# Sprawy organizacyjne

## Literatura

Wykład będzie w zasadzie „samowystarczalny”. Oto kilka pozycji przydatnej literatury uzupełniającej (wszystkie pozycje zostały wydane przez PWN, z wyjątkiem książek H. Cartana i H. Federera):

Andrzej Birkholc, *Analiza matematyczna.*
Henri Cartan, *Calcul différentiel. Formes différentielles*, Herman, Paris.
Ryszard Engelking, *Topologia ogólna.*
Herbert Federer, *Geometric measure theory*, Springer Verlag, Berlin.
Grigorij Michajłowicz Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. I–III.
Franciszek Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy.*
Witold Kołodziej, *Analiza matematyczna.*
Kazimierz Kuratowski, *Rachunek różniczkowy i całkowy.*
Stanisław Łojasiewicz, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych.*
Krzysztof Maurin, *Analiza*, t. I–II.
Walter Rudin, *Podstawy analizy matematycznej.*
Walter Rudin, *Analiza rzeczywista i zespolona.*
Laurent Schwartz, *Kurs analizy matematycznej*, t. I–II.

## Program wykładu

(1) Rpetytorium z teorii miary i całki.
  (a) $\sigma$-algebry i zbiory borelowskie.
  (b) Odwzorowania mierzalne.
  (c) Odwzorowania proste.
  (d) Funkcje Baire'a.
  (e) Miary.
  (f) Miary zewnętrzne. Warunek Carathéodory'ego.
  (g) Regularność miary.
  (h) Konstrukcja Carathéodory'ego.
  (i) Miary Hausdorffa.
  (j) Miara Lebesgue'a.
  (k) Ogólna teoria całki.
(2) Całka Riemanna a całka Lebesgue'a.
(3) Zasada Cavalieriego. Twierdzenia Tonellego i Fubiniego.
(4) Twierdzenie o zmianie zmiennych w całce Lebesgue'a.
(5) Funkcje dane całką.
(6) Gęstość $\mathcal{C}_0(\Omega, \mathbb{C})$ w $L^p(\Omega, \mathbb{C}, \mathcal{L}^n)$.
(7) Splot.
(8) Regularyzacja.
(9) Rozkład jedności.
(10) Miara i całka Lebesgue'a na podrozmaitościach w $\mathbb{R}^n$.
(11) Formy różniczkowe.
(12) Całkowanie form różniczkowych.
(13) Twierdzenie Stokesa.

(14) Twierdzenie Kirszbrauna.
(15) Miara i ko-miara odwzorowań lipschitzowskich.
(16) Szeregi Fouriera — uzupełnienia.
(17) Transformacja Fouriera.

## Sposób prowadzenia wykładu

Aż do odwołania wykład będzie prowadzony w wersji zdalnej. W zwykłym miejscu znajdziecie Państwo sukcesywnie umieszczane pliki zawierające:

— wykład w formacie pdf z podziałem na poszczególne wykłady (tak jak to było dotychczas),

— wykład w wersji wideo z podziałem na poszczególne grupy tematyczne (które nie muszą odpowiadać dokładnie wykładom w pliku pdf).

Wszelkie pytania i uwagi proszę kierować do mnie e-mailem.

## Zaliczanie ćwiczeń

Sposób zaliczania ćwiczeń ustala prowadzący ćwiczenia.

## Egzaminy

Egzamin będzie ustny, najprawdopodobniej w trybie zdalnym.

W ciągu całego semestru, aż do rozpoczęcia zimowej sesji egzaminacyjnej, można zdawać w trybie zdalnym egzaminy częściowe, po wcześniejszym umówieniu terminu przy pomocy e-maila. Egzamin częściowy może obejmować dowolny fragment wykładu. Zdane fragmenty wykładu nie obowiązują podczas głównego egzaminu w sesji egzaminacyjnej.

ROZDZIAŁ 12

# Teoria miary i całki

[Wykład 25.02.2021 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ]

Teoria miary i całki jest treścią niezależnego wykładu. W konsekwencji, znaczna część tego rozdziału ma na celu przypomnienie podstawowych pojęć i ustalenie oznaczeń. Dla kompletności wykładu pewne twierdzenia zostały podane z dowodami.

## 12.1. $\sigma$-algebry i zbiory borelowskie

**Definicja 12.1.1** ($\sigma$-algebra)**.** Powiemy, że rodzina podzbiorów $\mathfrak{M} \subset \mathcal{P}(X)$ jest *$\sigma$–algebrą na $X$*, jeżeli:

(1) $\varnothing \in \mathfrak{M}$,
(2) $A \in \mathfrak{M} \Longrightarrow X \setminus A \in \mathfrak{M}$,
(3) $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M} \Longrightarrow \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{M}$.

Odnotujmy, że rodzina $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ wszystkich podzbiorów $\mathbb{R}^n$, które są mierzalne w sensie Jordana nie jest $\sigma$–algebrą.

**Obserwacja 12.1.2** (Własności $\sigma$–algebr)**.** Poniżej $\mathfrak{M}$ oznacza $\sigma$–algebrę na $X$.

(a) $X \in \mathfrak{M}$.
(b) $\mathfrak{M} := \mathcal{P}(X)$ jest maksymalną $\sigma$–algebrą na $X$.
(c) $\mathfrak{M} := \{\varnothing, X\}$ jest minimalną $\sigma$–algebrą na $X$.
(d) $A_1, \dots, A_N \in \mathfrak{M} \Longrightarrow A_1 \cup \dots \cup A_N \in \mathfrak{M}$.
(e) $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M} \Longrightarrow \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{M}$.
(f) $A_1, \dots, A_N \in \mathfrak{M} \Longrightarrow A_1 \cap \dots \cap A_N \in \mathfrak{M}$.
(g) $A, B \in \mathfrak{M} \Longrightarrow A \setminus B \in \mathfrak{M}$.
(h) Dla dowolnego zbioru $Y$ i dla dowolnego odwzorowania $f : X \longrightarrow Y$ rodzina

$$f_*\mathfrak{M} := \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathfrak{M}\}$$

jest $\sigma$–algebrą na $Y$. Zauważmy, że dla $g : Y \longrightarrow Z$ mamy: $g_* f_* \mathfrak{M} = (g \circ f)_* \mathfrak{M}$.

(i) Dla dowolnego zbioru $Y \subset X$ rodzina $\mathfrak{M}|_Y := \{A \cap Y : A \in \mathfrak{M}\}$ jest $\sigma$–algebrą na $Y$. Zauważmy, że jeżeli $Y \in \mathfrak{M}$, to $\mathfrak{M}|_Y = \{A \in \mathfrak{M} : A \subset Y\} \subset \mathfrak{M}$.

(j) Dla dowolnej rodziny $(\mathfrak{M}_t)_{t \in T}$ $\sigma$–algebr na $X$ ($T \neq \varnothing$) rodzina $\bigcap\limits_{t \in T} \mathfrak{M}_t = \{A \subset X : \forall_{t \in T} : A \in \mathfrak{M}_t\}$ jest $\sigma$–algebrą na $X$. W szczególności, dla dowolnej rodziny $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ istnieje najmniejsza $\sigma$–algebra na $X$ zawierająca $\mathcal{F}$, którą będziemy oznaczać przez $\sigma(\mathcal{F})$.

(k) Dla dowolnej rodziny $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ oraz zbioru $Y \subset X$ mamy $\sigma(\mathcal{F}|_Y) = \sigma(\mathcal{F})|_Y$.

**Definicja 12.1.3** (Zbiory borelowskie)**.** Jeżeli $X$ jest przestrzenią topologiczną, to $\mathcal{B}(X) := \sigma(\operatorname{top} X)$ nazywamy *$\sigma$–algebrą zbiorów borelowskich na $X$*.

**Definicja 12.1.4** (Kostki)**.**

$$\varDelta_{\varepsilon,\alpha} := \varepsilon(\alpha + [0,1]^n), \quad \varDelta^o_{\varepsilon,\alpha} := \varepsilon(\alpha + [0,1)^n), \quad \varepsilon > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}^n,$$

$$\mathcal{S}_k := \{\varDelta_{1/2^k,\alpha} : \alpha \in \mathbb{Z}^n\}, \quad \mathcal{S} := \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{S}_k, \qquad \mathcal{S}^o_k := \{\varDelta^o_{1/2^k,\alpha} : \alpha \in \mathbb{Z}^n\}, \quad \mathcal{S}^o := \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{S}^o_k;$$

zbiory typu $\varDelta^o_{\varepsilon,\alpha}$ nazywa się czasami *kostką z narożnikiem*.

**Obserwacja 12.1.5** (Własności kostek). (a) Dla dowolnych $k \in \mathbb{N}$ oraz $x \in \mathbb{R}^n$, istnieje dokładnie jedna kostka z narożnikiem $Q \in \mathcal{S}_k^o$ taka, że $x \in Q$.

(b) Dla dowolnych $k, \ell \in \mathbb{N}$ oraz $Q \in \mathcal{S}_k^o$, $R \in \mathcal{S}_\ell^o$, jeżeli $k < \ell$, to albo $Q \cap R = \varnothing$ albo $R \subset Q$.

(c) Dowolny zbiór $\varnothing \neq \Omega \operatorname{top} \mathbb{R}^n$ jest sumą co najwyżej przeliczalnej liczby kostek z rodziny $\mathcal{S}$, $\Omega = \bigcup_{j=1}^\infty P_j$, przy czym $\operatorname{int} P_i \cap \operatorname{int} P_j = \varnothing$ dla $i \neq j$.

(d) Dowolny zbiór $\varnothing \neq \Omega \operatorname{top} \mathbb{R}^n$ jest sumą co najwyżej przeliczalnej liczby parami rozłącznych kostek z narożnikiem z rodziny $\mathcal{S}^o$, $\Omega = \bigcup_{j=1}^\infty Q_j$.

**Obserwacja 12.1.6** (Własności zbiorów borelowskich). (a) $\mathcal{B}(X) = \sigma(\operatorname{cotop}(X))$. Zbiory typu $\mathcal{G}_\delta$ (1) oraz zbiory typu $\mathcal{F}_\sigma$ (2) są borelowskie.

(b) Korzystając z Obserwacji 12.1.5(c), wnioskujemy natychmiast, że $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{F})$, gdzie

$$\mathcal{F} := \{P \subset \mathbb{R}^n : P \text{ jest kostką}\}.$$

(c) Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie dowolnym zbiorem gęstym (np. $A = \mathbb{Q}$). Wtedy $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma(\mathcal{F})$, gdzie $\mathcal{F}$ jest jedną z następujących rodzin przedziałów:

- rodzina wszystkich przedziałów $\varDelta \subset \overline{\mathbb{R}}$,
- rodzina wszystkich przedziałów $\varDelta \subset \overline{\mathbb{R}}$ o końcach w $A \cup \{-\infty, +\infty\}$,
- $\{[-\infty, \alpha) : \alpha \in A\}$,
- $\{[-\infty, \alpha] : \alpha \in A\}$,
- $\{(\alpha, +\infty] : \alpha \in A\}$,
- $\{[\alpha, +\infty] : \alpha \in A\}$.

## 12.2. Odwzorowania mierzalne

**Definicja 12.2.1.** Niech $\mathfrak{M}$ będzie $\sigma$–algebrą na $X$ i niech $Y$ będzie przestrzenią topologiczną. Powiemy, że odwzorowanie $f : X \longrightarrow Y$ jest $\mathfrak{M}$*–mierzalne* (krótko: *mierzalne*), jeżeli $f^{-1}(\Omega) \in \mathfrak{M}$ dla dowolnego $\Omega \in \operatorname{top} Y$, tzn. $\operatorname{top} Y \subset f_* \mathfrak{M}$. Piszemy wtedy $f \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M})$ lub krótko:

- $f \in \mathcal{M}(X, Y)$, o ile z kontekstu jasno wynika, co to jest $\mathfrak{M}$,
- $f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$, o ile z kontekstu jasno wynika, co to jest $Y$, w szczególności, gdy $Y = \overline{\mathbb{R}}$ (z topologią naturalną),
- $f \in \mathcal{M}(X)$, o ile z kontekstu jasno wynika, co to jest $Y$ i $\mathfrak{M}$.

Jeżeli $X$ jest przestrzenią topologiczną, to odwzorowania $\mathcal{B}(X)$–mierzalne nazywamy *borelowskimi.*

Uwaga: We wszystkich istotnych przypadkach zakłada się dodatkowo, że $\operatorname{top} Y$ ma bazę przeliczalną, np. że $Y$ jest ośrodkową przestrzenią metryczną. Bez dodatkowych założeń (o $X$ lub/i $Y$), wprowadzone powyżej pojęcie odwzorowania mierzalnego jest zbyt ogólne i nie pozwala na uzyskanie interesujących wyników. W praktyce można się ograniczyć do przypadku, gdy $Y \in \{\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{C}\}$.

**Obserwacja 12.2.2** (Własności odwzorowań mierzalnych). (a) $f \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M}) \iff \mathcal{B}(Y) \subset f_* \mathfrak{M}$.

(b) $\mathcal{C}(X, Y) \subset \mathcal{M}(X, Y, \mathcal{B}(X))$.

(c) Jeżeli $f \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M})$, $g \in \mathcal{M}(Y, Z, \mathcal{B}(Y))$ (np. $g \in \mathcal{C}(Y, Z)$), to $g \circ f \in \mathcal{M}(X, Z, \mathfrak{M})$ ($\mathcal{B}(Z) \subset g_* \mathcal{B}(Y) \subset g_* f_* \mathfrak{M} = (g \circ f)_* \mathfrak{M}$). W szczególności:

- jeżeli $f \in \mathcal{M}(X, \mathbb{C}_*, \mathfrak{M})$, to $\frac{1}{f} \in \mathcal{M}(X, \mathbb{C}_*, \mathfrak{M})$;
- jeżeli $f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$, to $|f| \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$;
- jeżeli $f \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M})$, gdzie $(Y, \| \|)$ jest przestrzenią unormowaną, to $\|f\| \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$;
- jeżeli $f = (f_1, f_2) \in \mathcal{M}(X, Y_1 \times Y_2, \mathfrak{M})$, to $f_j \in \mathcal{M}(X, Y_j, \mathfrak{M})$, $j = 1, 2$.

(d) Dla $f : X \longrightarrow Y \subset Z$ mamy: $f \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M}) \iff f \in \mathcal{M}(X, Z, \mathfrak{M})$.

(e) Każde odwzorowanie stałe jest mierzalne.

(f) $\chi_A \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M}) \iff A \in \mathfrak{M}$.

(g) Niech $f_j \in \mathcal{M}(X, Y_j, \mathfrak{M})$, $j = 1, 2$. Załóżmy, że $\operatorname{top} Y_j$ ma bazę przeliczalną, $j = 1, 2$ (3). Wtedy $f := (f_1, f_2) \in \mathcal{M}(X, Y_1 \times Y_2, \mathfrak{M})$.

---

(1) Tzn. zbiory postaci $\bigcap_{j=1}^\infty \Omega_j$, gdzie $\Omega_j \in \operatorname{top} X$, $j \in \mathbb{N}$.

(2) Tzn. zbiory postaci $\bigcup_{j=1}^\infty F_j$, gdzie $F_j$ jest domknięty w $X$, $j \in \mathbb{N}$.

(3) Np. $Y_j = \overline{\mathbb{R}}$, $j = 1, 2$.

Istotnie, dowolny zbiór otwarty $\Omega \subset Y_1 \times Y_2$ ma postać $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j^{(1)} \times \Omega_j^{(2)}$, gdzie $\Omega_j^{(i)} \in \operatorname{top} Y_i$, $j \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$. Wynika stąd, że $f^{-1}(\Omega) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f_1^{-1}(\Omega_j^{(1)}) \cap f_2^{-1}(\Omega_j^{(2)}) \in \mathfrak{M}$.

(h) Niech $Y$ będzie przestrzenią topologiczną i niech $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(Y)$ będzie dowolną rodziną taką, że $\mathcal{B}(Y) \subset \sigma(\mathcal{F})$. Załóżmy $f : X \longrightarrow Y$ jest taka, że $f^{-1}(A) \in \mathfrak{M}$ dla dowolnego $A \in \mathcal{F}$. Wtedy $f \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M})$.

Istotnie, ponieważ $\mathcal{F} \subset f_*\mathfrak{M}$, zatem $\mathcal{B}(Y) \subset \sigma(\mathcal{F}) \subset f_*\mathfrak{M}$ i korzystamy z (a).

W szczególności, wobec Obserwacji 12.1.6(c), dla $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ następujące warunki są równoważne:

- $f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$;
- $f^{-1}(\Delta) \in \mathfrak{M}$ dla dowolnego przedziału $\Delta \subset \overline{\mathbb{R}}$;
- $\{x \in X : f(x) < \alpha\} \in \mathfrak{M}$ dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{Q}$;
- $\{x \in X : f(x) \leqslant \alpha\} \in \mathfrak{M}$ dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{Q}$;
- $\{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathfrak{M}$ dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{Q}$;
- $\{x \in X : f(x) \geqslant \alpha\} \in \mathfrak{M}$ dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{Q}$.

(i) $\mathcal{C}^{\uparrow}(X) \subset \mathcal{M}(X, \overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(X))$ (zob. Definicja 5.8.1). W szczególności, na podstawie (c), jeżeli $f \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M})$, $g \in \mathcal{C}^{\uparrow}(Y)$, to $g \circ f \in \mathcal{M}(X, Z, \mathfrak{M})$.

(j) Jeżeli $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$, to $\{f < g\}$, $\{f \leqslant g\} \in \mathfrak{M}$.

Istotnie, $\{f < g\} = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Q}} \{f < \alpha\} \cap \{g > \alpha\}$ oraz $\{f \leqslant g\} = X \setminus \{g < f\}$.

(k) Jeżeli $f, g \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M})$, gdzie $Y$ jest przestrzenią Hausdorffa z bazą przeliczalną, to $\{f = g\}$, $\{f \neq g\} \in \mathfrak{M}$.

Istotnie, niech $h := (f, g) : X \longrightarrow Y^2$. Na podstawie (g), $h$ jest odwzorowaniem mierzalnym. Niech $\Delta := \{(y, y) : y \in Y\}$. Jest to zbiór domknięty. W szczególności, $\{f = g\} = h^{-1}(\Delta) \in \mathfrak{M}$. Mierzalność $\{f \neq g\}$ wynika teraz ze związku $\{f \neq g\} = X \setminus \{f = g\}$.

(l) Jeżeli $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$, gdzie $X_j \in \mathfrak{M}$, $j \in \mathbb{N}$, to dla $f : X \longrightarrow Y$ mamy: $f \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M}) \iff f|_{X_j} \in \mathcal{M}(X_j, Y, \mathfrak{M})$ (4), $j \in \mathbb{N}$.

(m) Niech $f_j \in \mathcal{M}(X, Y_j, \mathfrak{M})$, gdzie $Y_j$ jest przestrzenią unormowaną z bazą przeliczalną, $j = 1, 2$. Niech $A \in \mathcal{L}(Y_1 \times Y_2, Z)$, $B \in \mathcal{L}(Y_1, Y_2; Z)$, gdzie $Z$ jest przestrzenią unormowaną. Wtedy

$$A(f_1, f_2),\ B(f_1, f_2) \in \mathcal{M}(X, Z, \mathfrak{M}).$$

W szczególności,

- jeżeli $f_j \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M})$, $j = 1, 2$, gdzie $Y$ jest przestrzenią unormowaną z bazą przeliczalną, to $f_1 + f_2 \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M})$;
- jeżeli $f_1 \in \mathcal{M}(X, \mathbb{K}, \mathfrak{M})$, $f_2 \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M})$, gdzie $Y$ jest $\mathbb{K}$–przestrzenią unormowaną z bazą przeliczalną, to $f_1 \cdot f_2 \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M})$;
- $\mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M})$ jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$.

(n) Dla $f \in \mathcal{M}(X, \mathbb{C}, \mathfrak{M})$ istnieje funkcja $\alpha \in \mathcal{M}(X, \mathbb{S}_1, \mathfrak{M})$ taka, że $f = \alpha|f|$.

Istotnie, kładziemy

$$\alpha(x) := \begin{cases} f(x)/|f(x)|, & \text{jeżeli } f(x) \neq 0 \\ 1, & \text{jeżeli } f(x) = 0 \end{cases}$$

i korzystamy z (l).

(o) Dla dowolnych $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$ zbiór $A := \{x \in X : f(x) + g(x) \text{ istnieje}\}$ należy do $\mathfrak{M}$ oraz $f + g \in \mathcal{M}(A, \mathfrak{M})$. Ponadto, $f \cdot g \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$ przy zastosowaniu konwencji $0 \cdot \infty := 0$.

Istotnie, niech $B := \{x \in X : f(x),\ g(x) \in \mathbb{R}\}$. Wiemy, że $B \in \mathfrak{M}$ oraz, że $f + g, f \cdot g \in \mathcal{M}(B, \mathfrak{M})$ (korzystamy z (m)). Zbiór $A \setminus B$ jest równy

$$\{f > -\infty,\ g = +\infty\} \cup \{f = -\infty,\ g < +\infty\} \cup \{f < +\infty,\ g = -\infty\} \cup \{f = +\infty,\ g > -\infty\} =: B_1 \cup \dots \cup B_4.$$

Oczywiście $B_j \in \mathfrak{M}$, $j = 1, \dots, 4$. Tak więc $A \in \mathfrak{M}$. Ponadto $f + g$ jest odwzorowaniem stałym na każdym ze zbiorów $B_j$. Teraz stosujemy (l).

---

(4) Tu i dalej stosujemy następującą umowę: jeżeli $A \in \mathfrak{M}$ i $f : A \longrightarrow Y$, to pisząc „$f \in \mathcal{M}(A, Y, \mathfrak{M})$” mamy na myśli „$f \in \mathcal{M}(A, Y, \mathfrak{M}|_A)$”.

Przypadek iloczynu jest analogiczny: zbiór $X \setminus B$ rozpada się na zbiory z $\mathfrak{M}$, na których iloczyn $f \cdot g$ jest stały ([5]).

(p) Jeżeli $(f_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$, to $\inf\{f_j : j \in \mathbb{N}\}$, $\sup\{f_j : j \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$.

Istotnie, $\{x \in X : \inf\{f_j(x) : j \in \mathbb{N}\} < \alpha\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{x \in X : f_j(x) < \alpha\}$. Podobnie dla supremum.

(q) W szczególności:
- jeżeli $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$, to $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\} \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$;
- jeżeli $f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$, to $f_+ := \max\{f, 0\}$, $f_- := \max\{-f, 0\} \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$; ([6])
- jeżeli $(f_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$, to $\liminf\limits_{j \to +\infty} f_j$, $\limsup\limits_{j \to +\infty} f_j \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$.

Istotnie, $\liminf\limits_{j \to +\infty} f_j = \sup_{k \in \mathbb{N}} \inf\{f_j : j \geqslant k\}$. Podobnie dla $\limsup$.

(r) Jeżeli $(f_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$, to $A := \{x \in X : \lim\limits_{j \to +\infty} f_j(x) \text{ istnieje}\} \in \mathfrak{M}$ oraz $\lim\limits_{j \to +\infty} f_j \in \mathcal{M}(A, \mathfrak{M})$ ([7]). W szczególności, każda funkcja $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ $n$–tej klasy Baire'a (zob. Definicja 5.11.30) jest $\mathcal{B}(X)$–mierzalna ([8]). Dla przykładu, każda oddzielnie ciągła funkcja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$–mierzalna (Twierdzenie 5.11.34).

(s) Jeżeli $(f_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M})$, gdzie $(Y, \varrho)$ jest przestrzenią metryczną, oraz $f_j \longrightarrow f$ punktowo na $X$, to $f \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M})$.

Istotnie, dla $\Omega \in \operatorname{top} Y$, $\Omega \neq Y$, niech $\Omega_\varepsilon := \{y \in \Omega : \varrho(y, Y \setminus \Omega) > \varepsilon\}$ i niech $Y_\varepsilon := Y$. Widać, że $\Omega_\varepsilon$ jest zbiorem otwartym oraz $\overline{\Omega_\varepsilon} \subset \Omega_{\varepsilon'}$ dla $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. Pozostaje jeszcze tylko zauważyć, że $f^{-1}(\Omega) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} f_j^{-1}(\Omega_{1/i})$.

(t) Niech $\Omega \in \operatorname{top} \mathbb{R}^n$ i niech $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}, \mathcal{B}(\Omega))$. Przypuśćmy, że $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ i dla pewnego $j \in \{1, \dots, n\}$ pochodna $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ istnieje przy dowolnym $x \in A$. Wtedy $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathcal{M}(A, \mathbb{R}, \mathcal{B}(\Omega))$.

Istotnie, na podstawie (l), wystarczy pokazać, że $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathcal{M}(A \cap \Omega_{1/k}, \mathbb{R}, \mathcal{B}(\Omega))$. Ustalmy $k \in \mathbb{N}$. Niech

$$f_\ell(x) := \frac{f(x + \frac{1}{\ell} e_j) - f(x)}{\frac{1}{\ell}}, \quad x \in \Omega_{1/k}, \quad \ell \geqslant k.$$

Na podstawie (c), funkcje $f_\ell$, $\ell \geqslant k$, są mierzalne oraz $\lim\limits_{\ell \to +\infty} f_\ell = \frac{\partial f}{\partial x_j}$ na $A \cap \Omega_{1/k}$. Teraz możemy skorzystać bezpośrednio z (r).

(u) Niech $\Omega \in \operatorname{top} \mathbb{R}^n$ i niech $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Dla $j \in \{1, \dots, n\}$ niech

$$A_j := \Big\{x \in \Omega : \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \text{ istnieje}\Big\}.$$

Wtedy $A_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ oraz (na podstawie (t)) $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathcal{M}(A_j, \mathbb{R}, \mathcal{B}(\Omega))$.

Istotnie, podobnie jak w (t), wystarczy pokazać, że $A_j \cap \Omega_{1/k} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$. Ustalmy $k \in \mathbb{N}$ i niech

$$\varphi_\nu(x) := \inf\Big\{\frac{f(x + te_j) - f(x)}{t} : 0 < |t| < \frac{1}{\nu}\Big\}, \quad x \in \Omega_{1/k},\ \nu \geqslant k.$$

Jest to funkcja $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$–mierzalna, bowiem (korzystając z ciągłości $f$) mamy:

$$\varphi_\nu(x) := \inf\Big\{\frac{f(x + te_j) - f(x)}{t} : 0 < |t| < \frac{1}{\nu},\ t \in \mathbb{Q}\Big\}, \quad x \in \Omega_{1/k}.$$

Analogicznie, niech

$$\psi_\nu(x) := \sup\Big\{\frac{f(x + te_j) - f(x)}{t} : 0 < |t| < \frac{1}{\nu}\Big\}, \quad x \in \Omega_{1/k},\ \nu \geqslant k.$$

Jest to również funkcja $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$–mierzalna.

---

([5]) Np. $f \cdot g = -\infty$ na $\{f = -\infty,\ g > 0\} \cup \{f = +\infty,\ g < 0\} \cup \{f > 0,\ g = -\infty\} \cup \{f < 0,\ g = +\infty\}$. Przypadki $f \cdot g = +\infty$ i $f \cdot g = 0$ rozpatrujemy podobnie.

([6]) Zauważmy, że $f = f_+ - f_-$ (działanie jest zawsze wykonalne) oraz $|f| = f_+ + f_-$.

([7]) $A = \{x \in X : \liminf\limits_{j \to +\infty} f_j(x) = \limsup\limits_{j \to +\infty} f_j(x)\}$ i korzystamy z (k) i (q).

([8]) Formalnie rzecz biorąc, klasy Baire'a były definiowane dla funkcji $X \longrightarrow \mathbb{R}$, ale nic nie stoi na przeszkodzie, aby rozszerzyć tę definicję na funkcje $X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

Zauważmy, że $A_j \cap \Omega_{1/k} = \{x \in \Omega_{1/k} : \lim_{\nu\to+\infty} \varphi_\nu(x) = \lim_{\nu\to+\infty} \psi_\nu(x)\}$. Stąd, na podstawie (r), wnioskujemy, że $A_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

[Wykład 01.03.2021 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ]

### 12.3. Odwzorowania proste

**Definicja 12.3.1.** Niech $Y$ będzie przestrzenią unormowaną z bazą przeliczalną. Powiemy, że odwzorowanie $f : X \longrightarrow Y$ jest *proste* ($f \in \mathcal{M}_0(X, Y, \mathfrak{M})$), jeżeli $f \in \mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M})$ oraz zbiór $f(X)$ jest skończony. Zgodnie z ogólną umową, będziemy również stosować oznaczenia $\mathcal{M}_0(X, Y)$, $\mathcal{M}_0(X, \mathfrak{M})$ i $\mathcal{M}_0(X)$.

Niech $\mathcal{M}_0^+(X, \mathfrak{M})$ oznacza zbiór nieujemnych funkcji prostych $f : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$. Jak zwykle, będziemy również stosować oznaczenie $\mathcal{M}_0^+(X)$.

Niech $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{M})$ oznacza zbiór nieujemnych funkcji mierzalnych $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$. Będziemy również stosować oznaczenie $\mathcal{M}^+(X)$.

**Obserwacja 12.3.2** (Własności odwzorowań prostych)**.** (a) Niech $f \in \mathcal{M}_0(X, Y, \mathfrak{M})$, $f(X) = \{a_1, \dots, a_N\}$, $a_j \neq a_k$ dla $j \neq k$. Wtedy $A_j := f^{-1}(\{a_j\}) \in \mathfrak{M}$, $j = 1, \dots, N$ [9], oraz $f = \sum_{j=1}^{N} a_j \chi_{A_j}$. Postać tę nazywamy *postacią kanoniczną odwzorowania* $f$.

(b) Niech $B_j \in \mathfrak{M}$, $j = 1, \dots, N$, $B_j \cap B_k = \varnothing$ dla $j \neq k$, $\bigcup_{j=1}^{N} B_j = X$ i niech $b_1, \dots, b_N \in Y$ [10]. Wtedy $f := \sum_{j=1}^{N} b_j \chi_{B_j} \in \mathcal{M}_0(X, Y, \mathfrak{M})$.

(c) $\mathcal{M}_0^+(X, \mathfrak{M}) \subset \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{M})$. Ponadto, $\mathcal{M}_0^+(X, \mathfrak{M})$ oraz $\mathcal{M}^+(X, \mathfrak{M})$ są wypukłymi stożkami [11].

(d) $\mathcal{M}_0(X, Y, \mathfrak{M})$ jest przestrzenią wektorową.

**Twierdzenie 12.3.3.** *Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{M})$ istnieje ciąg $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{M}_0^+(X, \mathfrak{M})$ taki, że $f_n \nearrow f$ punktowo na $X$. Ponadto, jeżeli $f$ jest ograniczona, to $f_n \longrightarrow f$ jednostajnie na $X$.*

*Dowód.* Niech

$$A_{n,j} := \{x \in X : \frac{j-1}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{j}{2^n}\}, \quad j = 1, \dots, n2^n, \quad A_n := \{x \in X : f(x) \geqslant n\},$$
$$f_n := \Big(\sum_{j=1}^{n2^n} \frac{j-1}{2^n} \chi_{A_{n,j}}\Big) + n\chi_{A_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Oczywiście $f_n \in \mathcal{M}_0^+(X, \mathfrak{M})$, $f_n \leqslant f$, $n \in \mathbb{N}$. Jeżeli $f(x_0) = +\infty$, to $f_n(x_0) = n \nearrow +\infty$. Jeżeli $f(x_0) < N < +\infty$, to $f(x_0) - f_n(x_0) < 1/2^n$ dla $n \geqslant N$. Daje to zbieżność punktową $f_n \longrightarrow f$ na $X$ oraz zbieżność jednostajną w przypadku, gdy $f$ jest ograniczona. Monotoniczność pozostawiamy jako Ćwiczenie. $\square$

### 12.4. Funkcje Baire'a

**Definicja 12.4.1.** Dla przestrzeni topologicznej $X$, niech $\underline{\mathcal{B}}(X)$ oznacza najmniejszą rodzinę $\mathcal{F} \subset \overline{\mathbb{R}}^X$, która spełnia następujące dwa warunki:

(*) $\mathcal{C}(X) \subset \mathcal{F}$,

(**) jeżeli $(f_k)_{k=1}^\infty \subset \mathcal{F}$ i $f_k \longrightarrow f_0$ punktowo na $X$, to $f_0 \in \mathcal{F}$.

Zauważmy, że rodzina $\underline{\mathcal{B}}(X)$ jest poprawnie zdefiniowana — wystarczy wziąć przecięcie wszystkich rodzin spełniających (*) i (**).

Funkcje z $\underline{\mathcal{B}}(X)$ nazywamy *funkcjami Baire'a*. Oczywiście, każda funkcja $n$–tej klasy Baire'a (por. Definicja 5.11.30) jest funkcją Baire'a.

**Twierdzenie 12.4.2** (Funkcje Baire'a)**.** *Niech $X$ będzie przestrzenią metryczną. Wtedy $\mathcal{M}(X, \mathcal{B}(X)) = \underline{\mathcal{B}}(X)$.*

---

[9] Zauważmy, że $A_1, \dots, A_N$ są parami rozłączne oraz, że w sumie dają $X$.

[10] Nie zakładamy, że $b_1, \dots, b_N$ są parami różne.

[11] Podzbiór $S$ przestrzeni wektorowej $E$ jest *wypukłym stożkiem*, jeżeli $tx + uy \in S$ dla dowolnych $t, u \geqslant 0$, $x, y \in S$.

*Dowód*. Na podstawie Obserwacji 12.2.2(b,r), rodzina $\mathcal{M}(X, \mathcal{B}(X))$ spełnia (*) i (**). Wynika stąd natychmiast, że $\underline{\mathcal{B}}(X) \subset \mathcal{M}(X, \mathcal{B}(X))$.

Dla dowodu przeciwnej inkluzji pokażemy najpierw, że

(†) jeżeli $f, g \in \underline{\mathcal{B}}(X)$, $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, to $f \cdot g$, $\alpha f + \beta g \in \underline{\mathcal{B}}(X)$ dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Ustalmy $g \in \underline{\mathcal{B}}(X)$, $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Niech

$$\mathcal{F}_g := \{f \in \underline{\mathcal{B}}(X) : f \cdot g,\ \alpha f + \beta g \in \underline{\mathcal{B}}(X)\}.$$

Jest widoczne, że rodzina $\mathcal{F}_g$ spełnia (**). Ponadto, $\mathcal{F}_g$ spełnia oczywiście (*), gdy $g \in \mathcal{C}(X)$. Wynika stąd, że $\mathcal{F}_g = \underline{\mathcal{B}}(X)$ dla $g \in \mathcal{C}(X)$. Zamieniając rolami $f$ i $g$, wnioskujemy stąd, że $\mathcal{F}_g$ spełnia (*) dla dowolnego $g$. Ostatecznie, $\mathcal{F}_g = \underline{\mathcal{B}}(X)$ dla dowolnego $g$, co kończy dowód (†).

Dla dowodu inkluzji $\mathcal{M}(X, \mathcal{B}(X)) \subset \underline{\mathcal{B}}(X)$ ustalmy $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{B}(X))$. Wobec Obserwacji 12.2.2(q), warunku (**) oraz (†), możemy założyć, że $f : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$. Teraz korzystając z Twierdzenia 12.3.3, warunku (**) oraz (†), redukujemy dowód do przypadku, gdy $f = \chi_A$ dla pewnego $A \in \mathcal{B}(X)$. Niech $\mathfrak{M} := \{B \in \mathcal{B}(X) : \chi_B \in \underline{\mathcal{B}}(X)\}$. Zauważmy, że $\operatorname{top} X \subset \mathfrak{M}$, bowiem dla zbioru otwartego $\Omega \subset X$, jego funkcja charakterystyczna $\chi_\Omega$ jest półciągła z dołu, a więc w szczególności, I klasy Baire'a (por. Twierdzenie 5.8.6 ([12])). Wobec definicji $\mathcal{B}(X)$, pozostaje pokazać, że $\mathfrak{M}$ jest $\sigma$–algebrą.

Niech $B \in \mathfrak{M}$. Wtedy $\chi_{X \setminus B} = 1 - \chi_B \in \underline{\mathcal{B}}(X)$ na podstawie (†), co oznacza, że $X \setminus B \in \mathfrak{M}$.

Niech teraz $B, C \in \mathfrak{M}$. Ponieważ $\chi_{B \setminus C} = \chi_B - \chi_B \chi_C$, zatem (†) daje $B \setminus C \in \mathfrak{M}$. Jeżeli $B \cap C = \varnothing$, to $\chi_{B \cup C} = \chi_B + \chi_C$, więc $B \cup C \in \mathfrak{M}$. Ogólnie, $B \cup C = (B \setminus C) \cup C \in \mathfrak{M}$.

Przypuśćmy, że $(B_k)_{k=1}^\infty \subset \mathfrak{M}$. Chcemy pokazać, że $B := \bigcup_{k=1}^\infty B_k \in \mathfrak{M}$. Mamy $\chi_B = \lim\limits_{k \to +\infty} \chi_{C_k}$, gdzie $C_k := B_1 \cup \dots \cup B_k$, $k = 1, 2, \dots$. Z poprzednich rozważań wynika, że $(C_k)_{k=1}^\infty \subset \mathfrak{M}$, a stąd $\chi_B \in \underline{\mathcal{B}}(X)$. □

**Ćwiczenie* 12.4.3.** Czy Twierdzenie 12.4.2 pozostaje prawdziwe dla dowolnej przestrzeni topologicznej ? (por. Obserwacja 5.8.7).

## 12.5. Miary

**Definicja 12.5.1.** Niech $\mathfrak{M}$ będzie $\sigma$–algebrą na $X$. Funkcję $\mu : \mathfrak{M} \longrightarrow [0, +\infty]$ nazywamy *miarą nieujemną na* $\mathfrak{M}$, jeżeli:

(1) $\mu(\varnothing) = 0$,

(2) $(A_j)_{j=1}^\infty \subset \mathfrak{M}$, $A_j \cap A_k = \varnothing$ dla $j \neq k \Longrightarrow \mu(\bigcup\limits_{j=1}^\infty A_j) = \sum\limits_{j=1}^\infty \mu(A_j)$ (jest to tzw. *przeliczalna addytywność*).

W ten sam sposób możemy zdefiniować pojęcie *miary zespolonej* $\mu : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathbb{C}$ jako funkcji spełniającej (2), z tym, że warunek (2) zawiera w sobie żądanie zbieżności szeregu $\sum\limits_{j=1}^\infty \mu(A_j)$ ([13]). Niech

- $\mathbb{M}(\mathfrak{M})$ oznacza rodzinę wszystkich *miar nieujemnych* $\mu : \mathfrak{M} \longrightarrow [0, +\infty]$,
- $\mathbb{M}(\mathfrak{M}, \mathbb{C})$ oznacza rodzinę wszystkich miar zespolonych $\mu : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathbb{C}$,
- $\mathbb{M}(\mathfrak{M}, \mathbb{R})$ oznacza podrodzinę rodziny $\mathbb{M}(\mathfrak{M}, \mathbb{C})$ złożoną ze wszystkich *miar rzeczywistych* $\mu : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathbb{R}$,
- $\mathbb{M}(\mathfrak{M}, \mathbb{R}_+)$ oznacza rodzinę wszystkich *ograniczonych miar nieujemnych* $\mu : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathbb{R}_+$.

**Obserwacja 12.5.2** (Własności miar). (a) $\mathbb{M}(\mathfrak{M}, \mathbb{K})$ jest $\mathbb{K}$–przestrzenią wektorową. Rodziny $\mathbb{M}(\mathfrak{M})$ i $\mathbb{M}(\mathfrak{M}, \mathbb{R}_+)$ są wypukłymi stożkami.

(b) W definicji miary nieujemnej warunek (1) można zastąpić warunkiem $\mu \not\equiv +\infty$.

(c) Dla $\mu \in \mathbb{M}(\mathfrak{M}, \mathbb{C})$ jest zawsze spełniony warunek (1).

(d) Dla dowolnego $x_0 \in X$ funkcja $\delta_{x_0}(A) := \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } x_0 \in A \\ 0, & \text{jeżeli } x_0 \notin A \end{cases}$ jest miarą nieujemną na $\mathcal{P}(X)$; jest to tzw. *miara Diraca* ([14]).

---

([12]) Tu korzystamy z założenia, że $X$ jest przestrzenią metryczną.
([13]) Oczywiście szereg ten musi być zbieżny bezwarunkowo, a więc bezwzględnie.
([14]) Paul Dirac (1902–1984).

(e) Funkcja $\mu(A) := \begin{cases} \#A & \text{gdy } A \text{ jest skończony} \\ +\infty & \text{gdy } A \text{ jest nieskończony} \end{cases}$ jest miarą na $\mathcal{P}(X)$; jest to tzw. *miara licząca*).

(f) Jeżeli $\mu$ jest miarą [15], to $\mu(A_1 \cup \dots \cup A_N) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_N)$ dla dowolnych $A_1, \dots, A_N \in \mathfrak{M}$ takich, że $A_j \cap A_k = \varnothing$ dla $j \neq k$; jest to tzw. *skończona addytywność*.

(g) Jeżeli $\mu \in \mathbb{M}(\mathfrak{M})$, to $\mu(A) \leqslant \mu(B)$ dla $A \subset B$. Ponadto, dla dowolnej miary oraz dla $A \subset B$ mamy: $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ o ile liczba $\mu(A)$ jest skończona.

(h) Jeżeli $\mu \in \mathbb{M}(\mathfrak{M})$, to dla dowolnych zbiorów $(B_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}$ mamy: $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j)$; jest to tzw. *przeliczalna podaddytywność*.

(i) Jeżeli $\mu \in \mathbb{M}(\mathfrak{M})$, to $\mu(B_1 \cup \dots \cup B_N) \leqslant \mu(B_1) + \dots + \mu(B_N)$ dla dowolnych $B_1, \dots, B_N \in \mathfrak{M}$ (jest to tzw. *skończona podaddytywność*).

(j) Jeżeli $\mu$ jest miarą i $B_N \nearrow B$, to $\mu(B_N) \longrightarrow \mu(B)$.

(k) Jeżeli $\mu$ jest miarą, $B_j \searrow B$ i $\mu(B_1)$ jest skończona [16], to $\mu(B_j) \longrightarrow \mu(B)$ [17].

(l) Niech $\mu \in \mathbb{M}(\mathfrak{M})$ i niech $\mathcal{Z} := \{A \in \mathfrak{M} : \mu(A) = 0\}$. Wtedy:

- $\mathfrak{M} \ni A \subset Z \in \mathcal{Z} \Longrightarrow A \in \mathcal{Z}$,
- $(Z_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{Z} \Longrightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} Z_j \in \mathcal{Z}$,
- jeżeli $A \in \mathfrak{M}$ i $Z \in \mathcal{Z}$, to $\mu(A \cup Z) = \mu(A \setminus Z) = \mu(A)$.

**Definicja 12.5.3** (Miara zupełna)**.** Powiemy, że miara $\mu \in \mathbb{M}(\mathfrak{M})$ jest *zupełna*, jeżeli dla dowolnego zbioru $Z \in \mathfrak{M}$ takiego, że $\mu(Z) = 0$ i dla dowolnego zbioru $A \subset Z$ mamy $A \in \mathfrak{M}$.

**Twierdzenie 12.5.4** (Uzupełnianie miary)**.** *Dla dowolnej miary $\mu \in \mathbb{M}(\mathfrak{M})$ istnieje $\sigma$–algebra $\mathfrak{M}^*$ oraz miara zupełna $\mu^* \in \mathbb{M}(\mathfrak{M}^*)$ takie, że*

- $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}^*$,
- $\mu^*|_{\mathfrak{M}} = \mu$,
- *dla dowolnej $\sigma$–algebry $\mathfrak{N}$ i miary zupełnej $\nu \in \mathbb{M}(\mathfrak{N})$, jeżeli $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$ i $\nu|_{\mathfrak{M}} = \mu$, to $\mathfrak{M}^* \subset \mathfrak{N}$ i $\nu|_{\mathfrak{M}^*} = \mu^*$* [18].

*Dowód.* Zdefiniujmy $\mathfrak{M}^* := \{A \subset X : \exists_{L,R \in \mathfrak{M}} : L \subset A \subset R,\ \mu(R \setminus L) = 0\}$. Oczywiście $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}^*$. Udowodnimy, że $\mathfrak{M}^*$ jest $\sigma$–algebrą. Dla dowodu, że $X \setminus A \in \mathfrak{M}^*$ dla $A \in \mathfrak{M}^*$ wystarczy zauważyć, że jeżeli $L, R$ są takie jak w definicji, to $X \setminus R \subset X \setminus A \subset X \setminus L$ i $(X \setminus L) \setminus (X \setminus R) = R \setminus L$. Dla dowodu, że $A := \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{M}^*$ dla dowolnego ciągu $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}^*$ dobieramy dla każdego $A_j$ zbiory $L_j$ i $R_j$ tak, jak w definicji i mamy: $L := \bigcup_{j=1}^{\infty} L_j \subset A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j := R$ oraz $R \setminus L \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (R_j \setminus L_j)$.

Teraz określimy $\mu^*$. Kładziemy $\mu^*(A) := \mu(L)$, gdy $L, R$ są takie, jak w definicji. Takie określenie jest poprawne, bo jeżeli $(L_1, R_1)$ jest inną parą zbiorów takich, że $L_1 \subset A \subset R_1$ i $\mu(R_1 \setminus L_1) = 0$, to $(L \setminus L_1) \cup (L_1 \setminus L) \subset (R_1 \setminus L_1) \cup (R \setminus L)$. Oczywiście $\mu^* = \mu$ na $\mathfrak{M}$. Bez trudu również sprawdzamy, że $\mu^*$ jest miarą: niech $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}^*$ będzie ciągiem zbiorów parami rozłącznych i niech $L_j, R_j$ będą skojarzone z $A_j$. Wtedy $(L_j)_{j=1}^{\infty}$ są parami rozłączne oraz

$$\mu^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} L_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(L_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j).$$

Dla dowodu zupełności, niech $B \subset A \in \mathfrak{M}^*$, $\mu^*(A) = 0$. Chcemy pokazać, że $B \in \mathfrak{M}^*$. Niech $L \subset A \subset R$ będą takie, jak w definicji $\mathfrak{M}^*$. Wtedy $\mu(R \setminus L) = 0$. Ponadto $\mu(L) = \mu^*(A) = 0$, a zatem $\mu(R) = 0$. Wystarczy więc zauważyć, że $\varnothing \subset B \subset R$ i $\mu(R \setminus \varnothing) = 0$.

Pozostaje sprawdzić minimalność. Niech $(\mathfrak{N}, \nu)$ będą jak w wypowiedzi propozycji. Ustalmy $A \in \mathfrak{M}^*$ i niech $L, R$ będą takie, jak w definicji. Wtedy $A \setminus L \in \mathfrak{N}$ (bo $A \setminus L \subset R \setminus L \in \mathfrak{N}$ i $\nu(R \setminus L) = \mu(R \setminus L) = 0$,

---

(15) Tu i dalej, pisząc „$\mu$ jest miarą" mamy na myśli to, że $\mu$ jest miarą nieujemną, lub miarą zespoloną.

(16) Oczywiście ten ostatni warunek jest istotny wyłącznie dla miar nieujemnych.

(17) Żądanie skończoności $\mu(B_1)$ można zastąpić żądaniem aby $\mu(B_N)$ było skończone dla pewnego $N$. Jeżeli nic nie założymy, to twierdzenie przestaje być prawdziwe: np. $X := \mathbb{N}$, $\mu$ — miara licząca, $B_j := [j, +\infty) \cap \mathbb{N}$, $B := \varnothing$.

(18) Tzn. para $(\mathfrak{M}^*, \mu^*)$ jest minimalna. W szczególności, jeżeli $\mu$ jest zupełna, to $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}$ i $\mu^* = \mu$.

a $\nu$ jest zupełna). Wynika stąd, że $A = L \cup (A \setminus L) \in \mathfrak{N}$. Zgodność miary wynika bezpośrednio z definicji miary $\mu^*$. $\square$

[Wykład 04.03.2021 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ]

## 12.6. Miary zewnętrzne. Warunek Carathéodory'ego.

**Definicja 12.6.1.** Powiemy, że funkcja $\varphi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ jest *miarą zewnętrzną na* $X$, jeżeli:

(1) $\varphi(\varnothing) = 0$,

(2) $A \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \Longrightarrow \varphi(A) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{\infty} \varphi(A_j)$.

Miara zewnętrzna jest monotoniczna, tzn. $A \subset B \Longrightarrow \varphi(A) \leqslant \varphi(B)$. Ponadto, jeżeli $A \subset A_1 \cup \dots \cup A_N$, to $\varphi(A) \leqslant \varphi(A_1) + \dots + \varphi(A_N)$.

**Twierdzenie 12.6.2** (Warunek Carathéodory'ego)**.** *Niech* $\varphi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ *będzie miarą zewnętrzną na* $X$. *Zdefiniujmy*

$$\mathfrak{M}(\varphi) := \{A \subset X : \forall_{T \subset X} : \varphi(T) \geqslant \varphi(T \cap A) + \varphi(T \setminus A)\}. \quad (^{19})$$

*Wtedy* $\mathfrak{M}(\varphi)$ *jest* $\sigma$*–algebrą, zaś* $\varphi|_{\mathfrak{M}(\varphi)}$ *— miarą zupełną.*

Zbiory z $\mathfrak{M}(\varphi)$ nazywamy zbiorami *mierzalnymi* ($\varphi$*-mierzalnymi*).

*Dowód.* Krok $1^0$: $\varphi(A) = 0 \Longrightarrow A \in \mathfrak{M}$. Tak więc np. $\varnothing \in \mathfrak{M}$. W szczególności, wobec monotoniczności miar zewnętrznych, jeżeli już pokażemy, że $\mathfrak{M}$ jest $\sigma$–algebrą i $\varphi$ jest miarą na $\mathfrak{M}$, to musi to być miara zupełna. Istotnie, jeżeli $\varphi(a) = 0$, to $\varphi(T \cap A) + \varphi(T \setminus A) \leqslant \varphi(A) + \varphi(T) = \varphi(T)$.

Krok $2^0$: $A \in \mathfrak{M} \Longrightarrow X \setminus A \in \mathfrak{M}$. Istotnie, $\varphi(T \cap (X \setminus A)) + \varphi(T \setminus (X \setminus A)) = \varphi(T \setminus A) + \varphi(T \cap A) \leqslant \varphi(T)$.

Krok $3^0$: $A, B \in \mathfrak{M} \Longrightarrow A \cap B \in \mathfrak{M}$. W konsekwencji, $A_1, \dots, A_N \in \mathfrak{M} \Longrightarrow A_1 \cap \dots \cap A_N \in \mathfrak{M}$. Istotnie, $\varphi(T \cap (A \cap B)) + \varphi(T \setminus (A \cap B)) \overset{(2)}{\leqslant} \varphi((T \cap A) \cap B) + \varphi(T \setminus A) + \varphi((T \cap A) \setminus B) \overset{B \in \mathfrak{M}}{\leqslant} \varphi(T \cap A) + \varphi(T \setminus A) \overset{A \in \mathfrak{M}}{\leqslant} \varphi(T)$.

Krok $4^0$: $A, B \in \mathfrak{M} \Longrightarrow A \setminus B \in \mathfrak{M}$. Istotnie, $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$ i korzystamy z $2^0$ i $3^0$.

Krok $5^0$: $A, B \in \mathfrak{M} \Longrightarrow A \cup B \in \mathfrak{M}$. W konsekwencji, $A_1, \dots, A_N \in \mathfrak{M} \Longrightarrow A_1 \cup \dots \cup A_N \in \mathfrak{M}$. Istotnie, $A \cup B = X \setminus ((X \setminus A) \cap (X \setminus B))$ i korzystamy z $2^0$ i $3^0$.

Krok $6^0$: $A_1, \dots, A_N \in \mathfrak{M}, \quad A_j \cap A_k = \varnothing$ dla $j \neq k \Longrightarrow \varphi(A_1 \cup \dots \cup A_N) = \varphi(A_1) + \dots + \varphi(A_N)$ (tzn. $\varphi$ jest skończenie addytywna na $\mathfrak{M}$). Zastosujemy indukcję względem $N$. Trzeba tylko sprawdzić krok indukcyjny: $\varphi(A_1 \cup \dots \cup A_{N+1}) \overset{A_{N+1} \in \mathfrak{M}}{=} \varphi((A_1 \cup \dots \cup A_{N+1}) \cap A_{N+1}) + \varphi((A_1 \cup \dots \cup A_{N+1}) \setminus A_{N+1}) = \varphi(A_{N+1}) + \varphi(A_1 \cup \dots \cup A_N) \overset{\text{zał. ind.}}{=} \varphi(A_1) + \dots + \varphi(A_{N+1})$.

Krok $7^0$: $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}$, $A_j \cap A_k = \varnothing$ dla $j \neq k \Longrightarrow \varphi(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \varphi(A_j)$. W szczególności, jeżeli już pokażemy, że $\mathfrak{M}$ jest $\sigma$–algebrą, to $\varphi$ będzie miarą na $\mathfrak{M}$. Istotnie, na mocy $6^0$ mamy:

$$\varphi(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \geqslant \lim_{N \to +\infty} \varphi(\bigcup_{j=1}^{N} A_j) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{j=1}^{N} \varphi(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(A_j).$$

Krok $8^0$: Zauważmy, że dla dowolnego zbioru $Y \subset X$ funkcja $\psi := \varphi|_{\mathcal{P}(Y)}$ jest miarą zewnętrzną na $Y$. Możemy więc zdefiniować rodzinę $\mathfrak{M}(\psi)$ będącą odpowiednikiem rodziny $\mathfrak{M}(\varphi)$. Rodzina ta ma oczywiście wszystkie dotychczas sprawdzone własności względem obciętej miary. Dla nas ważna będzie następująca zależność: $A \in \mathfrak{M}(\varphi) \Longrightarrow A \cap Y \in \mathfrak{M}(\psi)$. Istotnie, dla $T \subset Y$ mamy:

$$\psi(T \cap (A \cap Y)) + \psi(T \setminus (A \cap Y)) = \varphi(T \cap A) + \varphi(T \setminus A) = \varphi(T) = \psi(T).$$

Krok $9^0$: $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}$, $A_j \cap A_k = \varnothing$ dla $j \neq k \Longrightarrow \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{M}$. Istotnie,

$$\varphi(T \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) + \varphi(T \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \varphi(\bigcup_{j=1}^{\infty} (T \cap A_j)) + \varphi(T \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)$$

---

[19] Zauważmy, że zawsze $\varphi(T) \leqslant \varphi(T \cap A) + \varphi(T \setminus A)$, a zatem warunek Carathéodory'ego można w sposób równoważny zapisać w postaci równości.

$$\leqslant \lim_{N\to+\infty}\Big(\sum_{j=1}^{N}\varphi(T\cap A_j)+\varphi(T\setminus\bigcup_{j=1}^{N}A_j)\Big)\overset{6^0+8^0}{=}\lim_{N\to+\infty}\Big(\varphi(T\cap\bigcup_{j=1}^{N}A_j)+\varphi(T\setminus\bigcup_{j=1}^{N}A_j)\Big)\overset{5^0}{=}\varphi(T).$$

Krok $10^0$ (i ostatni). $(A_j)_{j=1}^{\infty}\subset\mathfrak{M}\Longrightarrow\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j\in\mathfrak{M}$. Istotnie, $\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j=\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j$, gdzie $B_1:=A_1$, $B_j:=A_j\setminus(A_1\cup\dots\cup A_{j-1})$, $j\geqslant 2$, i możemy skorzystać z $4^0$, $5^0$ i $9^0$. □

**Twierdzenie 12.6.3.** *Dla $\mu\in\mathbb{M}(\mathfrak{M})$ zdefiniujmy $\varphi(A)=\varphi_\mu(A):=\inf\{\mu(B): A\subset B\in\mathfrak{M}\}$, $A\subset X$. Wtedy*

(a) $\varphi:\mathcal{P}(X)\longrightarrow[0,+\infty]$ *jest miarą zewnętrzną taką, że $\varphi=\mu$ na $\mathfrak{M}$,*
(b) $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{M}(\varphi)$,
(c) $\varphi=\sup\{\psi:\psi$ jest miarą zewnętrzną taką, że $\psi=\mu$ na $\mathfrak{M}\}$.

**Obserwacja 12.6.4.** Z powyższego twierdzenia wynika w szczególności ważny wniosek, że rozważając miary nieujemne $\mu$ zawsze możemy założyć, że $\mu=\varphi|_{\mathfrak{M}(\varphi)}$ dla pewnej miary zewnętrznej $\varphi:\mathcal{P}(X)\longrightarrow[0,+\infty]$. Tym samym, traci na znaczeniu Twierdzenie 12.5.4.

*Dowód Twierdzenie 12.6.3.* (a) Jest rzeczą widoczną, że $\varphi=\mu$ na $\mathfrak{M}$. Przypuśćmy, że $A\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j$. Jeżeli $\varphi(A_j)=+\infty$ dla pewnego $j$, to oczywiście $\varphi(A)\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\varphi(A_j)$. Przypuśćmy więc, że $\varphi(A_j)<+\infty$ dla dowolnego $j$. Weźmy $\varepsilon>0$ i niech $B_j\in\mathfrak{M}$ będzie taki, że $A_j\subset B_j$ i $\mu(B_j)\leqslant\varphi(A_j)+\varepsilon2^{-j}$, $j\in\mathbb{N}$. Wtedy $A\subset B:=\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j\in\mathfrak{M}$ oraz $\varphi(A)\leqslant\mu(B)\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\mu(B_j)\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\varphi(A_j)+\varepsilon$.

(b) Niech $A\in\mathfrak{M}$ i niech $T\subset X$. Przypuśćmy, że $T\subset B\in\mathfrak{M}$. Wtedy $T\cap A\subset B\cap A\in\mathfrak{M}$ i $T\setminus A\subset B\setminus A\in\mathfrak{M}$. Stąd $\varphi(T\cap A)+\varphi(T\setminus A)\leqslant\mu(B\cap A)+\mu(B\setminus A)=\mu(B)$, a więc $\varphi(T\cap A)+\varphi(T\setminus A)\leqslant\varphi(T)$.

(c) Niech $\psi$ będzie miarą zewnętrzną taką, że $\psi=\mu$ na $\mathfrak{M}$. Niech $A\subset B\in\mathfrak{M}$. Wtedy $\mu(B)=\psi(B)\geqslant\psi(A)$, skąd wynika, że $\varphi(A)\geqslant\psi(A)$ dla dowolnego $A\subset X$. □

**Twierdzenie 12.6.5.** *Niech $\varphi:\mathcal{P}(X)\longrightarrow[0,+\infty]$ będzie miarą zewnętrzną i niech $\mathfrak{M}:=\mathfrak{M}(\varphi)$.*

(a) *Dla $f:X\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$ mamy:*

$$f\in\mathcal{M}(X,\mathfrak{M})\Longleftrightarrow\forall_{-\infty<\alpha<\beta<\infty}\ \forall_{T\subset X}:\varphi(T)\geqslant\varphi(T\cap\{f\leqslant\alpha\})+\varphi(T\cap\{f\geqslant\beta\}).\qquad(*)$$

(b) *Dla dowolnej przestrzeni metrycznej $(Y,\varrho)$ i dla $f:X\longrightarrow Y$ mamy:*

$$f\in\mathcal{M}(X,Y,\mathfrak{M})\Longleftrightarrow\forall_{A,B\subset Y:\varrho(A,B)>0}\ \forall_{T\subset X}:\varphi(T)\geqslant\varphi(T\cap f^{-1}(A))+\varphi(T\cap f^{-1}(B)).\quad[20]\qquad(**)$$

*Dowód.* Na wstępie odnotujmy, że (b) $\Longrightarrow$ (a) (Ćwiczenie) oraz, że w obu twierdzeniach implikacje $\Longrightarrow$ zawsze zachodzą. Istotnie, w (a) mamy:

$$\begin{aligned}f\in\mathcal{M}(X,\mathfrak{M})&\Longleftrightarrow\forall_{\alpha\in\mathbb{R}}:\{f\leqslant\alpha\}\in\mathfrak{M}\Longrightarrow\forall_{\alpha<\beta}\ \forall_{T\subset X}:\\&\varphi(T)\geqslant\varphi(T\cap\{f\leqslant\alpha\})+\varphi(T\cap\{f>\alpha\})\geqslant\varphi(T\cap\{f\leqslant\alpha\})+\varphi(T\cap\{f\geqslant\beta\})=(*).\end{aligned}$$

W (b) mamy:

$$\begin{aligned}f\in\mathcal{M}(X,Y,\mathfrak{M})&\Longleftrightarrow\forall_{U\in\operatorname{top}Y}:f^{-1}(U)\in\mathfrak{M}\\&\Longrightarrow\forall_{A,B\subset Y:\ r=\varrho(A,B)>0}:f^{-1}(U^r)\in\mathfrak{M},\ \text{gdzie } U^r:=\bigcup_{x\in A}B(x,r/2)\\&\Longrightarrow\forall_{A,B\subset Y:\ r:=\varrho(A,B)>0}\ \forall_{T\subset X}:\varphi(T)\geqslant\varphi(T\cap f^{-1}(U^r))+\varphi(T\setminus f^{-1}(U^r))\\&\Longrightarrow\forall_{A,B\subset Y:\ \varrho(A,B)>0}\ \forall_{T\subset X}:\varphi(T)\geqslant\varphi(T\cap f^{-1}(A))+\varphi(T\cap f^{-1}(B))=(**).\end{aligned}$$

Najpierw pokażemy, że (a) $\Longrightarrow$ (b). Przypuśćmy, że warunek (**) jest spełniony. Chcemy pokazać, że dla dowolnego zbioru domkniętego $C\subset Y$ zbiór $f^{-1}(C)$ należy do $\mathfrak{M}$. Niech $g(y):=\varrho(y,C)$, $y\in Y$.

[20] $\varrho(A,B):=\inf\{\varrho(a,b):a\in A,\ b\in B\}$ (pamiętamy, że $\inf\varnothing:=+\infty$). Jeżeli $\varrho(A,B)>0$, to mówimy, że $A$ i $B$ są *metrycznie odseparowane*.

Zauważmy, że $g^{-1}(0) = C$. Pokażemy, że funkcja $g \circ f$ spełnia warunek (*). Ustalmy $-\infty < \alpha < \beta < \infty$. Niech $A := \{g \leqslant \alpha\}$, $B := \{g \geqslant \beta\}$. Łatwo widać, że $\varrho(A, B) \geqslant \beta - \alpha > 0$. W takim razie, dla dowolnego $T \subset X$ mamy $\varphi(T \cap \{g \circ f \leqslant \alpha\}) + \varphi(T \cap \{g \circ f \geqslant \beta\}) = \varphi(T \cap f^{-1}(A)) + \varphi(T \cap f^{-1}(B)) \leqslant \varphi(T)$. Ponieważ założyliśmy prawdziwość twierdzenia (a), zatem $g \circ f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$. W szczególności, $f^{-1}(C) = (g \circ f)^{-1}(0) \in \mathfrak{M}$.

Pozostaje sprawdzić $\Longleftarrow$ w twierdzeniu (a). Przypuśćmy, że warunek (*) zachodzi. Chcemy pokazać, że dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}$ zbiór $A := \{f \leqslant \alpha\}$ należy do $\mathfrak{M}$. Ustalmy $\alpha$. Całość dowodu zasadza się na pokazaniu, że

(†) $\forall_{T \subset X:\ \varphi(T) < +\infty}\ \forall_{\varepsilon > 0}\ \exists_{n = n(T, \varepsilon) \in \mathbb{N}} : \varphi(T \cap \{\alpha < f \leqslant \alpha + \frac{1}{n}\}) \leqslant \varepsilon$.

Istotnie, przypuśćmy na chwilę, że (†) jest spełniony. Wtedy mamy:

$$\varphi(T \cap A) + \varphi(T \setminus A) \leqslant \varphi(T \cap \{f \leqslant \alpha\}) + \varphi(T \cap \{f > \alpha + \tfrac{1}{n}\}) + \varphi(T \cap \{\alpha < f \leqslant \alpha + \tfrac{1}{n}\}) \leqslant \varphi(T) + \varepsilon,$$

co, wobec dowolności $\varepsilon$, zakończy dowód. Przechodzimy do wykazania (†). Ustalamy $T$ i $\varepsilon$. Niech

$$B_j := T \cap \{\alpha + \tfrac{1}{j+1} \leqslant f \leqslant \alpha + \tfrac{1}{j}\}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Zauważmy, że $\varphi(T \cap \{\alpha < f \leqslant \alpha + \frac{1}{n}\}) \leqslant \sum_{j=n}^{\infty} \varphi(B_j)$, $n \in \mathbb{N}$. Wystarczy więc pokazać, że szereg $\sum_{j=1}^{\infty} \varphi(B_j)$ jest zbieżny. Pokażemy, że każdy z szeregów $\sum_{j=1}^{\infty} \varphi(B_{2j})$, $\sum_{j=1}^{\infty} \varphi(B_{2j+1})$ jest zbieżny. Rozumowanie przeprowadzimy dla szeregu złożonego z wyrazów parzystych (pozostały przypadek jest analogiczny). Udowodnimy indukcyjnie, że

$$\sum_{j=1}^{N} \varphi(B_{2j}) \leqslant \varphi(\bigcup_{j=1}^{N} B_{2j}) \leqslant \varphi(T) < +\infty, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Oczywiście, problemem jest tu jedynie pierwsza z nierówności. Trzeba sprawdzić krok indukcyjny od $N$ do $N+1$. Zastosujemy warunek (*) z liczbami $\alpha + \frac{1}{2N+2}$ i $\alpha + \frac{1}{2N+1}$ i zbiorem $T := \bigcup_{j=1}^{N+1} B_{2j}$. Mamy:

$$\varphi(\bigcup_{j=1}^{N+1} B_{2j}) \geqslant \varphi(B_{2(N+1)}) + \varphi(\bigcup_{j=1}^{N} B_{2j}) \overset{\text{zał. ind.}}{\geqslant} \sum_{j=1}^{N+1} \varphi(B_{2j}). \qquad \square$$

Dla nas najważniejszym wnioskiem z Twierdzenia 12.6.5(b) będzie następujący wynik.

**Twierdzenie 12.6.6.** *Niech $(X, \varrho)$ będzie przestrzenią metryczną, niech $\varphi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ będzie miarą zewnętrzną. Wtedy*

$$\mathcal{B}(X) \subset \mathfrak{M}(\varphi) \Longleftrightarrow \forall_{A, B \subset X:\ \varrho(A, B) > 0} :\ \varphi(A \cup B) \geqslant \varphi(A) + \varphi(B).$$

*Dowód.* Na podstawie Twierdzenia 12.6.5(b) (zastosowanego do odwzorowania $\mathrm{id}_X : X \longrightarrow X$) mamy:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(X) \subset \mathfrak{M} &\Longleftrightarrow \mathrm{id}_X \in \mathcal{M}(X, X, \mathfrak{M}) \Longleftrightarrow \forall_{A, B \subset X:\ \varrho(A, B) > 0}\ \forall_{T \subset X} : \varphi(T) \geqslant \varphi(T \cap A) + \varphi(T \cap B) \\ &\Longleftrightarrow \forall_{A, B \subset X:\ \varrho(A, B) > 0} : \varphi(A \cup B) \geqslant \varphi(A) + \varphi(B).\end{aligned}$$

Ostatnia implikacja $\Longleftarrow$ wynika z tego, że $\varphi(T) \geqslant \varphi((T \cap A) \cup (T \cap B))$ i stosujemy warunek do zbiorów $T \cap A$ i $T \cap B$. $\square$

[Wykład 08.03.2021 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ]

## 12.7. Regularność miary

**Definicja 12.7.1.** Jeżeli $\varphi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ jest miarą zewnętrzną, to powiemy, że $\varphi$ jest *regularna*, jeżeli dla dowolnego $A \subset X$ istnieje zbiór $\widehat{A} \in \mathfrak{M}(\varphi)$ taki, że $A \subset \widehat{A}$ i $\varphi(\widehat{A}) = \varphi(A)$ (21).

---

(21) Zauważmy, że jeżeli $\varphi(A) = +\infty$, to można zawsze przyjąć $\widehat{A} := X$, a więc warunek wystarczy sprawdzić dla zbiorów $A$ takich, że $\varphi(A) < +\infty$.

Jeżeli $X$ jest przestrzenią topologiczną i $\varphi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ jest miarą zewnętrzną taką, że $\mathcal{B}(X) \subset \mathfrak{M}(\varphi)$, to powiemy, że $\varphi$ jest $\mathcal{B}$*–regularna (regularna w sensie borelowskim)*, jeżeli dla dowolnego $A \subset X$ istnieje zbiór $\widehat{A} \in \mathcal{B}(X)$ taki, że $A \subset \widehat{A}$ i $\varphi(\widehat{A}) = \varphi(A)$ (22).

Jeżeli $X$ jest przestrzenią topologiczną i $\mu \in \mathbb{M}(\mathfrak{M})$ jest taka, że $\mathcal{B}(X) \subset \mathfrak{M}$, to powiemy, że $\mu$ jest $\mathcal{B}$*–regularna* jeżeli $\varphi_\mu$ jest $\mathcal{B}$–regularna, gdzie $\varphi_\mu$ jest rozszerzeniem miary $\mu$ do miary zewnętrznej z Twierdzenia 12.6.3 (23).

**Obserwacja 12.7.2.** $\mu$ jest miarą $\mathcal{B}$–regularną wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $A \in \mathfrak{M}$ istnieje zbiór $\widehat{A} \in \mathcal{B}(X)$ taki, że $A \subset \widehat{A}$ i $\mu(\widehat{A}) = \mu(A)$. Odnotujmy, że ostatni warunek ma charakter „wewnętrzny” — nie występuje w nim rozszerzenie $\varphi_\mu$.

Istotnie, ustalmy zbiór $A \subset X$ taki, że $\varphi_\mu(A) < +\infty$. Wtedy dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ znajdziemy zbiór $B_k \in \mathcal{B}(X)$ taki, że $A \subset B_k$ i $\mu(B_k) \leqslant \varphi_\mu(A) + \frac{1}{k}$. Niech $\widehat{A} := \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$. Wtedy $A \subset \widehat{A} \in \mathcal{B}(X)$ oraz $\varphi_\mu(\widehat{A}) = \varphi_\mu(A)$.

**Definicja 12.7.3.** Dla rodziny $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ rozważmy następujące warunki:

(1) $\varnothing \in \mathcal{F}$,

(2) $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j,\ \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}$.

Oczywiście, każda $\sigma$–algebra spełnia (1), (2). Jeżeli $\mathcal{F}$ spełnia (1), (2), to $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{F} \Longrightarrow A_1 \cup \dots \cup A_N,\ A_1 \cap \dots \cap A_N \in \mathcal{F}$. Jeżeli $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ jest dowolną rodziną rodzin spełniających (1), (2), to $\bigcap_{t\in T} \mathcal{F}_t$ spełnia (1), (2). W szczególności, dla dowolnej rodziny $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ istnieje najmniejsza rodzina zawierająca $\mathcal{S}$ i spełniającą (1), (2). Oznaczymy ją roboczo $[\![\mathcal{S}]\!]$. Oczywiście, $[\![\mathcal{S}]\!] \subset \sigma(\mathcal{S})$ (24).

**Twierdzenie 12.7.4.** (a) *Jeżeli $\varnothing \in \mathcal{S}$ oraz $X \setminus A \in [\![\mathcal{S}]\!]$ dla dowolnego $A \in \mathcal{S}$, to $[\![\mathcal{S}]\!] = \sigma(\mathcal{S})$.*

(b) *Niech $X$ będzie przestrzenią topologiczną, w której każdy zbiór otwarty jest typu $\mathcal{F}_\sigma$, np. przestrzenią metryczną* (25)*. Wtedy $[\![\operatorname{cotop}(X)]\!] = \mathcal{B}(X)$.*

*Dowód.* (a) Niech $\mathcal{F} := \{A \in [\![\mathcal{S}]\!] : X \setminus A \in [\![\mathcal{S}]\!]\}$. Chcemy pokazać, że $\mathcal{F} = [\![\mathcal{S}]\!]$. Z założenia wynika, że $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}$. Wystarczy więc jeszcze zauważyć, że $\mathcal{F}$ spełnia (2).

(b) wynika z (a) $\square$

Pojęcie $\mathcal{B}$-regularności w pełni charakteryzuje następujące ważne twierdzenie.

**Twierdzenie 12.7.5.** *Niech $X$ będzie przestrzenią topologiczną, w której każdy zbiór otwarty jest typu $\mathcal{F}_\sigma$ i niech $\varphi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ będzie miarą zewnętrzną taką, że $\mathcal{B}(X) \subset \mathfrak{M}(\varphi)$. Załóżmy, że $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j$, gdzie $\Omega_j$ jest otwarty w $X$ i $\varphi(\Omega_j) < +\infty$, $j \in \mathbb{N}$* (26)*.*

*Wtedy, jeżeli $\varphi$ jest $\mathcal{B}$-regularna, to dla dowolnego zbioru $B \in \mathfrak{M}(\varphi)$ zachodzą następujące równoważne warunki:*

(R1) *Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór $C \in \operatorname{cotop} X$ taki, że $C \subset B$ i $\varphi(B \setminus C) \leqslant \varepsilon$.*
(R2) *Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór $C \in \operatorname{top} X$ taki, że $B \subset C$ i $\varphi(C \setminus B) \leqslant \varepsilon$.*
(R3) *$B = C \cup Z$, gdzie $C \in \mathcal{F}_\sigma(X)$, zaś $Z$ jest miary zero.*
(R4) *$B = C \setminus Z$, gdzie $C \in \mathcal{G}_\delta(X)$, zaś $Z$ jest miary zero.*

*Ponadto, jeżeli $B \subset X$ spełnia którykolwiek z tych warunków, to $B \in \mathfrak{M}(\varphi)$.*

*Dowód.* Dowód będzie podzielony na 9 etapów.

Krok $1^0$: (R1) $\Longrightarrow$ (R3). Istotnie, niech $C_j \in \operatorname{cotop}$ będzie taki, że $C_j \subset B$ i $\varphi(B \setminus C_j) \leqslant \frac{1}{j}$, $j \in \mathbb{N}$. Zdefiniujmy, $C := \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$, $Z := B \setminus C$. Wtedy $\varphi(Z) \leqslant \varphi(B \setminus C_j) \leqslant \frac{1}{j}$, $j \in \mathbb{N}$, a zatem $Z$ jest miary zero.

---

(22) Podobnie jak poprzednio, warunek ten wystarczy sprawdzić dla zbiorów $A$ takich, że $\varphi(A) < +\infty$.

(23) Przypomnijmy, że $\mathcal{B}(X) \subset \mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}(\varphi_\mu)$.

(24) Przypomnijmy, że $\sigma(\mathcal{S})$, to najmniejsza $\sigma$–algebra zawierająca $\mathcal{S}$.

(25) $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{x \in \Omega : \varrho(x, X \setminus \Omega) \geqslant \frac{1}{j}\}$.

(26) Zawsze możemy założyć, $\Omega_j \subset \Omega_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}$.

Krok $2^0$: (R2) $\Longrightarrow$ (R4). Istotnie, niech $C_j \in \operatorname{top} X$ będzie taki, że $B \subset C_j$ i $\varphi(C_j \setminus B) \leqslant \frac{1}{j}$, $j \in \mathbb{N}$. Zdefiniujmy, $C := \bigcap_{j=1}^{\infty} C_j$, $Z := C \setminus B$. Wtedy $\varphi(Z) \leqslant \varphi(C_j \setminus B) \leqslant \frac{1}{j}$, $j \in \mathbb{N}$, a zatem $Z$ jest miary zero.

Krok $3^0$: Jeżeli $B$ spełnia (R3) lub (R4), to $B \in \mathfrak{M}(\varphi)$. Wynika, to z tego, iż $\{Z \subset X : \varphi(Z) = 0\} \subset \mathfrak{M}(\varphi)$ (por. Krok $1^0$ w dowodzie Twierdzenia 12.6.2).

Krok $4^0$: (R1) zachodzi dla $B$ wtedy i tylko wtedy, gdy (R2) zachodzi dla $X \setminus B$. W szczególności, (R1) zachodzi dla dowolnego $B \in \mathfrak{M}(\varphi)$ (odp. dla dowolnego $B \in \mathcal{B}(X)$) wtedy i tylko wtedy, gdy (R2) zachodzi dla dowolnego $B \in \mathfrak{M}(\varphi)$ (odp. dla dowolnego $B \in \mathcal{B}(X)$).

Krok $5^0$: (R1) zachodzi dla dowolnego $B \in \mathcal{B}(X)$ takiego, że $\varphi(B) < +\infty$. Niech

$$\mathcal{F} := \{A \in \mathcal{B}(X) : \forall_{\varepsilon > 0}\ \exists_{C \subset A,\ C \in \operatorname{cotop} X} : \varphi((A \setminus C) \cap B) \leqslant \varepsilon\}.$$

Chcemy pokazać, że $B \in \mathcal{F}$. W tym celu zauważmy najpierw, że oczywiście $\operatorname{cotop} X \subset \mathcal{F}$. Jeżeli pokażemy, że $\mathcal{F}$ spełnia warunek (2) z Definicji 12.7.1, to na podstawie Twierdzenia 12.7.4(b) będziemy mieli zawieranie $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{F}$ i, w szczególności, będziemy wiedzieć, że $B \in \mathcal{F}$.

Niech $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$, $\varepsilon > 0$ i niech $(C_j)_{j=1}^{\infty} \subset \operatorname{cotop} X$ będą takie, że $C_j \subset A_j$ i $\varphi((A_j \setminus C_j) \cap B) < \varepsilon 2^{-j}$, $j \in \mathbb{N}$. Mamy

$$\varphi\Big(\big(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} C_j\big) \cap B\Big) \leqslant \varphi\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}((A_j \setminus C_j) \cap B)\Big) < \varepsilon, \text{ a więc } \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F};$$

$$\lim_{N \to +\infty} \varphi\Big(\big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \setminus \bigcup_{j=1}^{N} C_j\big) \cap B\Big) = \varphi\Big(\big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j\big) \cap B\Big) \leqslant \varphi\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}((A_j \setminus C_j) \cap B)\Big) < \varepsilon, \text{ a więc } \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}.$$

Przejście graniczne to jedyne miejsce, w którym korzystamy ze skończoności miary zbioru $B$ — por. Twierdzenie 12.5.2(k)).

Krok $6^0$: (R2) zachodzi dla dowolnego zbioru $B \in \mathcal{B}(X)$ (co, wobec Kroku $4^0$, oznacza, że (R1) zachodzi dla dowolnego zbioru $B \in \mathcal{B}(X)$).

Istotnie, na podstawie Kroku $5^0$ dla dowolnego $j$ istnieje zbiór domknięty $C_j \subset \Omega_j \setminus B$ taki, że $\varphi((\Omega_j \setminus B) \setminus C_j) \leqslant \varepsilon 2^{-j}$. Niech $C := \bigcup_{j=1}^{\infty} (\Omega_j \setminus C_j)$. Oczywiście $C$ jest otwarty, $B \subset C$ oraz $\varphi(C \setminus B) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \varphi((\Omega_j \setminus C_j) \setminus B) \leqslant \varepsilon$.

Krok $7^0$: (R1) zachodzi dla dowolnego $B \in \mathfrak{M}(\varphi)$ takiego, że $\varphi(B) < +\infty$.

Niech $\widehat{B} \in \mathcal{B}(X)$ będzie taki, że $B \subset \widehat{B}$ i $\varphi(\widehat{B}) = \varphi(B)$. Ponieważ, $B \in \mathfrak{M}$, zatem $\varphi(\widehat{B} \setminus B) = \varphi(\widehat{B}) - \varphi(B) = 0$. Niech $B' := \widehat{\widehat{B} \setminus B}$, tzn. $B' \in \mathcal{B}(X)$, $\widehat{B} \setminus B \subset B'$ i $\varphi(B') = \varphi(\widehat{B} \setminus B) = 0$. Zdefiniujmy $B_- := \widehat{B} \setminus B'$. Wtedy $B_- \subset B$ i $B_- \in \mathcal{B}(X)$. Na podstawie (c), dla dowolnego $\varepsilon > 0$, istnieje zbiór domknięty $C \subset B_-$ taki, że $\varphi(B_- \setminus C) \leqslant \varepsilon$. Wynika stąd, że $\varphi(B \setminus C) \leqslant \varphi(B \setminus B_-) + \varphi(B_- \setminus C) \leqslant \varepsilon$.

Krok $8^0$: (R2) zachodzi dla dowolnego $B \in \mathfrak{M}(\varphi)$ (co, wobec Kroku $4^0$, oznacza, że (R1) zachodzi dla dowolnego zbioru $B \in \mathfrak{M}(\varphi)$).

Wystarczy skorzystać z metody dowodu Kroku $6^0$. $\square$

[Wykład 11.03.2021 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ]

## 12.8. Konstrukcja Carathéodory'ego

**Definicja 12.8.1.** Niech $(X, \varrho)$ będzie przestrzenią metryczną, niech $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$, $\varnothing \in \mathcal{F}$ i niech $\boldsymbol{\zeta} : \mathcal{F} \longrightarrow [0, +\infty]$ będzie dowolnym odwzorowaniem takim, że $\boldsymbol{\zeta}(\varnothing) = 0$. Funkcję $\boldsymbol{\zeta}$ będziemy czasem nazywać *funkcją tworzącą*. Dla dowolnego $0 < \delta \leqslant +\infty$ niech $\varphi_\delta, \varphi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ będą zdefiniowane następująco:

$$\varphi_\delta(A) := \inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty} \boldsymbol{\zeta}(A_j) : A_j \in \mathcal{F},\ \operatorname{diam} A_j \leqslant \delta\ (j \in \mathbb{N}),\ A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big\}, \quad A \subset X, \quad \varphi := \sup_{\delta > 0} \varphi_\delta.$$

Przypomnijmy, że $\operatorname{diam} \varnothing = 0$ i $\inf \varnothing = +\infty$. Powyższa konstrukcja nosi nazwę *konstrukcji Carathéodory'ego*.

Zauważmy, że jeżeli $\delta' \leqslant \delta''$, to $\varphi_{\delta'} \geqslant \varphi_{\delta''}$. Tak więc $\varphi = \lim_{\delta \to 0+} \varphi_\delta$.

**Twierdzenie 12.8.2.** (a) *Odwzorowania $\varphi_\delta$ oraz $\varphi$ są miarami zewnętrznymi.*

(b) $\mathcal{B}(X) \subset \mathfrak{M}(\varphi)$.

(c) *Jeżeli $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}(X)$, to miara $\varphi$ jest $\mathcal{B}$-regularna.*

*Dowód*. (a) jest elementarne (Ćwiczenie).

(b) Niech $A, B \subset X$, $\varrho(A, B) = \delta_0 > 0$. Wtedy $\varphi_\delta(A \cup B) = \varphi_\delta(A) + \varphi_\delta(B)$ dla $0 < \delta < \delta_0$. Wynika stąd, że $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$ i możemy skorzystać z Twierdzenia 12.6.6.

(c) Ustalmy $A \subset X$ i $\delta > 0$. Jeżeli $\varphi_\delta(A) = +\infty$, to przyjmujemy $B^{(\delta)} := X$. Jeżeli $\varphi_\delta(A) < +\infty$, to dla $\varepsilon > 0$ niech $(A_j^{(\delta,\varepsilon)})_{j=1}^\infty$ będzie pokryciem zbioru $A$ zbiorami z $\mathcal{F}$ o średnicy $\leqslant \delta$ takim, że $\sum\limits_{j=1}^\infty \boldsymbol{\zeta}(A_j^{(\delta,\varepsilon)}) \leqslant \varphi_\delta(A) + \varepsilon$. Połóżmy $B^{(\delta)} := \bigcap\limits_{k=1}^\infty \bigcup\limits_{j=1}^\infty A_j^{(\delta,1/k)}$. Oczywiście $A \subset B^{(\delta)} \in \mathcal{B}(X)$ oraz

$$\varphi_\delta(A) \leqslant \varphi_\delta(B^{(\delta)}) \leqslant \varphi_\delta\Big(\bigcup_{j=1}^\infty A_j^{(\delta,1/k)}\Big) \leqslant \varphi_\delta(A) + \frac{1}{k},$$

co przy $k \longrightarrow +\infty$ daje $\varphi_\delta(A) = \varphi_\delta(B^{(\delta)})$. Niech $B := \bigcap\limits_{\ell=1}^\infty B^{(1/\ell)}$. Widać, że $A \subset B \in \mathcal{B}(X)$ oraz

$$\varphi(A) \leqslant \varphi(B) = \lim_{\ell\to+\infty} \varphi_{1/\ell}(B) \leqslant \lim_{\ell\to+\infty} \varphi_{1/\ell}(B^{(1/\ell)}) = \lim_{\ell\to+\infty} \varphi_{1/\ell}(A) = \varphi(A). \qquad \square$$

## 12.9. Miary Hausdorffa

Niech $\mathcal{F} := \operatorname{cotop} X$, niech $m \geqslant 0$ i niech

$$\boldsymbol{\zeta}_m(A) := \boldsymbol{\alpha}(m)\Big(\frac{\operatorname{diam} A}{2}\Big)^m, \text{ gdzie } \boldsymbol{\alpha}(m) := \frac{(\Gamma(\frac12))^m}{\Gamma(1+\frac{m}{2})}. \quad (^{27})$$

Konstrukcja Carathéodory'ego zastosowana dla funkcji tworzącej $\boldsymbol{\zeta}_m : \mathcal{F} \longrightarrow [0, +\infty]$ daje:

- miary zewnętrzne $\mathcal{H}_\delta^m := \varphi_{m,\delta}$, $\mathcal{H}^m := \varphi_m$,
- $\sigma$–algebrę $\mathcal{H}_m := \mathfrak{M}(\mathcal{H}^m)$;

takie, że

- $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{H}_m$,
- $\mathcal{H}^m$ jest $\mathcal{B}$–regularna i zupełna (tzn. $\mathcal{H}^m|_{\mathcal{H}_m}$ jest zupełna).

Miara $\mathcal{H}^m$ nosi nazwę *$m$-tej ($m$–wymiarowej) miary Hausdorffa*, a zbiory z $\mathcal{H}_m$ — zbiorami mierzalnymi w sensie $m$-tej miary Hausdorffa.

**Obserwacja 12.9.1.** (a) Ponieważ $\operatorname{diam} A = \operatorname{diam} \overline{A}$, rodzinę wszystkich zbiorów domkniętych w definicji miary Hausdorffa możemy zastąpić rodziną wszystkich zbiorów borelowskich czy też nawet rodziną wszystkich zbiorów.

(b) $\mathcal{H}^0$ jest miarą liczącą ($\mathcal{H}_0 = \mathcal{P}(X)$).

(c) Jeżeli $\mathcal{H}^m(A) < +\infty$, to $\mathcal{H}^n(A) = 0$ dla $n > m \geqslant 0$.

Istotnie, jeżeli $A \subset \bigcup\limits_{j=1}^\infty A_j$, gdzie $A_j$ jest domknięty, $\operatorname{diam} A_j \leqslant \delta$ ($j \in \mathbb{N}$), to

$$\mathcal{H}_\delta^n(A) \leqslant \sum_{j=1}^\infty \boldsymbol{\zeta}_n(A_j) \leqslant \frac{\boldsymbol{\alpha}(n)2^m}{\boldsymbol{\alpha}(m)2^n} \sum_{j=1}^\infty \boldsymbol{\zeta}_m(A_j)\delta^{n-m}, \text{ skąd } \mathcal{H}_\delta^n(A) \leqslant \frac{\boldsymbol{\alpha}(n)2^m}{\boldsymbol{\alpha}(m)2^n} \mathcal{H}_\delta^m(A)\delta^{n-m},$$

co przy $\delta \longrightarrow 0+$ daje tezę.

(d) Niech $\dim_{\mathcal{H}}(A) := \inf\{m \geqslant 0 : \mathcal{H}^m(A) < +\infty\}$. Liczba $\dim_{\mathcal{H}}(A) \in [0, +\infty]$ nosi nazwę *wymiaru Hausdorffa zbioru $A$*. Wobec (c), $\mathcal{H}^m(A) = 0$ dla $m > \dim_{\mathcal{H}}(A)$.

(e) Załóżmy dodatkowo, że $X$ jest przestrzenią wektorową i $\varrho$ jest niezmiennicza względem translacji, tzn. $\varrho(x + x_0, y + x_0) = \varrho(x, y)$ dla dowolnych $x, y, x_0 \in X$. Tak jest np. gdy $(X, \| \;\|)$ jest przestrzenią unormowaną i $\varrho(x, y) = \|x - y\|$. Podstawowym przykładem jest tu oczywiście $X = \mathbb{R}^n$ z jedną z klasycznych norm.

Wtedy miary $\mathcal{H}_\delta^m$ i $\mathcal{H}^m$ są niezmiennicze względem translacji, tzn. dla dowolnego zbioru $A \subset X$ i dla dowolnego $x_0 \in X$ mamy $\mathcal{H}_\delta^m(A + x_0) = \mathcal{H}_\delta^m(A)$, $\mathcal{H}^m(A + x_0) = \mathcal{H}^m(A)$. Ponadto, $A + x_0 \in \mathcal{H}_m \iff A \in \mathcal{H}_m$.

---

$(^{27})$ $(\operatorname{diam} \varnothing)^0 := 0$. Można pokazać, że dla $m \in \mathbb{N}$: $\boldsymbol{\alpha}(m) = |\mathbb{B}_m|$ (Ćwiczenie). Zauważmy, że $\boldsymbol{\alpha}(0) = 1$.

Istotnie, pierwsza równość wynika z tego, że $\operatorname{diam}(A+x_0)=\operatorname{diam}(A)$, a stąd $\boldsymbol{\zeta}_m(A+x_0)=\boldsymbol{\zeta}_m(A)$. Druga równość jest konsekwencją pierwszej. Dla dowodu równoważności mamy

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^m(T\cap(A+x_0))+\mathcal{H}^m(T\setminus(A+x_0))&=\mathcal{H}^m(((T-x_0)\cap A)+x_0)+\mathcal{H}^m(((T-x_0)\setminus A)+x_0)\\&=\mathcal{H}^m((T-x_0)\cap A)+\mathcal{H}^m((T-x_0)\setminus A)\leqslant\mathcal{H}^m(T-x_0)=\mathcal{H}^m(T).\end{aligned}$$

(f) Załóżmy dodatkowo, że $X$ jest przestrzenią unormowaną (np. $X=\mathbb{R}^n$). Wtedy $\mathcal{H}^m(rA)=r^m\mathcal{H}^m(A)$ oraz $rA\in\mathcal{H}_m\iff A\in\mathcal{H}_m$, $A\subset X$, $r>0$.

Istotnie, jeżeli $A\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j$, gdzie $\operatorname{diam}A_j\leqslant\delta$, $j\in\mathbb{N}$, to $rA\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}rA_j$, gdzie $\operatorname{diam}A_j\leqslant r\delta$, $j\in\mathbb{N}$. Stąd $\mathcal{H}^m_{r\delta}(rA)\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\boldsymbol{\zeta}_m(rA_j)=r^m\sum_{j=1}^{\infty}\boldsymbol{\zeta}_m(A_j)$. W takim razie $\mathcal{H}^m_{r\delta}(rA)\leqslant r^m\mathcal{H}^m_\delta(A)$, co przy $\delta\longrightarrow 0+$ daje $\mathcal{H}^m(rA)\leqslant r^m\mathcal{H}^m(A)=r^m\mathcal{H}^m(\frac{1}{r}(rA))\leqslant\mathcal{H}^m(rA)$. Ponadto,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^m(T\cap(rA))+\mathcal{H}^m(T\setminus(rA))&=\mathcal{H}^m(r(\tfrac{1}{r}T\cap A))+\mathcal{H}^m(r(\tfrac{1}{r}T\setminus A))\\&=r^m\mathcal{H}^m(\tfrac{1}{r}T\cap A)+r^m\mathcal{H}^m(\tfrac{1}{r}T\setminus A)\leqslant r^m\mathcal{H}^m(\tfrac{1}{r}T)=\mathcal{H}^m(T).\end{aligned}$$

(g) Jeżeli $X=\mathbb{R}^n$, to jako $\mathcal{F}$ można wziąć rodzinę wszystkich zbiorów zwartych i wypukłych (ponieważ $\operatorname{diam}A=\operatorname{diam}(\overline{\operatorname{conv}A})$).

**Twierdzenie 12.9.2.** *Niech $F$ będzie dowolną przestrzenią unormowaną, niech $V\subset\mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i niech $\Psi:V\longrightarrow F$ spełnia lokalnie warunek Höldera z wykładnikiem $\alpha\in(0,1]$. Wtedy:*

(a) *$\mathcal{H}^{n/\alpha}(\Psi(K))<+\infty$ dla dowolnego zbioru zwartego $K\subset V$. W szczególności, na podstawie Obserwacji 12.9.1*(c), *$\mathcal{H}^m(\Psi(V))=0$ dla dowolnego $m>n/\alpha$.*

(b) *Dla $X=\mathbb{R}^n$ miara $\mathcal{H}^n$ jest skończona na zbiorach zwartych. W konsekwencji, na podstawie Twierdzenia 12.7.5, $\mathcal{H}^n$ spełnia warunki* (R1) — (R4).

*Dowód*. (a) Wobec twierdzenie Lindelöfa, wystarczy pokazać, $\mathcal{H}^{n/\alpha}(\Psi(P))<+\infty$, gdzie $P\subset\subset V$ jest dowolną kostką zwartą o wszystkich krawędziach równych $\ell$ taką, że $\|\Psi(x')-\Psi(x'')\|\leqslant C\|x'-x''\|_\infty^\alpha$, $x',x''\in P$. Dla dowolnego $N\in\mathbb{N}$ podzielmy kostkę $P$ na $N^n$ małych kostek o krawędzi $\ell/N$. Niech $P'$ będzie taką małą kostką. Wtedy $\operatorname{diam}\Psi(P')\leqslant C(\ell/N)^\alpha=:\delta_N$. Wynika stąd, że

$$\mathcal{H}^{n/\alpha}_{\delta_N}(\Psi(P))\leqslant\boldsymbol{\alpha}(n/\alpha)N^n(\tfrac{1}{2}C(\ell/N)^\alpha)^{n/\alpha}=\boldsymbol{\alpha}(n/\alpha)(\tfrac{1}{2}C)^{n/\alpha}\ell^n=:M.$$

Gdy $N\longrightarrow+\infty$, wnioskujemy stąd, że $\mathcal{H}^{n/\alpha}(\Psi(P))\leqslant M<+\infty$.

(b) Stosujemy (a) do $F=\mathbb{R}^n$, $\Psi=\mathrm{id}$ ($\alpha=1$). □

[Wykład 15.03.2021 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ]

## 12.10. Miara Lebesgue'a

Niech $X=\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}:=\{\varnothing\}\cup\{P: P \text{ jest kostką}\}$, $\zeta(\varnothing):=0$, $\zeta(P):=|P|$. Konstrukcja Carathéodory'ego daje:

- miary zewnętrzne $\mathcal{L}^n_\delta:=\varphi_\delta$, $\mathcal{L}^n:=\varphi$,
- $\sigma$–algebrę $\mathcal{L}_n:=\mathfrak{M}(\mathcal{L}^n)$

takie, że

- $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\subset\mathcal{L}_n$,
- $\mathcal{L}^n$ jest $\mathcal{B}$–regularna i zupełna.

Miarę $\mathcal{L}^n$ nazywamy *$n$–wymiarową miarą Lebesgue'a na $\mathbb{R}^n$*, a zbiory z $\mathcal{L}_n$ — zbiorami mierzalnymi w sensie Lebesgue'a.

**Obserwacja 12.10.1.** (a) Dowolną kostkę $P\subset\mathbb{R}^n$ można, dla dowolnego $\delta>0$, rozbić na skończoną liczbę kostek o średnicy $\leqslant\delta$. To implikuje, że

$$\mathcal{L}^n_\delta(A)=\mathcal{L}^n(A)=\inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty}|P_j|:(P_j)_{j=1}^\infty\subset\mathcal{F},\ A\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}P_j\Big\},\quad A\subset\mathbb{R}^n.$$

W szczególności, jeżeli $|A|=0$, to $\mathcal{L}^n(A)=0$.

(b) $\mathcal{H}^1=\mathcal{L}^1$ (wobec Obserwacji 12.9.1(g)).

(c) $\mathcal{L}^n(P) = |P|$ dla dowolnej kostki $P \subset \mathbb{R}^n$. W szczególności, warunki (R1) — (R4) z Twierdzenia 12.7.5 zachodzą dla dowolnego $B \in \mathcal{L}_n$.

Oczywiście $\mathcal{L}^n(P) \leqslant |P|$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Niech $P \subset \bigcup_{j=1}^{N} P_j$ i $\sum_{j=1}^{N} |P_j| \leqslant \mathcal{L}^n(P)+\varepsilon$, gdzie $N \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$. Zwiększając nieco każdą kostkę $P_j$ dostajemy nową kostkę $Q_j$ taką, że $P_j \subset \operatorname{int} Q_j$ i $|Q_j| \leqslant |P_j| + \varepsilon 2^{-j}$. Oczywiście $P \subset \bigcup_{j=1}^{N} \operatorname{int} Q_j$. Ponieważ kostka $P$ jest zwarta, zatem istnieje $N_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $P \subset \bigcup_{j=1}^{N_0} \operatorname{int} Q_j$. Stąd na mocy własności całki Riemanna mamy:

$$|P| = \int_P \chi_P \leqslant \int_P \Big(\sum_{j=1}^{N_0} \chi_{Q_j}\Big) \leqslant \sum_{j=1}^{N_0} |Q_j| \leqslant \mathcal{L}^n(P) + 2\varepsilon.$$

(d) Miara $\mathcal{L}^n$ jest *niezmiennicza względem translacji*, tzn. dla $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mamy: $\mathcal{L}^n(A + x_0) = \mathcal{L}^n(A)$ dla dowolnego $A \subset \mathbb{R}^n$ oraz $A \in \mathcal{L}_n \iff (A + x_0) \in \mathcal{L}_n$ — Ćwiczenie (por. Obserwacja 12.9.1(e)).

(e) $\mathcal{L}^n(rA) = r^n\mathcal{L}^n(A)$ oraz $rA \in \mathcal{L}_n \iff A \in \mathcal{L}_n$, $A \subset X$, $r > 0$ — Ćwiczenie (por. Obserwacja 12.9.1(f)).

Odnotujmy, że w rzeczywistości prawdziwe jest następujące (trudne) twierdzenie.

**Twierdzenie* 12.10.2.** ([28]) $\mathcal{H}^n(A) = \mathcal{L}^n(A)$, $A \subset \mathbb{R}^n$.

**Obserwacja 12.10.3.** Kluczem do dowodu Twierdzenia 12.10.2 jest następująca *nierówność izodiametryczna*: $\mathcal{L}^n(A) \leqslant \boldsymbol{\zeta}_n(A)$, $A \subset \mathbb{R}^n$.

Istotnie, jeżeli ona zachodzi, to na podstawie Obserwacji 12.9.1(g), dla $A \subset \mathbb{R}^n$ i $\delta > 0$, mamy:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^n_\delta(A) &= \inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty} \boldsymbol{\zeta}_n(A_j) : \forall_{j\in\mathbb{N}} : A_j \text{ jest zwarty i wypukły, } \operatorname{diam} A_j \leqslant \delta,\ A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big\}\\ &\geqslant \inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(A_j) : \forall_{j\in\mathbb{N}} : A_j \text{ jest zwarty i wypukły, } \operatorname{diam} A_j \leqslant \delta,\ A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big\} \geqslant \mathcal{L}^n(A).\end{aligned}$$

Zauważmy, że wystarczy nierówność izodiametryczną sprawdzić jedynie dla $A$ zwartych i wypukłych takich, że $\operatorname{diam} A > 0$.

**Przykład 12.10.4** (Przykład Vitaliego ([29])). $\mathcal{L}_n \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Niech $P := [0, 1]^n$. Dla $x, y \in P$ niech $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}^n$. Oczywiście jest to relacja równoważnościowa. Na podstawie pewnika wyboru istnieje zbiór $A \subset P$ taki, że $A \cap [x]_\sim$ jest zbiorem dokładnie jednoelementowym dla dowolnego $x \in P$. Przypuśćmy, że $A$ jest mierzalny. Zauważmy, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{Q}^n$, $x \neq y$, zbiory $A + x$ i $A + y$ są rozłączne (jeżeli $a + x = b + y$ dla $a, b \in A$, to $a \sim b$, a stąd, wobec własności $A$, dostajemy $a = b$, czyli $x = y$ — sprzeczność). Niech $Q := [-1, 1]^n$, $R := [-1, 2]^n$, $B := \bigcup_{r\in\mathbb{Q}^n\cap Q} (A + r) \subset R$. Wobec niezmienniczości miary Lebesgue'a względem translacji dostajemy: $\mathcal{L}^n(B) = \sum_{r\in\mathbb{Q}^n\cap Q} \mathcal{L}^n(A + r) = \sum_{r\in\mathbb{Q}^n\cap Q} \mathcal{L}^n(A) \leqslant \mathcal{L}^n(R) < +\infty$. Zatem $\mathcal{L}^n(A) = 0$, a stąd $\mathcal{L}^n(B) = 0$. Z drugiej strony $P \subset B$ (dla dowolnego $x \in P$ niech $A \cap [x]_\sim = \{a\}$; wtedy $x - a \in \mathbb{Q}^n$ oraz $x - a \in Q$), a więc $\mathcal{L}^n(B) > 0$ — sprzeczność.

**Twierdzenie 12.10.5.** *$A \times B \in \mathcal{L}_{p+q}$ dla dowolnych $A \in \mathcal{L}_p$, $B \in \mathcal{L}_q$.*

*Dowód.* Ponieważ $A\times B = (A\times\mathbb{R}^q)\cap(\mathbb{R}^p\times B)$, wystarczy rozważyć przypadek $B = \mathbb{R}^q$. Ponieważ miara Lebesgue'a spełnia (R3) (Obserwacja 12.10.1(c)), mamy $A = F \cup Z$, gdzie $F$ jest typu $\mathcal{F}_\sigma$, zaś $Z$ jest miary zero. Oczywiście $F \times \mathbb{R}^q$ jest typu $\mathcal{F}_\sigma$. Wystarczy pokazać, że $Z \times \mathbb{R}^q$ jest miary zero. W tym celu wystarczy pokazać, że $Z \times Q$ jest miary zero, gdzie $Q$ jest dowolną kostką. Rozumujemy z definicji: dla dowolnego $\varepsilon > 0$, jeżeli $Z \subset \bigcup_{j\in J} P_j$, gdzie $\sum_{j\in J} |P_j| \leqslant \varepsilon$, to $Z\times Q \subset \bigcup_{j\in J} (P_j \times Q)$ oraz $\sum_{j\in J} |P_j \times Q| \leqslant \varepsilon|Q|$.□

([28]) Zob. np. U. Storch, H. Wiebe, *Lehrbuch der Mathematik, t. 3, Analysis mehrerer Veränderlicher, Integrationstheorie*, Spektrum Akademischer Verlag, 1993, § 12.C.

([29]) Giuseppe Vitali (1875–1932).

**Twierdzenie 12.10.6** (Por. Twierdzenie 11.1.10(b)). *Niech $V \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i niech $\Psi : V \longrightarrow \mathbb{R}^m$ spełnia lokalnie warunek Höldera z wykładnikiem $\alpha \geqslant n/m$ (np. $\Psi \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R}^m)$, $m \geqslant n$ i $\alpha = 1$). Wtedy:*

(a) *jeżeli $\alpha > n/m$, to $\mathcal{L}^m(\Psi(V)) = 0$;*
(b) *jeżeli $\alpha = n/m$ i $\mathcal{L}^n(A) = 0$ dla pewnego $A \subset V$, to $\mathcal{L}^m(\Psi(A)) = 0$;*
(c) *jeżeli $\alpha = n/m$ i $A \in \mathfrak{L}_n$ dla pewnego $A \subset V$, to $\Psi(A) \in \mathfrak{L}_m$.*

*Dowód.* (a) Wobec twierdzenia Lindelöfa, wystarczy pokazać, że każdy punkt $a \in V$ ma otoczenie $U_a$ takie, że $\mathcal{L}^m(\Psi(U_a)) = 0$. Ustalmy $a \in V$ i niech $P \subset\subset V$ będzie kostką taka, że $a \in \operatorname{int} P$ oraz $\Psi$ spełnia w $P$ warunek Höldera z wykładnikiem $\alpha$. Na podstawie Twierdzenia 11.1.10(b$_1$) wiemy, że $|\Psi(P)| = 0$, a stąd $\mathcal{L}^m(\Psi(P)) = 0$.

(b) Podobnie, jak poprzednio, wystarczy pokazać, że każdy punkt $a \in V$ ma otoczenie $U_a$ takie, że $\mathcal{L}^m(\Psi(A \cap U_a)) = 0$. Ustalmy $a \in V$ i niech $P \subset\subset V$ będzie kostką taka, że $a \in \operatorname{int} P$ oraz $\Psi$ spełnia w $P$ warunek Höldera z wykładnikiem $\alpha$: $\|\Psi(x') - \Psi(x'')\|_\infty \leqslant C\|x' - x''\|_\infty^\alpha$, $x', x'' \in P$. Ustalmy kostkę $Q \subset \operatorname{int} P$ taką, że $a \in Q$. Dla $\varepsilon > 0$, niech $(P_j)_{j \in J}$ będzie co najwyżej przeliczalną rodziną kostek taką, że $A \cap Q \subset \bigcup_{j \in J} P_j$, oraz $\sum_{j \in J} |P_j| < \varepsilon$. Możemy założyć, że $P_j \subset \operatorname{int} P$ oraz (zwiększając nieco kostkę $P_j$ i dzieląc ją na mniejsze kostki), że $P_j$ ma równe krawędzie $r_j$. Zauważmy teraz, że dla dowolnego $j \in J$, zbiór $\Psi(P_j)$ jest zawarty w pewnej kostce $Q_j$ o krawędzi $\leqslant 2Cr_j^\alpha$. Mamy więc $\Psi(A \cap Q) \subset \bigcup_{j \in J} Q_j$ oraz

$$\sum_{j \in J} |Q_j| \leqslant \sum_{j \in J} (2Cr_j^\alpha)^m = (2C)^m \sum_{j \in J} r_j^n \leqslant (2C)^m \varepsilon.$$

Stąd $\mathcal{L}^m(\Psi(A \cap Q)) = 0$.

(c) Ponieważ miara Lebesgue'a spełnia (R3) (por. Obserwacja 12.10.1(c)), zatem $A = F \cup Z$, gdzie $F \in \mathcal{F}_\sigma$, zaś $Z$ jest miary zero. Oczywiście zbiór $F$ może być przedstawiony w postaci $F = \bigcup_{j=1}^\infty K_j$, gdzie każdy zbiór $K_j$ jest zwarty. Na podstawie (b), zbiór $\Psi(Z)$ jest miary zero. Każdy ze zbiorów $\Psi(K_j)$ jest zwarty. Ostatecznie więc, $\Psi(A) = \bigcup_{j=1}^\infty \Psi(K_j) \cup \Psi(Z)$ jest mierzalny. $\square$

[Wykład 18.03.2021 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .]

## 12.11. Ogólna teoria całki

Niech $\mu : \mathfrak{M} \longrightarrow [0, +\infty]$ będzie ustaloną miarą (możemy myśleć o mierze generowanej poprzez konstrukcję Carathéodory'ego). Naszym celem będzie określenie pewnych klas funkcji $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, czy też $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$, dla których zdefiniujemy całkę $\int_X f d\mu$ względem miary $\mu$.

**Definicja 12.11.1** (Całka dla funkcji prostych). Dla funkcji $f \in \mathcal{M}_0^+(X)$, jeżeli $f = \sum_{j=1}^N a_j \chi_{A_j}$ jest jej postacią kanoniczną, to kładziemy

$$\int_X f d\mu := \sum_{j=1}^N a_j \mu(A_j) \in [0, +\infty]$$

z zachowaniem konwencji $0 \cdot (+\infty) := 0$.

**Obserwacja 12.11.2** (Własności całki dla funkcji prostych). (a) Definicja całki $\int_X f d\mu$ nie zależy od wyboru postaci funkcji $f$ w tym sensie, że jeżeli funkcja $f$, o postaci kanonicznej jak powyżej, da się również przedstawić w postaci $f = \sum_{k=1}^M b_k \chi_{B_k}$, gdzie $B_1, \dots, B_M \in \mathfrak{M}$, $B_j \cap B_k = \varnothing$ dla $j \neq k$, $X = \bigcup_{j=1}^M B_j$ i $b_1, \dots, b_M \in \mathbb{R}_+$, to

$$\sum_{k=1}^M b_k \mu(B_k) = \sum_{k=1}^M b_k \sum_{j=1}^N \mu(B_k \cap A_j) = \sum_{j=1}^N a_j \sum_{k=1}^M \mu(A_j \cap B_k) = \sum_{j=1}^N a_j \mu(A_j).$$

(b) $\int_X (\alpha f) d\mu = \alpha \int_X f d\mu$, $\alpha \geqslant 0$, $f \in \mathcal{M}_0^+(X)$.

(c) $\int_X (f+g)d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$, $f, g \in \mathcal{M}_0^+(X)$.

(d) Dla $f, g \in \mathcal{M}_0^+(X)$, jeżeli $f \leqslant g$, to $\int_X f d\mu \leqslant \int_X g d\mu$.

(e) Jeżeli $\int_X f d\mu = 0$ dla pewnej funkcji $f \in \mathcal{M}_0^+(X)$, to $\mu(\{f > 0\}) = 0$.

(f) Dla $A \in \mathfrak{M}$ mamy $\int_A (f|_A) d\mu = \int_X (\chi_A \cdot f) d\mu$, $f \in \mathcal{M}_0^+(X)$; w szczególności, jeżeli $X = A_1 \cup \dots \cup A_N$, gdzie $A_1, \dots, A_N \in \mathfrak{M}$, $A_j \cap A_k = \varnothing$ dla $j \neq k$, to $\int_X f d\mu = \int_{A_1} f d\mu + \dots + \int_{A_N} f d\mu$ dla dowolnego $f \in \mathcal{M}_0^+(X)$.

**Definicja 12.11.3.** Niech $W$ będzie pewną własnością przysługującą punktom zbioru $X$. Powiemy, że *$W$ zachodzi $\mu$–prawie wszędzie na $X$*, jeżeli istnieje zbiór miary zero $Z$ taki, że

$$\{x \in X : W(x) \text{ nie zachodzi}\} \subset Z.$$

**Definicja 12.11.4** (Całka dla funkcji mierzalnych nieujemnych)**.** Dla $f \in \mathcal{M}^+(X)$, jeżeli $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{M}_0^+(X)$, $f_n \nearrow f$ (por. Twierdzenie 12.3.3), to

$$\int_X f d\mu := \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n d\mu \in [0, +\infty].$$

**Lemat 12.11.5.** *Powyższa definicja jest poprawna, tzn. nie zależy od wyboru ciągu $(f_n)_{n=1}^\infty$ oraz pokrywa się z poprzednią definicją dla $f \in \mathcal{M}_0^+(X)$.*

*Dowód.* Niech $f = \sum_{j=1}^N a_j \chi_{A_j}$ i niech $\mathcal{M}_0^+(X) \ni f_n \nearrow f \in \mathcal{M}_0^+(X)$. Dla $0 < t < 1$ położmy

$$A_{n,j}(t) := \{x \in A_j : f_n(x) \geqslant t a_j\}, \quad j = 1, \dots, N, \ n \in \mathbb{N}.$$

Zauważmy, że $A_{n,j}(t) \nearrow A_j$, gdy $n \nearrow +\infty$. Mamy

$$\sum_{j=1}^N t a_j \mu(A_{n,j}(t)) \leqslant \int_X f_n d\mu \leqslant \int_X f d\mu.$$

Stąd, przechodząc z $n$ do $+\infty$, dostajemy:

$$t \int_X f d\mu \leqslant \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n d\mu \leqslant \int_X f d\mu.$$

Teraz przechodzimy z $t$ to 1 i dostajemy $\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.

Przechodzimy do dowodu niezależności definicji od wyboru ciągu. Niech

$$\mathcal{M}_0^+(X) \ni f_n \nearrow f \in \mathcal{M}^+(X), \quad \mathcal{M}_0^+(X) \ni g_n \nearrow f.$$

Ustalmy $k \in \mathbb{N}$ i zdefiniujmy $h_n := \min\{f_n, g_k\}$. Oczywiście, $h_n \in \mathcal{M}_0^+(X)$ oraz $h_n \nearrow g_k$. Na podstawie pierwszej części dowodu wnioskujemy, że $\int_X h_n d\mu \nearrow \int_X g_k d\mu$, a stąd

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n d\mu \geqslant \lim_{n \to +\infty} \int_X h_n d\mu = \int_X g_k d\mu.$$

Wobec dowolności $k$, dostajemy $\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n d\mu \geqslant \lim_{k \to +\infty} \int_X g_k d\mu$. Zmieniając rolami ciągi $(f_n)_{n=1}^\infty$, $(g_n)_{n=1}^\infty$ dostajemy poszukiwaną równość. □

**Obserwacja 12.11.6** (Własności całki dla funkcji mierzalnych nieujemnych)**.**

(a) $\int_X (\alpha f) d\mu = \alpha \int_X f d\mu$, $\alpha \geqslant 0$, $f \in \mathcal{M}^+(X)$.

(b) $\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$, $f, g \in \mathcal{M}^+(X)$.

(c) Dla $f, g \in \mathcal{M}^+(X)$, jeżeli $f \leqslant g$, to $\int_X f d\mu \leqslant \int_X g d\mu$.

(d) Dla $A \in \mathfrak{M}$ mamy $\int_A (f|_A) d\mu = \int_X (\chi_A \cdot f) d\mu$, $f \in \mathcal{M}^+(X)$; w szczególności, jeżeli $X = A_1 \cup \dots \cup A_N$, gdzie $A_1, \dots, A_N \in \mathfrak{M}$, $A_j \cap A_k = \varnothing$ dla $j \neq k$, to $\int_X f d\mu = \int_{A_1} f d\mu + \dots + \int_{A_N} f d\mu$ dla dowolnego $f \in \mathcal{M}^+(X)$.

(e) Jeżeli $\int_X f d\mu = 0$ dla pewnej funkcji $f \in \mathcal{M}^+(X)$, to $\mu(\{f > 0\}) = 0$.

(f) Jeżeli $\int_X f d\mu < +\infty$ dla pewnej funkcji $f \in \mathcal{M}^+(X)$, to $\mu(\{f = +\infty\}) = 0$.

**Twierdzenie 12.11.7** (Twierdzenie o monotonicznym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki)**.** *Jeżeli $\mathcal{M}^+(X) \ni f_n \nearrow f$ (30), to $\int_X f_n d\mu \nearrow \int_X f d\mu$.*

(30) Oczywiście, $f \in \mathcal{M}^+(X)$.

*Dowód*. Oczywiście $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_X f_n d\mu \leqslant \int_X f d\mu$. Niech $\mathcal{M}_0^+(X) \ni f_{n,k} \nearrow f_n$, gdy $k \nearrow +\infty$, $n \in \mathbb{N}$. Zdefiniujmy $g_n := \max\{f_{1,n}, f_{2,n}, \dots, f_{n,n}\}$. Oczywiście $g_n \in \mathcal{M}_0^+(X)$. Widać również, że $g_n \leqslant f_n$, $n \in \mathbb{N}$. łatwo pokazać, że $g_n \nearrow f$ (Ćwiczenie). W takim razie, $\int_X f d\mu = \lim\limits_{n\to+\infty}\int_X g_n d\mu \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty}\int_X f_n d\mu$. $\square$

**Wniosek 12.11.8.** *Dla dowolnego ciągu* $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{M}^+(X)$ *mamy* $\int_X \Big(\sum\limits_{n=1}^\infty f_n\Big) d\mu = \sum\limits_{n=1}^\infty \int_X f_n d\mu$.

**Wniosek 12.11.9.** *Dla dowolnego* $f \in \mathcal{M}^+(X)$ *funkcja* $\nu(A) := \int_A f d\mu$, $A \in \mathfrak{M}$, *jest miarą nieujemną na* $\mathfrak{M}$. *Ponadto,* $\int_X g d\nu = \int_X fg d\mu$, $g \in \mathcal{M}^+(X)$. (*)

*Dowód*. Niech $(A_j)_{j=1}^\infty \subset \mathfrak{M}$, $A_j \cap A_k = \varnothing$ dla $j \neq k$. Mamy:

$$\nu\Big(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\Big) = \int_X \chi_{\bigcup\limits_{j=1}^\infty A_j} \cdot f d\mu = \int_X \Big(\sum_{j=1}^\infty \chi_{A_j} \cdot f\Big) d\mu \overset{\text{Wniosek 12.11.8}}{=} \sum_{j=1}^\infty \int_X \chi_{A_j} \cdot f d\mu = \sum_{j=1}^\infty \nu(A_j).$$

Wzór (*) zachodzi oczywiście, gdy $g = \chi_A$ dla $A \in \mathfrak{M}$. Zachodzi więc dla nieujemnych funkcji prostych, a stąd, na podstawie twierdzenia o monotonicznym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki, dla dowolnych funkcji z $\mathcal{M}^+(X)$. $\square$

**Wniosek 12.11.10.** *Jeżeli* $\mathcal{M}^+(X) \ni f_n \searrow f$ (31) *i* $\int_X f_1 d\mu < +\infty$, *to* $\int_X f_n d\mu \searrow \int_X f d\mu$ (32).

*Dowód*. Niech $Z := \{f_1 = +\infty\}$. Wiemy, że $\mu(Z) = 0$. Na zbiorze $X \setminus Z$ rozważmy ciąg $f_1 - f_n$, $n \in \mathbb{N}$. Stosując do niego twierdzenie o monotonicznym przechodzeniu do granicy pod znakiem mamy: $\int_{X\setminus Z}(f_1 - f_n) d\mu \nearrow \int_{X\setminus Z}(f_1 - f) d\mu$. Stąd: $\int_X f_n d\mu = \int_{X\setminus Z} f_n d\mu \searrow \int_{X\setminus Z} f d\mu = \int_X f d\mu$. $\square$

[Wykład 22.03.2021 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ]

**Wniosek 12.11.11** (Lemat Fatou (33))**.** *Dla dowolnego ciągu* $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{M}^+(X)$ *mamy:*

$$\int_X (\liminf_{n\to+\infty} f_n) d\mu \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Odnotujmy, że nawet jeżeli granica $f := \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ istnieje, to bez dodatkowych założeń mamy: $\int_X f d\mu < \liminf\limits_{n\to+\infty}\int_X f_n d\mu$, np. $X := \mathbb{N}$, $\mu$ — miara licząca, $f_n := \chi_{\{n\}}$, $n \in \mathbb{N}$.

*Dowód*. Mamy $f := \liminf\limits_{n\to+\infty} f_n = \sup\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$, gdzie $g_n := \inf\{f_k : k \geqslant n\}$. Zauważmy, że $g_n \leqslant g_{n+1}$ oraz $g_n \leqslant f_n$. Stąd $\int_X f d\mu = \lim\limits_{n\to+\infty}\int_X g_n d\mu \leqslant \liminf\limits_{n\to+\infty}\int_X f_n d\mu$. $\square$

**Definicja 12.11.12** (Całka)**.** Niech

$$L^1(X) = L^1(X,\mu) := \Big\{f \in \mathcal{M}(X) : \int_X |f| d\mu < +\infty\Big\},$$
$$L^1(X,\mathbb{C}) = L^1(X,\mathbb{C},\mu) := \Big\{f \in \mathcal{M}(X,\mathbb{C}) : \int_X |f| d\mu < +\infty\Big\}.$$

Jeżeli $f \in L^1(X)$, to $\int_X f_+ d\mu < +\infty$ i $\int_X f_- d\mu < +\infty$, a zatem możemy zdefiniować *całkę*

$$\int_X f d\mu := \int_X f_+ d\mu - \int_X f_- d\mu.$$

Z powyższego wzoru wynika, że pojęcie całki możemy rozszerzyć na takie funkcje, dla których $\int_X f_+ d\mu < +\infty$ lub $\int_X f_- d\mu < +\infty$ (chodzi o wykonalność działań).

$L^1(X,\mathbb{C})$ jest zespoloną przestrzenią wektorową. Jeżeli $f = u + iv \in L^1(X,\mathbb{C})$, to $u, v \in L^1(X)$, a zatem możemy określić *całkę* $\int_X f d\mu := \int_X u d\mu + i\int_X v d\mu$. Oczywiście dla $f, g \in \mathcal{M}(X)$ (odp. $f, g \in$

(31) Oczywiście $f \in \mathcal{M}^+(X)$.

(32) Można oczywiście założyć, że $\int_X f_N d\mu < +\infty$ dla pewnego $N$. Bez żadnych dodatkowych założeń twierdzenie nie jest prawdziwe — Ćwiczenie.

(33) Pierre Fatou (1878–1929).

$\mathcal{M}(X,\mathbb{C})$) takich, że $f = g$ $\mu$–prawie wszędzie na $X$ mamy: $f \in L^1(X) \iff g \in L^1(X)$ (odp. $f \in L^1(X,\mathbb{C}) \iff g \in L^1(X,\mathbb{C})$). Ponadto $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$.

Od tej chwili, mówiąc o funkcji klasy $L^1$, będziemy mieć na myśli całą klasę równoważności względem powyższej relacji $\sim$ równości $\mu$–prawie wszędzie na $X$. Innymi słowy, zamiast przestrzeni $L^1(X)$ (odp. $L^1(X,\mathbb{C})$) rozważamy $L^1(X)/\!\sim$ (odp. $L^1(X,\mathbb{C})/\!\sim$). Nie będziemy wprowadzać specjalnych oznaczeń na te przestrzenie ilorazowe i oznaczymy je ponownie przez $L^1(X)$ (odp. $L^1(X,\mathbb{C})$). Utożsamienie to pozwala również zaliczać do przestrzeni $L^1(X)$ (odp. $L^1(X,\mathbb{C})$) (i w konsekwencji — całkować) funkcje określone prawie wszędzie. Postępujemy następująco: jeżeli $f \in \mathcal{M}(X \setminus Z)$ (odp. $f \in \mathcal{M}(X \setminus Z,\mathbb{C})$), gdzie $Z$ jest zbiorem miary zero w $X$, to rozszerzamy $f$ do funkcji mierzalnej $f_0$ na $X$ kładąc $f_0 := 0$ na $Z$ i definiujemy $f \in L^1(X) \iff f_0 \in L^1(X)$ (odp. $f \in L^1(X,\mathbb{C}) \iff f_0 \in L^1(X,\mathbb{C})$). Ponadto kładziemy $\int_X f d\mu := \int_X f_0 d\mu$.

Powyższe umowy będą w dalszym ciągu stosowane automatycznie bez specjalnych komentarzy.

**Obserwacja 12.11.13** (Własności całki)**.** (a) Jeżeli $f \in L^1(X)$, to $\{f = -\infty\} \cup \{f = +\infty\}$ jest zbiorem miary zero. Wynika stąd bardzo ważny wniosek, że w gruncie rzeczy zamiast $L^1(X)$ wystarczy rozważać $L^1(X,\mathbb{R})$, a więc pewną podprzestrzeń $L^1(X,\mathbb{C})$. W tym sensie np. $L^1(X)$ jest rzeczywistą przestrzenią wektorową.

(b) Całka $L^1(X,\mathbb{K}) \ni f \longmapsto \int_X f d\mu \in \mathbb{K}$ jest operatorem $\mathbb{K}$–liniowym.

Istotnie, wystarczy rozważyć jedynie przypadek rzeczywisty. Dla dowodu jednorodności wystarczy zaobserwować, że $(-f)_+ = f_-$ i $(-f)_- = f_+$. Dla dowodu addytywności, niech $f, g \in L^1(X)$, $h := f+g$. Wtedy $h_+ - h_- = f_+ - f_- + g_+ - g_-$. Stąd $h_+ + f_- + g_- = h_- + f_+ + g_+$, a zatem $\int_X h_+ d\mu + \int_X f_- d\mu + \int_X g_- d\mu = \int_X h_- d\mu + \int_X f_+ d\mu + \int_X g_+ d\mu$, co daje żądany wynik.

(c) Dla $f, g \in L^1(X)$, jeżeli $f \leqslant g$, to $\int_X f d\mu \leqslant \int_X g d\mu$.

(d) $|\int_X f d\mu| \leqslant \int_X |f| d\mu$, $f \in L^1(X,\mathbb{C})$. Ponadto, równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\alpha \in \mathbb{S}_1$ takie, że $|f| = \alpha f$ $\mu$–prawie wszędzie.

Istotnie, niech $|\int_X f d\mu| = e^{i\theta_0} \int_X f d\mu$. Wtedy korzystając z liniowości całki mamy:

$$\Big|\int_X f d\mu\Big| = \operatorname{Re}\Big(\int_X (e^{i\theta_0} f) d\mu\Big) = \int_X \operatorname{Re}(e^{i\theta_0} f) d\mu \leqslant \int_X |f| d\mu.$$

Jeżeli $|\int_X f d\mu| = \int_X |f| d\mu$, to na podstawie powyższych równości, $\int_X (|f| - \operatorname{Re}(e^{i\theta_0} f)) d\mu = 0$, a stąd $|f| = \operatorname{Re}(e^{i\theta_0} f)$ $\mu$–prawie wszędzie. W konsekwencji $\operatorname{Im}(e^{i\theta_0} f) = 0$ $\mu$–prawie wszędzie i ostatecznie $|f| = e^{i\theta_0} f$ $\mu$–prawie wszędzie.

**Twierdzenie 12.11.14** (Ciągłość całki względem zbioru)**.** *Jeżeli $f \in L^1(X,\mathbb{C})$, to dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że jeżeli $A \in \mathfrak{M}$ i $\mu(A) \leqslant \delta$, to $|\int_A f d\mu| \leqslant \varepsilon$.*

*Dowód*. Wobec Obserwacji 12.11.13(d) wystarczy rozważyć przypadek, gdy $f \in \mathcal{M}^+(X)$, $\int_X f d\mu < +\infty$. Niech $g \in \mathcal{M}_0^+(X)$ będzie taka, że $g \leqslant f$ i $\int_X (f-g) d\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Przyjmijmy $C := \max_X g$. Wtedy $\int_A f d\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \int_A g d\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + C\mu(A)$. $\square$

**Wniosek 12.11.15.** *Jeżeli $f \in L^1((a,b),\mathcal{L}^1)$, gdzie $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, to funkcja*

$$(a,b) \ni x \xmapsto{f} \int_{(a,x]} f d\mathcal{L}^1$$

*jest* absolutnie ciągła*, tzn. dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla dowolnych punktów $a < a_1 < b_1 \leqslant a_2 < \dots < b_{N-1} \leqslant a_N < b_N < b$, jeżeli $\sum_{j=1}^{N} (b_j - a_j) < \delta$, to $\sum_{j=1}^{N} |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon$. W szczególności, funkcja ta jest jednostajnie ciągła.*

**Twierdzenie 12.11.16** (Twierdzenie Lebesgue'a o zmajoryzowanym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki)**.** *Jeżeli $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset L^1(X,\mathbb{C})$, $f_n \longrightarrow f$ oraz $|f_n| \leqslant g$, $n \in \mathbb{N}$, gdzie $g \in L^1(X)$, to $\int_X f_n d\mu \longrightarrow \int_X f d\mu$.*

*Dowód*. Oczywiście wystarczy rozważyć tylko przypadek rzeczywisty. Mamy $|f_n - f| \leqslant 2g$, $n \in \mathbb{N}$. Stąd, na podstawie Lematu Fatou, dostajemy

$$\int_X (2g) d\mu \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \int_X (2g - |f_n - f|) d\mu = \int_X (2g) d\mu - \limsup_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f| d\mu,$$

skąd bezpośrednio wynika teza. $\square$

**Wniosek 12.11.17.** *Jeżeli* $(f_n)_{n=1}^\infty \subset L^1(X,\mathbb{C})$ *oraz* $\sum_{n=1}^\infty |f_n| \in L^1(X)$*, to szereg* $\sum_{n=1}^\infty f_n$ *jest zbieżny* $\mu$*–prawie wszędzie oraz* $\int_X \Big(\sum_{n=1}^\infty f_n\Big)d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_X f_n d\mu$*. W szczególności, jeżeli* $\sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) < +\infty$*, to zbiór* $\{x \in X : x$ należy do nieskończenie wielu $A_n\}$ *jest miary zero.*

*Dowód.* Ponieważ $\sum_{n=1}^\infty |f_n| \in L^1(X)$, zatem na podstawie Obserwacji 12.11.13(a), $\sum_{n=1}^\infty |f_n| < +\infty$ $\mu$–prawie wszędzie, co daje zbieżność szeregu. Wzór wynika z twierdzenia Lebesgue'a. □

**Wniosek 12.11.18.** *Dla* $f \in L^1(X,\mathbb{C})$ *funkcja* $\mathfrak{M} \ni A \overset{\nu}{\longmapsto} \int_A f d\mu \in \mathbb{C}$ *jest miarą zespoloną.*

*Dowód.* Przeliczalna addytywność wynika z Wniosku 12.11.17. Niech mianowicie $(A_j)_{j=1}^\infty \subset \mathfrak{M}$, $A_j \cap A_k = \varnothing$ dla $j \neq k$. Mamy:

$$\nu(\bigcup_{j=1}^\infty A_j) = \int_X \chi_{\bigcup\limits_{j=1}^\infty A_j} \cdot f d\mu = \int_X \Big(\sum_{j=1}^\infty \chi_{A_j} \cdot f\Big) d\mu = \sum_{j=1}^\infty \int_X \chi_{A_j} \cdot f d\mu = \sum_{j=1}^\infty \nu(A_j)$$

ponieważ $\int_X \sum_{j=1}^\infty |\chi_{A_j} \cdot f| d\mu \leqslant \int_X |f| d\mu$. □

**Twierdzenie 12.11.19.** *Niech* $f \in L^1(X,\mathbb{C})$ *i* $\int_A f d\mu = 0$ *dla dowolnego* $A \in \mathfrak{M}$*. Wtedy* $f = 0$ $\mu$*–prawie wszędzie.*

*Dowód.* Wystarczy rozważyć przypadek $f \in L^1(X)$. Wiemy, że twierdzenie zachodzi dla $f \in \mathcal{M}^+(X)$ (Obserwacja 12.11.6(e)). Wystarczy więc pokazać, że $\int_X f_+ d\mu = \int_X f_- d\mu = 0$. Istotnie, np. niech $A := \{f \geqslant 0\}$. Wtedy $0 = \int_A f d\mu = \int_A f_+ d\mu = \int_X f_+ d\mu$. □

**Twierdzenie 12.11.20** (Średnia całkowa)**.** *Załóżmy, że* $\mu(X) < +\infty$*. Niech* $C \subset \mathbb{C}$ *będzie dowolnym zbiorem domkniętym. Przypuśćmy, że dla* $f \in L^1(X,\mathbb{C})$*, przy dowolnym* $A \in \mathfrak{M}$ *takim, że* $\mu(A) > 0$ *mamy* $S_A(f) := \frac{1}{\mu(A)} \int_A f d\mu \in C$*. Wtedy* $f(x) \in C$ *dla* $\mu$*–prawie wszystkich* $x \in X$*.*

*Dowód.* Ustalmy ciąg kół domkniętych $(\overline{K}(a_j, r_j))_{j=1}^\infty$ taki, że $\mathbb{C} \setminus C = \bigcup_{j=1}^\infty \overline{K}(a_j, r_j)$ (Ćwiczenie). Wystarczy pokazać, że $f^{-1}(\overline{K}(a_j, r_j))$ jest zbiorem miary zero dla dowolnego $j$. Ustalmy $j$ i niech $a := a_j$, $r := r_j$, $A := f^{-1}(\overline{K}(a, r))$. Przypuśćmy, że $\mu(A) > 0$. Wtedy:

$$|S_A(f) - a| = \frac{1}{\mu(A)} \Big| \int_A (f - a) d\mu \Big| \leqslant \frac{1}{\mu(A)} \int_A |f - a| d\mu \leqslant r,$$

co oznacza, że $S_A(f) \in \overline{K}(a, r) \subset \mathbb{C} \setminus C$ — sprzeczność. □

**Twierdzenie 12.11.21** (Nierówność Jensena [34])**.** *Załóżmy, że* $\mu(X) = 1$ *i niech* $f \in L^1(X,\mathbb{R})$*. Niech* $P \subset \mathbb{R}$ *będzie przedziałem takim, że* $f(x) \in P$ *dla* $\mu$*-p.w.* $x \in X$*. Wtedy dla dowolnej funkcji wypukłej* $g : P \longrightarrow \mathbb{R}$ *mamy:* $g\Big(\int_X f d\mu\Big) \leqslant \int_X (g \circ f) d\mu$*.*

*Dowód.* Przypomnijmy (Twierdzenie 5.9.11), że $g \in \mathcal{C}^\uparrow(P)$. Zauważmy, że $\int_X f d\mu \in P$ oraz, że $g \circ f \in \mathcal{M}(X)$ (Obserwacja 12.2.2(i)). Niech $t_0 := \int_X f d\mu$. Przypomnijmy (Definicja 5.9.1), że

$$\frac{g(t) - g(s)}{t - s} \leqslant \frac{g(u) - g(t)}{u - t}, \quad s, t, u \in P,\ s < t < u$$

W szczególności, $\frac{g(u) - g(t_0)}{u - t_0} \geqslant C$, $\quad t_0 < u$, gdzie $C := \sup\Big\{\frac{g(t_0) - g(s)}{t_0 - s} : s < t_0\Big\}$.

Tak więc, $g(u) \geqslant g(t_0) + C(u - t_0)$ dla dowolnego $u \in P$. W szczególności, $g \circ f \geqslant g(t_0) + C(f - t_0)$ $\mu$–prawie wszędzie. Całkując stronami dostajemy (por. Obserwacja 12.11.13(c))

$$\int_X (g \circ f) d\mu \geqslant g(t_0) + C\Big(\int_X f d\mu - t_0\Big). \qquad \square$$

---

(34) Johan Jensen (1859–1925).

**Uwaga 12.11.22.** (a) Jeszcze raz przypomnijmy, że w teorii całki nie jest istotne to, co się dzieje na zbiorach miary zero. W związku z tym, poprzednie wyniki można przeformułować tak, aby odpowiednie założenia i warunki były spełnione $\mu$–prawie wszędzie. Tezy pozostaną bez zmian. To, czy użyjemy sformułowania „prawie wszędzie", czy nie jest w gruncie rzeczy kwestią naszego wyboru: zawsze można przecież zmniejszyć $X$ o stosowny zbiór miary zero i mieć już sformułowanie „wszędzie". Uwaga ta dotyczy oczywiście założeń, a nie tezy (np. we Wniosku 12.11.17).

(b) Pojęcie całki (oraz większość twierdzeń) można rozszerzyć na funkcje $f : X \longrightarrow E$, gdzie $E$ jest ośrodkową przestrzenią Banacha.

[Wykład 25.03.2021 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ]

## 12.12. Przestrzenie $L^p$

Niech $\mu : \mathfrak{M} \longrightarrow [0, +\infty]$ będzie ustaloną miarą i niech $Y \in \{\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{C}\}$.

**Definicja 12.12.1.** Dla $0 < p < +\infty$ zdefiniujmy

$$L^p(X, \mu) := \Big\{ f \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M}) : \int_X |f|^p d\mu < +\infty \Big\},$$
$$L^p(X, Y, \mu) := \Big\{ f \in \mathcal{M}(X, \mathbb{C}, \mathfrak{M}) : \int_X |f|^p d\mu < +\infty \Big\}.$$

Obowiązują skróty $L^p(X, \mu)$, $L^p(X)$ oraz zasada utożsamiania funkcji równych $\mu$–prawie wszędzie. Niech

$$\|f\|_{L^p} := \Big( \int_X |f|^p d\mu \Big)^{1/p}.$$

Dla $f \in \mathcal{M}(X)$ niech $\operatorname{ess\,sup}_X f := \inf\{C \in \mathbb{R} : f \leqslant C\ \mu\text{–prawie wszędzie}\}$. Zauważmy, że $f \leqslant \operatorname{ess\,sup}_X f$ $\mu$–prawie wszędzie, tzn. zbiór $\{f > \operatorname{ess\,sup}_X f\}$ jest miary zero. Istotnie, niech $C := \operatorname{ess\,sup}_X f$ i niech $f \leqslant C + \frac{1}{j}$ na $X \setminus Z_j$, gdzie $Z_j$ jest miary zero, $j \in \mathbb{N}$. Wtedy $f \leqslant C$ na $X \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} Z_j$.

Niech $L^\infty(X) = L^\infty(X, \mu) := \{f \in \mathcal{M}(X) : |f| \text{ jest ograniczona } \mu\text{–prawie wszędzie}\}$. W ten sam sposób definiujemy $L^\infty(X, \mathbb{C}) = L^\infty(X, \mathbb{C}, \mu)$. Połóżmy $\|f\|_{L^\infty} := \operatorname{ess\,sup}_X |f|$.

$L^p(X, \mathbb{C})$ jest zespoloną przestrzenią wektorową, $0 < p \leqslant +\infty$. Istotnie, przypadek $p = +\infty$ jest oczywisty. W przypadku $0 < p < +\infty$, wystarczy skorzystać z nierówności $(a + b)^p \leqslant 2^p(a^p + b^p)$, $a, b \geqslant 0$.

Podobnie jak w przypadku $L^1$, zamiast przestrzeni $L^p(X)$ możemy rozważać przestrzeń $L^p(X, \mathbb{R})$ jako podprzestrzeń $L^p(X, \mathbb{C})$. Aby uniknąć przypadków trywialnych, dalej zakładamy, że zakładamy $\mu(X) > 0$.

Powiemy, że liczby $1 \leqslant p, q \leqslant +\infty$ są sprzężone, jeżeli $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (35).

**Twierdzenie 12.12.2** (Nierówność Höldera)**.** *Jeżeli $p, q \geqslant 1$ są sprzężone, to dla dowolnych funkcji $f \in L^p(X, \mathbb{C})$, $g \in L^q(X, \mathbb{C})$, funkcja $fg$ jest klasy $L^1(X, \mathbb{C})$ oraz zachodzi* nierówność Höldera*:*

$$\|fg\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

*Ponadto, dla $1 < p, q < +\infty$, równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $\alpha, \beta \geqslant 0$ takie, że $\alpha + \beta > 0$ oraz $\alpha|f|^p = \beta|g|^q$ $\mu$–prawie wszędzie na $X$.* (†)

*Dowód.* Nierówność jest oczywista dla $p = 1, q = +\infty$ i $p = +\infty, q = 1$. Dla $1 < p, q < +\infty$ rozumujemy następująco. Po pierwsze możemy założyć, że $f \neq 0$ i $g \neq 0$. Po drugie, zastępując $f$ przez $f/\|f\|_{L^p}$ i $g$ przez $g/\|g\|_{L^q}$, możemy założyć, że $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^q} = 1$. Mamy pokazać, że $\int_A |fg| d\mu \leqslant 1$, gdzie $A := \{fg \neq 0\}$. Funkcja $t \longmapsto \exp(t)$ jest wypukła. W szczególności, $e^{\frac{t}{p} + \frac{u}{q}} \leqslant \frac{1}{p} e^t + \frac{1}{q} e^u$, $t, u \in \mathbb{R}$, przy czym równość zachodzi jedynie, gdy $t = u$. Dla dowolnego $x \in A$ dobieramy $t, u \in \mathbb{R}$ takie, że $|f(x)| = \exp(t/p)$, $|g(x)| = \exp(u/q)$. Stąd $|f(x)g(x)| \leqslant \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q$, $x \in A$. Całkując stronami dostajemy żądaną nierówność.

Załóżmy, że $1 < p, q < +\infty$. Jeżeli spełniony jest warunek (†) i np. $\beta > 0$, to $|g| = c|f|^{p/q}$ $\mu$–prawie wszędzie na $X$, gdzie $c \geqslant 0$, a stąd $\|g\|_{L^q} = c(\int_X |f|^p)^{1/q}$ i $\|fg\|_{L^1} = c \int_X |f|^p d\mu$.

---

(35) W szczególności, 1 i $+\infty$ są sprzężone.

Załóżmy, że w nierówności Höldera zachodzi równość. Możemy pominąć przypadek, gdy $f = 0$ lub $g = 0$. Wtedy, dla postaci zredukowanej, musimy mieć $|fg| = \frac{1}{p}|f|^p + \frac{1}{q}|g|^q$ $\mu$–prawie wszędzie na $A$, co oznacza, że $|f|^p = |g|^q$ $\mu$–prawie wszędzie na $A$. Wracając do postaci niezredukowanej, dostajemy (†) $\mu$-prawie wszędzie na $A$. Pozostaje pokazać, że warunek ten zachodzi $\mu$-prawie wszędzie na $X$. Wystarczy pokazać, że zbiory $\{f \neq 0\} \setminus A$ i $\{g \neq 0\} \setminus A$ są miary zero. Wynika to z ciągu nierówności $\|f\|_{L^p(X)}\|g\|_{L^q(X)} = \int_X |fg|d\mu = \int_A |fg|d\mu = \|f\|_{L^p(A)}\|g\|_{L^q(A)} \leqslant \|f\|_{L^p(\{f\neq 0\})}\|g\|_{L^q(\{g\neq 0\})}$. $\square$

**Twierdzenie 12.12.3** (Nierówność Minkowskiego)**.** *Dla dowolnego $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ i dla dowolnych $f, g \in L^p(X, \mathbb{C})$ zachodzi* nierówność Minkowskiego

$$\|f + g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

*Ponadto, dla $1 < p < +\infty$ równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby $\alpha, \beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$, takie, że $|f| = \alpha|f + g|$, $|g| = \beta|f + g|$ $\mu$–prawie wszędzie.* (‡)

*W szczególności, $(L^p(X, \mathbb{K}), \| \ \|_{L^p})$ jest przestrzenią unormowaną nad $\mathbb{K}$ dla dowolnego $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Przestrzeń $L^2(X, \mathbb{C})$ wraz z iloczynem skalarnym $(f, g) \longmapsto \langle f, g\rangle_{L^2} := \int_X f\overline{g}d\mu$ jest przestrzenią unitarną, a nierówność Höldera to po prostu nierówność Schwarza.*

**Obserwacja 12.12.4.** Zauważmy, że warunki (‡) są równoważne istnieniu liczby $t \geqslant 0$ takiej, że $f = tg$ $\mu$–prawie wszędzie lub $g = tf$ $\mu$–prawie wszędzie.

Istotnie, jeżeli np. $f = tg$, to $|f| = (t/(t + 1))|f + g|$ i $|g| = (1/(t + 1))|f + g|$ (równości $\mu$–prawie wszędzie).

Odwrotnie, jeżeli (‡) zachodzi, to rozumujemy następująco: Przypadek $\alpha = 0$ (odp. $\beta = 0$) sprowadza się do równości $f = 0g$ (odp. $g = 0f$). Możemy więc założyć, że $\alpha, \beta > 0$. Niech $t := \alpha/\beta$. Zauważmy, że $|f| = t|g|$. W szczególności, $A := \{f = 0\} = \{g = 0\}$ (z dokładnością do zbioru miary zero). Pozostaje sprawdzić, że $\operatorname{Arg} f = \operatorname{Arg} g$ poza $A$. Ponieważ $\alpha + \beta = 1$, dostajemy równość $|f| + |g| = |f + g|$, czyli $|f|^2 + 2|f||g| + |g|^2 = |f|^2 + 2\operatorname{Re} f\overline{g} + |g|^2$. Stąd $|f||g| = \operatorname{Re} f\overline{g}$, co daje równość argumentów poza $A$.

*Dowód Twierdzenia 12.12.3.* Nierówność jest oczywista dla $p = 1$ i $p = +\infty$. Dla $1 < p < +\infty$ rozumujemy następująco. Wiemy, że $L^p$ jest przestrzenią wektorową, a więc $f + g \in L^p$. Możemy oczywiście założyć, że $\|f + g\|_{L^p} > 0$. Niech $q$ będzie sprzężone z $p$. Mamy $\int_X |f + g|^p d\mu \leqslant \int_X (|f| + |g|)^p d\mu$ oraz

$$\begin{aligned}\int_X (|f| + |g|)^p d\mu &= \int_X |f|(|f| + |g|)^{p-1}d\mu + \int_X |g|(|f| + |g|)^{p-1}d\mu \\ &\overset{\text{Hölder}}{\leqslant} \|f\|_{L^p}\Big(\int_X (|f| + |g|)^{(p-1)q}d\mu\Big)^{1/q} + \|g\|_{L^p}\Big(\int_X (|f| + |g|)^{(p-1)q}d\mu\Big)^{1/q}.\end{aligned}$$

Ponieważ $(p - 1)q = p$, więc dzieląc powyższą nierówność przez $\int_X (|f| + |g|)^p d\mu)^{1/q}$ dostajemy żądaną nierówność Minkowskiego.

Jeżeli dla $1 < p < +\infty$ w nierówności Minkowskiego zachodzi równość i pominiemy przypadek trywialny, gdy $f = 0$ lub $g = 0$, to na podstawie powyższych nierówności mamy $|f + g| = |f| + |g|$ $\mu$–prawie wszędzie oraz (korzystając z Twierdzenia 12.12.2) $|f|^p = c(|f|+|g|)^{(p-1)q}$, $|g|^p = d(|f|+|g|)^{(p-1)q}$ $\mu$–prawie wszędzie, gdzie $c, d > 0$. Wynika stąd, że $\alpha(|f|+|g|) = |f|$ i $\beta(|f|+|g|) = |g|$ $\mu$–prawie wszędzie, gdzie $\alpha, \beta > 0$. Pozostaje zauważyć, że $\alpha + \beta = 1$.

Jeżeli spełniony jest warunek (‡), to $|f|^p = \alpha^p(|f+g|)^p$, $|g|^p = \beta^p(|f+g|)^p$ $\mu$–prawie wszędzie, a więc mamy równość. $\square$

**Twierdzenie 12.12.5.** *Jeżeli $\mu(X) < +\infty$, to dla dowolnych $1 \leqslant r < s \leqslant +\infty$ mamy: $L^s(X, \mathbb{C}) \subset L^r(X, \mathbb{C})$ ([36]). Ponadto, operator* id $: L^s(X, \mathbb{C}) \longrightarrow L^r(X, \mathbb{C})$ *jest ciągły.*

*Dowód*. Dla $s = +\infty$ mamy $\|f\|_{L^r} \leqslant (\mu(X))^{1/r}\|f\|_{L^\infty}$, $f \in L^\infty(X, \mathbb{C})$.

Gdy $s < +\infty$, stosujemy nierówność Höldera z $p := \frac{s}{s-r}$ i $q := \frac{s}{r}$:

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^r} &= \Big(\int_X |f|^r d\mu\Big)^{1/r} = \Big(\int_X 1 \cdot |f|^r d\mu\Big)^{1/r} \\ &\leqslant \Big(\Big(\int_X 1d\mu\Big)^{1/p}\Big(\int_X |f|^{rq}d\mu\Big)^{1/q}\Big)^{1/r} = (\mu(X))^{1/r-1/s}\|f\|_{L^s}, \quad f \in L^s(X, \mathbb{C}). \quad \square\end{aligned}$$

([36]) Ćwiczenie: Czy własność ta zachodzi w przypadku, gdy $\mu(X) = +\infty$ ?

**Twierdzenie 12.12.6.** *$L^p(X,\mathbb{C})$ jest przestrzenią Banacha dla dowolnego $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. W szczególności, $L^2(X,\mathbb{C})$ jest przestrzenią Hilberta.*

*Dowód*. Niech $(f_k)_{k=1}^\infty \subset L^p(X,\mathbb{C})$ będzie dowolnym ciągiem Cauchy'ego.

• Przypadek $1 \leqslant p < +\infty$. Wystarczy pokazać, że pewien jego podciąg jest zbieżny. Niech $(f_{n_k})_{k=1}^\infty$ będzie podciągiem takim, że $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p} \leqslant 2^{-k}$, $k \geqslant 1$. Zdefiniujmy

$$g_N := \sum_{k=1}^N |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|, \quad g := \lim_{N\to+\infty} g_N = \sum_{k=1}^\infty |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|.$$

Zauważmy, że $g_N \in \mathcal{M}^+(X) \cap L^p(X)$, $\|g_N\|_{L^p} < 1$, $n \in \mathbb{N}$, $g_N^p \nearrow g^p \in \mathcal{M}^+(X)$. W takim razie $\int_X g^p d\mu \leqslant 1$. W szczególności, $g < +\infty$ $\mu$–prawie wszędzie. Oznacza to, że szereg $\sum_{k=1}^\infty (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$ jest zbieżny bezwzględnie na $X \setminus Z$, gdzie $Z$ jest miary zero. Połóżmy $f := f_{n_1} + \sum_{k=1}^\infty (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$ na $X \setminus Z$ oraz $f = 0$ na $Z$. Wtedy $f_{n_k} \longrightarrow f$ $\mu$–prawie wszędzie na $X$. Ponieważ $f - f_{n_\ell} = \sum_{k=\ell}^\infty (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$ $\mu$–prawie wszędzie oraz $\sum_{k=\ell}^\infty \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p} \leqslant \sum_{k=\ell}^\infty 2^{-k}$, zatem $f \in L^p(X,\mathbb{C})$ oraz $\|f_{n_\ell} - f\|_{L^p} \longrightarrow 0$.

• Przypadek $p = +\infty$ jest znacznie prostszy — postępujemy następująco. Niech

$$Z := \bigcup_{k=1}^\infty \{|f_k| > \|f_k\|_{L^\infty}\} \cup \bigcup_{k,\ell=1}^\infty \{|f_k - f_\ell| > \|f_k - f_\ell\|_{L^\infty}\}.$$

Wtedy $Z$ jest zbiorem miary zero oraz $(f_k|_{X\setminus Z})_{k=1}^\infty$ jest ciągiem Cauchy'ego w $\mathcal{B}(X \setminus Z,\mathbb{C})$. W takim razie $f_k \longrightarrow f$ jednostajnie na $X \setminus Z$, gdzie $f \in \mathcal{M}(X \setminus Z,\mathbb{C}) \cap \mathcal{B}(X \setminus Z,\mathbb{C})$. Zdefiniujmy $f := 0$ na $Z$. Wtedy $f \in L^\infty(X,\mathbb{C})$ oraz $\|f_k - f\|_{L^\infty} \longrightarrow 0$. □

**Twierdzenie* 12.12.7.** *Niech $0 < p < 1$.*

(a) *Funkcja*

$$\varrho_p(f,g) := \|f-g\|_{L^p}^p = \int_X |f-g|^p d\mu, \quad f,g \in L^p(X,\mathbb{C}),$$

*jest metryką translatywną na $L^p(X,\mathbb{C})$.*

(b) *Działania w przestrzeni $L^p(X,\mathbb{C})$ są ciągłe w topologii zadanej przez metrykę $\varrho_p$.*

(c) *Przestrzeń $(L^p(X,\mathbb{C}),\varrho_p)$ jest zupełna.*

## 12.13. Całka Riemanna a całka Lebesgue'a

**Twierdzenie 12.13.1** (Porównanie całki Riemanna z całką Lebesgue'a)**.** *Załóżmy, że $A\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ i niech $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją ograniczoną. Wtedy:*

(a) *$A \in \mathfrak{L}_n$.*

(b) *$f \in \mathcal{R}(A) \Longrightarrow f \in L^1(A)$ (37). Ponadto $\int_A f = \int_A f d\mathfrak{L}^n$.*

(c) *$f \in \mathcal{R}(A) \Longleftrightarrow \mathfrak{L}^n(N_A(f)) = 0$, gdzie $N_A(f) := \{a \in A : f$ nie jest ciągła w $a\}$.*

*Dowód*. Ponieważ $A = (\operatorname{int} A) \cup Z$, gdzie $|Z| = 0$, a zbiory o objętości zero mają miarę zero, zatem $A \in \mathfrak{L}_n$.

Dla pozostałej części dowodu możemy założyć, $A = P$ jest kostką (38). Ponadto możemy założyć, że $f \geqslant 0$.

Ustalmy normalny ciąg podziałów prostych $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ taki, że $\pi_{k+1} \preccurlyeq \pi_k$, $k \geqslant 1$. Niech $\pi_k = \{P_{k,1},\dots,P_{k,m_k}\}$. Ustalmy w dowolny sposób przynależność ścian, tak by z kostek $P_{k,1},\dots,P_{k,m_k}$ otrzymać „kostki" rozłączne $Q_{k,1},\dots,Q_{k,m_k}$ dające w sumie $P$. Dla każdego $k$ otrzymaliśmy rozbicie $P$ na zbiory $\mathfrak{L}_n$–mierzalne. Niech

$$L_k := \sum_{j=1}^{m_k} m(f,P_{k,j})\chi_{Q_{k,j}}, \quad U_k := \sum_{j=1}^{m_k} M(f,P_{k,j})\chi_{Q_{k,j}}.$$

(37) Tu i dalej, $L^p(A) := L^p(A,\mathfrak{L}^n)$.

(38) Przy własności (c) trzeba zauważyć, że gdy $A \subset P$, to $N_A(f) \subset N_P(f_0) \subset N_A(f) \cup \partial A$.

Oczywiście, $L_k, U_k \in \mathcal{M}_0^+(P, \mathcal{L}_n)$. Niech $Z := \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{m_k} \partial P_{k,j}$. Zbiór $Z$ jest miary zero i jak łatwo widać $L_k \leqslant f \leqslant U_k$ na $P \setminus Z$. Ponadto, $L_k \leqslant L_{k+1}$ i $U_k \geqslant U_{k+1}$ na $P \setminus Z$, $k \geqslant 1$. Zdefiniujmy $L := \lim_{k\to+\infty} L_k$ na $P \setminus Z$ i $L := 0$ na $Z$. Analogicznie, niech $U := \lim_{k\to+\infty} U_k$ na $P \setminus Z$ i $U := 0$ na $Z$. Wtedy $L, U \in \mathcal{M}^+(P, \mathcal{L}_n)$ i $L \leqslant f \leqslant U$ na $P \setminus Z$. Na podstawie twierdzeń o monotonicznym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki oraz Obserwacji 11.1.5(f) mamy:

$$L(\pi_k, f) = \int_P L_k d\mathcal{L}^n \nearrow \int_P L d\mathcal{L}^n, \quad L(\pi_k, f) \nearrow \int_{*P} f,$$
$$U(\pi_k, f) = \int_P U_k d\mathcal{L}^n \searrow \int_P U d\mathcal{L}^n, \quad U(\pi_k, f) \searrow \int_P^* f.$$

Tak więc $\int_P^* f - \int_{*P} f = \int_P (U - L) d\mathcal{L}^n$. Wynika stąd, że $f \in \mathcal{R}(P) \iff L = U$ $\mathcal{L}^n$–prawie wszędzie. Ponadto, jeżeli $L = U$ $\mathcal{L}^n$–prawie wszędzie, to wobec zupełności miary $\mathcal{L}^n$, mamy $f \in \mathcal{M}^+(P, \mathcal{L}_n)$ oraz

$$\int_P f d\mathcal{L}^n = \int_P L d\mathcal{L}^n = \int_P U d\mathcal{L}^n,$$

a więc $f \in L^1(P)$ oraz $\int_P f d\mathcal{L}^n = \int_P f$. Pozostaje zauważyć, że

$$L = U \quad \mathcal{L}^n\text{–prawie wszędzie}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{L}^n(N_P(f)) = 0$

Istotnie, niech $x_0 \in P \setminus (Z \cup N_P(f))$ i niech $\varepsilon > 0$. Wobec ciągłości funkcji $f$ w punkcie $x_0$, istnieje kostka $Q \subset P$ o środku w punkcie $x_0$ taka, że $|f(x') - f(x'')| \leqslant \varepsilon$ dla dowolnych $x', x'' \in Q$. Ponieważ $\operatorname{diam} \pi_k \longrightarrow 0$, zatem dla dostatecznie dużych $k$ mamy następującą sytuację: jeżeli $x_0 \in P_{k,j(k)}$, to $P_{k,j(k)} \subset Q$ (zauważmy, że $j(k)$ jest jednoznacznie wyznaczone). W takim razie $U_k(x_0) - L_k(x_0) \leqslant \varepsilon$, $k \gg 1$.

W drugą stronę: Niech $L = U$ na $P \setminus Z_0$, gdzie $Z \subset Z_0$ i $Z_0$ jest miary zero. Weźmy $x_0 \in P \setminus Z_0$ i $\varepsilon > 0$. Wtedy $U_k(x_0) - L_k(x_0) \leqslant \varepsilon$ dla $k \geqslant k_0$. Przypuśćmy, że $x_0 \in \operatorname{int} P_{k_0,j_0} =: W$. Wtedy dla $x \in W$ mamy $L_{k_0}(x_0) = L_{k_0}(x) \leqslant f(x) \leqslant U_{k_0}(x) = U_{k_0}(x_0)$, a stąd $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$. □

[Wykład 29.03.2021 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ]

## 12.14. Zasada Cavalieriego. Twierdzenia Tonellego i Fubiniego

**Twierdzenie 12.14.1** (Zasada Cavalieriego [39]). *Niech $A \in \mathcal{L}_{p+q}$ $(p, q \in \mathbb{N})$. Wtedy:*

(a) *istnieje zbiór $Z(A) \subset \mathbb{R}^p$ miary zero taki, że przekrój*

$$A(t) := \{u \in \mathbb{R}^q : (t, u) \in A\}$$

*należy do $\mathcal{L}_q$ dla $t \in \mathbb{R}^p \setminus Z(A)$;*

(b) *odwzorowanie $\mathbb{R}^p \ni t \overset{\Phi_A}{\longmapsto} \mathcal{L}^q(A(t)) \in [0, +\infty]$ jest $\mathcal{L}_p$–mierzalne* [40]*;*

(c) *$\mathcal{L}^{p+q}(A) = \int_{\mathbb{R}^p} \Phi_A d\mathcal{L}^p = \int_{\mathbb{R}^p} \mathcal{L}^q(A(t)) d\mathcal{L}^p(t)$;*

(d) *jeżeli $\operatorname{pr}_{\mathbb{R}^p}(A) \in \mathcal{L}_p$, to $\mathcal{L}^{p+q}(A) = \int_{\operatorname{pr}_{\mathbb{R}^p}(A)} \mathcal{L}^q(A(t)) d\mathcal{L}^p(t)$.*

*W szczególności, jeżeli $B \in \mathcal{L}_p$, $C \in \mathcal{L}_q$, to $\mathcal{L}^{p+q}(B \times C) = \mathcal{L}^p(B) \cdot \mathcal{L}^q(C)$ (por. Twierdzenie 12.10.5).*

Oczywiście (d) wynika z (c).

Zauważmy, że zbiór $\operatorname{pr}_{\mathbb{R}^p}(A)$ może nie być mierzalny (np. $A := B \times C$, gdzie $B$ nie jest mierzalny, a $C$ jest miary zero).

*Dowód*. Niech $\mathcal{F}$ oznacza rodzinę wszystkich $A \in \mathcal{L}_{p+q}$, dla których (a), (b) i (c) zachodzą. Zauważmy od razu, że $\varnothing \in \mathcal{F}$. Udowodnimy kolejno, że:

$1^0$: Dla dowolnych kostek $P \subset \mathbb{R}^p$, $Q \subset \mathbb{R}^q$ oraz dla dowolnych zbiorów $\operatorname{int} P \subset B \subset P$, $\operatorname{int} Q \subset C \subset Q$ mamy $A := B \times C \in \mathcal{F}$. Ponadto $Z(B \times C) = \varnothing$.

$2^0$: Jeżeli $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ i $A_j \cap A_k = \varnothing$ dla $j \neq k$, to $A := \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}$. Ponadto, $Z(A) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Z(A_j)$.

---

[39] Bonaventura Cavalieri (1598–1647).

[40] Uwaga: W tym wzorze $\mathcal{L}^q$ oznacza zewnętrzną miarę Lebesgue'a — oczywiście jest to istotne jedynie na zbiorze $Z(A)$.

$3^0$: Jeżeli $(A_j)_{j=1}^\infty \subset \mathcal{F}$ i $A_j \subset A_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}$, to $A := \bigcup\limits_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{F}$. Ponadto, $Z(A) \subset \bigcup\limits_{j=1}^\infty Z(A_j)$.

$4^0$: $\operatorname{top}\mathbb{R}^{p+q} \subset \mathcal{F}$ oraz $Z(\Omega) = \varnothing$ dla dowolnego zbioru otwartego $\Omega$.

$5^0$: Wszystkie zbiory typu $\mathcal{F}_\sigma$ należą do $\mathcal{F}$ oraz $Z(A) = \varnothing$ dla dowolnego zbioru typu $\mathcal{F}_\sigma$.

$6^0$: Jeżeli $(A_j)_{j=1}^\infty \subset \mathcal{F}$ i $A_j \supset A_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}$, oraz $A_1$ jest ograniczony, to $A := \bigcap\limits_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{F}$. Ponadto, $Z(A) \subset \bigcup\limits_{j=1}^\infty Z(A_j)$.

$7^0$: Wszystkie zbiory miary zero należą do $\mathcal{F}$.

Przypomnijmy (Twierdzenie 12.7.5), że każdy zbiór mierzalny $A \in \mathcal{L}_{p+q}$ jest postaci $C \cup Z$, gdzie $C$ jest typu $\mathcal{F}_\sigma$, zaś $Z$ jest miary zero i $C \cap Z = \varnothing$ ([41]). Tak więc $2^0 + 5^0 + 7^0 \Longrightarrow \mathcal{F} = \mathcal{L}_{p+q}$, co zakończy dowód. Przechodzimy do dowodów poszczególnych punktów $1^0$ — $7^0$.

$1^0$: Oczywiście $A(t) = C$ dla $t \in B$ i $A(t) = \varnothing$ dla $t \notin B$, a więc (a) zachodzi ($Z(A) = \varnothing$). Ponadto, $\Phi_A(t) = \mathcal{L}^q(A(t)) = \mathcal{L}^q(C) = |Q|$ dla $t \in B$ i $\Phi_A(t) = 0$ dla $t \notin B$. W szczególności, odwzorowanie $\Phi_A$ jest mierzalne i $\mathcal{L}^{p+q}(A) = |P \times Q| = |P| \cdot |Q| = \mathcal{L}^p(B) \cdot \mathcal{L}^q(C) = \int_{\mathbb{R}^p} \Phi_A d\mathcal{L}^p$.

$2^0$: Zauważmy, że $A(t) = \bigcup\limits_{j=1}^\infty A_j(t)$, $t \in \mathbb{R}^p$. Wynika stąd, że (a) zachodzi przy $Z(A) := \bigcup\limits_{j=1}^\infty Z(A_j)$. Ponadto, wobec rozłączności zbiorów $A_j$, $j \in \mathbb{N}$, mamy $\Phi_A = \sum\limits_{j=1}^\infty \Phi_{A_j}$ na $\mathbb{R}^p \setminus Z(A)$. Wynika stąd (b) oraz, że

$$\int_{\mathbb{R}^p} \Phi_A d\mathcal{L}^p = \sum_{j=1}^\infty \int_{\mathbb{R}^p} \Phi_{A_j} d\mathcal{L}^p = \sum_{j=1}^\infty \mathcal{L}^{p+q}(A_j) = \mathcal{L}^{p+q}(A)$$

(na podstawie twierdzenia o monotonicznym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki).

$3^0$: Mamy $A_j(t) \nearrow A(t)$, $t \in \mathbb{R}^p$, a więc (a) zachodzi przy $Z(A) := \bigcup\limits_{j=1}^\infty Z(A_j)$. Ponadto, $\Phi_{A_j} \nearrow \Phi_A$ na $\mathbb{R}^p \setminus Z(A)$. Wynika stąd, że (b) zachodzi oraz, że

$$\int_{\mathbb{R}^p} \Phi_A d\mathcal{L}^p = \lim_{j \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^p} \Phi_{A_j} d\mathcal{L}^p = \lim_{j \to +\infty} \mathcal{L}^{p+q}(A_j) = \mathcal{L}^{p+q}(A)$$

(na podstawie Twierdzenia 12.11.7).

$4^0$: Każdy zbiór otwarty jest sumą co najwyżej przeliczalnej rodziny parami rozłącznych „kostek" takich jak w $1^0$ (por. Obserwacja 12.1.5) i możemy skorzystać z $2^0$.

$5^0$: Wobec $3^0$ wystarczy sprawdzić, że każdy zbiór domknięty należy do $\mathcal{F}$. Ponownie korzystając z $3^0$, widzimy, że można się ograniczyć do zbiorów domkniętych i ograniczonych. Niech $A$ będzie takim zbiorem, niech $Q$ będzie otwartą kostką ograniczoną taką, że $A \subset Q$ i niech $\Omega := Q \setminus A$. Mamy $A(t) = Q(t) \setminus \Omega(t)$, $t \in \mathbb{R}^p$, a więc, na podstawie $1^0$ i $4^0$, warunek (a) zachodzi ($Z(A) := \varnothing$). Ponadto, $\Phi_A = \Phi_Q - \Phi_\Omega$ na $\mathbb{R}^p$, więc (b) również jest spełnione. Na koniec $\int_{\mathbb{R}^p} \Phi_A d\mathcal{L}^p = \int_{\mathbb{R}^p} \Phi_Q d\mathcal{L}^p - \int_{\mathbb{R}^p} \Phi_\Omega d\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^{p+q}(Q) - \mathcal{L}^{p+q}(\Omega) = \mathcal{L}^{p+q}(A)$.

$6^0$: Mamy $A_j(t) \searrow A(t)$, $t \in \mathbb{R}^p$, a więc (a) zachodzi przy $Z(A) := \bigcup\limits_{j=1}^\infty Z(A_j)$. Ponadto, $\Phi_{A_j} \searrow \Phi_A$ na $\mathbb{R}^p \setminus Z(A)$. Wynika stąd, że (b) zachodzi oraz, że

$$\int_{\mathbb{R}^p} \Phi_A d\mathcal{L}^p = \lim_{j \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^p} \Phi_{A_j} d\mathcal{L}^p = \lim_{j \to +\infty} \mathcal{L}^{p+q}(A_j) = \mathcal{L}^{p+q}(A).$$

---

([41]) Formalnie, z Twierdzenia 12.7.5 wnioskujemy, że dowolny zbiór $A \in \mathcal{L}_{p+q}$ jest postaci $C \cup Z'$, gdzie $C$ jest typu $\mathcal{F}_\sigma$, zaś $Z'$ jest miary zero. Kładziemy teraz $Z := Z' \setminus C$.

$7^0$: Wobec $3^0$ wystarczy rozważyć ograniczone zbiory miary zero. Niech $A$ będzie takim zbiorem. Trzeba pokazać, że $\Phi_A = 0$ $\mathcal{L}^p$–prawie wszędzie. Ustalmy kostkę $P \subset \mathbb{R}^{p+q}$ taką, że $A \subset P$. Na podstawie definicji miary Lebesgue'a, dla dowolnego $j \in \mathbb{N}$ istnieje zbiór $A_j \subset P$ typu $\mathcal{F}_\sigma$ taki, że $A \subset A_j$, $\mathcal{L}^{p+q}(A_j) \leqslant \frac{1}{j}$ (42) oraz $A_{j+1} \subset A_j$ (43), $j \in \mathbb{N}$. Niech $A_0 := \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$. Oczywiście $A \subset A_0$ oraz $A_0$ jest miary zero. Na podstawie $6^0$ wnioskujemy, że $A_0 \in \mathcal{F}$ $(Z(A_0) = \varnothing)$. W takim razie $0 = \mathcal{L}^{p+q}(A_0) = \int_{\mathbb{R}^p} \Phi_{A_0} d\mathcal{L}^p$. Wynika stąd, że $\Phi_{A_0} = 0$ $\mathcal{L}^p$–prawie wszędzie. Ponieważ $\Phi_A \leqslant \Phi_{A_0}$, wnioskujemy stąd, że $\Phi_A = 0$ $\mathcal{L}^p$–prawie wszędzie. □

**Twierdzenie 12.14.2** (Twierdzenie Tonellego (44))**.** *Niech $A \in \mathcal{L}_{p+q}$. Wtedy dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{M}^+(A, \mathcal{L}_{p+q})$ mamy:*

(a) *dla $\mathcal{L}^p$–prawie wszystkich $t \in \mathbb{R}^p$ odwzorowanie*

$$A(t) \ni u \longmapsto f(t,u)$$

*jest $\mathcal{L}_q$–mierzalne* (45)*;*

(b) *odwzorowanie $\mathbb{R}^p \ni t \longmapsto \int_{A(t)} f(t,u) d\mathcal{L}^q(u)$ jest $\mathcal{L}_p$–mierzalne* (46)*,*

(c) $\int_A f d\mathcal{L}^{p+q} = \int_{\mathbb{R}^p} \big( \int_{A(t)} f(t,u) d\mathcal{L}^q(u) \big) d\mathcal{L}^p(t)$.

(d) *Jeżeli $B := \operatorname{pr}_{\mathbb{R}^p}(A) \in \mathcal{L}_p$, to*

$$\int_A f d\mathcal{L}^{p+q} = \int_B \Big( \int_{A(t)} f(t,u) d\mathcal{L}^q(u) \Big) d\mathcal{L}^p(t).$$

*Dowód.* Jeżeli $f$ jest funkcją charakterystyczną zbioru mierzalnego, twierdzenie sprowadza się do Zasady Cavalieriego. Stąd łatwo widać, że twierdzenie jest prawdziwe dla $f \in \mathcal{M}_0^+(A, \mathcal{L}_{p+q})$. Teraz wystarczy już tylko zastosować twierdzenie o monotonicznym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki. Istotnie, jeżeli $\mathcal{M}_0^+(A, \mathcal{L}_{p+q}) \ni f_n \nearrow f$ i odwzorowanie

$$A(t) \ni u \longmapsto f_n(t,u)$$

jest mierzalne dla $t \in \mathbb{R}^p \setminus Z_n$, gdzie $Z_n$ jest miary zero, $n \in \mathbb{N}$, to

$$A(t) \ni u \longmapsto f(t,u)$$

jest mierzalne dla $t \in \mathbb{R}^p \setminus Z$, gdzie $Z := \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$. Ponadto, jeżeli

$$\mathbb{R}^p \ni t \longmapsto \int_{A(t)} f_n(t,u) d\mathcal{L}^q(u)$$

jest mierzalne dla $n \in \mathbb{N}$, to (na podstawie twierdzenia o monotonicznym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki) odwzorowanie

$$\mathbb{R}^p \ni t \longmapsto \int_{A(t)} f(t,u) d\mathcal{L}^q(u)$$

jest mierzalne. Wzór otrzymujemy stosując obustronnie twierdzenie o monotonicznym przechodzeniu do granicy. □

**Twierdzenie 12.14.3** (Twierdzenie Fubiniego (47))**.** *Niech $A \in \mathcal{L}_{p+q}$. Wtedy dla dowolnej funkcji $f \in L^1(A, \mathbb{C}, \mathcal{L}^{p+q})$ mamy:*

(a) *dla $\mathcal{L}^p$–prawie wszystkich $t \in \mathbb{R}^p$ odwzorowanie*

$$A(t) \ni u \longmapsto f(t,u)$$

*jest klasy $L^1(A(t), \mathbb{C}, \mathcal{L}^q)$;*

---

(42) $A_j = P \cap$ stosowna suma kostek z definicji.
(43) Wystarczy zastąpić $A_{j+1}$ przez $A_{j+1} \cap A_j$.
(44) Leonida Tonelli (1885–1946).
(45) Oczywiście każde odwzorowanie określone na zbiorze pustym jest mierzalne.
(46) Odwzorowanie to jest określone $\mathcal{L}^p$–prawie wszędzie i oczywiście $\int_\varnothing \cdots = 0$.
(47) Guido Fubini (1879–1943).

(b) *odwzorowanie*

$$\mathbb{R}^p \ni t \longmapsto \int_{A(t)} f(t,u)d\mathcal{L}^q(u)$$

*jest klasy* $L^1(\mathbb{R}^p, \mathbb{C}, \mathcal{L}^p)$,

(c) $\int_A f d\mathcal{L}^{p+q} = \int_{\mathbb{R}^p} \big(\int_{A(t)} f(t,u)d\mathcal{L}^q(u)\big)d\mathcal{L}^p(t)$.

(d) *Jeżeli* $B := \operatorname{pr}_{\mathbb{R}^p}(A) \in \mathcal{L}_p$, *to*

$$\int_A f d\mathcal{L}^{p+q} = \int_B \Big(\int_{A(t)} f(t,u)d\mathcal{L}^q(u)\Big)d\mathcal{L}^p(t).$$

*Dowód*. Wystarczy rozważyć przypadek, gdy $f \in L^1(X, \mathbb{R})$. Najpierw stosujemy Twierdzenie Tonellego do $|f|$ i dostajemy (a) i (b). Następnie stosujemy Twierdzenie Tonellego oddzielnie do $f_+$ i $f_-$ i dostajemy wzory

$$\int_A f_\pm d\mathcal{L}^{p+q} = \int_{\mathbb{R}^p} \Big(\int_{A(t)} f_\pm(t,u)d\mathcal{L}^q(u)\Big)d\mathcal{L}^p(t).$$

Odejmujemy je stronami i wobec rozkładu $f = f_+ - f_-$ dostajemy (c). $\square$

**Uwaga 12.14.4.** W poznanych powyżej twierdzeniach Cavalieriego, Tonellego i Fubiniego wyróżniona jest projekcja $\operatorname{pr}_{\mathbb{R}^p} : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Oczywiście, nic nie stoi na przeszkodzie, aby zastąpić ją projekcją na $\mathbb{R}^q$, czy też ogólnie — projekcją na pewne $p$ osi spośród $(p+q)$ osi w $\mathbb{R}^{p+q}$. Szczegóły pozostawiamy jako Ćwiczenie.

**Twierdzenie 12.14.5.** *Niech* $B \in \mathcal{L}_n$, $\alpha, \beta \in \mathcal{M}(B, \mathcal{L}_n)$, $\alpha(t) \leqslant \beta(t)$, $t \in B$. *Zdefiniujmy* $A := \{(t,u) \in B \times \mathbb{R} : \alpha(t) \leqslant u \leqslant \beta(t)\}$. *Wtedy* $A \in \mathcal{L}_{n+1}$ *oraz dla* $f \in \mathcal{M}^+(A, \mathcal{L}_{n+1})$ *lub* $f \in L^1(A, \mathcal{L}^{n+1})$ *mamy:*

$$\int_A f d\mathcal{L}^{n+1} = \int_B \Big(\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(t,u)d\mathcal{L}^1(u)\Big)d\mathcal{L}^n(t). \quad (48)$$

*W szczególności,*

$$\mathcal{L}^{n+1}(A) = \int_B (\beta - \alpha)d\mathcal{L}^n. \quad (49)$$

*Dowód*. Mierzalność zbioru $A$ wynika z mierzalności funkcji

$$B \times \mathbb{R} \ni (t,u) \longmapsto \alpha(t), \quad B \times \mathbb{R} \ni (t,u) \longmapsto \beta(t), \quad B \times \mathbb{R} \ni (t,u) \longmapsto u.$$

Wzór wynika z Twierdzenia Fubiniego bowiem dla $f \in L^1(A, \mathcal{L}^{n+1})$ mamy:

$$\int_A f d\mathcal{L}^{n+1} = \int_B \Big(\int_{A(t)} f(t,u)d\mathcal{L}^1(u)\Big)d\mathcal{L}^n(t) = \int_B \Big(\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(t,u)d\mathcal{L}^1(u)\Big)d\mathcal{L}^n(t). \quad \square$$

[Wykład 08.04.2021 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ]

## 12.15. Twierdzenie o zmianie zmiennych w całce Lebesgue'a

Rozważmy następującą sytuację. Niech $U, V \in \operatorname{top}\mathbb{R}^n$ będą zbiorami otwartymi i niech $\Phi : U \longrightarrow V$ będzie odwzorowaniem bijektywnym spełniającym lokalnie warunek Lipschitza i takim, że $\Phi'(x)$ istnieje dla p.w. $x \in U$. Odnotujmy, że w rzeczywistości to ostatnie założenie jest zawsze spełnione, bowiem prawdziwe jest następujące ważne twierdzenie.

**Twierdzenie* 12.15.1** (Twierdzenie Rademachera (50) (51) )**.** *Niech* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *będzie zbiorem otwartym i niech* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *będzie odwzorowaniem spełniającym lokalnie warunek Lipschitza. Wtedy* $f$ *jest* $\mathcal{L}^n$*–prawie wszędzie różniczkowalne (w sensie Frécheta).*

**Obserwacja 12.15.2.** (a) Dla dowolnego zbioru $A \in \mathcal{L}_n|_U$, mamy $\Phi(A) \in \mathcal{L}_n$ (Twierdzenie 12.10.6(c)).

(48) $\int_\alpha^\beta := \int_{[\alpha,\beta]}$.

(49) Porównaj z Twierdzeniem 11.2.6.

(50) Zob. H. Federer, *Geometric measure theory*, Springer Verlag, Berlin, 1969, Theorem 3.1.6.

(51) Hans Rademacher (1892–1969).

(b) Jeżeli $\mathcal{L}^n(A) = 0$, to $\mathcal{L}^n(\Phi(A)) = 0$ (Twierdzenie 12.10.6(b)).

(c) Określone $\mathcal{L}^n$–prawie wszędzie odwzorowanie $U \ni x \longmapsto |\Phi'|(x)$ jest $\mathfrak{L}_n$–mierzalne (Obserwacja 12.2.2(t, u)).

**Definicja 12.15.3.** Mówimy, że dla odwzorowania $\Phi$ zachodzi *twierdzenie o zmianie zmiennych w całce Lebesgue'a* jeżeli:

(1) $\mathcal{L}^n(\Phi(A)) = \int_A |\Phi'| d\mathcal{L}^n$, $A \in \mathfrak{L}_n|_U$,

(2) dla dowolnego zbioru $A \in \mathfrak{L}_n|_U$ i dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{M}^+(\Phi(A), \mathfrak{L}_n)$ (odp. $f \in L^1(\Phi(A), \mathcal{L}^n)$) funkcja $(f \circ \Phi)|\Phi'|$ jest mierzalna na $A$ (odp. jest klasy $L^1(A, \mathcal{L}^n)$) oraz zachodzi wzór

$$\int_{\Phi(A)} f d\mathcal{L}^n = \int_A (f \circ \Phi)|\Phi'| d\mathcal{L}^n.$$

**Lemat 12.15.4.** (1) $\Longrightarrow$ (2).

*Dowód*. Standardowe rozumowanie redukuje dowód (2) do przypadku $f = \chi_B$, gdzie $B \in \mathfrak{L}_n|_\Phi(A)$.

Wiemy, że $\Phi^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ dla dowolnego zbioru $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ (Obserwacja 12.2.2(b)). Korzystając z (1) dla zbioru $\Phi^{-1}(B)$, wnioskujemy, że (2) zachodzi dla $f := \chi_B$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)|_V$.

Wobec regularności miary Lebesgue'a, pozostaje sprawdzić przypadek, gdy $f = \chi_Z$, gdzie $Z \subset \Phi(A)$ jest miary zero. Mamy pokazać, że $(\chi_Z \circ \Phi)|\Phi'| = 0$ prawie wszędzie na $\Phi^{-1}(Z)$ (52). Ponieważ $\mathcal{L}^n$ jest regularna, zatem istnieje zbiór miary zero $Z_0 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ taki, że $Z \subset Z_0$. Zastępując $Z_0$ poprzez $Z_0 \cap V$, możemy założyć, że $Z_0 \subset V$ (tu korzystamy z założenia, że $\Phi$ jest surjekcją na zbiór otwarty). Dla zbioru $Z_0$ sytuacja jest jasna: $0 = \mathcal{L}^n(Z_0) = \int_{\Phi(U)} \chi_{Z_0} = \int_U (\chi_{Z_0} \circ \Phi)|\Phi'| d\mathcal{L}^n = \int_{\Phi^{-1}(Z_0)} |\Phi'| d\mathcal{L}^n$ oraz $\Phi^{-1}(Z_0) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Stąd natychmiast dostajemy $|\Phi'| = 0$ prawie wszędzie na $\Phi^{-1}(Z_0) \supset \Phi^{-1}(Z)$. $\square$

**Lemat 12.15.5.** *Przypuśćmy, że dla dowolnego $a \in U$ istnieje otoczenie otwarte $U_a \subset U$ takie, że* (1) *zachodzi dla dowolnego $A \in \mathfrak{L}_n|_{U_a}$. Wtedy* (1) *zachodzi w pełnej ogólności.*

*Dowód*. Na podstawie twierdzenia Lindelöfa znajdziemy ciąg punktów $(a_j)_{j=1}^\infty \subset U$ taki, że $U = \bigcup_{j=1}^\infty U_{a_j}$. Przyjmijmy dla uproszczenia $U_j := U_{a_j}$. Dla dowolnego $A \in \mathfrak{L}_n$, $A \subset U$, niech $A_1 := A \cap U_1$, $A_j := A \cap (U_j \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_{j-1}))$, $j \geqslant 2$. Warunek (1) zachodzi dla każdego ze zbiorów $A_j$. Stąd

$$\mathcal{L}^n(\Phi(A)) = \mathcal{L}^n\Big(\Phi\Big(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\Big)\Big) = \mathcal{L}^n\Big(\bigcup_{j=1}^\infty \Phi(A_j)\Big) = \sum_{j=1}^\infty \mathcal{L}^n(\Phi(A_j)) = \sum_{j=1}^\infty \int_{A_j} |\Phi'| d\mathcal{L}^n = \int_A |\Phi'| d\mathcal{L}^n. \quad \square$$

**Lemat 12.15.6.** *Jeżeli warunek* (1) *zachodzi dla kostek, to zachodzi w pełnej ogólności.*

*Dowód*. Przypomnijmy, że (1) zachodzi dla zbiorów miary zero. Zachodzi więc dla dowolnych zbiorów $A$ takich, że $\operatorname{int} P \subset A \subset P$ dla pewnej kostki $P \subset U$. W takim razie zachodzi dla dowolnego zbioru otwartego $\Omega \subset U$ (Obserwacja 12.1.5). Stąd dostajemy przypadek $A = (\operatorname{int} P) \setminus \Omega$, gdzie $P \subset U$ jest kostką, a $\Omega \subset U$ jest otwarty. Kolejno dostajemy przypadek, gdy $A \subset \operatorname{int} P$ jest zbiorem typu $\mathcal{F}_\sigma$. Teraz, korzystając z regularności miary Lebesgue'a dostajemy przypadek, gdy $A \subset \operatorname{int} P$ jest dowolnym zbiorem mierzalnym. Pozostaje skorzystać z Lematu 12.15.5. $\square$

**Wniosek 12.15.7.** *Aby sprawdzić, że dla odwzorowania $\Phi$ zachodzi twierdzenie o zmianie zmiennych wystarczy udowodnić warunek* (1) *dla małych kostek.*

**Wniosek 12.15.8.** *Twierdzenie o zmianie zmiennych zachodzi zawsze dla $n = 1$.*

**Twierdzenie 12.15.9** (I Twierdzenie o zmianie zmiennych w całce Lebesgue'a)**.** *Jeżeli $\Phi : U \longrightarrow V$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^1$, to dla $\Phi$ zachodzi twierdzenie o zmianie zmiennych.*

*Dowód*. Wiemy, że wystarczy sprawdzić (1) dla małych kostek.

Krok $1^0$: Jeżeli twierdzenie zachodzi dla dyfeomorfizmów $\Phi : U \longrightarrow V$ i $\Psi : V \longrightarrow W$, to zachodzi dla $\Psi \circ \Phi : U \longrightarrow W$.

Istotnie, ponieważ $(\Psi \circ \Phi)' = (\Psi' \circ \Phi) \circ \Phi'$, zatem korzystając z (2) dla $\Phi$ i $f = |\Psi'|$, dostajemy

$$\mathcal{L}^n(\Psi(\Phi(A))) = \int_{\Phi(A)} |\Psi'| d\mathcal{L}^n = \int_A (|\Psi'| \circ \Phi)|\Phi'| d\mathcal{L}^n = \int_A |(\Psi \circ \Phi)'| d\mathcal{L}^n.$$

(52) Uwaga: Nie twierdzimy, że zbiór $\Phi^{-1}(Z)$ musi być mierzalny.

Krok $2^0$: Twierdzenie zachodzi dla $n = 1$.

Krok $3^0$: Jeżeli twierdzenie jest prawdziwe dla $n-1$, to jest prawdziwe dla $n$ i dyfeomorfizmów postaci

$$\Phi(x) = \Phi(x_1, \dots, x_n) = (\Phi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \Phi_{n-1}(x_1, \dots, x_n), x_n), \quad x \in U.$$

Istotnie, ustalmy kostkę $P \subset U$, $P = Q \times R \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ i niech $x = (u,t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Dla $t \in R$ niech

$$U(t) \ni u \xmapsto{\Phi_t} (\Phi_1(u,t), \dots, \Phi_{n-1}(u,t)) \in V(t).$$

Bez trudu widzimy, że $\Phi_t : U(t) \longrightarrow V(t)$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^1$ oraz $|\Phi_t'|(u) = |\Phi'|(u,t)$. Teraz na podstawie tego, że (1) zachodzi dla $n-1$ oraz na podstawie zasady Cavalieriego i twierdzenia Tonellego mamy:

$$\mathcal{L}^n(\Phi(P)) = \int_R \mathcal{L}^{n-1}(\Phi_t(Q)) d\mathcal{L}^1(t) = \int_R \Big( \int_Q |\Phi_t'|(u) d\mathcal{L}^{n-1}(u) \Big) d\mathcal{L}^1(t) = \int_P |\Phi'| d\mathcal{L}^n.$$

Krok $4^0$: Jeżeli twierdzenie jest prawdziwe dla $n-1$, to jest prawdziwe dla $n$ i dyfeomorfizmów postaci

$$\Phi(x) = (\Phi_1(x), \dots, \Phi_{j-1}(x), x_k, \Phi_{j+1}(x), \dots, \Phi_n(x)), \quad x \in U,$$

gdzie $j, k \in \{1, \dots, n\}$. Dyfeomorfizmy tej postaci nazywamy *przywiedlnymi*.

Krok $5^0$ (i ostatni). Na podstawie poprzednich części dowodu widać, że wystarczy jeszcze pokazać, że każdy dyfeomorfizm jest lokalnie złożeniem (co najwyżej trzech) dyfeomorfizmów przywiedlnych.

Istotnie, ustalmy dyfeomorfizm klasy $\mathcal{C}^1$ $\Phi : U \longrightarrow V$ i $a \in U$. Zastępując $\Phi$ przez $\Phi \circ P$, gdzie $P$ jest stosownie wybraną permutacją zmiennych ([53]), możemy założyć, że $\frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n}(a) \neq 0$. Zmniejszając $U$ (i $V$) możemy założyć, że $\frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n}(x) \neq 0$, $x \in U$. Niech $x = (u,t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Rozważmy odwzorowanie:

$$U \times \mathbb{R} \ni (u,t,v) \xmapsto{f} \Phi_n(u,t) - v \in \mathbb{R}.$$

Oczywiście $\frac{\partial f}{\partial t}(u,t,v) \neq 0$, $(u,t,v) \in U \times \mathbb{R}$ oraz $f(u_0,t_0,v_0) = 0$, gdzie $(u_0,t_0) = a$, $v_0 := \Phi_n(a)$. Na podstawie twierdzenia o odwzorowaniu uwikłanym istnieje otoczenie otwarte $\Omega$ punktu $(u_0,t_0,v_0)$ i odwzorowanie $\varphi : U_1 \longrightarrow U_2$ klasy $\mathcal{C}^1$ takie, że $\varphi(u_0,v_0) = t_0$ i równość $f(u,t,v) = 0$ jest dla $(u,t,v) \in \Omega$ równoważna temu, że $t = \varphi(u,v)$. Zdefiniujmy:

$$\Psi(u,v) := (\Phi_1(u, \varphi(u,v)), \dots, \Phi_{n-1}(u, \varphi(u,v)), v), \quad (u,v) \in \text{ otoczenie punktu } (u_0,v_0),$$
$$\Theta(u,t) := (u, \Phi_n(u,t)), \quad (u,t) \in \text{ otoczenie punktu } a.$$

Oczywiście $\Psi$ i $\Theta$ są klasy $\mathcal{C}^1$ oraz $\Theta(a) = (u_0,v_0)$. W takim razie złożenie $\Psi \circ \Theta$ ma sens w pewnym otoczeniu punktu $a$. Wystarczy pokazać, $\Psi \circ \Theta = \Phi$ w małym otoczeniu $a$ ([54]). Równość ta wynika z faktu, że wobec definicji $\varphi$, mamy $\varphi(u, \Phi_n(u,t)) = t$ dla $(u,t)$ w małym otoczeniu $a$. □

**Wniosek 12.15.10** (Twierdzenie o zmianie zmiennych w całce Riemanna — por. Twierdzenie 11.2.7)**.** *Jeżeli $\Phi : U \longrightarrow V$ będzie dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^1$, to dla dowolnego zbioru regularnego $A \subset\subset U$ i dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{R}(\Phi(A))$ ([55]) funkcja $(f \circ \Phi) \cdot |\Phi'|$ jest całkowalna w sensie Riemanna na $A$ oraz*

$$\int_{\Phi(A)} f = \int_A (f \circ \Phi) \cdot |\Phi'|$$

*Dowód*. Korzystamy z Twierdzeń 12.13.1 i 12.15.9: $N_A((f \circ \Phi)|\Phi'|) = \Phi^{-1}(N_{\Phi(A)}(f))$. □

**Twierdzenie 12.15.11** (II twierdzenie o zmianie zmiennych w całce Lebesgue'a)**.** *Jeżeli $\Phi : U \longrightarrow V$ jest odwzorowaniem bijektywnym klasy $\mathcal{C}^1$, to dla $\Phi$ zachodzi twierdzenie o zmianie zmiennych.*

**Lemat 12.15.12.** *Jeżeli $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, to $\mathcal{L}^n(f(S_{n-1})) = 0$, gdzie $S_{n-1} := \{x \in \Omega : \det f'(x) = 0\}$.*

Odnotujmy, że jest to specjalny przypadek następującego Twierdzenia Sarda.

---

([53]) Zauważmy, że permutacje zmiennych są dyfeomorfizmami przywiedlnymi.

([54]) Bo wtedy $\Psi'(u_0,v_0) \circ \Theta'(a) = \Phi'(a)$, skąd, na podstawie twierdzenia o lokalnym dyfeomorfizmie, $\Psi$ i $\Theta$ muszą być dyfeomorfizmami w otoczeniu, odpowiednio, $(u_0,v_0)$ i $a$ — będą to poszukiwane dyfeomorfizmy przywiedlne dające rozkład $\Phi$ w otoczeniu $a$.

([55]) Przypomnijmy, że wiemy już, że zbiór $\Phi(A)$ jest regularny.

**Twierdzenie* 12.15.13** (Twierdzenie Sarda ([56]) ([57]))**.** *Niech $f : \Omega \longrightarrow F$ będzie odwzorowaniem klasy $\mathcal{C}^k$ ($k \in \mathbb{N}$) zbioru otwartego $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ w przestrzeń unormowaną $F$. Zdefiniujmy*

$$S_r := \{x \in \Omega : \operatorname{rank} f'(x) := \dim f'(x)(\mathbb{R}^n) \leqslant r\}.$$

*Wtedy*

$$\mathcal{H}^{r+(n-r)/k}(f(S_r)) = 0, \quad r = 0, \dots, n-1.$$

*Dowód Lematu 12.15.12.* Wystarczy pokazać, że $f(S_{n-1} \cap Q)$ jest miary zero dla dowolnej kostki $Q \subset\subset \Omega$ o wszystkich krawędziach równych $\ell$. Niech

$$\|f(x') - f(x'')\| \leqslant L\|x' - x''\|, \quad x', x'' \in Q,$$

gdzie $L := \max\{\|f'(x)\| : x \in Q\}$ (norma operatorowa). Ustalmy $\varepsilon > 0$. Podzielmy kostkę $Q$ na $N^n$ równych kostek tak, że dla dowolnej kostki $Q'$ z tego podziału mamy

$$\|f'(x') - f'(x'')\| \leqslant \varepsilon, \quad x', x'' \in Q'.$$

Ustalmy kostkę $Q'$ taką, że $S_{n-1} \cap Q' \neq \varnothing$. Będziemy się starać oszacować miarę zbioru $f(Q')$. Ustalmy $x_0 \in S_{n-1} \cap Q'$ i niech $W$ będzie $(n-1)$–wymiarową podprzestrzenią wektorową $\mathbb{R}^n$ taką, że $f'(x_0)(\mathbb{R}^n) \subset W$. Niech $W' := f(x_0) + W$; $W'$ jest $(n-1)$–wymiarową płaszczyzną afiniczną. Niech $x \in Q'$. Na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych mamy:

$$\|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\| \leqslant \varepsilon\|x - x_0\| \leqslant \varepsilon\sqrt{n}\ell/N,$$
$$\|f(x) - f(x_0)\| \leqslant L\|x - x_0\| \leqslant L\sqrt{n}\ell/N.$$

Ponieważ $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \in W'$, zatem

$$\operatorname{dist}(f(x), W') \leqslant \varepsilon\sqrt{n}\ell/N.$$

Oznacza to, że $f(Q')$ leży w walcu

$$\{y' + y'' : y', y'' \in \mathbb{R}^n,\ y' \in W',\ y'' \in W^\perp,\ \|y' - f(x_0)\| \leqslant L\sqrt{n}\ell/N,\ \|y''\| \leqslant \varepsilon\sqrt{n}\ell/N\}. \quad ([58])$$

W takim razie, na podstawie zasady Cavalieriego, mamy

$$\mathcal{L}^n(f(Q')) \leqslant \mathcal{L}^{n-1}(\mathbb{B}_{n-1})(L\sqrt{n}\ell/N)^{n-1}(2\varepsilon\sqrt{n}\ell/N) =: C_0\varepsilon/N^n.$$

a stąd

$$\mathcal{L}^n(f(S_{n-1} \cap Q)) \leqslant C_0\varepsilon. \qquad \square$$

*Dowód Twierdzenia 12.15.11.* Niech $S := \{x \in U : \det \Phi'(x) = 0\}$. Wobec Lematu 12.15.12 mamy $\mathcal{L}^n(\Phi(S)) = 0$. Na podstawie twierdzenia o lokalnym dyfeomorfizmie wiemy, że zbiór $V \setminus \Phi(S) = \Phi(U \setminus S)$ jest otwarty oraz, że $\Phi|_{U\setminus S} : U \setminus S \longrightarrow V \setminus \Phi(S)$ jest dyfeomorfizmem. Teraz możemy skorzystać z I twierdzenia o zmianie zmiennych w całce Lebesgue'a:

$$\mathcal{L}^n(\Phi(A)) = \mathcal{L}^n(\Phi(A) \setminus \Phi(S)) = \mathcal{L}^n(\Phi(A \setminus S)) = \int_{A\setminus S} |\Phi'| d\mathcal{L}^n = \int_A |\Phi'| d\mathcal{L}^n. \qquad \square$$

**Twierdzenie 12.15.14** (III twierdzenie o zmianie zmiennych, zob. Obserwacja 13.5.7(b))**.** *Jeżeli $\Phi : U \longrightarrow V$ jest odwzorowaniem bijektywnym spełniającym lokalnie warunek Lipschitza, to dla $\Phi$ zachodzi twierdzenie o zmianie zmiennych.*

[Wykład 12.04.2021 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ]

---

([56]) Zob. H. Federer, *Geometric measure theory*, Springer Verlag, Berlin, 1969, § 3.4.1.
([57]) Arthur Sard (1909–1980).
([58]) Tu i dalej: $W^\perp := \{\xi \in \mathbb{R}^n : \forall_{\eta \in W} : \langle \xi, \eta \rangle = 0\}$, gdzie $\langle\ ,\ \rangle$ jest standardowym iloczynem skalarnym w $\mathbb{R}^n$.

## 12.16. Funkcje dane całką

Załóżmy, że $\Omega$ jest pewnym zbiorem, $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ jest przestrzenią z miarą nieujemną $\left({}^{59}\right)$, zaś $f : \Omega \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ — funkcją taką, że $f(x, \cdot) \in L^1(X, \mu)$ dla dowolnego $x \in \Omega$. Definiujmy *funkcję daną całką*

$$\varphi(x) := \int_X f(x,t)d\mu(t), \quad x \in \Omega;$$

por. Twierdzenie 11.3.1. Interesuje nas, jak własności funkcji $f$ (np. ciągłość, różniczkowalność) przenoszą się na funkcję $\varphi$.

**Twierdzenie 12.16.1** (Twierdzenie o funkcjach danych całką $\left({}^{60}\right)$). (a) *Załóżmy dodatkowo, że $\Omega$ jest przestrzenią metryczną, $x_0 \in \Omega$ oraz*
- $f(\cdot, t) \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C}; x_0)$ *dla dowolnego* $t \in X$,
- $|f(x,t)| \leqslant g_0(t)$, $(x,t) \in \Omega \times X$, *gdzie* $g_0 \in L^1(X, \mu)$ $\left({}^{61}\right)$.

*Wtedy* $\varphi \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C}; x_0)$. *W szczególności, jeżeli*
- $f(\cdot, t) \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C})$ *dla dowolnego* $t \in X$,
- $|f(x,t)| \leqslant g_0(t)$, $(x,t) \in \Omega \times X$, *gdzie* $g_0 \in L^1(X, \mu)$,

*to* $\varphi \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C})$.

(b) *Załóżmy dodatkowo, że $\Omega$ jest zbiorem otwartym w pewnej przestrzeni unormowanej $E$, $k \in \mathbb{N}$ i $\xi_1, \dots, \xi_k \in E$. Jeżeli*
- $\frac{\partial^k f(\cdot,t)}{\partial \xi_k \cdots \partial \xi_1}(x)$ *istnieje dla dowolnego* $(x,t) \in \Omega \times X$,
- $\left|\frac{\partial^j f(\cdot,t)}{\partial \xi_j \cdots \partial \xi_1}(x)\right| \leqslant g_j(t)$, $(x,t) \in \Omega \times X$, *gdzie* $g_j \in L^1(X, \mu)$, $j = 0, \dots, k$,

*to dla dowolnego $x \in \Omega$, funkcja* $X \ni t \overset{\psi_k^x}{\longmapsto} \frac{\partial^k f(\cdot,t)}{\partial \xi_k \cdots \partial \xi_1}(x)$ *jest całkowalna, pochodna* $\frac{\partial^k \varphi}{\partial \xi_k \cdots \partial \xi_1}(x)$ *istnieje oraz*

$$\frac{\partial^k \varphi}{\partial \xi_k \cdots \partial \xi_1}(x) = \int_X \frac{\partial^k f(\cdot,t)}{\partial \xi_k \cdots \partial \xi_1}(x) d\mu(t).$$

*Dowód.* (a) Niech $x_s \longrightarrow x_0$, $\psi_s := f(x_s, \cdot) - f(x_0, \cdot)$. Wtedy $\psi_s \longrightarrow 0$ punktowo na $X$ oraz $|\psi_s| \leqslant 2g_0$. Stąd, na podstawie twierdzenia Lebesgue'a o zmajoryzowanym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki, dostajemy $\varphi(x_s) - \varphi(x_0) = \int_X \psi_s d\mu \longrightarrow 0$.

(b) Zastosujemy indukcję ze względu na $k$. Dla $k = 1$ ustalmy $x_0 \in \Omega$. Mamy

$$\frac{\partial f(\cdot,t)}{\partial \xi_1}(x_0) = \lim_{\mathbb{N} \ni s \to +\infty} \frac{f(x_0 + \frac{1}{s}\xi_1, t) - f(x_0, t)}{\frac{1}{s}},$$

skąd, na podstawie Obserwacji 12.2.2(r), wnioskujemy, że funkcja $\psi_1^{x_0}$ jest mierzalna. Ponieważ $|\psi_1^{x_0}| \leqslant g_1$, funkcja $\psi_1^{x_0}$ jest również całkowalna. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(x_0 + h\xi_1) - \varphi(x_0)}{h} - \int_X \frac{\partial f(\cdot,t)}{\partial \xi_1}(x_0) d\mu(t) &= \int \Big(\frac{f(x_0 + h\xi_1, t) - f(x_0, t)}{h} - \frac{\partial f(\cdot,t)}{\partial \xi_1}(x_0)\Big) d\mu(t) \\ &=: \int_X F(h,t) d\mu(t), \quad 0 < |h| < r \ll 1.\end{aligned}$$

Na podstawie twierdzenia o wartości średniej mamy $|F(h,t)| \leqslant 2g_1(t)$. Połóżmy dodatkowo $F(0,t) := 0$. Teraz pozostaje skorzystać z (a) dla danych $(\Omega, X, f, g_0) := ((-r, r), X, F, 2g_1)$.

Aby wykonać krok indukcyjny $k - 1 \rightsquigarrow k$ wystarczy zastosować powyższe rozumowanie do danych $(k, f, g_1, \dots, g_k) = (1, (x,t) \longmapsto \psi_{k-1}^x(t) = \frac{\partial^{k-1} f(\cdot,t)}{\partial \xi_{k-1} \cdots \partial \xi_1}(x), g_k)$. □

**Uwaga 12.16.2.** Powyższe wyniki mogą być uogólnione na przypadek, gdy $f : \Omega \times X \longrightarrow F$, gdzie $F$ jest ośrodkową przestrzenią Banacha.

---

$\left({}^{59}\right)$ Możemy myśleć o przypadku, gdy $X \in \mathcal{L}_n$, zaś $\mu$ jest miarą Lebesgue'a.

$\left({}^{60}\right)$ Por. Twierdzenie 11.3.1.

$\left({}^{61}\right)$ Odnotujmy, że warunek ten jest spełniony np. gdy $\mu(X) < +\infty$, zaś $f$ jest ograniczona.

## 12.17. Gęstość $\mathcal{C}_0(\Omega,\mathbb{C})$ w $L^p(\Omega,\mathbb{C},\mathcal{L}^n)$

**Lemat 12.17.1** (Rozkład jedności). *Niech $X$ będzie* lokalnie zwartą *przestrzenią metryczną. Wtedy dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset X$ i dla dowolnego jego pokrycia otwartego $U_1,\dots,U_N$ istnieją funkcje $f_j \in \mathcal{C}_0(U_j,[0,1])$, $j=1,\dots,N$, takie, że $f_1+\dots+f_N \leqslant 1$ na $X$ oraz $f_1+\dots+f_N=1$ na otwartym otoczeniu $K$.*

*Dowód.* Krok $1^o$. Wiemy, że dla dowolnych dwóch zbiorów domkniętych i rozłącznych $A,B\subset X$ istnieje funkcja $f\in\mathcal{C}(X,[0,1])$ taka, że $f=1$ and $A$ i $f=0$ na $B$, np. $f(x)=\frac{\varrho(x,B)}{\varrho(x,A)+\varrho(x,B)}$.

Krok $2^o$. Dla dowolnego $a\in X$ oraz dla dowolnego jego otoczenia otwartego $U$ istnieje otoczenie otwarte $V$ punktu $a$ takie, że $\overline{V}\subset U$ oraz $\overline{V}$ jest zbiorem zwartym.

Istotnie, dowód sprowadza się do znalezienia otoczenia $V$ takiego, że $\overline{V}\subset U$. Stosujemy Krok $1^o$ do $A:=\{a\}$ i $B:=X\setminus U$. Niech $f\in\mathcal{C}(X,[0,1])$ będzie taka, że $f(a)=1$ i $f=0$ na $B$. Zdefiniujmy $V:=\{x\in X: f(x)>\frac12\}$. Wtedy $\overline{V}\subset\{x\in X: f(x)\geqslant\frac12\}\subset X\setminus B=U$.

Krok $3^o$. Dla dowolnego zbioru zwartego i jego otoczenia otwartego $U$ istnieje zbiór otwarty $V$ taki, że $K\subset V\subset\overline{V}\subset U$ i $\overline{V}$ jest zbiorem zwartym.

Istotnie, dla dowolnego $a\in K$ dobieramy na podstawie Kroku $2^o$ otoczenie otwarte $V_a$ takie, że $\overline{V}_a\subset U$ i $\overline{V}_a$ jest zbiorem zwartym. Wobec zwartości $K$ istnieje skończona liczba punktów $a_1,\dots,a_k\in K$ takich, że $K\subset V_{a_1}\cup\dots\cup V_{a_k}=:V$.

Krok $4^o$. Dla dowolnego otoczenia $U$ zbioru zwartego $K$ istnieje funkcja $f\in\mathcal{C}_0(U,[0,1])$ taka, że $f=1$ na $K$.

Istotnie, na podstawie Kroku $3^o$ istnieje zbiór otwarty $V$ taki, że $K\subset V\subset\overline{V}\subset U$ i $\overline{V}$ jest zbiorem zwartym. Teraz stosujemy Krok $1^o$ do $A:=K$ i $B:=X\setminus V$.

Krok $5^o$. Dla dowolnego $x\in K$ ustalmy $j(x)\in\{1,\dots,N\}$ tak, że $x\in U_{j(x)}$ i niech $V_x$ będzie relatywnie zwartym otoczeniem punktu $x$ takim, że $\overline{V}_x\subset U_{j(x)}$ Wobec zwartości $K$ istnieje skończona liczba punktów $x_1,\dots,x_k\in K$ takich, że $K\subset V_{x_1}\cup\dots\cup V_{x_k}=:V$. Niech

$$L_j:=\bigcup_{i\in\{1,\dots,k\}:\ j(x_i)=j}\overline{V}_{x_i},\quad j=1,\dots,N.$$

Na podstawie Kroku $4^o$ istnieją funkcje $g_j\in\mathcal{C}_0(U_j,[0,1])$, $g_j=1$ na $L_j$, $j=1,\dots,N$. Zdefiniujmy

$$f_1:=g_1,\quad f_2:=(1-g_1)g_2,\dots,f_N:=(1-g_1)\dots(1-g_{N-1})g_N.$$

Oczywiście $f_j\in\mathcal{C}_0(U_j,[0,1])$, $j=1,\dots,N$. Ponadto, $f_1+\dots+f_N=1-(1-g_1)\dots(1-g_N)$, a stąd $f_1+\dots+f_N=1$ na $V$. $\square$

**Twierdzenie 12.17.2.** *Dla dowolnego zbioru otwartego $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ i dla dowolnego $1\leqslant p<+\infty$ przestrzeń $\mathcal{C}_0(\Omega,\mathbb{C})$ jest gęsta w $L^p(\Omega,\mathbb{C},\mathcal{L}^n)$ w normie $L^p$.*

Twierdzenie nie jest prawdziwe dla $p=+\infty$, bowiem zbieżność ciągu funkcji z $\mathcal{C}_0(\Omega)$ w sensie normy $L^\infty$, to zbieżność jednostajna, a więc granica musi być co najmniej funkcją ciągłą.

*Dowód.* Możemy się ograniczyć do funkcji rzeczywistych. Oczywiście

$$\mathcal{C}_0(\Omega)\subset L^p(\Omega,\mathcal{L}^n).$$

Ustalmy, $f\in L^p(\Omega,\mathcal{L}^n)$. Możemy założyć, że $f\geqslant0$ (62). Niech $\Omega_k:=\Omega\cap\mathbb{B}(k)$, $f_k:=f\cdot\chi_{\Omega_k}$, $k\geqslant1$. Zauważmy, że $|f_k-f|^p\longrightarrow0$ oraz $|f_k-f|^p\leqslant f^p$, $k\geqslant1$, zatem, na podstawie Twierdzenia Lebesgue'a, $f_k\longrightarrow f$ w $L^p$. Możemy więc założyć, że $\Omega$ jest ograniczony. Niech $\mathcal{M}_0^+(\Omega)\ni f_k\nearrow f$. Tak jak powyżej $f_k\longrightarrow f$ w $L^p$, więc możemy przyjąć, że $f$ jest funkcją prostą i dalej, że $f=\chi_A$, gdzie $A\in\mathcal{L}_n$, $A\subset\Omega$. Weźmy $\varepsilon>0$. Wiemy, że istnieją: zbiór domknięty $K\subset A$ oraz zbiór otwarty $U\supset A$ takie, że $\mathcal{L}^n(U\setminus K)\leqslant\varepsilon$. Możemy założyć, że $U\subset\Omega$. Ograniczoność $\Omega$ gwarantuje nam zwartość $K$. Na podstawie Lematu 12.17.1 istnieje funkcja $g\in\mathcal{C}_0(U)$ taka, że $0\leqslant g\leqslant1$ i $g=1$ na $K$. Teraz mamy: $\|g-f\|_{L^p}^p=\int_{U\setminus K}|g-f|^p d\mathcal{L}^n\leqslant\varepsilon$. $\square$

[Wykład 15.04.2021 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ]

(62) Jeżeli $f\in L^p$, to $f_\pm\in L^p$.

## 12.18. Splot

**Definicja 12.18.1.** Dla $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}, \mathcal{L}_n)$ zdefiniujmy

$$\mathcal{D}_{f*g} := \Big\{x \in \mathbb{R}^n : \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|\, d\mathcal{L}^n(y) < +\infty\Big\},$$
$$(f*g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\, d\mathcal{L}^n(y), \quad x \in \mathcal{D}_{f*g}.$$

Funkcję $f*g$ nazywamy *splotem* funkcji $f$ i $g$.

**Obserwacja 12.18.2.** (a) Na podstawie twierdzenia o zmianie zmiennych dostajemy: $\mathcal{D}_{f*g} = \mathcal{D}_{g*f}$ oraz $f*g = g*f$.

(b) $\mathcal{D}_{f_1*g} \cap \mathcal{D}_{f_2*g} \subset \mathcal{D}_{(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)*g}$ oraz $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)*g = \alpha_1(f_1*g) + \alpha_2(f_2*g)$ na $\mathcal{D}_{f_1*g} \cap \mathcal{D}_{f_2*g}$. Oznacza to, że splot jest operacją dwuliniową symetryczną.

**Twierdzenie 12.18.3.** *Niech $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p, q \leqslant +\infty$. Załóżmy, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geqslant 1$ i niech $1 \leqslant r \leqslant +\infty$ będzie liczbą taką, że*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1.$$

*Wtedy splot $f*g$ jest określony $\mathcal{L}^n$–prawie wszędzie na $\mathbb{R}^n$, $f*g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ oraz zachodzi następująca* nierówność Younga [63]:

$$\|f*g\|_{L^r} \leqslant \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

*W szczególności, splot*

$$L^p(\mathbb{R}^n) \times L^q(\mathbb{R}^n) \ni (f,g) \longmapsto f*g \in L^r(\mathbb{R}^n)$$

*jest operacją dwuliniową, symetryczną i ciągłą.*

*Ponadto, jeżeli $r = +\infty$, tzn. jeżeli $p$ i $q$ są sprzężone, to splot $f*g$ jest określony wszędzie i jest funkcją ciągłą.*

*Dowód.* Zauważmy, że $p \leqslant r$, $q \leqslant r$.

Rozważmy najpierw przypadek $r = +\infty$.

Wtedy, wobec nierówności Höldera oraz twierdzenia o zmianie zmiennych, dostajemy:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|\, d\mathcal{L}^n(y) \leqslant \|f(x-\cdot)\|_{L^p}\|g\|_{L^q} = \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Oznacza to, że $\mathcal{D}_{f*g} = \mathbb{R}^n$ oraz, że $\sup_{\mathbb{R}^n} |f*g| \leqslant \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$ [64].

Możemy założyć, że $p < +\infty$. Jeżeli $(f_\nu)_{\nu=1}^\infty \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ i $f_\nu \xrightarrow{L^p} f_0$, to

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |f_\nu * g - f_0 * g| \leqslant \|f_\nu - f_0\|_{L^p}\|g\|_{L^q},$$

a zatem $f_\nu * g \longrightarrow f_0 * g$ jednostajnie na $\mathbb{R}^n$. W szczególności, wobec Twierdzenia 12.17.2, aby pokazać, że $f*g$ jest funkcją ciągłą, możemy założyć, że $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

Ustalmy $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i $\varepsilon > 0$. Ponieważ $f$ jest funkcją jednostajnie ciągłą na $\mathbb{R}^n$, istnieje $\delta \in (0,1)$ taka, że $|f(z') - f(z'')| \leqslant \varepsilon$ o ile $\|z' - z''\| \leqslant \delta$. Niech

$$K := -(\operatorname{supp} f) + \overline{\mathbb{B}}(x_0, 1) = \{y \in \mathbb{R}^n : \exists_{x \in \overline{\mathbb{B}}(x_0,1)} : x - y \in \operatorname{supp} f\}.$$

Teraz, dla $x \in \mathbb{B}(x_0, \delta)$, mamy:

$$\begin{aligned}
|f*g(x) - f*g(x_0)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x_0-y)||g(y)|\, d\mathcal{L}^n(y) \\
&\leqslant \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x_0-y)|^p\, d\mathcal{L}^n(y)\Big)^{1/p}\|g\|_{L^q} \\
&= \Big(\int_K |f(x-y) - f(x_0-y)|^p\, d\mathcal{L}^n(y)\Big)^{1/p}\|g\|_{L^q} \leqslant \varepsilon(\mathcal{L}^n(K))^{1/p}\|g\|_{L^q}.
\end{aligned}$$

---

[63] William Henry Young (1863–1942).

[64] Uwaga: nie piszemy $\|f*g\|_{L^\infty}$ ponieważ jeszcze nie wiemy, czy $f*g$ jest funkcją mierzalną.

Niech teraz, $r = 1$ (tzn. $p = q = 1$). Wtedy, na podstawie twierdzenia Tonellego (i twierdzenia o zmianie zmiennych), mamy

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)g(y)|\,d\mathcal{L}^n(y)\Big)d\mathcal{L}^n(x) &= \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}|f(x-y)g(y)|\,d\mathcal{L}^{2n}(x,y)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|\,d\mathcal{L}^n(x)\Big)|g(y)|\,d\mathcal{L}^n(y)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\,d\mathcal{L}^n(x)\Big)|g(y)|\,d\mathcal{L}^n(y) = \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}.\end{aligned}$$

Wynika stąd, że funkcja $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \ni (x,y) \longmapsto f(x-y)g(y)$ jest klasy $L^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$. Stąd, na podstawie twierdzenia Fubiniego, splot $f*g$ jest określony $\mathcal{L}^n$–prawie wszędzie, jest klasy $L^1(\mathbb{R}^n)$ (w szczególności, jest funkcją mierzalną) i $\|f*g\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}$.

Niech $1 < r = p < +\infty$ (w ten sam sposób rozpatrujemy przypadek $1 < r = q < +\infty$).
Zauważmy, że $q = 1$. Niech $1 < s < +\infty$ będzie liczbą sprzężoną z $p$. Przystępujemy do szacowania:

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)g(y)|\,d\mathcal{L}^n(y)\Big)^p d\mathcal{L}^n(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)||g(y)|^{1/p}|g(y)|^{1-1/p}\,d\mathcal{L}^n(y)\Big)^p d\mathcal{L}^n(x)\\ &\overset{(1)}{\leqslant} \int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^p|g(y)|\,d\mathcal{L}^n(y)\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|g(y)|^{s(1-1/p)}\,d\mathcal{L}^n(y)\Big)^{p/s}d\mathcal{L}^n(x)\\ &= \Big(\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^p|g(y)|\,d\mathcal{L}^n(y)\Big)d\mathcal{L}^n(x)\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|g(y)|\,d\mathcal{L}^n(y)\Big)^{p-1}\\ &\overset{(2)}{=} \Big(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p\,d\mathcal{L}^n(x)\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|g(y)|\,d\mathcal{L}^n(y)\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|g(y)|\,d\mathcal{L}^n(y)\Big)^{p-1}\\ &= (\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^1})^p,\end{aligned}$$

gdzie (1) wynika z nierówności Höldera (dla $p$ i $s$), zaś (2) wynika z twierdzenia Tonellego.

Na koniec, niech $1 < r < +\infty$, $p < r$ i $q < r$. Niech $1 < s < +\infty$ będzie liczbą sprzężoną z $r$. Zdefiniujmy

$$a := \frac{p}{s(1-p/r)}, \quad b := \frac{q}{s(1-q/r)}$$

oraz zauważmy, że są to również liczby sprzężone [65]. Ponadto:

$$\frac{r}{sa} = \frac{r}{p} - 1, \quad \frac{r}{sb} = \frac{r}{q} - 1.$$

Przystępujemy do szacowania:

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)g(y)|\,d\mathcal{L}^n(y)\Big)^r d\mathcal{L}^n(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^{p/r}|g(y)|^{q/r}|f(x-y)|^{1-p/r}|g(y)|^{1-q/r}\,d\mathcal{L}^n(y)\Big)^r d\mathcal{L}^n(x)\\ &\overset{(1)}{\leqslant} \int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^p|g(y)|^q d\mathcal{L}^n(y)\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^{s(1-p/r)}|g(y)|^{s(1-q/r)}d\mathcal{L}^n(y)\Big)^{r/s}d\mathcal{L}^n(x)\\ &\overset{(2)}{\leqslant} \int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^p|g(y)|^q d\mathcal{L}^n(y)\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^{as(1-p/r)}d\mathcal{L}^n(y)\Big)^{r/(as)}\times\\ &\qquad\times\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|g(y)|^{bs(1-q/r)}d\mathcal{L}^n(y)\Big)^{r/(bs)}d\mathcal{L}^n(x)\end{aligned}$$

---

(65) Istotnie,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = s\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{r} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r}\Big) = s\Big(1 - \frac{1}{r}\Big) = 1.$$

$$= \Big(\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^p|g(y)|^q\,d\mathcal{L}^n(y)\Big)d\mathcal{L}^n(x)\Big)\|f\|_{L^p}^{r-p}\|g\|_{L^q}^{r-q}$$
$$\overset{(3)}{=}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p\,d\mathcal{L}^n(x)\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|g(y)|^q\,d\mathcal{L}^n(y)\Big)\|f\|_{L^p}^{r-p}\|g\|_{L^q}^{r-q} = (\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q})^r.$$

gdzie (1) wynika z nierówności Höldera dla $r$ i $s$, (2) — z nierówności Höldera dla $a$ i $b$, zaś (3) wynika z twierdzenia Tonellego. □

**Wniosek 12.18.4.** *Przypuśćmy, że $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $h \in L^r(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p, q, r \leqslant +\infty$. Załóżmy, że $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} \geqslant 1$, $\frac{1}{q}+\frac{1}{r} \geqslant 1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} \geqslant 2$ i niech $1 \leqslant s \leqslant +\infty$ będzie liczbą taką, że $\frac{1}{s} = \frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}-2$. Wtedy:*
- *sploty $f*(g*h)$ i $(f*g)*h$ są określone $\mathcal{L}^n$–prawie wszędzie,*
- *$f*(g*h) = (f*g)*h$ (a więc możemy określić $f*g*h$),*
- *$f*g*h \in L^s(\mathbb{R}^n)$,*
- *$\|f*g*h\|_{L^s} \leqslant \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}\|h\|_{L^r}$.*

**Definicja 12.18.5.** Wprowadzamy następującą konwencję dla funkcji mierzalnych $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ określonych na pewnym zbiorze $X$ z miarą nieujemną $\mu : \mathfrak{M} \longrightarrow [0, +\infty]$. Piszemy „$\operatorname{supp} f \subset A$”, gdzie $A \in \mathfrak{M}$, jeżeli $f = 0$ $\mu$–p.w. na $X \setminus A$ (66). Jeżeli $X$ jest przestrzenią topologiczną i $\mathcal{B}(X) \subset \mathfrak{M}$, to zdanie „$\operatorname{supp} f$ jest zbiorem zwartym” oznacza, że istnieje zbiór zwarty $K \subset X$ taki, że $\operatorname{supp} f \subset K$.

**Twierdzenie 12.18.6.** (a) *Niech $f, g$ będą takie, jak w Twierdzeniu 12.18.3. Załóżmy, że* $\operatorname{supp} f \subset K$ *i* $\operatorname{supp} g \subset L$, *gdzie $K, L \subset \mathbb{R}^n$ są zbiorami zwartymi. Wtedy*

$$\operatorname{supp}(f*g) \subset K + L.$$

*W szczególności,* $\operatorname{supp}(f*g)$ *jest również zbiorem zwartym.*

(b) *Jeżeli $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$,* $\operatorname{supp} f \subset K \subset\subset \mathbb{R}^n$ *i $g \in \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, to $f*g \in \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ oraz $D^\alpha(f*g) = f*(D^\alpha g)$ dla dowolnego wielowskaźnika $\alpha$ takiego, że $|\alpha| \leqslant k$ ($k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$).*

*Dowód.* (a) wynika bezpośrednio ze wzoru na splot.

Dla dowodu (b) zastosujemy Twierdzenie 12.16.1 do $\Omega := \mathbb{R}^n$, $X := K$ oraz do odwzorowania

$$\mathbb{R}^n \times K \ni (x, y) \overset{F}{\longmapsto} f(y)g(x-y).$$

Mamy $|D_x^\alpha F(x, y)| = |f(y)D^\alpha g(x-y)| \leqslant M_\alpha|f(y)|$, gdzie $M_\alpha := \max_{\mathbb{R}^n}|D^\alpha g|$. Pozostaje zauważyć, że $M_\alpha|f| \in L^1(X, \mathbb{C}, \mathcal{L}^n)$. □

[Wykład 19.04.2021 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ]

## 12.19. Regularyzacja

**Definicja 12.19.1.** Ustalmy funkcję $\Phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ taką, że:
- $\Phi \geqslant 0$,
- $\operatorname{supp}\Phi \subset \overline{\mathbb{B}}_n$,
- $\Phi(x_1 \dots, x_n) = \Phi(|x_1|, \dots, |x_n|)$,
- $\int_{\mathbb{R}^n}\Phi d\mathcal{L}^n = 1$.

Każdą taką funkcję nazywamy *funkcją regularyzującą w* $\mathbb{R}^n$. Dla przykładu, niech

$$\Psi(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}}, & \text{jeżeli } \|x\| < 1 \\ 0, & \text{jeżeli } \|x\| \geqslant 1 \end{cases}, \quad c := \int_{\mathbb{B}_n}\Psi d\mathcal{L}^n.$$

Wtedy $\Phi := \frac{1}{c}\Psi$ jest funkcją regularyzującą.

Połóżmy

$$\Phi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\Phi(x/\varepsilon), \quad \varepsilon > 0,\ x \in \mathbb{R}^n,$$

i zauważmy, że na podstawie twierdzenia o zmianie zmiennych dostajemy

$$\int_{\mathbb{R}^n}\Phi_\varepsilon\, d\mathcal{L}^n = 1.$$

(66) Uwaga: Nie definiujemy w ten sposób zbioru $\operatorname{supp} f$, ale mówimy jedynie, co to znaczy, że $\operatorname{supp} f \subset A$.

Dla $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ zdefiniujmy $\varepsilon$*–regularyzację* funkcji $f$ jako

$$f_\varepsilon := f * \varPhi_\varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

**Obserwacja 12.19.2.** Wobec Twierdzenia 12.18.3 mamy:

- $f_\varepsilon \in L^p(\mathbb{R}^n)$,
- $\|f_\varepsilon\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^p}$.

Na podstawie twierdzenia o zmianie zmiennych dostajemy:

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{B}_n} f(x - \varepsilon y)\varPhi(y)\, d\mathcal{L}^n(y), \quad \varepsilon > 0,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

**Twierdzenie 12.19.3.** *Niech* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ *i niech* $\operatorname{supp} f \subset K \subset\subset \mathbb{R}^n$ (67). *Wtedy:*

(a) $f_\varepsilon \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} f_\varepsilon \subset K^{(\varepsilon)} := \bigcup_{x \in K} \overline{\mathbb{B}}(x, \varepsilon)$ (68);

(b) *jeżeli* $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$, *to* $f_\varepsilon \longrightarrow f$ *jednostajnie na* $\mathbb{R}^n$ *przy* $\varepsilon \longrightarrow 0$; (69)

(c) *jeżeli* $p < +\infty$, *to* $f_\varepsilon \xrightarrow{L^p} f$ *przy* $\varepsilon \longrightarrow 0$;

(d) *jeżeli* $f \in \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^n)$, *to* $D^\alpha(f_\varepsilon) = (D^\alpha f)_\varepsilon$ *oraz* $D^\alpha(f_\varepsilon) \longrightarrow D^\alpha f$ *jednostajnie na* $\mathbb{R}^n$ *przy* $\varepsilon \longrightarrow 0$ *dla* $|\alpha| \leqslant k$.

*Dowód*. (a) wynika z Twierdzenia 12.18.6.

(b) Funkcja $f$ jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}^n$. Mamy więc

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L^\infty} \leqslant \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{B}_n} |f(x - \varepsilon y) - f(x)|\varPhi(y)\, d\mathcal{L}^n(y) \leqslant \omega_f(\varepsilon) \longrightarrow 0, \ \text{ gdy } \varepsilon \longrightarrow 0,$$

gdzie — przypomnijmy —

$$\omega_f(\varepsilon) := \sup\{|f(x') - f(x'')| : \|x' - x''\| \leqslant \varepsilon\}.$$

(c) Niech $\eta > 0$. Na podstawie Twierdzenia 12.17.2 istnieje $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$ taka, że $\|g - f\|_{L^p} \leqslant \eta$. Na podstawie (b), mamy: $g_\varepsilon \xrightarrow{L^p} g$ gdy $\varepsilon \longrightarrow 0$. Dalej:

$$\begin{aligned}\|f_\varepsilon - f\|_{L^p} &\leqslant \|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_{L^p} + \|g_\varepsilon - g\|_{L^p} + \|g - f\|_{L^p} \\ &\leqslant \|f - g\|_{L^p} + \|g_\varepsilon - g\|_{L^p} + \eta \leqslant 2\eta + \|g_\varepsilon - g\|_{L^p} \leqslant 3\eta, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.\end{aligned}$$

(d) wynika z (b) i Twierdzenia 12.18.6(b). □

Jako natychmiastowy wniosek z Twierdzenia 12.17.2 i Twierdzenia 12.19.3 dostajemy następujący wynik.

**Wniosek 12.19.4.** *Dla dowolnego zbioru otwartego* $\varOmega \subset \mathbb{R}^n$ *i dla* $1 \leqslant p < +\infty$ *przestrzeń* $\mathcal{C}_0^\infty(\varOmega, \mathbb{C})$ *jest gęsta w* $L^p(\varOmega, \mathbb{C}, \mathcal{L}^n)$ *w normie* $L^p$.

## 12.20. Rozkład jedności

**Wniosek 12.20.1.** *Dla dowolnego zbioru otwartego* $\varOmega \subset \mathbb{R}^n$ *i dla dowolnego kompaktu* $K \subset \varOmega$ *istnieje funkcja* $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\varOmega)$ *taka, że* $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$ *i* $\varphi = 1$ *na* $K$.

*Dowód*. Jeżeli $\varOmega \subsetneq \mathbb{R}^n$, to niech $4r := \operatorname{dist}(K, \mathbb{R}^n \setminus \varOmega)$. Dla $\varOmega = \mathbb{R}^n$ ustalmy dowolne $r > 0$. Wystarczy wziąć

$$\varphi := \big(\chi_{K^{(2r)}}\big)_r$$

i skorzystać z Twierdzenia 12.19.3. Istotnie, $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, $\operatorname{supp} \varphi \subset (\operatorname{supp} \chi_{K^{(2r)}})^{(r)} \subset K^{(3r)} \subset \varOmega$ oraz (wprost z definicji) $\varphi = 1$ na $K$. □

(67) W szczególności, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

(68) Odnotujmy, że $K^{(\varepsilon)}$ jest zwarty.

(69) W szczególności, wobec (a), $f_\varepsilon \xrightarrow{L^p} f$ gdy $\varepsilon \longrightarrow 0$ (przy dowolnym $p$).

**Twierdzenie 12.20.2** (Rozkład jedności)**.** *Niech* $(\varOmega_t)_{t\in T}$ *będzie dowolną rodziną zbiorów otwartych w* $\mathbb{R}^n$*,* $\varOmega := \bigcup\limits_{t\in T} \varOmega_t$*. Wtedy istnieje rodzina funkcji*

$$(\varphi_i)_{i\in I} \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n, [0,1]) \quad \big({}^{70}\big)$$

*taka, że:*

- *istnieje odwzorowanie* $\tau : I \longrightarrow T$ *takie, że* $\operatorname{supp}\varphi_i \subset \varOmega_{\tau(i)}$*,* $i \in I$*,* $\big({}^{71}\big)$
- *rodzina* $(\operatorname{supp}\varphi_i)_{i\in I}$ *jest lokalnie skończona na* $\varOmega$ $\big({}^{72}\big)$*,*
- $\sum\limits_{i\in I} \varphi_i \equiv 1$ *na* $\varOmega$ $\big({}^{73}\big)$*.*

*Dowód*. Krok $1^0$: Pokażemy, że

*Dla dowolnego zbioru zwartego* $K \subset \varOmega$ *istnieje rodzina*

$$(\psi_t)_{t\in T} \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n, [0,1])$$

*taka, że:*

- $\operatorname{supp}\psi_t \subset \varOmega_t$*,* $t \in T$*,*
- $\psi_t \equiv 0$ *z wyjątkiem skończonej liczby indeksów* $t$*,*
- $\sum\limits_{t\in T} \psi_t = 1$ *na* $K$*.*

Istotnie, ponieważ $K$ jest zwarty, zatem istnieje zbiór skończony $T_0 \subset T$ taki, że $K \subset \bigcup\limits_{t\in T_0} \varOmega_t$. Zauważmy, że istnieją zbiory zwarte $K_t \subset \varOmega_t$, $t \in T_0$, takie, że $K \subset \bigcup\limits_{t\in T_0} K_t$ $\big({}^{74}\big)$. Na podstawie Wniosku 12.20.1, dla każdego $t \in T_0$ istnieje funkcja $\varTheta_t \in \mathcal{C}_0^\infty(\varOmega_t, [0,1])$ taka, że $\varTheta_t = 1$ na $K_t$ $\big({}^{75}\big)$. Niech $\varTheta_0 := \sum\limits_{t\in T_0} \varTheta_t$ i niech $U := \{x \in \varOmega : \varTheta_0(x) > 0\}$. Wtedy $K \subset U$. Korzystamy jeszcze raz z Wniosku 12.20.1 i dostajemy funkcję $\varTheta \in \mathcal{C}_0^\infty(U, [0,1])$ taką, że $\varTheta = 1$ na $K$. Teraz definiujemy:

$$\psi_t := \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } t \in T \setminus T_0 \\ \begin{cases} \varTheta \frac{\varTheta_t}{\varTheta_0} & \text{na } U \\ 0 & \text{na } \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp}\varTheta \end{cases}, & \text{jeżeli } t \in T_0 \end{cases}.$$

Widzimy, że $\psi_t \in \mathcal{C}_0^\infty(\varOmega_t, [0,1])$, $t \in T$, $\psi_t \equiv 0$ dla $t \notin T_0$ i $\sum\limits_{t\in T} \psi_t = 1$ na $K$.

Krok $2^0$: Ustalmy ciąg kompaktów $(L_j)_{j=1}^\infty$ taki, że $L_j \subset \operatorname{int} L_{j+1} \subset \varOmega$ i $\varOmega = \bigcup\limits_{j=1}^\infty L_j$ $\big({}^{76}\big)$. Niech $L_{-1} = L_0 := \varnothing$.

Dla każdego $j \in \mathbb{N}$ rozważamy kompakt $K_j := L_j \setminus \operatorname{int} L_{j-1}$ oraz jego pokrycie otwarte zbiorami $\varOmega_{j,t} := (\operatorname{int} L_{j+1} \setminus L_{j-2}) \cap \varOmega_t$, $t \in T$. Na podstawie Kroku $1^0$, dla dowolnego $j \in \mathbb{N}$ istnieje podzbiór skończony $T_j \subset T$ oraz funkcje $\psi_{j,t} \in \mathcal{C}_0^\infty(\varOmega_{j,t}, [0,1])$, $t \in T_j$, takie, że $\sum\limits_{t\in T_j} \psi_{j,t} = 1$ na $K_j$. Ponieważ $\operatorname{supp}\psi_{j,t} \cap L_{j-2} = \varnothing$, zatem rodzina $\{\operatorname{supp}\psi_{j,t} : j \in \mathbb{N},\ t \in T_j\}$ jest lokalnie skończona na $\varOmega$. W szczególności, funkcja $\psi_0 := \sum\limits_{j=1}^\infty \sum\limits_{t\in T_j} \psi_{j,t}$ jest klasy $\mathcal{C}^\infty(\varOmega)$. Oczywiście $\psi_0 > 0$ na $\varOmega$. Teraz kładziemy $\varphi_{j,t} := \psi_{j,t}/\psi_0$, $(j,t) \in I := \{(j,t) : j \in \mathbb{N},\ t \in T_j\}$, $\tau(j,t) := t$. $\square$

---

$\big({}^{70}\big)$ Zwana *rozkładem jedności dla pokrycia* $(\varOmega_t)_{t\in T}$.

$\big({}^{71}\big)$ Odwzorowanie $\tau$ nazywamy *odwzorowaniem wpisującym*. W trakcie dowodu zobaczymy, że można wybrać $I \subset \mathbb{N} \times T$ i $\tau(j,t) = t$.

$\big({}^{72}\big)$ Tzn. każdy punkt $x \in \varOmega$ ma otoczenie otwarte $U \subset \varOmega$ takie, że zbiór $\{i \in I : \operatorname{supp}\varphi_i \cap U \neq \varnothing\}$ jest skończony.

$\big({}^{73}\big)$ Wobec poprzedniej własności, dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^n$ istnieje jedynie skończona liczba $i \in I$ takich, że $\varphi_i(x) \neq 0$, więc $\sum\limits_{i\in I} \varphi_i(x)$ sprowadza się do sumy skończonej.

$\big({}^{74}\big)$ Niech $K_{t,\varepsilon} := \{x \in \varOmega_t \cap \overline{\mathbb{B}}(1/\varepsilon) : \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \varOmega_t) \geqslant \varepsilon\}$. Ponieważ $\bigcup\limits_{t\in T_C or 12.20.10} \bigcup\limits_{\varepsilon>0} \operatorname{int} K_{t,\varepsilon} = \bigcup\limits_{t\in T_0} \varOmega_t \supset K$, zatem istnieje $\varepsilon_0 > 0$ takie, że możemy przyjąć $K_t := K_{t,\varepsilon_0}$.

$\big({}^{75}\big)$ Tu i dalej stosujemy oczywiste utożsamienie: $\mathcal{C}_0^\infty(\varOmega) \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dla dowolnego zbioru otwartego $\varOmega \subset \mathbb{R}^n$.

$\big({}^{76}\big)$ Niech $L_j := \{x \in \varOmega \cap \overline{\mathbb{B}}(j) : \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \varOmega) \geqslant 1/j\}$. Oczywiście $L_j$ jest zwarty oraz $L_j \subset \{x \in \varOmega \cap \mathbb{B}(j+1) : \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \varOmega) > 1/(j+1)\} \subset \operatorname{int} L_{j+1}$. Ponadto, $\operatorname{int} L_j \nearrow \varOmega$.

[Wykład 22.04.2021 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ]

**Twierdzenie 12.20.3** (Rozkład jedności). *Niech $(\Omega_t)_{t\in T}$ będzie dowolną rodziną zbiorów otwartych w $\mathbb{R}^n$, $\Omega := \bigcup_{t\in T} \Omega_t$. Wtedy istnieje rodzina funkcji $(\varphi_t)_{t\in T} \subset \mathcal{C}^\infty(\Omega, [0,1])$ (77) taka, że:*

- $\operatorname{supp}\varphi_t \subset \Omega_t$ (78), $t \in T$,
- *rodzina* $(\operatorname{supp}\varphi_t)_{t\in T}$ *jest lokalnie skończona na* $\Omega$,
- $\sum_{t\in T} \varphi_t \equiv 1$ *na* $\Omega$.

*Dowód*. Na wstępie zauważmy, że możemy założyć, że pokrycie $(\Omega_t)_{t\in T}$ jest przeliczalne i lokalnie skończone na $\Omega$.

Istotnie, na podstawie twierdzenia Lindelöfa, możemy wybrać podpokrycie przeliczalne $(\Omega_{t_\nu})_{\nu=1}^\infty$. Przypuśćmy, że znaleźliśmy rozkład jedności dla tego podpokrycia. Wtedy wystarczy położyć $\varphi_t :\equiv 0$ dla $t \in T \setminus \{t_1, t_2, \dots\}$ i otrzymamy rozkład jedności dla wyjściowego pokrycia. Teraz musimy skorzystać z *przeliczalnej parazwartości* zbioru $\Omega$ (79), wobec której istnieje lokalnie skończone pokrycie $(W_\nu)_{\nu=1}^\infty$ zbioru $\Omega$ takie, że $W_\nu \subset \Omega_{t_\nu}$, $\nu = 1, 2, \dots$. Przypuśćmy, że znaleźliśmy rozkład jedności dla tego nowego pokrycia. Jest oczywiste, że jest to również rozkład jedności dla pokrycia $(\Omega_{t_\nu})_{\nu=1}^\infty$.

Załóżmy więc, że pokrycie $(\Omega_t)_{t\in T}$ jest lokalnie skończone na $\Omega$. Zachowujemy oznaczenia z poprzedniego dowodu. Niech $\varphi_t := \sum_{j=1}^\infty \varphi_{j,t}$, $t \in T$. Oczywiście $\varphi_t \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ i $\sum_{t\in T} \varphi_t \equiv 1$ w $\Omega$. Pozostaje zbadać, gdzie leży $\operatorname{supp}\varphi_t$. Oczywiście,

$$\{x \in \Omega : \varphi_t(x) \neq 0\} \subset \bigcup_{j=1}^\infty \operatorname{supp}\varphi_{j,t} =: F_t \subset \Omega_t.$$

Ponieważ rodzina $(\operatorname{supp}\varphi_{j,t})_{j=1}^\infty$ jest lokalnie skończona na $\Omega$ zbiór $F_t$ jest domknięty w $\Omega$, a stąd $\operatorname{supp}\varphi_t \subset F_t \subset \Omega_t$. □

**Wniosek 12.20.4.** *Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym, niech $F \subset \Omega$ będzie zbiorem domkniętym w $\Omega$ i niech $U \subset \Omega$ będzie otwartym otoczeniem $F$. Wtedy istnieje funkcja $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, [0,1])$ taka, że $\operatorname{supp}\varphi \subset U$ i $\varphi = 1$ w pewnym otoczeniu zbioru $F$.*

*Dowód*. Stosujemy Twierdzenie 12.20.3 do pokrycia zbioru $\Omega$ złożonego z dwóch zbiorów $\Omega_1 := U$ i $\Omega_2 := \Omega \setminus F$. Niech $\varphi_1, \varphi_2$ będzie $\mathcal{C}^\infty$ rozkładem jedności przyporządkowanym temu pokryciu: $\varphi_j \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, [0,1])$, $\operatorname{supp}\varphi_j \subset \Omega_j$, $j = 1, 2$, $\varphi_1 + \varphi_2 \equiv 1$. Niech $\varphi := \varphi_1$. Wtedy oczywiście $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, [0,1])$, $\operatorname{supp}\varphi \subset U$. Ponadto, $\varphi = 1$ na zbiorze $\Omega \setminus \operatorname{supp}\varphi_2$, który jest otoczeniem $F$. □

**Wniosek 12.20.5.** *Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i niech $F_0, F_1 \subset \Omega$ będą zbiorami domkniętymi w $\Omega$ i takimi, że $F_0 \cap F_1 = \varnothing$. Wtedy istnieje funkcja $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, [0,1])$ taka, że $\varphi = j$ w pewnym otoczeniu zbioru $F_j$, $j = 0, 1$.*

*Dowód*. Stosujemy Wniosek 12.20.4 do zbioru domkniętego $F := F_1$ i jego otoczenia $U := \Omega \setminus F_0$. Niech $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, [0,1])$ będzie funkcją taką, że $\operatorname{supp}\varphi \subset U$ i $\varphi = 1$ w pewnym otoczeniu zbioru $F_1$. Wtedy $\varphi = 0$ na zbiorze $\Omega \setminus \operatorname{supp}\varphi$, który jest otoczeniem $F_0$. □

[Wykład 26.04.2021 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ]

## 12.21. Miara i całka Lebesgue'a na podrozmaitościach w $\mathbb{R}^n$

**Definicja 12.21.1.** Niech $M \in \mathcal{M}_d^1(\mathbb{R}^n)$.

- Jeżeli $d = 0$, to przez miarę Lebesgue'a na $M$ rozumiemy miarę liczącą. Kładziemy $\mathcal{L}_M := \mathcal{P}(M)$ i $\mathcal{L}^M :=$ miara licząca.
- W przypadku, gdy $d = n$ podrozmaitość $M$ jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^n$. Wtedy przyjmujemy $\mathcal{L}_M := \mathcal{L}_n|_M$, $\mathcal{L}^M := \mathcal{L}^n|_{\mathcal{L}_M}$.

---

(77) Zwana również *rozkładem jedności dla pokrycia* $(\Omega_t)_{t\in T}$.
(78) $\operatorname{supp}\varphi_t$ jest relatywnie domkniętym podzbiorem $\Omega$.
(79) Zob. np. R. Engelking, *Topologia ogólna*, PWN, Warszawa, 1976, Rozdział 5, § 2.

• Pozostaje przypadek $1 \leqslant d \leqslant n-1$. Zdefiniujmy $\mathcal{L}_M$ jako rodzinę wszystkich $A \subset M$ takich, że dla dowolnej lokalnej parametryzacji $p : P \longrightarrow U$ mamy $p^{-1}(A) \in \mathcal{L}_d$. Jest rzeczą widoczną, że $\mathcal{L}_M$ jest $\sigma$–algebrą oraz, że $\mathcal{B}(M) \subset \mathcal{L}_M$.

**Twierdzenie 12.21.2.** *Niech $(p_i : P_i \longrightarrow U_i)_{i\in I}$ będzie dowolnym, co najwyżej przeliczalnym, układem lokalnych parametryzacji takim, że $\bigcup_{i\in I} U_i = M$ ([80]).*

(a) *Dla $A \subset M$ mamy: $A \in \mathcal{L}_M \iff \forall_{i\in I} : p_i^{-1}(A) \in \mathcal{L}_d$.*

(b) *Dla $f : M \longrightarrow Y$, gdzie $Y$ jest przestrzenią topologiczną, następujące warunki są równoważne:*

(i) *$f \in \mathcal{M}(M, Y, \mathcal{L}_M)$;*

(ii) *$f \circ p \in \mathcal{M}(P, Y, \mathcal{L}_d)$ dla dowolnej lokalnej parametryzacji $p : P \longrightarrow U$;*

(iii) *$\forall_{i\in I} : f \circ p_i \in \mathcal{M}(P_i, Y, \mathcal{L}_d)$.*

*Dowód.* (a) Niech $p : P \longrightarrow U$ będzie dowolną parametryzacją i niech $\varphi_i := p^{-1} \circ p_i : p_i^{-1}(U \cap U_i) \longrightarrow p^{-1}(U \cap U_i)$, $i \in I$. Wtedy $p^{-1}(A) = p^{-1}(A \cap \bigcup_{i\in I} U_i) = \bigcup_{i\in I} p^{-1}(A \cap U_i) = \bigcup_{i\in I} \varphi_i(p_i^{-1}(A) \cap p_i^{-1}(U)) \in \mathcal{L}_d$ na podstawie założeń i Twierdzenia 12.10.6(c).

(b) (i) $\Longrightarrow$ (ii): $(f \circ p)^{-1}(\Omega) = p^{-1}(f^{-1}(\Omega))$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): oczywiste.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): $p_i^{-1}(f^{-1}(\Omega)) = (f \circ p_i)^{-1}(\Omega)$ i korzystamy z (a). $\square$

Dla odwzorowania różniczkowalnego $f = (f_1, \dots, f_n) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ gdzie $\Omega$ jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^d$, $d \leqslant n$, niech $J_d f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$,

$$J_d f := \Big( \sum_{I \in \Lambda_d^n} \Big| \frac{\partial(f_{i_1}, \dots, f_{i_d})}{\partial(t_1, \dots, t_d)} \Big|^2 \Big)^{1/2},$$

gdzie

$$\frac{\partial(f_{i_1}, \dots, f_{i_d})}{\partial(t_1, \dots, t_d)} := \det \Big[ \frac{\partial f_{i_j}}{\partial t_k} \Big]_{j,k=1,\dots,d},$$

$$\Lambda_d^n := \{I = (i_1, \dots, i_d) : 1 \leqslant i_1 < \dots < i_d \leqslant n\}.$$

Zauważmy, że dla $d = n$ symbol $J_d f$ pokrywa się z wprowadzonym poprzednio modułem wyznacznika macierzy Jacobiego $|f'|$. Odnotujmy również, że $J_d f(t_0) > 0 \iff \operatorname{rank} f'(t_0) = d$.

**Obserwacja 12.21.3.** Jeżeli $\varphi : G \longrightarrow \Omega$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ są odwzorowaniami różniczkowalnymi, gdzie $G$ i $\Omega$ są podzbiorami otwartymi w $\mathbb{R}^d$ i $\varphi(G) \subset \Omega$, to

$$J_d(f \circ \varphi) = ((J_d f) \circ \varphi) \cdot |\varphi'|.$$

**Twierdzenie 12.21.4.** *Istnieje dokładnie jedna miara $\mathcal{L}^M : \mathcal{L}_M \longrightarrow [0, +\infty]$ taka, że dla dowolnej lokalnej parametryzacji $p : P \longrightarrow U$ mamy:*

$$\mathcal{L}^M(A \cap U) = \int_{p^{-1}(A)} J_d p \, d\mathcal{L}^d, \quad A \in \mathcal{L}_M. \tag{*}$$

*Ponadto miara ta ma poniższe własności.*

(a) *Jest zupełna, $\mathcal{B}$–regularna (Definicja 12.7.1) oraz istnieje ciąg $(\Omega_j)_{j=1}^\infty$ zbiorów otwartych i relatywnie zwartych w $M$, dla którego $M = \bigcup_{j=1}^\infty \Omega_j$ i $\mathcal{L}^M(\Omega_j) < +\infty$, $j \in \mathbb{N}$ ([81]). W szczególności, dla miary $\mathcal{L}^M$ zachodzą warunki* (R1), (R2), (R3), (R4) *z Twierdzenia 12.7.5.*

(b) *Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{M}^+(M, \mathcal{L}_M)$ oraz dla dowolnej parametryzacji lokalnej $p : P \longrightarrow U$ mamy:*

$$\int_U f d\mathcal{L}^M = \int_P (f \circ p) J_d p \, d\mathcal{L}^d. \tag{**}$$

(c) *Dla dowolnej funkcji $f \in L^1(M, \mathbb{C}, \mathcal{L}^M)$ oraz dla dowolnej parametryzacji lokalnej $p : P \longrightarrow U$ mamy: $(f \circ p) J_d p \in L^1(P, \mathbb{C}, \mathcal{L}^d)$ oraz zachodzi (**).*

---

([80]) Rodzina taka istnieje na podstawie twierdzenia Lindelöfa — zob. dowód Twierdzenia 12.21.5.

([81]) Por. Twierdzenie 12.7.5.

Miara $\mathcal{L}^M$ nosi nazwę *miary Lebesgue'a na* $M$.

*Dowód*. Ustalmy przeliczalną rodzinę lokalnych parametryzacji $(p_j : P_j \longrightarrow U_j)_{j=1}^\infty$ taką, że $\bigcup_{j=1}^\infty U_j = M$. Niech $B_1 := U_1$, $B_j := U_j \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_{j-1})$, $j \geqslant 2$. Oczywiście $B_j \in \mathcal{B}(M) \subset \mathcal{L}_M$, $j \in \mathbb{N}$, oraz $\bigcup_{j=1}^\infty B_j = M$. Teraz dla zbioru $A \in \mathcal{L}_M$ kładziemy:

$$\mathcal{L}^M(A) := \sum_{j=1}^\infty \int_{p_j^{-1}(A\cap B_j)} J_d p_j \, d\mathcal{L}^d.$$

Udowodnimy, że jest to miara. Niech $(A_k)_{k=1}^\infty$ będzie ciągiem parami rozłącznych zbiorów mierzalnych. Wtedy:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^M\Big(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\Big) &= \sum_{j=1}^\infty \int_{p_j^{-1}((\bigcup_{k=1}^\infty A_k)\cap B_j)} J_d p_j \, d\mathcal{L}^d = \sum_{j=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty \int_{p_j^{-1}(A_k\cap B_j)} J_d p_j \, d\mathcal{L}^d \\ &= \sum_{k=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty \int_{p_j^{-1}(A_k\cap B_j)} J_d p_j \, d\mathcal{L}^d = \sum_{k=1}^\infty \mathcal{L}^M(A_k).\end{aligned}$$

Teraz sprawdzimy wzór (*). Ustalmy lokalną parametryzację $p : P \longrightarrow U$ i niech $\varphi_j := p^{-1} \circ p_j : p_j^{-1}(U \cap U_j) \longrightarrow p^{-1}(U \cap U_j)$, $\psi_j := \varphi_j^{-1}$, $j \in \mathbb{N}$. Wtedy dla $A \in \mathcal{L}_M$, $A \subset U$, korzystając z twierdzenia o zmianie zmiennych i z Obserwacji 12.21.3, mamy:

$$\begin{aligned}\int_{p^{-1}(A)} J_d p \, d\mathcal{L}^d &= \sum_{j=1}^\infty \int_{p^{-1}(A\cap B_j)} J_d p \, d\mathcal{L}^d = \sum_{j=1}^\infty \int_{\varphi_j(p_j^{-1}(A\cap B_j\cap U))} J_d(p_j \circ \psi_j) \, d\mathcal{L}^d \\ &= \sum_{j=1}^\infty \int_{p_j^{-1}(A\cap B_j)} ((J_d(p_j \circ \psi_j)) \circ \varphi_j) \cdot |\varphi_j'| \, d\mathcal{L}^d = \sum_{j=1}^\infty \int_{p_j^{-1}(A\cap B_j)} J_d p_j \, d\mathcal{L}^d = \mathcal{L}^M(A).\end{aligned}$$

Niech $\mu : \mathcal{L}_M \longrightarrow [0, +\infty]$ będzie inną miarą spełniającą (*). Wtedy dla $A \in \mathcal{L}_M$ mamy:

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^\infty \mu(A \cap B_j) = \sum_{j=1}^\infty \int_{p_j^{-1}(A\cap B_j)} J_d p_j \, d\mathcal{L}^d = \mathcal{L}^M(A),$$

a więc $\mathcal{L}^M$ jest jedyna.

(a) Zupełność. Niech $B \subset A \in \mathcal{L}_M$ i $\mathcal{L}^M(A) = 0$. Wtedy, na podstawie (*), dla dowolnej parametryzacji $p : P \longrightarrow U$, zbiór $p^{-1}(A)$ jest miary zero w $\mathbb{R}^d$. Ponieważ $p^{-1}(B) \subset p^{-1}(A)$, a $\mathcal{L}^d$ jest zupełna, więc $p^{-1}(B) \in \mathcal{L}_d$. Oznacza to, że $B \in \mathcal{L}_M$.

Regularność. Niech $A \in \mathcal{L}_M$. Ponieważ $\mathcal{L}^d$ jest $\mathcal{B}$–regularna (Twierdzenie 12.7.5), więc dla dowolnego $j$ istnieje zbiór $C_j \subset P_j$ typu $\mathcal{G}_\delta$ oraz zbiór $Z_j \subset \mathbb{R}^d$ miary zero takie, że $p_j^{-1}(A \cap B_j) = C_j \setminus Z_j$. Niech $\widehat{A} := \bigcup_{j=1}^\infty p_j(C_j)$. Oczywiście $A \subset \widehat{A}$, $\widehat{A}$ jest borelowski oraz

$$\mathcal{L}^M(A) = \sum_{j=1}^\infty \int_{p_j^{-1}(A\cap B_j)} J_d p_j \, d\mathcal{L}^d = \sum_{j=1}^\infty \int_{C_j} J_d p_j \, d\mathcal{L}^d = \sum_{j=1}^\infty \mathcal{L}^M(p_j(C_j)) \geqslant \mathcal{L}^M(\widehat{A}),$$

skąd wynika, że $\mathcal{L}^M(\widehat{A}) = \mathcal{L}^M(A)$.

Przechodzimy do sprawdzenia ostatniego warunku. Połóżmy

$$P_{j,k} := \Big\{t \in P_j \cap \mathbb{B}(k) : \operatorname{dist}(t, \mathbb{R}^d \setminus P_j) > \frac{1}{k}\Big\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

i niech

$$\Omega_N := \bigcup_{j=1}^N p_j(P_{j,N}), \quad N \in \mathbb{N}.$$

Widać, że $\Omega_N$ jest otwarty i relatywnie zwarty w $M$, $\Omega_N \subset \Omega_{N+1}$, $\Omega_N \nearrow M$ oraz

$$\mathcal{L}^M(\Omega_N) \leqslant \sum_{j=1}^{N} \int_{P_{j,N}} J_d p_j \, d\mathcal{L}^d < +\infty.$$

(b) Dla $f = \chi_A$ wynik sprowadza się do (*). Dalej klasycznie: najpierw dla $\mathcal{M}_0^+(M, \mathcal{L}_M)$, a następnie przejście graniczne.

(c) Wystarczy rozważyć przypadek rzeczywisty. Całkowalność otrzymujemy z (b) zastosowanego do $|f|$. Wzór otrzymujemy z (b) zastosowanego do $f_\pm$. $\square$

**Twierdzenie 12.21.5.** *Niech $M'$ będzie $d'$–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$ w $\mathbb{R}^n$ taką, że $M' \subset M$. Jeżeli $d' < d \leqslant n$, to $\mathcal{L}^M(M') = 0$.*

*Dowód.* Przypadek $d' = 0$ jest oczywisty. Niech $1 \leqslant d' < d \leqslant n$. Na podstawie Lematu 10.1.21, dla dowolnego punktu $a \in M'$ istnieje lokalna parametryzacja $p_a : P_a \longrightarrow U_a$, $a \in U_a$, taka, że $P_a = P'_a \times P''_a \subset \mathbb{R}^{d'} \times \mathbb{R}^{d-d'} = \mathbb{R}^d$ jest otwartą kostką i $p_a(P'_a \times \{0\}^{d-d'}) = M' \cap U_a$. W szczególności, $M' \cap U_a \in \mathcal{L}_M$. Na podstawie twierdzenia Lindelöfa z pokrycia $(U_a)_{a \in M}$ można wybrać pokrycie przeliczalne $(U_{a_j})_{j=1}^\infty$ rozmaitości $M'$. Dla uproszczenia, niech

$$(p_{a_j} : P_{a_j} \longrightarrow U_{a_j}) = (p_j : P_j \longrightarrow U_j).$$

Wtedy

$$\mathcal{L}^M(M') \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^M(M' \cap U_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{p_j^{-1}(M' \cap U_j)} J_d p_j \, d\mathcal{L}^d \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \int_{P'_j \times \{0\}^{d-d'}} J_d p_j \, d\mathcal{L}^d = 0. \qquad \square$$

ROZDZIAŁ 13

# Twierdzenie Stokesa

[Wykład 29.04.2021 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ]

## 13.1. Formy różniczkowe

Niech $E$ i $F$ będą rzeczywistymi przestrzeniami unormowanymi $\left({}^{1}\right)$. Niech $r \in \mathbb{N}$ i niech $\sigma \in S_r$. Z permutacją $\sigma$ kojarzymy odwzorowanie $\sigma = \sigma_E : E^r \longrightarrow E^r$ dane wzorem $\sigma(x_1, \dots, x_r) := (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(r)})$. Przypomnijmy, że odwzorowania wieloliniowe symetryczne były charakteryzowane przy pomocy relacji $L \in \operatorname{Hom}_s^r(E, F) \Longleftrightarrow \forall_{\sigma \in S_r} : L \circ \sigma = L$.

**Definicja 13.1.1.** Mówimy, że odwzorowanie $L \in \operatorname{Hom}^r(E, F)$ jest *skośnie symetryczne (antysymetryczne)* ($L \in \operatorname{Hom}_a^r(E, F)$), jeżeli $\forall_{\sigma \in S_r} : L \circ \sigma = (\operatorname{sgn} \sigma)L$.

W naturalny sposób wprowadzamy przestrzeń $\mathcal{L}_a^r(E, F)$ odwzorowań $r$–liniowych antysymetrycznych ciągłych.

Oczywiście, $\operatorname{Hom}_s^1(E, F) = \operatorname{Hom}_a^1(E, F) = \operatorname{Hom}^1(E, F)$ oraz $\mathcal{L}_s^1(E, F) = \mathcal{L}_a^1(E, F) = \mathcal{L}^1(E, F)$.

Przyjmijmy dodatkowo $\operatorname{Hom}_a^0(E, F) = \mathcal{L}_a^0(E, F) = \operatorname{Hom}^0(E, F) = \mathcal{L}^0(E, F) := F$.

**Obserwacja 13.1.2.** (a) $\operatorname{Hom}_a^r(E, F)$ jest podprzestrzenią wektorową $\operatorname{Hom}^r(E, F)$.

(b) $\mathcal{L}_a^r(E, F)$ jest podprzestrzenią domkniętą w $\mathcal{L}^r(E, F)$.

(c) $\mathcal{L}_a^r(E, F)$ jest Banacha o ile $F$ jest Banacha.

(d) Dla $L \in \operatorname{Hom}^r(E, F)$ ($r \geqslant 2$) następujące warunki są równoważne:

 (i) $L \in \operatorname{Hom}_a^r(E, F)$;

 (ii) $\forall_{x=(x_1,\dots,x_r)\in E^r}\ \forall_{j\in\{1,\dots,r-1\}} : \big(x_j = x_{j+1} \Longrightarrow L(x) = 0\big)$;

 (iii) $\forall_{x=(x_1,\dots,x_r)\in E^r}\ \forall_{j,k\in\{1,\dots,r\},\ j\neq k} : \big(x_j = x_k \Longrightarrow L(x) = 0\big)$.

**Obserwacja 13.1.3.** Załóżmy, że $n := \dim E \in \mathbb{N}$ i niech $(e_1, \dots, e_n)$ będzie ustaloną bazą $E$.

(a) Dla $L \in \operatorname{Hom}_a^r(E, F) = \mathcal{L}_a^r(E, F)$ ($r \geqslant 1$) i $x_j = \sum\limits_{k=1}^{n} x_{j,k} e_k \in E$, $j = 1, \dots, r$, mamy:

$$
\begin{aligned}
L(x_1, \dots, x_r) &= \sum_{k_1,\dots,k_r=1}^{n} x_{1,k_1} \cdots x_{r,k_r} L(e_{k_1}, \dots, e_{k_r}) \\
&= \sum_{1\leqslant k_1<\cdots<k_r\leqslant n} \Big(\sum_{\sigma\in S_r} (\operatorname{sgn}\sigma) x_{1,k_{\sigma(1)}} \dots x_{r,k_{\sigma(r)}}\Big) L(e_{k_1}, \dots, e_{k_r}) = \sum_{K\in\varLambda_r^n} (\det X_{(1,\dots,r),K}) L(e_K), \qquad (\dagger)
\end{aligned}
$$

gdzie:

- $\varLambda_r^n := \{(k_1, \dots, k_r) : 1 \leqslant k_1 < \cdots < k_r \leqslant n\}$,
- $X = [x_{j,k}]_{\substack{j=1,\dots,r \\ k=1\dots,n}} \in \mathbb{M}(r \times n; \mathbb{R})$,
- $X_{J,K} \in \mathbb{M}(r \times r; \mathbb{R})$ oznacza podmacierz powstałą z $X$ poprzez wybór wierszy o numerach $j_1, \dots, j_r$ i kolumn $k_1, \dots, k_r$,
- $e_K := (e_{k_1}, \dots, e_{k_r}) \in E^r$.

(b) $\mathcal{L}_a^r(E, F) = \{0\}$ dla $r > n$.

(c) Dla $K \in \varLambda_r^n$, niech $e_K^* : E^r \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie odwzorowaniem danym wzorem $e_K^*(x_1, \dots, x_r) := \det X_{(1,\dots,r),K}$. Z własności wyznaczników wynika natychmiast, że $e_K^* \in \mathcal{L}_a^r(E, \mathbb{R})$ oraz, że $e_K^*(e_J) = \delta_{K,J}$, $J, K \in \varLambda_r^n$. Oczywiście, dla $r = 1$ mamy $e_k^*(\xi) = \xi_k$, $k = 1, \dots, n$.

(d) $(\dagger)$ możemy zapisać w postaci $L = \sum\limits_{K\in\varLambda_r^n} L(e_K) e_K^*$, który ustala izomorfizm $\mathcal{L}_a^r(E, F) \simeq F^{\binom{n}{r}}$.

---

$\left({}^{1}\right)$ W przyszłości najistotniejszym będzie przypadek $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}$.

(e) W szczególności, gdy $F = \mathbb{R}$, to $\dim \mathcal{L}_a^r(E, \mathbb{R}) = \binom{n}{r}$ i $(e_K^*)_{K \in \Lambda_r^n}$ jest bazą $\mathcal{L}_a^r(E, \mathbb{R})$.

**Definicja 13.1.4.** Obecnie zdefiniujemy podstawową dla całej teorii operację *mnożenia zewnętrznego* odwzorowań skośnie symetrycznych $\operatorname{Hom}_a^r(E, \mathbb{R}) \times \operatorname{Hom}_a^s(E, F) \ni (u, v) \overset{\wedge}{\longmapsto} u \wedge v \in \operatorname{Hom}_a^{r+s}(E, F)$:

- jeżeli $r = s = 0$, to przyjmujemy $u \wedge v := u \cdot v$;
- jeżeli $r = 0$ i $s \geqslant 1$, to kładziemy $(u \wedge v)(x_1, \dots, x_s) := u \cdot v(x_1, \dots, x_s)$;
- jeżeli $r \geqslant 1$ i $s = 0$, to kładziemy $(u \wedge v)(x_1, \dots, x_r) := u(x_1, \dots, x_r) \cdot v$;
- jeżeli $r, s \geqslant 1$, to kładziemy

$$(u \wedge v)(x_1, \dots, x_{r+s}) = \sum_{\sigma \in S_{r,s}} (\operatorname{sgn} \sigma) u(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(r)}) \cdot v(x_{\sigma(r+1)}, \dots, x_{\sigma(r+s)}), \quad x_1, \dots, x_{r+s} \in E,$$

gdzie $S_{r,s} := \{\sigma \in S_{r+s} : \sigma(1) < \dots < \sigma(r),\ \sigma(r+1) < \dots < \sigma(r+s)\}$.

**Obserwacja 13.1.5.** Iloczyn zewnętrzy $u \wedge v$ jest poprawnie zdefiniowany oraz $\mathcal{L}_a^r(E, \mathbb{R}) \wedge \mathcal{L}_a^s(E, F) \subset \mathcal{L}_a^{r+s}(E, F)$.

Istotnie, przypadki, gdy $rs = 0$ nie budzą wątpliwości. Dla $rs \neq 0$ jest widoczne, że $u \wedge v \in \operatorname{Hom}^{r+s}(E, F)$. Aby wykazać, że $u \wedge v \in \operatorname{Hom}_a^{r+s}(E, F)$ skorzystamy z Obserwacji 13.1.2(d). Ustalmy $j \in \{1, \dots, r+s-1\}$ i przypuśćmy, że $x_j = x_{j+1}$. Niech

$$\begin{aligned}
A_1 &:= \{\sigma \in S_{r,s} : \{j, j+1\} \subset \{\sigma(1), \dots, \sigma(r)\}\}, \\
A_2 &:= \{\sigma \in S_{r,s} : \{j, j+1\} \subset \{\sigma(r+1), \dots, \sigma(r+s)\}\}, \\
C_1 &:= \{\sigma \in S_{r,s} : j \in \{\sigma(1), \dots, \sigma(r)\},\ j+1 \in \{\sigma(r+1), \dots, \sigma(r+s)\}\}, \\
C_2 &:= \{\sigma \in S_{r,s} : j+1 \in \{\sigma(1), \dots, \sigma(r)\},\ j \in \{\sigma(r+1), \dots, \sigma(r+s)\}\}.
\end{aligned}$$

Oczywiście, $\sum\limits_{\sigma \in A_i} (\operatorname{sgn} \sigma) u(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(r)}) \cdot v(x_{\sigma(r+1)}, \dots, x_{\sigma(r+s)}) = 0$, $i = 1, 2$. Pozostaje więc pokazać, że

$$\sum_{\sigma \in C_1} (\operatorname{sgn} \sigma) u(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(r)}) \cdot v(x_{\sigma(r+1)}, \dots, x_{\sigma(r+s)})$$
$$= - \sum_{\tau \in C_2} (\operatorname{sgn} \tau) u(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(r)}) \cdot v(x_{\tau(r+1)}, \dots, x_{\tau(r+s)}).$$

Wynika to natychmiast z następującego rozumowania. Bierzemy dowolną permutację $\sigma \in C_i$. Następnie w ciągu $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ zamieniamy miejscami elementy $j$ i $j+1$. W efekcie dostajemy nową permutację $\tau \in S_{r+s}$ taką, że $\operatorname{sgn} \tau = -\operatorname{sgn} \sigma$. Pozostaje zauważyć, że $\tau \in C_{3-i}$ — Ćwiczenie.

**Twierdzenie 13.1.6.** (a) *Operacja* $\wedge : \mathcal{L}_a^r(E, \mathbb{R}) \times \mathcal{L}_a^s(E, F) \longrightarrow \mathcal{L}_a^{r+s}(E, F)$ *jest dwuliniowa i ciągła. Ponadto,* $\| \wedge \| \leqslant \frac{(r+s)!}{r!s!}$.

(b) *Jeżeli* $F = \mathbb{R}$, *to* $u \wedge v = (-1)^{rs} v \wedge u, \quad u \in \mathcal{L}_a^r(E, \mathbb{R}),\ v \in \mathcal{L}_a^s(E, \mathbb{R})$.

(c) *Jeżeli* $F = \mathbb{R}$, *to* $(u \wedge v) \wedge w = u \wedge (v \wedge w), \quad u \in \mathcal{L}_a^r(E, \mathbb{R}),\ v \in \mathcal{L}_a^s(E, \mathbb{R}),\ w \in \mathcal{L}_a^t(E, \mathbb{R})$.

(d) *Operacja* $(\mathcal{L}(E, \mathbb{R}))^r \ni (u_1, \dots, u_r) \longmapsto u_1 \wedge \dots \wedge u_r \in \mathcal{L}_a^r(E, \mathbb{R})$ *jest* $r$*–liniowa i skośnie symetryczna.*

(e) $(u_1 \wedge \dots \wedge u_r)(x_1, \dots, x_r) = \det([u_k(x_j)]_{j,k=1,\dots,r})$, $u_k \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, $x_j \in E$, $j, k = 1, \dots, r$.

(f) $e_K^* = e_{k_1}^* \wedge \dots \wedge e_{k_r}^*$, $K = (k_1, \dots, k_r) \in \Lambda_r^n$.

*Dowód.* (a) Przypadki $rs = 0$ są oczywiste. Jeżeli $rs \neq 0$, to

$$\|(u \wedge v)(x_1, \dots, x_{r+s})\| \leqslant \sum_{\sigma \in S_{r,s}} \|u(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(r)})\| \|v(x_{\sigma(r+1)}, \dots, x_{\sigma(r+s)})\|$$
$$\leqslant \sum_{\sigma \in S_{r,s}} \|u\| \|x_{\sigma(1)}\| \dots \|x_{\sigma(r)}\| \|v\| \|x_{\sigma(r+1)}\| \dots \|x_{\sigma(r+s)}\| = \binom{r+s}{r} \|u\| \|v\| \|x_1\| \dots \|x_{r+s}\|.$$

(b) Przypadki $rs = 0$ są oczywiste. Jeżeli $rs \neq 0$, to niech $\tau = (r+1, \dots, r+s, 1, \dots, r) \in S_{r+s}$. Zauważmy, że $\operatorname{sgn} \tau = (-1)^{rs}$ oraz $\sigma \in S_{r,s} \iff \sigma \circ \tau \in S_{s,r}$. Stąd:

---

(1) Odnotujmy, że $\# S_{r,s} = \frac{(r+s)!}{r!s!}$.

$$(v \wedge u)(x_1, \dots, x_{r+s}) = \sum_{\sigma \in S_{r,s}} (\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau)) v(x_{\sigma(r+1)}, \dots, x_{\sigma(r+s)}) \cdot u(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(r)})$$
$$= (\operatorname{sgn} \tau)(u \wedge v)(x_1, \dots, x_{r+s}).$$

(c) Wystarczy pokazać (ĆWICZENIE), że obie strony są równe

$$\sum_{\sigma \in S_{r,s,t}} (\operatorname{sgn} \sigma) u(x_1, \dots, x_r) v(x_{r+1}, \dots, x_{r+s}) w(x_{r+s+1}, \dots, x_{r+s+t}), \text{ gdzie}$$

$$S_{r,s,t} := \{\sigma \in S_{r+s+t} : \sigma(1) < \dots < \sigma(r),\ \sigma(r+1) < \dots < \sigma(r+s),\ \sigma(r+s+1) < \dots < \sigma(r+s+t)\},$$

(d) $r$–liniowość jest oczywista. Wobec (b), jeżeli $u_j = u_{j+1}$, to:

$$u_1 \wedge \dots \wedge u_r = u_1 \wedge \dots \wedge u_{j-1} \wedge u_{j+1} \wedge u_j \wedge u_{j+2} \wedge \dots \wedge u_r$$
$$= u_1 \wedge \dots \wedge u_{j-1} \wedge (-1)^{1 \cdot 1} u_j \wedge u_{j+1} \wedge u_{j+2} \wedge \dots \wedge u_r = -(u_1 \wedge \dots \wedge u_r).$$

(e) Indukcja względem $r$. Przypadek $r = 1$ jest trywialny. Załóżmy, że wynik zachodzi dla $r - 1$. Zauważmy, że $S_{r-1,1} = \{(1, \dots, i-1, i+1, \dots, r, i) \in S_r : i = 1, \dots, r\}$. Niech $X = [u_k(x_j)]_{j,k=1,\dots,r}$. Wtedy

$$(u_1 \wedge \dots \wedge u_r)(x_1, \dots, x_r) = \sum_{i=1}^{r} (-1)^{r-i} (u_1 \wedge \dots \wedge u_{r-1})(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_r) u_r(x_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{r} (-1)^{i+r} u_r(x_i)(\det X_{(1,\dots,i-1,i+1,\dots,r),(1,\dots,r-1)}) = \det X$$

na podstawie rozwinięcia Laplace'a (względem ostatniej kolumny).

(f) wynika z (e). □

**Definicja 13.1.7.** Niech $\Omega \in \operatorname{top} \mathbb{R}^n$ i niech $F$ będzie przestrzenią unormowaną. *Formą różniczkową rzędu $r$ na $\Omega$ o wartościach w $F$* nazywamy dowolne odwzorowanie $u : \Omega \longrightarrow \mathcal{L}_a^r(\mathbb{R}^n, F)$. Zbiór wszystkich takich form różniczkowych oznaczamy przez $\mathcal{F}_{(r)}(\Omega, F)$. Odnotujmy, że $\mathcal{F}_{(0)}(\Omega, F)$ to po prostu zbiór wszystkich funkcji $u : \Omega \longrightarrow F$. Jak zwykle, $\mathcal{F}_{(r)}(\Omega) := \mathcal{F}_{(r)}(\Omega, \mathbb{R})$.

W oczywisty sposób $\mathcal{F}_{(r)}(\Omega, F)$ ma strukturę przestrzeni wektorowej. Oczywiście $\mathcal{F}_{(r)}(\Omega, F) = \{0\}$ dla $r > n$. Mamy ponadto określone *mnożenie zewnętrzne form*:

$$\wedge : \mathcal{F}_{(r)}(\Omega) \times \mathcal{F}_{(s)}(\Omega, F) \longrightarrow \mathcal{F}_{(r+s)}(\Omega, F), \quad (u \wedge v)(x) := u(x) \wedge v(x),\ x \in \Omega.$$

Odnotujmy, że jeżeli $f : \Omega \longrightarrow F$ jest odwzorowaniem różniczkowalnym (w każdym punkcie), to $df := f' \in \mathcal{F}_{(1)}(\Omega, F)$.

Dla $k \in \mathbb{N}$ niech $\mathcal{F}^k_{(r)}(\Omega, F) := \mathcal{D}^k(\Omega, \mathcal{L}_a^r(E, F))$, $\mathcal{C}^k_{(r)}(\Omega, F) := \mathcal{C}^k(\Omega, \mathcal{L}_a^r(E, F))$. Widać, że definicje te są zgodne dla $r = 0$, tzn. $\mathcal{F}^k_{(0)}(\Omega, F) := \mathcal{D}^k(\Omega, F)$ i $\mathcal{C}^k_{(0)}(\Omega, F) = \mathcal{C}^k(\Omega, F)$. Jak zwykle, $\mathcal{F}'_{(r)}(\Omega, F) := \mathcal{F}^1_{(r)}(\Omega, F)$, $\mathcal{F}''_{(r)}(\Omega, F) := \mathcal{F}^2_{(r)}(\Omega, F)$.

**Obserwacja 13.1.8.** (a) Niech $e_1, \dots, e_n$ oznacza bazę kanoniczną $\mathbb{R}^n$. Każdą formę $u \in \mathcal{F}_{(r)}(\Omega, F)$ możemy przedstawić w *postaci kanonicznej*

$$u(x) = \sum_{I \in \Lambda_r^n} u(x)(e_I) e_I^* =: \sum_{I \in \Lambda_r^n} u_I(x) dx_I,$$

gdzie dla $I = (i_1, \dots, i_r)$ mamy $dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$, $dx_i = d(\mathrm{pr}_i) = e_i^*$. Będziemy również stosować zapis $u(x) = {\sum_{|I|=r}}' u_I(x) dx_I$ lub nawet $u(x) = {\sum_I}' u_I(x) dx_I$.

W tym sensie formę $u$ można utożsamiać z rodziną „zwykłych” funkcji $(u_I)_{I \in \Lambda_r^n}$. W szczególności, dla $r = n$, formę $u = u_{(1,\dots,n)} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ możemy utożsamiać z jedną funkcją $u_{(1,\dots,n)}$.

(b) Dla dowolnego $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ mamy:

$$u \in \mathcal{F}^k_{(r)}(\Omega, F) \Longleftrightarrow \forall_{I \in \Lambda_r^n} : u_I \in \mathcal{D}^k(\Omega, F), \quad u \in \mathcal{C}^k_{(r)}(\Omega, F) \Longleftrightarrow \forall_{I \in \Lambda_r^n} : u_I \in \mathcal{C}^k(\Omega, F).$$

(c) Jeżeli $f \in \mathcal{D}(\Omega, F)$, to postać kanoniczna $df$ wygląda następująco $df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$. W szczególności, jeżeli $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$, to $df_1 \wedge \dots \wedge df_r = \sum_{I \in \Lambda_r^n} \frac{\partial(f_1, \dots, f_r)}{\partial(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})} dx_I$.

[Wykład 06.05.2021 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ]

Następujące pojęcie *różniczki zewnętrznej* jest centralnym punktem całej teorii form różniczkowych.

**Definicja 13.1.9.** Określimy operator $d : \mathcal{F}'_{(r)}(\Omega, F) \longrightarrow \mathcal{F}_{(r+1)}(\Omega, F)$.

- Dla $r = 0$ będzie to zwykły operator różniczkowania zdefiniowany poprzednio.
- Dla $r \geqslant 1$ i $u \in \mathcal{F}'_{(r)}(\Omega, F)$ bierzemy postać kanoniczną $u = \sum_{I\in\Lambda^n_r} u_I dx_I$ i definiujemy

$$du = \sum_{I\in\Lambda^n_r} du_I \wedge dx_I = \sum_{J\in\Lambda^n_{r+1}} \Big(\sum_{(I,i)\in S(J)} \varepsilon(I,i)\frac{\partial u_I}{\partial x_i}\Big)dx_J, \text{ gdzie}$$

$$S(J) := \{(I,i) \in \Lambda^n_r \times \{1,\dots,n\} : \exists_{\varepsilon=\varepsilon(I,i)\in\{-1,+1\}} : dx_i \wedge dx_I = \varepsilon dx_J\}.$$

Formalnie rzecz biorąc, powinniśmy pisać $d_r$. Zauważmy, że dla $r = n$ mamy zawsze $du = 0$.

**Twierdzenie 13.1.10.** (a) *Operator* $d : \mathcal{F}'_{(r)}(\Omega, F) \longrightarrow \mathcal{F}_{(r+1)}(\Omega, F)$ *jest liniowy.*

*Ponadto,* $d(\mathcal{F}^k_{(r)}(\Omega, F)) \subset \mathcal{F}^{k-1}_{(r+1)}(\Omega, F)$ *oraz* $d(\mathcal{C}^k_{(r)}(\Omega, F)) \subset \mathcal{C}^{k-1}_{(r+1)}(\Omega, F)$, $k \geqslant 1$.

(b) *Jeżeli* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, F)$, *to* $d(\varphi dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}) = (d\varphi) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$ *dla dowolnych* $i_1,\dots,i_r \in \{1,\dots,n\}$.

(c) *Jeżeli* $u \in \mathcal{F}''_{(r)}(\Omega, F)$ *(np.* $u \in \mathcal{C}^2_{(r)}(\Omega, F)$*), to* $d^2u = (d\circ d)u = 0$.

(d) *Dla* $u \in \mathcal{F}'_{(r)}(\Omega)$ *i* $v \in \mathcal{F}'_{(s)}(\Omega, F)$ *mamy* $d(u \wedge v) = (du) \wedge v + (-1)^r u \wedge (dv)$.

*Dowód*. (a) jest oczywiste.

(b) Jeżeli $i_\mu = i_\nu$ dla pewnych $\mu \neq \nu$, to obie strony są zero. W przeciwnym przypadku, najpierw porządkujemy $(i_1,\dots,i_r)$ do ciągu rosnącego (co powoduje pomnożenie obu stron przez pewną liczbę $\varepsilon \in \{-1,+1\}$).

(c) Wobec (a) wystarczy rozważyć przypadek, gdy $u = \varphi dx_I$, gdzie $\varphi \in \mathcal{D}''(U, \Omega)$, zaś $I \in \Lambda^n_r$. Korzystając z (b) oraz z symetrii drugich pochodnych cząstkowych mamy:

$$\begin{aligned} d^2u &= d\Big(\sum_{i=1}^n \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx_i \wedge dx_I\Big) = \sum_{i=1}^n d\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\Big) \wedge dx_i \wedge dx_I \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_i}dx_j \wedge dx_i \wedge dx_I = \sum_{i<j}\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_i} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}\Big)dx_j \wedge dx_i \wedge dx_I = 0. \end{aligned}$$

(d) Wystarczy rozważyć przypadek, gdy $u = \varphi dx_I$, $v = \psi dx_J$. Mamy:

$$\begin{aligned} d(u\wedge v) &= d(\varphi\psi dx_I \wedge dx_J) = d(\varphi\psi) \wedge dx_I \wedge dx_J = ((d\varphi)\psi) + \varphi(d\psi)) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= ((d\varphi) \wedge dx_I) \wedge (\psi dx_J) + (-1)^r(\varphi dx_I) \wedge ((d\psi) \wedge dx_J) = (du) \wedge v + (-1)^r u \wedge (dv). \qquad \square \end{aligned}$$

**Przykład 13.1.11.** (a) Jeżeli $V = \sum_{k=1}^n V_k dx_k \in \mathcal{F}'_{(1)}(\Omega, F)$, to $dV = \sum_{j<k}\big(\frac{\partial V_k}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_k}\big)dx_j \wedge dx_k$. W szczególności, dla $n = 2$ mamy $d(Pdx + Qdy) = \big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\big)dx \wedge dy$.

(b) Jeżeli $u = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1}u_j dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \dots \wedge dx_n \in \mathcal{F}'_{(n-1)}(\Omega, F)$, to wtedy $du = \big(\sum_{j=1}^n \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\big)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$.

Następną ważną operacją jest *operacja podstawiania (zmiany zmiennych)*.

**Definicja 13.1.12.** Niech $U \in \operatorname{top}\mathbb{R}^m$ i niech $f \in \mathcal{D}(U, \Omega)$. Definiujemy operator $f^* : \mathcal{F}_{(r)}(\Omega, F) \longrightarrow \mathcal{F}_{(r)}(U, F)$:

- jeżeli $r = 0$, to kładziemy $f^*(u) = u \circ f$ (2);
- jeżeli $r \geqslant 1$, $u = \sum_{I\in\Lambda^n_r} u_I dx_I$, to $f^*(u) := \sum_{I\in\Lambda^n_r}(u_I \circ f)df_I = \sum_{J\in\Lambda^m_r}\big(\sum_{I\in\Lambda^n_r}(u_I \circ f)\frac{\partial(f_{i_1},\dots,f_{i_r})}{\partial(t_{j_1},\dots,t_{j_r})}\big)dt_J$,

gdzie $df_I := df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_r}$.

---

(2) Dla $r = 0$ różniczkowalność $f$ nie jest istotna.

**Obserwacja 13.1.13.** (a) Gdy $m = r$, to $f^*(u) = \Big(\sum_{I\in\Lambda_r^n}(u_I \circ f)\frac{\partial(f_{i_1},\dots,f_{i_r})}{\partial(t_1,\dots,t_r)}\Big)dt_1 \wedge \dots \wedge dt_r$.

(b) Gdy $m = r = n$, to $f^*(\varphi dx_1 \wedge \dots \wedge dx_r) = (\varphi \circ f)(\det f')dt_1 \wedge \dots \wedge dt_r$.

**Twierdzenie 13.1.14.** (a) *Odwzorowanie $f^* : \mathcal{F}_{(r)}(\Omega, F) \longrightarrow \mathcal{F}_{(r)}(U, F)$ jest liniowe. Ponadto,*

- *jeżeli $f \in \mathcal{D}^{k+1}(U, \Omega)$, to $f^*(\mathcal{F}^k_{(r)}(\Omega, F)) \subset \mathcal{F}^k_{(r)}(U, F)$,*
- *jeżeli $f \in \mathcal{C}^{k+1}(U, \mathbb{R}^n)$, to $f^*(\mathcal{C}^k_{(r)}(\Omega, F)) \subset \mathcal{C}^k_{(r)}(U, F)$.*

(b) *$f^*(\varphi dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}) = (\varphi \circ f)df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_r}$ dla dowolnych $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\}$.*

(c) *Jeżeli $F = \mathbb{R}$, to $f^*(u \wedge v) = f^*(u) \wedge f^*(v)$.*

(d) *$f^* \circ d = d \circ f^*$ na $\mathcal{F}'_{(0)}(\Omega, F)$.*

(e) *Jeżeli $f \in \mathcal{D}''(U, \Omega)$, to $f^* \circ d = d \circ f^*$ na $\mathcal{F}'_{(r)}(\Omega, F)$ dla dowolnego $r$* (3).

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}'_{(r)}(\Omega, F) & \xrightarrow{\ d\ } & \mathcal{F}_{(r+1)}(\Omega, F) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle f^*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f^*} \\
\mathcal{F}'_{(r)}(U, F) & \xrightarrow{\ d\ } & \mathcal{F}_{(r+1)}(U, F)
\end{array}$$

(f) *Jeżeli $V \in \operatorname{top} \mathbb{R}^p$ i $g \in \mathcal{D}(V, U)$, to $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.*

*Dowód.* (a), (b), i (c) są elementarne.

(d) Na podstawie wzoru na różniczkowanie złożenia mamy:

$$d(f^*(u)) = d(u \circ f) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Big(\frac{\partial u}{\partial x_j} \circ f\Big)\frac{\partial f_j}{\partial t_i}dt_i = \sum_{j=1}^n \Big(\frac{\partial u}{\partial x_j} \circ f\Big)df_j = f^*(du).$$

(e) Wystarczy sprawdzić wzór dla form postaci $\varphi dx_I$, gdzie $\varphi \in \mathcal{D}'(\Omega, F)$. Wobec Twierdzenia 13.1.10 mamy $d(f^*(\varphi dx_I)) = d((\varphi \circ f)df_I) = d(\varphi \circ f) \wedge df_I = f^*(d\varphi) \wedge df_I = f^*(d(\varphi dx_I))$ (4).

(f) $g^*(f^*(\varphi dx_I)) = g^*((\varphi \circ f)df_I) = ((\varphi \circ f) \circ g)g^*(df_I) \overset{\text{(c,d)}}{=} (\varphi \circ (f \circ g))d(f \circ g)_I = (f \circ g)^*(\varphi dx_I)$. $\square$

[Wykład 10.05.2021 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ]

**Definicja 13.1.15.** Powiemy, że obszar $D \subset \mathbb{R}^n$ jest *różniczkowo ściągalny w klasie $\mathcal{C}^k$ do punktu $a$*, jeżeli istnieje otoczenie otwarte $\Omega \supset [0, 1] \times D$ oraz odwzorowanie $h : \Omega \longrightarrow D$ klasy $\mathcal{C}^k$ takie, że $h(0, x) = x$, $h(1, x) = a$, $x \in D$.

Zauważmy, że każdy obszar gwiaździsty względem $a$ jest ściągalny różniczkowo w klasie $\mathcal{C}^\infty$. Istotnie, wystarczy wziąć $h(t, x) = (1 - t)x + ta$, $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $\Omega := h^{-1}(D)$.

**Twierdzenie 13.1.16** (Lemat Poincarégo (5))**.** *Jeżeli obszar $D \subset \mathbb{R}^n$ jest różniczkowo ściągalny (do punktu $a$) w klasie $\mathcal{C}^{k+1}$ przy pomocy odwzorowania $h : \Omega \longrightarrow D$ ($k \geqslant 1$), to dla dowolnego $r \in \mathbb{N}$ i dla dowolnej formy $u \in \mathcal{C}^k_{(r)}(D)$ takiej, że $du = 0$ istnieje $v \in \mathcal{C}^k_{(r-1)}(D)$ taka, że $dv = u$.*

**Obserwacja 13.1.17.** Twierdzenie 11.5.2, to przypadek, gdy $D$ jest gwiaździsty i $r = k = 1$. Przypomnijmy również Przykład 11.5.3.

*Dowód Twierdzenia 13.1.16.* Dowód polega na znalezieniu operatorów liniowych

$$\delta = \delta_{s,\ell} : \mathcal{C}^\ell_{(s+1)}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{C}^\ell_{(s)}(D), \quad s, \ell \geqslant 0,$$

takich, że na $\mathcal{C}^\ell_{(s)}(\Omega)$, $s, \ell \geqslant 1$, mamy:

$$\delta \circ d + d \circ \delta = \sigma_1^* - \sigma_0^*, \text{ gdzie } \sigma_j : D \longrightarrow \Omega,\ \sigma_j(x) := (j, x),\ j \in \{0, 1\},\ x \in \mathbb{R}^n. \qquad (\dagger)$$

---

(3) Uwaga: we wzorze każda z operacji $f^*$, $d$, $d$, $f^*$ jest wykonywana na innej przestrzeni.

(4) Tu jest istotne, że $f$ jest dwukrotnie różniczkowalne i dlatego $d(df_I) = 0$.

(5) Por. Twierdzenie 11.5.2.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{\ell}_{(s)}(\Omega) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] \arrow[dr, "\sigma_1^*-\sigma_0^*"] & \mathcal{C}^{\ell-1}_{(s+1)}(\Omega) \arrow[d, "\delta"] \\
\mathcal{C}^{\ell}_{(s-1)}(D) \arrow[r, "d"] & \mathcal{C}^{\ell-1}_{(s)}(D)
\end{tikzcd}$$

Przypuśćmy na chwilę, że mamy już operatory $\delta$. Weźmy $v := -\delta(h^*(u))$. Wtedy:

$$\begin{aligned}dv = -d(\delta(h^*(u))) &= -\sigma_1^*(h^*(u)) + \sigma_0^*(h^*(u)) + \delta(d(h^*(u)))\\ &= -(h\circ\sigma_1)^*(u) + (h\circ\sigma_0)^*(u) + \delta(h^*(du)) = -(\mathrm{const})^*(u) + \mathrm{id}^*(u) = u.\end{aligned}$$

Przechodzimy do konstrukcji $\delta$. Oznaczmy zmienne w $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ przez $(t,x)$. Niech

$$w = \sum_{I\in\Lambda^n_s} w_I dt\wedge dx_I + \sum_{J\in\Lambda^n_{s+1}} w'_J dx_J \in \mathcal{C}^{\ell}_{(s+1)}(\Omega).$$

Kładziemy $\delta(w) := \sum_{I\in\Lambda^n_s}\big(\int_0^1 w_I(t,\cdot)dt\big)dx_I$. Na podstawie twierdzenia o funkcjach danych całką $\delta(w)\in\mathcal{C}^{\ell}_{(s)}(D)$. Widać, że operator $\delta$ jest liniowy. Pozostaje sprawdzić wzór (†). Wobec liniowości wystarczy sprawdzić wzór (†) dla form następujących dwóch typów:

$1^0$: $w = \varphi dx_J$, gdzie $J\in\Lambda^n_{s+1}$. Wtedy $\delta(w)=0$ oraz

$$\delta(dw) = \delta\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial t}dt\wedge dx_J + \dots\Big) = \Big(\int_0^1 \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,\cdot)dt\Big)dx_J = (\varphi(1,\cdot)-\varphi(0,\cdot))dx_J = \sigma_1^*(w)-\sigma_0^*(w).$$

$2^0$: $w = \varphi dt\wedge dx_I$, gdzie $I\in\Lambda^n_s$. Wtedy $\delta(w) = \big(\int_0^1\varphi(t,\cdot)dt\big)dx_I$, $\sigma_j^*(w)=0$, $j=0,1$, oraz

$$\begin{aligned}\delta(dw)+d(\delta(w)) &= \delta\Big(\sum_{j=1}^n \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}dx_j\wedge dt\wedge dx_I\Big) + \sum_{j=1}^n\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\int_0^1\varphi(t,\cdot)dt\Big)dx_j\wedge dx_I\\ &= -\sum_{j=1}^n\Big(\int_0^1\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(t,\cdot)dt\Big)dx_j\wedge dx_I + \sum_{j=1}^n\Big(\int_0^1\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(t,\cdot)dt\Big)dx_j\wedge dx_I = 0. \qquad \square\end{aligned}$$

### 13.2. Całkowanie form różniczkowych

**Definicja 13.2.1.** Załóżmy, że $M\in\mathcal{M}^1_d(\mathbb{R}^n)$ jest orientowalna i niech $O$ będzie ustaloną orientacją $M$. Niech $M\subset\Omega\in\operatorname{top}\mathbb{R}^n$ i niech $u\in\mathcal{F}_{(d)}(\Omega)$. Zakładamy, że $u$ jest *mierzalna na* $M$, tzn. $u_I\in\mathcal{M}(M,\mathcal{L}_M)$ dla dowolnego $I$. Mówimy, że forma (funkcja) $u$ jest *całkowalna na* $M$ *przy orientacji* $O$, jeżeli:

- Dla $d=0$: $\sum_{x\in M}|u(x)| < +\infty$ (6). Kładziemy wtedy $\int_{M,O} u := \sum_{x\in M} O(x)u(x)$.
- Dla $d\geqslant 1$ postępujemy następująco. Dla dowolnej lokalnej parametryzacji $p: P\longrightarrow U$ zgodnej z $O$ rozważamy formę $p^*(u)\in\mathcal{F}_{(d)}(P)$. Ponieważ jest to forma rzędu $d$, więc zgodnie z naszymi umowami, utożsamiamy ją z funkcją na $P$, tzn. $p^*(u) = p^*(u)dt_1\wedge\dots\wedge dt_d$ (7). Przypomnijmy, że

$$p^*(u) = \sum_{I\in\Lambda^n_d}(u_I\circ p)\frac{\partial(p_{i_1},\dots,p_{i_d})}{\partial(t_1,\dots,t_d)}.$$

Połóżmy $[u] := \frac{p^*(u)}{J_d p}\circ p^{-1}: U\longrightarrow\mathbb{R}$. Oznaczenie to ma charakter roboczy. Zauważmy, że jeżeli $q: Q\longrightarrow U$ jest jakąś inną parametryzacją zgodną z $O$, to $q = p\circ\varphi$, gdzie $\det\varphi'(t)>0$, $t\in Q$. Na podstawie Twierdzenia 13.1.14(f) mamy: $q^*(u) = \varphi^*(p^*(u)) = (\det\varphi')(p^*(u)\circ\varphi)$. Stąd:

$$\frac{q^*(u)}{J_d q}\circ q^{-1} = \frac{(\det\varphi')(p^*(u)\circ\varphi)}{((J_d p)\circ\varphi)|\det\varphi'|}\circ\varphi^{-1}\circ p^{-1} = \frac{p^*(u)}{J_d p}\circ p^{-1},$$

a więc funkcja $[u]$ nie zależy od parametryzacji zgodnej z $O$ i może być w związku z tym określona na całym $M$. Zauważmy, że $[u]$ jest mierzalna na $M$.

Powiemy, że forma $u$ jest *całkowalna na* $M$ *przy orientacji* $O$, jeżeli $[u]\in L^1(M,\mathcal{L}^M)$. Piszemy wtedy $u\in L^1(M,O)$ i definiujemy $\int_{M,O} u := \int_M [u]d\mathcal{L}^M$.

---

(6) Przypomnijmy, że $\#M\leqslant\aleph_0$.

(7) Zwracamy uwagę na niegroźną kolizję oznaczeń.

Oczywiście $L^1(M,O)$ jest przestrzenią wektorową, zaś operacja $L^1(M,O) \ni u \longmapsto \int_{M,O} u \in \mathbb{R}$ jest liniowa.

**Twierdzenie 13.2.2.** (a) *$u \in L^1(M,O) \iff u \in L^1(M,-O)$. Ponadto, $\int_{M,-O} u = -\int_{M,O} u$.*

(b) *$|[u]| \leqslant \|u\|$, gdzie $\|u\|(x) = \|u(x)\| = \big(\sum_I{}' u_I^2(x)\big)^{1/2}$. W szczególności, jeśli $\|u\| \in L^1(M,\mathcal{L}^M)$, to $u \in \mathcal{L}^1(M,O)$ oraz $\big|\int_{M,O} u\big| \leqslant \int_M \|u\| d\mathcal{L}^M$.*

(c) *Jeżeli $u \in L^1(M,O)$, to dla dowolnej parametryzacji zgodnej z orientacją $p : P \longrightarrow U$ mamy $\int_{U,O} u = \int_P p^*(u) d\mathcal{L}^d$.*

*Dowód.* (a) $[u]$ zmienia znak przy zmianie orientacji na przeciwną.

(b) Dla lokalnej parametryzacji $p : P \longrightarrow U$ zgodnej z orientacją, korzystając z nierówności Schwarza, mamy:

$$|[u]|^2 \circ p = \frac{\big|\sum_I{}'(u_I \circ p)\frac{\partial(p_{i_1},\dots,p_{i_d})}{\partial(t_1,\dots,t_d)}\big|^2}{\sum_I{}'\big(\frac{\partial(p_{i_1},\dots,p_{i_d})}{\partial(t_1,\dots,t_d)}\big)^2} \leqslant \sum_I{}'(u_I \circ p)^2 = \|u\|^2 \circ p.$$

(c) jest elementarne. □

**Przykład 13.2.3.** (a) Dla $d = 1$, jeżeli $\boldsymbol{s} : M \longrightarrow \mathbb{S}_{n-1}$ jest orientującym polem wektorów stycznych, to $[u] = \langle \vec{u}, \boldsymbol{s}\rangle$, gdzie formę $u = \sum_{j=1}^n u_j dx_j$ utożsamiamy z polem wektorowym $\vec{u} = (u_1,\dots,u_n)$. W szczególności, $\int_{M,O} u = \int_M \langle \vec{u}, \boldsymbol{s}\rangle d\mathcal{L}^M$.

Istotnie, w lokalnej parametryzacji $p : P \longrightarrow U$ zgodnej z orientacją mamy $\langle \vec{u}, \boldsymbol{s}\rangle \circ p = \langle \vec{u} \circ p, \frac{p'}{\|p'\|}\rangle = [u] \circ p$.

(b) Dla $d = n-1$, jeżeli $\boldsymbol{n} : M \longrightarrow \mathbb{S}_{n-1}$ jest orientującym polem wektorów normalnych, to $[u] = \langle \vec{u}, \boldsymbol{n}\rangle$, gdzie formę $u = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} u_k dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{k-1} \wedge dx_{k+1} \wedge \dots \wedge dx_n$ utożsamiamy z polem wektorowym $\vec{u} = (u_1,\dots,u_n)$. W szczególności, $\int_{M,O} u = \int_M \langle \vec{u}, \boldsymbol{n}\rangle d\mathcal{L}^M$.

Istotnie, w lokalnej parametryzacji zgodnej z orientacją $p : P \longrightarrow U$, na podstawie Obserwacji 10.3.10, mamy:

$$\langle \vec{u}, \boldsymbol{n}\rangle \circ p = \sum_{k=1}^n (u_k \circ p)(\boldsymbol{n}_k \circ p) = \frac{1}{J_d p}\sum_{k=1}^n (u_k \circ p)(-1)^{k-1}\frac{\partial(p_1,\dots,p_{k-1},p_{k+1},\dots,p_n)}{\partial(t_1,\dots,t_{n-1})} = \frac{p^*(u)}{J_d p} = [u] \circ p.$$

[Wykład 13.05.2021 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ]

## 13.3. Twierdzenie Stokesa

Załóżmy, że:

(1) $M \subset \mathbb{R}^n$ jest $d$–wymiarową orientowalną podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$, $1 \leqslant d \leqslant n$,
(2) $D \subset M$ jest obszarem tłustym w $M$ ($\operatorname{int}_M \operatorname{cl}_M D = D$),
(3) $\overline{D} = \operatorname{cl}_{\mathbb{R}^n} D$ jest zbiorem zwartym,
(4) $\overline{D} \subset \Omega \in \operatorname{top} \mathbb{R}^n$,
(5) $M' := \partial_M D$ jest albo zbiorem pustym albo $(d-1)$–wymiarową podrozmaitością $\mathbb{R}^n$ klasy $\mathcal{C}^1$,
(6) $\mathcal{L}^M(D) < +\infty$,
(7) $\mathcal{L}^{M'}(M') < +\infty$ (oczywiście, gdy $M' \neq \varnothing$),
(8) $O$ jest ustaloną orientacją $M$,
(9) $O'$ jest orientacją podrozmaitości $M'$ indukowaną przez $O$ (oczywiście, gdy $M' \neq \varnothing$),
(10) $u \in \mathcal{C}^1_{(d-1)}(\Omega)$.

Interesuje nas, kiedy prawdziwe jest *Twierdzenie Stokesa* [8] mówiące, że następujący *wzór Stokesa* jest prawdziwy

$$\int_{D,O} du = \int_{M',O'} u, \quad (^9)$$

[8] George Stokes (1819–1903).

gdzie prawą stronę rozumiemy jako zero, gdy $M' = \varnothing$.

Istnieje wiele wariantów twierdzenia Stokesa. My udowodnimy następujące dwa.

**Twierdzenie 13.3.1** (I wersja Twierdzenia Stokesa)**.** *Wzór Stokesa zachodzi przy dodatkowym założeniu, że zbiór* $K := (\operatorname{supp} u) \cap (\operatorname{cl}_M D)$ (10) *jest zwarty* (11).

**Twierdzenie 13.3.2** (II wersja Twierdzenia Stokesa)**.** *Wzór Stokesa zachodzi przy dodatkowych założeniach, że zbiór* $S := \overline{D} \setminus M$ *jest zwarty oraz* $\mathcal{L}^{d-1}(\operatorname{pr}_I(S)) = 0$ *dla dowolnego* $I \in \Lambda^n_{d-1}$*, gdzie* $\operatorname{pr}_I$ *oznacza projekcję na osie o numerach* $i_1, \dots, i_{d-1}$ $(d \geqslant 2)$*.*

**Obserwacja 13.3.3.** (a) Niech $M = \mathbb{R}$, $O = [\mathbb{R}]_+$, $D = (a, b) \subset\subset \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{C}^1([a, b])$. Wtedy $M' = \{a, b\}$, $O'(a) = -1$, $O'(b) = +1$. W tym przypadku wzór Stokesa sprowadza się do wzoru:

$$\int_a^b u'(t)dt = u(b) - u(a),$$

który, jak wiemy, zawsze zachodzi.

(b) Niech $M \in \operatorname{top} \mathbb{R}^2$, $O = [\mathbb{R}^2]_+$, $u = Pdx + Qdy$. Wtedy wzór Stokesa sprowadza się do wzoru Greena (12):

$$\int_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dxdy = \int_{\partial_M D, O'} Pdx + Qdy.$$

Wzór Greena zostanie szczegółowo omówiony w Twierdzeniu 13.3.4.

(c) Niech $M \in \operatorname{top} \mathbb{R}^3$, $O = [\mathbb{R}^3]_+$,

$$u = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy. \quad (13)$$

Wtedy wzór Stokesa sprowadza się do *wzoru Gaussa–Ostrogradskiego* (14) (15):

$$\int_D \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\Big) dxdydz = \int_{\partial_M D, O'} Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy.$$

(d) Niech $M \in \operatorname{top} \mathbb{R}^n$, $O = [\mathbb{R}^n]_+$,

$$u = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} u_j dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \dots \wedge dx_n$$

i niech $\boldsymbol{n} : \partial_M D \longrightarrow \mathbb{S}_{n-1}$ będzie ciągłym polem wektorów normalnych zadających orientację $O'$ (por. Przykład 13.2.3(b)). Wtedy

$$\int_D \Big(\sum_{j=1}^n \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\Big)\, d\mathcal{L}^n = \int_{\partial_M D, O'} \Big(\sum_{j=1}^n u_j \boldsymbol{n}_j\Big) d\mathcal{L}^{\partial_M D}.$$

W szczególności, mamy następujący *wzór na całkowanie przez części*: Jeżeli $f, g \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, gdzie $\Omega$ jest pewnym otoczeniem $\overline{D}$, to

$$\int_D f \frac{\partial g}{\partial x_j}\, d\mathcal{L}^n = \int_{\partial D} (fg\boldsymbol{n}_j) d\mathcal{L}^{\partial D} - \int_D \frac{\partial f}{\partial x_j} g\, d\mathcal{L}^n, \quad j = 1, \dots, n.$$

---

(9) Ponieważ $du$ jest formą ciągłą na $\Omega$, a $D \subset\subset \Omega$, więc funkcja $\|du\|$ jest ograniczona na $\overline{D}$, co, wobec skończoności miary $D$, implikuje, że całka po lewej stronie istnieje i jest skończona — por. Twierdzenie 13.2.2(b). Z analogicznych powodów całka po prawej stronie istnieje i jest skończona. Problemem jest więc równość.

(10) $\operatorname{supp} u := \bigcup_I \operatorname{supp} u_I$.

(11) $K$ jest zwarty np. gdy $\overline{D} \subset M$.

(12) Por. Przykład 13.1.11.

(13) Ten zapis formy odpowiada poprzedniemu zapisowi $u = \sum_{j=1}^3 (-1)^{j-1} u_j dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \dots \wedge dx_3$; por. (d).

(14) Michaił Wasyliewicz Ostrogradski (1801–1862).

(15) Por. Przykład 13.1.11.

W konsekwencji, dla dowolnych $f, g \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, mamy:

$$\int_D f(\Delta g)\, d\mathcal{L}^n = \int_{\partial D} \Big( f\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}} - g\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\Big) d\mathcal{L}^{\partial D} + \int_D (\Delta f) g\, d\mathcal{L}^n. \tag{‡}$$

gdzie $\Delta$ oznacza *operator Laplace'a* (*laplasjan*)

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

Wzór (‡) nosi nazwę *wzoru Greena dla operatora Laplace'a.*

Istotnie,

$$\begin{aligned}\int_D f(\Delta g)\, d\mathcal{L}^n &= \sum_{j=1}^n \int_D f\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial g}{\partial x_j}\Big) d\mathcal{L}^n = \sum_{j=1}^n \int_{\partial D} f\frac{\partial g}{\partial x_j}\boldsymbol{n}_j d\mathcal{L}^{\partial D} - \sum_{j=1}^n \int_D \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial x_j} d\mathcal{L}^n \\ &= \int_{\partial D} f\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}} d\mathcal{L}^{\partial D} - \sum_{j=1}^n \int_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial x_j} g\boldsymbol{n}_j d\mathcal{L}^{\partial D} + \sum_{j=1}^n \int_D g\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big) d\mathcal{L}^n \\ &= \int_{\partial D} \Big( f\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}} - g\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\Big) d\mathcal{L}^{\partial D} + \int_D (\Delta f) g\, d\mathcal{L}^n.\end{aligned}$$

(e) Niech $n = 3$, $d = 2$, $u = Pdx + Qdy + Rdz$. Wtedy wzór Stokesa sprowadza się do *klasycznego wzoru Stokesa*:

$$\int_{D,O} \Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\Big) dy \wedge dz + \Big(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\Big) dz \wedge dx + \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dx \wedge dy = \int_{M',O'} Pdx + Qdy + Rdz.$$

**Twierdzenie 13.3.4** (Wzór Greena)**.** *Wzór Greena zachodzi dla dowolnego obszaru $D \subset \mathbb{R}^2$ spełniającego warunek (†) ze strony 216.*

*Dowód.* Wykorzystamy II wersję Twierdzenia Stokesa. Pokażemy, że istnieje zbiór zwarty $S \subset \partial D$ taki, że $(\partial D) \setminus S$ jest jednowymiarową rozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{L}^1(\mathrm{pr}_i(S)) = 0$, $i = 1, 2$, oraz

$$\int_{(\partial D)\setminus S, O'} Pdx + Qdy = \int_{\partial D, O'} Pdx + Qdy.$$

Przypuśćmy, że $S$ został znaleziony. Wtedy bierzemy $M := \mathbb{R}^2 \setminus S$ i korzystamy z II wersji Twierdzenia Stokesa — szczegóły pozostawiamy jako Ćwiczenie.

Pozostaje skonstruować $S$. Wobec twierdzenia o funkcji uwikłanej wystarczy udowodnić, że jeżeli $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ jest klasy $\mathcal{C}^1$, to zbiór $A := \{\sigma(t) : \sigma'(t) = 0\}$ ma projekcje miary zero.

Ponieważ $\mathrm{pr}_i(A) = \{\sigma_i(t) : \sigma'(t) = 0\} \subset \{\sigma_i(t) : \sigma_i'(t) = 0\}$, wynik ten wynika z Lematu 12.15.12 (dla $n = 1$). □

**Wniosek 13.3.5.** *Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i niech $u \in \mathcal{C}^1_{(n-1)}(\Omega)$, $\operatorname{supp} u \subset\subset \Omega$. Wtedy*

$$\int_\Omega du = 0.$$

*Dowód.* Dobierzmy kule $B_j = \mathbb{B}(a_j, r_j)$, $j = 1, \dots, N$, tak, że $\operatorname{supp} u \subset B_1 \cup \dots \cup B_N \subset\subset \Omega$ i niech $\varphi_1, \dots, \varphi_N \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ będą takie, że $\operatorname{supp} \varphi_j \subset\subset B_j$, $j = 1, \dots, N$, $\varphi_1 + \dots + \varphi_N = 1$ w otoczeniu $\operatorname{supp} u$. Teraz, na podstawie wzoru Stokesa dla kuli, mamy:

$$\int_{\Omega,\, [\mathbb{R}^n]_+} du = \int_{\Omega,\, [\mathbb{R}^n]_+} d((\varphi_1 + \dots + \varphi_N)u) = \sum_{j=1}^N \int_{B_j,\, [\mathbb{R}^n]_+} d(\varphi_j u) = \sum_{j=1}^N \int_{\partial B_j,\, [\mathbb{R}^n]'_+} \varphi_j u = 0. \qquad \square$$

**Wniosek 13.3.6** (Wzór na całkowanie przez części)**.** *Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i niech $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$, $g \in \mathcal{C}^k_0(\Omega)$. Wtedy*

$$\int_\Omega f D^\alpha g\, d\mathcal{L}^n = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega (D^\alpha f) g\, d\mathcal{L}^n, \quad |\alpha| \leqslant k.$$

*W szczególności, dla dowolnych $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, $g \in \mathcal{C}^2_0(\Omega)$ mamy*

$$\int_\Omega f(\Delta g)\, d\mathcal{L}^n = \int_\Omega (\Delta f) g\, d\mathcal{L}^n.$$

*Dowód*. Wystarczy rozważyć przypadek $k = 1$, $\alpha = e_1$. Niech

$$u := fg dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n \in \mathcal{C}^1_{(n-1)}(\Omega).$$

Oczywiście $\operatorname{supp} u \subset \operatorname{supp} g \subset\subset \Omega$. Zauważmy, że

$$du = \Big(f \frac{\partial g}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_1} g\Big) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Pozostaje skorzystać z Wniosku 13.3.5. □

[Wykład 17.05.2021 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ]

Na koniec podamy jedno bardzo nietrywialne zastosowanie wzoru Stokesa.

**Twierdzenie 13.3.7** (Twierdzenie Brouwera o punkcie stałym ([16])). *Każde odwzorowanie ciągłe* $f : \overline{\mathbb{B}}_n \longrightarrow \overline{\mathbb{B}}_n$ *ma punkt stały.*

*Dowód*. Krok $1^0$: Można założyć, że $f$ jest klasy $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Postępujemy następująco. Ponieważ $\overline{\mathbb{B}}_n$ jest zbiorem domkniętym, zatem istnieje ciągłe przedłużenie $f$ do odwzorowania $\widetilde{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Mnożąc $\widetilde{f}$ przez funkcję $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{B}(2), [0, 1])$, $g = 1$ na $\mathbb{B}(\frac{3}{2})$, możemy założyć, że $\widetilde{f}$ znika poza $\mathbb{B}(2)$. Do każdej składowej odwzorowania $\widetilde{f}$ stosujemy regularyzację i otrzymujemy odwzorowania klasy $\mathcal{C}^\infty$ $\widetilde{f}_\varepsilon : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ takie, że $\widetilde{f}_\varepsilon \longrightarrow \widetilde{f}$ jednostajnie na $\mathbb{R}^n$ (Twierdzenie 12.19.3(b)). W szczególności, dla dowolnego $\nu \in \mathbb{N}$ istnieje odwzorowanie klasy $\mathcal{C}^\infty$ $g_\nu : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ takie, że $\|g_\nu - \widetilde{f}\| \leqslant \frac{1}{\nu}$ na $\mathbb{R}^n$. Niech $f_\nu := g_\nu/(1 + 1/\nu)$. Widać, że $f_\nu : \overline{\mathbb{B}}_n \longrightarrow \overline{\mathbb{B}}_n$, $\nu \in \mathbb{N}$. Jeżeli twierdzenie jest prawdziwe dla odwzorowań klasy $\mathcal{C}^\infty$, to dla każdego $\nu$ istnieje punkt $x_\nu \in \overline{\mathbb{B}}_n$ taki, że $f_\nu(x_\nu) = x_\nu$, czyli $g_\nu(x_\nu) = (1 + \frac{1}{\nu})x_\nu$. Możemy założyć, że $x_\nu \longrightarrow x_0 \in \overline{\mathbb{B}}_n$. Wtedy $f(x_0) = x_0$.

Krok $2^0$: Zakładamy, że $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Przypuśćmy, że $f(x) \neq x$ dla każdego $x \in \overline{\mathbb{B}}_n$. Wtedy również, $f(x) \neq x$ dla $x \in U$, gdzie $U$ jest otoczeniem $\overline{\mathbb{B}}_n$. Dla dowolnego $x \in \overline{\mathbb{B}}_n$ istnieje dokładnie jedna liczba $t = t(x) \geqslant 0$ taka, że $r(x) := x + t(x - f(x)) \in \mathbb{S}_{n-1}$. Określiliśmy w ten sposób odwzorowanie $r : \overline{\mathbb{B}}_n \longrightarrow \mathbb{S}_{n-1}$. Widać, że $r$ jest retrakcją. Pokażemy, że przedłuża się ono do odwzorowania klasy $\mathcal{C}^\infty$ w pewnym otoczeniu $\overline{\mathbb{B}}_n$. Istotnie, rozwiązując równanie

$$\|x + t(x - f(x))\|^2 = \|x\|^2 + 2t\langle x, x - f(x)\rangle + t^2\|x - f(x)\|^2 = 1$$

wnioskujemy, że $\Delta(x) := 4\langle x, x - f(x)\rangle^2 + 4(1 - \|x\|^2)\|x - f(x)\|^2 > 0$ dla $x \in V$, gdzie $V \subset U$ jest otoczeniem $\overline{\mathbb{B}}_n$. Ponadto,

$$t(x) = \frac{-2\langle x, x - f(x)\rangle + \sqrt{\Delta(x)}}{2\|x - f(x)\|^2}.$$

Wynika stąd, że $r$ jest klasy $\mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R}^n)$.

Mamy więc retrakcję $r = (r_1, \dots, r_n) : \overline{\mathbb{B}}_n \longrightarrow \mathbb{S}_{n-1}$ klasy $\mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R}^n)$. Niech $u := r_1 dr_2 \wedge \dots \wedge dr_n \in \mathcal{C}^\infty_{(n-1)}(V)$. Na podstawie twierdzenia Stokesa (w I wersji z $M := \mathbb{R}^n$, $D = \mathbb{B}_n$) mamy:

$$\int_{\mathbb{B}_n, [\mathbb{R}^n]_+} du = \int_{\mathbb{S}_{n-1}, [\mathbb{R}^n]'_+} u.$$

Zauważmy, że

$$\int_{\mathbb{B}_n, [\mathbb{R}^n]_+} du = \int_{\mathbb{B}_n, [\mathbb{R}^n]_+} dr_1 \wedge dr_2 \wedge \dots \wedge dr_n = \int_{\mathbb{B}_n, [\mathbb{R}^n]_+} (\det r')dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \int_{\mathbb{B}_n} (\det r')dx_1 \dots dx_n.$$

Różniczkując związek $\|r\|^2 = r_1^2 + \dots + r_n^2 \equiv 1$ na $\mathbb{B}_n$ dostajemy

$$\sum_{j=1}^n r_j \frac{\partial r_j}{\partial x_k} = 0 \quad \text{na } \mathbb{B}_n, \quad k = 1, \dots, n.$$

W szczególności $\det r' \equiv 0$ na $\mathbb{B}_n$, a więc

$$\int_{\mathbb{S}_{n-1}, [\mathbb{R}^n]'_+} u = 0.$$

([16]) Luitzen Brouwer (1881–1966).

Niech $v := x_1 dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$. Na podstawie wzoru Stokesa mamy:

$$\int_{\mathbb{S}_{n-1},[\mathbb{R}^n]'_+} v = \int_{\mathbb{B}^n,[\mathbb{R}^n]_+} dx_1 \dots dx_n = \mathcal{L}^n(\mathbb{B}_n) > 0.$$

Zauważmy, że $u = r^*(v)$. Rozważmy dowolną lokalną parametryzację $p : P \longrightarrow U$ sfery $\mathbb{S}_{n-1}$ zgodną z orientacją. Mamy $p^*(u) = (r \circ p)^*(v) = p^*(v)$ (bo $r$ jest retrakcją). Stąd

$$0 = \int_{\mathbb{S}_{n-1},[\mathbb{R}^n]'_+} u = \int_{\mathbb{S}_{n-1},[\mathbb{R}^n]'_+} x_1 dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n > 0;$$

sprzeczność. □

**Twierdzenie 13.3.8** (Twierdzenie o retrakcji)**.** *Nie istnieje ciągła retrakcja $\overline{\mathbb{B}}_n \longrightarrow \mathbb{S}_{n-1}$.*

*Dowód.* Przypuśćmy, że $r : \overline{\mathbb{B}}_n \longrightarrow \mathbb{S}_{n-1}$ jest taką retrakcją i niech $f = -r : \overline{\mathbb{B}}_n \longrightarrow \mathbb{S}_{n-1}$. Na podstawie Twierdzenia Brouwera o punkcie stałym istnieje $x_0 \in \overline{\mathbb{B}}_n$ taki, że $f(x_0) = x_0$. Oczywiście, $x_0 \in \mathbb{S}_{n-1}$. W szczególności, $f(x_0) = -x_0$, bo $r$ jest retrakcją — sprzeczność. □

*Dowód I wersji Twierdzenia Stokesa 13.3.1.* Dla dowolnego punktu $a \in K$ ustalmy parametryzację $p_a : P_a \longrightarrow U_a$ podrozmaitości $M$ zgodną z $O$ taką, że $a \in U_a$, $P_a$ jest otwartą kostką i jeżeli $M' \cap U_a \neq \varnothing$, to $\widetilde{p}_a : \widetilde{P}_a \longrightarrow M' \cap U_a$ jest parametryzacją zgodną z $O'$, gdzie $P_a = \varDelta_a \times \widetilde{P}_a \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$, $0 \in \varDelta_a$, $\widetilde{p}_a(\xi) := p(0, \xi)$, $\xi \in \widetilde{P}_a$. Przypomnijmy, że w przypadku $d \geqslant 2$ mamy: $p_a((P_a)_-) = D \cap U_a$, gdzie $(P_a)_\pm := P_a \cap \{\pm t_1 > 0\}$, zaś w przypadku $d = 1$ mamy: $p_a((P_a)_-) = D \cap U_a$, gdy $O(a) = +1$ i $p_a((P_a)_+) = D \cap U_a$, gdy $O(a) = -1$.

Ponieważ $K$ jest zwarty, więc istnieje skończone pokrycie $U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_N} \supset K$. Niech $U_{a_j} = M \cap G_j$, gdzie $G_j \in \operatorname{top} \mathbb{R}^n$, $G_j \subset \varOmega$, $j = 1, \dots, N$. Niech $\varphi_j \in \mathcal{C}_0^\infty(G_j, [0,1])$, $j = 1, \dots, N$, będą takie, że $\sum_{j=1}^N \varphi_j = 1$ w otoczeniu $G_0$ zbioru $K$. Niech $u_j := \varphi_j u \in \mathcal{C}^1_{(d-1)}(\varOmega)$, $j = 1, \dots, N$. Zauważmy, że $\sum_{j=1}^N u_j = u$ na $G_0$. W szczególności, $\sum_{j=1}^N du_j = du$ na $G_0$. Mamy:

$$\int_{D,O} du = \int_{D \cap G_0,O} du = \sum_{j=1}^N \int_{D \cap G_0,O} du_j = \sum_{j=1}^N \int_{D,O} du_j,$$
$$\int_{M',O'} u = \int_{M' \cap G_0,O'} u = \sum_{j=1}^N \int_{M' \cap G_0,O'} u_j = \sum_{j=1}^N \int_{M',O'} u_j,$$

więc wystarczy sprawdzić wzór Stokesa dla każdej formy $u_j$ z osobna.

Ustalmy $j$ i dla prostoty przyjmijmy, że $u = u_j$ oraz opuśćmy nieistotne wskaźniki. Tak więc $p : P \longrightarrow U$ jest wyróżnioną parametryzacją (posiadającą wszystkie poprzednio wymienione własności), $U = M \cap G$ i $\operatorname{supp} u \subset\subset G$.

Niech $L := p^*(du) \in \mathcal{C}^0_{(d)}(P)$, $R := \widetilde{p}^*(u) \in \mathcal{C}^0_{(d-1)}(\widetilde{P})$. Przypomnijmy, że

$$\operatorname{supp} L \subset\subset P, \quad \operatorname{supp} R \subset\subset \widetilde{P}.$$

W przypadku, gdy $U' := M' \cap U = \varnothing$ niech $Q := P$. W przypadku, gdy $U' \neq \varnothing$ niech $Q = P_-$ lub $Q = P_+$ tak by $p(Q) = D \cap U$ (jeżeli $d \geqslant 2$, to oczywiście $Q = P_-$). Nasz problem polega na pokazaniu, że

$$\int_{D,O} du = \int_Q L \, d\mathcal{L}^d = \left. \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } U' = \varnothing \\ \int_{\widetilde{P}} R \, d\mathcal{L}^{d-1}, & \text{jeżeli } U' \neq \varnothing \end{cases} \right\} = \int_{M',O'} u.$$

Najpierw rozpatrzymy przypadek $d = 1$. Na podstawie Twierdzenia 13.1.14(e) mamy: $L = dv = v' dt$, gdzie $v := p^*(u) = u \circ p$. Niech $Q = (\alpha, \beta)$. W konsekwencji:

$$\int_Q L \, d\mathcal{L}^1 = \int_\alpha^\beta v'(t) dt = v(\beta) - v(\alpha) = u(p(\beta)) - u(p(\alpha))$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } U' = \varnothing \\ u(p(0)), & \text{jeżeli } U' \neq \varnothing,\ Q = P_- \\ -u(p(0)), & \text{jeżeli } U' \neq \varnothing,\ Q = P_+ \end{cases} \Bigg\} = \int_{M',O'} u,$$

co kończy dowód dla $d = 1$.

Przypadek $d \geqslant 2$ jest znacznie bardziej skomplikowany. Wobec liniowości wszystkich operacji możemy się ograniczyć do form postaci $u = \varphi dx_I$, gdzie $\varphi \in \mathcal{C}^1_0(G)$, a $I \in \varLambda^n_{d-1}$.

Na wstępie, aby uchwycić zasadniczą myśl dowodu, przyjmijmy dodatkowo, że $p$ jest klasy $\mathcal{C}^2$. Wtedy na podstawie Twierdzenia 13.1.14(f) mamy $p^*(du) = dv$, gdzie $v := p^*(u)$. Niech $\sigma : \mathbb{R}^{d-1} \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $\sigma(\xi) = (0, \xi)$. Odnotujmy, że $\widetilde{p} = p \circ \sigma$, a zatem $R = \sigma^*(v)$. Tak więc chcemy pokazać, że

$$\int_Q dv\, d\mathcal{L}^d = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } Q = P \\ \int_{\widetilde{P}} \sigma^*(v)\, d\mathcal{L}^{d-1}, & \text{jeżeli } Q \neq P \end{cases}.$$

Wobec liniowości możemy założyć, że

$$v = \psi dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_{k-1} \wedge dt_{k+1} \wedge \cdots \wedge dt_d$$

dla pewnego $k$. Kostkę $Q$ przedstawiamy w postaci $A \times (\gamma, \delta) \times B \subset \mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-k}$. Niech $t = (t_A, t_k, t_B) \in \mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-k}$. Na podstawie twierdzenia Fubiniego dostajemy:

$$\int_Q dv\, d\mathcal{L}^d = \int_Q (-1)^{k-1} \frac{\partial \psi}{\partial t_k} dt = (-1)^{k-1} \int_A \int_B \Big( \int_\gamma^\delta \frac{\partial \psi}{\partial t_k} dt_k \Big) dt_A dt_B$$
$$= (-1)^{k-1} \int_A \int_B \Big( \psi(t_A, \delta, t_B) - \psi(t_A, \gamma, t_B) \Big) dt_A dt_B.$$

Ponieważ $\operatorname{supp} v \subset\subset P$, ostatnie wyrażenie jest równe zero, jeżeli $Q = P$ lub $k \geqslant 2$. Jeżeli $Q \neq P$ i $k = 1$, to jest ono równe

$$\int_{\widetilde{P}} \psi(0, \xi)\, d\mathcal{L}^{d-1}(\xi).$$

Z drugiej strony,

$$\int_{\widetilde{P}} \sigma^*(v)\, d\mathcal{L}^{d-1} = \int_{\widetilde{P}} (\psi \circ \sigma) d\sigma_1 \wedge \cdots \wedge d\sigma_{k-1} \wedge d\sigma_{k+1} \wedge \cdots \wedge d\sigma_d)\, d\mathcal{L}^{d-1}$$
$$= \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } k \geqslant 2 \\ \int_{\widetilde{P}} \psi(0, \xi)\, d\mathcal{L}^{d-1}(\xi), & \text{jeżeli } k = 1 \end{cases},$$

co kończy dowód przy dodatkowym założeniu.

W przypadku ogólnym zauważmy, że

$$L = p^*(du) = p^*(d\varphi \wedge dx_I) = p^*(d\varphi) \wedge dp_I = d(\varphi \circ p) \wedge dp_I$$

i $R = \sigma^*((\varphi \circ p) dp_I)$. Oznaczając $f_1 := \varphi \circ p$ i $f_j := p_{i_{j-1}}$, $j = 2, \dots, d$, sprowadzamy zagadnienie do pytania, czy

$$\int_{Q, [\mathbb{R}^d]_+} df_1 \wedge \cdots \wedge df_d = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } Q = P \\ \int_{\widetilde{P}, [\mathbb{R}^{d-1}]_+} \sigma^*(f_1 df_2 \wedge \cdots \wedge df_d), & \text{jeżeli } Q \neq P \end{cases}.$$

Odnotujmy, że $f_1 \in \mathcal{C}^1_0(P)$, $f_j \in \mathcal{C}^1(P)$, $j = 2, \dots, d$. Jeżeli $f_2, \dots, f_d \in \mathcal{C}^2(P)$, to $d(f_1 df_2 \wedge \cdots \wedge df_d) = df_1 \wedge \cdots \wedge df_d$, a więc powyższy wzór sprowadza się do wzoru Stokesa dla $Q$, który to wzór, jak wynika z poprzedniej części dowodu, zachodzi.

Aby wykazać wzór w przypadku klasy $\mathcal{C}^1$ zastosujemy aproksymację. Na wstępie zauważmy, że możemy założyć, że $f_j \in \mathcal{C}^1_0(P)$ (zastępując $f_j$ przez $g f_j$, gdzie $g \in \mathcal{C}^\infty_0(P)$ i $g = 1$ w otoczeniu $\operatorname{supp} f_1$), $j = 2, \dots, d$. Teraz wystarczy wykorzystać regularyzację z Twierdzenia **??** i zauważyć, że na podstawie Twierdzenia 12.19.3(d) mamy (Ćwiczenie):

$$df_1 \wedge d(f_2)_\varepsilon \wedge \cdots \wedge d(f_d)_\varepsilon = \frac{\partial(f_1, (f_2)_\varepsilon, \dots, (f_d)_\varepsilon)}{\partial(t_1, \dots, t_d)}\, dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_d$$

$$\longrightarrow \frac{\partial(f_1,\dots,f_d)}{\partial(t_1,\dots,t_d)}\,dt_1\wedge\dots\wedge dt_d = df_1\wedge\dots\wedge df_d$$

jednostajnie na $\mathbb{R}^d$ przy $\varepsilon\longrightarrow 0$. Ponadto,

$$\sigma^*(f_1 d(f_2)_\varepsilon\wedge\dots\wedge d(f_d)_\varepsilon) = (f_1\circ\sigma\frac{\partial((f_2)_\varepsilon\circ\sigma,\dots,(f_d)_\varepsilon\circ\sigma)}{\partial(\xi_1,\dots,\xi_{d-1})}\,d\xi_1\wedge\dots\wedge d\xi_{d-1}$$
$$\longrightarrow (f_1\circ\sigma)\frac{\partial(f_2\circ\sigma,\dots,f_d\circ\sigma)}{\partial(\xi_1,\dots,\xi_{d-1})}\,d\xi_1\wedge\dots\wedge d\xi_{d-1} = \sigma^*(f_1 df_2\wedge\dots\wedge df_d)$$

jednostajnie na $\mathbb{R}^{d-1}$ przy $\varepsilon\longrightarrow 0$.

Gwarantuje to zbieżność odpowiednich całek

$$\int_{Q,[\mathbb{R}^d]_+} df_1\wedge d(f_2)_\varepsilon\wedge\dots\wedge d(f_d)_\varepsilon \longrightarrow \int_{Q,[\mathbb{R}^d]_+} df_1\wedge\dots\wedge df_d,$$
$$\int_{\widetilde{P},[\mathbb{R}^{d-1}]_+} \sigma^*(f_1 d(f_2)_\varepsilon\wedge\dots\wedge d(f_d)_\varepsilon) \longrightarrow \int_{\widetilde{P},[\mathbb{R}^{d-1}]_+} \sigma^*(f_1 df_2\wedge\dots\wedge df_d),$$

co kończy dowód. □

[Wykład 22.05.2021 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ]

*Dowód II wersji Twierdzenia Stokesa 13.3.2.* Wystarczy rozważyć przypadek, gdy $u=\varphi dx_I$ dla pewnego $I\in\Lambda^n_{d-1}$. Niech $S_I:=\operatorname{pr}_I(S)$. Zdefiniujmy:

$$\psi_\nu := 1-(\chi_{S_I^{(2/\nu)}})_{1/\nu}\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{d-1},[0,1]),\quad \nu\in\mathbb{N}.$$

Wtedy $\psi_\nu=1$ poza $S_I^{(3/\nu)}$, $\psi_\nu=0$ na $S_I^{(1/\nu)}$. W szczególności

$$\psi_\nu\longrightarrow\chi_{\mathbb{R}^{d-1}\setminus S_I}$$

punktowo. Odnotujmy, że zbiór otwarty $G_\nu:=\operatorname{int}S_I^{(1/\nu)}$ jest otoczeniem $S_I$. Określamy

$$u_\nu:=(\psi_\nu\circ\operatorname{pr}_I)u=(\psi_\nu\circ\operatorname{pr}_I)\varphi dx_I.$$

Zauważmy, że

$$(\operatorname{supp}u_\nu)\cap(\operatorname{pr}_I^{-1}(G_\nu))=\varnothing,$$

co oznacza, że zbiór $(\operatorname{supp}u_\nu)\cap(\operatorname{cl}_M D)$ jest zwarty. Na podstawie I wersji twierdzenia Stokesa mamy:

$$\int_{D,O} du_\nu = \int_{M',O'} u_\nu,\quad \nu\in\mathbb{N}.$$

Wystarczy pokazać, że

$$\int_{D,O} du_\nu\longrightarrow\int_{D,O} du,\quad \int_{M',O'} u_\nu\longrightarrow\int_{M',O'} u.$$

Niech $H:=\operatorname{pr}_I^{-1}(S_I)$. Oczywiście $[u_\nu]\longrightarrow[u]$ punktowo na $M'\setminus H$. Ponadto $|[u_\nu]|\leqslant|[u]|$ na $M'$. Stąd, na podstawie twierdzenia Lebesgue'a, dostajemy

$$\int_{M'\setminus H,O'} u_\nu\longrightarrow\int_{M'\setminus H,O'} u.$$

Zauważmy, że

$$du_\nu = d(\psi_\nu\circ\operatorname{pr}_I)\wedge u+(\psi_\nu\circ\operatorname{pr}_I)du=(\psi_\nu\circ\operatorname{pr}_I)du.$$

Stąd $[du_\nu]\longrightarrow[du]$ punktowo na $M\setminus H$ oraz $|[du_\nu]|\leqslant|[du]|$. Mamy więc

$$\int_{D\setminus H,O} du_\nu\longrightarrow\int_{D\setminus H,O} du.$$

Pozostaje sprawdzić, co się dzieje na $H$. Potrzebny nam będzie następujący lemat.

**Lemat 13.3.9.** *Niech $N$ będzie $r$–wymiarową orientowalną podrozmaitością w $\mathbb{R}^n$ i niech $B \subset \mathbb{R}^r$ będzie zbiorem domkniętym miary zero. Wtedy*

$$\int_{N\cap \operatorname{pr}_J^{-1}(B)} [f dx_J]\, d\mathcal{L}^N = 0$$

*dla dowolnego $J \in \Lambda_r^n$ przy założeniu, że forma $f dx_J$ jest całkowalna na $N$.*

Przyjmijmy lemat na chwilę. Jeżeli $M' \neq \varnothing$, to stosując lemat do $r = d-1$, $N = M'$, $B = S_I$, $J = I$ i $f dx_I = u$ lub $f dx_I = u_\nu$, wnioskujemy, że

$$\int_{M'\cap H} [u]\, d\mathcal{L}^{M'} = \int_{M'\cap H} [u_\nu]\, d\mathcal{L}^{M'} = 0.$$

Niech teraz $r = d$, $N = D$. Mamy $du = \sum_{j\notin I} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I$ i podobnie dla $du_\nu$. Bierzemy teraz $f dx_J = \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I$, $J = (i_1, \dots, i_{s-1}, j, i_s, \dots, i_{d-1})$ i $B := \{(t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d : (t_1, \dots, t_{s-1}, t_{s+1}, \dots, t_d) \in S_I\}$ tak, że $\operatorname{pr}_J^{-1}(B) = H$. Z lematu wnioskujemy, że

$$\int_{D\cap H} [du]\, d\mathcal{L}^M = \int_{D\cap H} [du_\nu]\, d\mathcal{L}^M = 0.$$

Dowód II wersji twierdzenia Stokesa jest zakończony. $\square$

*Dowód Lematu 13.3.9.* Niech $A := N \cap \operatorname{pr}_J^{-1}(B)$ i niech $A_0$ oznacza zbiór tych wszystkich punktów $a \in A$ takich, że przy dowolnej lokalnej parametryzacji $p : P \longrightarrow U$ w otoczeniu $a$ mamy:

$$\frac{\partial(p_{j_1}, \dots, p_{j_r})}{\partial(t_1, \dots, t_r)}(p^{-1}(a)) = 0.$$

Oczywiście $A_0$ jest relatywnie domknięty i $[f dx_J] = 0$ na $A_0$. Pozostaje udowodnić, że

$$\int_{A\setminus A_0} [f dx_J]\, d\mathcal{L}^N = 0.$$

Rozumujemy lokalnie w otoczeniu ustalonego punktu $a \in A \setminus A_0$. Wobec definicji zbioru $A_0$, podrozmaitość $N$ da się opisać w pewnym otoczeniu $U$ punktu $a$ jako wykres $x_{J'} = g(x_J)$, $x_J \in Q$, gdzie $J'$ oznacza wielowskaźnik uzupełniający do $J$ w $(1, \dots, n)$ (Ćwiczenie). Mamy stąd:

$$\int_{A\cap U} [f dx_J]\, d\mathcal{L}^N = \pm \int_{\{x_J : (x_J, g(x_J)) \in A\}} f(x_J, g(x_J)) dx_J = 0$$

bo $\{x_J : (x_J, g(x_J)) \in A\} \subset B$. $\square$

## 13.4. Twierdzenie Kirszbrauna

**Twierdzenie 13.4.1** (Twierdzenie Kirszbrauna [17])**.** *Niech $\varnothing \neq S \subset \mathbb{R}^m$ i niech $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie dowolnym odwzorowaniem spełniającym warunek Lipschitza $\|f(x') - f(x'')\| \leqslant L\|x' - x''\|$, $x', x'' \in S$ (w normach euklidesowych). Wtedy $f$ posiada rozszerzenie $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ spełniające warunek Lipschitza z tą samą stałą $L$.*

**Obserwacja 13.4.2.** (a) Twierdzenie Kirszbrauna nie jest prawdziwe przy dowolnym wyborze norm w $\mathbb{R}^m$ i $\mathbb{R}^n$.

Dla przykładu, niech $S := \{(1,-1), (-1,1), (1,1)\} =: \{a_1, a_2, a_3\} \subset \mathbb{R}^2$, $f(1,-1) = (1,0) = b_1$, $f(-1,1) = (-1,0) = b_2$, $f(1,1) = (0,\sqrt{3}) = b_3$. Wtedy $\|f(x') - f(x'')\| = \|x' - x''\|_\infty = 2$, $x', x'' \in S$, $x' \neq x''$, co oznacza, że $f$ spełnia w tych normach warunek Lipschitza ze stałą 1.

Istotnie, $a_1 - a_2 = (2,-2)$, $b_1 - b_2 = (2,0)$, $a_1 - a_3 = (0,-2)$, $b_1 - b_3 = (1,-\sqrt{3})$, $a_2 - a_3 = (-2,0)$, $b_2 - b_3 = (-1,-\sqrt{3})$.

Przypuśćmy, że $f$ rozszerza się do odwzorowania $g : S \cup \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ spełniającego warunek Lipschitza ze stałą 1 (w powyższych normach). Niech $a_0 := (0,0)$, $b_0 := g(0,0)$. Wtedy musi być: $\|b_0 - b_i\| \leqslant \|a_0 - a_i\|_\infty = 1$, $i = 1,2,3$, co daje sprzeczność.

---

[17] Mojżesz Kirszbraun (1903(4?)–1942).

(b) Z twierdzenia Kirszbrauna wynika oczywiście, że dowolne odwzorowanie lipschitzowskie $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\|f(x') - f(x'')\|_2 \leqslant L\|x' - x''\|_1$, $x', x'' \in S$, gdzie $\| \ \|_1$ (odp. $\| \ \|_2$) jest pewną normą w $\mathbb{R}^m$ (odp. $\mathbb{R}^n$) przedłuża się do globalnego odwzorowania lipschitzowskiego $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\|g(x') - g(x'')\|_2 \leqslant L'\|x' - x''\|_1$, $x', x'' \in \mathbb{R}^m$, gdzie $L'$ jest pewną stałą.

(c) Jeżeli $n = 1$, to twierdzenie Kirszbrauna jest elementarne nawet w następującej ogólnej postaci: Niech $(X, \varrho)$ będzie przestrzenią metryczną $S \subset X$ i $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$, $|f(x) - f(y)| \leqslant L\varrho(x, y)$, $x, y \in S$. Wtedy $f$ posiada rozszerzenie $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunek Lipschitza z tą samą stałą $L$.

Istotnie, jeżeli $\varnothing \neq S \neq X$, to kładziemy $g(x) := \inf\{f(z) + L\varrho(x, z) : z \in S\}$, $x \in X$ (Ćwiczenie).

**Lemat 13.4.3.** *Niech $\mathbb{B}(b_j, r_j) \subset \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, N$, będzie dowolnym skończonym układem otwartych kul euklidesowych. Dla $t \geqslant 0$ zdefiniujmy $Y_t := \bigcap_{j=1}^{N} \overline{\mathbb{B}}(b_j, tr_j)$ i niech $c := \inf\{t \geqslant 0 : Y_t \neq \varnothing\}$. Wtedy $c < +\infty$, $Y_c = \{b\}$ oraz $b \in \operatorname{conv} A$, gdzie $A := \{b_j : \|b - b_j\| = cr_j\}$.*

Powyższy lemat jest prawdziwy dla znacznie ogólniejszej sytuacji [18].

*Dowód.* Zauważmy, że $0 \in Y_t$ dla $t \geqslant \max\{\|b_j\|/r_j : j = 1, \dots, N\}$. Stąd $c < +\infty$. Ponadto, $Y_c = \bigcap_{c<t<+\infty} Y_t \neq \varnothing$. Zdefiniujmy $\mu := \max\{r_j : j = 1, \dots, N\}$. Niech $y, z \in Y_c$. Wtedy

$$\begin{aligned}
\|\tfrac{1}{2}(y + z) - b_j\|^2 &= \tfrac{1}{4}\|y + z\|^2 + \|b_j\|^2 - \langle y + z, b_j\rangle \\
&= \tfrac{1}{2}\|y\|^2 + \tfrac{1}{2}\|z\|^2 - \tfrac{1}{4}\|y - z\|^2 + \|b_j\|^2 - \langle y, b_j\rangle - \langle z, b_j\rangle \\
&= \tfrac{1}{2}(\|y - b_j\|^2 + \|z - b_j\|^2) - \tfrac{1}{4}\|y - z\|^2 \leqslant r_j^2 c^2 - \tfrac{r_j^2}{4\mu^2}\|y - z\|^2, \quad j = 1, \dots, N.
\end{aligned}$$

W konsekwencji $\frac{1}{2}(y + z) \in Y_t$ dla $t := \sqrt{c^2 - \frac{1}{4\mu^2}\|y - z\|^2}$. Oznacza to, że $t \geqslant c$, czyli $y = z$. Tak więc $Y_c = \{b\}$.

Po translacji możemy założyć, że $b = 0$. Pozostaje pokazać, że $0 \in \operatorname{conv} A$, gdzie $A := \{b_j : \|b_j\| = r_jc\}$. Możemy założyć, że $A = \{b_1, \dots, b_s\}$. Przypuśćmy, że $0 \notin \operatorname{conv} A$. Wtedy istnieje $(n-1)$-wymiarowa płaszczyzna $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u\rangle = 0\}$, gdzie $u \in \mathbb{R}^n$, $\|u\| = 1$, taka że $\operatorname{conv} A \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u\rangle > 0\}$. W szczególności, $\langle b_j, u\rangle > 0$ dla $b_j \in A$. Dla małych $\varepsilon > 0$ mamy $0 \neq \varepsilon u \notin Y_c$, a więc istnieje $j = j(\varepsilon) \in \{1, \dots, s\}$ takie, że $\|\varepsilon u - b_j\| > cr_j$. Stąd $c^2r_j^2 < \|\varepsilon u - b_j\|^2 = \varepsilon^2 + \|b_j\|^2 - 2\varepsilon\langle u, b_j\rangle = \varepsilon^2 + c^2r_j^2 - 2\varepsilon\langle u, b_j\rangle$. W szczególności, $\langle u, b_j\rangle < \frac{1}{2}\varepsilon$. Wnioskujemy stąd (gdy $\varepsilon \longrightarrow 0+$), że $\{b_j \in A : \langle u, b_j\rangle \leqslant 0\} \neq \varnothing$ — sprzeczność. $\square$

*Dowód Twierdzenia Kirszbrauna.* Możemy założyć, że $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^n$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą 1. Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną wszystkich par $(T, g)$, gdzie $g : T \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $S \subset T$, $g$ jest przedłużeniem $f$ spełniającym warunek Lipschitza ze stałą 1. Z Lematu Kuratowskiego [19]-Zorna [20] wiemy, że $\mathcal{F}$ posiada element maksymalny $(T_0, g)$. Przypuśćmy, że $T_0 \neq \mathbb{R}^m$ i ustalmy $a_0 \in \mathbb{R}^m \setminus T_0$. Pokażemy, że istnieje $b \in \bigcap_{a \in T} \overline{\mathbb{B}}(g(a), \|a - a_0\|)$. Jeżeli tak będzie, to możemy rozszerzyć $g$ do $T_0 \cup \{a_0\}$ kładąc w punkcie $a_0$ wartość $b$, co da sprzeczność.

Wystarczy pokazać, że $\bigcap_{a \in T} \overline{\mathbb{B}}(g(a), \|a - a_0\|) \neq \varnothing$ dla dowolnego zbioru skończonego $T = \{a_1, \dots, a_N\} \subset T_0$. Zastosujemy Lemat 13.4.3 do zbioru kul $\mathbb{B}(g(a_j), \|a_j - a_0\|)$, $j = 1, \dots, N$. Niech $c, b$ będą takie, jak w lemacie. Wiemy, że możemy założyć, że $b = \sum_{j=1}^{k} t_j g(a_j)$, gdzie $k \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_k > 0$, $t_1 + \dots + t_k = 1$, $\|b - g(a_j)\| = c\|a_j - a_0\|$, $j = 1, \dots, k$. Mamy

$$\begin{aligned}
0 = 2\Big\|\sum_{j=1}^{k} t_j(g(a_j) - b)\Big\|^2 &= 2\sum_{i,j=1}^{k} t_i t_j \langle g(a_i) - b, g(a_j) - b\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{k} t_i t_j \big(\|g(a_i) - b\|^2 + \|g(a_j) - b\|^2 - \|g(a_i) - g(a_j)\|^2\big)
\end{aligned}$$

---

[18] Zob. H. Federer, *Geometric measure theory*, Springer Verlag, Berlin, 1969, Lemma 2.10.40.
[19] Kazimierz Kuratowski (1896–1980).
[20] Max August Zorn (1906–1993).

$$\begin{aligned}&\geqslant \sum_{i,j=1}^{k} t_i t_j\big(c^2\|a_i-a_0\|^2+c^2\|a_j-a_0\|^2-\|a_i-a_j\|^2\big)\\&=\sum_{i,j=1}^{k} t_i t_j\big(2c^2\langle a_i-a_0,a_j-a_0\rangle+(c^2-1)\|a_i-a_j\|^2\big)\\&=2c^2\Big\|\sum_{i=1}^{k} t_i(a_i-a_0)\Big\|^2+(c^2-1)\sum_{i,j=1}^{k} t_i t_j\|a_i-a_j\|^2.\end{aligned}$$

Wynika stąd, że albo ($k=1$ i $c=0$) albo ($k\geqslant 2$ i $c\leqslant 1$). Tak więc $c\leqslant 1$ i w konsekwencji $b\in Y_1=\bigcap_{a\in T}\overline{\mathbb{B}}(g(a),\|a-a_0\|)$. □

[Wykład 24.05.2021 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ]

## 13.5. Miara i komiara odwzorowań lipschitzowskich

Celem tego podrozdziału jest udowodnienie dwóch fundamentalnych twierdzeń (Twierdzenia 13.5.4, 13.5.5) łączących rachunek różniczkowy i teorię miary. Obok twierdzenia Stokesa, są one zwieńczeniem wykładu z Analizy. Metody dowodu głównych twierdzeń są oparte na monografii Federera ([21]). Potrzebujemy kilku pomocniczych oznaczeń (część z nich już znamy).

**Definicja 13.5.1.** (a) Dla dowolnej macierzy $A\in\mathbb{M}(n\times m;\mathbb{R})$ niech

$$J_d(A):=\Big(\sum_{I\in\Lambda^n_d,\ J\in\Lambda^m_d}(\det A_{I,J})^2\Big)^{1/2},\quad 1\leqslant d\leqslant\min\{m,n\},$$

gdzie $A_{I,J}$ oznacza podmacierz macierzy $A$ powstałą przez wybranie wierszy o numerach $i_1,\dots,i_d$ i kolumn $j_1,\dots,j_d$, zaś $\Lambda^s_r:=\{(k_1,\dots,k_r):1\leqslant k_1<\dots<k_r\leqslant s\}$. Będziemy korzystać wyłącznie z przypadku, gdy $d=\min\{m,n\}$.

(b) Jeżeli $f:\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^n$ jest odwzorowaniem takim, że $f'(a)$ istnieje, to przyjmujemy $J_d f(a):=J_d(f'(a))$. Zauważmy, że:

- dla $m=1$ mamy $J_1 f(a)=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(f_j'(a))^2}=\|f'(a)\|$;
- dla $d=n=m$ mamy $J_m f(x)=\big|\det\big[\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a)\big]_{j,k=1,\dots,m}\big|=|f'(a)|$.

(c) Dla $f:\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^n$ i $A\subset\mathbb{R}^m$ definiujemy $N_A(f,\cdot):\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{N}_0\cup\{+\infty\}$,

$$N_A(f,y):=\begin{cases}\#(A\cap f^{-1}(y)), & \text{jeżeli zbiór } A\cap f^{-1}(y) \text{ jest skończony}\\ +\infty, & \text{w przeciwnym przypadku}\end{cases},\quad y\in\mathbb{R}^n.$$

Zauważmy, że:
- $N_A(f,y)=0 \iff y\notin f(A)$;
- jeżeli $f|A$ jest injektywne, to $N_A(f,\cdot)=\chi_{f(A)}$.

**Definicja 13.5.2.** Niech $\varnothing\neq C\subset\mathbb{R}^m$ będzie dowolnym zbiorem i niech $g:C\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$ będzie dowolną funkcją. Definiujemy

$$\sum_{x\in C} g(x):=\int_C g\,d\mathcal{H}^0,$$

o ile całka ma sens, gdzie $\mathcal{H}^0$ to zerowa miara Hausdorffa w $\mathbb{R}^m$, czyli miara licząca.

Przypomnijmy, że $\mathcal{H}_0=\mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$, a wiec w szczególności wszystkie funkcje $C\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$ są $\mathcal{H}_0$-mierzalne (Obserwacja 12.9.1(b)).

---

([21]) Zob. H. Federer, *Geometric measure theory*, Springer Verlag, Berlin, 1969, § 3.2.

**Obserwacja 13.5.3.** (a) Łatwo pokazać (ĆWICZENIE), że jeżeli $g : C \longrightarrow \mathbb{R}$ i $\int_C g d\mathcal{H}^0 \in \mathbb{R}$, to $\int_C g d\mathcal{H}^0$ pokrywa się z $\sum\limits_{x\in C} g(x)$ w sensie rodzin sumowalnych.

Oczywiście, wystarczy rozważyć przypadek funkcji $g : C \longrightarrow \mathbb{R}_+$ takiej, że $\int_C g d\mathcal{H}^0 < +\infty$. Zauważmy, że każda funkcja $g : C \longrightarrow \mathbb{R}_+$ taka, że zbiór $D := \{x \in C : g(x) > 0\}$ jest skończony, może być uważana za funkcję prostą $\sum\limits_{x\in D} h(x)\chi_{\{x\}}$. Stąd $\int_C g d\mathcal{H}^0 = \sum\limits_{x\in D} g(x)$. Taką funkcją jest każda funkcja prosta taka, że $\int_C g d\mathcal{H}^0 \in \mathbb{R}$. Widać również, że dla dowolnej funkcji $g : C \longrightarrow \mathbb{R}_+$ i dla dowolnego zbioru skończonego $D \subset C$ mamy $\int_D g d\mathcal{H}^0 = \sum\limits_{x\in D} g(x) \leqslant \int_C g d\mathcal{H}^0$. Niech $\mathcal{M}_0^+(C) \ni g_s \nearrow g$, $\int_C g_s d\mathcal{H}^0 = \sum\limits_{x\in D_s} g_s(x)$, gdzie $D_s$ jest skończony, $s \in \mathbb{N}$. Wtedy $\sum\limits_{x\in D_s} g_s(x) \leqslant \sum\limits_{x\in D_s} g(x) \leqslant \int_C g d\mathcal{H}^0$. Stąd $\sum\limits_{x\in D_s} g(x) \longrightarrow \int_C g d\mathcal{H}^0$, co implikuje, że $\int_C g d\mathcal{H}^0 = \sum\limits_{x\in C} g(x)$ w sensie rodzin sumowalnych.

(b) W szczególności, $N_A(f, y) = \sum\limits_{x\in f^{-1}(y)} \chi_A(x)$, $y \in \mathbb{R}^n$.

A oto nasze główne twierdzenia o mierze i komierze Hausdorffa.

**Twierdzenie 13.5.4** ($m$-wymiarowa miara Hausdorffa funkcji $f|_A$)**.** *Załóżmy, że $n \geqslant m$ i niech $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie odwzorowaniem spełniającym lokalnie warunek Lipschitza . Wtedy dla dowolnego zbioru $A \in \mathcal{L}_m$ mamy*

$$\int_{\mathbb{R}^n} N_A(f, y) d\mathcal{H}^m(y) = \int_{f(A)} N_A(f, y) d\mathcal{H}^m(y) = \int_A J_m f(x) d\mathcal{L}^m(x). \tag{\dagger}$$

Całka $\int_{\mathbb{R}^n} N_A(f, y) d\mathcal{H}^m(y)$ nosi nazwę *$m$-wymiarowej miary Hausdorffa funkcji $f|_A$*.

**Twierdzenie 13.5.5** ($(m-n)$-wymiarowa komiara Hausdorffa funkcji $f|_A$)**.** *Załóżmy, że $n < m$ i niech $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie odwzorowaniem spełniającym lokalnie warunek Lipschitza. Wtedy dla dowolnego zbioru $A \in \mathcal{L}_m$ mamy*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(y)) d\mathcal{L}^n(y) = \int_A J_n f(x) d\mathcal{L}^m(x). \tag{\ddagger}$$

Całka $\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(y)) d\mathcal{L}^n(y)$ nosi nazwę *$(m-n)$-wymiarowej komiary Hausdorffa funkcji $f|_A$*.

Dowody obu twierdzeń są skomplikowane i będą przebiegały w wielu etapach. W dowodzie (‡) korzysta się z (†).

Najpierw kilka ogólnych uwag dotyczących poprawności wzorów (†) i (‡).

**Obserwacja 13.5.6.** (a) Na mocy Twierdzenia Rademachera 12.15.1, $f'(x)$ istnieje dla $x \in \Xi' = \mathbb{R}^m \setminus \Xi$, gdzie $\Xi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ jest miary zero. Zbiór $\Xi$ nie jest oczywiście jednoznacznie wyznaczony. Wszystkie funkcje $\Xi' \ni x \longmapsto \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ są borelowskie (Obserwacja 12.2.2(u)). W szczególności, funkcja $\Xi' \ni x \longmapsto J_m f(x)$ jest borelowska, a więc prawe strony wzorów (†) i (‡) są poprawnie określone.

(b) We wzorze (†) $\mathfrak{H}_m$-mierzalność funkcji $\mathbb{R}^n \ni y \overset{\varphi}{\longmapsto} N_A(f, y)$ nie jest oczywista i wymaga udowodnienia. Jeżeli $\varphi$ byłaby $\mathfrak{H}_m$-mierzalna, to $f(A) = \{\varphi \neq 0\} \in \mathfrak{H}_m$ i pierwsze dwa wyrazy w (†) będą poprawnie określone.

(c) We wzorze (‡) $\mathfrak{H}_{m-n}$-mierzalność zbioru $A \cap f^{-1}(y)$ dla $\mathcal{L}_n$-p.w. $y \in \mathbb{R}^n$ nie jest oczywista i wymaga udowodnienia. Podobnie, $\mathcal{L}_n$-mierzalność funkcji $\mathbb{R}^n \ni y \longmapsto \mathcal{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(y))$.

(d) Nie jest oczywiste, że (†) i (‡) zachodzą dla zbioru $A$ miary zero (wtedy prawe strony są równe zero).

(e) Wobec twierdzenia Kirszbrauna 13.4.1, wzory (†) i (‡) można zastosować do dowolnego odwzorowania lipschitzowskiego $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^n$, gdzie zbiór $S \subset \mathbb{R}^m$ jest dowolny, oraz $\mathcal{L}_m \ni A \subset S$.

(f) Jeżeli $(A_i)_{i=1}^\infty$ jest rozbiciem zbioru $A$ na zbiory mierzalne w sensie Lebesgue'a (tzn. $A_i \in \mathcal{L}_m$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ dla $i \neq j$ i $A = \bigcup\limits_{i=1}^\infty A_i$) oraz (†) lub (‡) zachodzi dla każdego zbioru $A_i$ z osobna, to zachodzi dla $A$. Istotnie, w przypadku (†) mamy $N_A(f, y) = \sum\limits_{i=1}^\infty N_{A_i}(f, y)$, $y \in \mathbb{R}^n$. Zaś w przypadku

(‡), $\mathcal{H}^{m-n}(A\cap f^{-1}(y))=\sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}^{m-n}(A_i\cap f^{-1}(y))$ dla $\mathcal{L}_n$-p.w. $y\in\mathbb{R}^n$. Uwaga: ostatnia równość wymaga tego, aby wszystkie zbiory $A_i\cap f^{-1}(y)$, $i\in\mathbb{N}$, były $\mathcal{H}_{m-n}$-mierzalne.

(g) W szczególności, z (f) wynika, że zawsze możemy założyć, że $A\subset\subset\mathbb{R}^m$ oraz że $f$ spełnia globalny warunek Lipschitza.

Istotnie, na podstawie twierdzenia Lindelöfa istnieje przeliczalne pokrycie otwarte zbioru $A$, $A\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i$, takie że dla dowolnego $i$ mamy $U_i\subset\subset\mathbb{R}^m$ oraz $f$ spełnia warunek Lipschitza na $U_i$. Wystarczy przyjąć $A_1:=A\cap U_1$, $A_j:=A\cap(U_j\setminus(U_1\cup\dots\cup U_{j-1}))$, $j\geqslant 2$.

Obecnie przedstawimy szereg konsekwencji Twierdzenia (†).

**Obserwacja 13.5.7.** Przyjmujemy założenia takie, jak w twierdzeniu (†).

(a) Jeżeli $f|_A$ jest injektywne, to z (†) wynika fundamentalny wzór na $m$-tą miarę Hausdorffa zbioru $f(A)$:

$$\mathcal{H}^m(f(A))=\int_A J_mf(x)d\mathcal{L}^m(x). \tag{*}$$

(b) Jeżeli $f|_A$ jest injektywne i $n=m$, to z (a) wynika *ogólne twierdzenie o zmianie zmiennych w całce Lebesgue'a*:

$$\mathcal{L}^m(f(A))=\int_A|f'(x)|d\mathcal{L}^m(x)$$

(korzystamy tu z równości $\mathcal{H}^m=\mathcal{L}^m$ (Twierdzenie 12.10.2)).

(c) Zilustrujmy (a) przykładami z Obserwacji 7.5.3 (wtedy przyjmowaliśmy te przykłady „na wiarę").

(1) $m=1$, $S=A:=[a,b]$. Wtedy (*) to wzór na długość łuku $\gamma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^n$ spełniającego warunek Lipschitza; $\mathcal{H}^1(\gamma^*)=\int_a^b\|\gamma'(x)\|d\mathcal{L}^1(x)$. Daje to uogólnienie poznanego wcześniej wzoru na długość krzywej.

(2) $m=n=2$, $S=A:=[a,b]\times[0,1]$, $f(x,t):=(x,\varphi(x)+t(\psi(x)-\varphi(x))$, gdzie $\varphi,\psi:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ spełniają warunek Lipschitza oraz $\varphi(x)<\psi(x)$, $x\in[a,b]$ (22). Wtedy

$$J_2f(x,t)=\left|\det\begin{bmatrix}1 & 0\\ \varphi'(x)+t(\psi'(x)-\varphi'(x)) & \psi(x)-\varphi(x)\end{bmatrix}\right|=\psi(x)-\varphi(x),$$

a więc „pole" zbioru $f(A)$ wyraża się wzorem

$$\mathcal{H}^2(f(A))=\int_A(\psi(x)-\varphi(x))dxdt=\int_a^b(\psi(x)-\varphi(x))dx.$$

(3) $m=n=2$, $S=A:=(0,1]\times[\alpha,\beta)$, $f(t,\varphi)=(tR(\varphi)\cos\varphi,tR(\varphi)\sin\varphi)$, gdzie $\beta-\alpha\leqslant 2\pi$ oraz $R:[\alpha,\beta)\longrightarrow\mathbb{R}_{>0}$ spełnia warunek Lipschitza. Wtedy

$$J_2f(t,\varphi)=\left|\det\begin{bmatrix}R(\varphi)\cos\varphi & tR'(\varphi)\cos\varphi-tR(\varphi)\sin\varphi\\ R(\varphi)\sin\varphi & tR'(\varphi)\sin\varphi+tR(\varphi)\cos\varphi\end{bmatrix}\right|=tR^2(\varphi),$$

a więc „pole" zbioru $f(A)$ wyraża się wzorem

$$\mathcal{H}^2(f(A))=\int_A tR^2(\varphi)dtd\varphi=\tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta R^2(\varphi)d\varphi.$$

(4) $m=n=3$, $S=A:=[a,b]\times(0,1]\times[0,2\pi)$, $f(x,t,\varphi)=(x,tR(x)\cos\varphi,tR(x)\sin\varphi)$, gdzie $R:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}_{>0}$ spełnia warunek Lipschitza. Wtedy

$$J_3f(x,t,\varphi)=\left|\det\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ tR'(x)\cos\varphi & R(x)\cos\varphi & -tR(x)\sin\varphi\\ tR'(x)\sin\varphi & R(x)\sin\varphi & tR(x)\cos\varphi\end{bmatrix}\right|=tR^2(x),$$

a więc „objętość" zbioru $f(A)$ wyraża się wzorem

$$\mathcal{L}^3(f(A))=\int_A tR^2(x)dxdtd\varphi=\pi\int_a^b R^2(x)dx.$$

(22) Tu i dalej sprawdzenie tego, że $f|_A$ jest injektywne pozostawiamy jako Ćwiczenie.

(5) $m = 2$, $n = 3$, $S = A := [a, b] \times [0, 2\pi)$, $f(x, \varphi) := (x, R(x) \cos\varphi, R(x) \sin\varphi)$, gdzie $R : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ spełnia warunek Lipschitza. Wtedy

$$f'(x,\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ R'(x)\cos\varphi & -R(x)\sin\varphi \\ R'(x)\sin\varphi & R(x)\cos\varphi \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} J_2^2(x,\varphi) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ R'(x)\cos\varphi & -R(x)\sin\varphi \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ R'(x)\sin\varphi & R(x)\cos\varphi \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} R'(x)\cos\varphi & -R(x)\sin\varphi \\ R'(x)\sin\varphi & R(x)\cos\varphi \end{vmatrix}^2 \\ &= R^2(x) + R^2(x)(R'(x))^2 = R^2(x)\big(1 + (R'(x))^2\big), \end{aligned}$$

a więc „pole" zbioru $f(A)$ wyraża się wzorem

$$\mathcal{H}^2(f(A)) = \int_A R(x)\sqrt{1 + (R'(x))^2}dxd\varphi = 2\pi \int_a^b R(x)\sqrt{1 + (R'(x))^2}dx.$$

(d) Z (†) wynika następujący ważny wniosek:
*Przy założeniach z (†), dla dowolnej funkcji $g \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}_m)$ (odp. $g \in L^1(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}^m)$) mamy:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Big(\sum_{x \in f^{-1}(y)} g(x)\Big) d\mathcal{H}^m(y) = \int_{\mathbb{R}^m} g(x) J_m f(x) d\mathcal{L}^m(x).$$

Istotnie, przypadek, gdy $g = \chi_A$ to (†). Dalej rozumujemy standardowo, tzn. najpierw przenosimy wynik na $g \in \mathcal{M}_0^+(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}_m)$. Następnie na $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}_m)$ korzystając z tego, że jeżeli $\mathcal{M}_0^+(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}_m) \ni g_i \nearrow g$, to $\sum_{x \in f^{-1}(y)} g_i(x) = \int_{f^{-1}(y)} g_i d\mathcal{H}^0 \nearrow \int_{f^{-1}(y)} g d\mathcal{H}^0 = \sum_{x \in f^{-1}(y)} g(x)$ (zob. Obserwacja 13.5.3).

Jeżeli $g \in L^1(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}^m)$, to stosujemy rozkład $g = g_+ - g_-$.

(e) Dla $n = m$ dostajemy

$$\int_{\mathbb{R}^m} \Big(\sum_{x \in f^{-1}(y)} g(x)\Big) d\mathcal{L}^m(y) = \int_{\mathbb{R}^m} g(x)|f'(x)| d\mathcal{L}^m(x).$$

Oznacza to, że (d) to uogólnienie twierdzenia o zmianie zmiennych.

[Wykład 27.05.2021 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ]

Teraz kolej na wnioski z (‡).

**Obserwacja 13.5.8.** (a) W przypadku, gdy $f = \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^n}$ ($J_n f(x) = 1$, $f^{-1}(y) = \{y\} \times \mathbb{R}^{m-n}$), wzór (‡) daje

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}^{m-n}(\{z \in \mathbb{R}^{m-n} : (y, z) \in A\}) d\mathcal{L}^n(y) = \mathcal{L}^m(A).$$

Oznacza to, że (‡) uogólnia twierdzenie Cavalieriego. Innymi słowy, (‡) to uogólnione twierdzenie Cavalieriego, w którym włókna $f^{-1}(y)$ nie muszą być płaskie.

(b) Z (‡) wynika, że (Ćwiczenie):
*Dla dla dowolnej funkcji $g \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}_m)$ (odp. $g \in L^1(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}^m)$) zachodzi*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{f^{-1}(y)} g(x) d\mathcal{H}^{m-n}(x) d\mathcal{L}^n(y) = \int_{\mathbb{R}^m} g(x) J_n f(x) d\mathcal{L}^m(x).$$

(c) Zastosujmy (b) do $n = 1$ i funkcji $f(x) := \|x\|$. Zauważmy, że $J_1 f(x) = 1$, $x \neq 0$. Dostajemy:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{f^{-1}(y)} g(x) d\mathcal{H}^{m-1}(x) d\mathcal{L}(y) = \int_{\mathbb{R}^m} g(x) d\mathcal{L}^m(x), \quad g \in L^1(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}^m),$$

czyli

$$\int_{\mathbb{R}^m} g(x) d\mathcal{L}^m(x) = \int_0^{+\infty} \int_{y\mathbb{S}_{m-1}} g(x) d\mathcal{H}^{m-1}(x) d\mathcal{L}(y) \overset{(*)}{=} \int_0^{+\infty} r^{m-1} \int_{\mathbb{S}_{m-1}} g(rx) d\mathcal{H}^{m-1}(x) d\mathcal{L}(r), \quad \text{(PC)}$$

gdzie (*) wynika z tego $\mathcal{H}^k(rA) = r^k\mathcal{H}^k(A)$, $A \subset \mathbb{R}^m$. Wzór (PC) to odpowiednik współrzędnych biegunowych w $\mathbb{R}^m$. W szczególności, biorąc $g := \chi_{\mathbb{B}_m}$, mamy:

$$\mathcal{L}^m(\mathbb{B}_m) = \int_0^1 r^{m-1}\mathcal{H}^{m-1}(\mathbb{S}_{m-1})d\mathcal{L}(r) = \frac{1}{m}\mathcal{H}^{m-1}(\mathbb{S}_{m-1}).$$

(d) W przypadku, gdy $f = \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^n}$, dostajemy

$$\int_{\mathbb{R}^m} g d\mathcal{L}^m = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^{m-n}} g(x,y)d\mathcal{L}^{m-n}(x)d\mathcal{L}^n(y).$$

Oznacza to, że (c) uogólnia twierdzenie Fubiniego.

W kolejnym kroku postaramy się pokonać problemy z określonością wzorów (†) i (‡), które wynikają z Obserwacji 13.5.6(b)—(d). Wiemy, że możemy założyć, że $A \subset\subset \mathbb{R}^m$ oraz że $f$ spełnia globalny warunek Lipschitza ze stałą $L > 0$ (Obserwacja 13.5.6(f)).

Najpierw Twierdzenie (†).

**Propozycja 13.5.9.** *Niech $n \geqslant m$ i niech $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $L > 0$.*

(a) *$\mathcal{H}^m(f(S)) \leqslant L^m\mathcal{H}^m(S) = L^m\mathcal{L}^m(S)$, $S \subset \mathbb{R}^m$. W szczególności, $\mathcal{H}^m(f(S)) = 0$, gdy $\mathcal{L}^m(S) = 0$.*

(b) *$f(S) \in \mathfrak{H}_m$, $S \in \mathfrak{L}_m$.*

(c) *Dla dowolnego $A \in \mathfrak{L}_m$ funkcja $\mathbb{R}^n \ni y \longmapsto N_A(f,y)$ jest $\mathfrak{H}_m$-mierzalna.*

*W szczególności, (†) zachodzi, gdy $\mathcal{L}^m(A) = 0$.*

*Dowód.* (a) Niech $S \subset \sum_{j=1}^{\infty} A_j$, przy czym $\operatorname{diam} A_j \leqslant \delta$, $j \in \mathbb{N}$. Wtedy $f(S) \subset \sum_{j=1}^{\infty} f(A_j)$ i $\operatorname{diam} f(A_j) \leqslant L \operatorname{diam} A_j \leqslant L\delta$, $j \in \mathbb{N}$. Stąd $\mathcal{H}^m_{L\delta}(f(S)) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_m(f(A_j)) \leqslant L^m \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_m(A_j)$. Tak więc $\mathcal{H}^m_{L\delta}(f(S)) \leqslant L^m\mathcal{H}^m_\delta(S)$. Teraz $\delta \longrightarrow 0+$.

(b) Przypadek $\mathcal{L}^m(S) = 0$ wynika z (a) (i zupełności miary $\mathcal{H}^m$). W przypadku ogólnym rozumujemy tak, jak w dowodzie Twierdzenia 12.10.6(c): Ponieważ miara Lebesgue'a jest regularna, zatem $S = F \cup Z$, gdzie $F \in \mathcal{F}_\sigma$, zaś $\mathcal{L}^m(Z) = 0$. Oczywiście zbiór $F$ może być przedstawiony w postaci $F = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$, gdzie każdy zbiór $K_j$ jest zwarty. Na podstawie (a), $\mathcal{H}^m(f(Z)) = 0$. Każdy ze zbiorów $f(K_j)$ jest zwarty. Ostatecznie więc, $f(S) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f(K_j) \cup f(Z)$ jest $\mathfrak{H}_m$-mierzalny.

(c) Jak powyżej $A = S \cup Z$, gdzie $S \cap Z = \varnothing$, $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{L}^m(Z) = 0$. Wobec (a), $\mathcal{H}^m(f(Z)) = 0$, więc wystarczy udowodnić $\mathcal{H}_m$-mierzalność funkcji $\mathbb{R}^n \ni y \longmapsto N_S(f,y)$.

Niech $(S_{s,j})_{s,j=1}^{\infty}$ będą zbiorami borelowskimi takimi, że $(S_{s,j})_{j=1}^{\infty}$ jest rozbiciem $S$, przy czym rozbicie $(S_{s+1,j})_{j=1}^{\infty}$ jest wpisane w $(S_{s,j})_{j=1}^{\infty}$ (w tym sensie, że $S_{s,j} = \bigcup_{i \in I(s,j)} S_{s+1,i}$ dla pewnej rodziny $I(s,j) \subset \mathbb{N}$) oraz $\delta_s := \sup\{\operatorname{diam} S_{s,j} : j \in \mathbb{N}\} \searrow 0$. Takie rozbicia uzyskamy np. biorąc $\{S_{s,j} : j \in \mathbb{N}\} := \{S \cap \Delta^o_{1/2^s,\alpha} : \alpha \in \mathbb{Z}^n\}$ (zob. Obserwacja 12.1.5). Pokażemy, że

$$N_S(f,y) = \lim_{s\to+\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{f(S_{s,j})}(y), \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

skąd natychmiast (wobec (b)) wyniknie, że funkcja $\mathbb{R}^n \ni y \longmapsto N_S(f,y)$ jest $\mathfrak{H}_m$-mierzalna.

Ustalmy $y \in f(S)$. Jeżeli $S \cap f^{-1}(y)$ jest zbiorem skończonym, to dla $s \gg 1$ elementy zbioru $S \cap f^{-1}(y)$ muszą leżeć w różnych zbiorach z rozbicia $(S_{s,j})_{j=1}^{\infty}$ (tu korzystamy z tego, że $\delta_s \longrightarrow 0$). Oznacza to, że $\sum_{j=1}^{\infty} \chi_{f(S_{s,j})}(y) = N_S(f,y)$ dla $s \gg 1$. Jeżeli $S \cap f^{-1}(y)$ jest zbiorem nieskończonym, to dla dowolnych parami różnych elementów $x_1, \dots, x_k \in S \cap f^{-1}(y)$, jeżeli $s \gg 1$, to $x_1, \dots, x_k$ muszą leżeć w różnych zbiorach z rozbicia $(S_{s,j})_{j=1}^{\infty}$. Oznacza to $\sum_{j=1}^{\infty} \chi_{f(S_{s,j})}(y) \geqslant k$ dla $s \gg 1$. Wobec dowolności $k$ dostajemy $\lim_{s\to+\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{f(S_{s,j})}(y) = +\infty = N_S(f,y)$. □

Teraz Twierdzenie (‡).

**Propozycja 13.5.10.** *Niech $f : \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^s$ spełnia warunek Lipschitza za stałą $L > 0$ i niech $0 < k, \ell < +\infty$.*

(a) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^s} \mathcal{H}^k(S \cap f^{-1}(y))d\mathcal{H}^\ell(y) \leqslant L^\ell \beta_{k,\ell} \mathcal{H}^{k+\ell}(S), \quad S \subset \mathbb{R}^r,$ *gdzie* $\beta_{k,\ell} := \dfrac{\boldsymbol{\alpha}(k)\boldsymbol{\alpha}(\ell)}{\boldsymbol{\alpha}(k+\ell)}$.

*Uwaga: Ponieważ jeszcze nie wiemy, czy funkcja $y \longmapsto \mathcal{H}^k(S \cap f^{-1}(y))$ jest $\mathcal{H}_\ell$-mierzalna, powyższą nierówność rozumiemy tak, że istnieje funkcja $\mathcal{H}_\ell$-mierzalna $F : \mathbb{R}^s \longrightarrow [0, +\infty]$ taka, że $F(y) \geqslant \mathcal{H}^k(S \cap f^{-1}(y))$, $y \in \mathbb{R}^s$, oraz $\int_{\mathbb{R}^s} F(y)d\mathcal{H}^\ell(y) \leqslant L^\ell \beta_{k,\ell}\mathcal{H}^{k+\ell}(S)$.*

*W szczególności, $\int_{\mathbb{R}^s} \mathcal{H}^k(S \cap f^{-1}(y))d\mathcal{H}^\ell(y) = 0$, gdy $\mathcal{H}^{k+\ell}(S) = 0$.*

(b) *Jeżeli $S \in \mathcal{H}_{k+l}$ oraz $\mathcal{H}^{k+l}(S) < +\infty$, to:*
- *zbiór $S \cap f^{-1}(y)$ jest $\mathcal{H}_k$-mierzalny dla $\mathcal{H}^\ell$-p.w. $y \in \mathbb{R}^s$,*
- *funkcja $\mathbb{R}^s \ni y \longmapsto \mathcal{H}^k(S \cap f^{-1}(y))$ jest $\mathcal{H}_\ell$-mierzalna.*

*Dowód*. (a) Niech $S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{j,i}$, przy czym $\operatorname{diam} A_{j,i} \leqslant \frac{1}{j}$ oraz $\sum_{i=1}^{\infty} \zeta_{k+\ell}(A_{j,i}) \leqslant \mathcal{H}^{k+\ell}(S) + \frac{1}{j}$, $j \in \mathbb{N}$. Zdefiniujmy $B_{j,i} := \overline{f(A_{j,i})}$. Oczywiście, $B_{j,i}$ jest zbiorem zwartym oraz $\operatorname{diam} B_{j,i} \leqslant \frac{L}{j}$. Zauważmy, że $S \cap f^{-1}(y) \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}:\, y \in B_{j,i}} A_{j,i}$. W takim razie $\mathcal{H}^k_{1/j}(S \cap f^{-1}(y)) \leqslant \sum_{i \in \mathbb{N}:\, y \in B_{j,i}} \zeta_k(A_{j,i}) = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{B_{j,i}}(y)\zeta_k(A_{j,i}) =: F_j(y)$. Funkcja $F_j$ jest oczywiście $\mathcal{H}_\ell$-mierzalna (bo jest borelowska). Mamy

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^s} F_j(y)d\mathcal{H}^\ell(y) &\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^\ell(B_{j,i})\zeta_k(A_{j,i}) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_\ell(B_{j,i})\zeta_k(A_{j,i})\\ &\leqslant L^\ell \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_\ell(A_{j,i})\zeta_k(A_{j,i}) \leqslant L^\ell \beta_{k,\ell} \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_{k+\ell}(A_{j,i}) \leqslant L^\ell \beta_{k,\ell}\big(\mathcal{L}^{k+\ell}(S) + \tfrac{1}{j}\big).\end{aligned}$$

Niech $F := \liminf_{j\to+\infty} F_j$. Na podstawie lematu Fatou mamy

$$\int_{\mathbb{R}^s} F(y)d\mathcal{H}^\ell(y) \leqslant \liminf_{j\to+\infty} L^\ell \beta_{k,\ell}\big(\mathcal{H}^{k+\ell}(S) + \tfrac{1}{j}\big) = L^\ell \beta_{k,\ell}\mathcal{L}^{k+\ell}(S).$$

Z drugiej strony, $F(y) \geqslant \liminf_{j\to+\infty} \mathcal{H}^k_{1/j}(S \cap f^{-1}(y)) = \mathcal{H}^k(S \cap f^{-1}(y))$.

(b) Wystarczy osobno rozważyć przypadek, gdy $\mathcal{H}^{k+\ell}(S) = 0$ oraz gdy $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k+\ell})$. Pierwszy przypadek wynika z (a). Drugi z tych przypadków sprowadza się do sytuacji, gdy $S$ jest zwarty.

Wtedy $S \cap f^{-1}(y)$ jest też zwarty dla dowolnego $y$. Pozostaje mierzalność funkcji $\mathbb{R}^s \ni y \longmapsto \mathcal{H}^k(S \cap f^{-1}(y))$.

Niech $t > 0$. Pokażemy, że $\{y \in \mathbb{R}^s : \mathcal{H}^k(S \cap f^{-1}(y)) \leqslant t\} = \bigcap_{j=1}^{\infty} V_j$, gdzie

$$\begin{aligned}V_j := \Big\{y \in \mathbb{R}^s : S \cap f^{-1}(y) \subset (V_{j,i})_{i \in I(j,y)},\ V_{j,i} \in \operatorname{top}\mathbb{R}^s,\ \#I(j,y) < +\infty,\\ \operatorname{diam} V_{j,i} \leqslant \frac{1}{j},\ \sum_{i \in I(j,y)} \zeta_k(V_{j,i}) < t + \frac{1}{j}\Big\}\end{aligned}$$

oraz każdy zbiór $V_j$ jest otwarty. Będzie stąd wynikało, że zbiór $\{y \in \mathbb{R}^s : \mathcal{H}^k(S \cap f^{-1}(y)) \leqslant t\}$ jest borelowski (a przez to $\mathcal{H}_\ell$-mierzalny).

Istotnie, jeżeli $y \in \bigcap_{j=1}^{\infty} V_j$, to $\mathcal{H}^k_{1/j}(S \cap f^{-1}(y)) \leqslant \sum_{i \in I(j,y)} \zeta_k(V_{j,i}) < t + \frac{1}{j}$. Wynika stąd, że $\mathcal{H}^k(S \cap f^{-1}(y)) \leqslant t$.

W drugą stronę: jeżeli $\mathcal{H}^k(A \cap f^{-1}(y)) \leqslant t$, to dla dowolnego $j \in \mathbb{N}$ istnieje pokrycie $(C_{j,i})_{i=1}^{\infty}$ zbioru $S \cap f^{-1}(y)$ zbiorami borelowskimi o średnicy $< \frac{1}{j}$ takie, że $\sum_{s=1}^{\infty} \zeta_k(C_{j,i}) < t + \frac{1}{j}$. „Nadmuchując” nieco zbiory $C_{j,i}$, możemy założyć, że $C_{j,i}$ są otwarte. Ponieważ zbiór $S \cap f^{-1}(y)$ jest zwarty, z pokrycia $(C_{j,i})_{i=1}^{\infty}$ można wybrać pokrycie skończone $(V_{j,i})_{i \in I(j,y)}$ zbioru $S \cap f^{-1}(y)$ o żądanych własnościach.

Pozostaje wykazać, że każdy ze zbiorów jest $V_j$ jest otwarty. Istotnie, przypuśćmy, że $y_0 \in V_j$ oraz $y_t \longrightarrow y_0$ oraz $S \cap f^{-1}(y_t) \not\subset \bigcup_{i \in I(j,y_0)} V_{j,i} =: \Omega$. Niech $x_t \in S$, $f(x_t) = y_t$ oraz $x_t \notin \Omega$. Możemy założyć, że $x_t \longrightarrow x_0 \in S$. Wtedy $f(x_0) = y_0$ oraz $x_0 \notin \Omega$; sprzeczność. $\square$

**Wniosek 13.5.11.** *Dla $r = m > n = s$, $k = m - n$ i $\ell = n$, z Propozycji 13.5.10*(a) *wnioskujemy, że*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{m-n}(S \cap f^{-1}(y)) d\mathcal{H}^n(y) \leqslant L^n \beta_{m-n,n} \mathcal{H}^m(S), \quad S \subset \mathbb{R}^m.$$

*W szczególności,* (‡) *zachodzi dla zbiorów miary zero.*

[Wykład 31.05.2021; **ten trudny wykład ma charakter informacyjny i nie obowiązuje na egzaminie** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ]

Kolejny etap to pokazanie, że w dowodach (†) i (‡) mozna zrobić dodatkowe założenia. Wiemy już, że możemy założyć, że $A \subset \Xi'$ (zob. Obserwacja 13.5.6(a)), $\mathcal{L}^m(A) > 0$ oraz $f$ spełnia globalny warunek Lipschitza ze stałą $L > 0$. Najpierw (†). Wystarczy rozważyć dwa przypadki:

$(\dagger)_1$ $A \subset \{x \in \Xi' : f'(x) \text{ jest injektywne}\} = \{x \in \Xi' : \operatorname{rank} f'(x) = m\}$.

$(\dagger)_2$ $A \subset \{x \in \Xi' : f'(x) \text{ nie jest injektywne}\} = \{x \in \Xi' : \operatorname{rank} f'(x) < m\} = \{x \in \Xi' : J_m f(x) = 0\}$.

**Propozycja 13.5.12.** *Jeżeli* (†) *zachodzi przy założeniu* $(\dagger)_1$ *(dla dowolnych $n \geqslant m$ i $f$), to* (†) *zachodzi przy założeniu* $(\dagger)_2$*, a więc dowód* (†) *sprowadza się do przypadku* $(\dagger)_1$*.*

*Dowód*. Chcemy pokazać, że $\int_{f(A)} N_A(f, y) \mathcal{H}^m(y) = \int_{\mathbb{R}^m} J_m f(x) d\mathcal{L}^m(x) = 0$. Wystarczy pokazać, że $\mathcal{H}^m(f(A)) = 0$. Dla $0 < \varepsilon < 1$ niech $\mathbb{R}^m \ni x \xmapsto{g_\varepsilon} (f(x), \varepsilon x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \ni (y, z) \xmapsto{p} y \in \mathbb{R}^n$. Oczywiście $f = p \circ g_\varepsilon$. Odwzorowanie $g_\varepsilon$ spełnia warunek Lipschitza oraz $A \subset \{x \in \Xi' : g'_\varepsilon(x) \text{ jest injektywne}\}$. Odwzorowanie $p$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą 1. Na podstawie Propozycji 13.5.9(a) oraz $(\dagger)_1$ mamy $\mathcal{H}^m(f(A)) = \mathcal{H}^m(p(g_\varepsilon(A))) \leqslant \mathcal{H}^m(g_\varepsilon(A)) = \int_A J_m g_\varepsilon(x) d\mathcal{L}^m(x)$. Do zakończenia dowodu wystarczy pokazać, że $J_m g_\varepsilon(x) \leqslant C\varepsilon$, $x \in A$, gdzie $C$ jest stałą niezależną od $\varepsilon$. Wtedy $\mathcal{H}^m(f(A)) \leqslant C\varepsilon \mathcal{L}^m(A) \underset{\varepsilon \to 0+}{\longrightarrow} 0$.

Istotnie, obliczając $J_m g_\varepsilon(x)$ wybieramy nietrywialne $(m \times m)$ minory z macierzy $g'_\varepsilon(x) = \begin{bmatrix} f'(x) \\ \varepsilon \mathbb{I}_m \end{bmatrix}$. Pamiętając, że $J_m f(x) = 0$, wnioskujemy, że wybierając taki minor musimy wybrać przynajmniej jeden wiersz z macierzy $\varepsilon \mathbb{I}_m$. Wiemy również, $|\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x)| \leqslant L$, $j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, m$ (ponieważ $f$ spełnia globalny warunek Lipschitza ze stałą $L$). Teraz oszacowanie $J_m g_\varepsilon(x) \leqslant C\varepsilon$, $x \in A$, jest widoczne (Ćwiczenie). $\square$

Przechodzimy do (‡). Wystarczy rozważyć dwa przypadki:

$(\ddagger)_1$ $A \subset \{x \in \Xi' : f'(x) \text{ jest surjektywne}\} = \{x \in \Xi' : f'(x)(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^n\} = \{x \in \Xi' : \operatorname{rank} f'(x) = n\}$.

$(\ddagger)_2$ $A \subset \{x \in \Xi' : f'(x) \text{ nie jest surjektywne}\} = \{x \in \Xi' : \operatorname{rank} f'(x) < n\} = \{x \in \Xi' : J_n f(x) = 0\}$.

**Propozycja 13.5.13.** *Jeżeli* (‡) *zachodzi przy założeniu* $(\ddagger)_1$ *(dla dowolnych $n < m$ i $f$), to* (‡) *zachodzi przy założeniu* $(\ddagger)_2$*, a więc dowód* (‡) *sprowadza się do przypadku* $(\ddagger)_1$*.*

*Dowód*. Chcemy pokazać, że $\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(y)) d\mathcal{L}^n(y) = \int_A J_n f(x) d\mathcal{L}^m(x) = 0$. Dla $0 < \varepsilon < 1$ zdefiniujmy

$$g_\varepsilon, p : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad g_\varepsilon(x, z) := f(x) + \varepsilon z, \quad p(x, z) := z.$$

Jeżeli $(x, z) \in A \times \mathbb{R}^n$, to $g'_\varepsilon(x, z)(v, w) = f'(x)(v) + \varepsilon w$, $(v, w) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. W szczególności, $g'_\varepsilon(x, z)(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$. Ponadto, $g_\varepsilon$ spełnia warunek Lipschitza oraz $J_n g_\varepsilon(x, z) \leqslant C_0 \varepsilon$, gdzie $C_0$ jest niezależne od $\varepsilon$. Istotnie, $g'_\varepsilon(x) = \left[f'(x), \varepsilon \mathbb{I}_n\right]$ i dalej, rozumując analogicznie jak w dowodzie Propozycji 13.5.12, dostajemy $J_n f(x, z) \leqslant C_0 \varepsilon$, $(x, z) \in A \times \mathbb{R}^n$ dla pewnej stałej $C_0 > 0$.

Z Propozycji 13.5.10(a) z $r = m + n$, $s = n$, $k = m - n$, $\ell = n$ $(k + \ell = m)$, $f = p$ $(L = 1)$ i $S = (A \times \mathbb{B}_n) \cap g_\varepsilon^{-1}(y)$ dostajemy

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{m-n}((A \times \mathbb{B}_n) \cap g_\varepsilon^{-1}(y) \cap p^{-1}(w)) d\mathcal{L}^n(w) \leqslant \beta_{m-n,n} \mathcal{H}^m((A \times \mathbb{B}_n) \cap g_\varepsilon^{-1}(y)). \qquad (+)$$

Zastosujmy (‡) (przy założeniach $(‡)_1$) do funkcji $g_\varepsilon$ i zbioru $A \times \mathbb{B}_n$ (przez $C_i$, $i = 0, 1, 2$, rozumiemy różne stałe dodatnie niezależne od $\varepsilon$):

$$\begin{aligned}
C_0\varepsilon\mathcal{L}^m(A)\mathcal{L}^n(\mathbb{B}_n) &\geqslant \int_{A\times\mathbb{B}_n} J_n g_\varepsilon(x,z)d\mathcal{L}^{m+n}(x,z) \overset{(‡)_1}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^m((A\times\mathbb{B}_n)\cap g_\varepsilon^{-1}(y))d\mathcal{L}^n(y)\\
&\overset{(+)}{\geqslant} C_1\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{m-n}((A\times\mathbb{B}_n)\cap g_\varepsilon^{-1}(y)\cap p^{-1}(w))d\mathcal{L}^n(w)d\mathcal{L}^n(y)\\
&= C_1\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{B}_n} \mathcal{H}^{m-n}((A\cap f^{-1}(y-\varepsilon w))\times\{w\})d\mathcal{L}^n(w)d\mathcal{L}^n(y)\\
&\overset{\text{Fubini}}{=} C_1\int_{\mathbb{B}_n}\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{m-n}((A\cap f^{-1}(y-\varepsilon w))\times\{w\})d\mathcal{L}^n(y)d\mathcal{L}^n(w)\\
&\overset{y\mapsto y-\varepsilon w}{=} C_1\int_{\mathbb{B}_n}\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{m-n}((A\cap f^{-1}(y))\times\{w\})d\mathcal{L}^n(y)d\mathcal{L}^n(w)\\
&\geqslant \int_{\mathbb{B}_n}\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{m-n}(A\cap f^{-1}(y))d\mathcal{L}^n(y)d\mathcal{L}^n(w)\\
&= C_2\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{m-n}(A\cap f^{-1}(y))d\mathcal{L}^n(y).
\end{aligned}$$

Stąd, przy $\varepsilon \longrightarrow 0+$ dostajemy $\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{m-n}(A\cap f^{-1}(y))d\mathcal{L}^n(y) = 0$, co kończy dowód. □

Na tym kończy się łatwa część dowodów (†) i (‡). Do zasadniczego dowodu $(†)_1$ będzie nam potrzebnych kilka pomocniczych wyników.

**Twierdzenie 13.5.14** (Nierówność Hadamarda ([23])**).** *Dla dowolnej macierzy* $A = [a_1, \dots, a_m] \in \mathbb{M}(m\times m;\mathbb{R})$, $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{M}(m\times 1;\mathbb{R})$, *mamy* $|\det A| \leqslant \prod_{j=1}^m \|a_j\|$.

*Dowód*. Przypadek, gdy $\det A = 0$ jest trywialny. Możemy więc założyć, że $a_1, \dots, a_m$ tworzą bazę $\mathbb{R}^m$. Wybierzmy w $\mathbb{R}^n$ bazę ortonormalną $b_1, \dots, b_m$ taką, że

$$\mathbb{R}\cdot b_1 + \dots + \mathbb{R}\cdot b_k = \mathbb{R}\cdot a_1 + \dots + \mathbb{R}\cdot a_k, \quad k = 1, \dots, m \quad (\text{Ćwiczenie}).$$

Wtedy $a_j = \sum_{k=1}^{j} \langle a_j, b_k\rangle b_k$, $j = 1, \dots, m$. Stąd $A = BC$, gdzie $B := [b_1, \dots, b_m] \in \mathbb{M}(m\times m;\mathbb{R})$, zaś

$$C_{k,j} := \begin{cases} \langle a_j, b_k\rangle, & \text{jeżeli } k \leqslant j\\ 0, & \text{jeżeli } k > j\end{cases}.$$

Zauważmy, że $B$ jest macierzą ortogonalną ($B^tB = \mathbb{I}_m$), zaś $C$ jest macierzą trójkątną. Ostatecznie,

$$|\det A| = |\det(BC)| = |\det C| = \Big|\prod_{j=1}^m C_{j,j}\Big| = \prod_{j=1}^m |\langle a_j, b_j\rangle| \leqslant \prod_{j=1}^m \|a_j\|\|b_j\| = \prod_{j=1}^m \|a_j\|.$$ □

**Ćwiczenie 13.5.15.** Kiedy w nierówności Hadamarda zachodzi równość?

**Wniosek 13.5.16.** *Jeżeli* $A = [a_1, \dots, a_m] \in \mathbb{M}(m\times m;\mathbb{R})$ *oraz* $\alpha\|v\| \leqslant \|Av\| \leqslant \beta\|v\|$, $v \in \mathbb{R}^m$, *dla pewnych* $\alpha, \beta > 0$, *to* $\alpha^m \leqslant |\det A| \leqslant \beta^m$.

*Dowód*. Mamy $\|a_j\| = \|A\boldsymbol{e}_j\| \leqslant \beta$, $j = 1, \dots, m$. Stąd na podstawie nierówności Hadamarda mamy $|\det A| \leqslant \beta^m$. Drugą z nierówności otrzymujemy natychmiast wobec tego, że $\|A^{-1}u\| \leqslant \frac{1}{\alpha}\|u\|$, $u \in \mathbb{R}^m$. □

**Twierdzenie 13.5.17** (Wzór Cauchy'ego–Bineta ([24]))**.** *Jeżeli* $n \geqslant m$, $P \in \mathbb{M}(m\times n;\mathbb{C})$, $Q \in \mathbb{M}(n\times m;\mathbb{C})$, *to*

$$\det(PQ) = \sum_{|K|=m}{}' (\det P_{(1,\dots,m),K})(\det Q_{K,(1,\dots,m)}).$$

[23] Jacques Hadamard (1865–1963).
[24] Jacques Philippe Marie Binet (1786–1856).

*Dowód*.
$$\begin{aligned}\det(PQ) &= \sum_{\sigma\in S_m}\operatorname{sgn}\sigma\Big(\sum_{i_1=1}^n P_{1,i_1}Q_{i_1,\sigma(1)}\Big)\cdots\Big(\sum_{i_m=1}^n P_{m,i_m}Q_{i_m,\sigma(m)}\Big)\\
&= \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^n P_{1,i_1}\cdots P_{m,i_m}\sum_{\sigma\in S_m}\operatorname{sgn}\sigma Q_{i_1,\sigma(1)}\cdots Q_{i_m,\sigma(m)}\\
&= \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^n P_{1,i_1}\cdots P_{m,i_m}\det Q_{(i_1,\dots,i_m),(1,\dots,m)}\\
&= \sum_{1\leqslant k_1<\dots<k_m\leqslant n}\sum_{\tau\in S_m} P_{1,k_{\tau(1)}}\cdots P_{m,k_{\tau(m)}}\det Q_{(k_{\tau(1)},\dots,k_{\tau(m)}),(1,\dots,m)}\\
&= \sum_{1\leqslant k_1<\dots<k_m\leqslant n}\sum_{\tau\in S_m} P_{1,k_{\tau(1)}}\cdots P_{m,k_{\tau(m)}}\operatorname{sgn}\tau\det Q_{(k_1,\dots,k_m),(1,\dots,m)}\\
&= \sum_{|K|=m}{}' (\det P_{(1,\dots,m),K})(\det Q_{K,(1,\dots,m)}).\end{aligned}$$
□

**Wniosek 13.5.18.** *Jeżeli $A\in\mathbb{M}(n\times m;\mathbb{R})$ i $n\geqslant m$, to $(J_m(A))^2=\det(A^tA)$. W szczególności, jeżeli $A$ jest* ortogonalna *(tzn. $A^tA=\mathbb{I}_m$), to $J_m(A)=1$.*

*Dowód*. Na podstawie Twierdzenia 13.5.17 mamy
$$\det(A^tA)=\sum_{|K|=m}{}'\det(A^t)_{(1,\dots,m),K}\det A_{K,(1,\dots,m)}=\sum_{|K|=m}{}'(\det A_{K,(1,\dots,m)})^2=(J_m(A))^2.$$
□

**Wniosek 13.5.19.** *Jeżeli $A\in\mathbb{M}(n\times m;\mathbb{R})$, $n\geqslant m$, $U\in\mathbb{M}(m\times m;\mathbb{R})$, to $J_m(AU)=J_m(A)|\det U|$. W szczególności, jeżeli ponadto $|\det U|=1$, to $J_m(AU)=J_m(A)$.*

*Dowód*. Na podstawie Wniosku 13.5.18 mamy
$$(J_m(AU))^2=\det((AU)^tAU)=\det(U^tA^tAU)|=\det(U^t)\det(A^tA)\det U=(J_m(A)\det U)^2.$$
□

**Wniosek 13.5.20.** *Jeżeli $A\in\mathbb{M}(n\times m;\mathbb{R})$, $n\geqslant m$, oraz $\alpha\|v\|\leqslant\|Av\|\leqslant\beta\|v\|$, $v\in\mathbb{R}^m$, dla pewnych $\alpha,\beta>0$, to $\alpha^m\leqslant J_m(A)\leqslant\beta^m$.*

*Dowód*. Niech $V:=A(\mathbb{R}^m)\subset\mathbb{R}^n$. Ponieważ $A$ jest injektywne, przestrzeń $V$ jest $m$-wymiarowa. Niech $H:\mathbb{R}^m\longrightarrow V\subset\mathbb{R}^n$ będzie izomorfizmem ortogonalnym ($H^tH=\mathbb{I}_m$) (25) i niech $G:=H^{-1}\circ A:\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^m$. Zauważmy, że $G$ is izomorfizmem. Mamy $A=H\circ G$. Stąd $\alpha\|v\|\leqslant\|Av\|=\|H\circ G(v)\|=\|G(v)\|\leqslant\beta\|v\|$, $v\in\mathbb{R}^m$. W takim razie na podstawie Wniosku 13.5.16 mamy $\alpha^m\leqslant|\det G|\leqslant\beta^m$. Z drugiej strony, na podstawie Wniosków 13.5.18 i 13.5.19, $J_m(A)=J_m(H\circ G)=J_m(H)|\det G|=|\det G|$. □

*Dowód* (†) *przy założeniu* $(\dagger)_1$. Zakładamy, że $A\subset\{x\in\Xi':f'(x)$ jest injektywne$\}$, $\mathcal{L}_m(A)>0$ oraz $A\subset\subset\mathbb{R}^m$.

Ustalmy $\lambda>1$ i niech $\varepsilon>0$ będzie takie, że $\frac{1}{\lambda}+\varepsilon<1<\lambda-\varepsilon$. Będziemy chcieli pokazać, że
$$\frac{1}{\lambda^{2m}}\int_{\mathbb{R}^n}N_A(f,y)d\mathcal{H}^m(y)\leqslant\int_A J_mf\,d\mathcal{L}^m\leqslant\lambda^{2m}\int_{\mathbb{R}^n}N_A(f,y)d\mathcal{H}^m(y),\tag{**}$$
co przy $\lambda\longrightarrow1+$ da tezę.

Kluczem do dowodu (**) będzie skonstruowanie pokrycia $(B_j)_{j=1}^\infty\subset\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ zbioru $A$ oraz ciągu izomorfizmów liniowych $\Phi_j:\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^m$, $j\in\mathbb{N}$, takich że dla $B=B_j$ i $\Phi=\Phi_j$ mamy:
$$f|_B \text{ jest injektywne},\tag{1}$$
funkcje $(f|_B)\circ\Phi^{-1}:\Phi(B)\longrightarrow\mathbb{R}^n$, $\Phi\circ(f|_B)^{-1}:f(B)\longrightarrow\mathbb{R}^m$ spełniają warunek Lipschitza ze stałą $\lambda$, (2)
$$\frac{1}{\lambda}\|\Phi(v)\|\leqslant\|f'(x)(v)\|\leqslant\lambda\|\Phi(v)\|,\quad x\in B,\ v\in\mathbb{R}^m.\tag{3}$$

(25) $H(t)=t_1v_1+\dots+t_mv_m$, gdzie $v_1,\dots,v_m$ jest bazą ortonormalną w $V$.

Od razu zauważmy, że (3) implikuje

$$\frac{1}{\lambda^m}|\det\Phi| \leqslant J_m(f) \leqslant \lambda^m|\det\Phi|, \quad x\in B. \tag{4}$$

Istotnie, (3) jest równoważne warunkowi

$$\frac{1}{\lambda}\|u\| \leqslant \|f'(x)\circ\Phi^{-1}(u)\| \leqslant \lambda\|u\|, \quad x\in B,\ u\in\mathbb{R}^m,$$

skąd, wobec Wniosków 13.5.19 i 13.5.20, mamy

$$\frac{1}{\lambda^m} \leqslant J_m(f'(x)\circ\Phi^{-1}) = J_m(f)|\det\Phi^{-1}| \leqslant \lambda^m, \quad x\in B,$$

czyli (4).

Najpierw sprawdzimy, że powyższa konstrukcja rzeczywiście doprowadzi do dowodu (**). Niech $(C_j)_{j=1}^\infty$ będzie rozbiciem $A$ wpisanym w pokrycie $(B_k)_{k=1}^\infty$ (Ćwiczenie). Ustalmy $j$ i niech $C := C_j \subset B_k$, $\Phi := \Phi_k$. Mamy

$$\frac{1}{\lambda^m}|\det\Phi|\mathcal{L}^m(C) \overset{(4)}{\leqslant} \int_C J_m f(x)d\mathcal{L}^m(x) \overset{(4)}{\leqslant} \lambda^m|\det\Phi|\mathcal{L}^m(C),$$
$$\mathcal{H}^m(\Phi(C)) = \mathcal{L}^m(\Phi(C)) = |\det\Phi|\mathcal{L}^m(C),$$

$$\frac{1}{\lambda^m}\mathcal{H}^m(\Phi(C)) = \frac{1}{\lambda^m}\mathcal{H}^m(\Phi\circ(f|_C)^{-1}(f(C))$$
$$\overset{(2)+(\&)}{\leqslant} \mathcal{H}^m(f(C)) = \mathcal{H}^m((f|_C)\circ\Phi^{-1}(\Phi(C))| \overset{(2)+(\&)}{\leqslant} \lambda^m\mathcal{H}^m(\Phi(C)),$$

gdzie (&) wynika z Propozycji 13.5.9(a). Pamiętając, że $f$ jest injektywne na $C$ dostajemy stąd

$$\frac{1}{\lambda^{2m}}\int_{\mathbb{R}^n} N_C(f,y)d\mathcal{H}^m(y) = \frac{1}{\lambda^{2m}}\mathcal{H}^m(f(C)) \leqslant \frac{1}{\lambda^{2m}}\lambda^m|\det\Phi|\mathcal{L}^m(C) \leqslant \int_C J_m f d\mathcal{L}^m$$
$$\leqslant \lambda^m|\det\Phi|\mathcal{L}^m(C) = \lambda^m\mathcal{H}^m(\Phi(C)) \leqslant \lambda^{2m}\mathcal{H}^m(f(C)) = \lambda^{2m}\int_{\mathbb{R}^n} N_C(f,y)d\mathcal{H}^m(y).$$

Po zsumowaniu

$$\frac{1}{\lambda^{2m}}\int_{\mathbb{R}^n} N_A(f,y)d\mathcal{H}^m(y) \leqslant \int_A J_m f d\mathcal{L}^m \leqslant \lambda^{2m}\int_{\mathbb{R}^n} N_A(f,y)d\mathcal{H}^m(y).$$

Przechodzimy do konstrukcji (1–3). Niech $\mathcal{S}$ będzie przeliczalnym i gęstym zbiorem izomorfizmów liniowych $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Dla $\Phi\in\mathcal{S}$ oraz $i\in\mathbb{N}$ niech $Z(\Phi,i)$ składa się ze wszystkich punktów $a\in\Xi'$, dla których:

$$\Big(\frac{1}{\lambda}+\varepsilon\Big)\|\Phi(v)\| \leqslant \|f'(a)(v)\| \leqslant (\lambda-\varepsilon)\|\Phi(v)\|, \quad v\in\mathbb{R}^m, \tag{5}$$
$$\|f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)\| \leqslant \varepsilon\|\Phi(b-a)\|, \quad b\in\overline{\mathbb{B}}(a,1/i). \tag{6}$$

Zauważmy, $Z(\Phi,i)$ jest zbiorem borelowskim (wystarczy zauważyć, że w (5) wystarczy brać $v\in\mathbb{Q}^m$, zaś w (6) $b\in\mathbb{Q}^n\cap\overline{\mathbb{B}}(a,1/i)$). Oczywiście z (5) wynika (3) dla zbioru $Z(\Phi,i)$. Z własności (6) wynika, że dla dowolnych $a\in Z(s,i)$, $b\in\overline{\mathbb{B}}(a,1/i)$ mamy

$$\|f(a)-f(b)\| \leqslant \|f'(a)(b-a)\|+\varepsilon\|\Phi(b-a)\| \overset{(5,6)}{\leqslant} (\lambda-\varepsilon)\|\Phi(b-a)\|+\varepsilon\|\Phi(b-a\| = \lambda\|\Phi(b-a)\|, \tag{7}$$
$$\|f(a)-f(b)\| \geqslant \|f'(a)(b-a)\|-\varepsilon\|\Phi(b-a)\| \overset{(5,6)}{\geqslant} \Big(\frac{1}{\lambda}+\varepsilon\Big)\|\Phi(b-a)\|-\varepsilon\|\Phi(b-a)\| = \frac{1}{\lambda}\|\Phi(b-a)\|. \tag{8}$$

Dla $c\in Z(\Phi,i)$ niech $U = U_c := Z(\Phi,i)\cap\mathbb{B}(c,\frac{1}{2i})$. Z (8) wynika, że $f|_U$ jest injektywne. Z (7) dostajemy $\|f\circ\Phi^{-1}(\xi)-f\circ\Phi^{-1}(\eta)\| \leqslant \lambda\|\xi-\eta\|$, $\xi,\eta\in\Phi(U)$, zaś z (8) mamy $\|\Phi\circ(f|_U)^{-1}(t)-\Phi\circ(f|_U)^{-1}(u)\| \leqslant \lambda\|t-u\|$, $t,u\in f(U)$. Wynika stąd, korzystając z twierdzenia Lindelöfa, że $Z(s,i)$ ma pokrycie przeliczalne zbiorami borelowskimi spełniającymi (1) – (3).

Pozostaje pokazać, że $A \subset \bigcup_{(s,i)\in\mathcal{S}\times\mathbb{N}} Z(s,i)$. Istotnie, ustalmy $a \in A$ i niech $f'(a) = H \circ G$, gdzie $G : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ jest izomorfizmem liniowym, zaś $H : \mathbb{R}^m \longrightarrow f'(a)(\mathbb{R}^m) \subset \mathbb{R}^n$ jest ortogonalne (por. dowód Wniosku 13.5.20). Dobierzmy $\Phi \in \mathcal{S}$ takie, że

$$\|\Phi \circ G^{-1}\| < \frac{1}{\frac{1}{\lambda}+\varepsilon}, \quad \|G \circ \Phi^{-1}\| < \lambda - \varepsilon.$$

Stąd

$$\|\Phi(v)\| = \|\Phi \circ G^{-1}(G(v))\| \leqslant \frac{1}{\frac{1}{\lambda}+\varepsilon}\|G(v)\|, \quad \|G(v)\| = \|G \circ \Phi^{-1}(\Phi(v))\| \leqslant (\lambda-\varepsilon)\|\Phi(v)\|, \quad v \in \mathbb{R}^m.$$

Ponieważ $\|f'(a)(v)\| = \|G(v)\|$ dostajemy stąd (5). Dla uzyskania (6) skorzystamy z definicji $f'(a)$:

$$\|f(b) - f(a) - f'(a)(b-a)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{\|\Phi^{-1}\|}\|b-a\| \leqslant \varepsilon\|\Phi(b-a)\|, \quad b \in \overline{\mathbb{B}}(a, 1/i),\ i \gg 1. \qquad \square$$

*Dowód Twierdzenia (†) jest zakończony.*

Teraz $(\ddagger)_1$. Będzie nam potrzebnych kilka pomocniczych wyników.

**Wniosek 13.5.21.** *Jeżeli $A \in \mathbb{M}(n\times m;\mathbb{R})$ i $n \leqslant m$, to $(J_n(A))^2 = \det(AA^t)$.*

*Dowód.* Na podstawie Twierdzenia 13.5.17 mamy

$$\det(AA^t) = {\sum_{|K|=n}}' \det A_{(1,\dots,n),K} \det(A^t)_{K,(1,\dots,n)} = {\sum_{|K|=n}}' (\det A_{(1,\dots,n),K})^2 = (J_n(A))^2. \qquad \square$$

**Wniosek 13.5.22.** *Jeżeli $A \in \mathbb{M}(n\times m;\mathbb{R})$, $n \leqslant m$, $U \in \mathbb{M}(m\times m;\mathbb{R})$, $U^tU = UU^t = \mathbb{I}_m$, to $J_n(AU) = J_n(A)$.*

*Dowód.* Na podstawie Wniosku 13.5.21 mamy

$$(J_n(AU))^2 = \det(AU(AU)^t) = \det(AUU^tA^t) = \det(AA^t) = (J_n(A))^2. \qquad \square$$

Przechodzimy do najtrudniejszej części dowodu.

*Dowód* (‡) *przy założeniu* $(\ddagger)_1$. Zakładamy, że $A \subset \{x \in \Xi' : f'(x)(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^n\}$. Zasadnicza idea dowodu (podobnie jak w Twierdzeniu (†)) polega na znalezieniu pokrycia $(B_j)_{j=1}^\infty \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ zbioru $A$ takiego, że dla dowolnego $B = B_j$ warunek (‡) zachodzi dla dowolnego $C \in \mathcal{L}_m$, $C \subset B$.

Dla dowolnego $I = (i_1,\dots,i_{m-n}) \in \Lambda_m^{m-n}$ niech:

- $p_I : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{m-n}$, $p_I(x) := (x_{i_i},\dots,x_{i_{m-n}})$,
- $u_I : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $u_I(x) = (f(x), p_I(x))$,
- $A_I := \{x \in \Xi' : \det u_I'(x) \neq 0\}$.

Zauważmy, że $\{x \in \Xi' : f'(x)(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^n\} = \bigcup_I A_I$.

Istotnie, dla $x \in \Xi'$ mamy $u_I'(x) = \begin{bmatrix} f'(x) \\ p_I \end{bmatrix}$, a stąd:

$\exists_{I:|I|=m-n} \det u_I'(x) \neq 0 \iff \exists_{K:|K|=n} \det[f'(x)_{(1,\dots,n),K}] \neq 0 \iff \operatorname{rank} f'(x) = n \iff f'(x)(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^n$.

W takim razie wystarczy znaleźć pokrycie dla każdego z zbiorów $A \cap A_I$. Ustalamy $I$ i niech $u := u_I$, $p := p_I$. Korzystając z konstrukcji (1–3) w dowodzie Twierdzenia (†), znajdziemy pokrycie borelowskie $(B_j)_{j=1}^\infty$ zbioru $A \cap A_I$ takie, że dla dowolnego $B = B_j$ odwzorowanie $u|_B$ jest injektywne oraz odwzorowanie $(u|_B)^{-1} : u(B) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ jest lipschitzowskie. Wobec twierdzenia Kirszbrauna funkcja $(u|_B)^{-1}$ przedłuża się do funkcji lipschitzowskiej $v : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

Ustalmy zbiór $C \in \mathcal{L}_m$, $C \subset B$. Chcemy pokazać, że

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{m-n}(C \cap f^{-1}(y))d\mathcal{L}^n(y) = \int_C J_nf(x)d\mathcal{L}^m(x).$$

Niech $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \ni (y,z)$. Na wstępie zauważmy, że $v(y,\cdot) : p(C \cap f^{-1}(y)) \longrightarrow C \cap f^{-1}(y)$ bijektywnie, $y \in \mathbb{R}^n$.

Istotnie, ponieważ $v = (u|_B)^{-1}$ na $u(B)$, mamy:

$C \cap f^{-1}(y) = v(u(C \cap f^{-1}(y))) = v(u(\{x \in C : f(x) = y\})) = v(\{(y, p(x)) : x \in C,\ f(x) = y\}) = v(y, \cdot)(p(C \cap f^{-1}(y)))$.

Injektywność wynika z faktu, iż $\{y\} \times p(C \cap f^{-1}(y)) \subset u(C) \subset u(B)$. Stosując Twierdzenie (†) do odwzorowania $v_y$ i zbioru $p(C \cap f^{-1}(y)$, dostajemy

$$\mathcal{H}^{m-n}(C \cap f^{-1}(y)) = \mathcal{H}^{m-n}(v(y, \cdot)(p(C \cap f^{-1}(y)))) = \int_{p(C\cap f^{-1}(y)))} (J_{m-n} v(y, \cdot))(z) d\mathcal{L}^{m-n}(z), \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

a stąd

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{m-n}(C \cap f^{-1}(y)) d\mathcal{L}^n(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{p(C\cap f^{-1}(y)))} (J_{m-n} v(y, \cdot))(z) d\mathcal{L}^{m-n}(z) d\mathcal{L}^n(y).$$

Ponieważ $\{z \in \mathbb{R}^{m-n} : (y, z) \in u(C)\} = \{p(x) : x \in C \cap f^{-1}(y)\}$, $y \in \mathbb{R}^n$, twierdzenie Fubiniego daje

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{p(C\cap f^{-1}(y)))} (J_{m-n} v(y, \cdot))(z) d\mathcal{L}^{m-n}(z) d\mathcal{L}^n(y) = \int_{u(C)} (J_{m-n} v(y, \cdot))(z) d\mathcal{L}^m(y, z).$$

Teraz skorzystamy z twierdzenia o zmianie zmiennych $(y, z) = u(x) = (f(x), p(x))$ i dostajemy

$$\int_{u(C)} (J_{m-n}(v(y, \cdot))(z) d\mathcal{L}^m(y, z) = \int_C (J_{m-n} v(f(x), \cdot))(p(x)) |u'(x)| d\mathcal{L}^m(x).$$

Do zakończenia dowodu pozostaje pokazać, że $(J_{m-n} v(f(x), \cdot))(p(x))|u'(x)| = J_n f(x)$ dla p.w. $x \in C$.

Mamy $u'(x) \circ v'(u(x)) = \mathrm{id}$ dla $\mathcal{L}^m$-p.w. $x \in B$. Istotnie, na podstawie twierdzenia Rademachera $u'(x)$ istnieje dla $x \in \Xi'$, $v'(y)$ istnieje dla $y \in \mathbb{R}^m \setminus \Xi''$, gdzie $\Xi''$ jest miary zero. W takim razie $u'(v(y)) \circ v'(y) = \mathrm{id}$ dla $y \in u(B) \setminus (v^{-1}(\Xi') \cup \Xi'')$. Stąd wynika, że $u'(x) \circ v'(u(x)) = \mathrm{id}$ dla $x \in B \setminus (\Xi' \cup v(\Xi''))$ ($v(\Xi'')$, jako obraz zbioru miary zero przez odwzorowanie lipschitzowskie, jest miary zero). Dalej będziemy rozważać tylko punkty $x \in C \setminus (\Xi' \cup v(\Xi''))$. *Ustalamy jedno takie* $x$.

Zdefiniujmy operator liniowy $M : \mathbb{R}^{m-n} \longrightarrow V := M(\mathbb{R}^{m-n}) \subset \mathbb{R}^m$, $M := (v(f(x), \cdot))'(p(x))$. Zauważmy, że $M = \frac{\partial v}{\partial z}(u(x))$, gdzie $\frac{\partial v}{\partial z}$ oznacza różniczkę cześciową względem przestrzeni $\mathbb{R}^m$. Dla $w \in \mathbb{R}^{m-n}$ mamy $(0, w) = u'(x)v'(u(x))(0, w) = u'(x)\big(\frac{\partial v}{\partial y}(u(x))(0) + \frac{\partial v}{\partial z}(u(x))(w)\big) = u'(x)(M(w)) = (f'(x)(M(w)), p(M(w)))$.

$$\begin{tikzcd}
\{0\}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "M"', "\wr"] & \mathbb{R}^m = \arrow[from=d, "u'(x)"', "\wr"] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "R"', "\wr"] & \times & \mathbb{R}^{m-n} \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^n}"] \arrow[d, "S"', "\wr"] & \mathbb{R}^n \\
V \arrow[r, "\subset"'] & \mathbb{R}^m = \arrow[ul, "p"] & V^\perp & \oplus & V \arrow[ur, "f'(x)"'] & V^\perp \arrow[l, "\supset"] \arrow[u, "\cup"']
\end{tikzcd}$$

W szczególności, $V \subset \operatorname{Ker} f'(x)$ oraz $p \circ M = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{m-n}}$. Wynika stąd, że $M : \mathbb{R}^{m-n} \longrightarrow V$ jest bijekcją, $M^{-1} = p$, $\dim V = m - n = \dim \operatorname{Ker} f'(x)$ i w konsekwencji $V = \operatorname{Ker} f'(x)$. Niech $R : \mathbb{R}^n \longrightarrow V^\perp \subset \mathbb{R}^m$ i $S : \mathbb{R}^{m-n} \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ będą izomorfizmami ortogonalnymi i niech $T := R \oplus S : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $T^t T = \mathbb{I}_m$. Mamy:

$$|u'(x)| = |\det(u'(x) \circ T)| = |\det(f'(x) \circ T, p \circ T)| = \left|\det \begin{bmatrix} f'(x) \circ R & p \circ R \\ 0 & p \circ S \end{bmatrix}\right| = |\det(f'(x) \circ R) \det(p \circ S)|.$$

Tak więc nasz problem sprowadza się do równości $J_{m-n}M|\det(f'(x) \circ R)\det(p \circ S)| = J_n f(x)$. Korzystając z Wniosku 13.5.22 mamy $|\det(f'(x)R)| = J_n f(x)$. Na podstawie Wniosku 13.5.19 dostajemy $J_{m-n}M|\det(p \circ S)| = J_{m-n}M|\det(M^{-1}S)| = J_{m-n}M(M^{-1}S) = J_{m-n}(S) = 1$, co kończy dowód. □

ROZDZIAŁ 14

# Szeregi Fouriera. Transformacja Fouriera

[Wykład 07.06.2021 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ]

### 14.1. Szeregi Fouriera — uzupełnienia

Niech

$$L^1_{2\pi}(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : f|_{[-\pi,\pi]} \in L^1([-\pi,\pi]),\ \forall_{x\in\mathbb{R}} : f(x+2\pi) = f(x)\}.$$

Oczywiście $\mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R}) \subset L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$. Definicję szeregu Fouriera (określonego dla funkcji klasy $\mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R})$) (por. Definicja 8.1.1) przenosimy bez trudu na funkcje klasy $L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$:

$$S(x) = S(f;x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad x \in \mathbb{R},$$

gdzie

$$a_n = a_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\, dt, \quad b_n = b_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\, dt, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

**Twierdzenie 14.1.1** (Riemanna–Lebesgue'a)**.** *Dla dowolnego przedziału $P \subset \mathbb{R}$ oraz dla dowolnej funkcji $f \in L^1(P)$ mamy:*

$$\lim_{|\alpha|\to+\infty}\int_P f(t)\cos\alpha t\, dt = \lim_{|\alpha|\to+\infty}\int_P f(t)\sin\alpha t\, dt = 0.$$

*W szczególności, dla dowolnej funkcji $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ mamy:*

$$a_n(f) \longrightarrow 0, \quad b_n(f) \longrightarrow 0 \text{ przy } n \longrightarrow +\infty.$$

*Dowód.* Por. dowód Twierdzenia 8.1.3.

W dowodzie ograniczymy się do funkcji cos. Pozostały przypadek jest analogiczny.

Krok $1^o$. $f = \chi_Q$, gdzie $Q$ jest przedziałem ograniczonym, $Q \subset P$.

Krok $2^o$. Jeżeli twierdzenie zachodzi dla $f_1, f_2 \in L^1(P)$, to zachodzi dla $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ dla dowolnych $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Krok $3^o$. Jeżeli $\mathcal{M}^+(P) \ni f_\nu \nearrow f \in L^1(P)$ i twierdzenie zachodzi dla każdej funkcji $f_\nu$, $\nu \geqslant 1$, to zachodzi dla $f$.

Istotnie, na podstawie twierdzenia o monotonicznym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki, mamy:

$$\Big|\int_P f(t)\cos\alpha t\, dt - \int_P f_\nu(t)\cos\alpha t\, dt\Big| \leqslant \int_P (f(t) - f_\nu(t))dt \longrightarrow 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Teraz, dla danego $\varepsilon > 0$, najpierw dobieramy $\nu_0$ takie, że

$$\Big|\int_P f(t)\cos\alpha t\, dt - \int_P f_{\nu_0}(t)\cos\alpha t\, dt\Big| \leqslant \varepsilon, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

a następnie korzystamy z tego, że $\int_P f_{\nu_0}(t)\cos\alpha t\, dt \longrightarrow 0$ gdy $|\alpha| \longrightarrow +\infty$.

Krok $4^o$. Na podstawie $1^o, 2^o$ i $3^o$, twierdzenie zachodzi dla dowolnej funkcji $f = \chi_U$, gdzie $U$ jest zbiorem otwartym w $P$ i $\chi_U \in L^1(P)$.

Krok $5^o$. $f = \chi_A \in L^1(P)$, gdzie $A$ jest zbiorem mierzalnym, $A \subset P$.

Istotnie, dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór $U$ otwarty w $P$ taki, że $A \subset U$ i $\mathcal{L}^1(U \setminus A) \leqslant \varepsilon$. Wtedy

$$\Big| \int_P \chi_U(t) \cos \alpha t \, dt - \int_P \chi_A(t) \cos \alpha t \, dt \Big| \leqslant \varepsilon$$

i możemy skorzystać z $4^o$.

Krok $6^o$. Wobec $5^o$ i $2^o$, twierdzenie zachodzi dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{M}_0^+(P) \cap L^1(P)$. Stąd, na podstawie $3^o$, zachodzi dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{M}^+(P) \cap L^1(P)$ i ostatecznie (poprzez rozkład $f = f_+ - f_-$) — dla dowolnej funkcji $f \in L^1(P)$. □

Tak, jak w rozdziale 8, dla $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$, definiujemy sumy częściowe:

$$S_k(x) = S_k(f;x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}_0.$$

**Lemat 14.1.2.** *Dla $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ mamy*

$$S_k(f;x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \cdot \frac{\sin \frac{(2k+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} dt, \quad x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}_0.$$

*W szczególności,*

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \frac{(2k+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} dt = 1, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

*Dowód.* Ćwiczenie — por. dowód Lematu 8.2.2. □

**Twierdzenie 14.1.3.** *Dla $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ i dla dowolnego $0 < \delta < \pi$ mamy:*

$$\lim_{k \to +\infty} S_k(f;x) = \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \cdot \frac{\sin \frac{(2k+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

*(w tym sensie, że obie granice jednocześnie istnieją i są równe).*

*W szczególności, prawdziwa jest następująca* zasada lokalizacji*:*

*O zbieżności i wartości $S(f;x_0)$ szeregu Fouriera funkcji $f$ w punkcie $x_0$ decydują wyłącznie wartości funkcji $f$ w dowolnie małym otoczeniu punktu $x_0$.*

*Dowód.* Ćwiczenie — por. dowód Twierdzenia 8.2.3. □

**Twierdzenie 14.1.4** (Kryterium Diniego)**.** *Niech $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ i niech $x_0, A \in \mathbb{R}$ będą takie, że funkcja*

$$(0, \pi] \ni t \overset{\psi}{\longmapsto} \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2A}{t}$$

*jest całkowalna* [1]*. Wtedy*

$$S(f;x_0) = \lim_{k \to +\infty} S_k(f;x_0) = A.$$

*Dowód.* Ćwiczenie — por. dowód Twierdzenia 8.2.4. □

## 14.2. Transformacja Fouriera

**Definicja 14.2.1.** Dla dowolnej funkcji $f \in L^1(\mathbb{R}^n) := L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ definiujemy jej *transformatę Fouriera* wzorem

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} d\mathcal{L}^n(x), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad [2]$$

gdzie $\langle\ ,\ \rangle$ oznacza standardowy iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n$.

---

[1] Oczywiście, problemem jest tu całkowalność w otoczeniu zera.

[2] Uwaga: Czasami transformatę Fouriera definiuje się wzorem

$$(\mathcal{F}f)(\xi) := \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} d\mathcal{L}^n(x).$$

**Obserwacja 14.2.2.** (a) $\widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\mathcal{L}^n(x)$.

(b) $\widehat{f}$ jest funkcją ograniczoną oraz $\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)| \leqslant \|f\|_{L^1}$.

(c) $\widehat{f}$ jest funkcją jednostajnie ciągłą.

Istotnie, dla dowolnych $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ mamy

$$|\widehat{f}(\xi+\eta) - \widehat{f}(\xi)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)||e^{-2\pi i\langle x,\eta\rangle} - 1| d\mathcal{L}^n(x) \underset{\eta\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

gdzie ostatnia zbieżność wynika z twierdzenia Lebesgue'a o zmajoryzowanym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki.

(d) Z Twierdzenia 12.16.1 o funkcjach danych całką wnioskujemy, że jeżeli $x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ dla $|\alpha| \leqslant k$ (np. $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i $\operatorname{supp} f \subset\subset \mathbb{R}^n$), to $\widehat{f} \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ oraz $D^\alpha \widehat{f} = (-2\pi i)^{|\alpha|}\widehat{x^\alpha f}$, $|\alpha| \leqslant k$. W szczególności, jeżeli $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, to $\widehat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

(e) $\widehat{e^{-a\|x\|^2}} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, $a > 0$.

(f) Z Twierdzenia 13.3.6 o całkowaniu przez części wnioskujemy, że jeżeli $f \in \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, to $(2\pi i)^{|\alpha|}\xi^\alpha \widehat{f} = \widehat{D^\alpha f}$, $|\alpha| \leqslant k$.

(g) Jeżeli $f \in \mathcal{C}_0^{2k}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}_0$, to funkcja $\|\xi\|^{2k}\widehat{f}$ jest ograniczona. W szczególności, jeżeli $2k > n$, to $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Istotnie, $\|\xi\|^{2k}\widehat{f} = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^k \widehat{f} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n : |\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} x^{2\alpha}\widehat{f}$ i możemy skorzystać z (f).

(h) Niech $\mathcal{X} := \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{BC}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) : \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)\}$. Odnotujmy, że $\mathcal{X}$ jest $\mathbb{C}$–przestrzenią wektorową oraz $\mathcal{X} \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ dla dowolnego $p \geqslant 1$. Ponadto, na podstawie (g) mamy $\mathcal{C}_0^{2k}(\mathbb{R}^n\mathbb{C}) \subset \mathcal{X}$ o ile $2k > n$.

(i) Niech $\overset{\vee}{\varphi}(x) := \varphi(-x)$. Zauważmy, że

$$\widehat{\overset{\vee}{f}} = \overset{\vee}{\widehat{f}}, \quad \overline{\widehat{f}} = \overset{\vee}{\widehat{\overline{f}}}, \quad f \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

**Definicja 14.2.3.** Operację

$$L^1(\mathbb{R}^n) \ni f \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} \mathcal{F}f \in \mathcal{BC}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$$

nazywamy *transformacją Fouriera.*

[Wykład 10.06.2021 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ]

Jest to oczywiście operator $\mathbb{C}$–liniowy i ciągły. Ponadto, $\|\mathcal{F}\| \leqslant 1$.

**Lemat 14.2.4.** *Dla dowolnych $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mamy*

$$\widehat{g \cdot \widehat{f}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(x+\xi) f(x) d\mathcal{L}^n(x), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

*W szczególności, dla $\xi = 0$ dostajemy*

$$\int_{\mathbb{R}^n} g \cdot \widehat{f}\, d\mathcal{L}^n = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g} \cdot f\, d\mathcal{L}^n.$$

*Dowód.*

$$\widehat{g \cdot \widehat{f}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\widehat{f}(x) e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle} d\mathcal{L}^n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\Big(\int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i\langle y,x\rangle} d\mathcal{L}^n(y)\Big) e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle} d\mathcal{L}^n(x)$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-2\pi i\langle x,y+\xi\rangle} d\mathcal{L}^n(x)\Big) f(y) d\mathcal{L}^n(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(y+\xi) f(y) d\mathcal{L}^n(y). \qquad \square$$

**Lemat 14.2.5.** *Dla dowolnego $a > 0$:*

$$\mathcal{F}(e^{-a\|x\|^2})(\xi) = \Big(\sqrt{\frac{\pi}{a}}\Big)^n e^{-\frac{\pi^2}{a}\|\xi\|^2}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

*W szczególności,*

$$\mathcal{F}(e^{-\pi\|x\|^2})(\xi) = e^{-\pi\|\xi\|^2}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

*Dowód*. Wystarczy udowodnić przypadek $n = 1$. Istotnie,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(e^{-a\|x\|^2})(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-a\|x\|^2} e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle} d\mathcal{L}^n(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax_1^2} e^{-2\pi i x_1\xi_1} d\mathcal{L}^1(x_1)\cdots\int_{\mathbb{R}} e^{-ax_n^2} e^{-2\pi i x_n\xi_n} d\mathcal{L}^1(x_n)\\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2}{a}\xi_1^2}\cdots\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2}{a}\xi_n^2} = \Big(\sqrt{\frac{\pi}{a}}\Big)^n e^{-\frac{\pi^2}{a}\|\xi\|^2}.\end{aligned}$$

W przypadku $n = 1$, niech

$$f(\xi) := \mathcal{F}(e^{-ax^2})(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} e^{-2\pi i x\xi} d\mathcal{L}^1(x), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Na podstawie twierdzenia o funkcjach danych całką wiemy, że $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ oraz

$$\begin{aligned}f'(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}(-2\pi i x) e^{-2\pi i x\xi} dx = e^{-ax^2}\frac{\pi i}{a} e^{-2\pi i x\xi}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\frac{\pi i}{a}(-2\pi i\xi) e^{-2\pi i x\xi} dx\\ &= -\frac{2\pi^2}{a}\xi f(\xi).\end{aligned}$$

Rozwiązując to równanie różniczkowe dostajemy

$$f(\xi) = Ce^{-\frac{\pi^2}{a}\xi^2}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Pozostaje wyznaczyć stałą $C$. Mamy

$$C = f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (\text{Ćwiczenie}).$$ □

**Twierdzenie 14.2.6.** (a) $\widehat{\widehat{f}} = \overset{\vee}{f}$ *dla dowolnej funkcji* $f \in \mathcal{X}$. *W szczególności, transformacja Fouriera przekształca bijektywnie* $\mathcal{X}$ *na* $\mathcal{X}$ *oraz* $(\mathcal{F}|_{\mathcal{X}})^{-1}(f) = \widehat{\overset{\vee}{f}}$, $f \in \mathcal{X}$.

(b) $\widehat{f\cdot g} = \widehat{f} * \widehat{g}$ *dla dowolnych* $f, g \in \mathcal{X}$.

(c) $\widehat{f * g} = \widehat{f}\cdot\widehat{g}$ *dla dowolnych* $f, g \in \mathcal{X}$ (3).

(d) $\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}\cdot\overline{\widehat{g}}\, d\mathcal{L}^n = \int_{\mathbb{R}^n} f\cdot\overline{g}\, d\mathcal{L}^n$ *dla dowolnych* $f, g \in \mathcal{X}$. *W szczególności,* $\|\widehat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$, $f \in \mathcal{X}$ *(a więc* $\mathcal{F} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ *jest izometrią w sensie normy* $L^2$*).*

*Dowód*. (a) Niech $g_\varepsilon(x) := e^{-\pi\varepsilon^2\|x\|^2}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$. Zauważmy, że $g_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Na podstawie Lematów 14.2.4 i 14.2.5, mamy

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon(x)\widehat{f}(x) e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle} d\mathcal{L}^n(x) &= \widehat{g_\varepsilon\widehat{f}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n}\widehat{g}_\varepsilon(x+\xi) f(x) d\mathcal{L}^n(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\widehat{g}_\varepsilon(x) f(x-\xi) d\mathcal{L}^n(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\varepsilon^n} e^{-\frac{\pi}{\varepsilon^2}\|x\|^2} f(x-\xi) d\mathcal{L}^n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\|x\|^2} f(\varepsilon x - \xi) d\mathcal{L}^n(x).\end{aligned}$$

Ponieważ $g_\varepsilon \longrightarrow 1$ przy $\varepsilon \longrightarrow 0$ (punktowo na $\mathbb{R}^n$) oraz $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, zatem, na podstawie twierdzenia Lebesgue'a, lewa strona dąży do $\widehat{\widehat{f}}(\xi)$. Ponieważ $f$ jest ciągła i ograniczona, zatem, ponownie korzystając z twierdzenia Lebesgue'a, wnioskujemy, że prawa strona dąży do $f(-\xi)$, co kończy dowód.

(b) Korzystamy z (a) i Lematu 14.2.4:

$$\widehat{f\cdot g}(\xi) = (g\cdot\widehat{\overset{\vee}{\widehat{f}}})\widehat{\ }(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n}\widehat{g}(x+\xi)\widehat{\overset{\vee}{f}}(x) d\mathcal{L}^n(x) = (\widehat{f} * \widehat{g})(\xi).$$

(c) Korzystamy z (a) i (b):

$$\widehat{f * g} = (\widehat{\overset{\vee}{\widehat{f}}} * \widehat{\overset{\vee}{\widehat{g}}})\widehat{\ } = (\widehat{\overset{\vee}{f}}\cdot\widehat{\overset{\vee}{g}})\widehat{\ } = \widehat{f}\cdot\widehat{g}.$$

(d) Korzystamy z Lematu 14.2.4 oraz (a):

$$\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}\cdot\overline{\widehat{g}}\, d\mathcal{L}^n = \int_{\mathbb{R}^n} f\cdot\widehat{\overline{\widehat{g}}}\, d\mathcal{L}^n = \int_{\mathbb{R}^n} f\cdot\overline{\widehat{\overset{\vee}{\widehat{g}}}}\, d\mathcal{L}^n = \int_{\mathbb{R}^n} f\cdot\overline{g}\, d\mathcal{L}^n.$$ □

(3) Wiadomo, że $f * g \in \mathcal{BC}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$, a więc nasze założenie oznacza, że $f * g \in \mathcal{X}$.

**Definicja 14.2.7.** Mówimy, że funkcja $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ jest *szybkomalejąca* ($f \in \mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) jeżeli dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ mamy

$$\|f\|_{\alpha,\beta} := \sup\{|x^\alpha D^\beta f(x)| : x \in \mathbb{R}^n\} < +\infty.$$

W szczególności, dla dowolnych $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ i $k \in \mathbb{N}_0$ mamy:

$$\lim_{r\to+\infty} r^k \Big(\max_{\|x\|=r} |D^\alpha f(x)|\Big) = 0.$$

**Obserwacja 14.2.8** (Własności klasy $\mathcal{S}$)**.** (a) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \subset \mathcal{S}$.

(b) $e^{-a\|x\|^2} \in \mathcal{S}$ dla dowolnego $a > 0$.

(c) Dla dowolnych $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ i $f \in \mathcal{S}$ mamy $D^\gamma f \in \mathcal{S}$.

(d) $\mathcal{S}$ jest zespoloną algebrą.

Jest widoczne, że $\mathcal{S}$ jest zespoloną przestrzenią wektorową. Ponadto, dla $f, g \in \mathcal{S}$ mamy:

$$\|f \cdot g\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \Big| x^\alpha \sum_{\gamma\leqslant\beta} \binom{\beta}{\gamma} D^\gamma f(x) D^{\beta-\gamma} g(x)\Big| \leqslant \sum_{\gamma\leqslant\beta} \binom{\beta}{\gamma} \|f\|_{\alpha,\gamma} \|g\|_{0,\beta-\gamma} < +\infty.$$

(e) Dla dowolnych $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ i $f \in \mathcal{S}$ mamy $x^\gamma f \in \mathcal{S}$. W konsekwencji, $P \cdot f \in \mathcal{S}$ dla dowolnego wielomianu $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ oraz $f \in \mathcal{S}$.

(f) Funkcja $\mathcal{S} \ni f \longmapsto \|f\|_{\alpha,\beta}$ jest seminormą (dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$). Pozwala to wprowadzić w $\mathcal{S}$ strukturę przestrzeni metrycznej ze zbieżnością zadaną przy pomocy relacji

$$\mathcal{S} \ni f_k \xrightarrow{\mathcal{S}} f \in \mathcal{S}, \text{ jeżeli } \|f_k - f\|_{\alpha,\beta} \longrightarrow 0 \text{ dla dowolnych } \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n.$$

(g) $\mathcal{S}$ jest przestrzenią zupełną — Ćwiczenie!

(h) Operator $\mathcal{S} \ni f \longmapsto D^\gamma f \in \mathcal{S}$ jest ciągły.

(i) Dla dowolnego wielomianu $P$, operator $\mathcal{S} \ni f \longmapsto P \cdot f \in \mathcal{S}$ jest ciągły.

(j) $\mathcal{S} \subset L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Ponadto, istnieją stałe $C = C(n,p)$, $s = s(n,p)$ takie, że

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \max\{\|f\|_{\alpha,0} : |\alpha| \leqslant s\} = C \cdot \boldsymbol{N}_s(f), \quad f \in \mathcal{S}.$$

W szczególności, operator $\mathrm{id} : \mathcal{S} \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ jest ciągły.

Istotnie, przypadek $p = \infty$ jest oczywisty ($\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{0,0}$). Niech $1 \leqslant p < +\infty$. Niech $m := \lfloor \frac{n}{2p} \rfloor + 1$. Wtedy

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^p} &= \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p d\mathcal{L}^n\Big)^{1/p} = \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \Big(\frac{(1+\|x\|^2)^m |f(x)|}{(1+\|x\|^2)^m}\Big)^p d\mathcal{L}^n(x)\Big)^{1/p} \\
&\leqslant \mathrm{const}(n,m) \boldsymbol{N}_{2m}(f) \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\mathcal{L}^n(x)}{(1+\|x\|^2)^{mp}}\Big)^{1/p} \\
&= \mathrm{const}(n,m) \boldsymbol{N}_{2m}(f) \Big(\int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{mp}} dr\Big)^{1/p} = \mathrm{const}(n,p) \boldsymbol{N}_{2m}(f).
\end{aligned}$$

[Wykład 14.06.2021 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ]

**Obserwacja 14.2.9** (Własności transformacji Fouriera w klasie $\mathcal{S}$)**.** (a) $D^\alpha \widehat{f} = (-2\pi i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha f}$, $f \in \mathcal{S}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ (por. Obserwacja 14.2.2(d)).

(b) $\xi^\alpha \widehat{f} = (2\pi i)^{-|\alpha|} \widehat{D^\alpha f}$, $f \in \mathcal{S}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

Wzór wystarczy oczywiście sprawdzić jedynie dla $\alpha = e_j$. Na podstawie wzoru Stokesa (Obserwacja 13.3.3(d)) mamy:

$$\begin{aligned}
&(2\pi i)^{-1} \widehat{\Big(\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big)}(\xi) = (2\pi i)^{-1} \lim_{r\to+\infty} \int_{\mathbb{B}(r)} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle} d\mathcal{L}^n(x) \\
&= (2\pi i)^{-1} \lim_{r\to+\infty} \Big(\int_{\partial\mathbb{B}(r)} f(x) e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle} \boldsymbol{n}_j(x) d\mathcal{L}^{\partial\mathbb{B}(r)}(x) - \int_{\mathbb{B}(r)} f(x)(-2\pi i\xi_j) e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle} d\mathcal{L}^n(x)\Big) \\
&= (2\pi i)^{-1} \lim_{r\to+\infty} \int_{\partial\mathbb{B}(r)} f(x) e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle} \frac{x_j}{r} d\mathcal{L}^{\partial\mathbb{B}(r)}(x) + \xi_j \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle} d\mathcal{L}^n(x)
\end{aligned}$$

$$= (2\pi i)^{-1} \lim_{r\to+\infty} \int_{\partial\mathbb{B}(r)} f(x)e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle} \frac{x_j}{r} d\mathcal{L}^{\partial\mathbb{B}(r)}(x) + \xi_j \widehat{f}(\xi).$$

Pozostaje wykazać, że

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\partial\mathbb{B}(r)} f(x)e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle} \frac{x_j}{r} d\mathcal{L}^{\partial\mathbb{B}(r)}(x) = 0.$$

Korzystając z definicji klasy $\mathcal{S}$ mamy:

$$\Big| \int_{\partial\mathbb{B}(r)} f(x)e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle} \frac{x_j}{r} d\mathcal{L}^{\partial\mathbb{B}(r)}(x) \Big| \leqslant \operatorname{const}(n) r^{n-1} \Big( \max_{\|x\|=r} |f(x)| \Big) \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(c) $\|\widehat{f}\|_{\alpha,\beta} = (2\pi)^{|\beta|-|\alpha|} \sup_{\mathbb{R}^n} |\widehat{D^\alpha(x^\beta f)}| \leqslant (2\pi)^{|\beta|-|\alpha|} \|D^\alpha(x^\beta f)\|_{L^1}$, $f \in \mathcal{S}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$. W szczególności, operator $\mathcal{F}$ jest izomorfizmem algebraicznym i topologicznym przestrzeni $\mathcal{S}$ na siebie (oraz $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$).

(d) Jeżeli $\sum_{|\alpha|\leqslant N} a_\alpha D^\alpha u = f$, gdzie $a_\alpha \in \mathbb{C}$, $u, f \in \mathcal{S}$, to $\Big( \sum_{|\alpha|\leqslant N} a_\alpha (2\pi i)^{|\alpha|} \xi^\alpha \Big) \widehat{u}(\xi) = \widehat{f}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Tak więc, po zastosowaniu transformacji Fouriera, równanie różniczkowe zostało zamienione na (na ogół łatwiejszy) problem podzielności funkcji $\widehat{f}$ przez wielomian $P(\xi) := \sum_{|\alpha|\leqslant N} a_\alpha (2\pi i)^{|\alpha|} \xi^\alpha$ w klasie $\mathcal{S}$.

**Definicja 14.2.10.** Funkcjonały liniowe i ciągłe $T : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}$ nazywamy *dystrybucjami temperowanymi* (tzn. jeżeli $f_k \xrightarrow{\mathcal{S}} f$, to $T(f_k) \longrightarrow T(f)$). Zbiór wszystkich dystrybucji temperowanych oznaczamy przez $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. W przestrzeni $\mathcal{S}'$ rozważamy topologię zbieżności punktowej ($T_k \xrightarrow{\mathcal{S}'} T :\Longleftrightarrow \forall_{f\in\mathcal{S}} : T_k(f) \longrightarrow T(f)$).

**Obserwacja 14.2.11** (Własności klasy $\mathcal{S}'$)**.** Niech $T \in \mathcal{S}'$.

(a) $\delta_a \in \mathcal{S}'$ dla dowolnego $a \in \mathbb{R}^n$.

(b) Dla $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, operator $\mathcal{S} \ni f \overset{[u]}{\longmapsto} \int_{\mathbb{R}^n} uf d\mathcal{L}^n$ jest dobrze określony i należy do $\mathcal{S}'$. W tym sensie $\mathcal{X} \subset L^2(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'$.

Istotnie z nierówności Schwarza oraz Obserwacji 14.2.8 wynika, że

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot f \, d\mathcal{L}^n \Big| \leqslant \|u\|_{L^2} \|f\|_{L^2} \leqslant C \|u\|_{L^2} \boldsymbol{N}_s(f), \quad f \in \mathcal{S},\ C := C(n,2),\ s := s(n,2).$$

(c) Operator $L^2(\mathbb{R}^n) \ni u \longmapsto [u] \in \mathcal{S}'$ jest ciągły.

(d) Dla funkcji mierzalnej $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ o wzroście wielomianowym, tzn.

$$|u(x)| \leqslant M(1 + \|x\|^2)^m, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

dla pewnych $M > 0$ i $m \in \mathbb{N}_0$, operator $[u]$ jest dobrze określony i należy do $\mathcal{S}'$. Przykładem takich funkcji $u$ są wielomiany.

Istotnie,

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot f \, d\mathcal{L}^n \Big| \leqslant M \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^m |f(x)| d\mathcal{L}^n(x) \leqslant M \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1 + \|x\|^2)^\sigma |f(x)|}{(1 + \|x\|^2)^{\sigma-m}} \, d\mathcal{L}^n(x)$$
$$\leqslant M \operatorname{const}(n,m) \boldsymbol{N}_{2\sigma}(f), \quad f \in \mathcal{S},\ \sigma := \lfloor m + n/2 \rfloor + 1.$$

(e) Zdefiniujmy $(D^\alpha T)(f) := (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha f)$, $f \in \mathcal{S}$. Wtedy $D^\alpha T \in \mathcal{S}'$.

(f) Dla wielomianu $P$ zdefiniujmy $(P \cdot T)(f) := T(P \cdot f)$, $f \in \mathcal{S}$. Wtedy $P \cdot T \in \mathcal{S}'$.

(g) Zdefiniujmy $\overset{\vee}{T}(f) := T(\overset{\vee}{f})$, $f \in \mathcal{S}$. Wtedy $\overset{\vee}{T} \in \mathcal{S}'$.

(h) Zdefiniujmy $\widehat{T}(f) := T(\widehat{f})$, $f \in \mathcal{S}$. Wtedy $\widehat{T} \in \mathcal{S}'$.

**Definicja 14.2.12.** Dystrybucję $\widehat{T}$ nazywamy *transformatą Fouriera dystrybucji* $T$.

Operację $\mathcal{S}' \ni T \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} \widehat{T} \in \mathcal{S}'$ nazywamy *transformacją Fouriera dystrybucji*.

**Obserwacja 14.2.13** (Własności transformacji Fouriera w klasie $\mathcal{S}'$)**.** (a) Transformacja Fouriera

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}'$$

jest izomorfizmem algebraicznym i topologicznym; $\mathcal{F}^{-1}(T) = \overset{\vee}{\widehat{T}}$.

(b) $\widehat{[u]} = [\widehat{u}]$, $u \in \mathcal{X} \supset \mathcal{S}$.

Istotnie, wtedy $u, \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, skąd wynika, że $[u], [\widehat{u}] \in \mathcal{S}'$. Ponadto, na podstawie Lematu 14.2.4, mamy:

$$\widehat{[u]}(f) = [u](\widehat{f}) = \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot \widehat{f}\, d\mathcal{L}^n = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u} \cdot f\, d\mathcal{L}^n = [\widehat{u}](f), \quad f \in \mathcal{S}.$$

(c) $\widehat{D^\alpha T} = (2\pi i)^{|\alpha|}\xi^\alpha \widehat{T}$, $T \in \mathcal{S}'$.

Istotnie, na podstawie Obserwacji 14.2.9, mamy

$$\widehat{D^\alpha T}(f) = D^\alpha T(\widehat{f}) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \widehat{f}) = (-1)^{|\alpha|} T((-2\pi i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha f}) = (2\pi i)^{|\alpha|} (\xi^\alpha \widehat{T})(f), \quad f \in \mathcal{S}.$$

(d) $D^\alpha \widehat{T} = (-2\pi i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha T}$, $T \in \mathcal{S}'$.

Istotnie,

$$D^\alpha \widehat{T}(f) = (-1)^{|\alpha|} \widehat{T}(D^\alpha f) = (-1)^{|\alpha|} T(\widehat{D^\alpha f}) = (-1)^{|\alpha|} T((2\pi i)^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{f}) = (-2\pi i)^{|\alpha|} (\widehat{x^\alpha T})(f), \quad f \in \mathcal{S}.$$

(e) $\widehat{\delta}_0 = [1]$, $\widehat{[1]} = \delta_0$, $D^\alpha \delta_0 = (-2\pi i)^{|\alpha|} \widehat{[x^\alpha]}$.

Istotnie,

$$\widehat{\delta}_0(f) = \delta_0(\widehat{f}) = \widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\mathcal{L}^n(x) = [1](f), \quad f \in \mathcal{S},$$

$$\widehat{[1]} = \widehat{\widehat{\delta}_0} = \overset{\vee}{\delta}_0 = \delta_0, \quad D^\alpha \delta_0 = D^\alpha \widehat{[1]} = (-2\pi i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha [1]} = (-2\pi i)^{|\alpha|} \widehat{[x^\alpha]}.$$

(f) $\widehat{[u]} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ dla $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Ponadto, $\|\widehat{[u]}\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}$, czyli operator $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ jest izometrią.

Ustalmy $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Zauważmy, że korzystając z Twierdzenia 14.2.6(d), mamy

$$|\widehat{[u]}(f)| = |[u](\widehat{f})| \leqslant \|u\|_{L^2} \|\widehat{f}\|_{L^2} = \|u\|_{L^2} \|f\|_{L^2}, \quad f \in \mathcal{S}.$$

Przestrzeń $\mathcal{S}$ jest gęsta w $L^2(\mathbb{R}^n)$ w normie $L^2$. W takim razie, $\widehat{[u]}$ przedłuża się do funkcjonału liniowego i ciągłego $\varLambda : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ takiego, że $\|\varLambda\| \leqslant \|u\|_{L^2}$. Korzystając z twierdzenia Riesza [4], wnioskujemy, że istnieje funkcja $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ taka, że $\varLambda(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot g\, d\mathcal{L}^n$, $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, oraz $\|g\|_{L^2} = \|\varLambda\|$. Oznacza to, że $\widehat{[u]} = [g]$, czyli $\widehat{[u]} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ oraz $\|\widehat{[u]}\|_{L^2} \leqslant \|u\|_{L^2}$. Dla dowodu równości, zastosujmy poprzednią nierówność do funkcji $\widehat{[u]}$: $\|u\|_{L^2} = \|\overset{\vee}{u}\|_{L^2} = \|[\overset{\vee}{u}]\|_{L^2} = \|\widehat{\widehat{[u]}}\|_{L^2} \leqslant \|\widehat{[u]}\|_{L^2}$.

(g) Jeżeli $\sum_{|\alpha| \leqslant N} a_\alpha D^\alpha U = T$, gdzie $a_\alpha \in \mathbb{C}$, $U, T \in \mathcal{S}'$, to $\Big(\sum_{|\alpha| \leqslant N} a_\alpha (2\pi i)^{|\alpha|} \xi^\alpha\Big) \widehat{U} = \widehat{T}$. Tak więc, po zastosowaniu transformacji Fouriera, dystrybucyjne równanie różniczkowe zostało zamienione na (na ogół trudny) problem podzielności dystrybucji $\widehat{T}$ przez wielomian $P(\xi) := \sum_{|\alpha| \leqslant N} a_\alpha (2\pi i)^{|\alpha|} \xi^\alpha$ w klasie $\mathcal{S}'$.

---

(4) Frederic Riesz (1880–1956).