

Sprawy organizacyjne

Literatura

Wykład będzie w zasadzie „samowystarczalny”. Oto kilka pozycji przydatnej literatury uzupełniającej (wszystkie pozycje zostały wydane przez PWN, z wyjątkiem książek H. Cartana i H. Federera):

Andrzej Birkholc, *Analiza matematyczna*.
Henri Cartan, *Calcul différentiel. Formes différentielles*, Herman, Paris.
Ryszard Engelking, *Topologia ogólna*.
Herbert Federer, *Geometric measure theory*, Springer Verlag, Berlin.
Grigorij Michajłowicz Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. I–III.
Franciszek Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy*.
Witold Kołodziej, *Analiza matematyczna*.
Kazimierz Kuratowski, *Rachunek różniczkowy i całkowy*.
Stanisław Łojasiewicz, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*.
Krzysztof Maurin, *Analiza*, t. I–II.
Walter Rudin, *Podstawy analizy matematycznej*.
Walter Rudin, *Analiza rzeczywista i zespolona*.
Laurent Schwartz, *Kurs analizy matematycznej*, t. I–II.

Program wykładu

- (1) Miara i całka — repetytorium.
- (2) Całka Riemanna a całka Lebesgue’a.
- (3) Zasada Cavalieriego. Twierdzenia Tonellego i Fubiniego.
- (4) Twierdzenie o zmianie zmiennych w całce Lebesgue’a.
- (5) Funkcje dane całką.
- (6) Gęstość $\mathcal{C}_0(\Omega, \mathbb{C})$ w $L^p(\Omega, \mathbb{C}, \mathcal{L}^n)$.
- (7) Splot.
- (8) Regularyzacja.
- (9) Rozkład jedności.
- (10) Miara i całka Lebesgue’a na podrozmiarowościach w $\mathbb{R}^n$.
- (11) Formy różniczkowe.
- (12) Całkowanie form różniczkowych.
- (13) Twierdzenie Stokesa.
- (14) Twierdzenie Stokesa w wersji kohomologicznej.
- (15) Szeregi Fouriera — uzupełnienia.
- (16) Transformacja Fouriera.
- (17) Twierdzenie Kirsza.
- (18) Miara i ko-miara odwzorowań lipschitzowskich.

Zaliczanie ćwiczeń

W semestrze jest 60 godz. ćwiczeń. Limit nieobecności to 20 godzin, w tym limit nieobecności nie-usprawiedliwionych to 8 godzin.

W przypadku przekroczenia któregokolwiek z tych limitów student otrzymuje ocenę NZAL i nie jest dopuszczony do egzaminów.

Egzaminy

- Nie ma egzaminu pisemnego.
- **Wszyscy studenci zdają egzamin ustny** (szczegóły zostaną podane na wykładzie).

Teoria miary i całki

12.1. Miara i całka — repetytorium

Teoria miary i całki jest treścią niezależnego wykładu. Podrozdział ten należy potraktować jako pewnego rodzaju repetytorium z podstawowych definicji i twierdzeń tej teorii. Chodzi również o ustalenie oznaczeń. Dowody zostały podane dla wygody Czytelnika.

12.1.1. σ -algebry i zbiory borelowskie.

Definicja 12.1.1. Powiemy, że rodzina podzbiorów $\mathfrak{M} \subset \mathcal{P}(X)$ jest σ -algebrą na X , jeżeli:

- (1) $\emptyset \in \mathfrak{M}$,
- (2) $A \in \mathfrak{M} \implies X \setminus A \in \mathfrak{M}$,
- (3) $(A_j)_{j=1}^\infty \subset \mathfrak{M} \implies \bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathfrak{M}$.

Odnotujmy, że rodzina wszystkich podzbiorów $\mathbb{R}^n$, które są regularne z punktu widzenia definicji całki Riemanna nie jest oczywiście σ -algebrą.

Obserwacja 12.1.2 (Własności σ -algebr). Poniżej $\mathfrak{M}$ oznacza σ -algebrę na X .

- (a) $X \in \mathfrak{M}$. Wynika to z (1) i (2).
- (b) $\mathfrak{M} := \mathcal{P}(X)$ jest maksymalną σ -algebrą na X .
- (c) $\mathfrak{M} := \{\emptyset, X\}$ jest minimalną σ -algebrą na X .
- (d) $A_1, \dots, A_N \in \mathfrak{M} \implies A_1 \cup \dots \cup A_N \in \mathfrak{M}$. Wynika to z (1) i (3) dla $A_j := \emptyset$, $j \geq N+1$.
- (e) $(A_j)_{j=1}^\infty \subset \mathfrak{M} \implies \bigcap_{j=1}^\infty A_j \in \mathfrak{M}$. Wynika to z (2) i (3): $\bigcap_{j=1}^\infty A_j = X \setminus \bigcup_{j=1}^\infty (X \setminus A_j)$.
- (f) $A_1, \dots, A_N \in \mathfrak{M} \implies A_1 \cap \dots \cap A_N \in \mathfrak{M}$. Wynika to z (2) i (d) (analogicznie jak w (e)).
- (g) $A, B \in \mathfrak{M} \implies A \setminus B \in \mathfrak{M}$. Wynika to z (2) i (f): $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$.
- (h) Dla dowolnego zbioru Y i dla dowolnego odwzorowania $f : X \longrightarrow Y$ rodzina

$$f_*\mathfrak{M} := \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathfrak{M}\}$$

jest σ -algebrą na Y . Zauważmy, że dla $g : Y \longrightarrow Z$ mamy: $g_*f_*\mathfrak{M} = (g \circ f)_*\mathfrak{M}$.

(i) Dla dowolnego zbioru $Y \subset X$ rodzina $\mathfrak{M}|_Y := \{A \cap Y : A \in \mathfrak{M}\}$ jest σ -algebrą na Y . Zauważmy, że jeżeli $Y \in \mathfrak{M}$, to $\mathfrak{M}|_Y = \{A \in \mathfrak{M} : A \subset Y\} \subset \mathfrak{M}$.

(j) Dla dowolnej rodziny $(\mathfrak{M}_t)_{t \in T}$ σ -algebr na X ($T \neq \emptyset$) rodzina $\bigcap_{t \in T} \mathfrak{M}_t = \{A \subset X : \forall t \in T : A \in \mathfrak{M}_t\}$ jest σ -algebrą na X . W szczególności, wobec (b), dla dowolnej rodziny $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ istnieje najmniejsza σ -algebra na X zawierająca $\mathcal{F}$, którą będziemy oznaczać przez $\sigma(\mathcal{F})$.

(k) Dla dowolnej rodziny $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ oraz zbioru $Y \subset X$ mamy $\sigma(\mathcal{F}|_Y) = \sigma(\mathcal{F})|_Y$.

Istotnie, ponieważ $\mathcal{F}|_Y \subset \sigma(\mathcal{F})|_Y$ oraz $\sigma(\mathcal{F})|_Y$ jest σ -algebrą, więc $\sigma(\mathcal{F}|_Y) \subset \sigma(\mathcal{F})|_Y$. Dla dowodu inkluzji $\sigma(\mathcal{F}|_Y) \supset \sigma(\mathcal{F})|_Y$, niech $\mathfrak{M} := \{A \in \sigma(\mathcal{F}) : A \cap Y \in \sigma(\mathcal{F}|_Y)\}$. Oczywiście, $\mathcal{F} \subset \mathfrak{M}$. Ponadto, $\mathfrak{M}$ jest σ -algebrą (ĆWICZENIE). Stąd $\mathfrak{M} = \sigma(\mathcal{F})$.

Definicja 12.1.3. Jeżeli X jest przestrzenią topologiczną, to $\mathcal{B}(X) := \sigma(\text{top } X)$ nazywamy σ -algebrą zbiorów borelowskich na X .

Obserwacja 12.1.4. Niech

$$\Delta_{\varepsilon, \alpha} := \varepsilon(\alpha + [0, 1]^n), \quad \Delta_{\varepsilon, \alpha}^o := \varepsilon(\alpha + [0, 1]^n), \quad \varepsilon > 0, \alpha \in \mathbb{R}^n,$$

$$\mathcal{S}_k := \{\Delta_{1/2^k, \alpha} : \alpha \in \mathbb{Z}^n\}, \quad \mathcal{S} := \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{S}_k, \quad \mathcal{S}_k^o := \{\Delta_{1/2^k, \alpha}^o : \alpha \in \mathbb{Z}^n\}, \quad \mathcal{S}^o := \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{S}_k^o;$$

zbiory typu $\Delta_{\varepsilon, \alpha}^o$ nazywa się czasami *kostką z narożnikiem*. Wtedy:

(a) Dla dowolnych $k \in \mathbb{N}$ oraz $x \in \mathbb{R}^n$, istnieje dokładnie jedna kostka z narożnikiem $Q \in \mathcal{S}_k^o$ taka, że $x \in Q$.

(b) Dla dowolnych $k, \ell \in \mathbb{N}$ oraz $Q \in \mathcal{S}_k^o, R \in \mathcal{S}_\ell^o$, jeżeli $k < \ell$, to albo $Q \cap R = \emptyset$ albo $R \subset Q$.

(c) Dowolny niepusty zbiór otwarty $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest sumą przeliczalnej liczby kostek z rodziny $\mathcal{S}$, $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j$, przy czym $\text{int } P_i \cap \text{int } P_j = \emptyset$ dla $i \neq j$.

(d) Dowolny niepusty zbiór otwarty $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest sumą przeliczalnej liczby parami rozłącznych kostek z narożnikiem z rodziny $\mathcal{S}^o$, $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$.

W przypadku (c) i (d) możemy rozumować np. tak. Najpierw wybieramy wszystkie kostki $P \in \mathcal{S}_1$ (odp. $P \in \mathcal{S}_1^o$) takie, że $P \subset \Omega$. Rodzinę tych kostek oznaczmy przez $\mathcal{F}_0$. Jest to rodzina co najwyżej przeliczalna (może być pusta). Niech teraz $\mathcal{F}_1$ oznacza rodzinę wszystkich kostek $P \in \mathcal{S}_2$ (odp. $P \in \mathcal{S}_2^o$) takich, że $P \subset \Omega$ oraz $P \not\subset \bigcup_{Q \in \mathcal{F}_0} Q$. W ten sam sposób konstruujemy $\mathcal{F}_k$ jako rodzinę wszystkich kostek

$P \in \mathcal{S}_k$ (odp. $P \in \mathcal{S}_k^o$) takich, że $P \subset \Omega$ oraz $P \cap \bigcup_{j=0}^{k-1} \bigcup_{Q \in \mathcal{F}_j} Q = \emptyset$, $k \geq 2$. Teraz, jako pokrycie zbioru Ω

wystarczy wziąć rodzinę $\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{F}_k$.

Obserwacja 12.1.5 (Własności zbiorów borelowskich). (a) $\mathcal{B}(X) = \sigma(\text{cotop}(X))$. Zbiory typu $\mathcal{G}_\delta$ ⁽¹⁾ oraz zbiory typu $\mathcal{F}_\sigma$ ⁽²⁾ są borelowskie.

(b) Korzystając z Obserwacji 12.1.4(c), wnioskujemy natychmiast, że $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{F})$, gdzie

$$\mathcal{F} := \{P \subset \mathbb{R}^n : P \text{ jest kostką}\}.$$

(c) Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie dowolnym zbiorem gęstym. Wtedy $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma(\mathcal{F})$, gdzie $\mathcal{F}$ jest jedną z następujących rodzin przedziałów:

- $\mathcal{F} :=$ rodzina wszystkich przedziałów $\Delta \subset \overline{\mathbb{R}}$,
- $\mathcal{F} :=$ rodzina wszystkich przedziałów $\Delta \subset \mathbb{R}$ o końcach w $A \cup \{-\infty, +\infty\}$,
- $\mathcal{F} := \{[-\infty, \alpha) : \alpha \in A\}$,
- $\mathcal{F} := \{[-\infty, \alpha] : \alpha \in A\}$,
- $\mathcal{F} := \{(\alpha, +\infty] : \alpha \in A\}$,
- $\mathcal{F} := \{[\alpha, +\infty] : \alpha \in A\}$.

12.1.2. Odwzorowania mierzalne.

Definicja 12.1.6. Niech $\mathfrak{M}$ będzie σ -algebrą na X i niech Y będzie przestrzenią topologiczną. Powiemy, że odwzorowanie $f : X \rightarrow Y$ jest $\mathfrak{M}$ -*mieralne* (krótko: *mieralne*), jeżeli $f^{-1}(\Omega) \in \mathfrak{M}$ dla dowolnego $\Omega \in \text{top } Y$, tzn. $\text{top } Y \subset f_*\mathfrak{M}$. Piszemy wtedy $f \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M})$ lub krótko:

- $f \in \mathcal{M}(X, Y)$, o ile z kontekstu jasno wynika, co to jest $\mathfrak{M}$,
- $f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$, o ile z kontekstu jasno wynika, co to jest Y , w szczególności, gdy $Y = \overline{\mathbb{R}}$ (z topologią naturalną),
- $f \in \mathcal{M}(X)$, o ile z kontekstu jasno wynika, co to jest Y i $\mathfrak{M}$.

Jeżeli X jest przestrzenią topologiczną, to odwzorowania $\mathcal{B}(X)$ -mieralne nazywamy *borelowskimi*.

Uwaga: We wszystkich istotnych przypadkach zakłada się dodatkowo, że $\text{top } Y$ ma bazę przeliczalną, np. że Y jest ośrodkową przestrzenią metryczną. Bez dodatkowych założeń (o X lub/i Y), wprowadzone powyżej pojęcie odwzorowania mierzalnego jest zbyt ogólne i nie pozwala na uzyskanie interesujących wyników — por. [Sch 1981], IV.4. W praktyce można się ograniczyć do przypadku, gdy $Y \in \{\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{C}\}$.

Obserwacja 12.1.7 (Własności odwzorowań mierzalnych). (a) $f \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M}) \iff \mathcal{B}(Y) \subset f_*\mathfrak{M}$.

(b) $\mathcal{C}(X, Y) \subset \mathcal{M}(X, Y, \mathcal{B}(X))$.

⁽¹⁾ Tzn. zbiory postaci $\bigcap_{j=1}^{\infty} \Omega_j$, gdzie $\Omega_j \in \text{top } X$, $j \geq 1$.

⁽²⁾ Tzn. zbiory postaci $\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$, gdzie F_j jest domknięty w X , $j \geq 1$.

- (c) Jeżeli $f \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M})$, $g \in \mathcal{M}(Y, Z, \mathcal{B}(Y))$ (np. $g \in \mathcal{C}(Y, Z)$), to $g \circ f \in \mathcal{M}(X, Z, \mathfrak{M})$.
Istotnie, $\mathcal{B}(Z) \subset g_*\mathcal{B}(Y) \subset g_*f_*\mathfrak{M} = (g \circ f)_*\mathfrak{M}$.
- (d) • Jeżeli $f \in \mathcal{M}(X, \mathbb{C}_*, \mathfrak{M})$, to $\frac{1}{f} \in \mathcal{M}(X, \mathbb{C}_*, \mathfrak{M})$.
• Jeżeli $f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$, to $|f| \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$.
• Jeżeli $f \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M})$, gdzie $(Y, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią unormowaną, to $\|f\| \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$.
• Jeżeli $f = (f_1, f_2) \in \mathcal{M}(X, Y_1 \times Y_2, \mathfrak{M})$, to $f_j \in \mathcal{M}(X, Y_j, \mathfrak{M})$, $j = 1, 2$.
- (e) Dla $f : X \rightarrow Y \subset Z$ mamy: $f \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M}) \iff f \in \mathcal{M}(X, Z, \mathfrak{M})$.
- (f) Każde odwzorowanie stałe jest mierzalne.
Istotnie, jeżeli $f \equiv y_0$, to $f^{-1}(\Omega) = \begin{cases} X, & \text{jeżeli } y_0 \in \Omega \\ \emptyset, & \text{jeżeli } y_0 \notin \Omega \end{cases}$.
- (g) $\chi_A \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M}) \iff A \in \mathfrak{M}$.
- (h) Niech $f_j \in \mathcal{M}(X, Y_j, \mathfrak{M})$, $j = 1, 2$. Załóżmy, że $\text{top } Y_j$ ma bazę przeliczalną, $j = 1, 2$ ⁽³⁾. Wtedy $f := (f_1, f_2) \in \mathcal{M}(X, Y_1 \times Y_2, \mathfrak{M})$.
Istotnie, dowolny zbiór otwarty $\Omega \subset Y_1 \times Y_2$ ma postać $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j^{(1)} \times \Omega_j^{(2)}$, gdzie $\Omega_j^{(i)} \in \text{top } Y_i$, $j \geq 1$, $i = 1, 2$. Wynika stąd, że $f^{-1}(\Omega) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f_1^{-1}(\Omega_j^{(1)}) \cap f_2^{-1}(\Omega_j^{(2)}) \in \mathfrak{M}$.
- (i) Niech Y będzie przestrzenią topologiczną i niech $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(Y)$ będzie dowolną rodziną taką, że $\mathcal{B}(Y) \subset \sigma(\mathcal{F})$. Załóżmy $f : X \rightarrow Y$ jest taka, że $f^{-1}(A) \in \mathfrak{M}$ dla dowolnego $A \in \mathcal{F}$. Wtedy $f \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M})$.
Istotnie, ponieważ $\mathcal{F} \subset f_*\mathfrak{M}$, zatem $\mathcal{B}(Y) \subset \sigma(\mathcal{F}) \subset f_*\mathfrak{M}$ i korzystamy z (a).
W szczególności, wobec Obserwacji 12.1.5(c), dla $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ następujące warunki są równoważne:
(1) $f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$;
(2) $f^{-1}(\Delta) \in \mathfrak{M}$ dla dowolnego przedziału $\Delta \subset \overline{\mathbb{R}}$;
(3) $\{x \in X : f(x) < \alpha\} \in \mathfrak{M}$ dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{Q}$;
(4) $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\} \in \mathfrak{M}$ dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{Q}$;
(5) $\{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathfrak{M}$ dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{Q}$;
(6) $\{x \in X : f(x) \geq \alpha\} \in \mathfrak{M}$ dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{Q}$.
- (j) $\mathcal{C}^1(X) \subset \mathcal{M}(X, \overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(X))$ (zob. Definicja 6.7.1). W szczególności, na podstawie (c), jeżeli $f \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M})$, $g \in \mathcal{C}^1(Y)$, to $g \circ f \in \mathcal{M}(X, Z, \mathfrak{M})$.
- (k) Jeżeli $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$, to $\{f < g\}, \{f \leq g\} \in \mathfrak{M}$.
Istotnie, wystarczy zauważyć, że $\{f < g\} = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Q}} \{f < \alpha\} \cap \{g > \alpha\}$ oraz, że $\{f \leq g\} = X \setminus \{g < f\}$.
- (l) Jeżeli $f, g \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M})$, gdzie Y jest przestrzenią Hausdorffa z bazą przeliczalną, to $\{f = g\}, \{f \neq g\} \in \mathfrak{M}$.
Istotnie, niech $h := (f, g) : X \rightarrow Y^2$. Na podstawie (h), h jest odwzorowaniem mierzalnym. Niech $\Delta := \{(y, y) : y \in Y\}$. Jest to zbiór domknięty. W szczególności, $\{f = g\} = h^{-1}(\Delta) \in \mathfrak{M}$. Mierzalność $\{f \neq g\}$ wynika teraz ze związku $\{f \neq g\} = X \setminus \{f = g\}$.
- (m) Jeżeli $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$, gdzie $X_j \in \mathfrak{M}$, $j \geq 1$, to dla $f : X \rightarrow Y$ mamy: $f \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M}) \iff f|_{X_j} \in \mathcal{M}(X_j, Y, \mathfrak{M})$ ⁽⁴⁾, $j \geq 1$.
- (n) Niech $f_j \in \mathcal{M}(X, Y_j, \mathfrak{M})$, gdzie Y_j jest przestrzenią unormowaną z bazą przeliczalną, $j = 1, 2$. Niech $A \in \mathcal{L}(Y_1 \times Y_2, Z)$, $B \in \mathcal{L}(Y_1, Y_2; Z)$, gdzie Z jest przestrzenią unormowaną. Wtedy

$$A(f_1, f_2), B(f_1, f_2) \in \mathcal{M}(X, Z, \mathfrak{M})$$

(wynika to z (c) i (h)). W szczególności,

- jeżeli $f_j \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M})$, $j = 1, 2$, gdzie Y jest przestrzenią unormowaną z bazą przeliczalną, to $f_1 + f_2 \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M})$;

⁽³⁾ Np. $Y_j = \overline{\mathbb{R}}$, $j = 1, 2$.
⁽⁴⁾ Tu i dalej stosujemy następującą umowę: jeżeli $A \in \mathfrak{M}$ i $f : A \rightarrow Y$, to pisząc „ $f \in \mathcal{M}(A, Y, \mathfrak{M})$ ” mamy na myśli „ $f \in \mathcal{M}(A, Y, \mathfrak{M}|_A)$ ”.

• jeżeli $f_1 \in \mathcal{M}(X, \mathbb{K}, \mathfrak{M})$, $f_2 \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M})$, gdzie Y jest $\mathbb{K}$ -przestrzenią unormowaną z bazą przeliczalną, to $f_1 \cdot f_2 \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M})$ (tak więc, w szczególności, $\mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M})$ jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$).

(o) Dla $f \in \mathcal{M}(X, \mathbb{C}, \mathfrak{M})$ istnieje funkcja $\alpha \in \mathcal{M}(X, \mathbb{S}_1, \mathfrak{M})$ taka, że $f = \alpha|f|$.

Istotnie, kładziemy

$$\alpha(x) := \begin{cases} f(x)/|f(x)|, & \text{jeżeli } f(x) \neq 0 \\ 1, & \text{jeżeli } f(x) = 0 \end{cases}$$

i korzystamy z (m).

(p) Dla dowolnych $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$ zbiór $A := \{x \in X : f(x) + g(x) \text{ istnieje}\}$ należy do $\mathfrak{M}$ oraz $f + g \in \mathcal{M}(A, \mathfrak{M})$. Ponadto, $f \cdot g \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$ przy zastosowaniu konwencji $0 \cdot \infty := 0$

Istotnie, niech $B := \{x \in X : f(x), g(x) \in \mathbb{R}\}$. Wiemy, że $B \in \mathfrak{M}$ oraz, że $f + g, f \cdot g \in \mathcal{M}(B, \mathfrak{M})$ (korzystamy z (n)). Zbiór $A \setminus B$ jest równy

$$\begin{aligned} \{f > -\infty, g = +\infty\} \cup \{f = -\infty, g < +\infty\} \\ \cup \{f < +\infty, g = -\infty\} \cup \{f = +\infty, g > -\infty\} =: B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4. \end{aligned}$$

Oczywiście $B_j \in \mathfrak{M}$, $j = 1, \dots, 4$. Tak więc $A \in \mathfrak{M}$. Ponadto $f + g$ jest odwzorowaniem stałym na każdym ze zbiorów B_j . Teraz stosujemy (m).

Przypadek iloczynu jest analogiczny: zbiór $X \setminus B$ rozpada się na zbiory z $\mathfrak{M}$, na których $f \cdot g$ jest stałe ⁽⁵⁾.

(q) Jeżeli $(f_j)_{j=1}^\infty \subset \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$, to $\inf\{f_j : j \in \mathbb{N}\}, \sup\{f_j : j \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$.

Istotnie,

$$\{x \in X : \inf\{f_j(x) : j \in \mathbb{N}\} < \alpha\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{x \in X : f_j(x) < \alpha\}.$$

Podobnie dla supremum.

- (r) • Jeżeli $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$, to $\max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$.
• Jeżeli $f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$, to $f_+ := \max\{f, 0\}, f_- := \max\{-f, 0\} \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$. ⁽⁶⁾
• Jeżeli $(f_j)_{j=1}^\infty \subset \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$, to $\liminf_{j \rightarrow +\infty} f_j, \limsup_{j \rightarrow +\infty} f_j \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$.

Istotnie, $\liminf_{j \rightarrow +\infty} f_j = \sup_{k \in \mathbb{N}} \inf\{f_j : j \geq k\}$. Podobnie dla $\limsup$.

(s) Jeżeli $(f_j)_{j=1}^\infty \subset \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$, to $A := \{x \in X : \lim_{j \rightarrow +\infty} f_j(x) \text{ istnieje}\} \in \mathfrak{M}$ oraz $\lim_{j \rightarrow +\infty} f_j \in \mathcal{M}(A, \mathfrak{M})$

⁽⁷⁾. W szczególności,

każda funkcja $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ n -tej klasy Baire'a (zob. Definicja 9.1.3) (X jest przestrzenią topologiczną) jest $\mathcal{B}(X)$ -mierzalna. Dla przykładu, każda oddzielnie ciągła funkcja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ jest $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ -mierzalna.

(t) Jeżeli $(f_j)_{j=1}^\infty \subset \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M})$, gdzie (Y, ϱ) jest przestrzenią metryczną, oraz $f_j \rightarrow f$ punktowo na X , to $f \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M})$.

Istotnie, niech $\Omega \in \text{top } Y$ i niech $\Omega_\varepsilon := \{y \in \Omega : \varrho(y, Y \setminus \Omega) > \varepsilon\}$, gdzie $\varrho(y, B) := \inf\{\varrho(y, b) : b \in B\}$. Widać, że Ω_ε jest również zbiorem otwartym. Pozostaje jeszcze zauważyć, że

$$f^{-1}(\Omega) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} f_j^{-1}(\Omega_{1/i}).$$

(u) Niech $\Omega \in \text{top } \mathbb{R}^n$ i niech $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}, \mathcal{B}(\Omega))$. Przypuśćmy, że $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ i dla pewnego $j \in \{1, \dots, n\}$ pochodna $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ istnieje przy dowolnym $x \in A$. Wtedy $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathcal{M}(A, \mathbb{R}, \mathcal{B}(\Omega))$.

Istotnie, na podstawie (m), wystarczy pokazać, że

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathcal{M}(A \cap \Omega_{1/k}, \mathbb{R}, \mathcal{B}(\Omega)),$$

⁽⁵⁾ Np. $f \cdot g = -\infty$ na $\{f = -\infty, g > 0\} \cup \{f = +\infty, g < 0\} \cup \{f > 0, g = -\infty\} \cup \{f < 0, g = +\infty\}$. Przypadki $f \cdot g = +\infty$ i $f \cdot g = 0$ rozpatrujemy podobnie.

⁽⁶⁾ Zauważmy, że $f = f_+ - f_-$ (działanie jest zawsze wykonalne) oraz $|f| = f_+ + f_-$.

⁽⁷⁾ $A = \{x \in X : \liminf_{j \rightarrow +\infty} f_j(x) = \limsup_{j \rightarrow +\infty} f_j(x)\}$ i korzystamy z (l) i (r).

gdzie $\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : B(x, \varepsilon) \subset \Omega\}$. Ustalmy $k \in \mathbb{N}$. Niech

$$f_\ell(x) := \frac{f(x + \frac{1}{\ell}e_j) - f(x)}{\frac{1}{\ell}}, \quad x \in \Omega_{1/k}, \quad \ell \geq k.$$

Na podstawie (c) funkcje f_ℓ , $\ell \geq k$, są mierzalne oraz $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} f_\ell = \frac{\partial f}{\partial x_j}$ na $A \cap \Omega_{1/k}$. Teraz możemy skorzystać bezpośrednio z (s).

(v) Niech $\Omega \in \text{top } \mathbb{R}^n$ i niech $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Dla $j \in \{1, \dots, n\}$ niech

$$A_j := \left\{ x \in \Omega : \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \text{ istnieje} \right\}.$$

Wtedy $A_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ oraz (na podstawie (u)) $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathcal{M}(A_j, \mathbb{R}, \mathcal{B}(\Omega))$.

Istotnie, podobnie jak w (u), wystarczy pokazać, że $A_j \cap \Omega_{1/k} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$. Ustalmy $k \in \mathbb{N}$ i niech

$$\varphi_\nu(x) := \inf \left\{ \frac{f(x + te_j) - f(x)}{t} : 0 < |t| < \frac{1}{\nu} \right\}, \quad x \in \Omega_{1/k}, \quad \nu \geq k.$$

Jest to funkcja $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ -mierzalna, bowiem (korzystając z ciągłości f) mamy:

$$\varphi_\nu(x) := \inf \left\{ \frac{f(x + te_j) - f(x)}{t} : 0 < |t| < \frac{1}{\nu}, \quad t \in \mathbb{Q} \right\}, \quad x \in \Omega_{1/k}.$$

Analogicznie, niech

$$\psi_\nu(x) := \sup \left\{ \frac{f(x + te_j) - f(x)}{t} : 0 < |t| < \frac{1}{\nu} \right\}, \quad x \in \Omega_{1/k}, \quad \nu \geq k.$$

Jest to również funkcja $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ -mierzalna.

Zauważmy, że

$$A_j \cap \Omega_{1/k} = \{x \in \Omega_{1/k} : \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \varphi_\nu(x) = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \psi_\nu(x)\}.$$

Stąd, na podstawie (s), wnioskujemy, że $A_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Definicja 12.1.8. Niech Y będzie przestrzenią unormowaną z bazą przeliczalną. Powiemy, że odwzorowanie $f : X \rightarrow Y$ jest *proste* ($f \in \mathcal{M}_0(X, Y, \mathfrak{M})$), jeżeli $f \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M})$ oraz zbiór $f(X)$ jest skończony. Zgodnie z ogólną umową, będziemy również stosować oznaczenia $\mathcal{M}_0(X, Y)$, $\mathcal{M}_0(X, \mathfrak{M})$ i $\mathcal{M}_0(X)$.

Niech $f \in \mathcal{M}_0(X, Y, \mathfrak{M})$, $f(X) = \{a_1, \dots, a_N\}$, $a_j \neq a_k$ dla $j \neq k$. Wtedy $A_j := f^{-1}(\{a_j\}) \in \mathfrak{M}$, $j = 1, \dots, N$ ⁽⁸⁾, oraz $f = \sum_{j=1}^N a_j \chi_{A_j}$. Postać tę nazywamy *postacią kanoniczną odwzorowania f* .

Niech $\mathcal{M}_0^+(X, \mathfrak{M})$ oznacza zbiór nieujemnych funkcji prostych $f : X \rightarrow \mathbb{R}_+$. Jak zwykle, będziemy również stosować oznaczenie $\mathcal{M}_0^+(X)$.

Niech $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{M})$ oznacza zbiór nieujemnych funkcji mierzalnych $f : X \rightarrow [0, +\infty]$. Będziemy również stosować oznaczenie $\mathcal{M}^+(X)$.

Oczywiście $\mathcal{M}_0^+(X, \mathfrak{M}) \subset \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{M})$. Ponadto, $\mathcal{M}_0^+(X, \mathfrak{M})$ oraz $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{M})$ są wypukłymi stożkami ⁽⁹⁾.

Obserwacja 12.1.9 (Własności odwzorowań prostych). (a) Niech $f \in \mathcal{M}_0(X, Y, \mathfrak{M})$, $f(X) = \{a_1, \dots, a_N\}$, $a_j \neq a_k$ dla $j \neq k$. Wtedy $A_j := f^{-1}(\{a_j\}) \in \mathfrak{M}$, $j = 1, \dots, N$ ⁽¹⁰⁾, oraz

$$f = \sum_{j=1}^N a_j \chi_{A_j}.$$

Postać tę nazywamy *postacią kanoniczną odwzorowania f* .

⁽⁸⁾ Zauważmy, że $A_1, \dots, A_N$ są parami rozłączne oraz, że w sumie dają X .

⁽⁹⁾ Podzbiór S przestrzeni wektorowej E jest *wypukłym stożkiem* jeżeli $tx + uy \in S$ dla dowolnych $t, u \geq 0$, $x, y \in S$.

⁽¹⁰⁾ Zauważmy, że $A_1, \dots, A_N$ są parami rozłączne oraz, że w sumie dają X .

(b) Niech $B_j \in \mathfrak{M}$, $j = 1, \dots, N$, $B_j \cap B_k = \emptyset$ dla $j \neq k$, $\bigcup_{j=1}^N B_j = X$ i niech $b_1, \dots, b_N \in Y$ ⁽¹¹⁾.
Wtedy

$$f := \sum_{j=1}^N b_j \chi_{B_j} \in \mathcal{M}_0(X, Y, \mathfrak{M}).$$

(c) $\mathcal{M}_0(X, Y, \mathfrak{M})$ jest przestrzenią wektorową.

Propozycja 12.1.10. Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{M})$ istnieje ciąg $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{M}_0^+(X, \mathfrak{M})$ taki, że $f_n \nearrow f$ punktowo na X . Ponadto, jeżeli f jest ograniczona, to $f_n \rightarrow f$ jednostajnie na X .

Dowód. Niech

$$A_{n,j} := \{x \in X : \frac{j-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{j}{2^n}\}, \quad j = 1, \dots, n2^n, \quad A_n := \{x \in X : f(x) \geq n\},$$

$$f_n := \left(\sum_{j=1}^{n2^n} \frac{j-1}{2^n} \chi_{A_{n,j}} \right) + n \chi_{A_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Oczywiście $f_n \in \mathcal{M}_0^+(X, \mathfrak{M})$, $f_n \leq f$, $n \geq 1$. Jeżeli $f(x_0) = +\infty$, to $f_n(x_0) = n \nearrow +\infty$. Jeżeli $f(x_0) < N < +\infty$, to $f(x_0) - f_n(x_0) < 1/2^n$ dla $n \geq N$. Daje to zbieżność punktową $f_n \rightarrow f$ na X oraz zbieżność jednostajną w przypadku, gdy f jest ograniczona. Monotoniczność pozostawiamy jako ĆWICZENIE. $\square$

Definicja 12.1.11. Dla przestrzeni topologicznej X , niech $\underline{\mathcal{B}}(X)$ oznacza najmniejszą rodzinę $\mathcal{F} \subset \overline{\mathbb{R}}^X$, która spełnia następujące dwa warunki:

(*) $\mathcal{C}(X) \subset \mathcal{F}$,

(**) jeżeli $(f_k)_{k=1}^\infty \subset \mathcal{F}$ i $f_k \rightarrow f_0$ punktowo na X , to $f_0 \in \mathcal{F}$.

Zauważmy, że rodzina $\underline{\mathcal{B}}(X)$ jest poprawnie zdefiniowana — wystarczy wziąć przecięcie wszystkich rodzin spełniających (*) i (**).

Funkcje z $\underline{\mathcal{B}}(X)$ nazywamy *funkcjami Baire'a*. Oczywiście, każda funkcja n -tej klasy Baire'a (por. Definicja 9.1.3) jest funkcją Baire'a.

Propozycja 12.1.12 (Funkcje Baire'a). Niech X będzie przestrzenią metryczną. Wtedy

$$\mathcal{M}(X, \mathcal{B}(X)) = \underline{\mathcal{B}}(X).$$

Dowód. Na podstawie Obserwacji 12.1.7(b,s), rodzina $\mathcal{M}(X, \mathcal{B}(X))$ spełnia (*) i (**). Wynika stąd natychmiast, że $\underline{\mathcal{B}}(X) \subset \mathcal{M}(X, \mathcal{B}(X))$.

Lemat 12.1.13. Jeżeli $f, g \in \underline{\mathcal{B}}(X)$, $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$, to $f \cdot g$, $\alpha f + \beta g \in \underline{\mathcal{B}}(X)$ dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Dowód. Ustalmy $g \in \underline{\mathcal{B}}(X)$, $g : X \rightarrow \mathbb{R}$, oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Niech

$$\mathcal{F}_g := \{f \in \underline{\mathcal{B}}(X) : f \cdot g, \alpha f + \beta g \in \underline{\mathcal{B}}(X)\}.$$

Jest widoczne, że rodzina $\mathcal{F}_g$ spełnia (**). Ponadto, $\mathcal{F}_g$ spełnia oczywiście (*), gdy $g \in \mathcal{C}(X)$. Wynika stąd, że $\mathcal{F}_g = \underline{\mathcal{B}}(X)$ dla $g \in \mathcal{C}(X)$. Zamieniając rolami f i g , wnioskujemy stąd, że $\mathcal{F}_g$ spełnia (*) dla dowolnego g . Ostatecznie, $\mathcal{F}_g = \underline{\mathcal{B}}(X)$ dla dowolnego g . $\square$

Dla dowodu inkluzji $\mathcal{M}(X, \mathcal{B}(X)) \subset \underline{\mathcal{B}}(X)$ ustalmy $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{B}(X))$. Wobec Obserwacji 12.1.7(r), warunku (**) oraz Lematu 12.1.13, możemy założyć, że $f : X \rightarrow \mathbb{R}_+$. Teraz korzystając z Propozycji 12.1.10, warunku (**) oraz Lematu 12.1.13, redukujemy dowód do przypadku, gdy $f = \chi_A$ dla pewnego $A \in \mathcal{B}(X)$. Niech

$$\mathfrak{M} := \{B \in \mathcal{B}(X) : \chi_B \in \underline{\mathcal{B}}(X)\}.$$

Zauważmy, że $\text{top } X \subset \mathfrak{M}$, bowiem dla zbioru otwartego $\Omega \subset X$, jego funkcja charakterystyczna χ_Ω jest półciągła z dołu, a więc w szczególności, I klasy Baire'a (por. Propozycja 6.7.6 ⁽¹²⁾). Wobec definicji $\underline{\mathcal{B}}(X)$, pozostaje pokazać, że $\mathfrak{M}$ jest σ -algebrą.

Niech $B \in \mathfrak{M}$. Wtedy $\chi_{X \setminus B} = 1 - \chi_B \in \underline{\mathcal{B}}(X)$ na podstawie Lematu 12.1.13, co oznacza, że $X \setminus B \in \mathfrak{M}$.

⁽¹¹⁾ Nie zakładamy, że $b_1, \dots, b_N$ są parami różne.

⁽¹²⁾ Tu korzystamy z założenia, że X jest przestrzenią metryczną.

Niech teraz $B, C \in \mathfrak{M}$. Ponieważ $\chi_{B \setminus C} = \chi_B - \chi_B \chi_C$, zatem Lematu 12.1.13 daje $B \setminus C \in \mathfrak{M}$. Jeżeli $B \cap C = \emptyset$, to $\chi_{B \cup C} = \chi_B + \chi_C$, więc $B \cup C \in \mathfrak{M}$. Ogólnie, $B \cup C = (B \setminus C) \cup C \in \mathfrak{M}$.

Przypuśćmy, że $(B_k)_{k=1}^\infty \subset \mathfrak{M}$. Chcemy pokazać, że $B := \bigcup_{k=1}^\infty B_k \in \mathfrak{M}$. Mamy $\chi_B = \lim_{k \rightarrow +\infty} \chi_{C_k}$, gdzie $C_k := B_1 \cup \dots \cup B_k$, $k = 1, 2, \dots$. Z poprzednich rozważań wynika, że $(C_k)_{k=1}^\infty \subset \mathfrak{M}$, a stąd $\chi_B \in \underline{\mathfrak{B}}(X)$. $\square$

Ćwiczenie* 12.1.14. Czy Propozycja 12.1.12 pozostaje prawdziwa dla dowolnej przestrzeni topologicznej? (por. Obserwacja 6.7.7).

12.1.3. Miary.

Definicja 12.1.15. Niech $\mathfrak{M}$ będzie σ -algebrą na X . Funkcję $\mu : \mathfrak{M} \rightarrow [0, +\infty]$ nazywamy *miarą nieujemną na $\mathfrak{M}$* , jeżeli:

$$(1) \mu(\emptyset) = 0,$$

$$(2) (A_j)_{j=1}^\infty \subset \mathfrak{M}, A_j \cap A_k = \emptyset \text{ dla } j \neq k \implies \mu\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) = \sum_{j=1}^\infty \mu(A_j) \text{ (jest to tzw. przeliczalna addytywność)}.$$

W ten sam sposób możemy zdefiniować pojęcie *miary zespolonej* $\mu : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{C}$ jako funkcji spełniającej (2), z tym, że warunek (2) zawiera w sobie żądanie zbieżności szeregu $\sum_{j=1}^\infty \mu(A_j)$ ⁽¹³⁾.

Niech

- $\mathbb{M}(\mathfrak{M})$ oznacza rodzinę wszystkich *miar nieujemnych* $\mu : \mathfrak{M} \rightarrow [0, +\infty]$,
- $\mathbb{M}(\mathfrak{M}, \mathbb{C})$ oznacza rodzinę wszystkich *miar zespolonych* $\mu : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{C}$,
- $\mathbb{M}(\mathfrak{M}, \mathbb{R})$ oznacza podrodzinę rodziny $\mathbb{M}(\mathfrak{M}, \mathbb{C})$ złożoną ze wszystkich *miar rzeczywistych* $\mu : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}$,
- $\mathbb{M}(\mathfrak{M}, \mathbb{R}_+)$ oznacza rodzinę wszystkich *ograniczonych miar nieujemnych* $\mu : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$.

Odnótujmy, że $\mathbb{M}(\mathfrak{M}, \mathbb{K})$ jest $\mathbb{K}$ -przestrzenią wektorową, zaś rodziny $\mathbb{M}(\mathfrak{M})$ i $\mathbb{M}(\mathfrak{M}, \mathbb{R}_+)$ są wypukłymi stożkami.

Obserwacja 12.1.16 (Własności miar). (a) Dla $\mu : \mathfrak{M} \rightarrow [0, +\infty]$ układ warunków (1), (2) jest równoważny następującym warunkom:

$$(1') \mu \not\equiv +\infty,$$

$$(2') = (2).$$

Istotnie, jeżeli $\mu(A_1) < +\infty$, to stosując (2) do ciągu $A_1, \emptyset, \emptyset, \dots$ dostajemy: $\mu(A_1) = \mu(A_1) + \sum_{j=2}^\infty \mu(\emptyset)$, skąd wynika, że $\mu(\emptyset) = 0$.

(b) Powyższe rozumowanie pokazuje, że dla $\mu \in \mathbb{M}(\mathfrak{M}, \mathbb{C})$ jest zawsze spełniony warunek (1).

(c) Dla dowolnego $x_0 \in X$ funkcja

$$\delta_{x_0}(A) := \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } x_0 \in A \\ 0, & \text{jeżeli } x_0 \notin A \end{cases}$$

jest miarą nieujemną na $\mathcal{P}(X)$ (jest to tzw. *miara Diraca* ⁽¹⁴⁾).

(d) Funkcja

$$\mu(A) := \begin{cases} \#A & \text{gdy } A \text{ jest skończony} \\ +\infty & \text{gdy } A \text{ jest nieskończony} \end{cases}$$

jest miarą na $\mathcal{P}(X)$ (jest to tzw. *miara licząca*).

(e) Jeżeli μ jest miarą (nieujemną lub zespoloną), to

$$\mu(A_1 \cup \dots \cup A_N) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_N)$$

dla dowolnych $A_1, \dots, A_N \in \mathfrak{M}$ takich, że $A_j \cap A_k = \emptyset$ dla $j \neq k$ (jest to tzw. *skończona addytywność*).

Dla dowodu wystarczy skorzystać z (2) dla $A_j := \emptyset$, $j \geq N+1$.

⁽¹³⁾ Oczywiście szereg ten musi być zbieżny bezwarunkowo, a więc bezwzględnie.

⁽¹⁴⁾ Paul Dirac (1902–1984).

(f) Jeżeli $\mu \in \mathbb{M}(\mathfrak{M})$, to $\mu(A) \leq \mu(B)$ dla $A \subset B$ (wystarczy skorzystać z (e) dla $A_1 := A$, $A_2 := B \setminus A$). Ponadto, dla dowolnej miary oraz dla $A \subset B$ mamy: $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ o ile liczba $\mu(A)$ jest skończona.

(g) Jeżeli $\mu \in \mathbb{M}(\mathfrak{M})$, to dla dowolnych zbiorów $(B_j)_{j=1}^\infty \subset \mathfrak{M}$ mamy:

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^\infty B_j\right) \leq \sum_{j=1}^\infty \mu(B_j) \text{ (jest to tzw. przeliczalna podaddytywność).}$$

Istotnie, wystarczy zastosować (2) dla ciągu: $A_1 := B_1$, $A_j := B_j \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_{j-1})$, $j \geq 2$, a następnie skorzystać z (f) ⁽¹⁵⁾.

(h) Jeżeli $\mu \in \mathbb{M}(\mathfrak{M})$, to $\mu(B_1 \cup \dots \cup B_N) \leq \mu(B_1) + \dots + \mu(B_N)$ dla dowolnych $B_1, \dots, B_N \in \mathfrak{M}$ (jest to tzw. skończona podaddytywność).

(i) Jeżeli μ jest miarą i $B_N \nearrow B$, to $\mu(B_N) \rightarrow \mu(B)$.

Istotnie, niech $A_1 := B_1$, $A_j := B_j \setminus B_{j-1}$, $j \geq 2$. Wtedy mamy:

$$\mu(B) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) = \sum_{j=1}^\infty \mu(A_j) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^N \mu(A_j) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^N A_j\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mu(B_N).$$

(j) Jeżeli μ jest miarą, $B_j \searrow B$ i $\mu(B_1)$ jest skończona ⁽¹⁶⁾, to $\mu(B_j) \rightarrow \mu(B)$ ⁽¹⁷⁾.

Istotnie, niech $A_j := B_1 \setminus B_j$, $j \geq 1$. Wobec (i) $\mu(B_1) - \mu(B_j) = \mu(A_j) \rightarrow \mu(B_1 \setminus B) = \mu(B_1) - \mu(B)$

(k) Niech $\mu \in \mathbb{M}(\mathfrak{M})$ i niech $\mathcal{Z} := \{A \in \mathfrak{M} : \mu(A) = 0\}$. Wtedy:

- $(Z_j)_{j=1}^\infty \subset \mathcal{Z} \implies \bigcup_{j=1}^\infty Z_j \in \mathcal{Z}$,
- jeżeli $A \in \mathfrak{M}$ i $Z \in \mathcal{Z}$, to $\mu(A \cup Z) = \mu(A \setminus Z) = \mu(A)$ — ĆWICZENIE.

Definicja 12.1.17. Powiemy, że miara $\mu : \mathfrak{M} \rightarrow [0, +\infty]$ jest *zupełna*, jeżeli dla dowolnych $Z \in \mathcal{Z}$ i $A \subset Z$ mamy $A \in \mathfrak{M}$ ⁽¹⁸⁾.

Propozycja 12.1.18. Dla dowolnej miary $\mu : \mathfrak{M} \rightarrow [0, +\infty]$ istnieje σ -algebra $\mathfrak{M}^*$ oraz miara zupełna $\mu^* : \mathfrak{M}^* \rightarrow [0, +\infty]$ takie, że

- $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}^*$,
- $\mu^*|_{\mathfrak{M}} = \mu$,
- dla dowolnej σ -algebry $\mathfrak{N}$ i miary zupełnej $\nu : \mathfrak{N} \rightarrow [0, +\infty]$, jeżeli $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$ i $\nu|_{\mathfrak{M}} = \mu$, to $\mathfrak{M}^* \subset \mathfrak{N}$ i $\nu|_{\mathfrak{M}^*} = \mu^*$ ⁽¹⁹⁾.

Dowód. Zdefiniujmy $\mathfrak{M}^* := \{A \subset X : \exists_{L, R \in \mathfrak{M}} : L \subset A \subset R, \mu(R \setminus L) = 0\}$. Oczywiście $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}^*$. Udowodnimy, że $\mathfrak{M}^*$ jest σ -algebrą. Dla dowodu, że $X \setminus A \in \mathfrak{M}^*$ dla $A \in \mathfrak{M}^*$ wystarczy zauważyć, że jeżeli L, R są takie jak w definicji, to $X \setminus R \subset X \setminus A \subset X \setminus L$ i $(X \setminus L) \setminus (X \setminus R) = R \setminus L$. Dla dowodu, że $A := \bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathfrak{M}^*$ dla dowolnego ciągu $(A_j)_{j=1}^\infty \subset \mathfrak{M}^*$ dobieramy dla każdego A_j zbiory L_j i R_j tak,

jak w definicji i mamy: $L := \bigcup_{j=1}^\infty L_j \subset A \subset \bigcup_{j=1}^\infty R_j := R$ oraz $R \setminus L \subset \bigcup_{j=1}^\infty (R_j \setminus L_j)$.

Teraz określimy μ^* . Kładziemy $\mu^*(A) := \mu(L)$, gdy L, R są takie, jak w definicji. Takie określenie jest poprawne, bo jeżeli (L_1, R_1) jest inną parą zbiorów takich, że $L_1 \subset A \subset R_1$ i $\mu(R_1 \setminus L_1) = 0$, to $(L \setminus L_1) \cup (L_1 \setminus L) \subset (R_1 \setminus L_1) \cup (R \setminus L)$. Oczywiście $\mu^* = \mu$ na $\mathfrak{M}$. Bez trudu również sprawdzamy, że μ^* jest miarą: niech $(A_j)_{j=1}^\infty \subset \mathfrak{M}^*$ będzie ciągiem zbiorów parami rozłącznych i niech L_j, R_j będą skojarzone z A_j . Wtedy $(L_j)_{j=1}^\infty$ są parami rozłączne oraz

$$\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^\infty L_j\right) = \sum_{j=1}^\infty \mu(L_j) = \sum_{j=1}^\infty \mu^*(A_j).$$

⁽¹⁵⁾ $\mu\left(\bigcup_{j=1}^\infty B_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) = \sum_{j=1}^\infty \mu(A_j) \leq \sum_{j=1}^\infty \mu(B_j)$.

⁽¹⁶⁾ Oczywiście ten ostatni warunek jest istotny wyłącznie dla miar nieujemnych.

⁽¹⁷⁾ Żądanie skończoności $\mu(B_1)$ można zastąpić żądaniem aby $\mu(B_N)$ było skończone dla pewnego N . Jeżeli nic nie założymy, to twierdzenie przestaje być prawdziwe: np. $X := \mathbb{N}$, μ — miara licząca, $B_j := [j, +\infty) \cap \mathbb{N}$, $B := \emptyset$.

⁽¹⁸⁾ Oczywiście $\mu(A) \leq \mu(Z) = 0$.

⁽¹⁹⁾ Tzn. para $(\mathfrak{M}^*, \mu^*)$ jest minimalna. W szczególności, jeżeli μ jest zupełna, to $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}$ i $\mu^* = \mu$.

Dla dowodu zupełności, niech $B \subset A \in \mathfrak{M}^*$, $\mu^*(A) = 0$. Chcemy pokazać, że $B \in \mathfrak{M}^*$. Niech $L \subset A \subset R$ będą takie, jak w definicji $\mathfrak{M}^*$. Wtedy $\mu(R \setminus L) = 0$. Ponadto $\mu(L) = \mu^*(A) = 0$, a zatem $\mu(R) = 0$. Wystarczy więc zauważyć, że $\emptyset \subset B \subset R$ i $\mu(R \setminus \emptyset) = 0$.

Pozostaje sprawdzić minimalność. Niech $(\mathfrak{N}, \nu)$ będą jak w wypowiedzi propozycji. Ustalmy $A \in \mathfrak{M}^*$ i niech L, R będą takie, jak w definicji. Wtedy $A \setminus L \in \mathfrak{N}$ (bo $A \setminus L \subset R \setminus L \in \mathfrak{N}$ i $\nu(R \setminus L) = \mu(R \setminus L) = 0$, a ν jest zupełna). Wynika stąd, że $A = L \cup (A \setminus L) \in \mathfrak{N}$. Zgodność miary wynika bezpośrednio z definicji miary μ^* . $\square$

12.1.4. Miary zewnętrzne. Warunek Carathéodory'ego.

Definicja 12.1.19. Powiemy, że funkcja $\varphi : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ jest *miarą zewnętrzną na X* , jeżeli

- (1) $\varphi(\emptyset) = 0$,
- (2) $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \implies \varphi(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(A_j)$.

Miara zewnętrzna jest monotoniczna, tzn. $A \subset B \implies \varphi(A) \leq \varphi(B)$. Ponadto, jeżeli $A \subset A_1 \cup \dots \cup A_N$, to $\varphi(A) \leq \varphi(A_1) + \dots + \varphi(A_N)$.

Twierdzenie 12.1.20 (Warunek Carathéodory'ego ⁽²⁰⁾). Niech $\varphi : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ będzie miarą zewnętrzną na X . Zdefiniujmy

$$\mathfrak{M}(\varphi) := \{A \subset X : \forall T \subset X : \varphi(T) \geq \varphi(T \cap A) + \varphi(T \setminus A)\}. \quad (21)$$

Wtedy $\mathfrak{M}(\varphi)$ jest σ -algebrą, zaś $\varphi|_{\mathfrak{M}(\varphi)}$ — miarą zupełną.

Zbiory z $\mathfrak{M}(\varphi)$ nazywamy zbiorami *mierzalnymi*.

Dowód. Krok 1⁰: $\varphi(A) = 0 \implies A \in \mathfrak{M}$. Tak więc np. $\emptyset \in \mathfrak{M}$. W szczególności, wobec monotoniczności miar zewnętrznych, jeżeli już pokażemy, że $\mathfrak{M}$ jest σ -algebrą i φ jest miarą na $\mathfrak{M}$, to musi to być miara zupełna.

Istotnie, $\varphi(T \cap A) + \varphi(T \setminus A) \leq \varphi(A) + \varphi(T) = \varphi(T)$.

Krok 2⁰: $A \in \mathfrak{M} \implies X \setminus A \in \mathfrak{M}$.

Istotnie,

$$\varphi(T \cap (X \setminus A)) + \varphi(T \setminus (X \setminus A)) = \varphi(T \setminus A) + \varphi(T \cap A) \leq \varphi(T).$$

Krok 3⁰: $A, B \in \mathfrak{M} \implies A \cap B \in \mathfrak{M}$. W konsekwencji:

$$A_1, \dots, A_N \in \mathfrak{M} \implies A_1 \cap \dots \cap A_N \in \mathfrak{M}.$$

Istotnie,

$$\begin{aligned} \varphi(T \cap (A \cap B)) + \varphi(T \setminus (A \cap B)) &\stackrel{(2)}{\leq} \varphi((T \cap A) \cap B) + \varphi(T \setminus A) + \varphi((T \cap A) \setminus B) \\ &\stackrel{B \in \mathfrak{M}}{\leq} \varphi(T \cap A) + \varphi(T \setminus A) \stackrel{A \in \mathfrak{M}}{\leq} \varphi(T). \end{aligned}$$

Krok 4⁰: $A, B \in \mathfrak{M} \implies A \setminus B \in \mathfrak{M}$.

Istotnie, $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$ i korzystamy z 2⁰ i 3⁰.

Krok 5⁰: $A, B \in \mathfrak{M} \implies A \cup B \in \mathfrak{M}$. W konsekwencji:

$$A_1, \dots, A_N \in \mathfrak{M} \implies A_1 \cup \dots \cup A_N \in \mathfrak{M}.$$

Istotnie, $A \cup B = X \setminus ((X \setminus A) \cap (X \setminus B))$ i korzystamy z 2⁰ i 3⁰.

Krok 6⁰:

$$A_1, \dots, A_N \in \mathfrak{M}, \quad A_j \cap A_k = \emptyset \text{ dla } j \neq k \implies \varphi(A_1 \cup \dots \cup A_N) = \varphi(A_1) + \dots + \varphi(A_N)$$

⁽²⁰⁾ Constantin Carathéodory (1873–1950).

⁽²¹⁾ Zauważmy, że zawsze $\varphi(T) \leq \varphi(T \cap A) + \varphi(T \setminus A)$, a zatem warunek Carathéodory'ego można w sposób równoważny zapisać w postaci równości.

(tzn. φ jest skończenie addytywna na $\mathfrak{M}$).

Zastosujemy indukcję względem N . Trzeba tylko sprawdzić krok indukcyjny.

$$\begin{aligned}\varphi(A_1 \cup \dots \cup A_{N+1}) &\stackrel{A_{N+1} \in \mathfrak{M}}{=} \varphi((A_1 \cup \dots \cup A_{N+1}) \cap A_{N+1}) + \varphi((A_1 \cup \dots \cup A_{N+1}) \setminus A_{N+1}) \\ &= \varphi(A_{N+1}) + \varphi(A_1 \cup \dots \cup A_N) \stackrel{\text{zał. ind.}}{=} \varphi(A_1) + \dots + \varphi(A_{N+1}).\end{aligned}$$

Krok 7⁰:

$$(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}, \quad A_j \cap A_k = \emptyset \text{ dla } j \neq k \implies \varphi\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(A_j).$$

W szczególności, jeżeli już pokażemy, że $\mathfrak{M}$ jest σ -algebrą, to φ będzie miarą na $\mathfrak{M}$.

Istotnie, na mocy 6⁰ mamy:

$$\varphi\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \geq \lim_{N \rightarrow +\infty} \varphi\left(\bigcup_{j=1}^N A_j\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^N \varphi(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(A_j).$$

Krok 8⁰: Zauważmy, że dla dowolnego zbioru $Y \subset X$ funkcja $\psi := \varphi|_{\mathcal{P}(Y)}$ jest miarą zewnętrzną na Y . Możemy więc zdefiniować rodzinę $\mathfrak{M}(\psi)$ będącą odpowiednikiem rodziny $\mathfrak{M}(\varphi)$. Rodzina ta ma oczywiście wszystkie dotychczas sprawdzone własności względem obciętej miary. Dla nas ważna będzie następująca zależność: $A \in \mathfrak{M}(\varphi) \implies A \cap Y \in \mathfrak{M}(\psi)$. Istotnie, dla $T \subset Y$ mamy:

$$\psi(T \cap (A \cap Y)) + \psi(T \setminus (A \cap Y)) = \varphi(T \cap A) + \varphi(T \setminus A) = \varphi(T) = \psi(T).$$

Krok 9⁰: $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}, A_j \cap A_k = \emptyset \text{ dla } j \neq k \implies \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{M}$.

Istotnie,

$$\begin{aligned}\varphi\left(T \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) + \varphi\left(T \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) &= \varphi\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (T \cap A_j)\right) + \varphi\left(T \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \\ &\leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{j=1}^N \varphi(T \cap A_j) + \varphi\left(T \setminus \bigcup_{j=1}^N A_j\right) \right) \stackrel{6^0 \pm 8^0}{=} \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\varphi\left(T \cap \bigcup_{j=1}^N A_j\right) + \varphi\left(T \setminus \bigcup_{j=1}^N A_j\right) \right) \stackrel{5^0}{=} \varphi(T)\end{aligned}$$

Krok 10⁰ (i ostatni). $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M} \implies \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{M}$.

Istotnie, $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$, gdzie

$$B_1 := A_1, \quad B_j := A_j \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{j-1}), \quad j \geq 2$$

i możemy skorzystać z 4⁰, 5⁰ i 9⁰. □

Propozycja 12.1.21. Niech $\mathfrak{M}$ będzie dowolną σ -algebrą podzbiorów X i niech $\mu \in \mathbb{M}(\mathfrak{M})$. Zdefiniujemy

$$\varphi(A) = \varphi_{\mu}(A) := \inf\{\mu(B) : A \subset B \in \mathfrak{M}\}, \quad A \subset X.$$

Wtedy

- (a) $\varphi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ jest miarą zewnętrzną taką, że $\varphi = \mu$ na $\mathfrak{M}$,
- (b) $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}(\varphi)$,
- (c) $\varphi = \sup\{\psi : \psi \text{ jest miarą zewnętrzną taką, że } \psi = \mu \text{ na } \mathfrak{M}\}$.

Dowód. (a) Jest rzeczą widoczną, że $\varphi = \mu$ na $\mathfrak{M}$. Przypuśćmy, że $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Jeżeli $\varphi(A_j) = +\infty$ dla pewnego j , to oczywiście $\varphi(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(A_j)$. Przypuśćmy więc, że $\varphi(A_j) < +\infty$ dla dowolnego j . Weźmy $\varepsilon > 0$ i niech $B_j \in \mathfrak{M}$ będzie taki, że $A_j \subset B_j$ i $\mu(B_j) \leq \varphi(A_j) + \varepsilon 2^{-j}$, $j \in \mathbb{N}$. Wtedy $A \subset B := \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathfrak{M}$ oraz $\varphi(A) \leq \mu(B) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(A_j) + \varepsilon$.

(b) Niech $A \in \mathfrak{M}$ i niech $T \subset X$. Przypuśćmy, że $T \subset B \in \mathfrak{M}$. Wtedy $T \cap A \subset B \cap A \in \mathfrak{M}$ i $T \setminus A \subset B \setminus A \in \mathfrak{M}$. Stąd

$$\varphi(T \cap A) + \varphi(T \setminus A) \leq \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A) = \mu(B),$$

a więc $\varphi(T \cap A) + \varphi(T \setminus A) \leq \varphi(T)$.

(c) Niech ψ będzie miarą zewnętrzną taką, że $\psi = \mu$ na $\mathfrak{M}$. Niech $A \subset B \in \mathfrak{M}$. Wtedy $\mu(B) = \psi(B) \geq \psi(A)$, skąd wynika, że $\varphi(A) \geq \psi(A)$ dla dowolnego $A \subset X$. $\square$

Propozycja 12.1.22. Niech $\varphi : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ będzie miarą zewnętrzną i niech $\mathfrak{M} := \mathfrak{M}(\varphi)$.

(a) Dla $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mamy:

$$f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M}) \iff \forall_{-\infty < \alpha < \beta < \infty} \forall_{T \subset X} : \varphi(T) \geq \varphi(T \cap \{f \leq \alpha\}) + \varphi(T \cap \{f \geq \beta\}). \quad (*)$$

(b) Dla dowolnej przestrzeni metrycznej (Y, ϱ) i dla $f : X \rightarrow Y$ mamy:

$$f \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M}) \iff \forall_{A, B \subset Y : \varrho(A, B) > 0} \forall_{T \subset X} : \varphi(T) \geq \varphi(T \cap f^{-1}(A)) + \varphi(T \cap f^{-1}(B)). \quad (**) \quad (**)$$

Dowód. Na wstępie odnotujmy, że twierdzenie (b) implikuje twierdzenie (a) oraz, że w obu twierdzeniach implikacje $\implies$ zawsze zachodzą ⁽²³⁾.

Najpierw pokażemy, że (a) $\implies$ (b). Przypuśćmy, że warunek (**) jest spełniony. Chcemy pokazać, że dla dowolnego zbioru domkniętego $C \subset Y$ zbiór $f^{-1}(C)$ należy do $\mathfrak{M}$. Niech $g(y) := \varrho(y, C)$, $y \in Y$. Zauważmy, że $g^{-1}(0) = C$. Pokażemy, że funkcja $g \circ f$ spełnia warunek (*). Ustalmy $-\infty < \alpha < \beta < \infty$. Niech $A := \{g \leq \alpha\}$, $B := \{g \geq \beta\}$. Łatwo widzieć, że $\varrho(A, B) \geq \beta - \alpha > 0$. W takim razie, dla dowolnego $T \subset X$ mamy:

$$\varphi(T \cap \{g \circ f \leq \alpha\}) + \varphi(T \cap \{g \circ f \geq \beta\}) = \varphi(T \cap f^{-1}(A)) + \varphi(T \cap f^{-1}(B)) \leq \varphi(T).$$

Ponieważ założyliśmy prawdziwość twierdzenia (a), zatem $g \circ f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$. W szczególności, $f^{-1}(C) = (g \circ f)^{-1}(0) \in \mathfrak{M}$.

Pozostaje sprawdzić twierdzenie (a). Przypuśćmy, że warunek (*) zachodzi. Chcemy pokazać, że dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}$ zbiór $A := \{f \leq \alpha\}$ należy do $\mathfrak{M}$. Ustalmy α . Całość dowodu zasadza się na pokazaniu, że dla dowolnych $T \subset X$, $\varphi(T) < +\infty$ i $\varepsilon > 0$ istnieje $n = n(T, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ takie że:

$$\varphi(T \cap \{\alpha < f \leq \alpha + \frac{1}{n}\}) \leq \varepsilon.$$

Istotnie, przypuśćmy na chwilę, że warunek ten jest spełniony. Wtedy mamy:

$$\begin{aligned} \varphi(T \cap A) + \varphi(T \setminus A) &\leq \varphi(T \cap \{f \leq \alpha\}) + \varphi(T \cap \{f > \alpha + \frac{1}{n}\}) + \varphi(T \cap \{\alpha < f \leq \alpha + \frac{1}{n}\}) \leq \varphi(T) + \varepsilon, \\ n &= n(T, \varepsilon), \end{aligned}$$

co, wobec dowolności ε , zakończy dowód.

Przechodzimy do wykazania warunku. Ustalamy T i ε . Niech

$$B_j := T \cap \{\alpha + \frac{1}{j+1} \leq f \leq \alpha + \frac{1}{j}\}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

⁽²²⁾ $\varrho(A, B) := \inf\{\varrho(a, b) : a \in A, b \in B\}$ (przypomnijmy, że $\inf \emptyset := +\infty$). Jeżeli $\varrho(A, B) > 0$, to mówimy, że A i B są *metrycznie odseparowane*.

⁽²³⁾ W (a) mamy:

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M}) &\implies \forall_{\alpha \in \mathbb{R}} : \{f \leq \alpha\} \in \mathfrak{M} \implies \forall_{\alpha < \beta} \forall_{T \subset X} : \\ &\varphi(T) \geq \varphi(T \cap \{f \leq \alpha\}) + \varphi(T \cap \{f > \alpha\}) \geq \varphi(T \cap \{f \leq \alpha\}) + \varphi(T \cap \{f \geq \beta\}). \end{aligned}$$

W (b) mamy:

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M}) &\implies \forall_{U \in \text{top } Y} : f^{-1}(U) \in \mathfrak{M} \\ &\implies \forall_{A, B \subset Y : \varrho(A, B) > 0} : f^{-1}(U(A, B)) \in \mathfrak{M}, \text{ gdzie } U(A, B) := \bigcup_{x \in A} B(x, \frac{r}{2}) \\ &\implies \forall_{A, B \subset Y : \varrho(A, B) > 0} \forall_{T \subset X} : \varphi(T) \geq \varphi(T \cap f^{-1}(U(A, B))) + \varphi(T \setminus f^{-1}(U(A, B))) \\ &\implies \forall_{A, B \subset Y : \varrho(A, B) > 0} \forall_{T \subset X} : \varphi(T) \geq \varphi(T \cap f^{-1}(A)) + \varphi(T \cap f^{-1}(B)). \end{aligned}$$

Zauważmy, że $\varphi(T \cap \{\alpha < f \leq \alpha + \frac{1}{n}\}) \leq \sum_{j=n}^{\infty} \varphi(B_j)$, $n \in \mathbb{N}$. Wystarczy więc pokazać, że szereg $\sum_{j=1}^{\infty} \varphi(B_j)$ jest zbieżny. Pokażemy, że każdy z szeregów $\sum_{j=1}^{\infty} \varphi(B_{2j})$, $\sum_{j=1}^{\infty} \varphi(B_{2j+1})$ jest zbieżny. Rozumowanie przeprowadzimy dla szeregu złożonego z wyrazów parzystych (pozostały przypadek jest analogiczny). Udowodnimy indukcyjnie, że

$$\sum_{j=1}^N \varphi(B_{2j}) \leq \varphi\left(\bigcup_{j=1}^N B_{2j}\right) \leq \varphi(T) < +\infty, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Oczywiście, problemem jest tu jedynie pierwsza z nierówności. Trzeba sprawdzić krok indukcyjny od N do $N+1$. Zastosujemy warunek (*) z liczbami $\alpha + \frac{1}{2N+2}$ i $\alpha + \frac{1}{2N+1}$ i zbiorem $T := \bigcup_{j=1}^{N+1} B_{2j}$. Mamy:

$$\varphi\left(\bigcup_{j=1}^{N+1} B_{2j}\right) \geq \varphi(B_{2(N+1)}) + \varphi\left(\bigcup_{j=1}^N B_{2j}\right) \stackrel{\text{zał. ind.}}{\geq} \sum_{j=1}^{N+1} \varphi(B_{2j}). \quad \square$$

Propozycja 12.1.23. Niech (X, ϱ) będzie przestrzenią metryczną, niech $\varphi : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ będzie miarą zewnętrzną. Wtedy

$$\mathcal{B}(X) \subset \mathfrak{M}(\varphi) \iff \forall_{A, B \subset X: \varrho(A, B) > 0} : \varphi(A \cup B) \geq \varphi(A) + \varphi(B).$$

Dowód. Na podstawie Propozycji 12.1.22 mamy:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(X) \subset \mathfrak{M} &\iff \text{id}_X \in \mathcal{M}(X, X, \mathfrak{M}) \\ &\iff \forall_{A, B \subset X: \varrho(A, B) > 0} \forall_{T \subset X} : \varphi(T) \geq \varphi(T \cap A) + \varphi(T \cap B) \\ &\iff \forall_{A, B \subset X: \varrho(A, B) > 0} : \varphi(A \cup B) \geq \varphi(A) + \varphi(B). \quad (24) \end{aligned} \quad \square$$

12.1.5. Regularność. Dla rodziny $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ rozważmy następujące warunki:

- (1) $\emptyset \in \mathcal{F}$,
- (2) $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{F} \implies \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j, \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}$.

Obserwacja 12.1.24. (a) Każda σ -algebra spełnia (1), (2).

(b) Jeżeli $\mathcal{F}$ spełnia (1), (2), to:

$$A_1, \dots, A_N \in \mathcal{F} \implies A_1 \cup \dots \cup A_N, A_1 \cap \dots \cap A_N \in \mathcal{F}.$$

(c) Jeżeli $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ jest dowolną rodziną rodzin spełniających (1), (2), to $\bigcap_{t \in T} \mathcal{F}_t$ spełnia (1), (2). W szczególności, dla dowolnej rodziny $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ istnieje najmniejsza rodzina zawierająca $\mathcal{S}$ i spełniająca (1), (2).

Oznaczmy ją roboczo przez $[\mathcal{S}]$. Oczywiście $[\mathcal{S}] \subset \sigma(\mathcal{S})$ ⁽²⁵⁾.

Propozycja 12.1.25. Jeżeli $\emptyset \in \mathcal{S}$ oraz $X \setminus A \in [\mathcal{S}]$ dla dowolnego $A \in \mathcal{S}$, to $[\mathcal{S}] = \sigma(\mathcal{S})$.

Dowód. Niech $\mathcal{F} := \{A \in [\mathcal{S}] : X \setminus A \in [\mathcal{S}]\}$. Chcemy pokazać, że $\mathcal{F} = [\mathcal{S}]$. Z założenia wynika, że $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}$. Wystarczy więc jeszcze zauważyć, że $\mathcal{F}$ spełnia (2). $\square$

Propozycja 12.1.26. Niech X będzie przestrzenią topologiczną, w której każdy zbiór otwarty jest typu $\mathcal{F}_\sigma$ (np. przestrzenią metryczną ⁽²⁶⁾). Wtedy $[\text{cotp}(X)] = \mathcal{B}(X)$.

Dowód. Korzystamy z Propozycji 12.1.25. $\square$

⁽²⁴⁾ Ostatnia implikacja ($\Leftarrow$) wynika z tego, że $\varphi(T) \geq \varphi((T \cap A) \cup (T \cap B))$ i stosujemy warunek do zbiorów $T \cap A$ i $T \cap B$.

⁽²⁵⁾ Przypomnijmy, że $\sigma(\mathcal{S})$, to najmniejsza σ -algebra zawierająca $\mathcal{S}$.

⁽²⁶⁾ $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{x \in \Omega : \varrho(x, X \setminus \Omega) \geq \frac{1}{j}\}$.

Definicja 12.1.27. Niech $\varphi : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ będzie miarą zewnętrzną. Powiemy, że miara φ jest *regularna*, jeżeli dla dowolnego $A \subset X$ istnieje zbiór $\hat{A} \in \mathfrak{M}(\varphi)$ taki, że $A \subset \hat{A}$ i $\varphi(\hat{A}) = \varphi(A)$ ⁽²⁷⁾.

Jeżeli X jest przestrzenią topologiczną i $\varphi : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ jest miarą zewnętrzną taką, że $\mathcal{B}(X) \subset \mathfrak{M}(\varphi)$, to powiemy, że φ jest *$\mathcal{B}$ -regularna* (*regularna w sensie borelowskim*), jeżeli dla dowolnego $A \subset X$ istnieje zbiór $\hat{A} \in \mathcal{B}(X)$ taki, że $A \subset \hat{A}$ i $\varphi(\hat{A}) = \varphi(A)$ ⁽²⁸⁾.

Niech dalej $\mu : \mathfrak{M} \rightarrow [0, +\infty]$ będzie miarą taką, że $\mathcal{B}(X) \subset \mathfrak{M}$. Powiemy, że μ jest *$\mathcal{B}$ -regularna* jeżeli φ_μ jest $\mathcal{B}$ -regularna, gdzie φ_μ jest rozszerzeniem miary μ do miary zewnętrznej z Propozycji 12.1.21 ⁽²⁹⁾.

Obserwacja 12.1.28. W powyższej sytuacji μ jest miarą $\mathcal{B}$ -regularną wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $A \in \mathfrak{M}$ istnieje zbiór $\hat{A} \in \mathcal{B}(X)$ taki, że $A \subset \hat{A}$ i $\mu(\hat{A}) = \mu(A)$ ⁽³⁰⁾.

Istotnie, ustalmy zbiór $A \subset X$ taki, że $\varphi_\mu(A) < +\infty$. Wtedy dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ znajdziemy zbiór $B_k \in \mathcal{B}(X)$ taki, że $A \subset B_k$ i $\mu(B_k) \leq \varphi_\mu(A) + \frac{1}{k}$. Niech $\hat{A} := \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$. Wtedy $A \subset \hat{A} \in \mathcal{B}(X)$ oraz $\varphi_\mu(A) = \mu(\hat{A}) = \varphi_\mu(\hat{A})$.

Niech X będzie przestrzenią topologiczną i niech $\varphi : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ będzie miarą zewnętrzną taką, że $\mathcal{B}(X) \subset \mathfrak{M}(\varphi)$ (por. Propozycja 12.1.23). Dla $B \subset X$ rozważmy następujące warunki:

- (R1) Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór C , domknięty w X , taki, że $C \subset B$ i $\varphi(B \setminus C) \leq \varepsilon$.
- (R2) Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór C , otwarty w X , taki, że $B \subset C$ i $\varphi(C \setminus B) \leq \varepsilon$.
- (R3) $B = C \cup Z$, gdzie C jest typu $\mathcal{F}_\sigma$, zaś Z jest miary zero.
- (R4) $B = C \setminus Z$, gdzie C jest typu $\mathcal{G}_\delta$, zaś Z jest miary zero.
- (S) $B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j$, gdzie Ω_j jest otwarty w X i $\varphi(\Omega_j) < +\infty$, $j \geq 1$.

Zauważmy, że jeżeli X spełnia (S), to $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j$, gdzie Ω_j jest otwarty w X i $\varphi(\Omega_j) < +\infty$, $j \geq 1$. Oczywiście, zawsze możemy dodatkowo zażądać, by $\Omega_j \subset \Omega_{j+1}$, $j \geq 1$. W szczególności, miara φ jest *σ -skończona*, tzn. $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$, gdzie $X_j \in \mathfrak{M}$ i $\varphi(X_j) < +\infty$, $j \geq 1$ (zawsze możemy dodatkowo zażądać, by $X_j \subset X_{j+1}$, $j \geq 1$).

Propozycja 12.1.29. Niech X będzie przestrzenią topologiczną, w której każdy zbiór otwarty jest typu $\mathcal{F}_\sigma$. Załóżmy, że $\varphi : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ jest miarą zewnętrzną i niech $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\varphi)$. Załóżmy, że $\mathcal{B}(X) \subset \mathfrak{M}$. Wtedy:

- (a) (R1) $\implies$ (R3), (R2) $\implies$ (R4).
- Ponadto, że spełnienia warunku (R3) lub (R4) wynika, że $B \in \mathfrak{M}$.
- (b) (R1) zachodzi dla B wtedy i tylko wtedy, gdy (R2) zachodzi dla $X \setminus B$.
W szczególności, (R1) zachodzi dla dowolnego $B \in \mathfrak{M}$ (odp. dla dowolnego $B \in \mathcal{B}(X)$) wtedy i tylko wtedy, gdy (R2) zachodzi dla dowolnego $B \in \mathfrak{M}$ (odp. dla dowolnego $B \in \mathcal{B}(X)$).
- (c) (R1) zachodzi dla dowolnego $B \in \mathcal{B}(X)$ takiego, że $\varphi(B) < +\infty$.
- (d) (R2) zachodzi dla dowolnego zbioru $B \in \mathcal{B}(X)$ spełniającego (S).
- (e) Jeżeli miara φ jest $\mathcal{B}$ -regularna, to (R1) zachodzi dla dowolnego $B \in \mathfrak{M}$ takiego, że $\varphi(B) < +\infty$, zaś (R2) zachodzi dla dowolnego $B \in \mathfrak{M}$ spełniającego (S).
- (f) Jeżeli X spełnia (S) to (R1), (R2), (R3), (R4) zachodzą dla dowolnego $B \in \mathcal{B}(X)$.
- (g) Jeżeli φ jest $\mathcal{B}$ -regularna, a X spełnia (S), to (R1), (R2), (R3), (R4) zachodzą dla dowolnego $B \in \mathfrak{M}$. Ponadto, spełnienie któregośkolwiek z tych warunków jest równoważne mierzalności zbioru B .

⁽²⁷⁾ Zauważmy, że jeżeli $\varphi(A) = +\infty$, to można zawsze przyjąć $\hat{A} := X$, a więc warunek wystarczy sprawdzić dla zbiorów A takich, że $\varphi(A) < +\infty$.

⁽²⁸⁾ Podobnie jak poprzednio, warunek ten wystarczy sprawdzić dla zbiorów A takich, że $\varphi(A) < +\infty$.

⁽²⁹⁾ Odnajdujemy, iż $\mathcal{B}(X) \subset \mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}(\varphi_\mu)$.

⁽³⁰⁾ Odnajdujemy, że ostatni warunek ma charakter „wewnętrzny” — nie występuje w nim rozszerzenie φ_μ .

Dowód. (a) (R1) $\implies$ (R3): Niech C_j będzie zbiorem domkniętym takim, że $C_j \subset B$ i $\varphi(B \setminus C_j) \leq \frac{1}{j}$, $j \geq 1$. Zdefiniujemy, $C := \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$, $Z := B \setminus C$. Wtedy $\varphi(Z) \leq \varphi(B \setminus C_j) \leq \frac{1}{j}$, $j \geq 1$, a zatem Z jest miary zero.

(R2) $\implies$ (R4): Niech C_j będzie zbiorem otwartym takim, że $B \subset C_j$ i $\varphi(C_j \setminus B) \leq \frac{1}{j}$, $j \geq 1$. Zdefiniujemy, $C := \bigcap_{j=1}^{\infty} C_j$, $Z := C \setminus B$. Wtedy $\varphi(Z) \leq \varphi(C_j \setminus B) \leq \frac{1}{j}$, $j \geq 1$, a zatem Z jest miary zero.

Ostatnia część (a) wynika z faktu, iż $Z \in \mathfrak{M}$ dla dowolnego Z takiego, że $\varphi(Z) = 0$ (por. Krok 1^o w dowodzie Twierdzenia 12.1.20).

(b) jest oczywiste.

(c) Ustalmy $B \in \mathcal{B}(X)$ taki, że $\varphi(B) < +\infty$. Niech

$$\mathcal{F} := \{A \in \mathcal{B}(X) : \forall \varepsilon > 0 \exists C \subset A, C \text{ domknięty} : \varphi((A \setminus C) \cap B) \leq \varepsilon\}.$$

Chcemy pokazać, że $B \in \mathcal{F}$. W tym celu zauważmy najpierw, że oczywiście każdy podzbiór domknięty należy do $\mathcal{F}$. Jeżeli pokażemy, że $\mathcal{F}$ spełnia warunek (2) (przed Obserwacją 12.1.24), to na podstawie Propozycji 12.1.26 będziemy mieli zawieranie $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{F}$ i, w szczególności, będziemy wiedzieć, że $B \in \mathcal{F}$.

Niech $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$, $\varepsilon > 0$ i niech $(C_j)_{j=1}^{\infty}$ będą zbiorami domkniętymi takimi, że $C_j \subset A_j$ i $\varphi((A_j \setminus C_j) \cap B) < \varepsilon 2^{-j}$, $j \geq 1$. Mamy:

$$\varphi\left(\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} C_j\right) \cap B\right) \leq \varphi\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} ((A_j \setminus C_j) \cap B)\right) < \varepsilon,$$

a więc $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}$. Dalej:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \varphi\left(\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \setminus \bigcup_{j=1}^N C_j\right) \cap B\right) = \varphi\left(\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j\right) \cap B\right) \leq \varphi\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} ((A_j \setminus C_j) \cap B)\right) < \varepsilon, \quad (31)$$

a więc $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}$.

(d) Na podstawie (c), dla dowolnego j istnieje zbiór domknięty $C_j \subset \Omega_j \setminus B$ taki, że $\varphi((\Omega_j \setminus B) \setminus C_j) \leq \varepsilon 2^{-j}$. Niech $C := \bigcup_{j=1}^{\infty} (\Omega_j \setminus C_j)$. Oczywiście C jest otwarty, $B \subset C$ oraz

$$\varphi(C \setminus B) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \varphi((\Omega_j \setminus C_j) \setminus B) \leq \varepsilon.$$

(e) Wobec dowodu (d) wystarczy sprawdzić, że (R1) zachodzi dla dowolnego $B \in \mathfrak{M}$ takiego, że $\varphi(B) < +\infty$. Niech $\widehat{B} \in \mathcal{B}(X)$ będzie taki, że $B \subset \widehat{B}$ i $\varphi(\widehat{B}) = \varphi(B)$. Ponieważ, $B \in \mathfrak{M}$, zatem $\varphi(\widehat{B} \setminus B) = \varphi(\widehat{B}) - \varphi(B) = 0$. Niech $B' := \widehat{B} \setminus B$, tzn. $B' \in \mathcal{B}(X)$, $\widehat{B} \setminus B \subset B'$ i $\varphi(B') = \varphi(\widehat{B} \setminus B) = 0$. Zdefiniujemy $B_- := \widehat{B} \setminus B'$. Wtedy $B_- \subset B$ i $B_- \in \mathcal{B}(X)$. Na podstawie (c), dla dowolnego $\varepsilon > 0$, istnieje zbiór domknięty $C \subset B_-$ taki, że $\varphi(B_- \setminus C) \leq \varepsilon$. Wynika stąd, że

$$\varphi(B \setminus C) \leq \varphi(B \setminus B_-) + \varphi(B_- \setminus C) \leq \varepsilon.$$

(f) wynika z (a), (b) i (d).

(g) wynika z (a), (b) i (e). □

12.1.6. Konstrukcja Carathéodory'ego. Miary Hausdorffa. Miara Lebesgue'a. Niech (X, ϱ) będzie przestrzenią metryczną, niech $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$, $\emptyset \in \mathcal{F}$ i niech $\zeta : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$ będzie dowolnym odwzorowaniem takim, że $\zeta(\emptyset) = 0$. Dla dowolnego $0 < \delta \leq +\infty$ niech

$$\varphi_{\delta}(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \zeta(A_j) : A_j \in \mathcal{F}, \text{ diam } A_j \leq \delta \ (j \in \mathbb{N}), A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right\}, \quad A \subset X, \quad (32)$$

⁽³¹⁾ Przejście graniczne to jedyne miejsce, w którym korzystamy ze skończoności miary zbioru B — por. Propozycja 12.1.16(j)).

$\varphi := \sup_{\delta > 0} \varphi_\delta$. Powyższa konstrukcja nosi nazwę *konstrukcji Carathéodory'ego*. Zauważmy, że jeżeli $\delta' \leq \delta''$, to $\varphi_{\delta'} \geq \varphi_{\delta''}$. Tak więc $\varphi = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \varphi_\delta$.

Twierdzenie 12.1.30. (a) *Odwzorowania φ_δ oraz φ są miarami zewnętrznymi.*

(b) $\mathcal{B}(X) \subset \mathfrak{M}(\varphi)$.

(c) *Jeżeli $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}(X)$, to miara φ jest $\mathcal{B}$ -regularna.*

Dowód. (a) jest oczywiste.

(b) Niech $A, B \subset X$, $\varrho(A, B) = \delta_0 > 0$. Wtedy $\varphi_\delta(A \cup B) = \varphi_\delta(A) + \varphi_\delta(B)$ dla $0 < \delta < \delta_0$. Wynika stąd, że $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$ i możemy skorzystać z Propozycji 12.1.23.

(c) Ustalmy $A \subset X$ i $\delta > 0$. Jeżeli $\varphi_\delta(A) = +\infty$, to przyjmujemy $B^{(\delta)} := X$. Jeżeli $\varphi_\delta(A) < +\infty$, to dla $\varepsilon > 0$ niech $(A_j^{(\delta, \varepsilon)})_{j=1}^\infty$ będzie pokryciem zbioru A zbiorami z $\mathcal{F}$ o średnicy $\leq \delta$ takim, że $\sum_{j=1}^\infty \zeta(A_j^{(\delta, \varepsilon)}) \leq \varphi_\delta(A) + \varepsilon$. Połóżmy $B^{(\delta)} := \bigcap_{k=1}^\infty \bigcup_{j=1}^\infty A_j^{(\delta, 1/k)}$. Oczywiście $A \subset B^{(\delta)} \in \mathcal{B}(X)$ oraz

$$\varphi_\delta(A) \leq \varphi_\delta(B^{(\delta)}) \leq \varphi_\delta\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j^{(\delta, 1/k)}\right) \leq \varphi_\delta(A) + \frac{1}{k},$$

co przy $k \rightarrow +\infty$ daje $\varphi_\delta(A) = \varphi_\delta(B^{(\delta)})$. Niech $B := \bigcap_{\ell=1}^\infty B^{(1/\ell)}$. Widać, że $A \subset B \in \mathcal{B}(X)$ oraz

$$\varphi(A) \leq \varphi(B) = \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \varphi_{1/\ell}(B) \leq \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \varphi_{1/\ell}(B^{(1/\ell)}) = \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \varphi_{1/\ell}(A) = \varphi(A). \quad \square$$

Powyższą konstrukcję Carathéodory'ego można użyć do konstrukcji miar Hausdorffa i Lebesgue'a.

Miary Hausdorffa. Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną wszystkich podzbiorów domkniętych X , niech $m \geq 0$ i niech

$$\zeta(A) = \zeta_m(A) := \alpha(m) \left(\frac{\text{diam } A}{2} \right)^m, \quad (33)$$

gdzie

$$\alpha(m) := \frac{(\Gamma(1/2))^m}{\Gamma(1 + m/2)}. \quad (34)$$

Zauważmy, że $\alpha(0) = 1$.

Konstrukcja Carathéodory'ego daje:

- miary zewnętrzne $\mathcal{H}_\delta^m := \varphi_\delta$, $\mathcal{H}^m := \varphi$,
- σ -algebrę $\mathcal{H}_m := \mathfrak{M}(\mathcal{H}^m)$

takie, że

- $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{H}_m$,
- $\mathcal{H}^m$ jest $\mathcal{B}$ -regularna i zupełna ⁽³⁵⁾.

Miara $\mathcal{H}^m$ nosi nazwę *m-tej (m-wymiarowej) miary Hausdorffa*.

Ponieważ $\text{diam } A = \text{diam } \overline{A}$, rodzinę wszystkich zbiorów domkniętych w definicji miary Hausdorffa możemy zastąpić rodziną wszystkich zbiorów borelowskich czy też nawet rodziną wszystkich zbiorów.

Obserwacja 12.1.31. (a) $\mathcal{H}^0$ jest miarą liczącą ($\mathcal{H}_0 = \mathcal{P}(X)$).

(b) Jeżeli $\mathcal{H}^m(A) < +\infty$, to $\mathcal{H}^n(A) = 0$ dla $n > m \geq 0$.

Istotnie, jeżeli $A \subset \bigcup_{j=1}^\infty A_j$, gdzie A_j jest domknięty, $\text{diam } A_j \leq \delta$ ($j \in \mathbb{N}$), to

$$\sum_{j=1}^\infty \zeta_n(A_j) \leq \left(\frac{\alpha(n)2^{-n}}{\alpha(m)2^{-m}} \sum_{j=1}^\infty \zeta_m(A_j) \right) \delta^{n-m},$$

skąd bezpośrednio wynika teza.

⁽³²⁾ Przypomnijmy, że $\text{diam } \emptyset = 0$ i $\inf \emptyset = +\infty$.

⁽³³⁾ $(\text{diam } \emptyset)^0 := 0$.

⁽³⁴⁾ Można pokazać, że dla $m \in \mathbb{N}$: $\alpha(m) = |\mathbb{B}_m|$ (ĆWICZENIE).

⁽³⁵⁾ Tzn. $\mathcal{H}^m|_{\mathcal{H}_m}$ jest zupełna.

(c) Niech $\dim_{\mathcal{H}}(A) := \inf\{m \geq 0 : \mathcal{H}^m(A) < +\infty\}$. Liczba $\dim_{\mathcal{H}}(A) \in [0, +\infty]$ nosi nazwę *wymiaru Hausdorffa zbioru* A . Wobec (b), $\mathcal{H}^m(A) = 0$ dla $m > \dim_{\mathcal{H}}(A)$.

Miara Lebesgue'a. Niech $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F} := \{\emptyset\} \cup \{P : P \text{ jest kostką}\}$, $\zeta(\emptyset) := 0$, $\zeta(P) := |P|$. Konstrukcja Carathéodory'ego daje:

- miary zewnętrzne $\mathcal{L}_\delta^n := \varphi_\delta$, $\mathcal{L}^n := \varphi$,
- σ -algebrę $\mathcal{L}_n := \mathfrak{M}(\mathcal{L}^n)$

takie, że

- $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}_n$,
- $\mathcal{L}^n$ jest $\mathcal{B}$ -regularna i zupełna.

Miarę $\mathcal{L}^n$ nazywamy *n-wymiarową miarą Lebesgue'a na $\mathbb{R}^n$* , a zbiory z $\mathcal{L}_n$ — zbiorami mierzalnymi w sensie Lebesgue'a.

Obserwacja 12.1.32. Dowolną kostkę $P \subset \mathbb{R}^n$ można, dla dowolnego $\delta > 0$, rozbić na skończoną liczbę kostek o średnicy $\leq \delta$. Ta prosta obserwacja implikuje, że

$$\mathcal{L}_\delta^n(A) = \mathcal{L}^n(A) = \inf \left\{ \sum_{j \in J} |P_j| : \#J \leq \aleph_0, A \subset \bigcup_{j \in J} P_j, P_j \text{ — kostka, } j \in J \right\}, \quad A \subset \mathbb{R}^n.$$

W szczególności, jeżeli $|A| = 0$, to $\mathcal{L}^n(A) = 0$.

Propozycja 12.1.33. (a) $\mathcal{L}^n(P) = |P|$ dla dowolnej kostki $P \subset \mathbb{R}^n$. W szczególności, warunki (R1), (R2), (R3), (R4) z Propozycji 12.1.29 zachodzą dla dowolnego $B \in \mathcal{L}_n$ (i każdy z nich jest równoważny mierzalności B).

(b) Miara $\mathcal{L}^n$ jest niezmiennicza względem translacji, tzn. dla $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mamy: $\mathcal{L}^n(A + x_0) = \mathcal{L}^n(A)$ dla dowolnego $A \subset \mathbb{R}^n$ oraz $A \in \mathcal{L}_n \iff (A + x_0) \in \mathcal{L}_n$.

(c) Miara Hausdorffa $\mathcal{H}^n$ w $\mathbb{R}^n$ jest niezmiennicza względem translacji oraz skończona na zbiorach zwartych.

Dowód. (a) Oczywiście $\mathcal{L}^n(P) \leq |P|$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Niech $P \subset \bigcup_{j=1}^N P_j$ i $\sum_{j=1}^N |P_j| \leq \mathcal{L}^n(P) + \varepsilon$, gdzie $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Zwiększając nieco każdą kostkę P_j dostajemy nową kostkę Q_j taką, że $P_j \subset \text{int } Q_j$ i $|Q_j| \leq |P_j| + \varepsilon 2^{-j}$. Oczywiście $P \subset \bigcup_{j=1}^N \text{int } Q_j$. Ponieważ kostka P jest zwarta, zatem istnieje $N_0 \in \mathbb{N}$

takie, że $P \subset \bigcup_{j=1}^{N_0} \text{int } Q_j$. Stąd na mocy własności całki Riemanna mamy:

$$|P| = \int_P \chi_P \leq \int_P \left(\sum_{j=1}^{N_0} \chi_{Q_j} \right) \leq \sum_{j=1}^{N_0} |Q_j| \leq \mathcal{L}^n(P) + 2\varepsilon.$$

$$(b) A \subset \bigcup_{j \in J} P_j \iff A + x_0 \subset \bigcup_{j \in J} (P_j + x_0) \text{ i } \sum_{j \in J} |P_j| = \sum_{j \in J} |P_j + x_0|.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(T \cap (A + x_0)) + \mathcal{L}^n(T \setminus (A + x_0)) &= \mathcal{L}^n(((T - x_0) \cap A) + x_0) + \mathcal{L}^n(((T - x_0) \setminus A) + x_0) \\ &= \mathcal{L}^n((T - x_0) \cap A) + \mathcal{L}^n((T - x_0) \setminus A) \leq \mathcal{L}^n(T - x_0) = \mathcal{L}^n(T). \end{aligned}$$

(c) Dowód niezmienniczości względem translacji przebiega tak, jak w (b) z wykorzystaniem faktu, iż $\text{diam}(A + x_0) = \text{diam } A$. Dla dowodu skończoności miary $\mathcal{H}^n$ na zbiorach zwartych wystarczy pokazać, że dla dowolnego $R > 0$ istnieje stała $M > 0$ taka, że $\mathcal{H}_\delta^n(P) \leq M$ dla dowolnego $\delta > 0$, gdzie $P = P(R) := [-R, R] \times \cdots \times [-R, R]$. Ustalmy R i δ . Niech $N \in \mathbb{N}$. Dzieląc krawędzie kostki P na N równych części, otrzymujemy N^n małych kostek Q_i , każda o średnicy $\delta_N := 2\sqrt{n}R/N$. Stąd

$$\mathcal{H}_{\delta_N}^n(P) \leq N^n \alpha(n) \left(\frac{\delta_N}{2} \right)^n = \alpha(n) (R\sqrt{n})^n =: M. \quad \square$$

Odnajdujemy, że w rzeczywistości prawdziwe jest następujące (trudne) twierdzenie.

Twierdzenie* 12.1.34. $\mathcal{H}^n(A) = \mathcal{L}^n(A)$, $A \subset \mathbb{R}^n$.

Ćwiczenie 12.1.35. $\mathcal{H}^1(A) = \mathcal{L}^1(A)$ dla dowolnego $A \subset \mathbb{R}$.

Przykład 12.1.36 (Przykład Vitaliego ⁽³⁶⁾). $\mathcal{L}_n \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

⁽³⁶⁾ Giuseppe Vitali (1875–1932).

Niech $P := [0, 1]^n$. Dla $x, y \in P$ niech $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}^n$. Oczywiście jest to relacja równoważnościowa. Na podstawie pewnika wyboru istnieje zbiór $A \subset P$ taki, że $A \cap [x]_{\sim}$ jest zbiorem dokładnie jednoelementowym dla dowolnego $x \in P$. Przypuśćmy, że A jest mierzalny. Zauważmy, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{Q}^n$, $x \neq y$, zbiory $A + x$ i $A + y$ są rozłączne (jeżeli $a + x = b + y$ dla $a, b \in A$, to $a \sim b$, a stąd, wobec własności A , dostajemy $a = b$, czyli $x = y$ — sprzeczność). Niech $Q := [-1, 1]^n$, $R := [-1, 2]^n$, $B := \bigcup_{r \in \mathbb{Q}^n \cap Q} (A + r) \subset R$. Wobec niezmienniczości miary Lebesgue'a względem translacji dostajemy: $\mathcal{L}^n(B) = \sum_{r \in \mathbb{Q}^n \cap Q} \mathcal{L}^n(A + r) = \sum_{r \in \mathbb{Q}^n \cap Q} \mathcal{L}^n(A) \leq \mathcal{L}^n(R) < +\infty$. Zatem $\mathcal{L}^n(A) = 0$, a stąd $\mathcal{L}^n(B) = 0$. Z drugiej strony $P \subset B$ (dla dowolnego $x \in P$ niech $A \cap [x]_{\sim} = \{a\}$; wtedy $x - a \in \mathbb{Q}^n$ oraz $x - a \in Q$), a więc $\mathcal{L}^n(B) > 0$ — sprzeczność.

Propozycja 12.1.37. $A \times B \in \mathcal{L}_{p+q}$ dla dowolnych $A \in \mathcal{L}_p$, $B \in \mathcal{L}_q$.

Dowód. Ponieważ $A \times B = (A \times \mathbb{R}^q) \cap (\mathbb{R}^p \times B)$, wystarczy rozważyć przypadek $B = \mathbb{R}^q$. Przypomnijmy (Propozycja 12.1.29), że $A = F \cup Z$, gdzie F jest typu $\mathcal{F}_\sigma$, zaś Z jest miary zero. Oczywiście $F \times \mathbb{R}^q$ jest typu $\mathcal{F}_\sigma$. Wystarczy pokazać, że $Z \times \mathbb{R}^q$ jest miary zero. W tym celu wystarczy pokazać, że $Z \times Q$ jest miary zero, gdzie Q jest dowolną kostką. Rozumujemy z definicji: dla dowolnego $\varepsilon > 0$, jeżeli $Z \subset \bigcup_{j \in J} P_j$, gdzie $\sum_{j \in J} |P_j| \leq \varepsilon$, to $Z \times Q \subset \bigcup_{j \in J} (P_j \times Q)$ oraz $\sum_{j \in J} |P_j \times Q| \leq \varepsilon |Q|$. $\square$

Propozycja 12.1.38 (Por. Propozycja 11.1.10(b)). Niech $V \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i niech $\Psi : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ spełnia lokalnie warunek Höldera z wykładnikiem $\alpha \geq n/m$ (np. $\Psi \in C^1(V, \mathbb{R}^m)$, $m \geq n$ i $\alpha = 1$). Wtedy:

- (a) jeżeli $\alpha > n/m$, to $\mathcal{L}^m(\Psi(V)) = 0$;
- (b) jeżeli $\alpha = n/m$ i $\mathcal{L}^n(A) = 0$ dla pewnego $A \subset V$, to $\mathcal{L}^m(\Psi(A)) = 0$;
- (c) jeżeli $\alpha = n/m$ i $A \in \mathcal{L}_n$ dla pewnego $A \subset V$, to $\Psi(A) \in \mathcal{L}_m$.

Dowód. (a) Na podstawie twierdzenia Lindelöfa wystarczy pokazać, że każdy punkt $a \in V$ ma otoczenie U_a takie, że $\mathcal{L}^m(\Psi(U_a)) = 0$ (ĆWICZENIE). Ustalmy $a \in V$ i niech $P \subset \subset V$ będzie kostką taką, że $a \in \text{int } P$ oraz Ψ spełnia w P warunek Höldera z wykładnikiem α . Na podstawie Propozycji 11.1.10(b₁) wiemy, że $|\Psi(P)| = 0$, a stąd $\mathcal{L}^m(\Psi(P)) = 0$.

(b) Podobnie, jak poprzednio, wystarczy pokazać, że każdy punkt $a \in V$ ma otoczenie U_a takie, że $\mathcal{L}^m(\Psi(A \cap U_a)) = 0$. Ustalmy $a \in V$ i niech $P \subset \subset V$ będzie kostką taką, że $a \in \text{int } P$ oraz Ψ spełnia w P warunek Höldera z wykładnikiem α :

$$\|\Psi(x') - \Psi(x'')\|_\infty \leq C \|x' - x''\|_\infty^\alpha, \quad x', x'' \in P.$$

Ustalmy kostkę $Q \subset \text{int } P$ taką, że $a \in Q$. Dla $\varepsilon > 0$, niech $(P_j)_{j \in J}$ będzie co najwyżej przeliczalną rodziną kostek taką, że $A \cap Q \subset \bigcup_{j \in J} P_j$, oraz $\sum_{j \in J} |P_j| < \varepsilon$. Możemy założyć, że $P_j \subset \text{int } P$ oraz (zwiększając nieco

kostkę P_j i dzieląc ją na mniejsze kostki), że P_j ma równe krawędzie r_j . Zauważmy teraz, że dla dowolnego $j \in J$, zbiór $\Psi(P_j)$ jest zawarty w pewnej kostce Q_j o krawędzi $\leq 2Cr_j^\alpha$. Mamy więc $\Psi(A \cap Q) \subset \bigcup_{j \in J} Q_j$ oraz

$$\sum_{j \in J} |Q_j| \leq \sum_{j \in J} (2Cr_j^\alpha)^m = (2C)^m \sum_{j \in J} r_j^n \leq (2C)^m \varepsilon.$$

Stąd $\mathcal{L}^m(\Psi(A \cap Q)) = 0$.

(c) Ponieważ miara Lebesgue'a jest regularna (por. Propozycja 12.1.33(a)), zatem $A = F \cup Z$, gdzie $F \in \mathcal{F}_\sigma$, zaś Z jest miary zero. Oczywiście zbiór F może być przedstawiony w postaci $F = \bigcup_{j=1}^\infty K_j$, gdzie każdy zbiór K_j jest zwarty. Na podstawie (b), zbiór $\Psi(Z)$ jest miary zero. Każdy ze zbiorów $\Psi(K_j)$ jest zwarty. Ostatecznie więc, $\Psi(A) = \bigcup_{j=1}^\infty \Psi(K_j) \cup \Psi(Z)$ jest mierzalny. $\square$

Propozycja 12.1.38(a) może być uogólniona w następujący sposób.

Propozycja 12.1.39. Niech F będzie dowolną przestrzenią unormowaną, niech $V \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i niech $\Psi : V \rightarrow F$ spełnia lokalnie warunek Höldera z wykładnikiem α . Wtedy $\mathcal{H}^{n/\alpha}(\Psi(K)) < +\infty$ dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset V$. W szczególności, $\mathcal{H}^m(\Psi(V)) = 0$ dla dowolnego $m > n/\alpha$.

Dowód. Wystarczy pokazać, $\mathcal{H}^{n/\alpha}(\Psi(P)) < +\infty$, gdzie $P \subset\subset \Omega$ jest dowolną kostką zwartą o wszystkich krawędziach równych ℓ taką, że

$$\|\Psi(x') - \Psi(x'')\| \leq C\|x' - x''\|_\infty^\alpha, \quad x', x'' \in P.$$

Dla dowolnego $N \in \mathbb{N}$ podzielmy kostkę P na N^n małych kostek o krawędzi ℓ/N . Niech P' będzie taką małą kostką. Wtedy $\text{diam } \Psi(P') \leq C(\ell/N)^\alpha =: \delta_N$. Wynika stąd, że

$$\mathcal{H}_{\delta_N}^{n/\alpha}(\Psi(P)) \leq \alpha(n/\alpha)N^n(\tfrac{1}{2}C(\ell/N)^\alpha)^{n/\alpha} = \alpha(n/\alpha)(\tfrac{1}{2}C)^{n/\alpha}\ell^n =: M,$$

gdzie $\alpha(n/\alpha)$ jest stałą występującą w definicji miary Hausdorffa. Biorąc $N \rightarrow +\infty$ wnioskujemy stąd, że $\mathcal{H}^{n/\alpha}(\Psi(P)) \leq M < +\infty$. $\square$

12.1.7. Ogólna teoria całki. Niech $\mu : \mathfrak{M} \rightarrow [0, +\infty]$ będzie ustaloną miarą (możemy myśleć o mierze generowanej poprzez konstrukcję Carathéodory'ego). Naszym celem będzie określenie pewnej klasy funkcji $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, dla której zdefiniujemy całkę $\int_X f d\mu$ względem miary μ .

Dla funkcji $f \in \mathcal{M}_0^+(X)$, jeżeli $f = \sum_{j=1}^N a_j \chi_{A_j}$ jest jej postacią kanoniczną, to kładziemy

$$\int_X f d\mu := \sum_{j=1}^N a_j \mu(A_j) \in [0, +\infty]$$

z zachowaniem konwencji $0 \cdot (+\infty) := 0$. Oczywiście, jeżeli $\mu \equiv 0$, to $\int_X f d\mu = 0$ dla dowolnego $f \in \mathcal{M}_0^+(X)$.

Obserwacja 12.1.40. (a) Definicja całki $\int_X f d\mu$ nie zależy od wyboru postaci funkcji f w tym sensie, że jeżeli funkcja f o postaci kanonicznej $(\dagger)$ da się również przedstawić w postaci $f = \sum_{k=1}^M b_k \chi_{B_k}$,

gdzie $B_1, \dots, B_M \in \mathfrak{M}$, $B_j \cap B_k = \emptyset$ dla $j \neq k$, $X = \bigcup_{j=1}^M B_j$ i $b_1, \dots, b_M \in \mathbb{R}_+$, to

$$\sum_{k=1}^M b_k \mu(B_k) = \sum_{k=1}^M b_k \sum_{j=1}^N \mu(B_k \cap A_j) = \sum_{j=1}^N a_j \sum_{k=1}^M \mu(A_j \cap B_k) = \sum_{j=1}^N a_j \mu(A_j).$$

(b) $\int_X (\alpha f) d\mu = \alpha \int_X f d\mu$, $\alpha \geq 0$, $f \in \mathcal{M}_0^+(X)$.

(c) $\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$, $f, g \in \mathcal{M}_0^+(X)$.

Istotnie, jeżeli $f = \sum_{j=1}^N a_j \chi_{A_j}$, $g = \sum_{k=1}^M b_k \chi_{B_k}$, to

$$\begin{aligned} \int_X (f + g) d\mu &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M (a_j + b_k) \mu(A_j \cap B_k) = \sum_{j=1}^N a_j \sum_{k=1}^M \mu(A_j \cap B_k) + \sum_{k=1}^M b_k \sum_{j=1}^N \mu(B_k \cap A_j) \\ &= \sum_{j=1}^N a_j \mu(A_j) + \sum_{k=1}^M b_k \mu(B_k) = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu. \end{aligned}$$

(d) Dla $f, g \in \mathcal{M}_0^+(X)$, jeżeli $f \leq g$, to $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.

Istotnie, $g = f + h$, gdzie $h \in \mathcal{M}_0^+(X)$, a zatem, na podstawie (c), $\int_X g d\mu = \int_X f d\mu + \int_X h d\mu \geq \int_X f d\mu$.

(e) Jeżeli $\int_X f d\mu = 0$ dla pewnej funkcji $f \in \mathcal{M}_0^+(X)$, to $\mu(\{f > 0\}) = 0$.

(f) Dla $A \in \mathfrak{M}$ mamy:

- $\int_A (f|_A) d\mu = \int_X (\chi_A \cdot f) d\mu$, $f \in \mathcal{M}_0^+(X)$; w szczególności, jeżeli $X = A_1 \cup \dots \cup A_N$, gdzie $A_1, \dots, A_N \in \mathfrak{M}$, $A_j \cap A_k = \emptyset$ dla $j \neq k$, to $\int_X f d\mu = \int_{A_1} f d\mu + \dots + \int_{A_N} f d\mu$ dla dowolnego $f \in \mathcal{M}_0^+(X)$;

- $\int_A g d\mu = \int_X g_0 d\mu$ dla dowolnego $g \in \mathcal{M}_0^+(A)$.

Definicja 12.1.41. Niech W będzie pewną własnością przysługującą punktom zbioru X . Powiemy, że W zachodzi μ -prawie wszędzie na X , jeżeli istnieje zbiór miary zero Z taki, że

$$\{x \in X : W(x) \text{ nie zachodzi}\} \subset Z.$$

Dla przykładu: jeżeli $f \leq g$ μ -prawie wszędzie na X , to $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.

Obecnie przechodzimy do określenia całki na $\mathcal{M}^+(X)$.

Dla $f \in \mathcal{M}^+(X)$, jeżeli $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{M}_0^+(X)$, $f_n \nearrow f$ (por. Propozycja 12.1.10), to

$$\int_X f d\mu := \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu \in [0, +\infty].$$

Propozycja 12.1.42. Powyższa definicja jest poprawna, tzn. nie zależy od wyboru ciągu $(f_n)_{n=1}^\infty$ oraz pokrywa się z poprzednią definicją dla $f \in \mathcal{M}_0^+(X)$.

Dowód. Niech $f = \sum_{j=1}^N a_j \chi_{A_j}$ i niech $\mathcal{M}_0^+(X) \ni f_n \nearrow f \in \mathcal{M}_0^+(X)$. Dla $0 < t < 1$ połóżmy

$$A_{n,j}(t) := \{x \in A_j : f_n(x) \geq ta_j\}, \quad j = 1, \dots, N, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zauważmy, że $A_{n,j}(t) \nearrow A_j$, gdy $n \nearrow +\infty$. Mamy

$$\sum_{j=1}^N ta_j \mu(A_{n,j}(t)) \leq \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu.$$

Stąd, przechodząc z n do $+\infty$, dostajemy:

$$t \int_X f d\mu \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu.$$

Teraz przechodzimy z t do 1 i dostajemy $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.

Przechodzimy do dowodu niezależności definicji od wyboru ciągu. Niech

$$\mathcal{M}_0^+(X) \ni f_n \nearrow f \in \mathcal{M}^+(X), \quad \mathcal{M}_0^+(X) \ni g_n \nearrow f.$$

Ustalmy $k \in \mathbb{N}$ i zdefiniujmy $h_n := \min\{f_n, g_k\}$. Oczywiście, $h_n \in \mathcal{M}_0^+(X)$ oraz $h_n \nearrow g_k$. Na podstawie pierwszej części dowodu wnioskujemy, że $\int_X h_n d\mu \nearrow \int_X g_k d\mu$, a stąd

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X h_n d\mu = \int_X g_k d\mu.$$

Wobec dowolności k , dostajemy $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu \geq \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_X g_k d\mu$. Zmieniając rolami ciągi $(f_n)_{n=1}^\infty$, $(g_n)_{n=1}^\infty$ dostajemy poszukiwaną równość. $\square$

Obserwacja 12.1.43. (a) $\int_X (\alpha f) d\mu = \alpha \int_X f d\mu$, $\alpha \geq 0$, $f \in \mathcal{M}^+(X)$.

(b) $\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$, $f, g \in \mathcal{M}^+(X)$.

(c) Dla $f, g \in \mathcal{M}^+(X)$, jeżeli $f \leq g$, to $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.

(d) Dla $A \in \mathfrak{M}$ mamy:

- $\int_A (f|_A) d\mu = \int_X (\chi_A \cdot f) d\mu$, $f \in \mathcal{M}^+(X)$; w szczególności, jeżeli $X = A_1 \cup \dots \cup A_N$, gdzie $A_1, \dots, A_N \in \mathfrak{M}$, $A_j \cap A_k = \emptyset$ dla $j \neq k$, to $\int_X f d\mu = \int_{A_1} f d\mu + \dots + \int_{A_N} f d\mu$ dla dowolnego $f \in \mathcal{M}^+(X)$;

- $\int_A g d\mu = \int_X g_0 d\mu$ dla dowolnego $g \in \mathcal{M}^+(A)$.

Własności (a), (b), (c) i (d) dostajemy z analogicznych własności dla funkcji prostych poprzez przejścia graniczne.

(e) Jeżeli $\int_X f d\mu = 0$ dla pewnej funkcji $f \in \mathcal{M}^+(X)$, to $\mu(\{f > 0\}) = 0$.

Istotnie, $\{f > 0\} = \bigcup_{j=1}^\infty A_j$, gdzie $A_j := \{f > \frac{1}{j}\}$. Mamy:

$$0 = \int_X f d\mu \geq \int_{A_j} f d\mu \geq \frac{1}{j} \mu(A_j).$$

Stąd $\mu(A_j) = 0$, $j \geq 1$.

(f) Jeżeli $\int_X f d\mu < +\infty$ dla pewnej funkcji $f \in \mathcal{M}^+(X)$, to $\mu(\{f = +\infty\}) = 0$.
Istotnie, niech $A := \{f = +\infty\}$. Wtedy

$$+\infty > \int_X f d\mu \geq \int_A f d\mu \geq j\mu(A), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Stąd $\mu(A) = 0$.

Twierdzenie 12.1.44 (Twierdzenie o monotonicznym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki).
Jeżeli $\mathcal{M}^+(X) \ni f_n \nearrow f$ ⁽³⁷⁾, to $\int_X f_n d\mu \nearrow \int_X f d\mu$.

Dowód. Oczywiście $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu$. Niech

$$\mathcal{M}_0^+(X) \ni f_{n,k} \nearrow f_n, \text{ gdy } k \nearrow +\infty \quad (n \geq 1).$$

Zdefiniujmy $g_n := \max\{f_{1,n}, f_{2,n}, \dots, f_{n,n}\}$. Oczywiście $g_n \in \mathcal{M}_0^+(X)$. Widać również, że $g_n \leq f_n$, $n \geq 1$.
łatwo pokazać, że $g_n \nearrow f$ (ĆWICZENIE). W takim razie, $\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X g_n d\mu \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu$. $\square$

Wniosek 12.1.45. Dla dowolnego ciągu $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{M}^+(X)$ mamy:

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^\infty f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_X f_n d\mu.$$

Wniosek 12.1.46. Dla dowolnego $f \in \mathcal{M}^+(X)$ funkcja $\nu(A) := \int_A f d\mu$, $A \in \mathfrak{M}$, jest miarą nieujemną na $\mathfrak{M}$. Ponadto,

$$\int_X g d\nu = \int_X f g d\mu, \quad g \in \mathcal{M}^+(X). \quad (+)$$

Dowód. Niech $(A_j)_{j=1}^\infty \subset \mathfrak{M}$, $A_j \cap A_k = \emptyset$ dla $j \neq k$. Mamy:

$$\nu\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) = \int_X \chi_{\bigcup_{j=1}^\infty A_j} \cdot f d\mu = \int_X \left(\sum_{j=1}^\infty \chi_{A_j} \cdot f \right) d\mu \stackrel{\text{Wniosek 12.1.45}}{=} \sum_{j=1}^\infty \int_X \chi_{A_j} \cdot f d\mu = \sum_{j=1}^\infty \nu(A_j).$$

Wzór (+) zachodzi oczywiście, gdy $g = \chi_A$ dla $A \in \mathfrak{M}$. Zachodzi więc dla nieujemnych funkcji prostych, a stąd, na podstawie twierdzenia o monotonicznym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki, dla dowolnych funkcji z $\mathcal{M}^+(X)$. $\square$

Wniosek 12.1.47. Jeżeli $\mathcal{M}^+(X) \ni f_n \searrow f$ ⁽³⁸⁾ i $\int_X f_1 d\mu < +\infty$, to $\int_X f_n d\mu \searrow \int_X f d\mu$ ⁽³⁹⁾.

Dowód. Niech $Z := \{f_1 = +\infty\}$. Wiemy, że $\mu(Z) = 0$. Na zbiorze $X \setminus Z$ rozważmy ciąg $f_1 - f_n$, $n \geq 1$. Stosując do niego twierdzenie o monotonicznym przechodzeniu do granicy pod znakiem mamy: $\int_{X \setminus Z} (f_1 - f_n) d\mu \nearrow \int_{X \setminus Z} (f_1 - f) d\mu$. Stąd: $\int_X f_n d\mu = \int_{X \setminus Z} f_n d\mu \searrow \int_{X \setminus Z} f d\mu = \int_X f d\mu$. $\square$

Wniosek 12.1.48 (Lemat Fatou ⁽⁴⁰⁾). Dla dowolnego ciągu $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{M}^+(X)$ mamy:

$$\int_X (\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Odnajmy, że nawet jeżeli granica $f := \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ istnieje, to bez dodatkowych założeń mamy: $\int_X f d\mu < \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu$, np. $X := \mathbb{N}$, μ — miara licząca, $f_n := \chi_{\{n\}}$, $n \geq 1$.

Dowód. Mamy $f := \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n = \sup\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$, gdzie $g_n := \inf\{f_k : k \geq n\}$. Zauważmy, że $g_n \leq g_{n+1}$ oraz $g_n \leq f_n$. Stąd

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X g_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu. \quad \square$$

⁽³⁷⁾ Oczywiście, $f \in \mathcal{M}^+(X)$.

⁽³⁸⁾ Oczywiście $f \in \mathcal{M}^+(X)$.

⁽³⁹⁾ Można oczywiście założyć, że $\int_X f_N d\mu < +\infty$ dla pewnego N . Bez żadnych dodatkowych założeń twierdzenie nie jest prawdziwe — ĆWICZENIE.

⁽⁴⁰⁾ Pierre Fatou (1878–1929).

Obecnie przechodzimy do zasadniczej definicji całki. Niech

$$L^1(X) = L^1(X, \mu) := \left\{ f \in \mathcal{M}(X) : \int_X |f| d\mu < +\infty \right\},$$

$$L^1(X, \mathbb{C}) = L^1(X, \mathbb{C}, \mu) := \left\{ f \in \mathcal{M}(X, \mathbb{C}) : \int_X |f| d\mu < +\infty \right\}.$$

Obserwacja 12.1.49. (a) Jeżeli $f \in L^1(X)$, to

$$\int_X f_+ d\mu < +\infty \quad \text{i} \quad \int_X f_- d\mu < +\infty,$$

a zatem możemy zdefiniować

$$\int_X f d\mu := \int_X f_+ d\mu - \int_X f_- d\mu.$$

Z powyższego wzoru wynika, że pojęcie całki możemy rozszerzyć na takie funkcje, dla których $\int_X f_+ d\mu < +\infty$ lub $\int_X f_- d\mu < +\infty$ (chodzi o wykonalność działań).

(b) $L^1(X, \mathbb{C})$ jest zespoloną przestrzenią wektorową. Jeżeli $f = u + iv \in L^1(X, \mathbb{C})$, to $u, v \in L^1(X)$, a zatem możemy określić całkę

$$\int_X f d\mu := \int_X u d\mu + i \int_X v d\mu.$$

(c) Oczywiście dla $f, g \in \mathcal{M}(X)$ (odp. $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathbb{C})$) takich, że $f = g$ μ -prawie wszędzie na X mamy: $f \in L^1(X) \iff g \in L^1(X)$ (odp. $f \in L^1(X, \mathbb{C}) \iff g \in L^1(X, \mathbb{C})$). Ponadto $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$.

Od tej chwili, mówiąc o funkcji klasy L^1 , będziemy mieć na myśli całą klasę równoważności względem powyższej relacji $\sim$ równości μ -prawie wszędzie na X . Innymi słowy, zamiast przestrzeni $L^1(X)$ (odp. $L^1(X, \mathbb{C})$) rozważamy

$$L^1(X)/\sim \quad (\text{odp. } L^1(X, \mathbb{C})/\sim).$$

Nie będziemy wprowadzać specjalnych oznaczeń na te przestrzenie ilorazowe i oznaczymy je ponownie przez $L^1(X)$ (odp. $L^1(X, \mathbb{C})$).

Utożsamienie to pozwala również zaliczać do przestrzeni $L^1(X)$ (odp. $L^1(X, \mathbb{C})$) (i w konsekwencji — całkować) funkcje określone prawie wszędzie. Postępujemy następująco: jeżeli $f \in \mathcal{M}(X \setminus Z)$ (odp. $f \in \mathcal{M}(X \setminus Z, \mathbb{C})$), gdzie Z jest zbiorem miary zero w X , to rozszerzamy f do funkcji mierzalnej f_0 na X kładąc $f_0 := 0$ na Z i definiujemy $f \in L^1(X) \iff f_0 \in L^1(X)$ (odp. $f \in L^1(X, \mathbb{C}) \iff f_0 \in L^1(X, \mathbb{C})$). Ponadto kładziemy $\int_X f d\mu := \int_X f_0 d\mu$.

Powyższe umowy będą w dalszym ciągu stosowane automatycznie bez specjalnych komentarzy.

Obserwacja 12.1.50 (Własności całki). (a) Jeżeli $f \in L^1(X)$, to $\{f = -\infty\} \cup \{f = +\infty\}$ jest zbiorem miary zero.

Wynika stąd bardzo ważny wniosek, że w gruncie rzeczy zamiast $L^1(X)$ wystarczy rozważać $L^1(X, \mathbb{R})$, a więc pewną podprzestrzeń $L^1(X, \mathbb{C})$. W tym sensie np. $L^1(X)$ jest rzeczywistą przestrzenią wektorową.

(b) Całka $L^1(X, \mathbb{K}) \ni f \mapsto \int_X f d\mu \in \mathbb{K}$ jest operatorem $\mathbb{K}$ -liniowym.

Istotnie, wystarczy rozważyć jedynie przypadek rzeczywisty. Dla dowodu jednorodności wystarczy zaobserwować, że

$$(-f)_+ = f_- \quad \text{i} \quad (-f)_- = f_+.$$

Dla dowodu addytywności, niech $f, g \in L^1(X)$, $h := f + g$. Wtedy $h_+ - h_- = f_+ - f_- + g_+ - g_-$. Stąd $h_+ + f_- + g_- = h_- + f_+ + g_+$, a zatem $\int_X h_+ d\mu + \int_X f_- d\mu + \int_X g_- d\mu = \int_X h_- d\mu + \int_X f_+ d\mu + \int_X g_+ d\mu$, co daje żądany wynik.

(c) Dla $f, g \in L^1(X)$, jeżeli $f \leq g$, to $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.

Istotnie, wystarczy zauważyć, że $g - f \in \mathcal{M}^+(X)$ i skorzystać z liniowości całki.

Odnotujmy, że własność (c) pozostaje prawdziwa również, gdy $f, g \in \mathcal{M}(X)$ i jedna z tych funkcji jest klasy $L^1(X)$.

Istotnie, niech np. $f \notin L^1(X)$, $g \in L^1(X)$. Ponieważ $f_+ \leq g_+$, zatem całka $\int_X f d\mu$ jest określona i $\int_X f d\mu \in [-\infty, \infty)$.

(d) $|\int_X f d\mu| \leq \int_X |f| d\mu$, $f \in L^1(X, \mathbb{C})$. Ponadto, równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\alpha \in \mathbb{S}_1$ takie, że $|f| = \alpha f$ μ -prawie wszędzie.

Istotnie, niech $|\int_X f d\mu| = e^{i\theta_0} \int_X f d\mu$. Wtedy korzystając z liniowości całki mamy:

$$\left| \int_X f d\mu \right| = \operatorname{Re} \left(\int_X (e^{i\theta_0} f) d\mu \right) = \int_X \operatorname{Re}(e^{i\theta_0} f) d\mu \leq \int_X |f| d\mu.$$

Jeżeli $|\int_X f d\mu| = \int_X |f| d\mu$, to na podstawie powyższych rozważań,

$$\int_X (|f| - \operatorname{Re}(e^{i\theta_0} f)) d\mu = 0,$$

a stąd $|f| = \operatorname{Re}(e^{i\theta_0} f)$ μ -prawie wszędzie. W konsekwencji $\operatorname{Im}(e^{i\theta_0} f) = 0$ μ -prawie wszędzie i ostatecznie $|f| = e^{i\theta_0} f$ μ -prawie wszędzie.

Propozycja 12.1.51 (Ciągłość całki względem zbioru). *Jeżeli $f \in L^1(X, \mathbb{C})$, to dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że jeżeli $A \in \mathfrak{M}$ i $\mu(A) \leq \delta$, to $|\int_A f d\mu| \leq \varepsilon$.*

Dowód. Wobec Obserwacji 12.1.50(d) wystarczy rozważyć przypadek, gdy

$$f \in \mathcal{M}^+(X), \quad \int_X f d\mu < +\infty.$$

Niech $g \in \mathcal{M}_0^+(X)$ będzie taka, że $g \leq f$ i $\int_X (f - g) d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Przyjmijmy $C := \max_X g$. Wtedy $\int_A f d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2} + \int_A g d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2} + C\mu(A)$. $\square$

Wniosek 12.1.52. *Jeżeli $f \in L^1((a, b), \mathcal{L}^1)$, gdzie $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, to funkcja*

$$(a, b) \ni x \longrightarrow \int_{(a, x]} f d\mathcal{L}^1 = \int_a^x f(t) d\mathcal{L}^1(t)$$

jest absolutnie ciągła ⁽⁴¹⁾, *a więc w szczególności, jednostajnie ciągła (zob. Twierdzenie ??).*

Ćwiczenie 12.1.53 (Uogólnienie Wniosku 12.1.52). Niech $Q \subset \mathbb{R}^n$ będzie dowolną ograniczoną kostką otwartą i niech $f \in L^1(Q, \mathcal{L}^n)$. Udowodnić, że funkcja

$$Q \ni x \longmapsto \int_{\{t \in Q: t \leq x\}} f d\mathcal{L}^n$$

jest jednostajnie ciągła.

Twierdzenie 12.1.54 (Twierdzenie Lebesgue'a o zmajoryzowanym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki). *Jeżeli*

$$(f_n)_{n=1}^\infty \subset L^1(X, \mathbb{C}), \quad f_n \longrightarrow f \text{ oraz } |f_n| \leq g, \quad n \geq 1,$$

gdzie $g \in L^1(X)$, to $\int_X f_n d\mu \longrightarrow \int_X f d\mu$.

Dowód. Oczywiście wystarczy rozważyć tylko przypadek rzeczywisty. Mamy

$$|f_n - f| \leq 2g, \quad n \geq 1.$$

Stąd, na podstawie Lematu Fatou, dostajemy

$$\int_X (2g) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X (2g - |f_n - f|) d\mu = \int_X (2g) d\mu - \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f_n - f| d\mu,$$

skąd bezpośrednio wynika teza. $\square$

Wniosek 12.1.55. *Jeżeli $(f_n)_{n=1}^\infty \subset L^1(X, \mathbb{C})$ oraz $\sum_{n=1}^\infty |f_n| \in L^1(X)$, to szereg $\sum_{n=1}^\infty f_n$ jest zbieżny μ -prawie wszędzie oraz*

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^\infty f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_X f_n d\mu.$$

⁽⁴¹⁾ Tzn. dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla dowolnych punktów $a < a_1 < b_1 \leq a_2 < \dots < b_{N-1} \leq a_N < b_N < b$, jeżeli $\sum_{j=1}^N (b_j - a_j) < \delta$, to $\sum_{j=1}^N |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon$ — zob. Definicja ??.

W szczególności, jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < +\infty$, to zbiór $\{x \in X : x \text{ należy do nieskończenie wielu } A_n\}$ jest miary zero ⁽⁴²⁾.

Dowód. Ponieważ $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \in L^1(X)$, zatem na podstawie Obserwacji 12.1.50(a),

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| < +\infty \quad \mu\text{-prawie wszędzie},$$

co daje zbieżność szeregu. Wzór wynika z twierdzenia Lebesgue'a. $\square$

Wniosek 12.1.56. Dla $f \in L^1(X, \mathbb{C})$ funkcja

$$\nu(A) := \int_A f d\mu, \quad A \in \mathfrak{M},$$

jest miarą zespoloną.

Dowód. Przeliczalna addytywność wynika z Wniosku 12.1.55. Niech mianowicie

$$(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}, \quad A_j \cap A_k = \emptyset \text{ dla } j \neq k.$$

Mamy:

$$\nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \int_X \chi_{\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j} \cdot f d\mu = \int_X \left(\sum_{j=1}^{\infty} \chi_{A_j} \cdot f\right) d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X \chi_{A_j} \cdot f d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j)$$

ponieważ $\int_X \sum_{j=1}^{\infty} |\chi_{A_j} \cdot f| d\mu \leq \int_X |f| d\mu$. $\square$

Propozycja 12.1.57. Niech $f \in L^1(X, \mathbb{C})$ i $\int_A f d\mu = 0$ dla dowolnego $A \in \mathfrak{M}$. Wtedy $f = 0$ μ -prawie wszędzie.

Dowód. Wystarczy rozważyć przypadek $f \in L^1(X)$. Wiemy, że twierdzenie zachodzi dla $f \in \mathcal{M}^+(X)$ (Obserwacja 12.1.43(e)). Wystarczy więc pokazać, że $\int_X f_+ d\mu = \int_X f_- d\mu = 0$. Istotnie, np. niech $A := \{f \geq 0\}$. Wtedy $0 = \int_A f d\mu = \int_A f_+ d\mu = \int_X f_+ d\mu$. $\square$

Propozycja 12.1.58 (Twierdzenie o średniej całkowej). Załóżmy, że $\mu(X) < +\infty$. Niech $C \subset \mathbb{C}$ będzie dowolnym zbiorem domkniętym. Przypuśćmy, że dla $f \in L^1(X, \mathbb{C})$, przy dowolnym $A \in \mathfrak{M}$ takim, że $\mu(A) > 0$ mamy:

$$S_A(f) := \frac{1}{\mu(A)} \int_A f d\mu \in C.$$

Wtedy $f(x) \in C$ dla μ -prawie wszystkich $x \in X$.

Dowód. Ustalmy ciąg kół domkniętych $(\overline{K}(a_j, r_j))_{j=1}^{\infty}$ taki, że

$$\mathbb{C} \setminus C = \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{K}(a_j, r_j)$$

(ĆWICZENIE). Wystarczy pokazać, że $f^{-1}(\overline{K}(a_j, r_j))$ jest zbiorem miary zero dla dowolnego j . Ustalmy j i niech $a := a_j$, $r := r_j$, $A := f^{-1}(\overline{K}(a, r))$. Przypuśćmy, że $\mu(A) > 0$. Wtedy:

$$|S_A(f) - a| = \frac{1}{\mu(A)} \left| \int_A (f - a) d\mu \right| \leq \frac{1}{\mu(A)} \int_A |f - a| d\mu \leq r,$$

co oznacza, że $S_A(f) \in \overline{K}(a, r) \subset \mathbb{C} \setminus C$ — sprzeczność. $\square$

⁽⁴²⁾ Bierzymy $f_n := \chi_{A_n}$, $n \geq 1$ i zauważamy, że x należy do nieskończenie wielu A_n wtedy i tylko wtedy, gdy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x)$ jest rozbieżny.

Propozycja 12.1.59 (Nierówność Jensena ⁽⁴³⁾). *Założmy, że $\mu(X) = 1$ i niech $f \in L^1(X, \mathbb{R})$. Niech $P \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem takim, że $f(x) \in P$ dla μ -p.w. $x \in X$. Wtedy dla dowolnej funkcji wypukłej $g : P \rightarrow \mathbb{R}$ mamy*

$$g\left(\int_X f d\mu\right) \leq \int_X (g \circ f) d\mu.$$

Dowód. Przypomnijmy (Twierdzenie 6.8.11), że $g \in C^\uparrow(P)$. Zauważmy, że $\int_X f d\mu \in P$ oraz, że $g \circ f \in \mathcal{M}(X)$ (Obserwacja 12.1.7(j)). Niech $t_0 := \int_X f d\mu$. Przypomnijmy (Definicja 6.8.1), że

$$\frac{g(t) - g(s)}{t - s} \leq \frac{g(u) - g(t)}{u - t}, \quad s, t, u \in P, \quad s < t < u$$

W szczególności,

$$\frac{g(u) - g(t_0)}{u - t_0} \geq C, \quad t_0 < u,$$

gdzie

$$C := \sup \left\{ \frac{g(t_0) - g(s)}{t_0 - s} : s < t_0 \right\}.$$

Tak więc, $g(u) \geq g(t_0) + C(u - t_0)$ dla dowolnego $u \in P$. W szczególności, $g \circ f \geq g(t_0) + C(f - t_0)$ μ -prawie wszędzie. Całkując stronami dostajemy (por. Obserwacja 12.1.50(c))

$$\int_X (g \circ f) d\mu \geq g(t_0) + C\left(\int_X f d\mu - t_0\right). \quad \square$$

Uwaga 12.1.60. (a) Jeszcze raz przypomnijmy, że w teorii całki nie jest istotne to, co się dzieje na zbiorach miary zero. W związku z tym, poprzednie wyniki można przeformułować tak, aby odpowiednie założenia i warunki były spełnione μ -prawie wszędzie. Tezy pozostaną bez zmian. To, czy użyjemy sformułowania „prawie wszędzie”, czy nie jest w gruncie rzeczy kwestią naszego wyboru: zawsze można przecież zmniejszyć X o stosowny zbiór miary zero i mieć już sformułowanie „wszędzie”. Uwaga ta dotyczy oczywiście założeń, a nie tezy (np. we Wniosku 12.1.55).

(b) Pojęcie całki (oraz większość twierdzeń) można rozszerzyć na funkcje $f : X \rightarrow E$, gdzie E jest ośrodkową przestrzenią Banacha.

12.1.8. Przestrzenie L^p . Niech $\mu : \mathfrak{M} \rightarrow [0, +\infty]$ będzie ustaloną miarą i niech $Y \in \{\bar{\mathbb{R}}, \mathbb{C}\}$.

Definicja 12.1.61. Dla $0 < p < +\infty$ zdefiniujemy

$$L^p(X, Y, \mu) := \left\{ f \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M}) : \int_X |f|^p d\mu < +\infty \right\}.$$

Obowiązują skróty $L^p(X, \mu)$, $L^p(X)$ oraz zasada utożsamiania funkcji równych μ -prawie wszędzie. Niech

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Dla $f \in \mathcal{M}(X)$ niech

$$\operatorname{ess\,sup}_X f := \inf \{ C \in \mathbb{R} : f \leq C \text{ } \mu\text{-prawie wszędzie} \}.$$

Zauważmy, że $f \leq \operatorname{ess\,sup}_X f$ μ -prawie wszędzie, tzn. zbiór $\{f > \operatorname{ess\,sup}_X f\}$ jest miary zero.

Istotnie, niech $C := \operatorname{ess\,sup}_X f$ i niech $f \leq C + \frac{1}{j}$ na $X \setminus Z_j$, gdzie Z_j jest miary zero, $j \geq 1$. Wtedy $f \leq C$ na $X \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} Z_j$.

Niech

$$L^\infty(X) = L^\infty(X, \mu) := \{f \in \mathcal{M}(X) : |f| \text{ jest ograniczona } \mu\text{-prawie wszędzie}\}.$$

W ten sam sposób definiujemy $L^\infty(X, \mathbb{C}) = L^\infty(X, \mathbb{C}, \mu)$. Połóżmy

$$\|f\|_{L^\infty} := \operatorname{ess\,sup}_X |f| = \inf \{ C \in \mathbb{R}_+ : |f| \leq C \text{ } \mu\text{-prawie wszędzie} \}.$$

⁽⁴³⁾ Johan Jensen (1859–1925).

$L^p(X, \mathbb{C})$ jest zespoloną przestrzenią wektorową, $0 < p \leq +\infty$.

Obserwacja 12.1.62. $L^p(X, \mathbb{C})$ jest zespoloną przestrzenią wektorową, $0 < p \leq +\infty$.

Istotnie, przypadek $p = +\infty$ jest oczywisty. W przypadku $0 < p < +\infty$, wystarczy skorzystać z nierówności

$$(a+b)^p \leq 2^p(a^p + b^p), \quad a, b \geq 0.$$

Podobnie jak w przypadku L^1 , zamiast przestrzeni $L^p(X)$ możemy rozważać przestrzeń $L^p(X, \mathbb{R})$ jako podprzestrzeń $L^p(X, \mathbb{C})$.

Aby uniknąć przypadków trywialnych, dalej zakładamy, że zakładamy $\mu(X) > 0$.

Powiemy, że liczby $1 \leq p, q \leq +\infty$ są sprzężone, jeżeli $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ⁽⁴⁴⁾.

Propozycja 12.1.63. (a) Jeżeli $p, q \geq 1$ są sprzężone, to dla dowolnych funkcji $f \in L^p(X, \mathbb{C})$, $g \in L^q(X, \mathbb{C})$ funkcja fg jest klasy $L^1(X, \mathbb{C})$ oraz zachodzi nierówność Höldera:

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Ponadto, dla $1 < p, q < +\infty$ równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $\alpha, \beta \geq 0$ takie, że $\alpha + \beta > 0$ oraz

$$\alpha|f|^p = \beta|g|^q \quad \mu\text{-prawie wszędzie.} \quad (\dagger)$$

(b) Dla dowolnego $1 \leq p \leq +\infty$ i dla dowolnych $f, g \in L^p(X, \mathbb{C})$ zachodzi nierówność Minkowskiego

$$\|f+g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Ponadto, dla $1 < p < +\infty$ równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$, takie, że

$$|f| = \alpha|f+g|, \quad |g| = \beta|f+g| \quad \mu\text{-prawie wszędzie.}^{(45)} \quad (\ddagger)$$

W szczególności, $(L^p(X, \mathbb{K}), \|\cdot\|_{L^p})$ jest przestrzenią unormowaną nad $\mathbb{K}$ dla dowolnego $1 \leq p \leq +\infty$ ⁽⁴⁶⁾.

(c) Przestrzeń $L^2(X, \mathbb{C})$ wraz z iloczynem skalarnym

$$(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle_{L^2} := \int_X f \bar{g} d\mu$$

jest przestrzenią unitarną ⁽⁴⁷⁾.

Dowód. (a) Nierówność Höldera jest oczywista dla $p = 1, q = +\infty$ i $p = +\infty, q = 1$. Dla $1 < p, q < +\infty$ rozumiemy następująco.

Po pierwsze możemy założyć, że $f \neq 0$ i $g \neq 0$.

Po drugie, zastępując f przez $f/\|f\|_{L^p}$ i g przez $g/\|g\|_{L^q}$, możemy założyć, że $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^q} = 1$.

Mamy pokazać, że $\int_A |fg| d\mu \leq 1$, gdzie $A := \{fg \neq 0\}$.

Funkcja $t \mapsto \exp(t)$ jest wypukła. W szczególności,

$$e^{\frac{t}{p} + \frac{u}{q}} \leq \frac{1}{p} e^t + \frac{1}{q} e^u, \quad t, u \in \mathbb{R},$$

przy czym równość zachodzi jedynie, gdy $t = u$.

Dla dowolnego $x \in A$ dobieramy $t, u \in \mathbb{R}$ takie, że $|f(x)| = \exp(t/p)$, $|g(x)| = \exp(u/q)$. Stąd

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q, \quad x \in A.$$

⁽⁴⁴⁾ W szczególności, 1 i $+\infty$ są sprzężone.

⁽⁴⁵⁾ Zauważmy, że warunki te są równoważne istnieniu liczby $t \geq 0$ takiej, że $f = tg$ μ -prawie wszędzie lub $g = tf$ μ -prawie wszędzie. Istotnie, jeżeli np. $f = tg$, to $|f| = (t/(t+1))|f+g|$ i $|g| = (1/(t+1))|f+g|$ (równości μ -prawie wszędzie). Odwrotnie, jeżeli $(\ddagger)$ zachodzi, to rozumiemy następująco: Przypadek $\alpha = 0$ (odp. $\beta = 0$) sprowadza się do równości $f = 0g$ (odp. $g = 0f$). Możemy więc założyć, że $\alpha, \beta > 0$. Niech $t := \alpha/\beta$. Zauważmy, że $|f| = t|g|$. W szczególności, $A := \{f \neq 0\} = \{g \neq 0\}$ (z dokładnością do zbioru miary zero). Pozostaje sprawdzić, że $\text{Arg } f = \text{Arg } g$ poza A . Ponieważ $\alpha + \beta = 1$, dostajemy równość $|f| + |g| = |f+g|$, czyli $|f|^2 + 2|f||g| + |g|^2 = |f+g|^2 = |f|^2 + 2\text{Re } f\bar{g} + |g|^2$. Stąd $|f||g| = \text{Re } f\bar{g}$, co daje równość argumentów poza A .

⁽⁴⁶⁾ Uwaga: nie twierdzimy, że tak jest dla $0 < p < 1$.

⁽⁴⁷⁾ W szczególności, dla $p = q = 2$, nierówność Höldera to po prostu nierówność Schwarz.

Całkując stronami dostajemy żadaną nierówność Höldera.

Jeżeli dla $1 < p, q < +\infty$ w nierówności Höldera zachodzi równość i pominiemy przypadek trywialny, gdy $f = 0$ lub $g = 0$, to dla postaci zredukowanej musimy mieć

$$|fg| = \frac{1}{p}|f|^p + \frac{1}{q}|g|^q \quad \mu\text{-prawie wszędzie na } X,$$

co oznacza, że $|f|^p = |g|^q$ μ -prawie wszędzie na X . Warunek (†) dostajemy wracając do postaci niezredukowanej.

Jeżeli spełniony jest warunek (†) i np. $\beta > 0$, to $|g| = c|f|^{p/q}$ μ -prawie wszędzie, gdzie $c \geq 0$, a stąd $\|g\|_{L^q} = c(\int_X |f|^p)^{1/q}$ i $\|fg\|_{L^1} = c \int_X |f|^p d\mu$.

(b) Nierówność Minkowskiego jest oczywista dla $p = 1$ i $p = +\infty$. Dla $1 < p < +\infty$ rozumiemy następująco. Wiemy, że L^p jest przestrzenią wektorową (Obserwacja 12.1.62(a)), a więc $f + g \in L^p$. Możemy oczywiście założyć, że $\|f + g\|_{L^p} > 0$. Niech q będzie sprzężone z p . Mamy

$$\int_X |f + g|^p d\mu \leq \int_X (|f| + |g|)^p d\mu$$

oraz

$$\begin{aligned} \int_X (|f| + |g|)^p d\mu &= \int_X |f|(|f| + |g|)^{p-1} d\mu + \int_X |g|(|f| + |g|)^{p-1} d\mu \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_{L^p} \left(\int_X (|f| + |g|)^{(p-1)q} d\mu \right)^{1/q} + \|g\|_{L^p} \left(\int_X (|f| + |g|)^{(p-1)q} d\mu \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Ponieważ $(p-1)q = p$, więc dzieląc powyższą nierówność przez $\int_X (|f| + |g|)^p d\mu$ dostajemy żadaną nierówność Minkowskiego.

Jeżeli dla $1 < p < +\infty$ w nierówności Minkowskiego zachodzi równość i pominiemy przypadek trywialny, gdy $f = 0$ lub $g = 0$, to na podstawie powyższych nierówności mamy $|f + g| = |f| + |g|$ μ -prawie wszędzie oraz (korzystając z (a)) $|f|^p = c(|f| + |g|)^{(p-1)q}$, $|g|^p = d(|f| + |g|)^{(p-1)q}$ μ -prawie wszędzie, gdzie $c, d > 0$. Wynika stąd, że $\alpha(|f| + |g|) = |f|$ i $\beta(|f| + |g|) = |g|$ μ -prawie wszędzie, gdzie $\alpha, \beta > 0$. Pozostaje zauważyć, że $\alpha + \beta = 1$.

Jeżeli spełniony jest warunek (‡), to $|f|^p = \alpha^p(|f + g|)^p$, $|g|^p = \beta^p(|f + g|)^p$ μ -prawie wszędzie, a więc mamy równość.

(c) wynika z (b) i własności całki. □

Wniosek 12.1.64 (Uogólniona nierówność Höldera). *Niech $p_1, \dots, p_N, p \geq 1$ będą takie, że*

$$\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_N} = \frac{1}{p}.$$

Wtedy dla dowolnych funkcji $f_j \in L^{p_j}(X, \mathbb{C})$, $j = 1, \dots, N$, funkcja $f_1 \cdots f_N$ należy do $L^p(X, \mathbb{C})$ oraz

$$\|f_1 \cdots f_N\|_{L^p} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}} \cdots \|f_N\|_{L^{p_N}}.$$

Oznacza to w szczególności, że odwzorowanie N -liniowe

$$L^{p_1}(X, \mathbb{C}) \times \dots \times L^{p_N}(X, \mathbb{C}) \ni (f_1, \dots, f_N) \longrightarrow f_1 \cdots f_N \in L^p(X, \mathbb{C})$$

jest ciągłe i ma normę ≤ 1 .

Dowód. Przypadek $p = +\infty$ (wtedy oczywiście $p_1 = \dots = p_N = +\infty$) jest elementarny. Załóżmy, że $p < +\infty$ i niech $p_1 = \dots = p_s = +\infty$, $p_{s+1}, \dots, p_N < +\infty$ dla pewnego $0 \leq s \leq N-1$. Bez szkody dla ogólności możemy założyć, że $f_1, \dots, f_N : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$. Jeżeli $s > 0$, to

$$\|f_1 \cdots f_N\|_{L^p} \leq \|f_1\|_{L^\infty} \cdots \|f_s\|_{L^\infty} \cdot \|f_{s+1} \cdots f_N\|_{L^p},$$

co redukuje dowód do przypadku $s = 0$. Załóżmy więc, że $s = 0$. Zastosujemy indukcję względem N . Przypadek $N = 1$ jest trywialny. Przechodzimy do kroku indukcyjnego. Przypuśćmy, że wynik jest prawdziwy dla $N-1$. Niech $q \geq 1$ będzie takie, że

$$\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_{N-1}} = \frac{1}{q}.$$

Wtedy:

$$\frac{1}{q/p} + \frac{1}{p_N/p} = 1.$$

Stąd, na podstawie zwykłej nierówności Höldera oraz założenia indukcyjnego, dostajemy

$$\begin{aligned} \int_X (f_1 \dots f_N)^p d\mu &\leq \left(\int_X (f_1 \dots f_{N-1})^{p \cdot q/p} d\mu \right)^{p/q} \left(\int_X f_N^{p \cdot p_N/p} d\mu \right)^{p/p_N} \\ &= \|f_1 \dots f_{N-1}\|_{L^q}^p \|f_N\|_{L^{p_N}}^p \leq (\|f_1\|_{L^{p_1}} \dots \|f_N\|_{L^{p_N}})^p. \end{aligned} \quad \square$$

Wniosek 12.1.65. *Jeżeli $\mu(X) < +\infty$, to dla dowolnych $1 \leq r < s \leq +\infty$ mamy: $L^s(X, \mathbb{C}) \subset L^r(X, \mathbb{C})$ ⁽⁴⁸⁾. Ponadto, operator*

$$\text{id} : L^s(X, \mathbb{C}) \longrightarrow L^r(X, \mathbb{C})$$

jest ciągły.

Dowód. Dla $s = +\infty$ mamy:

$$\|f\|_{L^r} \leq (\mu(X))^{1/r} \|f\|_{L^\infty}, \quad f \in L^\infty(X, \mathbb{C}).$$

Gdy $s < +\infty$, stosujemy Wniosek 12.1.64 do $N := 2$, $p_1 := rs/(s-r)$, $p_2 := s$, $p := r$, $f_1 := 1 \in L^{p_1}(X)$ (bo $\mu(X) < +\infty$), $f_2 := f \in L^s(X, \mathbb{C})$ i otrzymujemy:

$$\|f\|_{L^r} \leq (\mu(X))^{1/r-1/s} \|f\|_{L^s}, \quad f \in L^s(X, \mathbb{C}). \quad \square$$

Obserwacja 12.1.66. Ustalmy funkcję $f \in \mathcal{M}(X, \mathbb{C})$ taką, że $\mu(\{x \in X : f(x) \neq 0\}) > 0$. Niech

$$P := \{p \in \mathbb{R}_{>0} : f \in L^p(X, \mathbb{C})\}, \quad Q := \{t \in \mathbb{R}_{>0} : 1/t \in P\}.$$

Załóżmy, że $P \neq \emptyset$. Wtedy:

(a) P i Q są przedziałami.

Istotnie, ustalmy $p_1 < p < p_2$ takie, że $p_1, p_2 \in P$. Niech

$$\alpha := p_1 \frac{p_2 - p}{p_2 - p_1} > 0, \quad \beta := p_2 \frac{p - p_1}{p_2 - p_1} > 0, \quad r := \frac{p_1}{\alpha} = \frac{p_2 - p_1}{p_2 - p} > 1, \quad s := \frac{p_2}{\beta} = \frac{p_2 - p_1}{p - p_1} > 1.$$

Wtedy $\alpha + \beta = p$ oraz $1/r + 1/s = 1$. Teraz, korzystając z nierówności Höldera, dostajemy:

$$\int_X |f|^p d\mu = \int_X |f|^\alpha |f|^\beta d\mu \leq \left(\int_X |f|^{\alpha r} d\mu \right)^{1/r} \left(\int_X |f|^{\beta s} d\mu \right)^{1/s} = \left(\int_X |f|^{p_1} d\mu \right)^{1/r} \left(\int_X |f|^{p_2} d\mu \right)^{1/s} < +\infty. \quad (\dagger)$$

(b) Funkcja $Q \ni t \mapsto \ln \|f\|_{L^{1/t}}$ jest wypukłą.

Istotnie, wypukłość tej funkcji jest równoważna (ĆWICZENIE) nierówności

$$\int_X |f|^{1/t} d\mu \leq \left(\int_X |f|^{1/t_1} d\mu \right)^{\frac{t_1}{t} \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1}} \left(\int_X |f|^{1/t_2} d\mu \right)^{\frac{t_2}{t} \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}},$$

która, po podstawieniu $p_1 := 1/t_2$, $p_2 := 1/t_1$, $p := 1/t$, sprowadza się do nierówności $(\dagger)$.

(c) Funkcja $P \ni p \mapsto \|f\|_{L^p}$ jest ciągłą.

(d) Jeżeli $0 < \mu(X) < +\infty$, to dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{M}(X, \mathbb{C})$ takiej, że $\mu(\{x \in X : f(x) \neq 0\}) > 0$ mamy $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^\infty}$ ⁽⁴⁹⁾ ⁽⁵⁰⁾.

Istotnie, mamy $\|f\|_{L^p} \leq (\mu(X))^{1/p} \|f\|_{L^\infty}$, skąd wynika, że $\limsup_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^\infty}$.

Niech $0 < t < \|f\|_{L^\infty}$, $A_t := \{x \in X : |f(x)| > t\}$. Oczywiście, $0 < \mu(A_t) < +\infty$. Mamy $\int_X |f|^p d\mu \geq \int_{A_t} t^p d\mu = \mu(A_t) t^p$, a więc $(\mu(A_t))^{1/p} t \leq \|f\|_{L^p}$, a stąd $\liminf_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_{L^p} \geq \|f\|_{L^\infty}$.

Propozycja 12.1.67. *Niech $0 < p < 1$.*

(a) *Funkcja*

$$\varrho_p(f, g) := \|f - g\|_{L^p}^p = \int_X |f - g|^p d\mu, \quad f, g \in L^p(X, \mathbb{C}),$$

jest metryką translatywną na $L^p(X, \mathbb{C})$.

(b) *Działania w przestrzeni $L^p(X, \mathbb{C})$ są ciągłe w topologii zadanej przez metrykę ϱ_p .*

Dowód. (a) Wystarczy skorzystać z nierówności $(a+b)^p \leq a^p + b^p$, $a, b \geq 0$ (ĆWICZENIE).

(b) ĆWICZENIE*.

□

⁽⁴⁸⁾ ĆWICZENIE: Czy własność ta zachodzi w przypadku, gdy $\mu(X) = +\infty$?

⁽⁴⁹⁾ Uwaga: Nie wykluczamy tu przypadków, gdy $\|f\|_{L^p} = +\infty$ dla pewnych $0 < p < +\infty$.

⁽⁵⁰⁾ ĆWICZENIE: Czy własność ta zachodzi bez założenia, że $\mu(X) < +\infty$?

Dla $1 \leq p \leq +\infty$ kładziemy

$$\varrho_p(f, g) := \|f - g\|_{L^p}, \quad f, g \in L^p(X, \mathbb{C}).$$

Obserwacja 12.1.68. Na podstawie Obserwacji 12.1.62(b) mamy

$$\varrho(f, g) = \|f - g\|_\mu \leq \varrho_p^{c(p)}(f, g), \quad f, g \in L^p(X, \mathbb{C}), \quad 0 < p \leq +\infty,$$

gdzie

$$c(p) := \begin{cases} 1/(p+1), & \text{jeżeli } 0 < p < 1 \\ p/(p+1), & \text{jeżeli } 1 \leq p < +\infty \\ 1, & \text{jeżeli } p = \infty \end{cases}.$$

Propozycja 12.1.69. $(L^p(X, \mathbb{C}), \varrho_p)$ jest przestrzenią zupełną dla dowolnego $0 < p \leq +\infty$. W szczególności:

- $L^p(X, \mathbb{C})$ jest przestrzenią Banacha dla dowolnego $1 \leq p \leq +\infty$,
- $L^2(X, \mathbb{C})$ jest przestrzenią Hilberta.

Dowód. Przypadek $0 < p < 1$ pozostawiamy jako ĆWICZENIE*.

Niech $(f_k)_{k=1}^\infty \subset L^p(X, \mathbb{C})$ będzie dowolnym ciągiem Cauchy'ego.

• Przypadek $1 \leq p < +\infty$. Wystarczy pokazać, że pewien jego podciąg jest zbieżny. Niech $(f_{n_k})_{k=1}^\infty$ będzie podciągiem takim, że

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p} \leq 2^{-k}, \quad k \geq 1.$$

Zdefiniujmy

$$g_N := \sum_{k=1}^N |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|, \quad g := \lim_{N \rightarrow +\infty} g_N = \sum_{k=1}^\infty |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|.$$

Zauważmy, że $g_N \in \mathcal{M}^+(X) \cap L^p(X)$, $\|g_N\|_{L^p} < 1$, $N \geq 1$, $g_N^p \nearrow g^p \in \mathcal{M}^+(X)$. W takim razie $\int_X g^p d\mu \leq 1$. W szczególności, $g < +\infty$ μ -prawie wszędzie. Oznacza to, że szereg $\sum_{k=1}^\infty (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$ jest

zbieżny bezwzględnie na $X \setminus Z$, gdzie Z jest miary zero. Połóżmy $f := f_{n_1} + \sum_{k=1}^\infty (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$ na $X \setminus Z$ oraz $f = 0$ na Z . Wtedy $f_{n_k} \rightarrow f$ μ -prawie wszędzie na X . Ponieważ $f - f_{n_\ell} = \sum_{k=\ell}^\infty (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$

μ -prawie wszędzie oraz $\sum_{k=\ell}^\infty \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p} \leq \sum_{k=\ell}^\infty 2^{-k}$, zatem $f \in L^p(X, \mathbb{C})$ oraz $\|f_{n_\ell} - f\|_{L^p} \rightarrow 0$.

- Przypadek $p = +\infty$ jest znacznie prostszy — postępujemy następująco. Niech

$$Z := \bigcup_{k=1}^\infty \{|f_k| > \|f_k\|_{L^\infty}\} \cup \bigcup_{k, \ell=1}^\infty \{|f_k - f_\ell| > \|f_k - f_\ell\|_{L^\infty}\}.$$

Wtedy Z jest zbiorem miary zero oraz $(f_k|_{X \setminus Z})_{k=1}^\infty$ jest ciągiem Cauchy'ego w $\mathcal{B}(X \setminus Z, \mathbb{C})$. W takim razie $f_k \rightarrow f$ jednostajnie na $X \setminus Z$, gdzie $f \in \mathcal{M}(X \setminus Z, \mathbb{C}) \cap \mathcal{B}(X \setminus Z, \mathbb{C})$. Zdefiniujmy $f := 0$ na Z . Wtedy $f \in L^\infty(X, \mathbb{C})$ oraz $\|f_k - f\|_{L^\infty} \rightarrow 0$. $\square$

Ćwiczenie 12.1.70. Ustalmy $0 < p < 1$.

(a) Pokazać, że dla $X := [0, 1]$, $\mu := \mathcal{L}^1$, w przestrzeni $(L^p(X, \mathbb{C}), \varrho_p)$ nie ma nietrywialnych zbiorów otwartych i wypukłych.

Szkic dowodu. Niech $\emptyset \neq W \neq L^p(X, \mu)$ będzie zbiorem otwartym i wypukłym. Możemy założyć, że $0 \in W$. Niech $f \in L^p(X, \mathbb{C}) \setminus W$. Dobierzmy $r > 0$ takie, że

$$B(0, r) = \{g \in L^p(X, \mathbb{C}) : \varrho_p(0, g) < r\} = \{g \in L^p(X, \mathbb{C}) : \|g\|_{L^p}^p < r\} \subset W.$$

Niech $m \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $m^{p-1} \varrho_p(0, f) < r$. Dobierzmy podział

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$$

odcinka $[0, 1]$ taki, że

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} |f|^p d\mathcal{L}^1 = \frac{1}{m} \varrho_p(0, f), \quad i = 1, \dots, m.$$

W szczególności, dla $g_i := m f \chi_{[t_{i-1}, t_i]}$, mamy

$$\int_X |g_i|^p d\mathcal{L}^1 = m^{p-1} \varrho_p(0, f) < r, \quad i = 1, \dots, m.$$

Ponieważ $f = \frac{1}{m}(g_1 + \dots + g_m) \in W$, dostajemy sprzeczność.

(b) Korzystając z (a), pokazać, że dla dowolnej przestrzeni unormowanej F mamy

$$\mathcal{L}(L^p([0, 1], \mathbb{C}; \mathcal{L}^1), F) = \{0\}.$$

(c) Uogólnić (a) (i w konsekwencji (b)) na szerszą klasę par (X, μ) .

12.2. Całka Riemanna a całka Lebesgue'a

Twierdzenie 12.2.1 (Porównanie całki Riemanna z całką Lebesgue'a). *Założmy, że $A \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem regularnym ze względu na całkę Riemanna i niech $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją ograniczoną. Wtedy:*

- (a) $A \in \mathcal{L}_n$.
- (b) $f \in \mathcal{R}(A) \implies f \in L^1(A)$ ⁽⁵¹⁾. Ponadto $\int_A f = \int_A f d\mathcal{L}^n$.
- (c) $f \in \mathcal{R}(A) \iff \mathcal{L}^n(N_A(f)) = 0$, gdzie $N_A(f) := \{a \in A : f \text{ nie jest ciągła w } a\}$.

Dowód. Ponieważ $A = (\text{int } A) \cup Z$, gdzie $|Z| = 0$, a zbiory o objętości zero mają miarę zero, zatem $A \in \mathcal{L}_n$.

Dla pozostałej części dowodu możemy założyć, $A = P$ jest kostką ⁽⁵²⁾. Ponadto możemy założyć, że $f \geq 0$.

Ustalmy normalny ciąg podziałów prostych $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ taki, że $\pi_{k+1} \preceq \pi_k$, $k \geq 1$. Niech $\pi_k = \{P_{k,1}, \dots, P_{k,m_k}\}$. Ustalmy w dowolny sposób przynależność ścian, tak by z kostek $P_{k,1}, \dots, P_{k,m_k}$ otrzymać „kostki” rozłączne $Q_{k,1}, \dots, Q_{k,m_k}$ dające w sumie P . Dla każdego k otrzymaliśmy rozbitcie P na zbiory $\mathcal{L}_n$ -mieralne. Niech

$$L_k := \sum_{j=1}^{m_k} m(f, P_{k,j}) \chi_{Q_{k,j}}, \quad U_k := \sum_{j=1}^{m_k} M(f, P_{k,j}) \chi_{Q_{k,j}}.$$

Oczywiście, $L_k, U_k \in \mathcal{M}_0^+(P, \mathcal{L}_n)$. Niech $Z := \bigcup_{k=1}^\infty \bigcup_{j=1}^{m_k} \partial P_{k,j}$. Zbiór Z jest miary zero i jak łatwo widać $L_k \leq f \leq U_k$ na $P \setminus Z$. Ponadto, $L_k \leq L_{k+1}$ i $U_k \geq U_{k+1}$ na $P \setminus Z$, $k \geq 1$. Zdefiniujmy $L := \lim_{k \rightarrow +\infty} L_k$ na $P \setminus Z$ i $L := 0$ na Z . Analogicznie, niech $U := \lim_{k \rightarrow +\infty} U_k$ na $P \setminus Z$ i $U := 0$ na Z . Wtedy $L, U \in \mathcal{M}^+(P, \mathcal{L}_n)$ i $L \leq f \leq U$ na $P \setminus Z$. Na podstawie twierdzeń o monotonicznym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki oraz Obserwacji 11.1.5(f) mamy:

$$\begin{aligned} L(\pi_k, f) &= \int_P L_k d\mathcal{L}^n \nearrow \int_P L d\mathcal{L}^n, & L(\pi_k, f) &\nearrow \int_{*P} f, \\ U(\pi_k, f) &= \int_P U_k d\mathcal{L}^n \searrow \int_P U d\mathcal{L}^n, & U(\pi_k, f) &\searrow \int_P^* f. \end{aligned}$$

Tak więc $\int_P^* f - \int_{*P} f = \int_P (U - L) d\mathcal{L}^n$. Wynika stąd, że $f \in \mathcal{R}(P) \iff L = U$ $\mathcal{L}^n$ -prawie wszędzie. Ponadto, jeżeli $L = U$ $\mathcal{L}^n$ -prawie wszędzie, to wobec zupełności miary $\mathcal{L}^n$, mamy $f \in \mathcal{M}^+(P, \mathcal{L}_n)$ oraz

$$\int_P f d\mathcal{L}^n = \int_P L d\mathcal{L}^n = \int_P U d\mathcal{L}^n,$$

a więc $f \in L^1(P)$ oraz $\int_P f d\mathcal{L}^n = \int_P f$. Pozostaje zauważyć, że

$$L = U \quad \mathcal{L}^n\text{-prawie wszędzie}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{L}^n(N_P(f)) = 0$

Istotnie, niech $x_0 \in P \setminus (Z \cup N_P(f))$ i niech $\varepsilon > 0$. Wobec ciągłości funkcji f w punkcie x_0 , istnieje kostka $Q \subset P$ o środku w punkcie x_0 taka, że $|f(x') - f(x'')| \leq \varepsilon$ dla dowolnych $x', x'' \in Q$. Ponieważ $\text{diam } \pi_k \rightarrow 0$, zatem dla dostatecznie dużych k mamy następującą sytuację: jeżeli $x_0 \in P_{k,j(k)}$, to $P_{k,j(k)} \subset Q$ (zauważmy, że $j(k)$ jest jednoznacznie wyznaczone). W takim razie $U_k(x_0) - L_k(x_0) \leq \varepsilon$, $k \gg 1$.

W drugą stronę: Niech $L = U$ na $P \setminus Z_0$, gdzie $Z \subset Z_0$ i Z_0 jest miary zero. Weźmy $x_0 \in P \setminus Z_0$ i $\varepsilon > 0$. Wtedy $U_k(x_0) - L_k(x_0) \leq \varepsilon$ dla $k \geq k_0$. Przypuśćmy, że $x_0 \in \text{int } P_{k_0,j_0} =: W$. Wtedy dla $x \in W$ mamy $L_{k_0}(x_0) = L_{k_0}(x) \leq f(x) \leq U_{k_0}(x) = U_{k_0}(x_0)$, a stąd $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. $\square$

⁽⁵¹⁾ Tu i dalej, $L^p(A) := L^p(A, \mathcal{L}^n)$.

⁽⁵²⁾ Przy własności (c) trzeba zauważyć, że gdy $A \subset P$, to $N_A(f) \subset N_P(f_0) \subset N_A(f) \cup \partial A$.

Wniosek 12.2.2. Zbiór ograniczony $A \subset \mathbb{R}^n$ jest mierzalny w sensie Jordana (por. Definicja 11.1.12) wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{L}^n(\partial A) = 0$ ⁽⁵³⁾.

12.3. Zasada Cavalieriego. Twierdzenia Tonellego i Fubinięgo

Twierdzenie 12.3.1 (Zasada Cavalieriego ⁽⁵⁴⁾). Niech $A \in \mathcal{L}_{p+q}$ ($p, q \in \mathbb{N}$). Wtedy:

(a) istnieje zbiór $Z(A) \subset \mathbb{R}^p$ miary zero taki, że przekrój

$$A(t) := \{u \in \mathbb{R}^q : (t, u) \in A\}$$

należy do $\mathcal{L}_q$ dla $t \in \mathbb{R}^p \setminus Z(A)$;

(b) odwzorowanie $\mathbb{R}^p \ni t \mapsto \mathcal{L}^q(A(t)) \in [0, +\infty]$ jest $\mathcal{L}_p$ -mierzalne ⁽⁵⁵⁾;

(c) $\mathcal{L}^{p+q}(A) = \int_{\mathbb{R}^p} \Phi_A d\mathcal{L}^p = \int_{\mathbb{R}^p} \mathcal{L}^q(A(t)) d\mathcal{L}^p(t)$;

(d) jeżeli $\text{pr}_{\mathbb{R}^p}(A) \in \mathcal{L}_p$, to $\mathcal{L}^{p+q}(A) = \int_{\text{pr}_{\mathbb{R}^p}(A)} \mathcal{L}^q(A(t)) d\mathcal{L}^p(t)$.

W szczególności, jeżeli $B \in \mathcal{L}_p$, $C \in \mathcal{L}_q$, to $\mathcal{L}^{p+q}(B \times C) = \mathcal{L}^p(B) \cdot \mathcal{L}^q(C)$. (por. Propozycja 12.1.37).

Oczywiście (d) wynika z (c).

Zauważmy, że zbiór $\text{pr}_{\mathbb{R}^p}(A)$ może nie być mierzalny (np. $A := B \times C$, gdzie B nie jest mierzalny, a C jest miary zero).

Dowód. Niech $\mathcal{F}$ oznacza rodzinę wszystkich $A \in \mathcal{L}_{p+q}$, dla których (a), (b) i (c) zachodzą. Zauważmy od razu, że $\emptyset \in \mathcal{F}$. Udowodnimy kolejno, że:

1⁰: Dla dowolnych kostek $P \subset \mathbb{R}^p$, $Q \subset \mathbb{R}^q$ oraz dla dowolnych zbiorów $\text{int } P \subset B \subset P$, $\text{int } Q \subset C \subset Q$ mamy $A := B \times C \in \mathcal{F}$. Ponadto $Z(B \times C) = \emptyset$.

2⁰: Jeżeli $(A_j)_{j=1}^\infty \subset \mathcal{F}$ i $A_j \cap A_k = \emptyset$ dla $j \neq k$, to $A := \bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{F}$. Ponadto, $Z(A) \subset \bigcup_{j=1}^\infty Z(A_j)$.

3⁰: Jeżeli $(A_j)_{j=1}^\infty \subset \mathcal{F}$ i $A_j \subset A_{j+1}$, $j \geq 1$, to $A := \bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{F}$. Ponadto, $Z(A) \subset \bigcup_{j=1}^\infty Z(A_j)$.

4⁰: $\text{top } \mathbb{R}^{p+q} \subset \mathcal{F}$ oraz $Z(\Omega) = \emptyset$ dla dowolnego zbioru otwartego Ω .

5⁰: Wszystkie zbiory typu $\mathcal{F}_\sigma$ należą do $\mathcal{F}$ oraz $Z(A) = \emptyset$ dla dowolnego zbioru typu $\mathcal{F}_\sigma$.

6⁰: Jeżeli $(A_j)_{j=1}^\infty \subset \mathcal{F}$ i $A_j \supset A_{j+1}$, $j \geq 1$, oraz A_1 jest ograniczony, to $A := \bigcap_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{F}$. Ponadto,

$$Z(A) \subset \bigcup_{j=1}^\infty Z(A_j).$$

7⁰: Wszystkie zbiory miary zero należą do $\mathcal{F}$.

Przypomnijmy (Propozycja 12.1.29), że każdy zbiór mierzalny $A \in \mathcal{L}_{p+q}$ jest postaci $C \cup Z$, gdzie C jest typu $\mathcal{F}_\sigma$, zaś Z jest miary zero i $C \cap Z = \emptyset$ ⁽⁵⁶⁾. Tak więc $2^0 + 5^0 + 7^0 \implies \mathcal{F} = \mathcal{L}_{p+q}$, co zakończy dowód. Przechodzimy do dowodów poszczególnych punktów 1⁰ — 7⁰.

1⁰: Oczywiście $A(t) = C$ dla $t \in B$ i $A(t) = \emptyset$ dla $t \notin B$, a więc (a) zachodzi ($Z(A) = \emptyset$). Ponadto, $\Phi_A(t) = \mathcal{L}^q(A(t)) = \mathcal{L}^q(C) = |Q|$ dla $t \in B$ i $\Phi_A(t) = 0$ dla $t \notin B$. W szczególności, odwzorowanie Φ_A jest mierzalne i $\mathcal{L}^{p+q}(A) = |P \times Q| = |P| \cdot |Q| = \mathcal{L}^p(B) \cdot \mathcal{L}^q(C) = \int_{\mathbb{R}^p} \Phi_A d\mathcal{L}^p$.

2⁰: Zauważmy, że $A(t) = \bigcup_{j=1}^\infty A_j(t)$, $t \in \mathbb{R}^p$. Wynika stąd, że (a) zachodzi przy $Z(A) := \bigcup_{j=1}^\infty Z(A_j)$.

Ponadto, wobec rozłączności zbiorów A_j , $j \geq 1$, mamy $\Phi_A = \sum_{j=1}^\infty \Phi_{A_j}$ na $\mathbb{R}^p \setminus Z(A)$. Wynika stąd (b)

⁽⁵³⁾ ĆWICZENIE: Podać przykład zbioru ograniczonego $A \subset \mathbb{R}^n$ takiego, że $\mathcal{L}^n(\partial A) > 0$.

⁽⁵⁴⁾ Bonaventura Cavalieri (1598–1647).

⁽⁵⁵⁾ Uwaga: W tym wzorze $\mathcal{L}^q$ oznacza zewnętrzną miarę Lebesgue'a — oczywiście jest to istotne jedynie na zbiorze $Z(A)$.

⁽⁵⁶⁾ Formalnie, z Propozycji 12.1.29 wnioskujemy, że dowolny zbiór $A \in \mathcal{L}_{p+q}$ jest postaci $C \cup Z'$, gdzie C jest typu $\mathcal{F}_\sigma$, zaś Z' jest miary zero. Kładziemy teraz $Z := Z' \setminus C$.

oraz, że

$$\int_{\mathbb{R}^p} \Phi_A d\mathcal{L}^p = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^p} \Phi_{A_j} d\mathcal{L}^p = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^{p+q}(A_j) = \mathcal{L}^{p+q}(A)$$

(na podstawie twierdzenia o monotonicznym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki).

3⁰: Mamy $A_j(t) \nearrow A(t)$, $t \in \mathbb{R}^p$, a więc (a) zachodzi przy $Z(A) := \bigcup_{j=1}^{\infty} Z(A_j)$. Ponadto, $\Phi_{A_j} \nearrow \Phi_A$ na $\mathbb{R}^p \setminus Z(A)$. Wynika stąd, że (b) zachodzi oraz, że

$$\int_{\mathbb{R}^p} \Phi_A d\mathcal{L}^p = \lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^p} \Phi_{A_j} d\mathcal{L}^p = \lim_{j \rightarrow +\infty} \mathcal{L}^{p+q}(A_j) = \mathcal{L}^{p+q}(A)$$

(na podstawie Twierdzenia 12.1.44).

4⁰: Każdy zbiór otwarty jest sumą co najwyżej przeliczalnej rodziny parami rozłącznych „kostek” takich jak w 1⁰ (por. Obserwacja 12.1.4) i możemy skorzystać z 2⁰.

5⁰: Wobec 3⁰ wystarczy sprawdzić, że każdy zbiór domknięty należy do $\mathcal{F}$. Ponownie korzystając z 3⁰, widzimy, że można się ograniczyć do zbiorów domkniętych i ograniczonych. Niech A będzie takim zbiorem, niech Q będzie otwartą kostką ograniczoną taką, że $A \subset Q$ i niech $\Omega := Q \setminus A$. Mamy $A(t) = Q(t) \setminus \Omega(t)$, $t \in \mathbb{R}^p$, a więc, na podstawie 1⁰ i 4⁰, warunek (a) zachodzi ($Z(A) := \emptyset$). Ponadto, $\Phi_A = \Phi_Q - \Phi_\Omega$ na $\mathbb{R}^p$, więc (b) również jest spełnione. Na koniec $\int_{\mathbb{R}^p} \Phi_A d\mathcal{L}^p = \int_{\mathbb{R}^p} \Phi_Q d\mathcal{L}^p - \int_{\mathbb{R}^p} \Phi_\Omega d\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^{p+q}(Q) - \mathcal{L}^{p+q}(\Omega) = \mathcal{L}^{p+q}(A)$.

6⁰: Mamy $A_j(t) \searrow A(t)$, $t \in \mathbb{R}^p$, a więc (a) zachodzi przy $Z(A) := \bigcup_{j=1}^{\infty} Z(A_j)$. Ponadto, $\Phi_{A_j} \searrow \Phi_A$ na $\mathbb{R}^p \setminus Z(A)$. Wynika stąd, że (b) zachodzi oraz, że

$$\int_{\mathbb{R}^p} \Phi_A d\mathcal{L}^p = \lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^p} \Phi_{A_j} d\mathcal{L}^p = \lim_{j \rightarrow +\infty} \mathcal{L}^{p+q}(A_j) = \mathcal{L}^{p+q}(A).$$

7⁰: Wobec 3⁰ wystarczy rozważyć ograniczone zbiory miary zero. Niech A będzie takim zbiorem. Trzeba pokazać, że $\Phi_A = 0$ $\mathcal{L}^p$ -prawie wszędzie. Ustalmy kostkę $P \subset \mathbb{R}^{p+q}$ taką, że $A \subset P$. Na podstawie definicji miary Lebesgue’a, dla dowolnego $j \in \mathbb{N}$ istnieje zbiór $A_j \subset P$ typu $\mathcal{F}_\sigma$ taki, że $A \subset A_j$, $\mathcal{L}^{p+q}(A_j) \leq \frac{1}{j}$ (57) oraz $A_{j+1} \subset A_j$ (58), $j \geq 1$. Niech $A_0 := \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$. Oczywiście $A \subset A_0$ oraz A_0 jest miary zero. Na podstawie 6⁰ wnioskujemy, że $A_0 \in \mathcal{F}$ ($Z(A_0) = \emptyset$). W takim razie $0 = \mathcal{L}^{p+q}(A_0) = \int_{\mathbb{R}^p} \Phi_{A_0} d\mathcal{L}^p$. Wynika stąd, że $\Phi_{A_0} = 0$ $\mathcal{L}^p$ -prawie wszędzie. Ponieważ $\Phi_A \leq \Phi_{A_0}$, wnioskujemy stąd, że $\Phi_A = 0$ $\mathcal{L}^p$ -prawie wszędzie. $\square$

Twierdzenie 12.3.2 (Twierdzenie Tonellego (59)). *Niech $A \in \mathcal{L}_{p+q}$. Wtedy dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{M}^+(A, \mathcal{L}_{p+q})$ mamy:*

(a) *dla $\mathcal{L}^p$ -prawie wszystkich $t \in \mathbb{R}^p$ odwzorowanie*

$$A(t) \ni u \mapsto f(t, u)$$

jest $\mathcal{L}_q$ -mieralne (60);

(b) *odwzorowanie $\mathbb{R}^p \ni t \mapsto \int_{A(t)} f(t, u) d\mathcal{L}^q(u)$ jest $\mathcal{L}_p$ -mieralne (61),*

(c) $\int_A f d\mathcal{L}^{p+q} = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{A(t)} f(t, u) d\mathcal{L}^q(u) \right) d\mathcal{L}^p(t)$.

(57) $A_j = P \cap$ stosowna suma kostek z definicji.

(58) Wystarczy zastąpić A_{j+1} przez $A_{j+1} \cap A_j$.

(59) Leonida Tonelli (1885–1946).

(60) Oczywiście każde odwzorowanie określone na zbiorze pustym jest mieralne.

(61) Odwzorowanie to jest określone $\mathcal{L}^p$ -prawie wszędzie i oczywiście $\int_{\emptyset} \dots = 0$.

(d) Jeżeli $B := \text{pr}_{\mathbb{R}^p}(A) \in \mathcal{L}_p$, to

$$\int_A f d\mathcal{L}^{p+q} = \int_B \left(\int_{A(t)} f(t, u) d\mathcal{L}^q(u) \right) d\mathcal{L}^p(t).$$

Dowód. Jeżeli f jest funkcją charakterystyczną zbioru mierzalnego, twierdzenie sprowadza się do Zasady Cavalieriego. Stąd łatwo widać, że twierdzenie jest prawdziwe dla $f \in \mathcal{M}_0^+(A, \mathcal{L}_{p+q})$. Teraz wystarczy już tylko zastosować twierdzenie o monotonicznym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki. Istotnie, jeżeli $\mathcal{M}_0^+(A, \mathcal{L}_{p+q}) \ni f_n \nearrow f$ i odwzorowanie

$$A(t) \ni u \mapsto f_n(t, u)$$

jest mierzalne dla $t \in \mathbb{R}^p \setminus Z_n$, gdzie Z_n jest miary zero, $n \geq 1$, to

$$A(t) \ni u \mapsto f(t, u)$$

jest mierzalne dla $t \in \mathbb{R}^p \setminus Z$, gdzie $Z := \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$. Ponadto, jeżeli

$$\mathbb{R}^p \ni t \mapsto \int_{A(t)} f_n(t, u) d\mathcal{L}^q(u)$$

jest mierzalne dla $n \geq 1$, to (na podstawie twierdzenia o monotonicznym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki) odwzorowanie

$$\mathbb{R}^p \ni t \mapsto \int_{A(t)} f(t, u) d\mathcal{L}^q(u)$$

jest mierzalne. Wzór otrzymujemy stosując obustronnie twierdzenie o monotonicznym przechodzeniu do granicy. $\square$

Twierdzenie 12.3.3 (Twierdzenie Fubiniego ⁽⁶²⁾). Niech $A \in \mathcal{L}_{p+q}$. Wtedy dla dowolnej funkcji $f \in L^1(A, \mathbb{C}, \mathcal{L}^{p+q})$ mamy:

(a) dla $\mathcal{L}^p$ -prawie wszystkich $t \in \mathbb{R}^p$ odwzorowanie

$$A(t) \ni u \mapsto f(t, u)$$

jest klasy $L^1(A(t), \mathbb{C}, \mathcal{L}^q)$;

(b) odwzorowanie

$$\mathbb{R}^p \ni t \mapsto \int_{A(t)} f(t, u) d\mathcal{L}^q(u)$$

jest klasy $L^1(\mathbb{R}^p, \mathbb{C}, \mathcal{L}^p)$,

(c) $\int_A f d\mathcal{L}^{p+q} = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{A(t)} f(t, u) d\mathcal{L}^q(u) \right) d\mathcal{L}^p(t)$.

(d) Jeżeli $B := \text{pr}_{\mathbb{R}^p}(A) \in \mathcal{L}_p$, to

$$\int_A f d\mathcal{L}^{p+q} = \int_B \left(\int_{A(t)} f(t, u) d\mathcal{L}^q(u) \right) d\mathcal{L}^p(t).$$

Dowód. Wystarczy rozważyć przypadek, gdy $f \in L^1(X, \mathbb{R})$. Najpierw stosujemy Twierdzenie Tonellego do $|f|$ i dostajemy (a) i (b). Następnie stosujemy Twierdzenie Tonellego oddzielnie do f_+ i f_- i dostajemy wzory

$$\int_A f_{\pm} d\mathcal{L}^{p+q} = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{A(t)} f_{\pm}(t, u) d\mathcal{L}^q(u) \right) d\mathcal{L}^p(t).$$

Odejmujemy je stronami i wobec rozkładu $f = f_+ - f_-$ dostajemy (c). $\square$

Uwaga 12.3.4. W poznanych powyżej twierdzeniach Cavalieriego, Tonellego i Fubiniego wyróżniona jest projekcja $\text{pr}_{\mathbb{R}^p} : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p$. Oczywiście, nic nie stoi na przeszkodzie, aby zastąpić ją projekcją na $\mathbb{R}^q$, czy też ogólnie — projekcją na pewne p osi spośród $(p+q)$ osi w $\mathbb{R}^{p+q}$. Szczegóły pozostawiamy jako ĆWICZENIE.

⁽⁶²⁾ Guido Fubini (1879–1943).

Propozycja 12.3.5. Niech $B \in \mathcal{L}_n$, $\alpha, \beta \in \mathcal{M}(B, \mathcal{L}_n)$, $\alpha(t) \leq \beta(t)$, $t \in B$. Zdefiniujemy $A := \{(t, u) \in B \times \mathbb{R} : \alpha(t) \leq u \leq \beta(t)\}$. Wtedy $A \in \mathcal{L}_{n+1}$ oraz dla $f \in \mathcal{M}^+(A, \mathcal{L}_{n+1})$ lub $f \in L^1(A, \mathcal{L}_{n+1})$ mamy:

$$\int_A f d\mathcal{L}^{n+1} = \int_B \left(\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(t, u) d\mathcal{L}^1(u) \right) d\mathcal{L}^n(t). \quad (63)$$

W szczególności,

$$\mathcal{L}^{n+1}(A) = \int_B (\beta - \alpha) d\mathcal{L}^n. \quad (64)$$

Dowód. Mierzalność zbioru A wynika z mierzalności funkcji

$$B \times \mathbb{R} \ni (t, u) \mapsto \alpha(t), \quad B \times \mathbb{R} \ni (t, u) \mapsto \beta(t), \quad B \times \mathbb{R} \ni (t, u) \mapsto u.$$

Wzór wynika z Twierdzenia Fubiniego bowiem dla $f \in L^1(A, \mathcal{L}_{n+1})$ mamy:

$$\int_A f d\mathcal{L}^{n+1} = \int_B \left(\int_{A(t)} f(t, u) d\mathcal{L}^1(u) \right) d\mathcal{L}^n(t) = \int_B \left(\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(t, u) d\mathcal{L}^1(u) \right) d\mathcal{L}^n(t). \quad \square$$

12.4. Twierdzenie o zmianie zmiennych w całce Lebesgue'a

Rozważmy następującą sytuację. Niech $U, V \subset \mathbb{R}^n$ będą zbiorami otwartymi i niech

$$\Phi : U \longrightarrow V$$

będzie odwzorowaniem bijektywnym spełniającym lokalnie warunek Lipschitza i takim, że $\Phi'(x)$ istnieje dla p.w. $x \in U$. Odnajdujemy, że w rzeczywistości to ostatnie założenie jest zawsze spełnione, bowiem prawdziwe jest następujące ważne twierdzenie.

Twierdzenie* 12.4.1 (Twierdzenie Rademachera⁽⁶⁵⁾). Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i niech $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ będzie odwzorowaniem spełniającym lokalnie warunek Lipschitza. Wtedy f jest $\mathcal{L}^n$ -prawie wszędzie różniczkowalne (w sensie Fréchet'a).

Obserwacja 12.4.2. (a) Dla dowolnego zbioru $A \in \mathcal{L}_n|_U$, mamy $\Phi(A) \in \mathcal{L}_n$ (Propozycja 12.1.38(c)).

(b) Jeżeli $\mathcal{L}^n(A) = 0$, to $\mathcal{L}^n(\Phi(A)) = 0$ (Propozycja 12.1.38(b)).

(c) Określone $\mathcal{L}^n$ -prawie wszędzie odwzorowanie $U \ni x \mapsto |\Phi'(x)|$ jest $\mathcal{L}_n$ -mieralne (Obserwacja 12.1.7(u, v)).

Definicja 12.4.3. Mówimy, że dla odwzorowania Φ zachodzi *twierdzenie o zmianie zmiennych w całce Lebesgue'a* jeżeli:

(1) $\mathcal{L}^n(\Phi(A)) = \int_A |\Phi'| d\mathcal{L}^n$, $A \in \mathcal{L}_n|_U$,

(2) dla dowolnego zbioru $A \in \mathcal{L}_n|_U$ i dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{M}^+(\Phi(A), \mathcal{L}_n)$ (odp. $f \in L^1(\Phi(A), \mathcal{L}^n)$) funkcja $(f \circ \Phi)|\Phi'|$ jest mierzalna na A (odp. jest klasy $L^1(A, \mathcal{L}^n)$) oraz zachodzi wzór

$$\int_{\Phi(A)} f d\mathcal{L}^n = \int_A (f \circ \Phi) |\Phi'| d\mathcal{L}^n.$$

Lemat 12.4.4. (1) $\implies$ (2).

Dowód. Standardowe rozumowanie redukuje dowód (2) do przypadku $f = \chi_B$, gdzie $B \in \mathcal{L}_n|_{\Phi(A)}$.

Wiemy, że $\Phi^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ dla dowolnego zbioru $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ (Obserwacja 12.1.7(b)). Korzystając z (1) dla zbioru $\Phi^{-1}(B)$, wnioskujemy, że (2) zachodzi dla $f := \chi_B$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)|_V$.

Wobec regularności miary Lebesgue'a, pozostaje sprawdzić przypadek, gdy $f = \chi_Z$, gdzie $Z \subset \Phi(A)$ jest miary zero. Mamy pokazać, że $(\chi_Z \circ \Phi)|\Phi'| = 0$ prawie wszędzie na $\Phi^{-1}(Z)$ ⁽⁶⁶⁾. Ponieważ $\mathcal{L}^n$ jest regularna, zatem istnieje zbiór miary zero $Z_0 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ taki, że $Z \subset Z_0$. Zastępując Z_0 poprzez $Z_0 \cap V$, możemy założyć, że $Z_0 \subset V$ (tu korzystamy z założenia, że Φ jest surjekcją na zbiór otwarty). Dla

⁽⁶³⁾ $\int_{\alpha}^{\beta} := \int_{[\alpha, \beta]}$.

⁽⁶⁴⁾ Porównaj z Propozycją 11.3.2.

⁽⁶⁵⁾ Hans Rademacher (1892–1969).

⁽⁶⁶⁾ Uwaga: Nie twierdzimy, że zbiór $\Phi^{-1}(Z)$ musi być mierzalny.

zbioru Z_0 sytuacja jest jasna: $0 = \mathcal{L}^n(Z_0) = \int_{\Phi(U)} \chi_{Z_0} = \int_U (\chi_{Z_0} \circ \Phi) |\Phi'| d\mathcal{L}^n = \int_{\Phi^{-1}(Z_0)} |\Phi'| d\mathcal{L}^n$ oraz $\Phi^{-1}(Z_0) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Stąd natychmiast dostajemy $|\Phi'| = 0$ prawie wszędzie na $\Phi^{-1}(Z_0) \supset \Phi^{-1}(Z)$. $\square$

Lemat 12.4.5. *Przypuśćmy, że dla dowolnego $a \in U$ istnieje otoczenie otwarte $U_a \subset U$ takie, że (1) zachodzi dla dowolnego $A \in \mathcal{L}_n|_{U_a}$. Wtedy (1) zachodzi w pełnej ogólności.*

Dowód. Na podstawie twierdzenia Lindelöfa znajdziemy ciąg punktów $(a_j)_{j=1}^\infty \subset U$ taki, że $U = \bigcup_{j=1}^\infty U_{a_j}$. Przyjmijmy dla uproszczenia $U_j := U_{a_j}$. Dla dowolnego $A \in \mathcal{L}_n$, $A \subset U$, niech $A_1 := A \cap U_1$, $A_j := A \cap (U_j \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_{j-1}))$, $j \geq 2$. Warunek (1) zachodzi dla każdego ze zbiorów A_j . Stąd

$$\mathcal{L}^n(\Phi(A)) = \mathcal{L}^n\left(\Phi\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right)\right) = \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{j=1}^\infty \Phi(A_j)\right) = \sum_{j=1}^\infty \mathcal{L}^n(\Phi(A_j)) = \sum_{j=1}^\infty \int_{A_j} |\Phi'| d\mathcal{L}^n = \int_A |\Phi'| d\mathcal{L}^n. \quad \square$$

Lemat 12.4.6. *Jeżeli warunek (1) zachodzi dla kostek, to zachodzi w pełnej ogólności.*

Dowód. Przypomnijmy, że (1) zachodzi dla zbiorów miary zero. Zachodzi więc dla dowolnych zbiorów A takich, że $\text{int } P \subset A \subset P$ dla pewnej kostki $P \subset U$. W takim razie zachodzi dla dowolnego zbioru otwartego $\Omega \subset U$ (Obserwacja 12.1.4). Stąd dostajemy przypadek $A = (\text{int } P) \setminus \Omega$, gdzie $P \subset U$ jest kostką, a $\Omega \subset U$ jest otwarty. Kolejno dostajemy przypadek, gdy $A \subset \text{int } P$ jest zbiorem typu $\mathcal{F}_\sigma$. Teraz, korzystając z regularności miary Lebesgue'a dostajemy przypadek, gdy $A \subset \text{int } P$ jest dowolnym zbiorem mierzalnym. Pozostaje skorzystać z Lematu 12.4.5. $\square$

Wniosek 12.4.7. *Aby sprawdzić, że dla odwzorowania Φ zachodzi twierdzenie o zmianie zmiennych wystarczy udowodnić warunek (1) dla małych kostek.*

Wniosek 12.4.8. *Twierdzenie o zmianie zmiennych zachodzi zawsze dla $n = 1$.*

Twierdzenie 12.4.9 (I Twierdzenie o zmianie zmiennych w całce Lebesgue'a). *Jeżeli $\Phi : U \rightarrow V$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^1$, to dla Φ zachodzi twierdzenie o zmianie zmiennych.*

Dowód. Wiemy, że wystarczy sprawdzić (1) dla małych kostek.

Krok 1⁰: Jeżeli twierdzenie zachodzi dla dyfeomorfizmów $\Phi : U \rightarrow V$ i $\Psi : V \rightarrow W$, to zachodzi dla $\Psi \circ \Phi : U \rightarrow W$.

Istotnie, ponieważ $(\Psi \circ \Phi)' = (\Psi' \circ \Phi) \circ \Phi'$, zatem korzystając z (2) dla Φ i $f = |\Psi'|$, dostajemy

$$\mathcal{L}^n(\Psi(\Phi(A))) = \int_{\Phi(A)} |\Psi'| d\mathcal{L}^n = \int_A (|\Psi'| \circ \Phi) |\Phi'| d\mathcal{L}^n = \int_A |(\Psi \circ \Phi)'| d\mathcal{L}^n.$$

Krok 2⁰: Twierdzenie zachodzi dla $n = 1$.

Krok 3⁰: Jeżeli twierdzenie jest prawdziwe dla $n - 1$, to jest prawdziwe dla n i dyfeomorfizmów postaci

$$\Phi(x) = (\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x)) = (\Phi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \Phi_{n-1}(x_1, \dots, x_n), x_n), \quad x \in U.$$

Istotnie, ustalmy kostkę $P \subset U$, $P = Q \times R \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ i niech $x = (u, t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Dla $t \in R$ niech

$$U(t) \ni u \xrightarrow{\Phi_t} (\Phi_1(u, t), \dots, \Phi_{n-1}(u, t)) \in V(t).$$

Bez trudu widzimy, że $\Phi_t : U(t) \rightarrow V(t)$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^1$ oraz $|\Phi'_t|(u) = |\Phi'|_t(u, t)$. Teraz na podstawie tego, że (1) zachodzi dla $n - 1$ oraz na podstawie zasady Cavalieriego i twierdzenia Tonellego mamy:

$$\mathcal{L}^n(\Phi(P)) = \int_R \mathcal{L}^{n-1}(\Phi_t(Q)) d\mathcal{L}^1(t) = \int_R \left(\int_Q |\Phi'_t|(u) d\mathcal{L}^{n-1}(u) \right) d\mathcal{L}^1(t) = \int_P |\Phi'| d\mathcal{L}^n.$$

Krok 4⁰: Jeżeli twierdzenie jest prawdziwe dla $n - 1$, to jest prawdziwe dla n i dyfeomorfizmów postaci

$$\Phi(x) = (\Phi_1(x), \dots, \Phi_{j-1}(x), x_k, \Phi_{j+1}(x), \dots, \Phi_n(x)), \quad x \in U,$$

gdzie $j, k \in \{1, \dots, n\}$. Dyfeomorfizmy tej postaci nazywamy *przywiedlnymi*.

Krok 5⁰ (i ostatni). Na podstawie poprzednich części dowodu widać, że wystarczy jeszcze pokazać, że każdy dyfeomorfizm jest lokalnie złożeniem (co najwyżej trzech) dyfeomorfizmów przywiedlnych.

Istotnie, ustalmy dyfeomorfizm klasy $\mathcal{C}^1$ $\Phi : U \rightarrow V$ i $a \in U$. Zastępując Φ przez $\Phi \circ P$, gdzie P jest stosownie wybraną permutacją zmiennych ⁽⁶⁷⁾, możemy założyć, że $\frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n}(a) \neq 0$. Zmniejszając U (i V) możemy założyć, że $\frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n}(x) \neq 0$, $x \in U$. Niech $x = (u, t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Rozważmy odwzorowanie:

$$U \times \mathbb{R} \ni (u, t, v) \xrightarrow{f} \Phi_n(u, t) - v \in \mathbb{R}.$$

Oczywiście $\frac{\partial f}{\partial t}(u, t, v) \neq 0$, $(u, t, v) \in U \times \mathbb{R}$ oraz $f(u_0, t_0, v_0) = 0$, gdzie $(u_0, t_0) = a$, $v_0 := \Phi_n(a)$. Na podstawie twierdzenia o odwzorowaniu uwikłanym istnieje otoczenie otwarte Ω punktu (u_0, t_0, v_0) i odwzorowanie $\varphi : U_1 \rightarrow U_2$ klasy $\mathcal{C}^1$ takie, że $\varphi(u_0, v_0) = t_0$ i równość $f(u, t, v) = 0$ jest dla $(u, t, v) \in \Omega$ równoważna temu, że $t = \varphi(u, v)$. Zdefiniujmy:

$$\begin{aligned} \Psi(u, v) &:= (\Phi_1(u, \varphi(u, v)), \dots, \Phi_{n-1}(u, \varphi(u, v)), v), \quad (u, v) \in \text{otoczenie punktu } (u_0, v_0), \\ \Theta(u, t) &:= (u, \Phi_n(u, t)), \quad (u, t) \in \text{otoczenie punktu } a. \end{aligned}$$

Oczywiście Ψ i Θ są klasy $\mathcal{C}^1$ oraz $\Theta(a) = (u_0, v_0)$. W takim razie złożenie $\Psi \circ \Theta$ ma sens w pewnym otoczeniu punktu a . Wystarczy pokazać, $\Psi \circ \Theta = \Phi$ w małym otoczeniu a ⁽⁶⁸⁾. Równość ta wynika z faktu, że wobec definicji φ , mamy $\varphi(u, \Phi_n(u, t)) = t$ dla (u, t) w małym otoczeniu a . $\square$

Wniosek 12.4.10 (Twierdzenie o zmianie zmiennych w całce Riemanna — por. Twierdzenie 11.3.7). *Jeżeli $\Phi : U \rightarrow V$ będzie dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^1$, to dla dowolnego zbioru regularnego $A \subset\subset U$ i dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{R}(\Phi(A))$ ⁽⁶⁹⁾ funkcja $(f \circ \Phi) \cdot |\Phi'|$ jest całkowalna w sensie Riemanna na A oraz*

$$\int_{\Phi(A)} f = \int_A (f \circ \Phi) \cdot |\Phi'|$$

Dowód. Korzystamy z Twierdzeń 12.2.1 i 12.4.9: $N_A((f \circ \Phi)|\Phi'|) = \Phi^{-1}(N_{\Phi(A)}(f))$. $\square$

Twierdzenie 12.4.11 (II twierdzenie o zmianie zmiennych w całce Lebesgue'a). *Jeżeli $\Phi : U \rightarrow V$ jest odwzorowaniem bijektywnym klasy $\mathcal{C}^1$, to dla Φ zachodzi twierdzenie o zmianie zmiennych.*

Lemat 12.4.12. *Jeżeli $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, to $\mathcal{L}^n(f(S_{n-1})) = 0$, gdzie $S_{n-1} := \{x \in \Omega : \det f'(x) = 0\}$.*

Odnosimy, że jest to specjalny przypadek następującego Twierdzenia Sarda.

Twierdzenie* 12.4.13 (Twierdzenie Sarda ⁽⁷⁰⁾). *Niech $f : \Omega \rightarrow F$ będzie odwzorowaniem klasy $\mathcal{C}^k$ ($k \in \mathbb{N}$) zbioru otwartego $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ w przestrzeń unormowaną F . Zdefiniujmy*

$$S_r := \{x \in \Omega : \text{rank } f'(x) := \dim f'(x)(\mathbb{R}^n) \leq r\}.$$

Wtedy

$$\mathcal{H}^{r+(n-r)/k}(f(S_r)) = 0, \quad r = 0, \dots, n-1.$$

Dowód Lematu 12.4.12. Wystarczy pokazać, że $f(S_{n-1} \cap Q)$ jest miary zero dla dowolnej kostki $Q \subset\subset \Omega$ o wszystkich krawędziach równych ℓ . Niech

$$\|f(x') - f(x'')\| \leq L\|x' - x''\|, \quad x', x'' \in Q,$$

gdzie $L := \max\{\|f'(x)\| : x \in Q\}$ (norma operatorowa). Ustalmy $\varepsilon > 0$. Podzielmy kostkę Q na N^n równych kostek tak, że dla dowolnej kostki Q' z tego podziału mamy

$$\|f'(x') - f'(x'')\| \leq \varepsilon, \quad x', x'' \in Q'.$$

Ustalmy kostkę Q' taką, że $S_{n-1} \cap Q' \neq \emptyset$. Będziemy się starać oszacować miarę zbioru $f(Q')$. Ustalmy $x_0 \in S_{n-1} \cap Q'$ i niech W będzie $(n-1)$ -wymiarową podprzestrzenią wektorową $\mathbb{R}^n$ taką, że $f'(x_0)(\mathbb{R}^n) \subset$

⁽⁶⁷⁾ Zauważmy, że permutacje zmiennych są dyfeomorfizmami przywiedlnymi.

⁽⁶⁸⁾ Bo wtedy $\Psi'(u_0, v_0) \circ \Theta'(a) = \Phi'(a)$, skąd, na podstawie twierdzenia o lokalnym dyfeomorfizmie, Ψ i Θ muszą być dyfeomorfizmami w otoczeniu, odpowiednio, (u_0, v_0) i a — będą to poszukiwane dyfeomorfizmy przywiedlne dające rozkład Φ w otoczeniu a .

⁽⁶⁹⁾ Przypomnijmy, że wiemy już, że zbiór $\Phi(A)$ jest regularny.

⁽⁷⁰⁾ Arthur Sard (1909–1980).

W . Niech $W' := f(x_0) + W$; W' jest $(n-1)$ -wymiarową płaszczyzną afiniczną. Niech $x \in Q'$. Na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych mamy:

$$\begin{aligned}\|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\| &\leq \varepsilon \|x - x_0\| \leq \varepsilon \sqrt{n\ell}/N, \\ \|f(x) - f(x_0)\| &\leq L \|x - x_0\| \leq L\sqrt{n\ell}/N.\end{aligned}$$

Ponieważ $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \in W'$, zatem

$$\text{dist}(f(x), W') \leq \varepsilon \sqrt{n\ell}/N.$$

Oznacza to, że $f(Q')$ leży w walcu

$$\{y' + y'' : y', y'' \in \mathbb{R}^n, y' \in W', y'' \in W^\perp, \|y' - f(x_0)\| \leq L\sqrt{n\ell}/N, \|y''\| \leq \varepsilon \sqrt{n\ell}/N\}. \quad (71)$$

W takim razie, na podstawie zasady Cavalieriego, mamy

$$\mathcal{L}^n(f(Q')) \leq \mathcal{L}^{n-1}(\mathbb{B}_{n-1})(L\sqrt{n\ell}/N)^{n-1}(2\varepsilon\sqrt{n\ell}/N) =: C_0\varepsilon/N^n.$$

a stąd

$$\mathcal{L}^n(f(S_{n-1} \cap Q)) \leq C_0\varepsilon. \quad \square$$

Dowód Twierdzenia 12.4.11. Niech $S := \{x \in U : \det \Phi'(x) = 0\}$. Wobec Lematu 12.4.12 mamy $\mathcal{L}^n(\Phi(S)) = 0$. Na podstawie twierdzenia o lokalnym dyfeomorfizmie wiemy, że zbiór $V \setminus \Phi(S) = \Phi(U \setminus S)$ jest otwarty oraz, że $\Phi|_{U \setminus S} : U \setminus S \rightarrow V \setminus \Phi(S)$ jest dyfeomorfizmem. Teraz możemy skorzystać z I twierdzenia o zmianie zmiennych w całce Lebesgue'a:

$$\mathcal{L}^n(\Phi(A)) = \mathcal{L}^n(\Phi(A) \setminus \Phi(S)) = \mathcal{L}^n(\Phi(A \setminus S)) = \int_{A \setminus S} |\Phi'| d\mathcal{L}^n = \int_A |\Phi'| d\mathcal{L}^n. \quad \square$$

Twierdzenie 12.4.14 (III twierdzenie o zmianie zmiennych, zob. Obserwacja 14.4.3(e)). *Jeżeli $\Phi : U \rightarrow V$ jest homeomorfizmem spełniającym lokalnie warunek Lipschitza, to dla Φ zachodzi twierdzenie o zmianie zmiennych.*

12.5. Funkcje dane całką

Założmy, że Ω jest pewnym zbiorem, $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ — przestrzenią z miarą nieujemną ⁽⁷²⁾, zaś $f : \Omega \times X \rightarrow \mathbb{C}$ — funkcją taką, że

$$f(x, \cdot) \in L^1(X, \mu) \text{ dla dowolnego } x \in \Omega.$$

Definiujemy *funkcję daną całką*

$$\varphi(x) := \int_X f(x, t) d\mu(t), \quad x \in \Omega;$$

por. Twierdzenie 11.3.3. Interesuje nas, jak własności funkcji f (np. ciągłość, różniczkowalność) przenoszą się na funkcję φ .

Twierdzenie 12.5.1 (Twierdzenie o funkcjach danych całką ⁽⁷³⁾). (a) *Założmy dodatkowo, że Ω jest przestrzenią metryczną, $x_0 \in \Omega$ oraz*

- $f(\cdot, t) \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C}; x_0)$ dla dowolnego $t \in X$,
- $|f(x, t)| \leq g_0(t)$, $(x, t) \in \Omega \times X$, gdzie $g_0 \in L^1(X, \mu)$ ⁽⁷⁴⁾.

Wtedy $\varphi \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C}; x_0)$. W szczególności, jeżeli

- $f(\cdot, t) \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C})$ dla dowolnego $t \in X$,
- $|f(x, t)| \leq g_0(t)$, $(x, t) \in \Omega \times X$, gdzie $g_0 \in L^1(X, \mu)$,

to $\varphi \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C})$.

⁽⁷¹⁾ Tu i dalej: $W^\perp := \{\xi \in \mathbb{R}^n : \forall \eta \in W : \langle \xi, \eta \rangle = 0\}$, gdzie $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jest standardowym iloczynem skalarnym w $\mathbb{R}^n$.

⁽⁷²⁾ Możemy myśleć o przypadku, gdy $X \in \mathcal{L}_n$, zaś μ jest miarą Lebesgue'a.

⁽⁷³⁾ Por. Twierdzenie 11.3.3.

⁽⁷⁴⁾ Odnajdujemy, że warunek ten jest spełniony np. gdy $\mu(X) < +\infty$, zaś f jest ograniczona.

12.6. Gęstość $\mathcal{C}_0(\Omega, \mathbb{C})$ w $L^p(\Omega, \mathbb{C}, \mathcal{L}^n)$

(b) Załóżmy dodatkowo, że Ω jest zbiorem otwartym w pewnej przestrzeni unormowanej E , $k \in \mathbb{N}$ i $\xi_1, \dots, \xi_k \in E$. Jeżeli

- $\frac{\partial^k f(\cdot, t)}{\partial \xi_k \dots \partial \xi_1}(x)$ istnieje dla dowolnego $(x, t) \in \Omega \times X$,
- $|\frac{\partial^j f(\cdot, t)}{\partial \xi_j \dots \partial \xi_1}(x)| \leq g_j(t)$, $(x, t) \in \Omega \times X$, gdzie $g_j \in L^1(X, \mu)$, $j = 0, \dots, k$,

to dla dowolnego $x \in \Omega$, funkcja $X \ni t \mapsto \frac{\partial^k f(\cdot, t)}{\partial \xi_k \dots \partial \xi_1}(x)$ jest całkowalna, pochodna $\frac{\partial^k \varphi}{\partial \xi_k \dots \partial \xi_1}(x)$ istnieje oraz

$$\frac{\partial^k \varphi}{\partial \xi_k \dots \partial \xi_1}(x) = \int_X \frac{\partial^k f(\cdot, t)}{\partial \xi_k \dots \partial \xi_1}(x) d\mu(t).$$

Dowód. (a) Niech $x_s \rightarrow x_0$, $\psi_s := f(x_s, \cdot) - f(x_0, \cdot)$. Wtedy $\psi_s \rightarrow 0$ punktowo na X oraz $|\psi_s| \leq 2g_0$. Stąd, na podstawie twierdzenia Lebesgue'a o zmajorzowanym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki, dostajemy $\varphi(x_s) - \varphi(x_0) = \int_X \psi_s d\mu \rightarrow 0$.

(b) Zastosujemy indukcję ze względu na k . Dla $k = 1$ ustalmy $x_0 \in \Omega$. Mamy

$$\frac{\partial f(\cdot, t)}{\partial \xi_1}(x_0) = \lim_{\mathbb{N} \ni s \rightarrow +\infty} \frac{f(x_0 + \frac{1}{s}\xi_1, t) - f(x_0, t)}{\frac{1}{s}},$$

skąd, na podstawie Obserwacji 12.1.7(s), wnioskujemy, że funkcja $\psi_1^{x_0}$ jest mierzalna. Ponieważ $|\psi_1^{x_0}| \leq g_1$, funkcja $\psi_1^{x_0}$ jest również całkowalna. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(x_0 + h\xi_1) - \varphi(x_0)}{h} - \int_X \frac{\partial f(\cdot, t)}{\partial \xi_1}(x_0) d\mu(t) &= \int \left(\frac{f(x_0 + h\xi_1, t) - f(x_0, t)}{h} - \frac{\partial f(\cdot, t)}{\partial \xi_1}(x_0) \right) d\mu(t) \\ &=: \int_X F(h, t) d\mu(t), \quad 0 < |h| < r \ll 1. \end{aligned}$$

Na podstawie twierdzenia o wartości średniej mamy $|F(h, t)| \leq 2g_1(t)$. Połóżmy dodatkowo $F(0, t) := 0$. Teraz pozostaje skorzystać z (a) dla danych $(\Omega, X, f, g_0) := ((-r, r), X, F, 2g_1)$.

Aby wykonać krok indukcyjny $k-1 \rightsquigarrow k$ wystarczy zastosować powyższe rozumowanie do danych $(k, f, g_1, \dots, g_k) = (1, (x, t) \mapsto \psi_{k-1}^x(t) = \frac{\partial^{k-1} f(\cdot, t)}{\partial \xi_{k-1} \dots \partial \xi_1}(x), g_k)$. $\square$

Uwaga 12.5.2. Powyższe wyniki mogą być uogólnione na przypadek, gdy $f : \Omega \times X \rightarrow F$, gdzie F jest ośrodkową przestrzenią Banacha.

12.6. Gęstość $\mathcal{C}_0(\Omega, \mathbb{C})$ w $L^p(\Omega, \mathbb{C}, \mathcal{L}^n)$

Propozycja 12.6.1. Dla dowolnego zbioru otwartego $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ i dla dowolnego $1 \leq p < +\infty$ przestrzeń $\mathcal{C}_0(\Omega, \mathbb{C})$ jest gęsta w $L^p(\Omega, \mathbb{C}, \mathcal{L}^n)$ w normie L^p ⁽⁷⁵⁾.

Dowód. Możemy się ograniczyć do funkcji rzeczywistych. Oczywiście

$$\mathcal{C}_0(\Omega) \subset L^p(\Omega, \mathcal{L}^n).$$

Ustalmy, $f \in L^p(\Omega, \mathcal{L}^n)$. Możemy założyć, że $f \geq 0$ ⁽⁷⁶⁾. Niech $\Omega_k := \Omega \cap \mathbb{B}(k)$, $f_k := f \cdot \chi_{\Omega_k}$, $k \geq 1$. Zauważmy, że $|f_k - f|^p \rightarrow 0$ oraz $|f_k - f|^p \leq f^p$, $k \geq 1$, zatem, na podstawie Twierdzenia Lebesgue'a, $f_k \rightarrow f$ w L^p . Możemy więc założyć, że Ω jest ograniczony. Niech $\mathcal{M}_0^+(\Omega) \ni f_k \nearrow f$. Tak jak powyżej $f_k \rightarrow f$ w L^p , więc możemy przyjąć, że f jest funkcją prostą i dalej, że $f = \chi_A$, gdzie $A \in \mathcal{L}_n$, $A \subset \Omega$. Weźmy $\varepsilon > 0$. Wiemy, że istnieją: zbiór domknięty $K \subset A$ oraz zbiór otwarty $U \supset A$ takie, że $\mathcal{L}^n(U \setminus K) \leq \varepsilon$. Możemy założyć, że $U \subset \Omega$. Ograniczoność Ω gwarantuje nam zwartość K . Na podstawie Własności 9.1.9 istnieje funkcja $g \in \mathcal{C}_0(U)$ taka, że $0 \leq g \leq 1$ i $g = 1$ na K . Teraz mamy: $\|g - f\|_{L^p}^p = \int_{U \setminus K} |g - f|^p d\mathcal{L}^n \leq \varepsilon$. $\square$

⁽⁷⁵⁾ Twierdzenie nie jest prawdziwe dla $p = +\infty$, bowiem zbieżność ciągu funkcji z $\mathcal{C}_0(\Omega)$ w sensie normy L^∞ , to zbieżność jednostajna, a więc granica musi być co najmniej funkcją ciągłą.

⁽⁷⁶⁾ Jeżeli $f \in L^p$, to $f_\pm \in L^p$.

12.7. Splot

Dla $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}, \mathcal{L}_n)$ zdefiniujemy

$$\mathcal{D}_{f*g} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)| d\mathcal{L}^n(y) < +\infty \right\},$$

$$(f*g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) d\mathcal{L}^n(y), \quad x \in \mathcal{D}(f*g).$$

Funkcję $f*g$ nazywamy *splotem* funkcji f i g .

Obserwacja 12.7.1. (a) Na podstawie twierdzenia o zmianie zmiennych dostajemy: $\mathcal{D}_{f*g} = \mathcal{D}_{g*f}$ oraz $f*g = g*f$.

(b) $\mathcal{D}_{f_1*g} \cap \mathcal{D}_{f_2*g} \subset \mathcal{D}_{(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)*g}$ oraz

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)*g = \alpha_1(f_1*g) + \alpha_2(f_2*g) \quad \text{na} \quad \mathcal{D}_{f_1*g} \cap \mathcal{D}_{f_2*g}.$$

Oznacza to, że splot jest operacją dwuliniową symetryczną.

Propozycja 12.7.2. Niech $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p, q \leq +\infty$. Załóżmy, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$ i niech $1 \leq r \leq +\infty$ będzie liczbą taką, że

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1.$$

Wtedy splot $f*g$ jest określony $\mathcal{L}^n$ -prawie wszędzie na $\mathbb{R}^n$, $f*g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ oraz zachodzi następująca nierówność Younga ⁽⁷⁷⁾:

$$\|f*g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

W szczególności, splot

$$L^p(\mathbb{R}^n) \times L^q(\mathbb{R}^n) \ni (f, g) \mapsto f*g \in L^r(\mathbb{R}^n)$$

jest operacją dwuliniową, symetryczną i ciągłą.

Ponadto, jeżeli $r = +\infty$, tzn. jeżeli p i q są sprzężone, to splot $f*g$ jest określony wszędzie i jest funkcją ciągłą.

Dowód. Zauważmy, że $p \leq r$, $q \leq r$.

Rozważmy najpierw przypadek $r = +\infty$.

Wtedy, wobec nierówności Höldera oraz twierdzenia o zmianie zmiennych, dostajemy:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)| d\mathcal{L}^n(y) \leq \|f(x-\cdot)\|_{L^p} \|g\|_{L^q} = \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Oznacza to, że $\mathcal{D}_{f*g} = \mathbb{R}^n$ oraz, że $\sup_{\mathbb{R}^n} |f*g| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$ ⁽⁷⁸⁾.

Możemy założyć, że $p < +\infty$. Jeżeli $(f_\nu)_{\nu=1}^\infty \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ i $f_\nu \xrightarrow{L^p} f_0$, to

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |f_\nu * g - f_0 * g| \leq \|f_\nu - f_0\|_{L^p} \|g\|_{L^q},$$

a zatem $f_\nu * g \rightarrow f_0 * g$ jednostajnie na $\mathbb{R}^n$. W szczególności, wobec Propozycji 12.6.1, aby pokazać, że $f*g$ jest funkcją ciągłą, możemy założyć, że $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

Ustalmy $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i $\varepsilon > 0$. Ponieważ f jest funkcją jednostajnie ciągłą na $\mathbb{R}^n$, istnieje $\delta \in (0, 1)$ taka, że $|f(z') - f(z'')| \leq \varepsilon$ o ile $\|z' - z''\| \leq \delta$. Niech

$$K := -(\text{supp } f) + \overline{\mathbb{B}}(x_0, 1) = \{y \in \mathbb{R}^n : \exists_{x \in \overline{\mathbb{B}}(x_0, 1)} : x - y \in \text{supp } f\}.$$

Teraz, dla $x \in \mathbb{B}(x_0, \delta)$, mamy:

$$\begin{aligned} |f*g(x) - f*g(x_0)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x_0-y)| |g(y)| d\mathcal{L}^n(y) \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x_0-y)|^p d\mathcal{L}^n(y) \right)^{1/p} \|g\|_{L^q} \\ &= \left(\int_K |f(x-y) - f(x_0-y)|^p d\mathcal{L}^n(y) \right)^{1/p} \|g\|_{L^q} \leq \varepsilon (\mathcal{L}^n(K))^{1/p} \|g\|_{L^q}. \end{aligned}$$

⁽⁷⁷⁾ William Henry Young (1863–1942).

⁽⁷⁸⁾ Uwaga: nie piszemy $\|f*g\|_{L^\infty}$ ponieważ jeszcze nie wiemy, czy $f*g$ jest funkcją mierzalną.

Niech teraz, $r = 1$ (tzn. $p = q = 1$). Wtedy, na podstawie twierdzenia Tonellego (i twierdzenia o zmianie zmiennych), mamy

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)| d\mathcal{L}^n(y) \right) d\mathcal{L}^n(x) &= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)| d\mathcal{L}^{2n}(x, y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| d\mathcal{L}^n(x) \right) |g(y)| d\mathcal{L}^n(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| d\mathcal{L}^n(x) \right) |g(y)| d\mathcal{L}^n(y) = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Wynika stąd, że funkcja $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (x, y) \mapsto f(x-y)g(y)$ jest klasy $L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Stąd, na podstawie twierdzenia Fubinięgo, splot $f * g$ jest określony $\mathcal{L}^n$ -prawie wszędzie, jest klasy $L^1(\mathbb{R}^n)$ (w szczególności, jest funkcją mierzalną) i $\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$.

Niech $1 < r = p < +\infty$ (w ten sam sposób rozpatrujemy przypadek $1 < r = q < +\infty$).

Zauważmy, że $q = 1$. Niech $1 < s < +\infty$ będzie liczbą sprzężoną z p . Przystępujemy do szacowania:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)| d\mathcal{L}^n(y) \right)^p d\mathcal{L}^n(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| |g(y)|^{1/p} |g(y)|^{1-1/p} d\mathcal{L}^n(y) \right)^p d\mathcal{L}^n(x) \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p |g(y)| d\mathcal{L}^n(y) \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|^{s(1-1/p)} d\mathcal{L}^n(y) \right)^{p/s} d\mathcal{L}^n(x) \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p |g(y)| d\mathcal{L}^n(y) \right) d\mathcal{L}^n(x) \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| d\mathcal{L}^n(y) \right)^{p-1} \\ &\stackrel{(2)}{=} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p d\mathcal{L}^n(x) \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| d\mathcal{L}^n(y) \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| d\mathcal{L}^n(y) \right)^{p-1} \\ &= (\|f\|_{L^p} \|g\|_{L^1})^p, \end{aligned}$$

gdzie (1) wynika z nierówności Höldera (dla p i s), zaś (2) wynika z twierdzenia Tonellego.

Na koniec, niech $1 < r < +\infty$, $p < r$ i $q < r$. Niech $1 < s < +\infty$ będzie liczbą sprzężoną z r . Zdefiniujmy

$$a := \frac{p}{s(1-p/r)}, \quad b := \frac{q}{s(1-q/r)}$$

oraz zauważmy, że są to również liczby sprzężone ⁽⁷⁹⁾. Ponadto:

$$\frac{r}{sa} = \frac{r}{p} - 1, \quad \frac{r}{sb} = \frac{r}{q} - 1.$$

Przystępujemy do szacowania:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)| d\mathcal{L}^n(y) \right)^r d\mathcal{L}^n(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^{p/r} |g(y)|^{q/r} |f(x-y)|^{1-p/r} |g(y)|^{1-q/r} d\mathcal{L}^n(y) \right)^r d\mathcal{L}^n(x) \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p |g(y)|^q d\mathcal{L}^n(y) \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^{s(1-p/r)} |g(y)|^{s(1-q/r)} d\mathcal{L}^n(y) \right)^{r/s} d\mathcal{L}^n(x) \\ &\stackrel{(2)}{\leq} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p |g(y)|^q d\mathcal{L}^n(y) \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^{as(1-p/r)} d\mathcal{L}^n(y) \right)^{r/(as)} \times \\ &\quad \times \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|^{bs(1-q/r)} d\mathcal{L}^n(y) \right)^{r/(bs)} d\mathcal{L}^n(x) \end{aligned}$$

⁽⁷⁹⁾ Istotnie,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = s \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} \right) = s \left(1 - \frac{1}{r} \right) = 1.$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p |g(y)|^q d\mathcal{L}^n(y) \right) d\mathcal{L}^n(x) \right) \|f\|_{L^p}^{r-p} \|g\|_{L^q}^{r-q} \\
&\stackrel{(3)}{=} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p d\mathcal{L}^n(x) \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|^q d\mathcal{L}^n(y) \right) \|f\|_{L^p}^{r-p} \|g\|_{L^q}^{r-q} = (\|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q})^r.
\end{aligned}$$

gdzie (1) wynika z nierówności Höldera dla r i s , (2) — z nierówności Höldera dla a i b , zaś (3) wynika z twierdzenia Tonellego. $\square$

Wniosek 12.7.3. *Przypuśćmy, że $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $h \in L^r(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p, q, r \leq +\infty$. Załóżmy, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 2$ i niech $1 \leq s \leq +\infty$ będzie liczbą taką, że $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 2$. Wtedy:*

- *sploty $f * (g * h)$ i $(f * g) * h$ są określone $\mathcal{L}^n$ -prawie wszędzie,*
- *$f * (g * h) = (f * g) * h$ (a więc możemy określić $f * g * h$),*
- *$f * g * h \in L^s(\mathbb{R}^n)$,*
- *$\|f * g * h\|_{L^s} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \|h\|_{L^r}$.*

Definicja 12.7.4. Wprowadzamy następującą konwencję dla funkcji mierzalnych $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ określonych na pewnym zbiorze X z miarą nieujemną $\mu : \mathfrak{M} \rightarrow [0, +\infty]$. Piszemy „ $\text{supp } f \subset A$ ”, gdzie $A \in \mathfrak{M}$, jeżeli $f = 0$ μ -p.w. na $X \setminus A$ ⁽⁸⁰⁾. Jeżeli X jest przestrzenią topologiczną i $\mathcal{B}(X) \subset \mathfrak{M}$, to zdanie „ $\text{supp } f$ jest zbiorem zwartym” oznacza, że istnieje zbiór zwarty $K \subset X$ taki, że $\text{supp } f \subset K$.

Propozycja 12.7.5. (a) *Niech f, g będą takie, jak w Propozycji 12.7.2. Załóżmy, że $\text{supp } f \subset K$ i $\text{supp } g \subset L$, gdzie $K, L \subset \mathbb{R}^n$ są zbiorami zwartymi. Wtedy*

$$\text{supp}(f * g) \subset K + L.$$

*W szczególności, $\text{supp}(f * g)$ jest również zbiorem zwartym.*

(b) *Jeżeli $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp } f \subset K \subset \subset \mathbb{R}^n$ i $g \in \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, to $f * g \in \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ oraz $D^\alpha(f * g) = f * (D^\alpha g)$ dla dowolnego wielowskaźnika α takiego, że $|\alpha| \leq k$ ($k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$).*

Dowód. (a) wynika bezpośrednio ze wzoru na splot.

Dla dowodu (b) zastosujemy Twierdzenie 12.5.1 do $\Omega := \mathbb{R}^n$, $X := K$ oraz do odwzorowania

$$\mathbb{R}^n \times K \ni (x, y) \xrightarrow{F} f(y)g(x-y).$$

Mamy $|D_x^\alpha F(x, y)| = |f(y)D^\alpha g(x-y)| \leq M_\alpha |f(y)|$, gdzie $M_\alpha := \max_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha g|$. Pozostaje zauważyć, że $M_\alpha |f| \in L^1(X, \mathbb{C}, \mathcal{L}^n)$. $\square$

12.8. Regularyzacja

Ustalmy funkcję $\Phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ taką, że:

- $\Phi \geq 0$,
- $\text{supp } \Phi \subset \overline{\mathbb{B}}_n$,
- $\Phi(x_1, \dots, x_n) = \Phi(|x_1|, \dots, |x_n|)$,
- $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi d\mathcal{L}^n = 1$.

Każdą taką funkcję nazywamy *funkcją regularyzującą w $\mathbb{R}^n$* . Dla przykładu, niech

$$\Psi(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}}, & \text{jeżeli } \|x\| < 1 \\ 0, & \text{jeżeli } \|x\| \geq 1 \end{cases}, \quad c := \int_{\mathbb{B}_n} \Psi d\mathcal{L}^n.$$

Wtedy $\Phi := \frac{1}{c}\Psi$ jest funkcją regularyzującą.

Położmy

$$\Phi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \Phi(x/\varepsilon), \quad \varepsilon > 0, x \in \mathbb{R}^n,$$

i zauważmy, że na podstawie twierdzenia o zmianie zmiennych dostajemy

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\varepsilon d\mathcal{L}^n = 1.$$

Dla $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ($1 \leq p \leq +\infty$) zdefiniujemy ε -regularyzację funkcji f jako

$$f_\varepsilon := f * \Phi_\varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

⁽⁸⁰⁾ Uwaga: Nie definiujemy w ten sposób zbioru $\text{supp } f$, ale mówimy jedynie, co to znaczy, że $\text{supp } f \subset A$.

Obserwacja 12.8.1. Wobec Propozycji 12.7.2 mamy:

- $f_\varepsilon \in L^p(\mathbb{R}^n)$,
- $\|f_\varepsilon\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}$.

Na podstawie twierdzenia o zmianie zmiennych dostajemy:

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{B}_n} f(x - \varepsilon y) \Phi(y) d\mathcal{L}^n(y), \quad \varepsilon > 0, x \in \mathbb{R}^n.$$

Twierdzenie 12.8.2. Niech $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ($1 \leq p \leq \infty$) i niech $\text{supp } f \subset K \subset \subset \mathbb{R}^n$ ⁽⁸¹⁾. Wtedy:

- (a) $f_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp } f_\varepsilon \subset K^{(\varepsilon)} := \bigcup_{x \in K} \overline{\mathbb{B}}(x, \varepsilon)$ ⁽⁸²⁾;
- (b) jeżeli $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, to $f_\varepsilon \rightarrow f$ jednostajnie na $\mathbb{R}^n$ przy $\varepsilon \rightarrow 0$; ⁽⁸³⁾
- (c) jeżeli $p < +\infty$, to $f_\varepsilon \xrightarrow{L^p} f$ przy $\varepsilon \rightarrow 0$;
- (d) jeżeli $f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$, to $D^\alpha(f_\varepsilon) = (D^\alpha f)_\varepsilon$ oraz $D^\alpha(f_\varepsilon) \rightarrow D^\alpha f$ jednostajnie na $\mathbb{R}^n$ przy $\varepsilon \rightarrow 0$ dla $|\alpha| \leq k$.

Dowód. (a) wynika z Propozycji 12.7.5.

(b) Funkcja f jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}^n$. Mamy więc

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L^\infty} \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{B}_n} |f(x - \varepsilon y) - f(x)| \Phi(y) d\mathcal{L}^n(y) \leq \omega_f(\varepsilon) \rightarrow 0, \quad \text{gdy } \varepsilon \rightarrow 0,$$

gdzie — przypomnijmy —

$$\omega_f(\varepsilon) := \sup\{|f(x') - f(x'')| : \|x' - x''\| \leq \varepsilon\}.$$

(c) Niech $\eta > 0$. Na podstawie Propozycji 12.6.1 istnieje $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ taka, że $\|g - f\|_{L^p} \leq \eta$. Na podstawie (b), mamy: $g_\varepsilon \xrightarrow{L^p} g$ gdy $\varepsilon \rightarrow 0$. Dalej:

$$\begin{aligned} \|f_\varepsilon - f\|_{L^p} &\leq \|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_{L^p} + \|g_\varepsilon - g\|_{L^p} + \|g - f\|_{L^p} \\ &\leq \|f - g\|_{L^p} + \|g_\varepsilon - g\|_{L^p} + \eta \leq 2\eta + \|g_\varepsilon - g\|_{L^p} \leq 3\eta, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \end{aligned}$$

(d) wynika z (b) i Propozycji 12.7.5(b). □

Jako natychmiastowy wniosek z Propozycji 12.6.1 i Twierdzenia 12.8.2 dostajemy następujący wynik.

Wniosek 12.8.3. Dla dowolnego zbioru otwartego $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ i dla $1 \leq p < +\infty$ przestrzeń $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{C})$ jest gęsta w $L^p(\Omega, \mathbb{C}, \mathcal{L}^n)$ w normie L^p .

12.9. Rozkład jedności

Wniosek 12.9.1. Dla dowolnego zbioru otwartego $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ i dla dowolnego kompaktu $K \subset \Omega$ istnieje funkcja $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ taka, że $0 \leq \varphi \leq 1$ i $\varphi = 1$ na K .

Dowód. Jeżeli $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$, to niech $4r := \text{dist}(K, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$. Dla $\Omega = \mathbb{R}^n$ ustalmy dowolne $r > 0$. Wystarczy wziąć

$$\varphi := \left(\chi_{K(2r)} \right)_r$$

i skorzystać z Twierdzenia 12.8.2. Istotnie, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \varphi \leq 1$, $\text{supp } \varphi \subset (\text{supp } \chi_{K(2r)})^{(r)} \subset K^{(3r)} \subset \Omega$ oraz (wprost z definicji) $\varphi = 1$ na K . □

Twierdzenie 12.9.2 (Rozkład jedności). Niech $(\Omega_t)_{t \in T}$ będzie dowolną rodziną zbiorów otwartych w $\mathbb{R}^n$, $\Omega := \bigcup_{t \in T} \Omega_t$. Wtedy istnieje rodzina funkcji

$$(\varphi_i)_{i \in I} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n, [0, 1]) \quad (84)$$

⁽⁸¹⁾ W szczególności, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

⁽⁸²⁾ Odnajdujemy, że $K^{(\varepsilon)}$ jest zwarty.

⁽⁸³⁾ W szczególności, wobec (a), $f_\varepsilon \xrightarrow{L^p} f$ gdy $\varepsilon \rightarrow 0$ (przy dowolnym p).

taka, że:

- istnieje odwzorowanie $\tau : I \longrightarrow T$ takie, że $\text{supp } \varphi_i \subset \Omega_{\tau(i)}$, $i \in I$, ⁽⁸⁵⁾
- rodzina $(\text{supp } \varphi_i)_{i \in I}$ jest lokalnie skończona na Ω ⁽⁸⁶⁾,
- $\sum_{i \in I} \varphi_i \equiv 1$ na Ω ⁽⁸⁷⁾.

Dowód. Krok 1⁰: Pokażemy, że

Dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset \Omega$ istnieje rodzina

$$(\psi_t)_{t \in T} \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n, [0, 1])$$

taka, że:

- $\text{supp } \psi_t \subset \Omega_t$, $t \in T$,
- $\psi_t \equiv 0$ z wyjątkiem skończonej liczby indeksów t ,
- $\sum_{t \in T} \psi_t = 1$ na K .

Istotnie, ponieważ K jest zwarty, zatem istnieje zbiór skończony $T_0 \subset T$ taki, że $K \subset \bigcup_{t \in T_0} \Omega_t$.

Zauważmy, że istnieją zbiory zwarte $K_t \subset \Omega_t$, $t \in T_0$, takie, że $K \subset \bigcup_{t \in T_0} K_t$ ⁽⁸⁸⁾. Na podstawie Wniosku

12.9.1, dla każdego $t \in T_0$ istnieje funkcja $\Theta_t \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_t, [0, 1])$ taka, że $\Theta_t = 1$ na K_t ⁽⁸⁹⁾. Niech $\Theta_0 := \sum_{t \in T_0} \Theta_t$ i niech $U := \{x \in \Omega : \Theta_0(x) > 0\}$. Wtedy $K \subset U$. Korzystamy jeszcze raz z Wniosku

12.9.1 i dostajemy funkcję $\Theta \in \mathcal{C}_0^\infty(U, [0, 1])$ taką, że $\Theta = 1$ na K . Teraz definiujemy:

$$\psi_t := \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } t \in T \setminus T_0 \\ \begin{cases} \Theta \frac{\Theta_t}{\Theta_0} & \text{na } U \\ 0 & \text{na } \mathbb{R}^n \setminus \text{supp } \Theta \end{cases}, & \text{jeżeli } t \in T_0 \end{cases}.$$

Widzimy, że $\psi_t \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_t, [0, 1])$, $t \in T$, $\psi_t \equiv 0$ dla $t \notin T_0$ i $\sum_{t \in T} \psi_t = 1$ na K .

Krok 2⁰: Ustalmy ciąg kompaktów $(L_j)_{j=1}^\infty$ taki, że $L_j \subset \text{int } L_{j+1} \subset \Omega$ i $\Omega = \bigcup_{j=1}^\infty L_j$ ⁽⁹⁰⁾. Niech

$$L_{-1} = L_0 := \emptyset.$$

Dla każdego $j \in \mathbb{N}$ rozważamy kompakt $K_j := L_j \setminus \text{int } L_{j-1}$ oraz jego pokrycie otwarte zbiorami $\Omega_{j,t} := (\text{int } L_{j+1} \setminus L_{j-2}) \cap \Omega_t$, $t \in T$. Na podstawie Kroku 1⁰, dla dowolnego $j \in \mathbb{N}$ istnieje podzbiór skończony $T_j \subset T$ oraz funkcje $\psi_{j,t} \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_{j,t}, [0, 1])$, $t \in T_j$, takie, że $\sum_{t \in T_j} \psi_{j,t} = 1$ na K_j . Ponie-

waż $\text{supp } \psi_{j,t} \cap L_{j-2} = \emptyset$, zatem rodzina $\{\text{supp } \psi_{j,t} : j \in \mathbb{N}, t \in T_j\}$ jest lokalnie skończona na Ω .

W szczególności, funkcja $\psi_0 := \sum_{j=1}^\infty \sum_{t \in T_j} \psi_{j,t}$ jest klasy $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Oczywiście $\psi_0 > 0$ na Ω . Teraz kładziemy

$$\varphi_{j,t} := \psi_{j,t} / \psi_0, \quad (j, t) \in I := \{(j, t) : j \in \mathbb{N}, t \in T_j\}, \quad \tau(j, t) := t. \quad \square$$

Twierdzenie 12.9.3 (Rozkład jedności). Niech $(\Omega_t)_{t \in T}$ będzie dowolną rodziną zbiorów otwartych w $\mathbb{R}^n$, $\Omega := \bigcup_{t \in T} \Omega_t$. Wtedy istnieje rodzina funkcji $(\varphi_t)_{t \in T} \subset \mathcal{C}^\infty(\Omega, [0, 1])$ ⁽⁹¹⁾ taka, że:

⁽⁸⁴⁾ Zwana rozkładem jedności dla pokrycia $(\Omega_t)_{t \in T}$.

⁽⁸⁵⁾ Odwzorowanie τ nazywamy odwzorowaniem wpisującym. W trakcie dowodu zobaczymy, że można wybrać $I \subset \mathbb{N} \times T$ i $\tau(j, t) = t$.

⁽⁸⁶⁾ Tzn. każdy punkt $x \in \Omega$ ma otoczenie otwarte $U \subset \Omega$ takie, że zbiór $\{i \in I : \text{supp } \varphi_i \cap U \neq \emptyset\}$ jest skończony.

⁽⁸⁷⁾ Wobec poprzedniej własności, dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^n$ istnieje jedynie skończona liczba $i \in I$ takich, że $\varphi_i(x) \neq 0$, więc $\sum_{i \in I} \varphi_i(x)$ sprowadza się do sumy skończonej.

⁽⁸⁸⁾ Niech $K_{t,\varepsilon} := \{x \in \Omega_t \cap \overline{\mathbb{B}}(1/\varepsilon) : \text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega_t) \geq \varepsilon\}$. Ponieważ $\bigcup_{t \in T_0} \bigcup_{\varepsilon > 0} \text{int } K_{t,\varepsilon} = \bigcup_{t \in T_0} \Omega_t \supset K$, zatem istnieje

$\varepsilon_0 > 0$ takie, że możemy przyjąć $K_t := K_{t,\varepsilon_0}$.

⁽⁸⁹⁾ Tu i dalej stosujemy oczywiste utożsamienie: $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dla dowolnego zbioru otwartego $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

⁽⁹⁰⁾ Niech $L_j := \{x \in \Omega \cap \overline{\mathbb{B}}(j) : \text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) \geq 1/j\}$. Oczywiście L_j jest zwarty oraz $L_j \subset \{x \in \Omega \cap \overline{\mathbb{B}}(j+1) : \text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) \geq 1/(j+1)\} \subset \text{int } L_{j+1}$. Ponadto, $\text{int } L_j \nearrow \Omega$.

⁽⁹¹⁾ Zwana również rozkładem jedności dla pokrycia $(\Omega_t)_{t \in T}$.

- $\text{supp } \varphi_t \subset \Omega_t$ ⁽⁹²⁾, $t \in T$,
- rodzina $(\text{supp } \varphi_t)_{t \in T}$ jest lokalnie skończona na Ω ,
- $\sum_{t \in T} \varphi_t \equiv 1$ na Ω .

Dowód. Na wstępie zauważmy, że możemy założyć, że pokrycie $(\Omega_t)_{t \in T}$ jest przeliczalne i lokalnie skończone na Ω .

Istotnie, na podstawie twierdzenia Lindelöfa, możemy wybrać podpokrycie przeliczalne $(\Omega_{t_\nu})_{\nu=1}^\infty$. Przypuśćmy, że znaleźliśmy rozkład jedności dla tego podpokrycia. Wtedy wystarczy położyć $\varphi_t \equiv 0$ dla $t \in T \setminus \{t_1, t_2, \dots\}$ i otrzymamy rozkład jedności dla wyjściowego pokrycia. Teraz musimy skorzystać z przeliczalnej parawartości zbioru Ω ⁽⁹³⁾, wobec której istnieje lokalnie skończone pokrycie $(W_\nu)_{\nu=1}^\infty$ zbioru Ω takie, że $W_\nu \subset \Omega_{t_\nu}$, $\nu = 1, 2, \dots$. Przypuśćmy, że znaleźliśmy rozkład jedności dla tego nowego pokrycia. Jest oczywiste, że jest to również rozkład jedności dla pokrycia $(\Omega_{t_\nu})_{\nu=1}^\infty$.

Żałujemy więc, że pokrycie $(\Omega_t)_{t \in T}$ jest lokalnie skończone na Ω . Zachowujemy oznaczenia z poprzedniego dowodu. Niech $\varphi_t := \sum_{j=1}^\infty \varphi_{j,t}$, $t \in T$. Oczywiście $\varphi_t \in C^\infty(\Omega)$ i $\sum_{t \in T} \varphi_t \equiv 1$ w Ω . Pozostaje zbadać, gdzie leży $\text{supp } \varphi_t$. Oczywiście,

$$\{x \in \Omega : \varphi_t(x) \neq 0\} \subset \bigcup_{j=1}^\infty \text{supp } \varphi_{j,t} =: F_t \subset \Omega_t.$$

Ponieważ rodzina $(\text{supp } \varphi_{j,t})_{j=1}^\infty$ jest lokalnie skończona na Ω zbiór F_t jest domknięty w Ω , a stąd $\text{supp } \varphi_t \subset F_t \subset \Omega_t$. $\square$

Wniosek 12.9.4. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym, niech $F \subset \Omega$ będzie zbiorem domkniętym w Ω i niech $U \subset \Omega$ będzie otwartym otoczeniem F . Wtedy istnieje funkcja $\varphi \in C^\infty(\Omega, [0, 1])$ taka, że $\text{supp } \varphi \subset U$ i $\varphi = 1$ w pewnym otoczeniu zbioru F .

Dowód. Stosujemy Twierdzenie 12.9.3 do pokrycia zbioru Ω złożonego z dwóch zbiorów $\Omega_1 := U$ i $\Omega_2 := \Omega \setminus F$. Niech φ_1, φ_2 będzie C^∞ rozkładem jedności przyporządkowanym temu pokryciu: $\varphi_j \in C^\infty(\Omega, [0, 1])$, $\text{supp } \varphi_j \subset \Omega_j$, $j = 1, 2$, $\varphi_1 + \varphi_2 \equiv 1$. Niech $\varphi := \varphi_1$. Wtedy oczywiście $\varphi \in C^\infty(\Omega, [0, 1])$, $\text{supp } \varphi \subset U$. Ponadto, $\varphi = 1$ na zbiorze $\Omega \setminus \text{supp } \varphi_2$, który jest otoczeniem F . $\square$

Wniosek 12.9.5. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i niech $F_0, F_1 \subset \Omega$ będą zbiorami domkniętymi w Ω i takimi, że $F_0 \cap F_1 = \emptyset$. Wtedy istnieje funkcja $\varphi \in C^\infty(\Omega, [0, 1])$ taka, że $\varphi = j$ w pewnym otoczeniu zbioru F_j , $j = 0, 1$.

Dowód. Stosujemy Wniosek 12.9.4 do zbioru domkniętego $F := F_1$ i jego otoczenia $U := \Omega \setminus F_0$. Niech $\varphi \in C^\infty(\Omega, [0, 1])$ będzie funkcją taką, że $\text{supp } \varphi \subset U$ i $\varphi = 1$ w pewnym otoczeniu zbioru F_1 . Wtedy $\varphi = 0$ na zbiorze $\Omega \setminus \text{supp } \varphi$, który jest otoczeniem F_0 . $\square$

12.10. Miara i całka Lebesgue'a na podrozmaitościach w $\mathbb{R}^n$

Niech M będzie d -wymiarową podrozmaitością w $\mathbb{R}^n$ klasy C^1 . Jeżeli $d = 0$, to przez miarę Lebesgue'a na M rozumiemy miarę liczącą. Kładziemy $\mathcal{L}_M := \mathcal{P}(M)$ i $\mathcal{L}^M :=$ miara licząca. W przypadku, gdy $d = n$ podrozmaitość M jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^n$. Wtedy przyjmujemy $\mathcal{L}_M := \mathcal{L}_n|_M$, $\mathcal{L}^M := \mathcal{L}^n|_{\mathcal{L}_M}$. Pozostaje przypadek $1 \leq d \leq n - 1$.

Zdefiniujemy $\mathcal{L}_M$ jako rodzinę wszystkich $A \subset M$ takich, że dla dowolnej lokalnej parametryzacji $p : P \rightarrow U$ mamy: $p^{-1}(A) \in \mathcal{L}_d$. Jest rzeczą widoczną, że $\mathcal{L}_M$ jest σ -algebrą oraz, że $\mathcal{B}(M) \subset \mathcal{L}_M$.

Propozycja 12.10.1. Niech $(p_i : P_i \rightarrow U_i)_{i \in I}$ będzie dowolnym, co najwyżej przeliczalnym, układem lokalnych parametryzacji takim, że $\bigcup_{i \in I} U_i = M$ ⁽⁹⁴⁾.

- Dla $A \subset M$ mamy: $A \in \mathcal{L}_M \iff \forall_{i \in I} : p_i^{-1}(A) \in \mathcal{L}_d$.
- Dla $f : M \rightarrow Y$, gdzie Y jest przestrzenią topologiczną, następujące warunki są równoważne:

⁽⁹²⁾ $\text{supp } \varphi_t$ jest relatywnie domkniętym podzbiorem Ω .

⁽⁹³⁾ Zob. np. [Eng 1968], Rozdział 5, § 2.

⁽⁹⁴⁾ Rodzina taka istnieje na podstawie twierdzenia Lindelöfa — zob. dowód Propozycji 12.10.4.

- (i) $f \in \mathcal{M}(M, Y, \mathcal{L}_M)$;
- (ii) $f \circ p \in \mathcal{M}(P, Y, \mathcal{L}_d)$ dla dowolnej lokalnej parametryzacji $p : P \rightarrow U$;
- (iii) $\forall_{i \in I} : f \circ p_i \in \mathcal{M}(P_i, Y, \mathcal{L}_d)$.

Dowód. (a) Niech $p : P \rightarrow U$ będzie dowolną parametryzacją i niech $\varphi_i := p^{-1} \circ p_i : p_i^{-1}(U \cap U_i) \rightarrow p^{-1}(U \cap U_i)$, $i \in I$. Wtedy $p^{-1}(A) = p^{-1}(A \cap \bigcup_{i \in I} U_i) = \bigcup_{i \in I} p^{-1}(A \cap U_i) = \bigcup_{i \in I} \varphi_i(p_i^{-1}(A) \cap p_i^{-1}(U)) \in \mathcal{L}_d$

na podstawie założeń i Propozycji 12.1.38(c).

(b) (i) $\Rightarrow$ (ii): $(f \circ p)^{-1}(\Omega) = p^{-1}(f^{-1}(\Omega))$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): oczywiste.

(iii) $\Rightarrow$ (i): $p_i^{-1}(f^{-1}(\Omega)) = (f \circ p_i)^{-1}(\Omega)$ i korzystamy z (a). $\square$

Dla odwzorowania różniczkowalnego $f = (f_1, \dots, f_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ gdzie Ω jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^d$, $d \leq n$, niech $|f'| : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$,

$$J_d f := \left(\sum_{I \in \Lambda_d^n} \left| \frac{\partial(f_{i_1}, \dots, f_{i_d})}{\partial(t_1, \dots, t_d)} \right|^2 \right)^{1/2} \quad (\text{por. § 7.4}),$$

gdzie

$$\frac{\partial(f_{i_1}, \dots, f_{i_d})}{\partial(t_1, \dots, t_d)} := \det \left[\frac{\partial f_{i_j}}{\partial t_k} \right]_{j,k=1, \dots, d},$$

$$\Lambda_d^n := \{I = (i_1, \dots, i_d) : 1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n\}.$$

Zauważmy, że dla $d = n$ symbol $J_d f$ pokrywa się z wprowadzonym poprzednio modulem wyznacznika macierzy Jacobiego $|f'|$.

Odnotujmy również, że $J_d f(t_0) > 0 \iff \text{rank } f'(t_0) = d$.

Obserwacja 12.10.2. Jeżeli $\varphi : G \rightarrow \Omega$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ są odwzorowaniami różniczkowalnymi, gdzie G i Ω są podzbiorami otwartymi w $\mathbb{R}^d$ i $\varphi(G) \subset \Omega$, to

$$J_d(f \circ \varphi) = ((J_d f) \circ \varphi) \cdot |\varphi'|.$$

Twierdzenie 12.10.3. Istnieje dokładnie jedna miara $\mathcal{L}^M : \mathcal{L}_M \rightarrow [0, +\infty]$ taka, że dla dowolnej lokalnej parametryzacji $p : P \rightarrow U$ mamy:

$$\mathcal{L}^M(A \cap U) = \int_{p^{-1}(A)} J_d p \, d\mathcal{L}^d, \quad A \in \mathcal{L}_M. \quad (*)$$

Ponadto miara ta ma poniższe własności.

(a) Jest zupełna, B-regularna (Definicja 12.1.27) oraz istnieje ciąg $(\Omega_j)_{j=1}^\infty$ zbiorów otwartych i relatywnie zwartych w M , dla którego $M = \bigcup_{j=1}^\infty \Omega_j$ i $\mathcal{L}^M(\Omega_j) < +\infty$, $j \geq 1$ ⁽⁹⁵⁾. W szczególności, dla miary $\mathcal{L}^M$ zachodzą warunki (R1), (R2), (R3), (R4) z Propozycji 12.1.29.

(b) Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{M}^+(M, \mathcal{L}_M)$ oraz dla dowolnej parametryzacji lokalnej $p : P \rightarrow U$ mamy:

$$\int_U f d\mathcal{L}^M = \int_P (f \circ p) J_d p \, d\mathcal{L}^d. \quad (**)$$

(c) Dla dowolnej funkcji $f \in L^1(M, \mathbb{C}, \mathcal{L}^M)$ oraz dla dowolnej parametryzacji lokalnej $p : P \rightarrow U$ mamy: $(f \circ p) J_d p \in L^1(P, \mathbb{C}, \mathcal{L}^d)$ oraz zachodzi (**).

Miara $\mathcal{L}^M$ nosi nazwę *miary Lebesgue'a na M*.

Dowód. Ustalmy przeliczalną rodzinę lokalnych parametryzacji $(p_j : P_j \rightarrow U_j)_{j=1}^\infty$ taką, że $\bigcup_{j=1}^\infty U_j = M$. Niech $B_1 := U_1$, $B_j := U_j \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_{j-1})$, $j \geq 2$. Oczywiście $B_j \in \mathcal{B}(M) \subset \mathcal{L}_M$, $j \in \mathbb{N}$, oraz

⁽⁹⁵⁾ Por. Propozycja 12.1.29.

$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = M$. Teraz dla zbioru $A \in \mathcal{L}_M$ kładziemy:

$$\mathcal{L}^M(A) := \sum_{j=1}^{\infty} \int_{p_j^{-1}(A \cap B_j)} J_d p_j \, d\mathcal{L}^d.$$

Udowodnimy, że jest to miara. Niech $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ będzie ciągiem parami rozłącznych zbiorów mierzalnych. Wtedy:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^M\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{p_j^{-1}((\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \cap B_j)} J_d p_j \, d\mathcal{L}^d = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{p_j^{-1}(A_k \cap B_j)} J_d p_j \, d\mathcal{L}^d \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{p_j^{-1}(A_k \cap B_j)} J_d p_j \, d\mathcal{L}^d = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^M(A_k). \end{aligned}$$

Teraz sprawdzimy wzór (*). Ustalmy lokalną parametryzację $p : P \rightarrow U$ i niech $\varphi_j := p^{-1} \circ p_j : p_j^{-1}(U \cap B_j) \rightarrow p^{-1}(U \cap B_j)$, $\psi_j := \varphi_j^{-1}$, $j \geq 1$. Wtedy dla $A \in \mathcal{L}_M$, $A \subset U$, korzystając z twierdzenia o zmianie zmiennych i z Obserwacji 12.10.2, mamy:

$$\begin{aligned} \int_{p^{-1}(A)} J_d p \, d\mathcal{L}^d &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{p^{-1}(A \cap B_j)} J_d p \, d\mathcal{L}^d = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\varphi_j(p_j^{-1}(A \cap B_j \cap U))} J_d(p_j \circ \psi_j) \, d\mathcal{L}^d \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{p_j^{-1}(A \cap B_j)} ((J_d(p_j \circ \psi_j)) \circ \varphi_j) \cdot |\varphi_j'| \, d\mathcal{L}^d = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{p_j^{-1}(A \cap B_j)} J_d p_j \, d\mathcal{L}^d = \mathcal{L}^M(A). \end{aligned}$$

Niech $\mu : \mathcal{L}_M \rightarrow [0, +\infty]$ będzie inną miarą spełniającą (*). Wtedy dla $A \in \mathcal{L}_M$ mamy:

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A \cap B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{p_j^{-1}(A \cap B_j)} J_d p_j \, d\mathcal{L}^d = \mathcal{L}^M(A),$$

a więc $\mathcal{L}^M$ jest jedyna.

(a) **Zupełność.** Niech $B \subset A \in \mathcal{L}_M$ i $\mathcal{L}^M(A) = 0$. Wtedy, na podstawie (*), dla dowolnej parametryzacji $p : P \rightarrow U$, zbiór $p^{-1}(A)$ jest miary zero w $\mathbb{R}^d$. Ponieważ $p^{-1}(B) \subset p^{-1}(A)$, a $\mathcal{L}^d$ jest zupełna, więc $p^{-1}(B) \in \mathcal{L}_d$. Oznacza to, że $B \in \mathcal{L}_M$.

Regularność. Niech $A \in \mathcal{L}_M$. Ponieważ $\mathcal{L}^d$ jest $\mathcal{B}$ -regularna (Propozycja 12.1.29), więc dla dowolnego j istnieje zbiór $C_j \subset P_j$ typu $\mathcal{G}_\delta$ oraz zbiór $Z_j \subset \mathbb{R}^d$ miary zero takie, że $p_j^{-1}(A \cap B_j) = C_j \setminus Z_j$. Niech $\hat{A} := \bigcup_{j=1}^{\infty} p_j(C_j)$. Oczywiście $A \subset \hat{A}$, $\hat{A}$ jest borelowski oraz

$$\mathcal{L}^M(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{p_j^{-1}(A \cap B_j)} J_d p_j \, d\mathcal{L}^d = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{C_j} J_d p_j \, d\mathcal{L}^d = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^M(p_j(C_j)) \geq \mathcal{L}^M(\hat{A}),$$

skąd wynika, że $\mathcal{L}^M(\hat{A}) = \mathcal{L}^M(A)$.

Przechodźmy do sprawdzenia ostatniego warunku. Połóżmy

$$P_{j,k} := \left\{ t \in P_j \cap \mathbb{B}(k) : \text{dist}(t, \mathbb{R}^d \setminus P_j) > \frac{1}{k} \right\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

i niech

$$\Omega_N := \bigcup_{j=1}^N p_j(P_{j,N}), \quad N \in \mathbb{N}.$$

Widać, że Ω_N jest otwarty i relatywnie zwarty w M , $\Omega_N \subset \Omega_{N+1}$, $\Omega_N \nearrow M$ oraz

$$\mathcal{L}^M(\Omega_N) \leq \sum_{j=1}^N \int_{P_{j,N}} J_d p_j \, d\mathcal{L}^d < +\infty.$$

(b) Dla $f = \chi_A$ wynik sprowadza się do (*). Dalej klasycznie: najpierw dla $\mathcal{M}_0^+(M, \mathcal{L}_M)$, a następnie przejście graniczne.

(c) Wystarczy rozważyć przypadek rzeczywisty. Całkowalność otrzymujemy z (b) zastosowanego do $|f|$. Wzór otrzymujemy z (b) zastosowanego do $f_{\pm}$. $\square$

Propozycja 12.10.4. *Niech M' będzie d' -wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$ w $\mathbb{R}^n$ taką, że $M' \subset M$. Jeżeli $d' < d \leq n$, to $\mathcal{L}^M(M') = 0$.*

Dowód. Przypadek $d' = 0$ jest oczywisty. Niech $1 \leq d' < d \leq n$. Na podstawie Lematu 10.14.20, dla dowolnego punktu $a \in M'$ istnieje lokalna parametryzacja $p_a : P_a \rightarrow U_a$, $a \in U_a$, taka, że $P_a = P'_a \times P''_a \subset \mathbb{R}^{d'} \times \mathbb{R}^{d-d'} = \mathbb{R}^d$ jest otwartą kostką i $p_a(P'_a \times \{0\}^{d-d'}) = M' \cap U_a$. W szczególności, $M' \cap U_a \in \mathcal{L}_M$. Na podstawie twierdzenia Lindelöfa z pokrycia $(U_a)_{a \in M}$ można wybrać pokrycie przeliczalne $(U_{a_j})_{j=1}^{\infty}$ rozmaitości M' . Dla uproszczenia, niech

$$(p_{a_j} : P_{a_j} \rightarrow U_{a_j}) = (p_j : P_j \rightarrow U_j).$$

Wtedy

$$\mathcal{L}^M(M') \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^M(M' \cap U_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{p_j^{-1}(M' \cap U_j)} J_d p_j \, d\mathcal{L}^d \leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{P'_j \times \{0\}^{d-d'}} J_d p_j \, d\mathcal{L}^d = 0. \quad \square$$

Twierdzenie Stokesa

13.1. Formy różniczkowe

Niech E i F będą rzeczywistymi przestrzeniami unormowanymi ⁽¹⁾. Niech $r \in \mathbb{N}$ i niech $\sigma \in S_r$. Z permutacją σ kojarzymy odwzorowanie

$$\sigma = \sigma_E : E^r \longrightarrow E^r$$

dane wzorem $\sigma(x_1, \dots, x_r) := (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(r)})$. Przypomnijmy sobie, że odwzorowania wieloliniowe symetryczne były charakteryzowane przy pomocy relacji:

$$L \in \text{Hom}_s^r(E, F) \iff \forall \sigma \in S_r : L \circ \sigma = L.$$

Obecnie, wprowadzimy pojęcie odwzorowania r -liniowego *skośnie symetrycznego* (*antysymetrycznego*): Mówimy, że odwzorowanie $L \in \text{Hom}^r(E, F)$ jest skośnie symetryczne ($L \in \text{Hom}_a^r(E, F)$), jeżeli

$$\forall \sigma \in S_r : L \circ \sigma = (\text{sgn } \sigma)L.$$

W naturalny sposób wprowadzamy przestrzeń $\mathcal{L}_a^r(E, F)$ odwzorowań r -liniowych antysymetrycznych ciągłych.

Odnotujmy, że $\text{Hom}_s^1(E, F) = \text{Hom}_a^1(E, F) = \text{Hom}^1(E, F)$ oraz

$$\mathcal{L}_s^1(E, F) = \mathcal{L}_a^1(E, F) = \mathcal{L}^1(E, F).$$

Oczywiście, $\text{Hom}_a^r(E, F)$ jest podprzestrzenią wektorową $\text{Hom}^r(E, F)$. Jest również widoczne, że $\mathcal{L}_a^r(E, F)$ jest podprzestrzenią domkniętą w $\mathcal{L}^r(E, F)$; w szczególności, jest ona Banacha o ile F jest Banacha.

Przyjmijmy dodatkowo:

$$\text{Hom}_a^0(E, F) = \mathcal{L}_a^0(E, F) = \text{Hom}^0(E, F) = \mathcal{L}^0(E, F) := F.$$

Następujący klasyczny wynik będzie stanowił podstawową metodę sprawdzania, czy $L \in \text{Hom}_a^r(E, F)$.

Propozycja 13.1.1. Dla $L \in \text{Hom}^r(E, F)$ ($r \geq 2$) następujące warunki są równoważne:

- (i) $L \in \text{Hom}_a^r(E, F)$;
- (ii) $\forall x=(x_1, \dots, x_r) \in E^r \quad \forall j \in \{1, \dots, r-1\} : (x_j = x_{j+1} \implies L(x) = 0)$;
- (iii) $\forall x=(x_1, \dots, x_r) \in E^r \quad \forall j, k \in \{1, \dots, r\}, j \neq k : (x_j = x_k \implies L(x) = 0)$.

Obserwacja 13.1.2. Rozważmy dokładniej przypadek, gdy $E \neq \{0\}$ jest przestrzenią skończenie wymiarową. Niech $n := \dim E$ i niech $(e_1, \dots, e_n)$ będzie ustaloną bazą E .

Dla $L \in \text{Hom}_a^r(E, F) = \mathcal{L}_a^r(E, F)$ ($r \geq 1$) i $x_j = \sum_{k=1}^n x_{j,k} e_k \in E$, $j = 1, \dots, r$, mamy:

$$\begin{aligned} L(x_1, \dots, x_r) &= \sum_{k_1, \dots, k_r=1}^n x_{1,k_1} \cdots x_{r,k_r} L(e_{k_1}, \dots, e_{k_r}) \\ &= \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_r \leq n} \left(\sum_{\sigma \in S_r} (\text{sgn } \sigma) x_{1,k_{\sigma(1)}} \cdots x_{r,k_{\sigma(r)}} \right) L(e_{k_1}, \dots, e_{k_r}) \\ &= \sum_{K \in \Lambda_r^n} (\det X_K^{(1, \dots, r)}) L(e_K), \end{aligned} \tag{*}$$

gdzie:

- $\Lambda_r^n := \{(k_1, \dots, k_r) : 1 \leq k_1 < \dots < k_r \leq n\}$,

⁽¹⁾ W przyszłości najistotniejszym będzie przypadek $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}$.

- $X = [x_{j,k}]_{\substack{j=1,\dots,r \\ k=1,\dots,n}} \in \mathbb{M}(r \times n; \mathbb{R})$,
 - $X_K^J \in \mathbb{M}(r \times r; \mathbb{R})$ oznacza podmacierz powstałą z X poprzez wybór wierszy o numerach $j_1, \dots, j_r$ i kolumn $k_1, \dots, k_r$,
 - $e_K := (e_{k_1}, \dots, e_{k_r}) \in E^r$.
- (a) $\mathcal{L}_a^r(E, F) = \{0\}$ dla $r > n$.
- (b) Dla $K \in \Lambda_r^n$ ($1 \leq r \leq n$) niech $e_K^* : E^r \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie odwzorowaniem danym wzorem

$$e_K^*(x_1, \dots, x_r) := \det X_K^{(1, \dots, r)}$$

o ile $x_j = \sum_{k=1}^n x_{j,k} e_k \in E$, $j = 1, \dots, r$, oraz $X = [x_{j,k}]_{\substack{j=1,\dots,r \\ k=1,\dots,n}}$. Z własności wyznaczników wynika natychmiast, że $e_K^* \in \mathcal{L}_a^r(E, \mathbb{R})$ oraz, że $e_K^*(e_J) = \delta_{K,J}$, $J, K \in \Lambda_r^n$. Oczywiście, dla $r = 1$ mamy $e_k^*(\xi) = \xi_k$, $k = 1, \dots, n$.

Wzór (†) możemy przepisać w postaci:

$$L = \sum_{K \in \Lambda_r^n} L(e_K) e_K^*,$$

który ustala izomorfizm $\mathcal{L}_a^r(E, F) \simeq F^{\binom{n}{r}}$.

- (c) W szczególności, gdy $F = \mathbb{R}$, to $\dim \mathcal{L}_a^r(E, \mathbb{R}) = \binom{n}{r}$ i $(e_K^*)_{K \in \Lambda_r^n}$ jest bazą $\mathcal{L}_a^r(E, \mathbb{R})$.

Obecnie zdefiniujemy podstawową dla całej teorii operację *mnożenia zewnętrznego* odwzorowań skośnie symetrycznych:

$$\wedge : \text{Hom}_a^r(E, \mathbb{R}) \times \text{Hom}_a^s(E, F) \longrightarrow \text{Hom}_a^{r+s}(E, F).$$

Jeżeli $r = s = 0$, to przyjmujemy $u \wedge v := u \cdot v$. Jeżeli $r = 0$ i $s \geq 1$, to kładziemy

$$(u \wedge v)(x_1, \dots, x_s) := u \cdot v(x_1, \dots, x_s)$$

i bez trudu sprawdzamy, że odwzorowanie $\wedge$ jest dobrze określone i dwuliniowe. Podobnie, gdy $r \geq 1$ i $s = 0$, definiujemy

$$(u \wedge v)(x_1, \dots, x_r) := u(x_1, \dots, x_r) \cdot v.$$

Widać, że w każdym z powyższych przypadków mamy

$$\mathcal{L}_a^r(E, \mathbb{R}) \wedge \mathcal{L}_a^s(E, F) \subset \mathcal{L}_a^{r+s}(E, F).$$

W przypadku gdy $r, s \geq 1$, sytuacja jest bardziej skomplikowana. Niech $\text{Hom}_a^{r,s}(E, F)$ oznacza przestrzeń tych odwzorowań $L \in \text{Hom}^{r+s}(E, F)$, dla których

$$L(\sigma(x), \tau(y)) = (\text{sgn } \sigma)(\text{sgn } \tau) L(x, y), \quad (x, y) \in E^r \times E^s,$$

przy dowolnych permutacjach $\sigma \in S_r$ i $\tau \in S_s$; $\text{Hom}_a^{r,s}(E, F)$ to przestrzeń odwzorowań *oddzielnie skośnie symetrycznych*. W zwykły sposób definiujemy $\mathcal{L}_a^{r,s}(E, F)$. Teraz zdefiniujemy odwzorowanie

$$B_{r,s} : \text{Hom}_a^r(E, \mathbb{R}) \times \text{Hom}_a^s(E, F) \longrightarrow \text{Hom}_a^{r,s}(E, F),$$

$$B_{r,s}(u, v)(x, y) := u(x) \cdot v(y), \quad (x, y) \in E^r \times E^s.$$

Jest to oczywiście dobrze określone odwzorowanie dwuliniowe. Ponadto,

$$B_{r,s}(\mathcal{L}_a^r(E, \mathbb{R}) \times \mathcal{L}_a^s(E, F)) \subset \mathcal{L}_a^{r,s}(E, F).$$

Kolejno, definiujemy odwzorowanie liniowe

$$\Phi_{r,s} : \text{Hom}_a^{r,s}(E, F) \longrightarrow \text{Hom}_a^{r+s}(E, F).$$

Kładziemy:

$$\Phi_{r,s}(h) := \sum_{\sigma \in S_{r,s}} (\text{sgn } \sigma) h \circ \sigma,$$

gdzie

$$S_{r,s} := \{\sigma \in S_{r+s} : \sigma(1) < \dots < \sigma(r), \sigma(r+1) < \dots < \sigma(r+s)\}. \quad (2)$$

Jest widoczne, że $\Phi_{r,s}(h) \in \text{Hom}^{r+s}(E, H)$, ale nie jest widoczne, że jest to odwzorowanie skośnie symetryczne.

Zastosujemy Propozycję 13.1.1. Ustalmy $j \in \{1, \dots, r+s-1\}$ i przypuśćmy, że $x = (x_1, \dots, x_{r+s}) \in E^{r+s}$ jest taki, że $x_j = x_{j+1}$. Niech

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{\sigma \in S_{r,s} : \{j, j+1\} \subset \{\sigma(1), \dots, \sigma(r)\}\}, \\ A_2 &:= \{\sigma \in S_{r,s} : \{j, j+1\} \subset \{\sigma(r+1), \dots, \sigma(r+s)\}\}, \\ C_1 &:= \{\sigma \in S_{r,s} : j \in \{\sigma(1), \dots, \sigma(r)\}, j+1 \in \{\sigma(r+1), \dots, \sigma(r+s)\}\}, \\ C_2 &:= \{\sigma \in S_{r,s} : j+1 \in \{\sigma(1), \dots, \sigma(r)\}, j \in \{\sigma(r+1), \dots, \sigma(r+s)\}\}. \end{aligned}$$

Widać, że $\sum_{\sigma \in A_j} (\text{sgn } \sigma) h(\sigma(x)) = 0$, $j = 1, 2$, więc pozostaje pokazać, że

$$\sum_{\sigma \in C_1} (\text{sgn } \sigma) h(\sigma(x)) = - \sum_{\sigma \in C_2} (\text{sgn } \sigma) h(\sigma(x)).$$

Wynika to natychmiast z następującego rozumowania. Bierzemy dowolną permutację $\sigma \in C_j$. Następnie w ciągu $(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ przestawiamy elementy x_j i x_{j+1} . W efekcie dostajemy ciąg będący działaniem pewnej permutacji $\tau \in C_{3-j}$ (ĆWICZENIE) takiej, że $\text{sgn } \tau = -\text{sgn } \sigma$.

Zauważmy, że $\Phi_{r,s}(\mathcal{L}_a^{r,s}(E, F)) \subset \mathcal{L}_a^{r+s}(E, F)$.

Definiujemy: $\wedge := \Phi_{r,s} \circ B_{r,s}$, czyli, pisząc jawnym wzorem,

$$(u \wedge v)(x_1, \dots, x_{r+s}) = \sum_{\sigma \in S_{r,s}} (\text{sgn } \sigma) u(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(r)}) \cdot v(x_{\sigma(r+1)}, \dots, x_{\sigma(r+s)}), \quad x_1, \dots, x_{r+s} \in E.$$

Propozycja 13.1.3. (a) *Operacja*

$$\wedge : \mathcal{L}_a^r(E, \mathbb{R}) \times \mathcal{L}_a^s(E, F) \longrightarrow \mathcal{L}_a^{r+s}(E, F)$$

jest dwuliniowa i ciągła. Ponadto, $\|\wedge\| \leq \frac{(r+s)!}{r!s!}$. ⁽³⁾

(b) Jeżeli $F = \mathbb{R}$, to

$$u \wedge v = (-1)^{rs} v \wedge u, \quad u \in \mathcal{L}_a^r(E, \mathbb{R}), v \in \mathcal{L}_a^s(E, \mathbb{R}).$$

(c) Jeżeli $F = \mathbb{R}$, to

$$(u \wedge v) \wedge w = u \wedge (v \wedge w), \quad u \in \mathcal{L}_a^r(E, \mathbb{R}), v \in \mathcal{L}_a^s(E, \mathbb{R}), w \in \mathcal{L}_a^t(E, \mathbb{R}).$$

(d) Operacja $(\mathcal{L}(E, \mathbb{R}))^r \ni (u_1, \dots, u_r) \mapsto u_1 \wedge \dots \wedge u_r \in \mathcal{L}_a^r(E, \mathbb{R})$ (określona poprawnie na podstawie

(c)) jest r -liniowa i skośnie symetryczna.

(e) $(u_1 \wedge \dots \wedge u_r)(x_1, \dots, x_r) = \det([u_k(x_j)]_{j,k=1,\dots,r})$, $u_k \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, $x_j \in E$, $j, k = 1, \dots, r$.

(f) $e_K^* = e_{k_1}^* \wedge \dots \wedge e_{k_r}^*$, $K = (k_1, \dots, k_r) \in \Lambda_r^n$.

Dowód. (a) Przypadek $r = 0$ lub $s = 0$ jest oczywisty. Niech $r, s \geq 1$. Wtedy

$$\begin{aligned} \|(u \wedge v)(x_1, \dots, x_{r+s})\| &\leq \sum_{\sigma \in S_{r,s}} \|u(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(r)})\| \|v(x_{\sigma(r+1)}, \dots, x_{\sigma(r+s)})\| \\ &\leq \sum_{\sigma \in S_{r,s}} \|u\| \|x_{\sigma(1)}\| \dots \|x_{\sigma(r)}\| \|v\| \|x_{\sigma(r+1)}\| \dots \|x_{\sigma(r+s)}\| \\ &= \binom{r+s}{r} \|u\| \|v\| \|x_1\| \dots \|x_{r+s}\|, \end{aligned}$$

a więc $\|u \wedge v\| \leq \binom{r+s}{r} \|u\| \|v\|$.

(b) Przypadek, gdy $r = 0$ lub $s = 0$ jest oczywisty. Załóżmy, że $r, s \geq 1$. Niech $\tau = (r+1, \dots, r+s, 1, \dots, r) \in S_{r+s}$. Zauważmy, że $\text{sgn } \tau = (-1)^{rs}$ oraz $\sigma \in S_{r,s} \iff \sigma \circ \tau \in S_{s,r}$. Stąd:

$$\begin{aligned} (v \wedge u)(x_1, \dots, x_{r+s}) &= \sum_{\sigma \in S_{r,s}} (\text{sgn } (\sigma \circ \tau)) v(x_{\sigma(r+1)}, \dots, x_{\sigma(r+s)}) \cdot u(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(r)}) \\ &= (\text{sgn } \tau) (u \wedge v)(x_1, \dots, x_{r+s}). \end{aligned}$$

⁽²⁾ Odnótujemy, że $\#S_{r,s} = \frac{(r+s)!}{r!s!}$.

⁽³⁾ $\|\wedge\| = \boxed{?}$

(c) Wystarczy pokazać, że obie strony są równe odwzorowaniu

$$\sum_{\sigma \in S_{r,s,t}} (\operatorname{sgn} \sigma) h \circ \sigma,$$

gdzie

$$\begin{aligned} S_{r,s,t} &:= \{\sigma \in S_{r+s+t} : \\ &\quad \sigma(1) < \dots < \sigma(r), \sigma(r+1) < \dots < \sigma(r+s), \sigma(r+s+1) < \dots < \sigma(r+s+t)\}, \\ h(x_1, \dots, x_{r+s+t}) &:= u(x_1, \dots, x_r) v(x_{r+1}, \dots, x_{r+s}) w(x_{r+s+1}, \dots, x_{r+s+t}). \end{aligned}$$

Sprawdzimy to dla lewej strony, prawą pozostawiając jako ĆWICZENIE. Niech

$$\begin{aligned} ((u \wedge v) \wedge w)(x_1, \dots, x_{r+s+t}) &= \sum_{\tau \in S_{r+s,t}} (\operatorname{sgn} \tau) (u \wedge v)(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(r+s)}) w(x_{\tau(r+s+1)}, \dots, x_{\tau(r+s+t)}) \\ &= \sum_{\substack{\tau \in S_{r+s,t} \\ \alpha \in S_{r,s}}} (\operatorname{sgn} \tau) (\operatorname{sgn} \alpha) u(x_{\tau(\alpha(1))}, \dots, x_{\tau(\alpha(r))}) v(x_{\tau(\alpha(r+1))}, \dots, x_{\tau(\alpha(r+s))}) w(x_{\tau(r+s+1)}, \dots, x_{\tau(r+s+t)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_{r,s,t}} (\operatorname{sgn} \sigma) h(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(r+s+t)}); \end{aligned}$$

wykorzystaliśmy tu fakt, iż każda permutacja $\sigma \in S_{r,s,t}$ może być jednoznacznie przedstawiona w postaci $\sigma = \tau \circ (\alpha, \operatorname{id})$, gdzie $\tau \in S_{r+s,t}$ i $\alpha \in S_{r,s}$ — ĆWICZENIE.

(d) r -liniowość jest oczywista. Wobec (b), jeżeli $u_j = u_{j+1}$, to:

$$\begin{aligned} u_1 \wedge \dots \wedge u_r &= u_1 \wedge \dots \wedge u_{j-1} \wedge u_{j+1} \wedge u_j \wedge u_{j+2} \wedge \dots \wedge u_r \\ &= u_1 \wedge \dots \wedge u_{j-1} \wedge (-1)^{1-1} u_j \wedge u_{j+1} \wedge u_{j+2} \wedge \dots \wedge u_r = -(u_1 \wedge \dots \wedge u_r). \end{aligned}$$

(e) Indukcja względem r . Przypadek $r = 1$ jest trywialny. Załóżmy, że wynik zachodzi dla $r - 1$. Zauważmy, że

$$S_{r-1,1} = \{(1, \dots, i-1, i+1, \dots, r, i) \in S_r : i = 1, \dots, r\}.$$

Niech $X = [u_k(x_j)]_{j,k=1,\dots,r}$. Wtedy

$$\begin{aligned} (u_1 \wedge \dots \wedge u_r)(x_1, \dots, x_r) &= \sum_{i=1}^r (-1)^{r-i} (u_1 \wedge \dots \wedge u_{r-1})(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_r) u_r(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^r (-1)^{i+r} u_r(x_i) (\det X_{(1,\dots,i-1,i+1,\dots,r-1)}^{(1,\dots,i-1,i+1,\dots,r)}) = \det X \end{aligned}$$

na podstawie rozwinięcia Laplace'a (względem ostatniej kolumny).

(f) wynika z (e). □

Definicja 13.1.4. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i niech F będzie przestrzenią unormowaną. Formą różniczkową rzędu r na Ω o wartościach w F nazywamy dowolne odwzorowanie $u : \Omega \longrightarrow \mathcal{L}_a^r(\mathbb{R}^n, F)$. Zbiór wszystkich takich form różniczkowych oznaczamy przez $\mathcal{F}_{(r)}(\Omega, F)$. Odnajmy, że $\mathcal{F}_{(r)}(\Omega, F)$ to po prostu zbiór wszystkich funkcji $u : \Omega \longrightarrow F$. Jak zwykle, $\mathcal{F}_{(r)}(\Omega) := \mathcal{F}_{(r)}(\Omega, \mathbb{R})$.

W oczywisty sposób $\mathcal{F}_{(r)}(\Omega, F)$ ma strukturę przestrzeni wektorowej. Oczywiście $\mathcal{F}_{(r)}(\Omega, F) = \{0\}$ dla $r > n$.

Mamy ponadto określone *mnożenie zewnętrzne form*:

$$\wedge : \mathcal{F}_{(r)}(\Omega) \times \mathcal{F}_{(s)}(\Omega, F) \longrightarrow \mathcal{F}_{(r+s)}(\Omega, F), \quad (u \wedge v)(x) := u(x) \wedge v(x), \quad x \in \Omega.$$

Odnajmy, że jeżeli $f : \Omega \longrightarrow F$ jest odwzorowaniem różniczkowalnym (w każdym punkcie), to $df := f' \in \mathcal{F}_{(1)}(\Omega, F)$.

Dla $k \in \mathbb{N}$ niech $\mathcal{F}_{(r)}^k(\Omega, F) := \mathcal{D}^k(\Omega, \mathcal{L}_a^r(E, F))$, $\mathcal{C}_{(r)}^k(\Omega, F) := \mathcal{C}^k(\Omega, \mathcal{L}_a^r(E, F))$. Widać, że definicje te są zgodne dla $r = 0$, tzn. $\mathcal{F}_{(0)}^k(\Omega, F) := \mathcal{D}^k(\Omega, F)$ i $\mathcal{C}_{(0)}^k(\Omega, F) = \mathcal{C}^k(\Omega, F)$. Jak zwykle, $\mathcal{F}_{(r)}'(\Omega, F) := \mathcal{F}_{(r)}^1(\Omega, F)$, $\mathcal{F}_{(r)}''(\Omega, F) := \mathcal{F}_{(r)}^2(\Omega, F)$.

Obserwacja 13.1.5. (a) Niech $e_1, \dots, e_n$ oznacza bazę kanoniczną $\mathbb{R}^n$. Każdą formę $u \in \mathcal{F}_{(r)}(\Omega, F)$ możemy przedstawić w postaci kanonicznej

$$u(x) = \sum_{I \in \Lambda_r^n} u(x)(e_I) e_I^* =: \sum_{I \in \Lambda_r^n} u_I(x) dx_I,$$

gdzie dla $I = (i_1, \dots, i_r)$ mamy $dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$, $dx_i = d(\text{pr}_i) = e_i^*$. Będziemy również stosować zapis $u(x) = \sum'_{|I|=r} u_I(x) dx_I$ lub nawet $u(x) = \sum_I u_I(x) dx_I$.

W tym sensie formę u można utożsamiać z rodziną „zwykłych” funkcji $(u_I)_{I \in \Lambda_r^n}$. W szczególności, dla $r = n$, formę u możemy utożsamiać z jedną funkcją $u_{(1, \dots, n)}$.

(b) Dla dowolnego $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ mamy:

$$u \in \mathcal{F}_{(r)}^k(\Omega, F) \iff \forall I \in \Lambda_r^n : u_I \in \mathcal{D}^k(\Omega, F), \quad u \in \mathcal{C}_{(r)}^k(\Omega, F) \iff \forall I \in \Lambda_r^n : u_I \in \mathcal{C}^k(\Omega, F).$$

(c) Jeżeli $f \in \mathcal{D}(\Omega, F)$, to postać kanoniczna df wygląda następująco:

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

W szczególności, jeżeli $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$, to

$$df_1 \wedge \dots \wedge df_r = \sum_{I \in \Lambda_r^n} \frac{\partial(f_1, \dots, f_r)}{\partial(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})} dx_I.$$

Następujące pojęcie *różniczki zewnętrznej* jest centralnym punktem całej teorii form różniczkowych.

Definicja 13.1.6. Określimy operator

$$d : \mathcal{F}'_{(r)}(\Omega, F) \longrightarrow \mathcal{F}'_{(r+1)}(\Omega, F).$$

Dla $r = 0$ będzie to zwykły operator różniczkowania zdefiniowany poprzednio. Dla $r \geq 1$ i $u \in \mathcal{F}'_{(r)}(\Omega, F)$ bierzemy postać kanoniczną $u = \sum_{I \in \Lambda_r^n} u_I dx_I$ i definiujemy

$$du = \sum_{I \in \Lambda_r^n} du_I \wedge dx_I = \sum_{J \in \Lambda_{r+1}^n} \left(\sum_{(I, i) \in S(J)} \varepsilon(I, i) \frac{\partial u_I}{\partial x_i} \right) dx_J,$$

gdzie

$$S(J) := \{(I, i) \in \Lambda_r^n \times \{1, \dots, n\} : \exists \varepsilon = \varepsilon(I, i) \in \{-1, +1\} : dx_i \wedge dx_I = \varepsilon dx_J\}.$$

Formalnie rzecz biorąc, powinniśmy pisać d_r . Zauważmy, że dla $r = n$ mamy zawsze $du = 0$.

Propozycja 13.1.7. (a) Operator $d : \mathcal{F}'_{(r)}(\Omega, F) \longrightarrow \mathcal{F}'_{(r+1)}(\Omega, F)$ jest liniowy. Ponadto, $d(\mathcal{F}_{(r)}^k(\Omega, F)) \subset \mathcal{F}_{(r+1)}^{k-1}(\Omega, F)$ oraz $d(\mathcal{C}_{(r)}^k(\Omega, F)) \subset \mathcal{C}_{(r+1)}^{k-1}(\Omega, F)$, $k \geq 1$.

(b) Jeżeli $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, F)$, to

$$d(\varphi dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}) = (d\varphi) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$$

dla dowolnych $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\}$.

(c) Jeżeli $u \in \mathcal{F}''_{(r)}(\Omega, F)$ (np. $u \in \mathcal{C}^2_{(r)}(\Omega, F)$), to $d^2 u = (d \circ d)u = 0$.

(d) Dla $u \in \mathcal{F}'_{(r)}(\Omega)$ i $v \in \mathcal{F}'_{(s)}(\Omega, F)$ mamy:

$$d(u \wedge v) = (du) \wedge v + (-1)^r u \wedge (dv).$$

Dowód. (a) jest oczywiste.

(b) Jeżeli $i_\mu = i_\nu$ dla pewnych $\mu \neq \nu$, to obie strony są zero. W przeciwnym przypadku, najpierw porządkujemy $(i_1, \dots, i_r)$ do ciągu rosnącego (co powoduje pomnożenie obu stron przez pewną liczbę $\varepsilon \in \{-1, +1\}$).

(c) Wobec (a) wystarczy rozważyć przypadek, gdy $u = \varphi dx_I$, gdzie $\varphi \in \mathcal{D}''(U, \Omega)$, zaś $I \in \Lambda_r^n$. Korzystając z (b) oraz z symetrii drugich pochodnych cząstkowych mamy:

$$\begin{aligned} d^2 u &= d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I\right) = \sum_{i=1}^n d\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) \wedge dx_i \wedge dx_I \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i \wedge dx_I = \sum_{i < j} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}\right) dx_j \wedge dx_i \wedge dx_I = 0. \end{aligned}$$

(d) Wystarczy rozważyć przypadek, gdy $u = \varphi dx_I$, $v = \psi dx_J$. Mamy:

$$\begin{aligned} d(u \wedge v) &= d(\varphi \psi dx_I \wedge dx_J) = d(\varphi \psi) \wedge dx_I \wedge dx_J = ((d\varphi)\psi + \varphi(d\psi)) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= ((d\varphi) \wedge dx_I) \wedge (\psi dx_J) + (-1)^r (\varphi dx_I) \wedge ((d\psi) \wedge dx_J) = (du) \wedge v + (-1)^r u \wedge (dv). \quad \square \end{aligned}$$

Przykład 13.1.8. (a) Jeżeli $V = \sum_{k=1}^n V_k dx_k \in \mathcal{F}'_{(1)}(\Omega, F)$, to

$$dV = \sum_{j < k} \left(\frac{\partial V_k}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_k}\right) dx_j \wedge dx_k.$$

W szczególności, dla $n = 2$ mamy:

$$d(Pdx + Qdy) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

(b) Jeżeli

$$u = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} u_j dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \cdots \wedge dx_n \in \mathcal{F}'_{(n-1)}(\Omega, F),$$

to

$$du = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Następną ważną operacją jest *operacja podstawiania (zmiany zmiennych)*.

Definicja 13.1.9. Niech $U \subset \mathbb{R}^m$ będzie zbiorem otwartym i niech $f \in \mathcal{D}(U, \Omega)$. Definiujemy operator $f^* : \mathcal{F}_{(r)}(\Omega, F) \longrightarrow \mathcal{F}_{(r)}(U, F)$:

- Jeżeli $r = 0$, to kładziemy $f^*(u) = u \circ f$ ⁽⁴⁾.
- Jeżeli $r \geq 1$, $u = \sum_{I \in \Lambda_r^n} u_I dx_I$, to

$$f^*(u) := \sum_{I \in \Lambda_r^n} (u_I \circ f) df_I = \sum_{J \in \Lambda_r^m} \left(\sum_{I \in \Lambda_r^n} (u_I \circ f) \frac{\partial(f_{i_1}, \dots, f_{i_r})}{\partial(t_{j_1}, \dots, t_{j_r})} \right) dt_J,$$

gdzie $df_I := df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_r}$.

W szczególności:

- gdy $m = r$, to:

$$f^*(u) = \left(\sum_{I \in \Lambda_r^n} (u_I \circ f) \frac{\partial(f_{i_1}, \dots, f_{i_r})}{\partial(t_1, \dots, t_r)} \right) dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_r;$$

- gdy $m = r = n$, to:

$$f^*(\varphi dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_r) = (\varphi \circ f)(\det f') dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_r.$$

Propozycja 13.1.10. (a) Odwzorowanie $f^* : \mathcal{F}_{(r)}(\Omega, F) \longrightarrow \mathcal{F}_{(r)}(U, F)$ jest liniowe. Ponadto,

- jeżeli $f \in \mathcal{D}^{k+1}(U, \Omega)$, to $f^*(\mathcal{F}_{(r)}^k(\Omega, F)) \subset \mathcal{F}_{(r)}^k(U, F)$,
- jeżeli $f \in \mathcal{C}^{k+1}(U, \mathbb{R}^n)$, to $f^*(\mathcal{C}_{(r)}^k(\Omega, F)) \subset \mathcal{C}_{(r)}^k(U, F)$.

(b) $f^*(\varphi dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r}) = (\varphi \circ f) df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_r}$ dla dowolnych $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\}$.

(c) Jeżeli $F = \mathbb{R}$, to $f^*(u \wedge v) = f^*(u) \wedge f^*(v)$.

⁽⁴⁾ Dla $r = 0$ różniczkowalność f nie jest istotna.

- (d) $f^* \circ d = d \circ f^*$ na $\mathcal{F}'_{(0)}(\Omega, F)$.
(e) Jeżeli $f \in \mathcal{D}''(U, \Omega)$, to $f^* \circ d = d \circ f^*$ na $\mathcal{F}'_{(r)}(\Omega, F)$ dla dowolnego r ⁽⁵⁾.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}'_{(r)}(\Omega, F) & \xrightarrow{d} & \mathcal{F}'_{(r+1)}(\Omega, F) \\ \downarrow f^* & & \downarrow f^* \\ \mathcal{F}'_{(r)}(U, F) & \xrightarrow{d} & \mathcal{F}'_{(r+1)}(U, F) \end{array}$$

- (f) Jeżeli V jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^p$ i $g \in \mathcal{D}(V, U)$, to $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

Dowód. (a), (b), i (c) są elementarne.

- (d) Na podstawie wzoru na różniczkowanie złożenia mamy:

$$d(f^*(u)) = d(u \circ f) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \circ f \right) \frac{\partial f_j}{\partial t_i} dt_i = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \circ f \right) df_j = f^*(du).$$

- (e) Wystarczy sprawdzić wzór dla form postaci φdx_I , gdzie $\varphi \in \mathcal{D}'(\Omega, F)$. Wobec Propozycji 13.1.7 mamy:

$$d(f^*(\varphi dx_I)) = d((\varphi \circ f) df_I) = d(\varphi \circ f) \wedge df_I = f^*(d\varphi) \wedge df_I = f^*(d(\varphi dx_I)). \quad (6)$$

$$\begin{aligned} (f) \quad g^*(f^*(\varphi dx_I)) &= g^*((\varphi \circ f) df_I) = ((\varphi \circ f) \circ g) g^*(df_I) \\ &\stackrel{(c,d)}{=} (\varphi \circ (f \circ g)) d(f \circ g)_I = (f \circ g)^*(\varphi dx_I). \quad \square \end{aligned}$$

Obserwacja 13.1.11. Pojęcia formy różniczkowej, operatora różniczkowania zewnętrznego oraz operatora podstawiania mogą być przeniesione na przypadek ogólny, gdy Ω jest zbiorem otwartym w pewnej przestrzeni unormowanej E .

- Formą różniczkową rzędu r na Ω o wartościach w F nazywamy dowolne odwzorowanie $u : \Omega \rightarrow \mathcal{L}_a^r(E, F)$ (por. Definicja 13.1.4).
- Niech $\mathcal{F}'_{(r)}(\Omega, F)$ oznacza przestrzeń form rzędu r różniczkowalnych w każdym punkcie. Definiujemy operator *różniczkowania zewnętrznego*:

$$d : \mathcal{F}'_{(r)}(\Omega, F) \rightarrow \mathcal{F}'_{(r+1)}(\Omega, F).$$

Dla $r = 0$ będzie to zwykły operator różniczkowania zdefiniowany poprzednio.

Dla $r \geq 1$ i $u \in \mathcal{F}'_{(r)}(\Omega, F)$ postępujemy następująco. Najpierw bierzemy zwykły operator różniczkowania

$$\Omega \ni x \mapsto u'(x) \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}_a^r(E, F)) \simeq \mathcal{L}_a^{1,r}(E, F).$$

Innymi słowy rozważamy operator

$$\Omega \ni x \mapsto (E^{r+1} \ni (\xi_0, \dots, \xi_r) \mapsto u'(x)(\xi_0)(\xi_1, \dots, \xi_r) \in F).$$

Następnie składamy powyższy operator z poprzednio zdefiniowanym operatorem $\Phi_{1,r} : \mathcal{L}_a^{1,r}(E, F) \rightarrow \mathcal{L}_a^{r+1}(E, F)$. I to jest właśnie poszukiwany operator różniczkowania zewnętrznego. Pisząc jawnym wzorem, mamy:

$$(du)(x)(\xi_0, \dots, \xi_r) := \sum_{j=0}^r (-1)^j u'(x)(\xi_j)(\xi_0, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \dots, \xi_r),$$

$$u \in \mathcal{F}'_{(r)}(\Omega, F), \quad x \in \Omega, \quad \xi_0, \dots, \xi_r \in E.$$

Dla $E = \mathbb{R}^n$ powyższy operator pokrywa się z operatorem z Definicji 13.1.6 (ĆWICZENIE). Ponadto, w przypadku ogólnym ma on wszystkie własności z Propozycji 13.1.7 (ĆWICZENIE).

⁽⁵⁾ Uwaga: we wzorze każda z operacji f^* , d , f^* jest wykonywana na innej przestrzeni.

⁽⁶⁾ Tu jest istotne, że f jest dwukrotnie różniczkowalne i dlatego $d(df_I) = 0$.

• Niech E_0, E będą przestrzeniami unormowanymi, niech $U \subset E_0$, $\Omega \subset E$ będą zbiorami otwartymi i niech $f : U \rightarrow \Omega$ będzie odwzorowaniem różniczkowalnym. Definiujemy *operator podstawiania (zmiany zmiennych)*

$$f^* : \mathcal{F}_{(r)}(\Omega, F) \rightarrow \mathcal{F}_{(r)}(U, F).$$

Jeżeli $r = 0$, to kładziemy $f^*(u) = u \circ f$. Dla $r \geq 1$ przyjmujemy:

$$f^*(u)(t)(\eta_1, \dots, \eta_r) := u(f(t))(f'(t)(\eta_1), \dots, f'(t)(\eta_r)), \quad u \in \mathcal{F}_{(r)}(\Omega, F), \quad t \in U, \quad \eta_1, \dots, \eta_r \in E_0.$$

Podobnie, jak poprzednio, dla $E_0 = \mathbb{R}^m$, $E = \mathbb{R}^n$ powyższy operator pokrywa się z operatorem z Definicji 13.1.9 (ĆWICZENIE). Ponadto, w przypadku ogólnym ma on wszystkie własności z Propozycji 13.1.10 (ĆWICZENIE).

Definicja 13.1.12. Powiemy, że obszar $D \subset \mathbb{R}^n$ jest *różniczkowo ściągalny w klasie $\mathcal{C}^k$ do punktu a* , jeżeli istnieje otoczenie otwarte $\Omega \supset [0, 1] \times D$ oraz odwzorowanie $h : \Omega \rightarrow D$ klasy $\mathcal{C}^k$ takie, że $h(0, x) = x$, $h(1, x) = a$, $x \in D$.

Zauważmy, że każdy obszar gwiaździsty względem a jest ściągalny różniczkowo w klasie $\mathcal{C}^\infty$. Istotnie, wystarczy wziąć

$$h(t, x) = (1 - t)x + ta, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \quad \Omega := h^{-1}(D).$$

Twierdzenie 13.1.13 (Lemat Poincarégo ⁽⁷⁾). *Jeżeli obszar $D \subset \mathbb{R}^n$ jest różniczkowo ściągalny (do punktu a) w klasie $\mathcal{C}^{k+1}$ przy pomocy odwzorowania $h : \Omega \rightarrow D$ ($k \geq 1$), to dla dowolnego $r \in \mathbb{N}$ i dla dowolnej formy $u \in \mathcal{C}_{(r)}^k(D)$ ⁽⁸⁾ takiej, że $du = 0$ istnieje $v \in \mathcal{C}_{(r-1)}^k(D)$ taka, że $dv = u$.*

Obserwacja 13.1.14. (a) Twierdzenie 11.5.7, to przypadek, gdy D jest gwiaździsty i $r = k = 1$.

(b) Powinniśmy zawsze pamiętać o następującym prostym przykładzie obszaru, w którym twierdzenie Poincarégo nie zachodzi.

Niech $D := (\mathbb{R}^2)_* = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $\varphi(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$, $(x, y) \in D$, $u = Pdx + Qdy := -\frac{\partial \varphi}{\partial y} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \in \mathcal{C}_{(1)}^\infty(D)$. Bez trudu sprawdzamy, że $du = (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dx \wedge dy = (\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}) dx \wedge dy = 0$ (ĆWICZENIE). Przypuśćmy, że $u = dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$ dla pewnej funkcji $v \in \mathcal{C}^1(D)$. Oznacza to, że funkcja v jest potencjałem pola (P, Q) , a stąd w szczególności wynika, że $\int_\gamma Pdx + Qdy = v(\gamma(1)) - v(\gamma(0))$ dla dowolnej drogi $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$ (Twierdzenie 11.5.6). Biorąc jako γ okrąg jednostkowy, dostajemy:

$$0 = \int_\gamma Pdx + Qdy = \int_0^{2\pi} (P(\cos t, \sin t)(-\sin t) + Q(\cos t, \sin t) \cos t) dt = 2\pi;$$

sprzeczność.

Dowód Twierdzenia 13.1.13. Dowód polega na znalezieniu operatorów liniowych

$$\delta = \delta_{s, \ell} : \mathcal{C}_{(s+1)}^\ell(\Omega) \rightarrow \mathcal{C}_{(s)}^\ell(D), \quad s, \ell \geq 0,$$

takich, że na $\mathcal{C}_{(s)}^\ell(\Omega)$, $s, \ell \geq 1$, mamy:

$$\delta \circ d + d \circ \delta = \sigma_1^* - \sigma_0^*, \quad (\dagger)$$

gdzie $\sigma_j : D \rightarrow \Omega$, $\sigma_j(x) := (j, x)$, $j \in \{0, 1\}$, $x \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{(s)}^\ell(\Omega) & \xrightarrow{d} & \mathcal{C}_{(s+1)}^{\ell-1}(\Omega) \\ \downarrow \delta & \searrow \sigma_1^* - \sigma_0^* & \downarrow \delta \\ \mathcal{C}_{(s-1)}^\ell(D) & \xrightarrow{d} & \mathcal{C}_{(s)}^{\ell-1}(D) \end{array}$$

Przypuśćmy na chwilę, że mamy już operatory δ . Weźmy $v := -\delta(h^*(u))$. Wtedy:

$$\begin{aligned} dv &= -d(\delta(h^*(u))) = -\sigma_1^*(h^*(u)) + \sigma_0^*(h^*(u)) + \delta(d(h^*(u))) \\ &= -(h \circ \sigma_1)^*(u) + (h \circ \sigma_0)^*(u) + \delta(h^*(du)) = -(\text{const})^*(u) + \text{id}^*(u) = u. \end{aligned}$$

⁽⁷⁾ Por. Twierdzenie 11.5.7.

⁽⁸⁾ $\mathcal{C}_{(r)}^k(D) := \mathcal{C}_{(r)}^k(D, \mathbb{R})$.

Przechodźmy do konstrukcji δ . Oznaczmy zmienne w $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ przez (t, x) . Niech

$$w = \sum_{I \in \Lambda_s^n} w_I dt \wedge dx_I + \sum_{J \in \Lambda_{s+1}^n} w'_J dx_J \in \mathcal{C}_{(s+1)}^\ell(\Omega).$$

Kładziemy

$$\delta(w) := \sum_{I \in \Lambda_s^n} \left(\int_0^1 w_I(t, \cdot) dt \right) dx_I.$$

Na podstawie twierdzenia o funkcjach danych całką $\delta(w) \in \mathcal{C}_{(s)}^\ell(D)$. Widać, że operator δ jest liniowy. Pozostaje sprawdzić wzór (†). Wobec liniowości wystarczy sprawdzić wzór (†) dla form następujących dwóch typów:

1^0 : $w = \varphi dx_J$, gdzie $J \in \Lambda_{s+1}^n$. Wtedy $\delta(w) = 0$ oraz

$$\delta(dw) = \delta\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} dt \wedge dx_J + \dots\right) = \left(\int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \cdot) dt\right) dx_J = (\varphi(1, \cdot) - \varphi(0, \cdot)) dx_J = \sigma_1^*(w) - \sigma_0^*(w).$$

2^0 : $w = \varphi dt \wedge dx_I$, gdzie $I \in \Lambda_s^n$. Wtedy $\delta(w) = \left(\int_0^1 \varphi(t, \cdot) dt\right) dx_I$, $\sigma_j^*(w) = 0$, $j = 0, 1$, oraz

$$\begin{aligned} \delta(dw) + d(\delta(w)) &= \delta\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx_j \wedge dt \wedge dx_I\right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \int_0^1 \varphi(t, \cdot) dt\right) dx_j \wedge dx_I \\ &= -\sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(t, \cdot) dt\right) dx_j \wedge dx_I + \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(t, \cdot) dt\right) dx_j \wedge dx_I = 0. \quad \square \end{aligned}$$

13.2. Całkowanie form różniczkowych

Niech M będzie d -wymiarową podrozmainością orientowalną klasy $\mathcal{C}^1$ w $\mathbb{R}^n$. Niech O będzie ustaloną orientacją M , niech $M \subset \Omega \in \text{top } \mathbb{R}^n$ i niech $u \in \mathcal{F}_{(d)}(\Omega)$. Zakładamy, że u jest *mierzalna na M* , tzn. $u_I \in \mathcal{M}(M, \mathcal{L}_M)$ dla dowolnego I .

Mówimy, że forma (funkcja) u jest *całkowalna na M przy orientacji O* , jeżeli:

Dla $d = 0$:

$$\sum_{x \in M} |u(x)| < +\infty; \quad (9)$$

kładziemy wtedy

$$\int_{M, O} u := \sum_{x \in M} O(x) u(x).$$

Dla $d \geq 1$ postępujemy następująco. Dla dowolnej lokalnej parametryzacji $p : P \rightarrow U$ zgodnej z O rozważamy formę $p^*(u) \in \mathcal{F}_{(d)}(P)$. Ponieważ jest to forma rzędu d , więc ma ona postać

$$p^*(u) = \widetilde{p^*(u)} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_d. \quad (10)$$

Przypomnijmy, że

$$\widetilde{p^*(u)} = \sum_{I \in \Lambda_d^n} (u_I \circ p) \frac{\partial(p_{i_1}, \dots, p_{i_d})}{\partial(t_1, \dots, t_d)}.$$

Położmy:

$$[u] := \frac{\widetilde{p^*(u)}}{|p'|} \circ p^{-1} : U \rightarrow \mathbb{R}.$$

Zauważmy, że jeżeli $q : Q \rightarrow U$ jest jakąś inną parametryzacją zgodną z O , to $q = p \circ \varphi$, gdzie $\det \varphi'(t) > 0$, $t \in Q$. Na podstawie Propozycji 13.1.10 mamy: $\widetilde{q^*(u)} = \varphi^*(\widetilde{p^*(u)}) = (\det \varphi')(\widetilde{p^*(u)} \circ \varphi)$. Stąd:

$$\frac{\widetilde{q^*(u)}}{|q'|} \circ q^{-1} = \frac{(\det \varphi')(\widetilde{p^*(u)} \circ \varphi)}{(|p'| \circ \varphi) \det \varphi'} \circ \varphi^{-1} \circ p^{-1} = \frac{\widetilde{p^*(u)}}{|p'|} \circ p^{-1},$$

⁽⁹⁾ Przypomnijmy, że $\#M \leq \aleph_0$.

⁽¹⁰⁾ Zwracamy uwagę na niegroźną kolizję oznaczeń.

a więc funkcja $[u]$ nie zależy od parametryzacji zgodnej z O i może być w związku z tym określona na całym M . Zauważmy, że $[u]$ jest mierzalna na M .

Powiemy, że forma u jest *całkowalna na M przy orientacji O* , jeżeli

$$[u] \in L^1(M, \mathcal{L}^M).$$

Piszemy wtedy $u \in L^1(M, O)$ i definiujemy:

$$\int_{M,O} u := \int_M [u] d\mathcal{L}^M.$$

Oczywiście $L^1(M, O)$ jest przestrzenią wektorową, zaś operacja

$$L^1(M, O) \ni u \mapsto \int_{M,O} u \in \mathbb{R}$$

jest liniowa.

Propozycja 13.2.1. (a) $u \in L^1(M, O) \iff u \in L^1(M, -O)$. Ponadto,

$$\int_{M,-O} u = - \int_{M,O} u.$$

(b) $\|u\| \leq \|u\|$, gdzie

$$\|u\|(x) = \|u(x)\| = \left(\sum_I u_I^2(x) \right)^{1/2}.$$

W szczególności, jeśli $\|u\| \in L^1(M, \mathcal{L}^M)$, to $u \in L^1(M, O)$ oraz

$$\left| \int_{M,O} u \right| \leq \int_M \|u\| d\mathcal{L}^M.$$

(c) Jeżeli $u \in L^1(M, O)$, to dla dowolnej parametryzacji zgodnej z orientacją $p : P \rightarrow U$ mamy:

$$\int_{U,O} u = \int_P \widetilde{p^*(u)} d\mathcal{L}^d.$$

Dowód. (a) $[u]$ zmienia znak przy zmianie orientacji na przeciwną.

(b) Dla lokalnej parametryzacji $p : P \rightarrow U$ zgodnej z orientacją, korzystając z nierówności Schwarz, mamy:

$$|[u]|^2 \circ p = \frac{\left| \sum_I (u_I \circ p) \frac{\partial(p_{i_1}, \dots, p_{i_d})}{\partial(t_1, \dots, t_d)} \right|^2}{\sum_I \left(\frac{\partial(p_{i_1}, \dots, p_{i_d})}{\partial(t_1, \dots, t_d)} \right)^2} \leq \sum_I (u_I \circ p)^2 = \|u\|^2 \circ p.$$

(c) jest elementarne. □

Ćwiczenie* 13.2.2. Niech F będzie ośrodkową przestrzenią Banacha. Korzystając z Ćwiczenia ??, zdefiniować całkę $\int_{M,O} u$ dla form $u \in \mathcal{F}_{(d)}(\Omega, F)$.

Przykład 13.2.3. (a) Dla $d = 1$, jeżeli $\mathbf{s} : M \rightarrow \mathbb{S}_{n-1}$ jest orientującym polem wektorów stycznych, to $[u] = \langle \vec{u}, \mathbf{s} \rangle$, gdzie formę $u = \sum_{j=1}^n u_j dx_j$ utożsamiamy z polem wektorowym $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$. W szczególności,

$$\int_{M,O} u = \int_M \langle \vec{u}, \mathbf{s} \rangle d\mathcal{L}^M.$$

Istotnie, w lokalnej parametryzacji zgodnej z orientacją $p : P \rightarrow U$ mamy:

$$\langle \vec{u}, \mathbf{s} \rangle \circ p = \langle \vec{u} \circ p, \frac{p'}{\|p'\|} \rangle = [u] \circ p.$$

(b) Dla $d = n - 1$, jeżeli $\mathbf{n} : M \rightarrow \mathbb{S}_{n-1}$ jest orientującym polem wektorów normalnych, to $[u] = \langle \vec{u}, \mathbf{n} \rangle$, gdzie formę

$$u = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} u_k dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{k-1} \wedge dx_{k+1} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

utożsamiamy z polem wektorowym $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$. W szczególności,

$$\int_{M,O} u = \int_M \langle \vec{u}, \mathbf{n} \rangle d\mathcal{L}^M.$$

Istotnie, w lokalnej parametryzacji zgodnej z orientacją $p : P \rightarrow U$, na podstawie Uwagi 10.17.7, mamy:

$$\langle \vec{u}, \mathbf{n} \rangle \circ p = \sum_{k=1}^n (u_k \circ p)(\mathbf{n}_k \circ p) = \frac{\sum_{k=1}^n (u_k \circ p)(-1)^{k-1} \frac{\partial(p_1, \dots, p_{k-1}, p_{k+1}, \dots, p_n)}{\partial(t_1, \dots, t_{n-1})}}{|p'|} = \frac{\widetilde{p^*(u)}}{|p'|} = [u] \circ p.$$

Wracamy do sytuacji ogólnej: niech $M \subset \mathbb{R}^n$ będzie dowolną d -wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$ ($d \geq 1$).

Dla $r \in \mathbb{N}_0$ wprowadzamy pojęcie *formy różniczkowej rzędu r na M* : Jest to dowolne odwzorowanie

$$M \ni x \mapsto u(x) \in \mathcal{L}_a^r(T_x M, \mathbb{R});$$

piszemy $u \in \mathcal{F}_{(r)}(M)$. Oczywiście $\mathcal{F}_{(r)}(M) = \{0\}$ dla $r > d$.

Zbiór $\mathcal{F}_{(r)}(M)$ ma wiele własności takich samych jak $\mathcal{F}_{(r)}(\Omega)$ w przypadku, gdy Ω jest zbiorem otwartym, np. $\mathcal{F}_{(r)}(M)$ jest $\mathbb{R}$ -przestrzenią wektorową oraz mamy *operator mnożenia zewnętrznego*

$$\mathcal{F}_{(r)}(M) \times \mathcal{F}_{(s)}(M) \ni (u, v) \mapsto u \wedge v \in \mathcal{F}_{(r+s)}(M).$$

Jeżeli Ω jest otoczeniem otwartym M i $u \in \mathcal{F}_{(r)}(\Omega)$, to $u|_M \in \mathcal{F}_{(r)}(M)$, gdzie

$$(u|_M)(x) := u(x)|_{(T_x M)^r}, \quad x \in M. \quad (*)$$

Niech $N \subset \mathbb{R}^m$ będzie jakąś inną podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$, $d' := \dim N$, i niech $f : N \rightarrow M$ będzie odwzorowaniem różniczkowalnym. Przypomnijmy, że $f'(z) : T_z N \rightarrow T_{f(z)} M$ dla dowolnego $z \in N$. Pozwala to zdefiniować *operację podstawiania*

$$f^* : \mathcal{F}_{(r)}(M) \rightarrow \mathcal{F}_{(r)}(N),$$

$$f^*(u)(z)(\zeta_1, \dots, \zeta_r) := u(f(z))(f'(z)(\zeta_1), \dots, f'(z)(\zeta_r)), \quad u \in \mathcal{F}_{(r)}(M), \quad z \in N, \quad \zeta_1, \dots, \zeta_r \in T_z N.$$

Można łatwo sprawdzić, że $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ (przy stosownych założeniach o f i g) — ĆWICZENIE.

Jeżeli $p : P \rightarrow U$ jest lokalną parametryzacją M oraz $u \in \mathcal{F}_{(d)}(M)$, to $p^*(u) \in \mathcal{F}_{(d)}(P)$. W szczególności, funkcja $\widetilde{p^*(u)}$ jest dobrze zdefiniowana.

Powiemy, że forma $u \in \mathcal{F}_{(r)}(M)$ jest *klasy $\mathcal{C}^{k-1}$* ($u \in \mathcal{C}_{(r)}^{k-1}(M)$), jeżeli dla dowolnej parametryzacji lokalnej $p : P \rightarrow U$ (klasy $\mathcal{C}^k$) forma $p^*(u)$ jest klasy $\mathcal{C}^{k-1}$. Bez trudu można sprawdzić (ĆWICZENIE), że $u \in \mathcal{C}_{(r)}^{k-1}(M)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego punktu $a \in M$ istnieje lokalna parametryzacja $p : P \rightarrow U$ (klasy $\mathcal{C}^k$), $a \in U$, dla której $p^*(u) \in \mathcal{C}_{(r)}^{k-1}(P)$.

Obserwacja 13.2.4. Załóżmy, że $M \subset \Omega$, gdzie Ω jest zbiorem otwartym, i niech $i : M \rightarrow \Omega$ oznacza operator inkluzji. Wtedy:

(a) Jeżeli $u \in \mathcal{F}_{(r)}(\Omega)$, to $u|_M = i^*(u)$, gdzie forma $u|_M$ została zdefiniowana powyżej w (*).

(b) Jeżeli $u \in \mathcal{C}_{(r)}^{k-1}(\Omega)$, to $i^*(u) \in \mathcal{C}_{(r)}^{k-1}(M)$.

Istotnie, dla dowolnej lokalnej parametryzacji $p : P \rightarrow U$ mamy

$$p^*(i^*(u)) = (i \circ p)^*(u).$$

(c) Załóżmy dodatkowo, że istnieje retrakcja $R : \Omega \rightarrow M$ klasy $\mathcal{C}^k$ ⁽¹¹⁾. Niech $u \in \mathcal{F}_{(r)}(M)$. Wtedy $R^*(u) \in \mathcal{F}_{(r)}(\Omega)$ oraz

$$i^*(R^*(u)) = (R \circ i)^*(u) = \text{id}^*(u) = u.$$

⁽¹¹⁾ Wiemy już, że taka retrakcja lokalnie istnieje — Twierdzenie 10.14.3(viii).

Ponadto, jeżeli $u \in \mathcal{C}_{(r)}^{k-1}(M)$, to $R^*(u) \in \mathcal{C}_{(r)}^{k-1}(\Omega)$. Istotnie, dla dowolnej lokalnej parametryzacji $p : P \longrightarrow U$ mamy

$$R^*(u) = (p \circ S)^*(u) = S^*(p^*(u)),$$

gdzie $S := p^{-1} \circ R : R^{-1}(U) \longrightarrow P$ (S jest odwzorowaniem klasy $\mathcal{C}^k$ — Obserwacja 10.14.12).

Propozycja 13.2.5. *Następujące warunki są równoważne:*

- (i) M jest orientowalna;
- (ii) istnieje forma $\omega \in \mathcal{F}_{(d)}(M)$ taka, że dla dowolnego punktu $a \in M$ istnieje lokalna parametryzacja $p : P \longrightarrow U$, $a \in U$, dla której $\widetilde{p^*(\omega)}(t) > 0$ dla $t \in P$;
- (iii) istnieje forma $\omega \in \mathcal{C}_{(d)}^{k-1}(M)$ taka, że dla dowolnego punktu $a \in M$ istnieje lokalna parametryzacja $p : P \longrightarrow U$, $a \in U$, dla której $\widetilde{p^*(\omega)} \equiv |p'|$.

Dowód. Jest oczywiste, że (iii) $\implies$ (ii).

(ii) $\implies$ (i): Rozważmy rodzinę wszystkich lokalnych parametryzacji $p : P \longrightarrow U$, dla których $\widetilde{p^*(\omega)}(t) > 0$ dla $t \in P$. Wobec (ii) rodzina ta tworzy atlas. Jeżeli $p : P \longrightarrow U$ i $q : Q \longrightarrow U$ są dwiema parametryzacjami powyższego typu i $\varphi := p^{-1} \circ q$ jest funkcją przejścia, to

$$0 < \widetilde{q^*(\omega)}(u) = \varphi^*(\widetilde{p^*(\omega)})(u) = (\det \varphi'(u)) \widetilde{p^*(\omega)}(\varphi(u)), \quad u \in Q.$$

Wynika stąd natychmiast, że $\det \varphi'(u) > 0$ dla $u \in Q$, a więc zbudowaliśmy atlas zadający orientację.

(i) $\implies$ (iii): Dla dowolnej lokalnej parametryzacji $p : P \longrightarrow U$ zgodnej z orientacją określmy

$$\omega(x) := \sum_{I \in \Lambda_d^n} \left(\frac{\partial(p_{i_1}, \dots, p_{i_d})}{\partial(t_1, \dots, t_d)} \right) \frac{1}{|p'|} (p^{-1}(x)) dx_I|_{(T_x M)^d}, \quad x \in U.$$

Bez trudu sprawdzamy, że ω jest poprawnie określoną formą z przestrzeni $\mathcal{F}_{(d)}(M)$. Ponadto, $\widetilde{p^*(\omega)} \equiv |p'|$, skąd wynikają pozostałe własności. $\square$

Obserwacja 13.2.6. Niech

$$\omega(x) = \sum_{I \in \Lambda_d^n} \omega_I(x) dx_I|_{(T_x M)^d}, \quad x \in M,$$

będzie formą taką, jak w (iii) i niech O oznacza orientację zadaną przez ω .

(a) Formę ω możemy utożsamiać z unormowanym polem wektorowym

$$M \ni x \longmapsto \omega(x) \in \mathbb{S}_{(d)}^{(n)}{}_{-1}$$

klasy $\mathcal{C}^{k-1}$.

(b) Dla dowolnego otoczenia otwartego Ω podrozumności M oraz dla dowolnej formy $u \in \mathcal{F}_{(d)}(\Omega)$ mamy

$$[u] = \langle u, \omega \rangle,$$

gdzie

$$\langle u, \omega \rangle = \sum_{I \in \Lambda_d^n} u_I \omega_I.$$

W szczególności, jeżeli $u \in L^1(M, O)$, to

$$\int_{M, O} u = \int_M \langle u, \omega \rangle d\mathcal{L}^M.$$

13.3. Twierdzenie Stokesa

Założmy, że:

- (1) $M \subset \mathbb{R}^n$ jest d -wymiarową orientowalną podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$, $1 \leq d \leq n$,
- (2) $D \subset M$ jest obszarem tłustym w M ($\text{int}_M \text{cl}_M D = D$),
- (3) $\overline{D} = \text{cl}_{\mathbb{R}^n} D$ jest zbiorem zwartym,
- (4) $\overline{D} \subset \Omega \in \text{top } \mathbb{R}^n$,
- (5) $M' := \partial_M D$ jest albo zbiorem pustym albo $(d-1)$ -wymiarową podrozmaitością $\mathbb{R}^n$ klasy $\mathcal{C}^1$,
- (6) $\mathcal{L}^M(D) < +\infty$,
- (7) $\mathcal{L}^{M'}(M') < +\infty$ (oczywiście, gdy $M' \neq \emptyset$),
- (8) O jest ustaloną orientacją M ,
- (9) O' jest orientacją podrozmaitości M' indukowaną przez O (oczywiście, gdy $M' \neq \emptyset$),
- (10) $u \in \mathcal{C}_{(d-1)}^1(\Omega)$.

Interesuje nas, kiedy prawdziwe jest *Twierdzenie Stokesa* ⁽¹²⁾ mówiące, że następujący *wzór Stokesa* jest prawdziwy

$$\int_{D,O} du = \int_{M',O'} u, \quad (13)$$

gdzie prawą stronę rozumiemy jako zero, gdy $M' = \emptyset$.

Istnieje wiele wariantów twierdzenia Stokesa. My udowodnimy następujące dwa.

Twierdzenie 13.3.1 (I wersja Twierdzenia Stokesa). *Wzór Stokesa zachodzi przy dodatkowym założeniu, że zbiór $K := (\text{supp } u) \cap (\text{cl}_M D)$ ⁽¹⁴⁾ jest zwarty ⁽¹⁵⁾.*

Twierdzenie 13.3.2 (II wersja Twierdzenia Stokesa). *Wzór Stokesa zachodzi przy dodatkowych założeniach, że zbiór $S := \overline{D} \setminus M$ jest zwarty oraz $\mathcal{L}^{d-1}(\text{pr}_I(S)) = 0$ dla dowolnego $I \in \Lambda_{d-1}^n$, gdzie pr_I oznacza projekcję na oś o numerach $i_1, \dots, i_{d-1}$ ($d \geq 2$).*

Obserwacja 13.3.3. (a) Niech $M = \mathbb{R}$, $O = [\mathbb{R}]_+$, $D = (a, b) \subset \subset \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{C}^1([a, b])$. Wtedy $M' = \{a, b\}$, $O'(a) = -1$, $O'(b) = +1$. W tym przypadku wzór Stokesa sprowadza się do wzoru:

$$\int_a^b u'(t) dt = u(b) - u(a),$$

który, jak wiemy, zawsze zachodzi.

(b) Niech $M \in \text{top } \mathbb{R}^2$, $O = [\mathbb{R}^2]_+$, $u = Pdx + Qdy$. Wtedy wzór Stokesa sprowadza się do wzoru Greena ⁽¹⁶⁾:

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial_M D, O'} Pdx + Qdy.$$

Wzór Greena zostanie szczegółowo omówiony w Twierdzeniu 13.3.4.

(c) Niech $M \in \text{top } \mathbb{R}^3$, $O = [\mathbb{R}^3]_+$,

$$u = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy. \quad (17)$$

⁽¹²⁾ George Stokes (1819–1903).

⁽¹³⁾ Ponieważ du jest formą ciągłą na Ω , a $D \subset \subset \Omega$, więc funkcja $\|du\|$ jest ograniczona na $\overline{D}$, co, wobec skończoności miary D , implikuje, że całka po lewej stronie istnieje i jest skończona — por. Propozycja 13.2.1(b). Z analogicznych powodów całka po prawej stronie istnieje i jest skończona. Problemem jest więc równość.

⁽¹⁴⁾ $\text{supp } u := \bigcup_I \text{supp } u_I$.

⁽¹⁵⁾ K jest zwarty np. gdy $\overline{D} \subset M$.

⁽¹⁶⁾ Por. Przykład 13.1.8.

Wtedy wzór Stokesa sprowadza się do *wzoru Gaussa–Ostrogradskiego* ⁽¹⁸⁾ ⁽¹⁹⁾ ⁽²⁰⁾:

$$\int_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \int_{\partial_M D, O'} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy.$$

(d) Niech $M \in \text{top } \mathbb{R}^n$, $O = [\mathbb{R}^n]_+$,

$$u = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} u_j dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

i niech $\mathbf{n} : \partial_M D \rightarrow \mathbb{S}_{n-1}$ będzie ciągłym polem wektorów normalnych zadających orientację O' (por. Przykład 13.2.3(b)). Wtedy

$$\int_D \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) d\mathcal{L}^n = \int_{\partial_M D, O'} \left(\sum_{j=1}^n u_j \mathbf{n}_j \right) d\mathcal{L}^{\partial_M D}.$$

W szczególności, mamy następujący *wzór na całkowanie przez części*: Jeżeli $f, g \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, gdzie Ω jest pewnym otoczeniem $\bar{D}$, to

$$\int_D f \frac{\partial g}{\partial x_j} d\mathcal{L}^n = \int_{\partial D} (fg \mathbf{n}_j) d\mathcal{L}^{\partial D} - \int_D \frac{\partial f}{\partial x_j} g d\mathcal{L}^n, \quad j = 1, \dots, n.$$

W konsekwencji, dla dowolnych $f, g \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, mamy:

$$\int_D f(\Delta g) d\mathcal{L}^n = \int_{\partial D} \left(f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} - g \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right) d\mathcal{L}^{\partial D} + \int_D (\Delta f) g d\mathcal{L}^n. \quad (\ddagger)$$

gdzie Δ oznacza *operator Laplace’a* (laplasjan)

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

Wzór $(\ddagger)$ nosi nazwę *wzoru Greena dla operatora Laplace’a*.

Istotnie,

$$\begin{aligned} \int_D f(\Delta g) d\mathcal{L}^n &= \sum_{j=1}^n \int_D f \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial g}{\partial x_j} \right) d\mathcal{L}^n = \sum_{j=1}^n \int_{\partial D} f \frac{\partial g}{\partial x_j} \mathbf{n}_j d\mathcal{L}^{\partial D} - \sum_{j=1}^n \int_D \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_j} d\mathcal{L}^n \\ &= \int_{\partial D} f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} d\mathcal{L}^{\partial D} - \sum_{j=1}^n \int_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial x_j} g \mathbf{n}_j d\mathcal{L}^{\partial D} + \sum_{j=1}^n \int_D g \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) d\mathcal{L}^n \\ &= \int_{\partial D} \left(f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} - g \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right) d\mathcal{L}^{\partial D} + \int_D (\Delta f) g d\mathcal{L}^n. \end{aligned}$$

(e) Niech $n = 3$, $d = 2$, $u = Pdx + Qdy + Rdz$. Wtedy wzór Stokesa sprowadza się do *klasycznego wzoru Stokesa*:

$$\int_{D, O} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy = \int_{M', O'} Pdx + Qdy + Rdz.$$

Twierdzenie 13.3.4 (Wzór Greena). *Wzór Greena zachodzi dla dowolnego obszaru $D \subset \mathbb{R}^2$ spełniającego warunek $(\ddagger)$ ze strony 236.*

⁽¹⁷⁾ Ten zapis formy odpowiada poprzedniemu zapisowi $u = \sum_{j=1}^3 (-1)^{j-1} u_j dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \cdots \wedge dx_3$;

por. (d).

⁽¹⁸⁾ Carl Friedrich Gauss (1777–1855).

⁽¹⁹⁾ Michaił Wasyliewicz Ostrogradski (1801–1862).

⁽²⁰⁾ Por. Przykład 13.1.8.

Dowód. Wykorzystamy II wersję Twierdzenia Stokesa. Pokażemy, że istnieje zbiór zwarty $S \subset \partial D$ taki, że $(\partial D) \setminus S$ jest jednowymiarową rozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{L}^1(\text{pr}_i(S)) = 0$, $i = 1, 2$, oraz

$$\int_{(\partial D) \setminus S, O'} P dx + Q dy = \int_{\partial D, O'} P dx + Q dy.$$

Przypuśćmy, że S został znaleziony. Wtedy bierzemy $M := \mathbb{R}^2 \setminus S$ i korzystamy z II wersji Twierdzenia Stokesa — szczegóły pozostawiamy jako ĆWICZENIE.

Pozostaje skonstruować S . Wobec twierdzenia o funkcji uwikłanej wystarczy udowodnić, że jeżeli $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ jest klasy $\mathcal{C}^1$, to zbiór $A := \{\sigma(t) : \sigma'(t) = 0\}$ ma projekcje miary zero.

Ponieważ $\text{pr}_i(A) = \{\sigma_i(t) : \sigma'(t) = 0\} \subset \{\sigma_i(t) : \sigma'_i(t) = 0\}$, wynik ten wynika z Lematu 12.4.12 (dla $n = 1$). $\square$

Wniosek 13.3.5. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i niech $u \in \mathcal{C}_{(n-1)}^1(\Omega)$, $\text{supp } u \subset\subset \Omega$. Wtedy

$$\int_{\Omega} du = 0.$$

Dowód. Dobierzmy kule $B_j = \mathbb{B}(a_j, r_j)$, $j = 1, \dots, N$, tak, że $\text{supp } u \subset B_1 \cup \dots \cup B_N \subset\subset \Omega$ i niech $\varphi_1, \dots, \varphi_N \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ będą takie, że $\text{supp } \varphi_j \subset\subset B_j$, $j = 1, \dots, N$, $\varphi_1 + \dots + \varphi_N = 1$ w otoczeniu $\text{supp } u$. Teraz, na podstawie wzoru Stokesa dla kuli, mamy:

$$\int_{\Omega, [\mathbb{R}^n]_+} du = \int_{\Omega, [\mathbb{R}^n]_+} d((\varphi_1 + \dots + \varphi_N)u) = \sum_{j=1}^N \int_{B_j, [\mathbb{R}^n]_+} d(\varphi_j u) = \sum_{j=1}^N \int_{\partial B_j, [\mathbb{R}^n]_+'} \varphi_j u = 0. \quad \square$$

Wniosek 13.3.6 (Wzór na całkowanie przez części). Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i niech $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$, $g \in \mathcal{C}_0^k(\Omega)$. Wtedy

$$\int_{\Omega} f D^\alpha g \, d\mathcal{L}^n = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} (D^\alpha f) g \, d\mathcal{L}^n, \quad |\alpha| \leq k.$$

W szczególności, dla dowolnych $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, $g \in \mathcal{C}_0^2(\Omega)$ mamy

$$\int_{\Omega} f(\Delta g) \, d\mathcal{L}^n = \int_{\Omega} (\Delta f) g \, d\mathcal{L}^n.$$

Dowód. Wystarczy rozważyć przypadek $k = 1$, $\alpha = e_1$. Niech

$$u := f g dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n \in \mathcal{C}_{(n-1)}^1(\Omega).$$

Oczywiście $\text{supp } u \subset \text{supp } g \subset\subset \Omega$. Zauważmy, że

$$du = \left(f \frac{\partial g}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_1} g \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Pozostaje skorzystać z Wniosku 13.3.5. $\square$

Na koniec podamy jedno bardzo nietrywialne zastosowanie wzoru Stokesa.

Twierdzenie 13.3.7 (Twierdzenie Brouwera o punkcie stałym ⁽²¹⁾). Każde odwzorowanie ciągłe $f : \overline{\mathbb{B}}_n \rightarrow \overline{\mathbb{B}}_n$ ma punkt stały.

Dowód. Krok 1⁰: Można założyć, że f jest klasy $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Postępujemy następująco. Ponieważ $\overline{\mathbb{B}}_n$ jest zbiorem domkniętym, zatem istnieje ciągle przedłużenie f do odwzorowania $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Mnożąc $\tilde{f}$ przez funkcję $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{B}(2), [0, 1])$, $g = 1$ na $\mathbb{B}(\frac{3}{2})$, możemy założyć, że $\tilde{f}$ znika poza $\mathbb{B}(2)$. Do każdej składowej odwzorowania $\tilde{f}$ stosujemy regularyzację i otrzymujemy odwzorowania klasy $\mathcal{C}^\infty$ $\tilde{f}_\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ takie, że $\tilde{f}_\varepsilon \rightarrow \tilde{f}$ jednostajnie na $\mathbb{R}^n$ (Twierdzenie 12.8.2(b)). W szczególności, dla dowolnego $\nu \in \mathbb{N}$ istnieje odwzorowanie klasy $\mathcal{C}^\infty$ $g_\nu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ takie, że $\|g_\nu - \tilde{f}\| \leq \frac{1}{\nu}$ na $\mathbb{R}^n$. Niech $f_\nu := g_\nu / (1 + 1/\nu)$. Widać, że $f_\nu : \mathbb{B}_n \rightarrow \overline{\mathbb{B}}_n$, $\nu \in \mathbb{N}$. Jeżeli twierdzenie jest prawdziwe dla odwzorowań klasy $\mathcal{C}^\infty$, to dla każdego ν istnieje punkt $x_\nu \in \overline{\mathbb{B}}_n$ taki, że $f_\nu(x_\nu) = x_\nu$, czyli $g_\nu(x_\nu) = (1 + \frac{1}{\nu})x_\nu$. Możemy założyć, że $x_\nu \rightarrow x_0 \in \overline{\mathbb{B}}_n$. Wtedy $f(x_0) = x_0$.

⁽²¹⁾ Luitzen Brouwer (1881–1966).

Krok 2⁰: Zakładamy, że $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Przypuścimy, że $f(x) \neq x$ dla każdego $x \in \bar{\mathbb{B}}_n$. Wtedy również, $f(x) \neq x$ dla $x \in U$, gdzie U jest otoczeniem $\bar{\mathbb{B}}_n$. Dla dowolnego $x \in \bar{\mathbb{B}}_n$ istnieje dokładnie jedna liczba $t = t(x) \geq 0$ taka, że $r(x) := x + t(x - f(x)) \in \mathbb{S}_{n-1}$. Określiliśmy w ten sposób odwzorowanie $r : \bar{\mathbb{B}}_n \rightarrow \mathbb{S}_{n-1}$. Widać, że r jest retrakcją. Pokażemy, że przedłuża się ono do odwzorowania klasy $\mathcal{C}^\infty$ w pewnym otoczeniu $\bar{\mathbb{B}}_n$. Istotnie, rozwiązując równanie

$$\|x + t(x - f(x))\|^2 = \|x\|^2 + 2t\langle x, x - f(x) \rangle + t^2\|x - f(x)\|^2 = 1$$

wnioskujemy, że $\Delta(x) := 4\langle x, x - f(x) \rangle^2 + 4(1 - \|x\|^2)\|x - f(x)\|^2 > 0$ dla $x \in V$, gdzie $V \subset U$ jest otoczeniem $\bar{\mathbb{B}}_n$. Ponadto,

$$t(x) = \frac{-2\langle x, x - f(x) \rangle + \sqrt{\Delta(x)}}{2\|x - f(x)\|^2}.$$

Wynika stąd, że r jest klasy $\mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R}^n)$.

Mamy więc retrakcję $r = (r_1, \dots, r_n) : \bar{\mathbb{B}}_n \rightarrow \mathbb{S}_{n-1}$ klasy $\mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R}^n)$. Niech $u := r_1 dr_2 \wedge \dots \wedge dr_n \in \mathcal{C}_{(n-1)}^\infty(V)$. Na podstawie twierdzenia Stokesa (w I wersji z $M := \mathbb{R}^n$, $D = \bar{\mathbb{B}}_n$) mamy:

$$\int_{\bar{\mathbb{B}}_n, [\mathbb{R}^n]_+} du = \int_{\mathbb{S}_{n-1}, [\mathbb{R}^n]'_+} u.$$

Zauważmy, że

$$\int_{\bar{\mathbb{B}}_n, [\mathbb{R}^n]_+} du = \int_{\bar{\mathbb{B}}_n, [\mathbb{R}^n]_+} dr_1 \wedge dr_2 \wedge \dots \wedge dr_n = \int_{\bar{\mathbb{B}}_n, [\mathbb{R}^n]_+} (\det r') dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \int_{\bar{\mathbb{B}}_n} (\det r') dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Różniczkując związek $\|r\|^2 = r_1^2 + \dots + r_n^2 \equiv 1$ na $\bar{\mathbb{B}}_n$ dostajemy

$$\sum_{j=1}^n r_j \frac{\partial r_j}{\partial x_k} = 0 \quad \text{na } \bar{\mathbb{B}}_n, \quad k = 1, \dots, n.$$

W szczególności $\det r' \equiv 0$ na $\bar{\mathbb{B}}_n$, a więc

$$\int_{\mathbb{S}_{n-1}, [\mathbb{R}^n]'_+} u = 0.$$

Niech $v := x_1 dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$. Na podstawie wzoru Stokesa mamy:

$$\int_{\mathbb{S}_{n-1}, [\mathbb{R}^n]'_+} v = \int_{\bar{\mathbb{B}}_n, [\mathbb{R}^n]_+} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \mathcal{L}^n(\bar{\mathbb{B}}_n) > 0.$$

Zauważmy, że $u = r^*(v)$. Rozważmy dowolną lokalną parametryzację $p : P \rightarrow U$ sfery $\mathbb{S}_{n-1}$ zgodną z orientacją. Mamy $p^*(u) = (r \circ p)^*(v) = p^*(v)$ (bo r jest retrakcją). Stąd

$$0 = \int_{\mathbb{S}_{n-1}, [\mathbb{R}^n]'_+} u = \int_{\bar{\mathbb{B}}_n, [\mathbb{R}^n]_+} x_1 dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n > 0;$$

sprzeczność. □

Twierdzenie 13.3.8 (Twierdzenie o retrakcji). *Nie istnieje ciągła retrakcja $\bar{\mathbb{B}}_n \rightarrow \mathbb{S}_{n-1}$.*

Dowód. Przypuścimy, że $r : \bar{\mathbb{B}}_n \rightarrow \mathbb{S}_{n-1}$ jest taką retrakcją i niech $f = -r : \bar{\mathbb{B}}_n \rightarrow \mathbb{S}_{n-1}$. Na podstawie Twierdzenia Brouwera o punkcie stałym istnieje $x_0 \in \bar{\mathbb{B}}_n$ taki, że $f(x_0) = x_0$. Oczywiście, $x_0 \in \mathbb{S}_{n-1}$. W szczególności, $f(x_0) = -x_0$, bo r jest retrakcją — sprzeczność. □

Dowód I wersji Twierdzenia Stokesa 13.3.1. Dla dowolnego punktu $a \in K$ ustalmy parametryzację $p_a : P_a \rightarrow U_a$ podrozmaitości M zgodną z O taką, że $a \in U_a$, P_a jest otwartą kostką i jeżeli $M' \cap U_a \neq \emptyset$, to $\tilde{p}_a : \tilde{P}_a \rightarrow M' \cap U_a$ jest parametryzacją zgodną z O' , gdzie $P_a = \Delta_a \times \tilde{P}_a \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$, $0 \in \Delta_a$, $\tilde{p}_a(\xi) := p(0, \xi)$, $\xi \in \tilde{P}_a$. Przypomnijmy, że w przypadku $d \geq 2$ mamy: $p_a((P_a)_-) = D \cap U_a$, gdzie $(P_a)_\pm := P_a \cap \{\pm t_1 > 0\}$, zaś w przypadku $d = 1$ mamy: $p_a((P_a)_-) = D \cap U_a$, gdy $O(a) = +1$ i $p_a((P_a)_+) = D \cap U_a$, gdy $O(a) = -1$.

Ponieważ K jest zwarty, więc istnieje skończone pokrycie $U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_N} \supset K$. Niech $U_{a_j} = M \cap G_j$, gdzie $G_j \in \text{top } \mathbb{R}^n$, $G_j \subset \Omega$, $j = 1, \dots, N$. Niech $\varphi_j \in \mathcal{C}_0^\infty(G_j, [0, 1])$, $j = 1, \dots, N$, będą takie, że

$\sum_{j=1}^N \varphi_j = 1$ w otoczeniu G_0 zbioru K . Niech $u_j := \varphi_j u \in \mathcal{C}_{(d-1)}^1(\Omega)$, $j = 1, \dots, N$. Zauważmy, że $\sum_{j=1}^N u_j = u$ na G_0 . W szczególności, $\sum_{j=1}^N du_j = du$ na G_0 . Mamy:

$$\begin{aligned} \int_{D,O} du &= \int_{D \cap G_0, O} du = \sum_{j=1}^N \int_{D \cap G_0, O} du_j = \sum_{j=1}^N \int_{D,O} du_j, \\ \int_{M',O'} u &= \int_{M' \cap G_0, O'} u = \sum_{j=1}^N \int_{M' \cap G_0, O'} u_j = \sum_{j=1}^N \int_{M',O'} u_j, \end{aligned}$$

więc wystarczy sprawdzić wzór Stokesa dla każdej formy u_j z osobna.

Ustalmy j i dla prostoty przyjmijmy, że $u = u_j$ oraz opuśćmy nieistotne wskaźniki. Tak więc $p : P \rightarrow U$ jest wyróżnioną parametryzacją (posiadającą wszystkie poprzednio wymienione własności), $U = M \cap G$ i $\text{supp } u \subset \subset G$.

Niech $L := p^*(du) \in \mathcal{C}_{(d)}^0(P)$, $R := \tilde{p}^*(u) \in \mathcal{C}_{(d-1)}^0(\tilde{P})$. Przypomnijmy, że

$$\text{supp } L \subset \subset P, \quad \text{supp } R \subset \subset \tilde{P}.$$

W przypadku, gdy $U' := M' \cap U = \emptyset$ niech $Q := P$. W przypadku, gdy $U' \neq \emptyset$ niech $Q = P_-$ lub $Q = P_+$ tak by $p(Q) = D \cap U$ (jeżeli $d \geq 2$, to oczywiście $Q = P_-$). Nasz problem polega na pokazaniu, że

$$\int_{D,O} du = \int_Q \tilde{L} d\mathcal{L}^d = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } U' = \emptyset \\ \int_{\tilde{P}} \tilde{R} d\mathcal{L}^{d-1}, & \text{jeżeli } U' \neq \emptyset \end{cases} = \int_{M',O'} u.$$

Najpierw rozpatrzmy przypadek $d = 1$. Na podstawie Propozycji 13.1.10(e) mamy: $L = dv = v'dt$, gdzie $v := p^*(u) = u \circ p$. Niech $Q = (\alpha, \beta)$. W konsekwencji:

$$\begin{aligned} \int_Q \tilde{L} d\mathcal{L}^1 &= \int_{\alpha}^{\beta} v'(t)dt = v(\beta) - v(\alpha) = u(p(\beta)) - u(p(\alpha)) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } U' = \emptyset \\ u(p(0)), & \text{jeżeli } U' \neq \emptyset, Q = P_- \\ -u(p(0)), & \text{jeżeli } U' \neq \emptyset, Q = P_+ \end{cases} = \int_{M',O'} u, \end{aligned}$$

co kończy dowód dla $d = 1$.

Przypadek $d \geq 2$ jest znacznie bardziej skomplikowany. Wobec liniowości wszystkich operacji możemy się ograniczyć do form postaci $u = \varphi dx_I$, gdzie $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(G)$, a $I \in \mathcal{A}_{d-1}^n$.

Na wstępie, aby uchwycić zasadniczą myśl dowodu, przyjmijmy dodatkowo, że p jest klasy $\mathcal{C}^2$. Wtedy na podstawie Propozycji 13.1.10(f) mamy $p^*(du) = dv$, gdzie $v := p^*(u)$. Niech $\sigma : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\sigma(\xi) = (0, \xi)$. Odnotujmy, że $\tilde{p} = p \circ \sigma$, a zatem $R = \sigma^*(v)$. Tak więc chcemy pokazać, że

$$\int_Q \widetilde{dv} d\mathcal{L}^d = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } Q = P \\ \int_{\tilde{P}} \widetilde{\sigma^*(v)} d\mathcal{L}^{d-1}, & \text{jeżeli } Q \neq P \end{cases}.$$

Wobec liniowości możemy założyć, że

$$v = \psi dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{k-1} \wedge dt_{k+1} \wedge \dots \wedge dt_d$$

dla pewnego k . Kostkę Q przedstawiamy w postaci $A \times (\gamma, \delta) \times B \subset \mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-k}$. Niech $t = (t_A, t_k, t_B) \in \mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-k}$. Na podstawie twierdzenia Fubniego dostajemy:

$$\begin{aligned} \int_Q \widetilde{dv} d\mathcal{L}^d &= \int_Q (-1)^{k-1} \frac{\partial \psi}{\partial t_k} dt = (-1)^{k-1} \int_A \int_B \left(\int_{\gamma}^{\delta} \frac{\partial \psi}{\partial t_k} dt_k \right) dt_A dt_B \\ &= (-1)^{k-1} \int_A \int_B \left(\psi(t_A, \delta, t_B) - \psi(t_A, \gamma, t_B) \right) dt_A dt_B. \end{aligned}$$

Ponieważ $\text{supp } v \subset\subset P$, ostatnie wyrażenie jest równe zero, jeżeli $Q = P$ lub $k \geq 2$. Jeżeli $Q \neq P$ i $k = 1$, to jest ono równe

$$\int_{\tilde{P}} \psi(0, \xi) d\mathcal{L}^{d-1}(\xi).$$

Z drugiej strony,

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{P}} \widetilde{\sigma^*(v)} d\mathcal{L}^{d-1} &= \int_{\tilde{P}} ((\psi \circ \sigma) d\sigma_1 \wedge \cdots \wedge d\sigma_{k-1} \wedge d\sigma_{k+1} \wedge \cdots \wedge d\sigma_d) \sim d\mathcal{L}^{d-1} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } k \geq 2 \\ \int_{\tilde{P}} \psi(0, \xi) d\mathcal{L}^{d-1}(\xi), & \text{jeżeli } k = 1 \end{cases}, \end{aligned}$$

co kończy dowód przy dodatkowym założeniu.

W przypadku ogólnym zauważmy, że

$$L = p^*(du) = p^*(d\varphi \wedge dx_I) = p^*(d\varphi) \wedge dp_I = d(\varphi \circ p) \wedge dp_I$$

i $R = \sigma^*((\varphi \circ p)dp_I)$. Oznaczając $f_1 := \varphi \circ p$ i $f_j := p_{i_{j-1}}$, $j = 2, \dots, d$, sprowadzamy zagadnienie do pytania, czy

$$\int_{Q, [\mathbb{R}^d]_+} df_1 \wedge \cdots \wedge df_d = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } Q = P \\ \int_{\tilde{P}, [\mathbb{R}^{d-1}]_+} \sigma^*(f_1 df_2 \wedge \cdots \wedge df_d), & \text{jeżeli } Q \neq P \end{cases}.$$

Odnajdujemy, że $f_1 \in \mathcal{C}_0^1(P)$, $f_j \in \mathcal{C}^1(P)$, $j = 2, \dots, d$. Jeżeli $f_2, \dots, f_d \in \mathcal{C}^2(P)$, to $d(f_1 df_2 \wedge \cdots \wedge df_d) = df_1 \wedge \cdots \wedge df_d$, a więc powyższy wzór sprowadza się do wzoru Stokesa dla Q , który to wzór, jak wynika z poprzedniej części dowodu, zachodzi.

Aby wykazać wzór w przypadku klasy $\mathcal{C}^1$ zastosujemy aproksymację. Na wstępie zauważmy, że możemy założyć, że $f_j \in \mathcal{C}_0^1(P)$ (zastępując f_j przez gf_j , gdzie $g \in \mathcal{C}_0^\infty(P)$ i $g = 1$ w otoczeniu $\text{supp } f_1$), $j = 2, \dots, d$. Teraz wystarczy wykorzystać regularyzację z Twierdzenia 12.8.2 i zauważyć, że na podstawie Twierdzenia 12.8.2(d) mamy (ĆWICZENIE):

$$\begin{aligned} df_1 \wedge d(f_2)_\varepsilon \wedge \cdots \wedge d(f_d)_\varepsilon &= \frac{\partial(f_1, (f_2)_\varepsilon, \dots, (f_d)_\varepsilon)}{\partial(t_1, \dots, t_d)} dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_d \\ &\longrightarrow \frac{\partial(f_1, \dots, f_d)}{\partial(t_1, \dots, t_d)} dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_d = df_1 \wedge \cdots \wedge df_d \end{aligned}$$

jednostajnie na $\mathbb{R}^d$ przy $\varepsilon \rightarrow 0$. Ponadto,

$$\begin{aligned} \sigma^*(f_1 d(f_2)_\varepsilon \wedge \cdots \wedge d(f_d)_\varepsilon) &= (f_1 \circ \sigma) \frac{\partial((f_2)_\varepsilon \circ \sigma, \dots, (f_d)_\varepsilon \circ \sigma)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_{d-1})} d\xi_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_{d-1} \\ &\longrightarrow (f_1 \circ \sigma) \frac{\partial(f_2 \circ \sigma, \dots, f_d \circ \sigma)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_{d-1})} d\xi_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_{d-1} = \sigma^*(f_1 df_2 \wedge \cdots \wedge df_d) \end{aligned}$$

jednostajnie na $\mathbb{R}^{d-1}$ przy $\varepsilon \rightarrow 0$.

Gwarantuje to zbieżność odpowiednich całek

$$\begin{aligned} \int_{Q, [\mathbb{R}^d]_+} df_1 \wedge d(f_2)_\varepsilon \wedge \cdots \wedge d(f_d)_\varepsilon &\longrightarrow \int_{Q, [\mathbb{R}^d]_+} df_1 \wedge \cdots \wedge df_d, \\ \int_{\tilde{P}, [\mathbb{R}^{d-1}]_+} \sigma^*(f_1 d(f_2)_\varepsilon \wedge \cdots \wedge d(f_d)_\varepsilon) &\longrightarrow \int_{\tilde{P}, [\mathbb{R}^{d-1}]_+} \sigma^*(f_1 df_2 \wedge \cdots \wedge df_d), \end{aligned}$$

co kończy dowód. $\square$

Dowód II wersji Twierdzenia Stokesa 13.3.2. Wystarczy rozważyć przypadek, gdy $u = \varphi dx_I$ dla pewnego $I \in \Lambda_{d-1}^n$. Niech $S_I := \text{pr}_I(S)$. Zdefiniujmy:

$$\psi_\nu := 1 - (\chi_{S_I^{(2/\nu)}})_{1/\nu} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{d-1}, [0, 1]), \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Wtedy $\psi_\nu = 1$ poza $S_I^{(3/\nu)}$, $\psi_\nu = 0$ na $S_I^{(1/\nu)}$. W szczególności

$$\psi_\nu \rightarrow \chi_{\mathbb{R}^{d-1} \setminus S_I}$$

punktowo. Odnajdujemy, że zbiór otwarty $G_\nu := \text{int } S_I^{(1/\nu)}$ jest otoczeniem S_I . Określamy

$$u_\nu := (\psi_\nu \circ \text{pr}_I)u = (\psi_\nu \circ \text{pr}_I)\varphi dx_I.$$

Zauważmy, że

$$(\text{supp } u_\nu) \cap (\text{pr}_I^{-1}(G_\nu)) = \emptyset,$$

co oznacza, że zbiór $(\text{supp } u_\nu) \cap (\text{cl}_M D)$ jest zwarty. Na podstawie I wersji twierdzenia Stokesa mamy:

$$\int_{D,O} du_\nu = \int_{M',O'} u_\nu, \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Wystarczy pokazać, że

$$\int_{D,O} du_\nu \longrightarrow \int_{D,O} du, \quad \int_{M',O'} u_\nu \longrightarrow \int_{M',O'} u.$$

Niech $H := \text{pr}_I^{-1}(S_I)$. Oczywiście $[u_\nu] \longrightarrow [u]$ punktowo na $M' \setminus H$. Ponadto $||[u_\nu]|| \leq ||[u]||$ na M' . Stąd, na podstawie twierdzenia Lebesgue'a, dostajemy

$$\int_{M' \setminus H, O'} u_\nu \longrightarrow \int_{M' \setminus H, O'} u.$$

Zauważmy, że

$$du_\nu = d(\psi_\nu \circ \text{pr}_I)u + (\psi_\nu \circ \text{pr}_I)du = (\psi_\nu \circ \text{pr}_I)du.$$

Stąd $[du_\nu] \longrightarrow [du]$ punktowo na $M \setminus H$ oraz $||[du_\nu]|| \leq ||[du]||$. Mamy więc

$$\int_{D \setminus H, O} du_\nu \longrightarrow \int_{D \setminus H, O} du.$$

Pozostaje sprawdzić, co się dzieje na H . Potrzebny nam będzie następujący lemat.

Lemat 13.3.9. Niech N będzie r -wymiarową orientowaną podrozmainością w $\mathbb{R}^n$ i niech $B \subset \mathbb{R}^r$ będzie zbiorem domkniętym miary zero. Wtedy

$$\int_{N \cap \text{pr}_J^{-1}(B)} [f dx_J] d\mathcal{L}^N = 0$$

dla dowolnego $J \in \Lambda_r^n$ przy założeniu, że forma $f dx_J$ jest całkowalna na N .

Przyjmijmy lemat na chwilę. Jeżeli $M' \neq \emptyset$, to stosując lemat do $r = d - 1$, $N = M'$, $B = S_I$, $J = I$ i $f dx_I = u$ lub $f dx_I = u_\nu$, wnioskujemy, że

$$\int_{M' \cap H} [u] d\mathcal{L}^{M'} = \int_{M' \cap H} [u_\nu] d\mathcal{L}^{M'} = 0.$$

Niech teraz $r = d$, $N = D$. Mamy $du = \sum_{j \notin I} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I$ i podobnie dla du_ν . Bierzemy teraz $f dx_J = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I$, $J = (i_1, \dots, i_{s-1}, j, i_s, \dots, i_{d-1})$ i $B := \{(t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d : (t_1, \dots, t_{s-1}, t_{s+1}, \dots, t_d) \in S_I\}$ tak, że $\text{pr}_J^{-1}(B) = H$. Z lematu wnioskujemy, że

$$\int_{D \cap H} [du] d\mathcal{L}^M = \int_{D \cap H} [du_\nu] d\mathcal{L}^M = 0.$$

Dowód II wersji twierdzenia Stokesa jest zakończony. $\square$

Dowód Lematu 13.3.9. Niech $A := N \cap \text{pr}_J^{-1}(B)$ i niech A_0 oznacza zbiór tych wszystkich punktów $a \in A$ takich, że przy dowolnej lokalnej parametryzacji $p : P \longrightarrow U$ w otoczeniu a mamy:

$$\frac{\partial(p_{j_1}, \dots, p_{j_r})}{\partial(t_1, \dots, t_r)}(p^{-1}(a)) = 0.$$

Oczywiście A_0 jest relatywnie domknięty i $[f dx_J] = 0$ na A_0 . Pozostaje udowodnić, że

$$\int_{A \setminus A_0} [f dx_J] d\mathcal{L}^N = 0.$$

Rozumujemy lokalnie w otoczeniu ustalonego punktu $a \in A \setminus A_0$. Wobec definicji zbioru A_0 , podrozmaitość N da się opisać w pewnym otoczeniu U punktu a jako wykres $x_{J'} = g(x_J)$, $x_J \in Q$, gdzie J' oznacza wielowskaźnik uzupełniający do J w $(1, \dots, n)$ (ĆWICZENIE). Mamy stąd:

$$\int_{A \cap U} [f dx_J] d\mathcal{L}^N = \pm \int_{\{x_J : (x_J, g(x_J)) \in A\}} f(x_J, g(x_J)) dx_J = 0$$

bo $\{x_J : (x_J, g(x_J)) \in A\} \subset B$. □

Obserwacja 13.3.10. W praktyce, dla $d \geq 2$, twierdzenie Stokesa stosuje się najczęściej w następującej sytuacji. Załóżmy, że M, D, Ω, u spełniają warunki (1)–(4), (8), (10). Zamiast (5) zakładamy, że $\bar{D} \subset M$ (co automatycznie daje (6)) oraz, że $\partial_M D$ jest *kawałkami klasy $\mathcal{C}^1$* , co oznacza, że dowolnego punktu $a \in \partial_M D$ istnieje lokalna parametryzacja $p_a : (-2, 2)^d \rightarrow U_a$, gdzie $U_a \in \text{top } M$, $a \in U$, oraz $\ell_a \in \{1, \dots, d\}$ takie, że $p_a(0) = a$, $D \cap U_a = p((-2, 0)^{\ell_a} \times (-2, 2)^{d-\ell_a})$. Zauważmy, że jeżeli $\ell_a = 1$, to $(\partial_M D) \cap U_a = p(\{0\} \times (-2, 2)^{d-1})$. W szczególności, $(\partial_M D) \cap U_a$ jest $(d-1)$ -wymiarową podrozmaitością U_a klasy $\mathcal{C}^1$. Jeżeli $\ell_a \geq 2$, to

$$(\partial_M D) \cap (U_a \setminus E_a) = \bigcup_{s=1}^{\ell_a} p_a((-2, 0)^{s-1} \times \{0\} \times (-2, 0)^{\ell_a-s} \times (-2, 2)^{d-\ell_a}),$$

gdzie $E_a := p_a(\{t \in (-2, 2)^d : \exists 1 \leq i < j \leq \ell_a : t_i = t_j = 0\})$. W szczególności, $(\partial_M D) \cap (U_a \setminus E_a)$ jest sumą ℓ_a parami rozłącznych $(d-1)$ -wymiarowych podrozmaitości $U_a \setminus E_a$ klasy $\mathcal{C}^1$. Niech $F_a := p_a(\{t \in [-1, 1]^d : \exists 1 \leq i < j \leq \ell_a : t_i = t_j = 0\}) \subset E_a$.

Wobec zwartości $\partial_M D$ znajdziemy skończoną liczbę punktów $a_1, \dots, a_N \in \partial_M D$ takich, że $\partial_M D \subset \bigcup_{j=1}^N p_{a_j}((-1, 1)^d)$. Niech $F := \bigcup_{j=1}^N F_{a_j}$, gdzie $F_{a_j} := \emptyset$ jeżeli $\ell_{a_j} = 1$. Oczywiście, F jest zbiorem zwartym oraz $(\partial_M D) \cap (M \setminus F)$ jest $(d-1)$ -wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$. Niech $M_0 := M \setminus F$, $D_0 := D \cap M_0 = D \setminus F$. Zauważmy, że M_0, D_0, Ω, u spełniają (1)–(10) (ĆWICZENIE).

Będziemy chcieli zastosować II wersję twierdzenia Stokesa do M_0, D_0, Ω, u . Mamy $S := \bar{D}_0 \setminus M_0 \subset F$. Wystarczy więc pokazać, że dla każdego $j \in \{1, \dots, N\}$ takiego, że $\ell_{a_j} \geq 2$, zachodzi $\mathcal{L}^{d-1}(\text{pr}_I(F_{a_j})) = 0$ przy dowolnym $I \in \Lambda_{d-1}^n$. Ustalmy I oraz j i przyjmijmy dla uproszczenia zapisu $a := a_j$. Wystarczy udowodnić, że $\mathcal{L}^{d-1}(\text{pr}_I(H)) = 0$, gdzie $H := p_a(\{0\}^2 \times [-1, 1]^{d-2})$. Niech $f := \text{pr}_I \circ p_a(0, \cdot) : (-2, 2)^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^{d-1}$. Zauważmy, że f spełnia lokalnie warunek Lipschitza. Teraz na podstawie Propozycji 12.1.38(b) wnioskujemy, że zbiór $\text{pr}_I(H) = f(\{0\} \times [-1, 1]^{d-2})$ jest miary zero.

Na podstawie Lematu 13.3.9, rozumując tak, jak w końcówce dowodu II wersji twierdzenia Stokesa, dostajemy $\int_{D, O} du = \int_{D_0, O} du$. Niech O' oznacza orientację indukowaną na $\partial_{M_0} D_0$ przez O . Ostatecznie więc, na podstawie II wersji twierdzenia Stokesa, mamy:

$$\int_{D, O} du = \int_{D_0, O} du = \int_{\partial_{M_0} D_0, O'} u =: \int_{\partial_M D, O'} u.$$

13.4. Twierdzenie Stokesa w wersji kohomologicznej

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym.

Powiemy, że forma $u \in \mathcal{C}_{(d)}^1(\Omega)$ jest *zamknięta* (jest *kocyklem*), jeżeli $du = 0$.

Jeżeli forma $u \in \mathcal{C}_{(d)}(\Omega)$ jest taka, że $u = dw$ dla pewnej formy $w \in \mathcal{C}_{(d-1)}^1(\Omega)$, to mówimy, że u jest *dokładna* (jest *kobrzegiem*).

Z faktu iż $d^2 = 0$ wynika, że jeżeli $u = dw$ jest formą dokładną i w jest klasy $\mathcal{C}^2$, to u jest zamknięta.

Definicja 13.4.1. Zdefiniujemy

$$\mathcal{Z}^d(\Omega) := \{u \in \mathcal{C}_{(d)}^\infty(\Omega) : du = 0\}, \quad d \geq 0,$$

$$\mathcal{B}^0(\Omega) := \{0\},$$

$$\mathcal{B}^d(\Omega) := \{dw : w \in \mathcal{C}_{(d-1)}^\infty(\Omega)\}, \quad d \geq 1;$$

$\mathcal{B}^d(\Omega)$ jest podprzestrzenią $\mathcal{Z}^d(\Omega)$. Niech

$$H^d(\Omega) := \mathcal{Z}^d(\Omega) / \mathcal{B}^d(\Omega), \quad d = 0, 1, 2, \dots;$$

$H^d(\Omega)$ nazywamy *d-tą grupą kohomologii Ω* .

Obserwacja 13.4.2. (a) Formy z $\mathcal{Z}^0(\Omega)$ to funkcje lokalnie stałe. W szczególności, jeżeli $\Omega = D$ jest obszarem, to $\mathcal{Z}^0(D) \simeq \mathbb{R}$, a stąd $H^0(D) \simeq \mathbb{R}$.

(b) $\mathcal{Z}^n(\Omega) = \mathcal{C}_{(n)}^\infty(\Omega)$.

(c) Dla $d > n$ mamy: $\mathcal{Z}^d(\Omega) = \mathcal{B}^d(\Omega) = \{0\}$, a stąd $H^d(\Omega) = \{0\}$.

(d) Lemat Poincarégo (Twierdzenie 13.1.13) mówi, że jeżeli obszar D jest ściągalny różniczkowo do punktu w klasie $\mathcal{C}^\infty$ (np. D jest gwiazdzisty), to $H^d(D) = \{0\}$ dla dowolnego $d \geq 1$.

Definicja 13.4.3. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym. Przez d -wymiarowy *płat powierzchniowy* klasy $\mathcal{C}^k$ w Ω rozumiemy dowolne odwzorowanie $\gamma : P \rightarrow \Omega$ klasy $\mathcal{C}^k$, gdzie $P \subset \mathbb{R}^d$ jest pewną (niezdegenerowaną) kostką zwartą, $d \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Mówiąc, że γ jest klasy $\mathcal{C}^k$ rozumiemy, że γ przedłuża się do odwzorowania klasy $\mathcal{C}^k$ w pewnym otoczeniu P (otoczeniu zależnym od γ).

Niech $\mathbf{P}_{(d)}^k(\Omega)$ oznacza rodzinę wszystkich d -wymiarowych płatów klasy $\mathcal{C}^k$ w Ω

Płat 0-wymiarowy to dowolne odwzorowanie zbioru jednopunktowego w $\mathbb{R}^n$, które będziemy utożsamiać z jego obrazem (dla $d = 0$ klasa płata nie odgrywa żadnej roli). Tak więc $\mathbf{P}_{(0)}^k(\Omega) \simeq \Omega$. Płat 1-wymiarowy klasy $\mathcal{C}^k$ to krzywa klasy $\mathcal{C}^k$. Jeżeli $M \subset \Omega$ jest d -wymiarową podrozmaitością Ω klasy $\mathcal{C}^k$, to dla dowolnego punktu $a \in M$ istnieje d -wymiarowy płat powierzchniowy $\gamma : P \rightarrow M$ taki, że $\gamma : P \rightarrow \gamma(P)$ jest homeomorfizmem, $\text{rank } \gamma'(t) = d$ dla dowolnego $t \in P$, oraz $a \in \text{int}_M(\gamma(P))$.

Oznaczmy przez $\mathbf{L}_{(d)}^k(\Omega)$ przestrzeń wektorową wszystkich formalnych kombinacji o współczynnikach rzeczywistych elementów z $\mathbf{P}_{(d)}^k(\Omega)$. Elementy przestrzeni $\mathbf{L}_{(d)}^k(\Omega)$ nazywamy d -wymiarowymi *łańcuchami* klasy $\mathcal{C}^k$ w Ω .

Dla $\gamma \in \mathbf{P}_{(d)}^1(\Omega)$ ($\gamma : P \rightarrow \Omega$) i $u \in \mathcal{C}_{(d)}(\Omega)$, niech

$$\int_\gamma u := \int_P \gamma^*(u) d\mathcal{L}^d. \quad (22)$$

Dla $d = 0$ przyjmujemy $\int_\gamma u := u(\gamma)$. Dla $d = 1$, całka $\int_\gamma u$, gdzie $u = u_1 dx_1 + \dots + u_n dx_n$, pokrywa się z całką krzywoliniową zorientowaną po krzywej γ z pola $(u_1, \dots, u_n)$. Dla dowolnego d , całka $\int_\gamma u$ stanowi uogólnienie całki po podrozmaitości z formy różniczkowej: jeżeli $\gamma : P \rightarrow \Omega$ jest d -wymiarowym płatem klasy $\mathcal{C}^1$ takim, że $\gamma : P \rightarrow \gamma(P)$ jest homeomorfizmem i $\text{rank } \gamma'(t) = d$ dla dowolnego $t \in P$, to wtedy całka $\int_\gamma u$ pokrywa się z całką po podrozmaitości $\gamma(\text{int } P)$ przy orientacji zadanej przez γ .

Powyższą definicję rozszerzamy liniowo na $\gamma \in \mathbf{L}_{(d)}^1(\Omega)$:

$$\int \sum_{i=1}^N \alpha_i \gamma_i u := \sum_{i=1}^N \alpha_i \int_{\gamma_i} u.$$

Widać, że operacja

$$\mathbf{L}_{(d)}^1(\Omega) \times \mathcal{C}_{(d)}(\Omega) \ni (\gamma, u) \mapsto \int_\gamma u \in \mathbb{R}$$

jest dwuliniowa.

Obserwacja 13.4.4. Jeżeli $\gamma : P \rightarrow \Omega$ jest d -wymiarowym płatem klasy $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 1$) i $\varphi : Q \rightarrow P$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$, gdzie $Q \subset \mathbb{R}^d$ jest pewną kostką, to $\gamma \circ \varphi : Q \rightarrow \Omega$ jest d -wymiarowym płatem klasy $\mathcal{C}^k$ oraz

$$\int_{\gamma \circ \varphi} u = \varepsilon \int_\gamma u, \quad u \in \mathcal{C}_{(d)}(\Omega),$$

gdzie $\varepsilon := \text{sgn}(\det \varphi')$.

Istotnie, niech $f := \gamma^*(u)$. Wtedy

$$(\gamma \circ \varphi)^*(u) = \varphi^*(\gamma^*(u)) = (f \circ \varphi) \det \varphi',$$

a stąd

$$\int_{\gamma \circ \varphi} u = \varepsilon \int_Q (f \circ \varphi) |\det \varphi'| d\mathcal{L}^d = \varepsilon \int_P f d\mathcal{L}^d = \varepsilon \int_\gamma u.$$

(²²) Tu i dalej, w zależności od potrzeb, będziemy utożsamiać formę maksymalnego rzędu $v = \tilde{v} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_d$ ze współczynnikiem $\tilde{v}$.

Powyższa obserwacja pozwala dokonywać zmiany parametryzacji płatów. Możemy zawsze zakładać, że płaty są sparametryzowane w kostce $[0, 1]^d$ (tak zwykle robiliśmy dla krzywych).

Propozycja 13.4.5. Niech $u, v \in \mathcal{C}_{(d)}(\Omega)$. Wtedy

$$u \equiv v \iff \forall_{\gamma \in \mathbf{P}_{(d)}^\infty(\Omega)} : \int_\gamma u = \int_\gamma v.$$

Dowód. Przypadek $d = 0$ jest trywialny. Zastępując formy u i v formami $u - v$ i 0 , sprowadzamy twierdzenie do przypadku $v = 0$. Niech $u = \sum'_{|I|=d} u_I dx_I$. Ustalmy punkt $a \in \Omega$ oraz $I = (i_1, \dots, i_d) \in A_d^n$. Pokażemy, że $u_I(a) = 0$. Dla uproszczenia przyjmijmy, że $I = (1, \dots, d)$. Rozważmy płat

$$[-\varepsilon, \varepsilon]^d \ni (t_1, \dots, t_d) \xrightarrow{\gamma} (a_1 + t_1, \dots, a_d + t_d, a_{d+1}, \dots, a_n).$$

Dla małych $\varepsilon > 0$ jest to oczywiście d -wymiarowy płat klasy $\mathcal{C}^\infty$ w Ω . Tak więc, dla małych $\varepsilon > 0$ mamy

$$0 = \frac{1}{(2\varepsilon)^d} \int_\gamma u = \frac{1}{(2\varepsilon)^d} \int_{[-\varepsilon, \varepsilon]^d} u_I(\gamma(t)) dt = u_I(\xi_\varepsilon),$$

gdzie ξ_ε jest pewnym punktem z $\gamma([-\varepsilon, \varepsilon]^d)$. Oczywiście $\xi_\varepsilon \rightarrow a$, gdy $\varepsilon \rightarrow 0$. Ostatecznie, korzystając z ciągłości, wnioskujemy, że $u_I(a) = 0$. $\square$

Definicja 13.4.6. Niech $\gamma \in \mathbf{P}_{(d)}^k(\Omega)$, $d \geq 1$, $\gamma : P \rightarrow \Omega$, $P = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d] =: Q_1 \times \dots \times Q_d$. Dla $d \geq 2$ definiujemy:

$$\begin{aligned} P_j &:= Q_1 \times \dots \times Q_{j-1} \times Q_{j+1} \times \dots \times Q_d, & \sigma_j^- : P_j &\rightarrow P, & \sigma_j^+ : P_j &\rightarrow P, \\ \sigma_j^-(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_d) &:= (x_1, \dots, x_{j-1}, a_j, x_{j+1}, \dots, x_d), \\ \sigma_j^+(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_d) &:= (x_1, \dots, x_{j-1}, b_j, x_{j+1}, \dots, x_d). \end{aligned}$$

W przypadku $d = 1$ przyjmujemy $\sigma_1^- := a_1$, $\sigma_1^+ := b_1$. Niech

$$\partial\gamma := \sum_{j=1}^d (-1)^{j-1} (\gamma \circ \sigma_j^+ - \gamma \circ \sigma_j^-) \in \mathbf{L}_{(d-1)}^k(\Omega).$$

Łańcuch $\partial\gamma$ nazywamy *brzegiem* płata γ . Operację brzegu przedłużamy liniowo na $\mathbf{L}_{(d)}^k(\Omega)$:

$$\partial : \mathbf{L}_{(d)}^k(\Omega) \rightarrow \mathbf{L}_{(d-1)}^k(\Omega).$$

Przykład 13.4.7. (a) Jeżeli $d = 1$, $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$, to

$$\partial\gamma = \gamma(b) - \gamma(a) \in \mathbf{L}_{(0)}^\infty(\Omega).$$

(b) Jeżeli $d = 2$, $\gamma : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \Omega$, to

$$\partial\gamma = \gamma(b, \cdot) - \gamma(a, \cdot) - \gamma(\cdot, d) + \gamma(\cdot, c) \in \mathbf{L}_{(d-1)}^k(\Omega).$$

Propozycja 13.4.8. Jeżeli $d \geq 2$, to $\partial \circ \partial = 0$ na $\mathbf{L}_{(d)}^k(\Omega)$.

Dowód. Oczywiście wystarczy pokazać, że $\partial \circ \partial = 0$ na $\mathbf{P}_{(d)}^k(\Omega)$. Ustalmy $\gamma \in \mathbf{P}_{(d)}^k(\Omega)$, $\gamma : P \rightarrow \Omega$, $P = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d] =: Q_1 \times \dots \times Q_d$. Dla $1 \leq i < j \leq d$ niech

$$P_{i,j} := Q_1 \times \dots \times Q_{i-1} \times Q_{i+1} \times \dots \times Q_{j-1} \times Q_{j+1} \times \dots \times Q_d$$

oznacza $(d-2)$ wymiarową kostkę powstałą z P przez „pominięcie” dwóch przedziałów. Niech dalej

$$\sigma_{i,j}^{-,-} : P_{i,j} \rightarrow P$$

oznacza odwzorowanie „wstawiające” na miejscach i i j , odpowiednio, a_i i a_j , tzn.

$$\sigma_{i,j}^{-,-}(z_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_d) := (x_1, \dots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, a_j, x_{j+1}, \dots, x_d).$$

Podobnie tworzymy odwzorowania $\sigma_{i,j}^{-,+}$, $\sigma_{i,j}^{+,-}$ i $\sigma_{i,j}^{+,+}$ wstawiając, odpowiednio, pary (a_i, b_j) , (b_i, a_j) i (b_i, b_j) . Przy tych oznaczeniach mamy:

$$(\partial \circ \partial)(\gamma) = \partial \left(\sum_{j=1}^d (-1)^{j-1} (\gamma \circ \sigma_j^+ - \gamma \circ \sigma_j^-) \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=1}^d (-1)^{j-1} \left(\sum_{i=1}^{j-1} (-1)^{i-1} (\gamma \circ \sigma_{i,j}^{+,+} - \gamma \circ \sigma_{i,j}^{-,+} - \gamma \circ \sigma_{i,j}^{+,-} + \gamma \circ \sigma_{i,j}^{-,-}) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i=j+1}^d (-1)^i (\gamma \circ \sigma_{j,i}^{+,+} - \gamma \circ \sigma_{j,i}^{+,-} - \gamma \circ \sigma_{j,i}^{-,+} + \gamma \circ \sigma_{j,i}^{-,-}) \right) \\
 &= \sum_{i < j} (-1)^{i+j} (\dots) - \sum_{i > j} (-1)^{i+j} (\dots) = 0. \quad \square
 \end{aligned}$$

Łańcuchy $\gamma \in \mathbf{L}_{(d)}^k(\Omega)$ takie, że $\partial\gamma = 0$ nazywamy *cyklami*. Jeżeli $\gamma = \partial\delta$ dla pewnego $\delta \in \mathbf{L}_{(d+1)}^k(\Omega)$ to mówimy, że γ jest *brzegiem*.

Z faktu, że $\partial^2 = 0$ wynika, że każdy brzeg jest cyklem (ale nie odwrotnie — ĆWICZENIE).

Definicja 13.4.9. Zdefiniujmy

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}_d(\Omega) &:= \{\gamma \in \mathbf{L}_{(d)}^\infty(\Omega) : \partial\gamma = 0\}, \\
 \mathcal{B}_d(\Omega) &:= \{\partial\gamma : \gamma \in \mathbf{L}_{(d+1)}^\infty(\Omega)\}, \quad d \geq 1;
 \end{aligned}$$

$\mathcal{B}_d(\Omega)$ jest podprzestrzenią $\mathcal{Z}_d(\Omega)$. Niech

$$H_d(\Omega) := \mathcal{Z}_d(\Omega) / \mathcal{B}_d(\Omega), \quad d = 1, 2, \dots;$$

$H_d(\Omega)$ nazywamy *d-tą grupą homologii* Ω .

Obserwacja 13.4.10. Rozważmy ciąg płatów $\gamma_\nu \in \mathbf{P}_{(d)}^1(\Omega)$,

$$\gamma_\nu : P \longrightarrow \Omega, \quad \nu \in \mathbb{N}_0,$$

określonych na tej samej kostce P ($d \geq 1$). Załóżmy, że

- $\gamma_\nu \longrightarrow \gamma_0$ jednostajnie na P oraz
- $\frac{\partial \gamma_\nu}{\partial t_j} \longrightarrow \frac{\partial \gamma_0}{\partial t_j}$ jednostajnie na P , $j = 1, \dots, d$.

Wtedy dla dowolnej formy $u \in \mathcal{C}_{(d-1)}^1(\Omega)$ mamy:

$$\int_{\gamma_\nu} du \longrightarrow \int_{\gamma_0} du, \quad \int_{\gamma_\nu} u \longrightarrow \int_{\gamma_0} u.$$

Istotnie, łatwo sprawdzić (ĆWICZENIE), że:

- dla dowolnej formy $v \in \mathcal{C}_{(d)}(\Omega)$ mamy: $\gamma_\nu^*(v) \longrightarrow \gamma_0^*(v)$ jednostajnie na P oraz
- dla dowolnej $(d-1)$ -wymiarowej „ściany” Q kostki P mamy:

$$(\gamma_\nu \circ \sigma)^*(u) \longrightarrow (\gamma_0 \circ \sigma)^*(u) \text{ jednostajnie na } Q,$$

gdzie $\sigma : Q \longrightarrow P$ oznacza „włożenie” ściany Q w kostkę P .

Twierdzenie 13.4.11 (Twierdzenie Stokesa).

$$\int_\gamma du = \int_{\partial\gamma} u, \quad \gamma \in \mathbf{L}_{(d)}^1(\Omega), \quad u \in \mathcal{C}_{(d-1)}^1(\Omega), \quad d \geq 1.$$

Dowód. Możemy założyć, że $\gamma : P \longrightarrow \Omega$ jest płatem klasy $\mathcal{C}^1$.

Najpierw rozpatrzmy przypadek $d = 1$. Niech $P = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Mamy:

$$\int_\gamma du = \int_a^b \gamma^*(u' dx) = \int_a^b u'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = u(\gamma(b)) - u(\gamma(a)) = \int_{\partial\gamma} u.$$

Niech teraz $d \geq 2$. Załóżmy dodatkowo, że γ jest klasy $\mathcal{C}^2(U)$, gdzie U jest pewnym otoczeniem P . Wtedy mamy

$$\begin{aligned}
 \int_\gamma du &= \int_P \gamma^*(du) = \int_P d\gamma^*(u), \\
 \int_{\partial\gamma} u &= \sum_{j=1}^d (-1)^{j-1} \int_{P_j} \left((\sigma_j^+)^*(\gamma^*(u)) - (\sigma_j^-)^*(\gamma^*(u)) \right).
 \end{aligned}$$

Podstawiając $v := \gamma^*(u) \in \mathcal{C}_{(d-1)}^1(U)$, sprowadzamy problem do równości

$$\int_P dv = \sum_{j=1}^d \int_{P_j} (-1)^{j-1} \left((\sigma_j^+)^*(v) - (\sigma_j^-)^*(v) \right).$$

Bez szkody dla ogólności możemy przyjąć, że $v = f dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_{d-1}$. Wtedy

$$dv = (-1)^{d-1} \frac{\partial f}{\partial t_d} dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_d,$$

a stąd

$$\int_P dv = (-1)^{d-1} \int_{P_d \times [a_d, b_d]} \frac{\partial f}{\partial t_d} dx dt_d = (-1)^{d-1} \int_{P_d} (f(x, b) - f(x, a)) dx.$$

Z drugiej strony,

$$\begin{aligned} (\sigma_j^\pm)^*(v) &= 0, \quad j = 1, \dots, d-1, \\ (\sigma_d^-)^*(v) &= f(x_1, \dots, x_{d-1}, a_d) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{d-1}, \\ (\sigma_d^+)^*(v) &= f(x_1, \dots, x_{d-1}, b_d) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{d-1}, \end{aligned}$$

a stąd

$$\sum_{j=1}^d \int_{P_j} (-1)^{j-1} \left((\sigma_j^+)^*(v) - (\sigma_j^-)^*(v) \right) = (-1)^{d-1} \int_{P_d} (f(x, b) - f(x, a)) dx.$$

Teraz rozważymy przypadek, gdy γ jest tylko klasy $\mathcal{C}^1$ w pewnym otoczeniu U . Korzystając ze zwartości obrazu $\gamma(P) \subset \Omega$ oraz z własności regularyzacji znajdziemy ciąg funkcji $(\gamma_\nu)_{\nu=1}^\infty \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)$ taki, że $\gamma_\nu(P) \subset \Omega$, $\nu \in \mathbb{N}$, oraz $\gamma_\nu \rightarrow \gamma$ i $\frac{\partial \gamma_\nu}{\partial t_j} \rightarrow \frac{\partial \gamma}{\partial t_j}$ jednostajnie na P , $j = 1, \dots, d$. Wobec poprzedniej części dowodu, mamy

$$\int_{\gamma_\nu} du = \int_{\partial \gamma_\nu} u, \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Pozostaje skorzystać z Obserwacji 13.4.10. □

Propozycja 13.4.12. (a) Załóżmy, że:

- łańcuch $\gamma \in \mathbf{L}_{(d)}^1(\Omega)$ jest brzegiem, $\gamma = \partial \zeta$ dla pewnego łańcucha $\zeta \in \mathbf{L}_{(d+1)}^1(\Omega)$, zaś forma $u \in \mathcal{C}_{(d)}^1(\Omega)$ jest zamknięta,

lub

- łańcuch $\gamma \in \mathbf{L}_{(d)}^1(\Omega)$ jest cyklem, zaś forma $u \in \mathcal{C}_{(d)}(\Omega)$ jest dokładna, $u = dw$ dla pewnej formy $w \in \mathcal{C}_{(d-1)}^1(\Omega)$.

Wtedy $\int_\gamma u = 0$.

(b) W szczególności, dla dowolnych $\gamma \in \mathbf{L}_{(d)}^1(\Omega)$, $u \in \mathcal{C}_{(d)}^1(\Omega)$, $\zeta \in \mathbf{L}_{(d+1)}^1(\Omega)$, $w \in \mathcal{C}_{(d-1)}^1(\Omega)$, jeżeli $\partial \gamma = 0$ i $du = 0$, to

$$\int_{\gamma + \partial \zeta} (u + dw) = \int_\gamma u.$$

Dla przykładu, operator

$$H_d(\Omega) \times H^d(\Omega) \ni ([\gamma], [u]) \mapsto \int_\gamma u \in \mathbb{R}$$

jest poprawnie określony, $d = 1, 2, \dots$.

Dowód. (a) Jeżeli $\gamma = \partial \zeta$ i $du = 0$, to na podstawie twierdzenia Stokesa mamy:

$$\int_\gamma u = \int_{\partial \zeta} u = \int_\zeta du = 0.$$

Podobnie, jeżeli $\partial \gamma = 0$ i $u = dw$, to

$$\int_\gamma u = \int_\gamma dw = \int_{\partial \gamma} w = 0.$$

(b) wynika natychmiast z (a). □

Propozycja 13.4.13. Niech $u \in \mathcal{C}_{(d)}^1(\Omega)$. Wtedy

$$du = 0 \iff \forall_{\gamma \in \mathcal{B}_d(\Omega)} : \int_{\gamma} u = 0.$$

Dowód. Implikacja $(\implies)$ wynika z poprzedniej propozycji. Dla dowodu implikacji $(\impliedby)$, na podstawie Propozycji 13.4.5, wystarczy pokazać, że

$$\int_{\gamma} du = 0, \quad \gamma \in \mathbf{P}_{(d+1)}^{\infty}(\Omega).$$

Ustalmy $\gamma \in \mathbf{P}_{(d+1)}^{\infty}(\Omega)$. Wtedy $\partial\gamma \in \mathcal{B}_d(\Omega)$. Na podstawie wzoru Stokesa i założeń mamy

$$\int_{\gamma} du = \int_{\partial\gamma} u = 0. \quad \square$$

Propozycja 13.4.14. Niech $w \in \mathcal{C}_{(d-1)}^1(\Omega)$ będzie taka, że $dw \in \mathcal{C}_{(d)}^1(\Omega)$. Wtedy $d(dw) = 0$ ⁽²³⁾.

Dowód. Skorzystamy z poprzedniej propozycji. Niech $\gamma = \partial\zeta \in \mathcal{B}_d(\Omega)$. Wtedy na podstawie wzoru Stokesa mamy

$$\int_{\gamma} dw = \int_{\partial\gamma} w = \int_{\partial^2\zeta} w = 0. \quad \square$$

Obserwacja 13.4.15. (a) Niech $\varphi : \Omega \longrightarrow \Omega'$ będzie dowolnym odwzorowaniem klasy $\mathcal{C}^k$. Dla pła $\gamma \in \mathbf{P}_{(d)}^k(\Omega)$ połóżmy $\varphi_*(\gamma) := \varphi \circ \gamma$. Operację tę przedłużamy liniowo na $\mathbf{L}_{(d)}^k(\Omega)$. Zauważmy, że $\varphi_* \circ \partial = \partial \circ \varphi_*$. W szczególności, jeżeli γ jest cyklem, to $\varphi_*(\gamma)$ jest również cyklem.

W przyszłości, jeżeli nie będzie to prowadzić do nieporozumień, będziemy pisać $\varphi(\gamma)$ zamiast $\varphi_*(\gamma)$ (dla dowolnego łańcucha γ).

(b) Przypuśćmy, że obszar $D \subset \mathbb{R}^n$ jest różniczkowo ściągalny do punktu $a \in D$ w klasie $\mathcal{C}^{k+1}$ (tak, jak w Lemacie Poincarégo (Twierdzenie 13.1.13)). Niech $h : \Omega \longrightarrow D$, $[0, 1] \times D \subset \Omega$, będzie odwzorowaniem ściągającym klasy $\mathcal{C}^{k+1}$, $h(0, x) = a$, $h(1, x) = x$, $x \in D$. Niech $\gamma \in \mathbf{L}_{(d)}^{k+1}(D)$ będzie dowolnym cyklem. Wtedy $\gamma = a + \partial\zeta$ dla pewnego łańcucha $\zeta \in \mathbf{L}_{(d+1)}^{k+1}(D)$, gdzie a utożsamiamy z płatem stałym. W szczególności, na podstawie Propozycji 13.4.12(b), $\int_{\gamma} u = 0$ dla dowolnej formy zamkniętej $u \in \mathcal{C}_{(d)}^1(D)$, $d \geq 1$.

Istotnie, niech $\gamma = \sum_{i=1}^N \alpha_i \gamma_i$, $\gamma_i : P_i \longrightarrow D$, $i = 1, \dots, N$. Zdefiniujmy

$$\zeta := \sum_{i=1}^N \alpha_i \zeta_i, \quad \zeta_i : [0, 1] \times P_i \longrightarrow D, \quad \zeta_i(s, t) := h(s, \gamma_i(t)), \quad i = 1, \dots, N.$$

Łatwo widzieć, że

$$\partial\zeta_i = h(1, \gamma_i) - h(0, \gamma_i) - h(\text{id}_{[0,1]}, \partial\gamma_i), \quad i = 1, \dots, N.$$

Wynika stąd, że

$$\partial\zeta = h(1, \gamma) - h(0, \gamma) - h(\text{id}_{[0,1]}, \partial\gamma) = h(1, \gamma) - h(0, \gamma) = \gamma - a,$$

co kończy dowód.

Twierdzenie* 13.4.16 (Twierdzenie de Rhama ⁽²⁴⁾). Niech $u \in \mathcal{C}_{(d)}^k(D)$ ($k \geq 1$, $d \geq 1$). Wtedy $u = dw$ dla pewnej formy $w \in \mathcal{C}_{(d-1)}^k(D)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\int_{\gamma} u = 0$ dla dowolnego cyklu $\gamma \in \mathcal{Z}_d(D)$.

Dowód twierdzenia de Rhama pomijamy.

⁽²³⁾ Uwaga: nie zakładamy, że w jest klasy $\mathcal{C}^2$.
⁽²⁴⁾ Georges de Rham (1903–1990).

Obserwacja 13.4.17. (a) Implikacja ($\implies$) wynika oczywiście z Propozycji 13.4.12.

(b) Na podstawie Propozycji 13.4.13, spełnienie warunku po prawej stronie pociąga za sobą, iż u jest zamknięta.

(c) Na podstawie Obserwacji 13.4.15(b), jeżeli spełnione są założenia Lematu Poincarégo, to spełniony jest warunek po prawej stronie Twierdzenia de Rhama (tak więc, twierdzenie de Rhama jest uogólnieniem Lematu Poincarégo).

(d) W przypadku $d = 1$ twierdzenie de Rhama można udowodnić analogicznie do Twierdzenia 11.5.6. Niech $u = u_1 dx_1 + \dots + u_n dx_n \in \mathcal{C}_{(1)}^k(D)$. Na wstępie zauważmy, że w kategorii łamanych $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$, całka $\int_\gamma u$ zależy jedynie od końców krzywej. W tym celu wystarczy pokazać, że $\int_\gamma u = 0$ dla dowolnej łamanej zamkniętej $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$. Ten zaś fakt wynika natychmiast z tego, że każda łamana jest krzywą klasy $\mathcal{C}^\infty$ (ĆWICZENIE), a jeżeli jest zamknięta, to jest cyklem z $\mathcal{Z}_1(D)$.

Jeżeli już mamy niezależność całki od drogi całkowania w kategorii łamanych, to definiujemy $w(x) := \int_{[x_0, \dots, x]} u$, $x \in D$, gdzie $x_0 \in D$ jest ustalonym punktem, że $[x_0, \dots, x]$ oznacza dowolną łamaną łączącą w D punkt x_0 z punktem x . Analogicznie, jak w dowodzie Twierdzenia 11.5.6 sprawdzamy, że $\frac{\partial w}{\partial x_j} = u_j$, $j = 1, \dots, n$. Wynika stąd w szczególności, że $w \in \mathcal{C}^{k+1}(D)$ oraz $dw = u$.

Wybrane rozdziały analizy matematycznej

14.1. Szeregi Fouriera — uzupełnienia

Niech

$$L_{2\pi}^1(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f|_{[-\pi, \pi]} \in L^1([-\pi, \pi]), \forall x \in \mathbb{R} : f(x + 2\pi) = f(x)\}.$$

Oczywiście $\mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R}) \subset L_{2\pi}^1(\mathbb{R})$. Definicję szeregu Fouriera (określonego dla funkcji klasy $\mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R})$) (por. Definicja 8.1.1) przenosimy bez trudu na funkcje klasy $L_{2\pi}^1(\mathbb{R})$:

$$S(x) = S(f; x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad x \in \mathbb{R},$$

gdzie

$$a_n = a_n(f) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt, \quad b_n = b_n(f) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Twierdzenie 14.1.1 (Riemanna–Lebesgue’a). *Dla dowolnego przedziału $P \subset \mathbb{R}$ oraz dla dowolnej funkcji $f \in L^1(P)$ mamy:*

$$\lim_{|\alpha| \rightarrow +\infty} \int_P f(t) \cos \alpha t \, dt = \lim_{|\alpha| \rightarrow +\infty} \int_P f(t) \sin \alpha t \, dt = 0.$$

W szczególności, dla dowolnej funkcji $f \in L_{2\pi}^1(\mathbb{R})$ mamy:

$$a_n(f) \rightarrow 0, \quad b_n(f) \rightarrow 0 \quad \text{przy } n \rightarrow +\infty.$$

Dowód. Por. dowód Twierdzenia 8.1.3.

W dowodzie ograniczymy się do funkcji $\cos$. Pozostały przypadek jest analogiczny.

Krok 1°. $f = \chi_Q$, gdzie Q jest przedziałem ograniczonym, $Q \subset P$.

Krok 2°. Jeżeli twierdzenie zachodzi dla $f_1, f_2 \in L^1(P)$, to zachodzi dla $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ dla dowolnych $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Krok 3°. Jeżeli $\mathcal{M}^+(P) \ni f_\nu \nearrow f \in L^1(P)$ i twierdzenie zachodzi dla każdej funkcji f_ν , $\nu \geq 1$, to zachodzi dla f .

Istotnie, na podstawie twierdzenia o monotonicznym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki, mamy:

$$\left| \int_P f(t) \cos \alpha t \, dt - \int_P f_\nu(t) \cos \alpha t \, dt \right| \leq \int_P (f(t) - f_\nu(t)) \, dt \rightarrow 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Teraz, dla danego $\varepsilon > 0$, najpierw dobieramy ν_0 takie, że

$$\left| \int_P f(t) \cos \alpha t \, dt - \int_P f_{\nu_0}(t) \cos \alpha t \, dt \right| \leq \varepsilon, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

a następnie korzystamy z tego, że $\int_P f_{\nu_0}(t) \cos \alpha t \, dt \rightarrow 0$ gdy $|\alpha| \rightarrow +\infty$.

Krok 4°. Na podstawie 1°, 2° i 3°, twierdzenie zachodzi dla dowolnej funkcji $f = \chi_U$, gdzie U jest zbiorem otwartym w P i $\chi_U \in L^1(P)$.

Krok 5°. $f = \chi_A \in L^1(P)$, gdzie A jest zbiorem mierzalnym, $A \subset P$.

Istotnie, dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór U otwarty w P taki, że $A \subset U$ i $\mathcal{L}^1(U \setminus A) \leq \varepsilon$. Wtedy

$$\left| \int_P \chi_U(t) \cos \alpha t \, dt - \int_P \chi_A(t) \cos \alpha t \, dt \right| \leq \varepsilon$$

i możemy skorzystać z 4^o.

Krok 6^o. Wobec 5^o i 2^o, twierdzenie zachodzi dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{M}_0^+(P) \cap L^1(P)$. Stąd, na podstawie 3^o, zachodzi dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{M}^+(P) \cap L^1(P)$ i ostatecznie (poprzez rozkład $f = f_+ - f_-$) — dla dowolnej funkcji $f \in L^1(P)$. $\square$

Tak, jak w § 8, dla $f \in L_{2\pi}^1(\mathbb{R})$, definiujemy sumy częściowe:

$$S_k(x) = S_k(f; x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Lemat 14.1.2. Dla $f \in L_{2\pi}^1(\mathbb{R})$ mamy

$$S_k(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \cdot \frac{\sin \frac{(2k+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

W szczególności,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \frac{(2k+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} dt = 1, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Dowód. ĆWICZENIE — por. dowód Lematu 8.2.2. $\square$

Propozycja 14.1.3. Dla $f \in L_{2\pi}^1(\mathbb{R})$ i dla dowolnego $0 < \delta < \pi$ mamy:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} S_k(f; x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \cdot \frac{\sin \frac{(2k+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

(w tym sensie, że obie granice jednocześnie istnieją i są równe).

W szczególności, prawdziwa jest następująca zasada lokalizacji:

O zbieżności i wartości $S(f; x_0)$ szeregu Fouriera funkcji f w punkcie x_0 decydują wyłącznie wartości funkcji f w dowolnie małym otoczeniu punktu x_0 .

Dowód. ĆWICZENIE — por. dowód Twierdzenia 8.2.3. $\square$

Propozycja 14.1.4 (Kryterium Diniego). Niech $f \in L_{2\pi}^1(\mathbb{R})$ i niech $x_0, A \in \mathbb{R}$ będą takie, że funkcja

$$(0, \pi] \ni t \mapsto \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2A}{t}$$

jest całkowalna ⁽¹⁾. Wtedy

$$S(f; x_0) = \lim_{k \rightarrow +\infty} S_k(f; x_0) = A.$$

Dowód. ĆWICZENIE — por. dowód Twierdzenia 8.2.4. $\square$

14.2. Transformacja Fouriera

Definicja 14.2.1. Dla dowolnej funkcji $f \in L^1(\mathbb{R}^n) := L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ definiujemy jej *transformatę Fouriera* wzorem

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} d\mathcal{L}^n(x), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

gdzie $\langle \cdot, \cdot \rangle$ oznacza standardowy iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n$.

Obserwacja 14.2.2. (a) $\widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\mathcal{L}^n(x)$.

(b) $\widehat{f}$ jest funkcją ograniczoną oraz $\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1}$.

⁽¹⁾ Oczywiście, problemem jest tu całkowalność w otoczeniu zera.

⁽²⁾ Uwaga: Czasami transformatę Fouriera definiuje się wzorem

$$(\mathcal{F}f)(\xi) := \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i \langle x, \xi \rangle} d\mathcal{L}^n(x).$$

(c) $\widehat{f}$ jest funkcją jednostajnie ciągłą.

Istotnie, dla dowolnych $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ mamy

$$|\widehat{f}(\xi + \eta) - \widehat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| |e^{-2\pi i \langle x, \eta \rangle} - 1| d\mathcal{L}^n(x) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0,$$

gdzie ostatnia zbieżność wynika z twierdzenia Lebesgue'a o zmajorzowanym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki.

(d) Z Twierdzenia 12.5.1 o funkcjach danych całką wnioskujemy, że jeżeli $x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ dla $|\alpha| \leq k$ (np. $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i $\text{supp } f \subset\subset \mathbb{R}^n$), to $\widehat{f} \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ oraz $D^\alpha \widehat{f} = (-2\pi i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha f}$, $|\alpha| \leq k$. W szczególności, jeżeli $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, to $\widehat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

(e) $\widehat{e^{-a\|x\|^2}} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, $a > 0$.

(f) Z Twierdzenia 13.3.6 o całkowaniu przez części wnioskujemy, że jeżeli $f \in \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, to $(2\pi i)^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{f} = \widehat{D^\alpha f}$, $|\alpha| \leq k$.

(g) Jeżeli $f \in \mathcal{C}_0^{2k}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}_0$, to funkcja $\|\xi\|^{2k} \widehat{f}$ jest ograniczona. W szczególności, jeżeli $2k > n$, to $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Istotnie, $\|\xi\|^{2k} \widehat{f} = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^k \widehat{f} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n: |\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} x^{2\alpha} \widehat{f}$ i możemy skorzystać z (f).

(h) Niech $\mathcal{X} := \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{BC}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) : \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)\}$. Odnotujmy, że $\mathcal{X}$ jest $\mathbb{C}$ -przestrzenią wektorową oraz $\mathcal{X} \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ dla dowolnego $p \geq 1$. Ponadto, na podstawie (g) mamy $\mathcal{C}_0^{2k}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \subset \mathcal{X}$ o ile $2k > n$.

(i) Niech $\check{\varphi}(x) := \varphi(-x)$. Zauważmy, że

$$\widehat{\check{f}} = \check{\widehat{f}}, \quad \widehat{\widehat{f}} = \check{f}, \quad f \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Definicja 14.2.3. Operację

$$L^1(\mathbb{R}^n) \ni f \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{F}f \in \mathcal{BC}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$$

nazywamy *transformacją Fouriera*.

Jest to oczywiście operator $\mathbb{C}$ -liniowy i ciągły. Ponadto, $\|\mathcal{F}\| \leq 1$.

Lemat 14.2.4. Dla dowolnych $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mamy

$$\widehat{g \cdot \widehat{f}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(x + \xi) f(x) d\mathcal{L}^n(x), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

W szczególności, dla $\xi = 0$ dostajemy

$$\int_{\mathbb{R}^n} g \cdot \widehat{f} d\mathcal{L}^n = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g} \cdot f d\mathcal{L}^n.$$

Dowód.

$$\begin{aligned} g \cdot \widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \widehat{f}(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} d\mathcal{L}^n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i \langle y, x \rangle} d\mathcal{L}^n(y) \right) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} d\mathcal{L}^n(x) \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-2\pi i \langle x, y + \xi \rangle} d\mathcal{L}^n(x) \right) f(y) d\mathcal{L}^n(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(y + \xi) f(y) d\mathcal{L}^n(y). \end{aligned} \quad \square$$

Lemat 14.2.5. Dla dowolnego $a > 0$:

$$\mathcal{F}(e^{-a\|x\|^2})(\xi) = \left(\sqrt{\frac{\pi}{a}} \right)^n e^{-\frac{\pi^2}{a} \|\xi\|^2}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

W szczególności,

$$\mathcal{F}(e^{-\pi\|x\|^2})(\xi) = e^{-\pi\|\xi\|^2}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Dowód. Wystarczy udowodnić przypadek $n = 1$. Istotnie,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(e^{-a\|x\|^2})(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-a\|x\|^2} e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} d\mathcal{L}^n(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax_1^2} e^{-2\pi i x_1 \xi_1} d\mathcal{L}^1(x_1) \dots \int_{\mathbb{R}} e^{-ax_n^2} e^{-2\pi i x_n \xi_n} d\mathcal{L}^1(x_n) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2}{a} \xi_1^2} \dots \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2}{a} \xi_n^2} = \left(\sqrt{\frac{\pi}{a}} \right)^n e^{-\frac{\pi^2}{a} \|\xi\|^2}. \end{aligned}$$

W przypadku $n = 1$, niech

$$f(\xi) := \mathcal{F}(e^{-ax^2})(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} e^{-2\pi i x \xi} d\mathcal{L}^1(x), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Na podstawie twierdzenia o funkcjach danych całką wiemy, że $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ oraz

$$\begin{aligned} f'(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} (-2\pi i x) e^{-2\pi i x \xi} dx = e^{-ax^2} \frac{\pi i}{a} e^{-2\pi i x \xi} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \frac{\pi i}{a} (-2\pi i x \xi) e^{-2\pi i x \xi} dx \\ &= -\frac{2\pi^2}{a} \xi f(\xi). \end{aligned}$$

Rozwiązując to równanie różniczkowe dostajemy

$$f(\xi) = C e^{-\frac{\pi^2}{a} \xi^2}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Pozostaje wyznaczyć stałą C . Mamy

$$C = f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (\text{ĆWICZENIE}). \quad \square$$

Propozycja 14.2.6. (a) $\widehat{\widehat{f}} = f$ dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{X}$. W szczególności, transformacja Fouriera przekształca bijektywnie $\mathcal{X}$ na $\mathcal{X}$ oraz $(\mathcal{F}|_{\mathcal{X}})^{-1}(f) = \widehat{\widehat{f}}, f \in \mathcal{X}$.

(b) $\widehat{f \cdot g} = \widehat{f} * \widehat{g}$ dla dowolnych $f, g \in \mathcal{X}$.

(c) $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$ dla dowolnych $f, g \in \mathcal{X}$ ⁽³⁾.

(d) $\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} \cdot \widehat{\bar{g}} d\mathcal{L}^n = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \bar{g} d\mathcal{L}^n$ dla dowolnych $f, g \in \mathcal{X}$. W szczególności, $\|\widehat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$, $f \in \mathcal{X}$ (a więc $\mathcal{F} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ jest izometrią w sensie normy L^2).

Dowód. (a) Niech $g_\varepsilon(x) := e^{-\pi \varepsilon^2 \|x\|^2}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$. Zauważmy, że $g_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Na podstawie Lematów 14.2.4 i 14.2.5, mamy

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon(x) \widehat{f}(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} d\mathcal{L}^n(x) &= \widehat{g_\varepsilon \widehat{f}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g_\varepsilon}(x + \xi) f(x) d\mathcal{L}^n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g_\varepsilon}(x) f(x - \xi) d\mathcal{L}^n(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\varepsilon^n} e^{-\frac{\pi}{\varepsilon^2} \|x\|^2} f(x - \xi) d\mathcal{L}^n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi \|x\|^2} f(\varepsilon x - \xi) d\mathcal{L}^n(x). \end{aligned}$$

Ponieważ $g_\varepsilon \rightarrow 1$ przy $\varepsilon \rightarrow 0$ (punktowo na $\mathbb{R}^n$) oraz $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, zatem, na podstawie twierdzenia Lebesgue'a, lewa strona dąży do $\widehat{\widehat{f}}(\xi)$. Ponieważ f jest ciągła i ograniczona, zatem, ponownie korzystając z twierdzenia Lebesgue'a, wnioskujemy, że prawa strona dąży do $f(-\xi)$, co kończy dowód.

(b) Korzystamy z (a) i Lematu 14.2.4:

$$\widehat{f \cdot g}(\xi) = (\widehat{g \cdot \widehat{f}})(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(x + \xi) \widehat{\widehat{f}}(x) d\mathcal{L}^n(x) = (\widehat{f} * \widehat{g})(\xi).$$

(c) Korzystamy z (a) i (b):

$$\widehat{f * g} = (\widehat{\widehat{f} * \widehat{g}}) = (\widehat{\widehat{f}} \cdot \widehat{\widehat{g}}) = \widehat{f} \cdot \widehat{g}.$$

(d) Korzystamy z Lematu 14.2.4 oraz (a):

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} \cdot \widehat{\bar{g}} d\mathcal{L}^n = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \widehat{\widehat{\bar{g}}} d\mathcal{L}^n = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \widehat{\widehat{g}} d\mathcal{L}^n = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \bar{g} d\mathcal{L}^n. \quad \square$$

Definicja 14.2.7. Mówimy, że funkcja $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ jest *szybkomalejąca* ($f \in \mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) jeżeli dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ mamy

$$\|f\|_{\alpha, \beta} := \sup\{|x^\alpha D^\beta f(x)| : x \in \mathbb{R}^n\} < +\infty.$$

⁽³⁾ Wiadomo, że $f * g \in \mathcal{BC}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, a więc nasze założenie oznacza, że $f * g \in \mathcal{X}$.

W szczególności, dla dowolnych $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ i $k \in \mathbb{N}_0$ mamy:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r^k \left(\max_{\|x\|=r} |D^\alpha f(x)| \right) = 0.$$

Obserwacja 14.2.8 (Własności klasy $\mathcal{S}$). (a) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \subset \mathcal{S}$.

(b) $e^{-a\|x\|^2} \in \mathcal{S}$ dla dowolnego $a > 0$.

(c) Dla dowolnych $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ i $f \in \mathcal{S}$ mamy $D^\gamma f \in \mathcal{S}$.

(d) $\mathcal{S}$ jest zespoloną algebrą.

Jest widoczne, że $\mathcal{S}$ jest zespoloną przestrzenią wektorową. Ponadto, dla $f, g \in \mathcal{S}$ mamy:

$$\|f \cdot g\|_{\alpha, \beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} D^\gamma f(x) D^{\beta-\gamma} g(x) \right| \leq \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} \|f\|_{\alpha, \gamma} \|g\|_{0, \beta-\gamma} < +\infty.$$

(e) Dla dowolnych $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ i $f \in \mathcal{S}$ mamy $x^\gamma f \in \mathcal{S}$. W konsekwencji, $P \cdot f \in \mathcal{S}$ dla dowolnego wielomianu $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ oraz $f \in \mathcal{S}$.

(f) Funkcja $\mathcal{S} \ni f \mapsto \|f\|_{\alpha, \beta}$ jest seminormą (dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$). Pozwala to wprowadzić w $\mathcal{S}$ strukturę przestrzeni metrycznej ze zbieżnością zadaną przy pomocy relacji

$$\mathcal{S} \ni f_k \xrightarrow{\mathcal{S}} f \in \mathcal{S}, \text{ jeżeli } \|f_k - f\|_{\alpha, \beta} \rightarrow 0 \text{ dla dowolnych } \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n.$$

(g) $\mathcal{S}$ jest przestrzenią zupełną — ĆWICZENIE!

(h) Operator $\mathcal{S} \ni f \mapsto D^\gamma f \in \mathcal{S}$ jest ciągły.

(i) Dla dowolnego wielomianu P , operator $\mathcal{S} \ni f \mapsto P \cdot f \in \mathcal{S}$ jest ciągły.

(j) $\mathcal{S} \subset L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq +\infty$. Ponadto, istnieją stałe $C = C(n, p)$, $s = s(n, p)$ takie, że

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \max\{\|f\|_{\alpha, 0} : |\alpha| \leq s\} = C \cdot \mathbf{N}_s(f), \quad f \in \mathcal{S}.$$

W szczególności, operator $\text{id} : \mathcal{S} \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ jest ciągły.

Istotnie, przypadek $p = \infty$ jest oczywisty ($\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{0, 0}$). Niech $1 \leq p < +\infty$.

Niech $m := \lfloor \frac{n}{2p} \rfloor + 1$. Wtedy

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p d\mathcal{L}^n \right)^{1/p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{(1 + \|x\|^2)^m |f(x)|}{(1 + \|x\|^2)^m} \right)^p d\mathcal{L}^n(x) \right)^{1/p} \\ &\leq \text{const}(n, m) \mathbf{N}_{2m}(f) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\mathcal{L}^n(x)}{(1 + \|x\|^2)^{mp}} \right)^{1/p} \\ &= \text{const}(n, m) \mathbf{N}_{2m}(f) \left(\int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(1 + r^2)^{mp}} dr \right)^{1/p} = \text{const}(n, p) \mathbf{N}_{2m}(f). \end{aligned}$$

Obserwacja 14.2.9 (Własności transformacji Fouriera w klasie $\mathcal{S}$). (a) $D^\alpha \widehat{f} = (-2\pi i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha f}$, $f \in \mathcal{S}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ (por. Obserwacja 14.2.2(d)).

(b) $\xi^\alpha \widehat{f} = (2\pi i)^{-|\alpha|} \widehat{D^\alpha f}$, $f \in \mathcal{S}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

Wzór wystarczy oczywiście sprawdzić jedynie dla $\alpha = e_j$. Na podstawie wzoru Stokesa (Obserwacja 13.3.3(d)) mamy:

$$\begin{aligned} (2\pi i)^{-1} \widehat{\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)}(\xi) &= (2\pi i)^{-1} \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{B}(r)} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} d\mathcal{L}^n(x) \\ &= (2\pi i)^{-1} \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\int_{\partial \mathbb{B}(r)} f(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} \mathbf{n}_j(x) d\mathcal{L}^{\partial \mathbb{B}(r)}(x) - \int_{\mathbb{B}(r)} f(x) (-2\pi i \xi_j) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} d\mathcal{L}^n(x) \right) \\ &= (2\pi i)^{-1} \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\partial \mathbb{B}(r)} f(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} \frac{x_j}{r} d\mathcal{L}^{\partial \mathbb{B}(r)}(x) + \xi_j \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} d\mathcal{L}^n(x) \\ &= (2\pi i)^{-1} \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\partial \mathbb{B}(r)} f(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} \frac{x_j}{r} d\mathcal{L}^{\partial \mathbb{B}(r)}(x) + \xi_j \widehat{f}(\xi). \end{aligned}$$

Pozostaje wykazać, że

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\partial \mathbb{B}(r)} f(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} \frac{x_j}{r} d\mathcal{L}^{\partial \mathbb{B}(r)}(x) = 0.$$

Korzystając z definicji klasy $\mathcal{S}$ mamy:

$$\left| \int_{\partial \mathbb{B}(r)} f(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} \frac{x_j}{r} d\mathcal{L}^{\partial \mathbb{B}(r)}(x) \right| \leq \text{const}(n) r^{n-1} \left(\max_{\|x\|=r} |f(x)| \right) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0.$$

(c) $\|\widehat{f}\|_{\alpha, \beta} = (2\pi)^{|\beta| - |\alpha|} \sup_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha(x^\beta f)| \leq (2\pi)^{|\beta| - |\alpha|} \|D^\alpha(x^\beta f)\|_{L^1}$, $f \in \mathcal{S}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$. W szczególności, operator $\mathcal{F}$ jest izomorfizmem algebraicznym i topologicznym przestrzeni $\mathcal{S}$ na siebie (oraz $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$).

(d) Jeżeli $\sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha D^\alpha u = f$, gdzie $a_\alpha \in \mathbb{C}$, $u, f \in \mathcal{S}$, to $\left(\sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha (2\pi i)^{|\alpha|} \xi^\alpha \right) \widehat{u}(\xi) = \widehat{f}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Tak więc, po zastosowaniu transformacji Fouriera, równanie różniczkowe zostało zamienione na (na ogół łatwiejszy) problem podzielności funkcji $\widehat{f}$ przez wielomian $P(\xi) := \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha (2\pi i)^{|\alpha|} \xi^\alpha$ w klasie $\mathcal{S}$.

Definicja 14.2.10. Funkcjonały liniowe i ciągłe $T : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ nazywamy *dystrybucjami temperowanymi* (tzn. jeżeli $f_k \xrightarrow{\mathcal{S}} f$, to $T(f_k) \rightarrow T(f)$). Zbiór wszystkich dystrybucji temperowanych oznaczamy przez $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. W przestrzeni $\mathcal{S}'$ rozważamy topologię zbieżności punktowej ($T_k \xrightarrow{\mathcal{S}'} T \iff \forall f \in \mathcal{S} : T_k(f) \rightarrow T(f)$).

Obserwacja 14.2.11 (Własności klasy $\mathcal{S}'$). Niech $T \in \mathcal{S}'$.

(a) $\delta_a \in \mathcal{S}'$ dla dowolnego $a \in \mathbb{R}^n$.

(b) Dla $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, operator $\mathcal{S} \ni f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} u f d\mathcal{L}^n$ jest dobrze określony i należy do $\mathcal{S}'$. W tym sensie $\mathcal{X} \subset L^2(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'$.

Istotnie z nierówności Schwarza oraz Obserwacji 14.2.8 wynika, że

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot f d\mathcal{L}^n \right| \leq \|u\|_{L^2} \|f\|_{L^2} \leq C \|u\|_{L^2} N_s(f), \quad f \in \mathcal{S}, \quad C := C(n, 2), \quad s := s(n, 2).$$

(c) Operator $L^2(\mathbb{R}^n) \ni u \mapsto [u] \in \mathcal{S}'$ jest ciągły.

(d) Dla funkcji mierzalnej $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ o wzroście wielomianowym, tzn.

$$|u(x)| \leq M(1 + \|x\|^2)^m, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

dla pewnych $M > 0$ i $m \in \mathbb{N}_0$, operator $[u]$ jest dobrze określony i należy do $\mathcal{S}'$. Przykładem takich funkcji u są wielomiany.

Istotnie,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot f d\mathcal{L}^n \right| &\leq M \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^m |f(x)| d\mathcal{L}^n(x) \leq M \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1 + \|x\|^2)^\sigma |f(x)|}{(1 + \|x\|^2)^{\sigma - m}} d\mathcal{L}^n(x) \\ &\leq M \text{const}(n, m) N_{2\sigma}(f), \quad f \in \mathcal{S}, \quad \sigma := \lfloor m + n/2 \rfloor + 1. \end{aligned}$$

(e) Zdefiniujmy $(D^\alpha T)(f) := (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha f)$, $f \in \mathcal{S}$. Wtedy $D^\alpha T \in \mathcal{S}'$.

(f) Dla wielomianu P zdefiniujmy $(P \cdot T)(f) := T(P \cdot f)$, $f \in \mathcal{S}$. Wtedy $P \cdot T \in \mathcal{S}'$.

(g) Zdefiniujmy $\check{T}(f) := T(\check{f})$, $f \in \mathcal{S}$. Wtedy $\check{T} \in \mathcal{S}'$.

(h) Zdefiniujmy $\widehat{T}(f) := T(\widehat{f})$, $f \in \mathcal{S}$. Wtedy $\widehat{T} \in \mathcal{S}'$.

Definicja 14.2.12. Dystrybucję $\widehat{T}$ nazywamy *transformatą Fouriera dystrybucji T* .

Operację $\mathcal{S}' \ni T \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{T} \in \mathcal{S}'$ nazywamy *transformacją Fouriera dystrybucji*.

Obserwacja 14.2.13 (Własności transformacji Fouriera w klasie $\mathcal{S}'$). (a) Transformacja Fouriera

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$$

jest izomorfizmem algebraicznym i topologicznym; $\mathcal{F}^{-1}(T) = \check{\widehat{T}}$.

(b) $[\widehat{u}] = [\check{u}]$, $u \in \mathcal{X} \supset \mathcal{S}$.

Istotnie, wtedy $u, \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, skąd wynika, że $[u], [\widehat{u}] \in \mathcal{S}'$. Ponadto, na podstawie Lematu 14.2.4, mamy:

$$[\widehat{u}](f) = [u](\widehat{f}) = \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot \widehat{f} d\mathcal{L}^n = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u} \cdot f d\mathcal{L}^n = [\widehat{u}](f), \quad f \in \mathcal{S}.$$

(c) $\widehat{D^\alpha T} = (2\pi i)^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{T}$, $T \in \mathcal{S}'$.

Istotnie, na podstawie Obserwacji 14.2.9, mamy

$$\widehat{D^\alpha T}(f) = D^\alpha T(\widehat{f}) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \widehat{f}) = (-1)^{|\alpha|} T((-2\pi i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha f}) = (2\pi i)^{|\alpha|} (\xi^\alpha \widehat{T})(f), \quad f \in \mathcal{S}.$$

(d) $D^\alpha \widehat{T} = (-2\pi i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha T}$, $T \in \mathcal{S}'$.

Istotnie,

$$D^\alpha \widehat{T}(f) = (-1)^{|\alpha|} \widehat{T}(D^\alpha f) = (-1)^{|\alpha|} T(\widehat{D^\alpha f}) = (-1)^{|\alpha|} T((2\pi i)^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{f}) = (-2\pi i)^{|\alpha|} (\widehat{x^\alpha T})(f), \quad f \in \mathcal{S}.$$

(e) $\widehat{\delta_0} = [1]$, $\widehat{[1]} = \delta_0$, $D^\alpha \delta_0 = (-2\pi i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha [1]}$.

Istotnie,

$$\widehat{\delta_0}(f) = \delta_0(\widehat{f}) = \widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\mathcal{L}^n(x) = [1](f), \quad f \in \mathcal{S},$$

$$\widehat{[1]} = \widehat{\delta_0} = \check{\delta_0} = \delta_0, \quad D^\alpha \delta_0 = D^\alpha \widehat{[1]} = (-2\pi i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha [1]} = (-2\pi i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha}.$$

(f) $\widehat{[u]} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ dla $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Ponadto, $\|\widehat{[u]}\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}$, czyli operator $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ jest izometrią.

Ustalmy $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Zauważmy, że korzystając z Propozycji 14.2.6(d), mamy

$$|\widehat{[u]}(f)| = |[u](\widehat{f})| \leq \|u\|_{L^2} \|\widehat{f}\|_{L^2} = \|u\|_{L^2} \|f\|_{L^2}, \quad f \in \mathcal{S}.$$

Przestrzeń $\mathcal{S}$ jest gęsta w $L^2(\mathbb{R}^n)$ w normie L^2 . W takim razie, $\widehat{[u]}$ przedłuża się do funkcyjonału liniowego i ciągłego $\Lambda : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ takiego, że $\|\Lambda\| \leq \|u\|_{L^2}$. Korzystając z twierdzenia Riesz, wnioskujemy, że istnieje funkcja $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ taka, że $\Lambda(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot g d\mathcal{L}^n$, $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, oraz $\|g\|_{L^2} = \|\Lambda\|$. Oznacza to, że $\widehat{[u]} = [g]$, czyli $\widehat{[u]} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ oraz $\|\widehat{[u]}\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^2}$. Dla dowodu równości, zastosujmy poprzednią nierówność do funkcji $\widehat{[u]}$: $\|u\|_{L^2} = \|\check{u}\|_{L^2} = \|\check{\widehat{[u]}}\|_{L^2} = \|\widehat{[u]}\|_{L^2} \leq \|\widehat{[u]}\|_{L^2}$.

(g) Jeżeli $\sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha D^\alpha U = T$, gdzie $a_\alpha \in \mathbb{C}$, $U, T \in \mathcal{S}'$, to $\left(\sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha (2\pi i)^{|\alpha|} \xi^\alpha \right) \widehat{U} = \widehat{T}$. Tak więc, po zastosowaniu transformacji Fouriera, dystrybucyjne równanie różniczkowe zostało zamienione na (na ogół trudny) problem podzielności dystrybucji $\widehat{T}$ przez wielomian $P(\xi) := \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha (2\pi i)^{|\alpha|} \xi^\alpha$ w klasie $\mathcal{S}'$.

14.3. Twierdzenie Kirszbrauna

Twierdzenie 14.3.1 (Twierdzenie Kirszbrauna ⁽⁴⁾). Niech $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^m$ i niech $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie dowolnym odwzorowaniem spełniającym warunek Lipschitza $\|f(x') - f(x'')\| \leq L\|x' - x''\|$, $x', x'' \in S$ (w normach euklidesowych). Wtedy f posiada rozszerzenie $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ spełniające warunek Lipschitza z tą samą stałą L .

Obserwacja 14.3.2. Powyższe twierdzenie nie jest prawdziwe przy dowolnym wyborze norm w $\mathbb{R}^m$ i $\mathbb{R}^n$.

Dla przykładu, niech $S := \{(1, -1), (-1, 1), (1, 1)\} =: \{a_1, a_2, a_3\} \subset \mathbb{R}^2$, $f(1, -1) = (1, 0) = b_1$, $f(-1, 1) = (-1, 0) = b_2$, $f(1, 1) = (0, \sqrt{3}) = b_3$. Wtedy $\|f(x') - f(x'')\| = \|x' - x''\|_\infty = 2$, $x', x'' \in S$, $x' \neq x''$, co oznacza, że f spełnia w tych normach warunek Lipschitza ze stałą 1.

Istotnie, $a_1 - a_2 = (2, -2)$, $b_1 - b_2 = (2, 0)$, $a_1 - a_3 = (0, -2)$, $b_1 - b_3 = (1, -\sqrt{3})$, $a_2 - a_3 = (-2, 0)$, $b_2 - b_3 = (-1, -\sqrt{3})$.

Przypuśćmy, że f rozszerza się do odwzorowania $g : S \cup \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ spełniającego warunek Lipschitza ze stałą 1 (w powyższych normach). Niech $a_0 := (0, 0)$, $b_0 := g(0, 0)$. Wtedy musi być: $\|b_0 - b_i\| \leq \|a_0 - a_i\|_\infty = 1$, $i = 1, 2, 3$, co daje sprzeczność.

Lemat 14.3.3. Niech $\mathbb{B}(b_j, r_j) \subset \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, N$, będzie dowolnym skończonym układem otwartych kul euklidesowych. Dla $t \geq 0$ zdefiniujmy $Y_t := \bigcap_{j=1}^N \overline{\mathbb{B}}(b_j, tr_j)$ i niech $c := \inf\{t \geq 0 : Y_t \neq \emptyset\}$. Wtedy $c < +\infty$, $Y_c = \{b\}$ oraz $b \in \text{conv } A$, gdzie $A := \{b_j : \|b - b_j\| = cr_j\}$.

Powyższy lemat jest prawdziwy dla znacznie ogólniejszej sytuacji (cf. [Fed 1969], Lemma 2.10.40).

⁽⁴⁾ Mojżesz Kirszbraun (1903(?)–1942).

Dowód. Zauważmy, że $0 \in Y_t$ dla $t \geq \max\{\|b_j\|/r_j : j = 1, \dots, N\}$. Stąd $c < +\infty$. Ponadto, $Y_c = \bigcap_{c < t < +\infty} Y_t \neq \emptyset$. Zdefiniujmy $\mu := \max\{r_j : j = 1, \dots, N\}$. Niech $y, z \in Y_c$. Wtedy

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2}(y+z) - b_j \right\|^2 &= \frac{1}{4}\|y+z\|^2 + \|b_j\|^2 - \langle y+z, b_j \rangle \\ &= \frac{1}{2}\|y\|^2 + \frac{1}{2}\|z\|^2 - \frac{1}{4}\|y-z\|^2 + \|b_j\|^2 - \langle y, b_j \rangle - \langle z, b_j \rangle \\ &= \frac{1}{2}(\|y-b_j\|^2 + \|z-b_j\|^2) - \frac{1}{4}\|y-z\|^2 \leq r_j^2 c^2 - \frac{r_j^2}{4\mu^2}\|y-z\|^2, \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

W konsekwencji $\frac{1}{2}(y+z) \in Y_t$ dla $t := \sqrt{c^2 - \frac{1}{4\mu^2}\|y-z\|^2}$. Oznacza to, że $t \geq c$, czyli $y = z$. Tak więc $Y_c = \{b\}$.

Po translacji możemy założyć, że $b = 0$. Pozostaje pokazać, że $0 \in \text{conv } A$, gdzie $A := \{b_j : \|b_j\| = r_j c\}$. Możemy założyć, że $A = \{b_1, \dots, b_s\}$. Przypuśćmy, że $0 \notin \text{conv } A$. Wtedy istnieje $(n-1)$ -wymiarowa płaszczyzna $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle = 0\}$, gdzie $u \in \mathbb{R}^n$, $\|u\| = 1$, taka że $\text{conv } A \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle > 0\}$. W szczególności, $\langle b_j, u \rangle > 0$ dla $b_j \in A$. Dla małych $\varepsilon > 0$ mamy $0 \neq \varepsilon u \notin Y_c$, a więc istnieje $j = j(\varepsilon) \in \{1, \dots, s\}$ takie, że $\|\varepsilon u - b_j\| > cr_j$. Stąd $c^2 r_j^2 < \|\varepsilon u - b_j\|^2 = \varepsilon^2 + \|b_j\|^2 - 2\varepsilon \langle u, b_j \rangle = \varepsilon^2 + c^2 r_j^2 - 2\varepsilon \langle u, b_j \rangle$. W szczególności, $\langle u, b_j \rangle < \frac{1}{2}\varepsilon$. Wnioskujemy stąd (gdy $\varepsilon \rightarrow 0+$), że $\{b_j \in A : \langle u, b_j \rangle \leq 0\} \neq \emptyset$ — sprzeczność. $\square$

Dowód Twierdzenia Kirszbrauna. Możemy założyć, że $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą 1. Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną wszystkich par (T, g) , gdzie $g : T \rightarrow \mathbb{R}^n$, $S \subset T$, g jest przedłużeniem f spełniającym warunek Lipschitza ze stałą 1. Z Lematu Kuratowskiego ⁽⁵⁾-Zorna ⁽⁶⁾ wiemy, że $\mathcal{F}$ posiada element maksymalny (T_0, g) . Przypuśćmy, że $T_0 \neq \mathbb{R}^m$ i ustalmy $a_0 \in \mathbb{R}^m \setminus T_0$. Pokażemy, że istnieje $b \in \bigcap_{a \in T} \overline{\mathbb{B}}(g(a), \|a - a_0\|)$. Jeżeli tak będzie, to możemy rozszerzyć g do $T_0 \cup \{a_0\}$ kładąc w punkcie a_0 wartość b , co da sprzeczność.

Wystarczy pokazać, że $\bigcap_{a \in T} \overline{\mathbb{B}}(g(a), \|a - a_0\|) \neq \emptyset$ dla dowolnego zbioru skończonego $T = \{a_1, \dots, a_N\} \subset T_0$. Zastosujemy Lemat 14.3.3 do zbioru kul $\mathbb{B}(g(a_j), \|a_j - a_0\|)$, $j = 1, \dots, N$. Niech c, b będą takie, jak w lemacie. Wiemy, że możemy założyć, że $b = \sum_{j=1}^k t_j g(a_j)$, gdzie $k \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_k > 0$, $t_1 + \dots + t_k = 1$, $\|b - g(a_j)\| = c\|a_j - a_0\|$, $j = 1, \dots, k$. Mamy

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \left\| \sum_{j=1}^k t_j (g(a_j) - b) \right\|^2 = 2 \sum_{i,j=1}^k t_i t_j \langle g(a_i) - b, g(a_j) - b \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^k t_i t_j (\|g(a_i) - b\|^2 + \|g(a_j) - b\|^2 - \|g(a_i) - g(a_j)\|^2) \\ &\geq \sum_{i,j=1}^k t_i t_j (c^2 \|a_i - a_0\|^2 + c^2 \|a_j - a_0\|^2 - \|a_i - a_j\|^2) \\ &= \sum_{i,j=1}^k t_i t_j (2c^2 \langle a_i - a_0, a_j - a_0 \rangle + (c^2 - 1) \|a_i - a_j\|^2) \\ &= 2c^2 \left\| \sum_{i=1}^k t_i (a_i - a_0) \right\|^2 + (c^2 - 1) \sum_{i,j=1}^k t_i t_j \|a_i - a_j\|^2. \end{aligned}$$

Wynika stąd, że albo ($k = 1$ i $c = 0$) albo ($k \geq 2$ i $c \leq 1$). Tak więc $c \leq 1$ i w konsekwencji $b \in Y_1 = \bigcap_{a \in T} \overline{\mathbb{B}}(g(a), \|a - a_0\|)$. $\square$

14.4. Miara i ko-miara odwzorowań lipschitzowskich

Do sformułowania zasadniczych dwóch twierdzeń potrzebujemy kilku oznaczeń.

⁽⁵⁾ Kazimierz Kuratowski (1896–1980).

⁽⁶⁾ Max August Zorn (1906–1993).

• Dla dowolnej $(n \times m)$ -wymiarowej macierzy rzeczywistej A (utożsamianej, jak zwykle, z odwzorowaniem liniowym $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$) niech

$$J_d(A) := \left(\sum_{I \in \Lambda_d^n, J \in \Lambda_d^m} (\det A_{I,J})^2 \right)^{1/2}, \quad 1 \leq d \leq \min\{m, n\},$$

gdzie $A_{I,J}$ oznacza podmacierz macierzy A powstałą przez wybranie wierszy o numerach $i_1, \dots, i_d$ i kolumn $j_1, \dots, j_d$, zaś $\Lambda_r^s := \{(k_1, \dots, k_r) : 1 \leq k_1 < \dots < k_r \leq s\}$.

Jeżeli $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest odwzorowaniem takim, że $f'(a)$ istnieje, to przyjmujemy $J_d f(a) := J_d(f'(a))$. Zauważmy, że:

- dla $m = 1$ mamy $J_1 f(a) = \sqrt{\sum_{j=1}^n (f'_j(a))^2} = \|f'(a)\|$,
- dla $d = n = m$ mamy $J_m f(x) = |\det[\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(a)]_{j,k=1,\dots,m}| = |f'(a)|$.

• Dla dowolnego zbioru $A \subset \mathbb{R}^m$ definiujemy $N_A(f, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$,

$$N_A(f, y) := \begin{cases} \#(A \cap f^{-1}(y)), & \text{jeżeli zbiór } A \cap f^{-1}(y) \text{ jest skończony} \\ +\infty, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}.$$

Następujące dwa fundamentalne twierdzenia będą ukoronowaniem naszego wykładu.

Twierdzenie 14.4.1. *Niech $n \geq m$ i niech $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie odwzorowaniem spełniającym lokalnie warunek Lipschitza. Wtedy dla dowolnego zbioru $A \in \mathcal{L}_m$ mamy*

$$\int_{\mathbb{R}^n} N_A(f, y) d\mathcal{H}^m(y) = \int_{f(A)} N_A(f, y) d\mathcal{H}^m(y) = \int_A J_m f(x) d\mathcal{L}^m(x). \quad (\dagger)$$

Całka $\int_{\mathbb{R}^n} N_A(f, y) d\mathcal{H}^m(y)$ nosi nazwę m -wymiarowej miary (area) Hausdorffa funkcji $f|_A$.

Twierdzenie 14.4.2. *Niech $n < m$ i niech $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie odwzorowaniem spełniającym lokalnie warunek Lipschitza. Wtedy dla dowolnego zbioru $A \in \mathcal{L}_m$ mamy*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(y)) d\mathcal{L}^n(y) = \int_A J_n f(x) d\mathcal{L}^m(x). \quad (\ddagger)$$

Całka $\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(y)) d\mathcal{L}^n(y)$ nosi nazwę $(m - n)$ -wymiarowej ko-miary (coarea) Hausdorffa funkcji $f|_A$.

14.4.1. Uwagi i komentarze.

Obserwacja 14.4.3. (a) Na mocy Twierdzenia Rademachera 12.4.1 $f'(x)$ istnieje dla $x \in \Xi' = \mathbb{R}^m \setminus \Xi$, gdzie Ξ jest pewnym zbiorem borelowskim miary zero ⁽⁷⁾, oraz wszystkie funkcje $\mathbb{R}^m \setminus \Xi \ni x \mapsto \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ są borelowskie (Obserwacja 12.1.7(v)). W szczególności, funkcja $\mathbb{R}^m \setminus \Xi \ni x \mapsto J_m f(x)$ jest borelowska, a więc prawe strony wzorów $(\dagger)$ i $(\ddagger)$ są poprawnie określone.

(b) $\mathcal{H}_m$ -mierzalność funkcji $\mathbb{R}^n \ni y \mapsto N_A(f, y)$ wymaga udowodnienia. Jeżeli jest ona $\mathcal{H}_m$ -mierzalna, to $f(A) = \{\varphi \neq 0\} \in \mathcal{H}_m$ i pierwsze dwa wyrazy w $(\dagger)$ będą poprawnie określone. Podobnie, nie jest oczywiste, że zbiór $A \cap f^{-1}(y)$ jest $\mathcal{H}_{m-n}$ -mierzalny dla $\mathcal{L}_n$ -p.w. $y \in \mathbb{R}^n$ oraz że funkcja $\mathbb{R}^n \ni y \mapsto \mathcal{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(y))$ jest $\mathcal{L}_n$ -mierzalna.

(c) Wobec Twierdzenia Kirszbrauna, $(\dagger)$, $(\ddagger)$ można zastosować do dowolnego odwzorowania lipschitzowskiego $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$, gdzie $S \subset \mathbb{R}^m$ jest dowolny, oraz $\mathcal{L}_m \ni A \subset S$.

(d) Jeżeli $f|_A$ jest iniektywne, to z $(\dagger)$ wynika ważny wzór na miarę zbioru $f(A)$:

$$\mathcal{H}^m(f(A)) = \int_A J_m f(x) d\mathcal{L}^m(x).$$

Dla przykładu, niech $m = 2, n = 3, f(x, \varphi) := (x, R(x) \cos \varphi, R(x) \sin \varphi)$, $(x, \varphi) \in A := [a, b] \times [0, 2\pi)$, gdzie $R : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ spełnia warunek Lipschitza. Mamy

$$f'(x, \varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ R'(x) \cos \varphi & -R(x) \sin \varphi \\ R'(x) \sin \varphi & R(x) \cos \varphi \end{bmatrix},$$

⁽⁷⁾ Zbiór ten oczywiście nie jest jednoznacznie wyznaczony. Ustalamy jeden.

$$\begin{aligned} J_2^2(x, \varphi) &= \left| \begin{matrix} 1 & 0 \\ R'(x) \cos \varphi & -R(x) \sin \varphi \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} 1 & 0 \\ R'(x) \sin \varphi & R(x) \cos \varphi \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} R'(x) \cos \varphi & -R(x) \sin \varphi \\ R'(x) \sin \varphi & R(x) \cos \varphi \end{matrix} \right|^2 \\ &= R^2(x) + R^2(x)(R'(x))^2 = R^2(x)(1 + (R'(x))^2). \end{aligned}$$

Stąd

$$\mathcal{H}^2(f(A)) = \int_A R(x) \sqrt{1 + (R'(x))^2} dx d\varphi = 2\pi \int_a^b R(x) \sqrt{1 + (R'(x))^2} dx.$$

(e) Jeżeli $f|_A$ jest iniektywne i $n = m$, to z (†) wynika uogólnienie twierdzenia o zmianie zmiennych

$$\mathcal{L}^m(f(A)) = \mathcal{H}^m(f(A)) = \int_A |f'(x)| d\mathcal{L}^m(x)$$

(korzystamy tu z równości $\mathcal{H}^m = \mathcal{L}^m$ (Twierdzenie 12.1.34)).

(f) (†) (odp. (‡)) zachodzi trywialnie dla $A = \emptyset$. Zauważmy, że nie jest oczywiste, że zachodzi dla zbioru miary zero (wtedy prawe strony w (†) i (‡) są zero).

(g) Jeżeli $(A_i)_{i=1}^\infty$ jest rozbięciem zbioru A na zbiory mierzalne w sensie Lebesgue'a (tzn. $A_i \in \mathcal{L}_m$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$ i $A = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$) oraz (†) (odp. (‡)) zachodzi dla każdego zbioru A_i z osobna, to zachodzi dla A .

Istotnie, $N_A(f, y) = \sum_{i=1}^\infty N_{A_i}(f, y)$, $y \in \mathbb{R}^n$ (odp. $\mathcal{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(y)) = \sum_{i=1}^\infty \mathcal{H}^{m-n}(A_i \cap f^{-1}(y))$ dla $\mathcal{L}_n$ -p.w. $y \in \mathbb{R}^n$; odnotujmy, że ostaną równość wymaga tego, aby wszystkie zbiory $A_i \cap f^{-1}(y)$, $i \in \mathbb{N}$, były $\mathcal{H}_{m-n}$ -mieralne — (b)).

(h) W szczególności, z (g) wynika, że zawsze możemy założyć, że $A \subset \subset \mathbb{R}^m$ oraz że f spełnia globalny warunek Lipschitza.

(i) Z (†) wynika następujący ważny wniosek:

Przy założeniach z (†), dla dowolnej funkcji $g \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}_m)$ (odp. $g \in L^1(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}^m)$) mamy:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{x \in f^{-1}(y)} g(x) \right) d\mathcal{H}^m(y) = \int_{\mathbb{R}^m} g(x) J_m f(x) d\mathcal{L}^m(x).$$

Istotnie, przypadek, gdy $g = \chi_A$ to (†). Dalej rozumiemy standardowo, tzn. najpierw przenosimy wynik na $g \in \mathcal{M}_0^+(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}_m)$. Następnie na $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}_m)$ korzystając z tego, że jeżeli $\mathcal{M}_0^+(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}_m) \ni g_i \nearrow g$, to $\sum_{x \in f^{-1}(y)} g_i(x) \nearrow \sum_{x \in f^{-1}(y)} g(x)$ (ĆWICZENIE). Na koniec, jeżeli $g \in L^1(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}^m)$, to stosujemy rozkład $g = g_+ - g_-$ (ĆWICZENIE).

(j) Rozumując podobnie, jak w Obserwacji (i), można wykazać (ĆWICZENIE), że z (‡) wynika, że:

Dla dowolnej funkcji $g \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}_m)$ (odp. $g \in L^1(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}^m)$) zachodzi

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{f^{-1}(y)} g(x) d\mathcal{H}^{m-n}(x) d\mathcal{L}^n(y) = \int_{\mathbb{R}^m} g(x) J_n f(x) d\mathcal{L}^m(x).$$

(k) Zastosujmy (j) do $n = 1$ i funkcji $f(x) := \|x\|$. Zauważmy, że $J_1 f(x) = 1$, $x \neq 0$. Dostajemy:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{f^{-1}(y)} g(x) d\mathcal{H}^{m-1}(x) d\mathcal{L}(y) = \int_{\mathbb{R}^m} g(x) d\mathcal{L}^m(x), \quad g \in L^1(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}^m),$$

czyli

$$\int_{\mathbb{R}^m} g(x) d\mathcal{L}^m(x) = \int_0^{+\infty} \int_{y\mathbb{S}_{m-1}} g(x) d\mathcal{H}^{m-1}(x) d\mathcal{L}(y) \stackrel{(*)}{=} \int_0^{+\infty} r^{m-1} \int_{\mathbb{S}_{m-1}} g(rx) d\mathcal{H}^{m-1}(x) d\mathcal{L}(r), \quad (\text{PC})$$

gdzie (*) wynika z tego $\mathcal{H}^k(rA) = r^k \mathcal{H}^k(A)$, $A \subset \mathbb{R}^m$. Istotnie jeżeli $A \subset \bigcup_{j=1}^\infty A_j$, gdzie $\text{diam } A_j \leq \delta$, $j \in \mathbb{N}$, to $rA \subset \bigcup_{j=1}^\infty rA_j$, gdzie $\text{diam } A_j \leq r\delta$, $j \in \mathbb{N}$. Stąd $\mathcal{H}_{r\delta}^k(rA) \leq \sum_{j=1}^\infty \zeta_k(rA_j) = r^k \sum_{j=1}^\infty \zeta_k(A_j)$, gdzie $\mathcal{H}_\delta^k$ oznacza miarę aproksymatywną dla $\mathcal{H}^k$ w $\mathbb{R}^m$ — zob. § 12.1.6. W takim razie $\mathcal{H}_{r\delta}^k(rA) \leq r^k \mathcal{H}_\delta^k(A)$, co przy $\delta \rightarrow 0+$ daje $\mathcal{H}^k(rA) \leq r^k \mathcal{H}^k(A) = r^k \mathcal{H}^k(\frac{1}{r}(rA)) \leq \mathcal{H}^k(rA)$.

Wzór (PC) to odpowiednik współrzędnych biegunowych w $\mathbb{R}^m$. W szczególności, biorąc $g := \chi_{\mathbb{B}_m}$, mamy:

$$\mathcal{L}^m(\mathbb{B}_m) = \int_0^1 r^{m-1} \mathcal{H}^{m-1}(\mathbb{S}_{m-1}) d\mathcal{L}(r) = \frac{1}{m} \mathcal{H}^{m-1}(\mathbb{S}_{m-1}).$$

(l) W przypadku, gdy $n < m$ i $f = \text{pr}_{\mathbb{R}^n} (J_n f(x) = 1, f^{-1}(y) = \{y\} \times \mathbb{R}^{m-n})$, dostajemy

$$\int_{\mathbb{R}^m} g d\mathcal{L}^m = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^{m-n}} g(x, y) d\mathcal{L}^{m-n}(x) d\mathcal{L}^n(y).$$

Oznacza to, że (j) uogólnia twierdzenie Fubinięgo.

14.4.2. Dowody — I etap. Postaramy się pokonać problemy wynikające z Obserwacji 14.4.3(b) oraz przypadek, gdy $\mathcal{L}^m(A) = 0$. Wiemy, że możemy założyć, że $A \subset \subset \mathbb{R}^m$ oraz że f spełnia globalny warunek Lipschitza ze stałą $L > 0$. Najpierw zajmijmy się (†).

Propozycja 14.4.4. Niech $n \geq m$ i niech $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $L > 0$.

(a) $\mathcal{H}^m(f(S)) \leq L^m \mathcal{H}^m(S) = L^m \mathcal{L}^m(S)$, $S \subset \mathbb{R}^m$. W szczególności, $\mathcal{H}^m(f(S)) = 0$, gdy $\mathcal{L}^m(S) = 0$, a zatem (†) zachodzi, gdy $\mathcal{L}^m(A) = 0$.

(b) $f(S) \in \mathcal{H}_m$, $S \in \mathcal{L}_m$.

(c) Dla dowolnego $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ funkcja $\mathbb{R}^n \ni y \mapsto N_S(f, y)$ jest $\mathcal{H}_m$ -mierzalna.

(d) Dla dowolnego $A \in \mathcal{L}_m$ funkcja $\mathbb{R}^n \ni y \mapsto N_A(f, y)$ jest $\mathcal{H}_m$ -mierzalna.

Dowód. (a) (Por. rozumowanie w Obserwacji 14.4.3(k).) Niech $S \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, przy czym $\text{diam } A_j \leq \delta$, $j \in \mathbb{N}$. Wtedy $f(S) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} f(A_j)$ i $\text{diam } f(A_j) \leq L \text{diam } A_j \leq L\delta$, $j \in \mathbb{N}$. Stąd $\mathcal{H}_{L\delta}^m(f(S)) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_m(f(A_j)) \leq L^m \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_m(A_j)$. Tak więc $\mathcal{H}_{L\delta}^m(f(S)) \leq L^m \mathcal{H}_{\delta}^m(S)$. Teraz $\delta \rightarrow 0+$.

(b) Przypadek $\mathcal{L}^m(S) = 0$ wynika z (a). W przypadku ogólnym rozumiemy tak, jak w dowodzie Propozycji 12.1.38(c), tzn. rozumiemy tak:

Ponieważ miara Lebesgue'a jest regularna, zatem $S = F \cup Z$, gdzie $F \in \mathcal{F}_{\sigma}$, zaś Z jest miary zero. Oczywiście zbiór F może być przedstawiony w postaci $F = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$, gdzie każdy zbiór K_j jest zwarty. Na podstawie (a), $\mathcal{H}^m(f(Z)) = 0$. Każdy ze zbiorów $f(K_j)$ jest zwarty. Ostatecznie więc, $f(S) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f(K_j) \cup f(Z)$ jest $\mathcal{H}_m$ -mierzalny.

(c) Niech $(S_{s,j})_{j=1}^{\infty}$ będą zbiorami borelowskimi takimi, że $(S_{s,j})_{j=1}^{\infty}$ jest rozbięciem S , przy czym rozbiecie $(S_{s+1,j})_{j=1}^{\infty}$ jest wpisane w $(S_{s,j})_{j=1}^{\infty}$ ⁽⁸⁾ oraz $\delta_s := \sup\{\text{diam } S_{s,j} : j \in \mathbb{N}\} \searrow 0$. Takie rozbiecia uzyskamy np. biorąc $\{S_{s,j} : j \in \mathbb{N}\} := \{S \cap \Delta_{1/2^s, \alpha}^o : \alpha \in \mathbb{Z}^n\}$ (zob. Obserwacja 12.1.4). Pokażemy, że

$$N_S(f, y) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{f(S_{s,j})}(y), \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

skąd natychmiast (wobec (b)) wyniknie, że funkcja $\mathbb{R}^n \ni y \mapsto N_S(f, y)$ jest $\mathcal{H}_m$ -mierzalna.

Ustalmy $y \in f(S)$. Jeżeli $S \cap f^{-1}(y)$ jest zbiorem skończonym, to dla $s \gg 1$ elementy zbioru $S \cap f^{-1}(y)$ muszą leżeć w różnych zbiorach z rozbiecia $(S_{s,j})_{j=1}^{\infty}$ (tu korzystamy z tego, że $\delta_s \rightarrow 0$). Oznacza to, że $\sum_{j=1}^{\infty} \chi_{f(S_{s,j})}(y) = N_S(f, y)$ dla $s \gg 1$. Jeżeli $S \cap f^{-1}(y)$ jest zbiorem nieskończonym, to dla dowolnych parami różnych elementów $x_1, \dots, x_k \in S \cap f^{-1}(y)$, jeżeli $s \gg 1$, to $x_1, \dots, x_k$ muszą leżeć w różnych zbiorach z rozbiecia $(S_{s,j})_{j=1}^{\infty}$. Oznacza to $\sum_{j=1}^{\infty} \chi_{f(S_{s,j})}(y) \geq k$ dla $s \gg 1$. Wobec dowolności k dostajemy

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{f(S_{s,j})}(y) = +\infty = N_S(f, y).$$

(d) Przypadek $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ wynika z (c). Przypadek $\mathcal{L}^m(A) = 0$ wynika z (a). $\square$

Teraz przechodzimy do (†).

Propozycja 14.4.5. Niech $f : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^s$ spełnia warunek Lipschitza za stałą $L > 0$ i niech $0 < k, \ell < +\infty$.

⁽⁸⁾ Tzn. $S_{s,j} = \bigcup_{i \in I(s,j)} S_{s+1,i}$ dla pewnej rodziny $I(s,j) \subset \mathbb{N}$.

(a)

$$\int_{\mathbb{R}^s} \mathcal{H}^k(S \cap f^{-1}(y)) d\mathcal{H}^\ell(y) \leq L^\ell \beta_{k,\ell} \mathcal{H}^{k+\ell}(S), \quad S \subset \mathbb{R}^m, \text{ gdzie } \beta_{k,\ell} := \frac{\alpha(k)\alpha(\ell)}{\alpha(k+\ell)}.$$

Ponieważ jeszcze nie wiemy, czy funkcja $y \mapsto \mathcal{H}^k(S \cap f^{-1}(y))$ jest $\mathcal{H}_\ell$ -mierzalna, powyższą nierówność rozumiemy tak, że istnieje funkcja $\mathcal{H}_\ell$ -mierzalna $F : \mathbb{R}^s \rightarrow [0, +\infty]$ taka, że $F(y) \geq \mathcal{H}^k(S \cap f^{-1}(y))$, $y \in \mathbb{R}^s$, oraz $\int_{\mathbb{R}^s} F(y) d\mathcal{H}^\ell(y) \leq L^\ell \beta_{k,\ell} \mathcal{H}^{k+\ell}(S)$.

W szczególności, $\int_{\mathbb{R}^s} \mathcal{H}^k(S \cap f^{-1}(y)) d\mathcal{H}^\ell(y) = 0$, gdy $\mathcal{H}^{k+\ell}(S) = 0$.

(b) Jeżeli $S \in \mathcal{H}_{k+l}$ oraz $\mathcal{H}^{k+l}(S) < +\infty$, to:

- zbiór $S \cap f^{-1}(y)$ jest $\mathcal{H}_k$ -mierzalny dla $\mathcal{H}^\ell$ -p.w. $y \in \mathbb{R}^s$,
- funkcja $\mathbb{R}^s \ni y \mapsto \mathcal{H}^k(S \cap f^{-1}(y))$ jest $\mathcal{H}_\ell$ -mierzalna.

Dowód. (a) Niech $S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{j,i}$, przy czym $\text{diam } A_{j,i} \leq \frac{1}{j}$ oraz $\sum_{i=1}^{\infty} \zeta_{k+\ell}(A_{j,i}) \leq \mathcal{H}^{k+\ell}(S) + \frac{1}{j}$, $j \in \mathbb{N}$.

Zdefiniujmy $B_{j,i} := \overline{f(A_{j,i})}$. Oczywiście, $B_{j,i}$ jest zbiorem zwartym oraz $\text{diam } B_{j,i} \leq \frac{1}{j}$. Zauważmy, że $S \cap f^{-1}(y) \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}: y \in B_{j,i}} A_{j,i}$. W takim razie $\mathcal{H}_{1/j}^k(S \cap f^{-1}(y)) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}: y \in B_{j,i}} \zeta_k(A_{j,i}) = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{B_{j,i}}(y) \zeta_k(A_{j,i}) =: F_j(y)$. Funkcja F_j jest oczywiście $\mathcal{H}_\ell$ -mierzalna (bo jest borelowska). Mamy

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^s} F_j(y) d\mathcal{H}^\ell(y) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^\ell(B_{j,i}) \zeta_k(A_{j,i}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_\ell(B_{j,i}) \zeta_k(A_{j,i}) \\ &\leq L^\ell \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_\ell(A_{j,i}) \zeta_k(A_{j,i}) \leq L^\ell \beta_{k,\ell} \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_{k+\ell}(A_{j,i}) \leq L^\ell \beta_{k,\ell} (\mathcal{H}^{k+\ell}(S) + \frac{1}{j}). \end{aligned}$$

Niech $F := \liminf_{j \rightarrow +\infty} F_j$. Na podstawie lematu Fatou mamy

$$\int_{\mathbb{R}^s} F(y) d\mathcal{H}^\ell(y) \leq \liminf_{j \rightarrow +\infty} L^\ell \beta_{k,\ell} (\mathcal{H}^{k+\ell}(S) + \frac{1}{j}) = L^\ell \beta_{k,\ell} \mathcal{H}^{k+\ell}(S).$$

Z drugiej strony, $F(y) \geq \liminf_{j \rightarrow +\infty} \mathcal{H}_{1/j}^k(S \cap f^{-1}(y)) = \mathcal{H}^k(S \cap f^{-1}(y))$.

(b) Wystarczy osobno rozważyć przypadek, gdy $\mathcal{H}^{k+\ell}(S) = 0$ oraz gdy $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k+\ell})$. Pierwszy przypadek wynika z (a). Drugi z tych przypadków sprowadza się do sytuacji, gdy S jest zwarty.

Wtedy $S \cap f^{-1}(y)$ jest też zwarty dla dowolnego y . Pozostaje mierzalność funkcji $\mathbb{R}^s \ni y \mapsto \mathcal{H}^k(S \cap f^{-1}(y))$.

Niech $t > 0$. Pokażemy, że $\{y \in \mathbb{R}^s : \mathcal{H}^k(S \cap f^{-1}(y)) \leq t\} = \bigcap_{j=1}^{\infty} V_j$, gdzie

$$V_j := \left\{ y \in \mathbb{R}^s : S \cap f^{-1}(y) \text{ ma skończone pokrycie zbiorami otwartymi } (V_{j,i})_{i \in I(j,y)} \text{ takimi, że} \right. \\ \left. \text{diam } V_{j,i} \leq \frac{1}{j}, \quad \sum_{i \in I(j,y)} \zeta_k(V_{j,i}) < t + \frac{1}{j} \right\}$$

oraz każdy zbiór V_j jest otwarty. Będzie stąd wynikało, że zbiór $\{y \in \mathbb{R}^s : \mathcal{H}^k(S \cap f^{-1}(y)) \leq t\}$ jest borelowski (a przez to $\mathcal{H}_\ell$ -mierzalny).

Istotnie, jeżeli $y \in \bigcap_{j=1}^{\infty} V_j$, to $\mathcal{H}_{1/j}^k(S \cap f^{-1}(y)) \leq \sum_{i \in I(j,y)} \zeta_k(V_{j,i}) < t + \frac{1}{j}$. Wynika stąd, że $\mathcal{H}^k(S \cap f^{-1}(y)) \leq t$.

W drugą stronę: jeżeli $\mathcal{H}^k(S \cap f^{-1}(y)) \leq t$, to dla dowolnego $j \in \mathbb{N}$ istnieje pokrycie $(C_{j,i})_{i=1}^{\infty}$ zbioru $S \cap f^{-1}(y)$ zbiorami borelowskimi o średnicy $< \frac{1}{j}$ takie, że $\sum_{i=1}^{\infty} \zeta_k(C_{j,i}) < t + \frac{1}{j}$. „Nadmuchując” nieco zbiory $C_{j,i}$, możemy założyć, że $C_{j,i}$ są otwarte. Ponieważ zbiór $S \cap f^{-1}(y)$ jest zwarty, z pokrycia $(C_{j,i})_{i=1}^{\infty}$ można wybrać pokrycie skończone $(V_{j,i})_{i \in I(j,y)}$ zbioru $S \cap f^{-1}(y)$ o żądanych własnościach.

Pozostaje wykazać, że każdy ze zbiorów jest V_j jest otwarty. Istotnie, przypuśćmy, że $y_0 \in V_j$ oraz $y_t \rightarrow y_0$ oraz $S \cap f^{-1}(y_t) \not\subset \bigcup_{i \in I(j,y_0)} V_{j,i} =: \Omega$. Niech $x_t \in S$, $f(x_t) = y_t$ oraz $x_t \notin \Omega$. Możemy założyć, że $x_t \rightarrow x_0 \in S$. Wtedy $f(x_0) = y_0$ oraz $x_0 \notin \Omega$; sprzeczność. $\square$

Wniosek 14.4.6. Dla $r = m > n = s$, $k = m - n$ i $\ell = n$, z Twierdzenia 14.4.5 wnioskujemy, że $(\dagger)$ zachodzi dla zbiorów miary zero.

14.4.3. Dowody — etap II. Główne idee dowodów $(\dagger)$ i $(\ddagger)$ są podobne. Wiemy już, że możemy założyć, że $A \subset \subset \mathbb{R}^m$ i że f spełnia globalny warunek Lipschitza ze stałą L . Wiemy również, że oba twierdzenia są prawdziwe, gdy $\mathcal{L}^m(A) = 0$. Możemy więc założyć, że $A \subset \Xi' = \mathbb{R}^m \setminus \Xi$, $\mathcal{L}^m(A) > 0$. Zaczniemy od $(\dagger)$. Wystarczy rozważyć dwa przypadki:

- (I) $A \subset \{x \in \Xi' : f'(x) \text{ jest iniektywne}\}$.
- (II) $A \subset \{x \in \Xi' : f'(x) \text{ nie jest iniektywne}\} = \{x \in \Xi' : J_m f(x) = 0\}$.

Propozycja 14.4.7. Jeżeli $(\dagger)$ zachodzi przy założeniu (I) (dla dowolnych $n \geq m$ i f), to $(\dagger)$ zachodzi przy założeniu (II), a więc dowód $(\dagger)$ sprowadza się do przypadku (I).

Dowód. Chcemy pokazać, że $\int_{f(A)} N_A(f, y) \mathcal{H}^m(y) = \int_{\mathbb{R}^m} J_m f(x) d\mathcal{L}^m(x) = 0$. Wystarczy pokazać, że $\mathcal{H}^m(f(A)) = 0$.

Dla $0 < \varepsilon < 1$ niech $\mathbb{R}^m \ni x \xrightarrow{g} (f(x), \varepsilon x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \ni (y, z) \xrightarrow{p} y \in \mathbb{R}^n$. Oczywiście $f = p \circ g$. Odwzorowanie g spełnia warunek Lipschitza oraz $A \subset \{x \in \Xi' : g'(x) \text{ jest iniektywne}\}$. Odwzorowanie g spełnia warunek Lipschitza ze stałą 1. Na podstawie Propozycji 14.4.4(a) oraz naszych założeń mamy $\mathcal{H}^m(f(A)) = \mathcal{H}^m(p(g(A))) \leq \mathcal{H}^m(g(A)) = \int_A J_m g(x) d\mathcal{L}^m(x)$. Do zakończenia dowodu wystarczy pokazać, że $J_m g(x) \leq \text{const } \varepsilon$, $x \in A$. Wtedy $\mathcal{H}^m(f(A)) \leq \text{const } \varepsilon \mathcal{L}^m(A) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} 0$.

Oszacowanie $J_m g(x) \leq \text{const } \varepsilon$, $x \in A$, wynika np. z takiego rozumowania. Obliczając $J_m g(x)$ wybieramy minory $m \times m$ z macierzy

$$g'(x) = \begin{bmatrix} f'(x) \\ \varepsilon \mathbb{I}_m \end{bmatrix}.$$

Pamiętając, że $J_m f(x) = 0$ wnioskujemy, że musimy wybierać przynajmniej jeden wiersz z dolnej części. Wiemy również, $|\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x)| \leq L$, $j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, m$. Teraz oszacowanie jest widoczne. $\square$

Teraz $(\ddagger)$.

- (III) $A \subset \{x \in \Xi' : f'(x) \text{ jest suriektywne}\} = \{x \in \Xi' : f'(x)(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^n\}$.
- (IV) $A \subset \{x \in \Xi' : f'(x) \text{ nie jest suriektywne}\} = \{x \in \Xi' : J_n f(x) = 0\}$.

Propozycja 14.4.8. Jeżeli $(\ddagger)$ zachodzi przy założeniu (III) (dla dowolnych $n < m$ i f), to $(\ddagger)$ zachodzi przy założeniu (IV), a więc dowód $(\ddagger)$ sprowadza się do przypadku (III).

Dowód. Chcemy pokazać, że $\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(y)) d\mathcal{L}^n(y) = \int_A J_n f(x) d\mathcal{L}^m(x) = 0$.

Dla $0 < \varepsilon < 1$ zdefiniujemy

$$g, p : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad g(x, z) := f(x) + \varepsilon z, \quad p(x, z) := z.$$

Jeżeli $(x, z) \in A \times \mathbb{R}^n$, to $g'(x, z)(v, w) = f'(x)(v) + \varepsilon w$, $(v, w) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. W szczególności, $g'(x, z)(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$. Ponadto, g spełnia warunek Lipschitza ze stałą $L + \varepsilon$ oraz $J_n g(x, z) \leq \text{const } \varepsilon$. Istotnie,

$$g'(x) = [f'(x), \varepsilon \mathbb{I}_n]$$

i dalej, rozumując analogicznie jak w dowodzie Propozycji 14.4.7, dostajemy $J_n f(x, z) \leq c\varepsilon$, $(x, z) \in A \times \mathbb{R}^n$ dla pewnej stałej $c > 0$.

Z Propozycji 14.4.5 z $r = m + n$, $s = n$, $k = m - n$, $\ell = n$ ($k + \ell = m$), $f = p$ i $S = (A \times \mathbb{B}_n) \cap g^{-1}(y)$ dostajemy

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{m-n}((A \times \mathbb{B}_n) \cap g^{-1}(y) \cap p^{-1}(w)) d\mathcal{L}^n(w) \leq \beta_{m-n, n} \mathcal{L}^m((A \times \mathbb{B}_n) \cap g^{-1}(y)).$$

Zastosujmy (III) do funkcji g i zbioru $A \times \mathbb{B}_n$ (przez const rozumiemy różne stałe niezależne od ε):

$$\begin{aligned} c\varepsilon \mathcal{L}^m(A) \mathcal{L}^n(\mathbb{B}_n) &\geq \int_{A \times \mathbb{B}_n} J_n g(x, z) d\mathcal{L}^{m+n}(x, z) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^m((A \times \mathbb{B}_n) \cap g^{-1}(y)) d\mathcal{L}^n(y) \\ &\geq \text{const} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{m-n}((A \times \mathbb{B}_n) \cap g^{-1}(y) \cap p^{-1}(w)) d\mathcal{L}^n(w) d\mathcal{L}^n(y) \\ &= \text{const} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{B}_n} \mathcal{H}^{m-n}((A \cap f^{-1}(y - \varepsilon w)) \times \{w\}) d\mathcal{L}^n(w) d\mathcal{L}^n(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{const} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{B}_n} \mathcal{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(y - \varepsilon w)) d\mathcal{L}^n(w) d\mathcal{L}^n(y) \\
&= \text{const} \int_{\mathbb{B}_n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(y - \varepsilon w)) d\mathcal{L}^n(y) d\mathcal{L}^n(w) \\
&= \text{const} \int_{\mathbb{B}_n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(y)) d\mathcal{L}^n(y) d\mathcal{L}^n(w) \\
&= \text{const} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(y)) d\mathcal{L}^n(y).
\end{aligned}$$

Stąd, przy $\varepsilon \rightarrow 0+$ dostajemy $\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(y)) d\mathcal{L}^n(y) = 0$, co kończy dowód. $\square$

14.4.4. Dowody — etap III. Będzie nam potrzebnych kilka pomocniczych wyników.

Lemat 14.4.9 (Nierówność Hadamarda ⁽⁹⁾). *Dla dowolnej macierzy $A = [a_1, \dots, a_m] \in \mathbb{M}(m \times m; \mathbb{R})$, $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{M}(m \times 1; \mathbb{R})$ mamy $|\det A| \leq \prod_{j=1}^m \|a_j\|$.*

Dowód. Przypadek, gdy $\det A = 0$ jest trywialny. Możemy więc założyć, że $a_1, \dots, a_m$ tworzą bazę $\mathbb{R}^m$. Wybierzmy w $\mathbb{R}^n$ bazę ortonormalną $b_1, \dots, b_m$ taką, że

$$\mathbb{R} \cdot b_1 + \dots + \mathbb{R} \cdot b_k = \mathbb{R} \cdot a_1 + \dots + \mathbb{R} \cdot a_k, \quad k = 1, \dots, m \quad (\text{ĆWICZENIE}).$$

Wtedy

$$a_j = \sum_{k=1}^j \langle a_j, b_k \rangle b_k, \quad j = 1, \dots, m.$$

Stąd $A = BC$, gdzie $B := [b_1, \dots, b_m] \in \mathbb{M}(m \times m; \mathbb{R})$, zaś

$$C_{k,j} := \begin{cases} \langle a_j, b_k \rangle, & \text{jeżeli } k \leq j \\ 0, & \text{jeżeli } k > j \end{cases}.$$

Zauważmy, że B jest macierzą ortogonalną ($B^t B = \mathbb{I}_m$), zaś C jest macierzą trójkątną. Ostatecznie

$$|\det A| = |\det(BC)| = |\det C| = \left| \prod_{j=1}^m C_{j,j} \right| = \prod_{j=1}^m |\langle a_j, b_j \rangle| \leq \prod_{j=1}^m \|a_j\| \|b_j\| = \prod_{j=1}^m \|a_j\|. \quad \square$$

Ćwiczenie 14.4.10. Kiedy w nierówności Hadamarda zachodzi równość?

Wniosek 14.4.11. *Jeżeli $A = [a_1, \dots, a_m] \in \mathbb{M}(m \times m; \mathbb{R})$ oraz $\alpha \|v\| \leq \|Av\| \leq \beta \|v\|$, $v \in \mathbb{R}^m$, dla pewnych $\alpha, \beta > 0$, to $\alpha^m \leq |\det A| \leq \beta^m$.*

Dowód. Mamy $\|a_j\| = \|Ae_j\| \leq \beta$, $j = 1, \dots, m$. Stąd na podstawie nierówności Hadamarda mamy $|\det A| \leq \beta^m$. Drugą z nierówności otrzymujemy natychmiast wobec tego, że $\|A^{-1}u\| \leq \frac{1}{\alpha} \|u\|$, $u \in \mathbb{R}^m$. $\square$

Twierdzenie 14.4.12 (Wzór Cauchy'ego–Bineta ⁽¹⁰⁾). *Jeżeli $n \geq m$, $P \in \mathbb{M}(m \times n; \mathbb{C})$, $Q \in \mathbb{M}(n \times m; \mathbb{C})$, to*

$$\det(PQ) = \sum_{|K|=m} (\det P_{(1,\dots,m),K}) (\det Q_{K,(1,\dots,m)}).$$

Dowód. ĆWICZENIE. $\square$

Wniosek 14.4.13. *Jeżeli $A \in \mathbb{M}(n \times m; \mathbb{R})$ i $n \geq m$, to $(J_m(A))^2 = \det(A^t A)$. W szczególności, jeżeli A jest ortogonalna (tzn. $A^t A = \mathbb{I}_n$), to $J_m(A) = 1$.*

Dowód. Na podstawie Twierdzenia 14.4.12 mamy

$$\det(A^t A) = \sum_{|K|=m} \det(A^t)_{(1,\dots,m),K} \det A_{K,(1,\dots,m)} = \sum_{|K|=m} (\det A_{K,(1,\dots,m)})^2 = (J_m(A))^2. \quad \square$$

⁽⁹⁾ Jacques Hadamard (1865–1963).

⁽¹⁰⁾ Jacques Philippe Marie Binet (1786–1856).

Wniosek 14.4.14. *Jeżeli $A \in \mathbb{M}(n \times m; \mathbb{R})$, $n \geq m$, $T \in \mathbb{M}(n \times n; \mathbb{R})$, $T^t T = \mathbb{I}_n$, $U \in \mathbb{M}(m \times m; \mathbb{R})$, to $J_m(TAU) = J_m(A)|\det U|$. W szczególności, jeżeli ponadto $|\det U| = 1$, to $J_m(TAU) = J_m(A)$.*

Dowód. Na podstawie Wniosku 14.4.13 mamy

$$\begin{aligned} (J_m(TAU))^2 &= \det((TAU)^t TAU) = \det(U^t A^t T^t TAU) = \det(U^t A^t AU) \\ &= \det(U^t) \det(A^t A) \det U = (J_m(A) \det U)^2. \quad \square \end{aligned}$$

Wniosek 14.4.15. *Jeżeli $A \in \mathbb{M}(n \times m; \mathbb{R})$, $n \geq m$, oraz $\alpha\|v\| \leq \|Av\| \leq \beta\|v\|$, $v \in \mathbb{R}^m$, dla pewnych $\alpha, \beta > 0$, to $\alpha^m \leq J_m(A) \leq \beta^m$.*

Dowód. Niech $V := A(\mathbb{R}^m) \subset \mathbb{R}^n$. Ponieważ A jest iniektywne, przestrzeń V jest m -wymiarowa. Niech $h : \mathbb{R}^m \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ będzie izomorfizmem ortogonalnym ($h^t h = \mathbb{I}_m$) i niech $g := h^{-1} \circ A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. Zauważmy, że g jest izomorfizmem. Mamy $A = h \circ g$. Stąd $\alpha\|v\| \leq \|Av\| = \|h \circ g(v)\| = \|g(v)\| \leq \beta\|v\|$, $v \in \mathbb{R}^m$. W takim razie na podstawie Wniosku 14.4.11 mamy $\alpha^m \leq |\det g| \leq \beta^m$. Z drugiej strony, na podstawie Wniosków 14.4.13 i 14.4.14, $J_m(A) = J_m(h \circ g) = J_m(h)|\det g| = |\det g|$. $\square$

Dowód (†) przy założeniu (I). Zakładamy, że $A \subset \{x \in \Xi' : f'(x) \text{ jest iniektywne}\}$ oraz $A \subset \subset \mathbb{R}^m$.

Ustalmy $\lambda > 1$ i niech $\varepsilon > 0$ będzie takie, że $\frac{1}{\lambda} + \varepsilon < 1 < \lambda - \varepsilon$. Bedziemy chcieli pokazać, że

$$\frac{1}{\lambda^{2m}} \int_{\mathbb{R}^n} N_A(f, y) d\mathcal{H}^m(y) \leq \int_A J_m f d\mathcal{L}^m \leq \lambda^{2m} \int_{\mathbb{R}^n} N_A(f, y) d\mathcal{H}^m(y),$$

co przy $\lambda \rightarrow 1+$ da tezę.

Kluczem do dowodu będzie skonstruowanie przeliczalnego pokrycia $(B_j)_{j=1}^\infty$ zbioru A złożonego ze zbiorów borelowskich oraz ciągu izomorfizmów liniowych $s_j : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $j \in \mathbb{N}$, takich że dla $B = B_j$ i $s = s_j$ mamy:

$$f|_B \text{ jest iniektywne,} \quad (1)$$

$$\text{funkcje } (f|_B) \circ s^{-1} : s(B) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad s \circ (f|_B)^{-1} : f(B) \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ spełniają warunek Lipschitza ze stałą } \lambda, \quad (2)$$

$$\frac{1}{\lambda} \|s(v)\| \leq \|f'(x)(v)\| \leq \lambda \|s(v)\|, \quad x \in B, \quad v \in \mathbb{R}^m, \quad (3)$$

$$\frac{1}{\lambda^m} |\det s| \leq J_m(f) \leq \lambda^m |\det s|, \quad x \in B. \quad (4)$$

Odnajdujemy, że (3) $\implies$ (4). Istotnie, (3) jest równoważne warunkowi

$$\frac{1}{\lambda} \|u\| \leq \|f'(x) \circ s^{-1}(u)\| \leq \lambda \|u\|, \quad x \in B, \quad u \in \mathbb{R}^m,$$

skąd, wobec Wniosku 14.4.15, mamy

$$\frac{1}{\lambda^m} \leq J_m(f'(x) \circ s^{-1}) = J_m(f) |\det s^{-1}| \leq \lambda^m, \quad x \in B.$$

Niech S będzie przeliczalnym i gęstym zbiorem izomorfizmów liniowych. Dla $s \in S$ oraz $i \in \mathbb{N}$ niech $Z(s, i)$ składa się ze wszystkich punktów $a \in A$, dla których:

$$\left(\frac{1}{\lambda} + \varepsilon\right) \|s(v)\| \leq \|f'(a)(v)\| \leq (\lambda - \varepsilon) \|s(v)\|, \quad v \in \mathbb{R}^m, \quad (5)$$

$$\|f(b) - f(a) - f'(a)(b - a)\| \leq \varepsilon \|s(b - a)\|, \quad b \in \overline{\mathbb{B}}(a, 1/i). \quad (6)$$

Na podstawie poprzedniego rozumowania z własności (5) wynika (4).

Z kolei z własności (6) wynika, że dla dowolnych $a, b \in Z(s, i)$ takich, że $\|a - b\| \leq 1/i$ mamy

$$\|f(a) - f(b)\| \leq \|f'(a)(b - a)\| + \varepsilon \|s(b - a)\| \stackrel{(5,6)}{\leq} (\lambda - \varepsilon) \|s(b - a)\| + \varepsilon \|s(b - a)\| = \lambda \|s(b - a)\|,$$

$$\|f(a) - f(b)\| \geq \|f'(a)(b - a)\| - \varepsilon \|s(b - a)\| \stackrel{(5,6)}{\geq} \left(\frac{1}{\lambda} + \varepsilon\right) \|s(b - a)\| - \varepsilon \|s(b - a)\|.$$

Wynika stąd, że $Z(s, i)$ ma pokrycie przeliczalne zbiorami borelowskimi spełniającymi (1) – (4). Pozostaje pokazać, że $A \subset \bigcup_{(s,i) \in S \times \mathbb{N}} Z(s, i)$. Istotnie, ustalmy $a \in A$ i niech $f'(a) = h \circ g$, gdzie $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest

izomorfizmem liniowym, zaś $h : \mathbb{R}^m \rightarrow f'(a)(\mathbb{R}^m) \subset \mathbb{R}^n$ jest ortogonalne (por. dowód Wniosku 14.4.15). Dobierzmy $s \in S$ takie, że

$$\|s \circ g^{-1}\| < \frac{1}{\frac{1}{\lambda} + \varepsilon}, \quad \|g \circ s^{-1}\| < \lambda - \varepsilon.$$

Stąd

$$\|s(v)\| = \|(s \circ g^{-1})(g(v))\| \leq \frac{1}{\frac{1}{\lambda} + \varepsilon} \|g(v)\|, \quad \|g(v)\| = \|(g \circ s^{-1})(s(v))\| \leq (\lambda - \varepsilon) \|s(v)\|, \quad v \in \mathbb{R}^m.$$

Ponieważ $\|f'(a)(v)\| = \|g(v)\|$ dostajemy stąd (5). Dla uzyskania (6) skorzystamy z definicji $f'(a)$:

$$\|f(b) - f(a) - f'(a)(b - a)\| \leq \frac{\varepsilon}{\|s^{-1}\|} \|b - a\| \leq \varepsilon \|s(b - a)\|, \quad b \in \overline{B}(a, 1/i), \quad i \gg 1.$$

Niech $(C_j)_{j=1}^\infty$ będzie rozbiciem A wpisanym w pokrycie $(B_j)_{j=1}^\infty$. Ustalmy j i niech $C := C_j \subset B_k$, $s := s_k$. Mamy (Obserwacja 14.4.4(a))

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^m} |\det s| \mathcal{L}^m(C) &\stackrel{(4)}{\leq} \int_C J_m f(x) d\mathcal{L}^m(x) \stackrel{(4)}{\leq} \lambda^m |\det s| \mathcal{L}^m(C), \\ \frac{1}{\lambda^m} \mathcal{H}^m(s(C)) &= \frac{1}{\lambda^m} \mathcal{H}^m((s \circ (f|_C)^{-1})(f(C))) \stackrel{(2)}{\leq} \mathcal{H}^m(f(C)) = \mathcal{H}^m((f|_C) \circ s^{-1}(s(C))) \stackrel{(2)}{\leq} \lambda^m \mathcal{H}^m(s(C)), \\ \mathcal{H}^m(s(C)) &= \mathcal{L}^m(s(C)) = |\det s| \mathcal{L}^m(C). \end{aligned}$$

Pamiętając, że f jest iniektywne na C dostajemy stąd

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^{2m}} \int_{\mathbb{R}^n} N_C(f, y) d\mathcal{H}^m(y) &= \frac{1}{\lambda^{2m}} \mathcal{H}^m(f(C)) \leq \frac{1}{\lambda^{2m}} \lambda^m |\det s| \mathcal{L}^m(C) \leq \int_C J_m f d\mathcal{L}^m \\ &\leq \lambda^m |\det s| \mathcal{L}^m(C) = \lambda^m \mathcal{H}^m(s(C)) \leq \lambda^{2m} \mathcal{H}^m(f(C)) = \lambda^{2m} \int_{\mathbb{R}^n} N_C(f, y) d\mathcal{H}^m(y). \end{aligned}$$

Po zsumowaniu

$$\frac{1}{\lambda^{2m}} \int_{\mathbb{R}^n} N_A(f, y) d\mathcal{H}^m(y) \leq \int_A J_m f d\mathcal{L}^m \leq \lambda^{2m} \int_{\mathbb{R}^n} N_A(f, y) d\mathcal{H}^m(y).$$

Teraz pozostaje $\lambda \rightarrow 1+$. □

Przechodzimy do (§). Tak jak poprzednio, przed dowodem potrzebujemy kilku pomocniczych wyników.

Wniosek 14.4.16. *Jeżeli $A \in \mathbb{M}(n \times m; \mathbb{R})$ i $n \leq m$, to $(J_n(A))^2 = \det(AA^t)$.*

Dowód. Na podstawie Twierdzenia 14.4.12 mamy

$$\det(AA^t) = \sum'_{|K|=n} \det A_{(1, \dots, n), K} \det (A^t)_{K, (1, \dots, n)} = \sum'_{|K|=n} (\det A_{(1, \dots, n), K})^2 = (J_n(A))^2. \quad \square$$

Wniosek 14.4.17. *Jeżeli $A \in \mathbb{M}(n \times m; \mathbb{R})$, $n \leq m$, $T \in \mathbb{M}(n \times n; \mathbb{R})$, $U \in \mathbb{M}(m \times m; \mathbb{R})$, $UU^t = \mathbb{I}_m$, to $J_n(TAU) = J_n(A) |\det T|$. W szczególności, jeżeli ponadto $|\det T| = 1$, to $J_n(TAU) = J_n(A)$.*

Dowód. Na podstawie Wniosku 14.4.16 mamy

$$\begin{aligned} (J_n(TAU))^2 &= \det(TAU(TAU)^t) = \det(TAUU^t A^t T^t) = \det(TAA^t T^t) \\ &= \det T \det(AA^t) \det(T^t) = (J_n(A) \det T)^2. \quad \square \end{aligned}$$

Dowód (§) przy założeniu (III). Zakładamy, że $A \subset \{x \in \Xi' : f'(x)(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^n\}$.

Wtedy zbiór A posiada przeliczalne pokrycie borelowskie $(B_j)_{j=1}^\infty$ takie, że dla dowolnego $B = B_j$ istnieje:

- odwzorowanie liniowe $p = p_j : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m-n}$ takie, że $p^t : \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow p^t(\mathbb{R}^{m-n}) \subset \mathbb{R}^m$ jest izomorfizmem ortogonalnym ($pp^t = \mathbb{I}_{m-n}$),
- odwzorowania lipschitzowskie $u = u_j : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, $v = v_j : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow \mathbb{R}^m$,

dla których:

- $u(x) = (f(x), p(x))$, $v(u(x)) = x$, $x \in B$,
- $B \cap f^{-1}(y) = v(\{y\} \times p(B \cap f^{-1}(y)))$, $y \in \mathbb{R}^n$,

- dla dowolnego $C \in \mathcal{L}_m$, $C \subset B$, mamy

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{m-n}(C \cap f^{-1}(y)) d\mathcal{L}^n(y) = \int_C J_n f(x) d\mathcal{L}^m(x).$$

Istotnie, dla dowolnego $I = (i_1, \dots, i_{m-n}) \in A_m^{m-n}$ niech $u_I : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $u_I(x) = (f(x), x_{i_1}, \dots, x_{i_{m-n}})$ i niech $A_I := \{x : \det u'_I(x) \neq 0\}$. Zauważmy, że $\{x : f'(x)(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^n\} = \bigcup_I A_I$. Dla dowodu, wystarczy zauważyć, że

$$\exists_I : \det u'_I(x) \neq 0 \iff \text{rank } f'(x) = n \iff f'(x)(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^n.$$

Teraz do każdej funkcji $u = u_I$ oraz zbioru A_I stosujemy metody dowodu (†) przy założeniu (I) i dostajemy borelowskie pokrycie przeliczalne, którego każdy zbiór B jest taki, że $u|_B$ jest iniektywne i $(u|_B)^{-1}$ spełnia warunek Lipschitza. Wobec twierdzenia Kirszbrauna funkcja $(u|_B)^{-1}$ przedłuża się do funkcji lipschitzowskiej $v : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow \mathbb{R}^m$. Mamy

$$\begin{aligned} B \cap f^{-1}(y) &= v(u(B \cap f^{-1}(y))) = v(u(\{x \in B : f(x) = y\})) \\ &= v(\{(y, x_{i_1}, \dots, x_{i_{m-n}}) : x \in B, f(x) = y\}) = v(\{y\} \times p(B \cap f^{-1}(y))), \quad y \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

gdzie $p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m-n}$, $p(x) := (x_{i_1}, \dots, x_{i_{m-n}})$.

Niech $v_y : \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $v_y(z) := v(y, z)$. Z poprzedniej identyczności wynika, że v_y przekształca bijektywnie $p(B \cap f^{-1}(y))$ na $B \cap f^{-1}(y)$.

Mamy $u'(x)v'(u(x)) = \text{id}$ dla $\mathcal{L}^m$ -p.w. $x \in B$. Istotnie, na podstawie twierdzenia Rademachera $u'(x)$ istnieje dla $x \in \mathbb{R}^m \setminus \Xi_1$, $v'(y)$ istnieje dla $y \in \mathbb{R}^m \setminus \Xi_2$, gdzie Ξ_1, Ξ_2 są miary zero. W takim razie $u'(v(y))v'(y) = \text{id}$ dla $y \in u(B) \setminus (v^{-1}(\Xi_1) \cup \Xi_2)$. Stąd wynika, że $u'(x)v'(u(x)) = \text{id}$ dla $x \in B \setminus (\Xi_1 \cup v(\Xi_2))$ ($v(\Xi_2)$, jako obraz zbioru miary zero przez odwzorowanie lipschitzowskie, jest miary zero). Dalej będziemy rozważać tylko punkty $x \in B \setminus (\Xi_1 \cup v(\Xi_2))$ ($v(\Xi_2)$).

Zdefiniujmy $L_x := (v_{f(x)})'(p(x)) : \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow \mathbb{R}^m$. Dla $w \in \mathbb{R}^{m-n}$ mamy

$$\begin{aligned} (0, w) &= u'(x)v'(u(x))(0, w) = u'(x)(v'_y(u(x))(0) + v'_z(u(x))(w)) = u'(x)((v_{f(x)})'(p(x))(w)) \\ &= u'(x)(L_x(w)) = (f'(x)(L_x(w)), p(L_x(w))). \end{aligned} \quad (!)$$

W szczególności, $pL_x = \mathbb{I}_{m-n}$. Rozważmy diagram

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^{m-n} \simeq \{0\}^n \times \mathbb{R}^{m-n} & \xrightarrow{\subset} & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} & \xrightarrow{\text{pr}_{\mathbb{R}^n}} & \mathbb{R}^n = f'(x)(\mathbb{R}^m) \\ \downarrow L_x & & u'(x) = (f'(x), p) \uparrow & \nearrow f'(x) & \uparrow \cup \\ V_x & \xrightarrow{\subset} & W_x \oplus V_x = \mathbb{R}^m & \xleftarrow{\subset} & W_x \end{array}$$

gdzie $V_x := L_x(\mathbb{R}^{m-n})$, $W_x := V_x^\perp$. Równość (!) oznacza, że ten diagram komutuje. W szczególności, $V_x = (u'(x))^{-1}(\{0\}^n \times \mathbb{R}^{m-n}) = \text{Ker } f'(x)$. Zauważmy jeszcze, że

$$J_n f(x) = J_{m-n}(L_x)|u'(x)| = J_{m-n}v_{f(x)}(p(x))J_m u(x). \quad (*)$$

Istotnie, niech $R = [r_1, \dots, r_n] : \mathbb{R}^n \rightarrow W_x \subset \mathbb{R}^m$ i $S = [s_1, \dots, s_{m-n}] : \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow V_x \subset \mathbb{R}^m$ będą izomorfizmami ortogonalnymi. Niech $T := R \oplus S = [r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_{m-n}] : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $T^t T = \mathbb{I}_m$. Mamy:

$$\begin{aligned} J_m u(x) &= |u'(x)| = |\det(u'(x)T)| = |\det(f'(x)T, pT)| = \left| \det \begin{bmatrix} f'(x)R & pR \\ 0 & pS \end{bmatrix} \right| \\ &= |\det(f'(x)R) \det(pS)| = |\det(f'(x)R) \det(L_x^{-1}S)|. \end{aligned}$$

Ponadto, na podstawie Wniosku 14.4.17, $|\det(f'(x)R)| = J_n f(x)$ oraz $J_{m-n}(L_x) |\det(L_x^{-1}S)| = J_{m-n}(L_x L_x^{-1}S) = J_{m-n}(S) = 1$.

Ostatecznie mamy

$$\begin{aligned} \int_B J_n f(x) d\mathcal{L}^m(x) &\stackrel{(*)}{=} \int_B J_{m-n}v_{f(x)}(p(x))J_n u(x) d\mathcal{L}^m(x) \stackrel{(**)}{=} \int_{u(B)} J_{m-n}v_y(z) d\mathcal{L}^m(y, z) \\ &\stackrel{(***)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{p(B \cap f^{-1}(y))} J_{m-n}v_y(z) d\mathcal{L}^{m-n}(z) d\mathcal{L}^n(y) \stackrel{****)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{m-n}(B \cap f^{-1}(y)) d\mathcal{L}^n(y), \end{aligned}$$

gdzie:

(**) wynika z twierdzenia z zmianie zmiennych $(y, z) = u(x) = (f(x), p(x))$, pamiętając, że $J_n u(x) = |u'(x)|$;

(***) wynika z twierdzenia Fubiniego i równości $\{z \in \mathbb{R}^{m-n} : (y, z) \in u(B)\} = \{p(x) : x \in B \cap f^{-1}(y)\}$;

(****) wynika z Twierdzenia 14.4.1 zastosowanego do odwzorowania $v_y : \mathbb{R}^{m-n} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ i tego, że v_y przekształca bijektywnie $p(B \cap f^{-1}(y))$ na $B \cap f^{-1}(y)$. $\square$