków 16.4.17 i 16.4.18, mamy

$$\frac{1}{\lambda^m} \leqslant J_m(f'(x)\circ\Phi^{-1}) = J_m(f)|\det\Phi^{-1}| \leqslant \lambda^m, \quad x\in B,$$

czyli (4).

Najpierw sprawdzimy, że powyższa konstrukcja rzeczywiście doprowadzi do dowodu (**). Niech $(C_j)_{j=1}^\infty$ będzie rozbiciem A wpisanym w pokrycie $(B_k)_{k=1}^\infty$ (Ćwiczenie). Ustalmy j i niech $C := C_j \subset B_k$, $\Phi := \Phi_k$. Mamy

$$\frac{1}{\lambda^m}|\det\Phi|\mathcal{L}^m(C) \overset{(4)}{\leqslant} \int_C J_m f(x)d\mathcal{L}^m(x) \overset{(4)}{\leqslant} \lambda^m|\det\Phi|\mathcal{L}^m(C),$$
$$\mathcal{H}^m(\Phi(C)) = \mathcal{L}^m(\Phi(C)) = |\det\Phi|\mathcal{L}^m(C),$$

$$\frac{1}{\lambda^m}\mathcal{H}^m(\Phi(C)) = \frac{1}{\lambda^m}\mathcal{H}^m(\Phi\circ(f|_C)^{-1}(f(C))$$
$$\overset{(2)+(\&)}{\leqslant} \mathcal{H}^m(f(C)) = \mathcal{H}^m((f|_C)\circ\Phi^{-1}(\Phi(C))| \overset{(2)+(\&)}{\leqslant} \lambda^m\mathcal{H}^m(\Phi(C)),$$

gdzie (&) wynika z Propozycji 16.4.9(a). Pamiętając, że f jest injektywne na C dostajemy stąd

$$\frac{1}{\lambda^{2m}}\int_{\mathbb{R}^n} N_C(f,y)d\mathcal{H}^m(y) = \frac{1}{\lambda^{2m}}\mathcal{H}^m(f(C)) \leqslant \frac{1}{\lambda^{2m}}\lambda^m|\det\Phi|\mathcal{L}^m(C) \leqslant \int_C J_m f d\mathcal{L}^m$$
$$\leqslant \lambda^m|\det\Phi|\mathcal{L}^m(C) = \lambda^m\mathcal{H}^m(\Phi(C)) \leqslant \lambda^{2m}\mathcal{H}^m(f(C)) = \lambda^{2m}\int_{\mathbb{R}^n} N_C(f,y)d\mathcal{H}^m(y).$$

Po zsumowaniu

$$\frac{1}{\lambda^{2m}}\int_{\mathbb{R}^n} N_A(f,y)d\mathcal{H}^m(y) \leqslant \int_A J_m f d\mathcal{L}^m \leqslant \lambda^{2m}\int_{\mathbb{R}^n} N_A(f,y)d\mathcal{H}^m(y).$$

Przechodzimy do konstrukcji (1–3). Niech $\mathcal{S}$ będzie przeliczalnym i gęstym zbiorem izomorfizmów liniowych $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Dla $\Phi\in\mathcal{S}$ oraz $i\in\mathbb{N}$ niech $Z(\Phi,i)$ składa się ze wszystkich punktów $a\in\Xi'$, dla których:

$$\Big(\frac{1}{\lambda}+\varepsilon\Big)\|\Phi(v)\| \leqslant \|f'(a)(v)\| \leqslant (\lambda-\varepsilon)\|\Phi(v)\|, \quad v\in\mathbb{R}^m, \tag{5}$$
$$\|f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)\| \leqslant \varepsilon\|\Phi(b-a)\|, \quad b\in\overline{\mathbb{B}}(a,1/i). \tag{6}$$

Zauważmy, $Z(\Phi,i)$ jest zbiorem borelowskim (wystarczy zauważyć, że w (5) wystarczy brać $v\in\mathbb{Q}^m$, zaś w (6) $b\in\mathbb{Q}^n\cap\overline{\mathbb{B}}(a,1/i)$). Oczywiście z (5) wynika (3) dla zbioru $Z(\Phi,i)$. Z własności (6) wynika, że dla dowolnych $a\in Z(\Phi,i)$, $b\in\overline{\mathbb{B}}(a,1/i)$ mamy

$$\|f(a)-f(b)\| \leqslant \|f'(a)(b-a)\| + \varepsilon\|\Phi(b-a)\| \overset{(5,6)}{\leqslant} (\lambda-\varepsilon)\|\Phi(b-a)\| + \varepsilon\|\Phi(b-a\| = \lambda\|\Phi(b-a)\|, \tag{7}$$
$$\|f(a)-f(b)\| \geqslant \|f'(a)(b-a)\| - \varepsilon\|\Phi(b-a)\| \overset{(5,6)}{\geqslant} \Big(\frac{1}{\lambda}+\varepsilon\Big)\|\Phi(b-a)\| - \varepsilon\|\Phi(b-a)\| = \frac{1}{\lambda}\|\Phi(b-a)\|. \tag{8}$$

Dla $c\in Z(\Phi,i)$ niech $U = U_c := Z(\Phi,i)\cap\mathbb{B}(c,\frac{1}{2i})$. Z (8) wynika, że $f|_U$ jest injektywne. Z (7) dostajemy $\|f\circ\Phi^{-1}(\xi)-f\circ\Phi^{-1}(\eta)\| \leqslant \lambda\|\xi-\eta\|, \xi,\eta\in\Phi(U)$, zaś z (8) mamy $\|\Phi\circ(f|_U)^{-1}(t)-\Phi\circ(f|_U)^{-1}(u)\| \leqslant \lambda\|t-u\|$, $t,u\in f(U)$. Wynika stąd, korzystając z twierdzenia Lindelöfa, że $Z(\Phi,i)$ ma pokrycie przeliczalne zbiorami borelowskimi spełniającymi (1) – (3).

Pozostaje pokazać, że $A\subset \bigcup_{(\Phi,i)\in\mathcal{S}\times\mathbb{N}} Z(\Phi,i)$. Istotnie, ustalmy $a\in A$ i niech $f'(a) = H\circ G$, gdzie $G:\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^m$ jest izomorfizmem liniowym, zaś $H:\mathbb{R}^m\longrightarrow f'(a)(\mathbb{R}^m)\subset\mathbb{R}^n$ jest ortogonalne (por. dowód Wniosku 16.4.18). Dobierzmy $\Phi\in\mathcal{S}$ takie, że

$$\|\Phi\circ G^{-1}\| < \frac{1}{\frac{1}{\lambda}+\varepsilon}, \quad \|G\circ\Phi^{-1}\| < \lambda-\varepsilon.$$

Stąd

$$\|\Phi(v)\| = \|\Phi\circ G^{-1}(G(v))\| \leqslant \frac{1}{\frac{1}{\lambda}+\varepsilon}\|G(v)\|, \quad \|G(v)\| = \|G\circ\Phi^{-1}(\Phi(v))\| \leqslant (\lambda-\varepsilon)\|\Phi(v)\|, \quad v\in\mathbb{R}^m.$$

Ponieważ $\|f'(a)(v)\| = \|G(v)\|$ dostajemy stąd (5). Dla uzyskania (6) skorzystamy z definicji $f'(a)$:

$$\|f(b) - f(a) - f'(a)(b-a)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{\|\Phi^{-1}\|}\|b-a\| \leqslant \varepsilon\|\Phi(b-a)\|, \quad b \in \overline{\mathbb{B}}(a, 1/i),\ i \gg 1. \qquad \square$$

Dowód Twierdzenia (†) jest zakończony.

Teraz $(\ddagger)_1$. Będzie nam potrzebnych kilka pomocniczych wyników.

Wniosek 16.4.19. *Jeżeli $A \in \mathbb{M}(n\times m;\mathbb{R})$, $n \leqslant m$, $U \in \mathbb{M}(m\times m;\mathbb{R})$, $U^tU = UU^t = \mathbb{I}_m$, to $J_n(AU) = J_n(A)$.*

Dowód. Na podstawie Wniosku 10.1.9 mamy

$$(J_n(AU))^2 = \det(AU(AU)^t) = \det(AUU^tA^t) = \det(AA^t) = (J_n(A))^2. \qquad \square$$

Przechodzimy do najtrudniejszej części dowodu.

Dowód $(\ddagger)$ *przy założeniu* $(\ddagger)_1$. Zakładamy, że $A \subset \{x \in \Xi' : f'(x)(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^n\}$. Zasadnicza idea dowodu (podobnie jak w Twierdzeniu (†)) polega na znalezieniu pokrycia $(B_j)_{j=1}^\infty \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ zbioru A takiego, że dla dowolnego $B = B_j$ warunek $(\ddagger)$ zachodzi dla dowolnego $C \in \mathcal{L}_m$, $C \subset B$.

Dla dowolnego $I = (i_1, \dots, i_{m-n}) \in \Lambda_m^{m-n}$ niech:

- $p_I : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m-n}$, $p_I(x) := (x_{i_i}, \dots, x_{i_{m-n}})$,
- $u_I : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $u_I(x) = (f(x), p_I(x))$,
- $A_I := \{x \in \Xi' : \det u_I'(x) \neq 0\}$.

Zauważmy, że $\{x \in \Xi' : f'(x)(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^n\} = \bigcup_I A_I$.

Istotnie, dla $x \in \Xi'$ mamy $u_I'(x) = \begin{bmatrix} f'(x) \\ p_I \end{bmatrix}$, a stąd:
$\exists_{I:|I|=m-n} \det u_I'(x) \neq 0 \iff \exists_{K:|K|=n} \det[f'(x)_{(1,\dots,n),K}] \neq 0 \iff \operatorname{rank} f'(x) = n \iff f'(x)(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^n$.

W takim razie wystarczy znaleźć pokrycie dla każdego z zbiorów $A\cap A_I$. Ustalamy I i niech $u := u_I, p := p_I$. Korzystając z konstrukcji (1–3) w dowodzie Twierdzenia (†), znajdziemy pokrycie borelowskie $(B_j)_{j=1}^\infty$ zbioru $A \cap A_I$ takie, że dla dowolnego $B = B_j$ odwzorowanie $u|_B$ jest injektywne oraz odwzorowanie $(u|_B)^{-1} : u(B) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ jest lipschitzowskie. Wobec twierdzenia Kirszbrauna funkcja $(u|_B)^{-1}$ przedłuża się do funkcji lipschitzowskiej $v : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

Ustalmy zbiór $C \in \mathcal{L}_m$, $C \subset B$. Chcemy pokazać, że

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{m-n}(C \cap f^{-1}(y))d\mathcal{H}^m(y) = \int_C J_n f(x) d\mathcal{L}^m(x).$$

Niech $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \ni (y,z)$. Na wstępie zauważmy, że $v(y,\cdot) : p(C\cap f^{-1}(y)) \longrightarrow C\cap f^{-1}(y)$ bijektywnie, $y \in \mathbb{R}^n$.

Istotnie, ponieważ $v = (u|_B)^{-1}$ na $u(B)$, mamy:
$C \cap f^{-1}(y) = v(u(C \cap f^{-1}(y))) = v(u(\{x \in C : f(x) = y\})) = v(\{(y, p(x)) : x \in C,\ f(x) = y\}) = v(y,\cdot)(p(C \cap f^{-1}(y)))$.

Injektywność wynika z faktu, iż $\{y\} \times p(C \cap f^{-1}(y)) \subset u(C) \subset u(B)$. Stosując Twierdzenie (†) do odwzorowania v_y i zbioru $p(C \cap f^{-1}(y)$, dostajemy

$$\mathcal{H}^{m-n}(C\cap f^{-1}(y)) = \mathcal{H}^{m-n}(v(y,\cdot)(p(C\cap f^{-1}(y)))) = \int_{p(C\cap f^{-1}(y)))} (J_{m-n}v(y,\cdot))(z) d\mathcal{L}^{m-n}(z), \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

a stąd

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{m-n}(C \cap f^{-1}(y))d\mathcal{L}^n(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{p(C\cap f^{-1}(y)))} (J_{m-n}v(y,\cdot))(z) d\mathcal{L}^{m-n}(z) d\mathcal{L}^n(y).$$

Ponieważ $\{z \in \mathbb{R}^{m-n} : (y,z) \in u(C)\} = \{p(x) : x \in C \cap f^{-1}(y)\}$, $y \in \mathbb{R}^n$, twierdzenie Fubiniego daje

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{p(C\cap f^{-1}(y)))} (J_{m-n}v(y,\cdot))(z) d\mathcal{L}^{m-n}(z) d\mathcal{L}^n(y) = \int_{u(C)} (J_{m-n}v(y,\cdot))(z) d\mathcal{L}^m(y,z).$$

Teraz skorzystamy z twierdzenia o zmianie zmiennych $(y,z)=u(x)=(f(x),p(x))$ i dostajemy

$$\int_{u(C)}(J_{m-n}(v(y,\cdot))(z)d\mathcal{L}^m(y,z)=\int_C(J_{m-n}v(f(x),\cdot))(p(x))|u'(x)|d\mathcal{L}^m(x).$$

Do zakończenia dowodu pozostaje pokazać, że $(J_{m-n}v(f(x),\cdot))(p(x))|u'(x)|=J_nf(x)$ dla p.w. $x\in C$.

Mamy $u'(x)\circ v'(u(x))=\mathrm{id}$ dla $\mathcal{L}^m$-p.w. $x\in B$. Istotnie, na podstawie twierdzenia Rademachera $u'(x)$ istnieje dla $x\in\Xi'$, $v'(y)$ istnieje dla $y\in\mathbb{R}^m\setminus\Xi''$, gdzie Ξ'' jest miary zero. W takim razie $u'(v(y))\circ v'(y)=\mathrm{id}$ dla $y\in u(B)\setminus(v^{-1}(\Xi')\cup\Xi'')$. Stąd wynika, że $u'(x)\circ v'(u(x))=\mathrm{id}$ dla $x\in B\setminus(\Xi'\cup v(\Xi''))$ ($v(\Xi'')$, jako obraz zbioru miary zero przez odwzorowanie lipschitzowskie, jest miary zero). Dalej będziemy rozważać tylko punkty $x\in C\setminus(\Xi'\cup v(\Xi''))$. *Ustalamy jedno takie* x.

Zdefiniujmy operator liniowy $M:\mathbb{R}^{m-n}\longrightarrow V:=M(\mathbb{R}^{m-n})\subset\mathbb{R}^m$, $M:=(v(f(x),\cdot))'(p(x))$. Zauważmy, że $M=\frac{\partial v}{\partial z}(u(x))$, gdzie $\frac{\partial v}{\partial z}$ oznacza różniczkę cześciową względem przestrzeni $\mathbb{R}^{m-n}$. Dla $w\in\mathbb{R}^{m-n}$ mamy

$$\begin{aligned}(0,w)=u'(x)v'(u(x))(0,w)&=u'(x)\big(\frac{\partial v}{\partial y}(u(x))(0)+\frac{\partial v}{\partial z}(u(x))(w)\big)\\&=u'(x)(M(w))=(f'(x)(M(w)),p(M(w))).\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc}\{0\}\times\mathbb{R}^{m-n} & \xrightarrow{\subset} & \mathbb{R}^m=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{m-n} & \xrightarrow{(\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^n},0)} & \mathbb{R}^n\\ M\downarrow\wr & \overset{p}{\swarrow} & u'(x)\uparrow\wr \quad R\downarrow\wr & \quad S\downarrow\wr & f'(x)\uparrow\cup\\ V & \xrightarrow{\subset} & \mathbb{R}^m=V^\perp\oplus & V & \xleftarrow{\ni} V^\perp\end{array}$$

W szczególności, $V\subset\operatorname{Ker}f'(x)$ oraz $p\circ M=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{m-n}}$. Wynika stąd, że $M:\mathbb{R}^{m-n}\longrightarrow V$ jest bijekcją, $M^{-1}=p$, $\dim V=m-n=\dim\operatorname{Ker}f'(x)$ i w konsekwencji $V=\operatorname{Ker}f'(x)$. Niech $R:\mathbb{R}^n\longrightarrow V^\perp\subset\mathbb{R}^m$ i $S:\mathbb{R}^{m-n}\longrightarrow V\subset\mathbb{R}^m$ będą izomorfizmami ortogonalnymi i niech $T:=R\oplus S:\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^m$, $T^tT=\mathbb{I}_m$. Mamy:

$$|u'(x)|=|\det(u'(x)\circ T)|=|\det(f'(x)\circ T,p\circ T)|=\Big|\det\begin{bmatrix}f'(x)\circ R & p\circ R\\ 0 & p\circ S\end{bmatrix}\Big|=|\det(f'(x)\circ R)\det(p\circ S)|.$$

Tak więc nasz problem sprowadza się do równości $J_{m-n}M|\det(f'(x)\circ R)\det(p\circ S)|=J_nf(x)$. Korzystając z Wniosku 16.4.19 mamy $|\det(f'(x)R)|=J_nf(x)$. Na podstawie Wniosku 16.4.17 dostajemy $J_{m-n}M|\det(p\circ S)|=J_{m-n}M|\det(M^{-1}S)|=J_{m-n}M(M^{-1}S)=J_{m-n}(S)=1$, co kończy dowód. □