

Uniwersytet Jagielloński
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyki

Wykłady z Funkcji Analitycznych

(Wykład dwusemestralny)

Marek Jarnicki

(WERSJA Z 30 STYCZNIA 2010)

Spis treści

Część I. Semestr VI	1
Rozdział 1. Wstęp	3
1.1. Liczby zespolone	3
1.2. Sfera Riemanna	4
1.3. Homografie	5
1.4. Funkcja $\exp$	7
1.5. Odwzorowania przy pomocy funkcji elementarnych	8
Rozdział 2. Funkcje holomorficzne I	11
2.1. Pochodna zespolona	11
2.2. Funkcje holomorficzne	18
2.3. Podstawowe własności funkcji holomorficznych	22
2.4. Rodziny normalne, twierdzenia Montela i Vitaliego	27
2.5. Zasada symetrii Riemanna–Schwarza	28
2.6. Twierdzenie Cauchy’ego–Dixona	28
2.7. Jednowymiarowe rozmaitości zespolone	30
2.8. Funkcje holomorficzne w ∞	31
2.9. Szeregi Laurenta	32
2.10. Osobliwości izolowane	34
2.11. Funkcje meromorficzne	36
2.12. Twierdzenie o residuach	37
2.13. Zastosowania do obliczania całek	38
2.14. Funkcje holomorficzne dane całką	40
2.15. Funkcja Γ Eulera	41
2.16. Transformacja Laplace’a	41
Część II. Semestr VII	43
Rozdział 3. Funkcje holomorficzne II	45
3.1. Twierdzenie o residuach pochodnej logarytmicznej, twierdzenia Rouchégo i Hurwitza	45
3.2. Twierdzenie Schottky’ego	46
3.3. Twierdzenia Picarda	49
3.4. Krotność	50
3.5. Odwzorowania biholomorficzne	50
3.6. Odwzorowania biholomorficzne pierścieni	51
3.7. Twierdzenie Riemanna	52
3.8. Twierdzenie Rungego	54
3.9. Twierdzenie Mittag-Lefflera	56
3.10. Twierdzenie Weierstrassa	57
3.11. Funkcja ζ Riemanna	63
3.12. Lemat Fatou	63

Rozdział 4.	Funkcje harmoniczne i subharmoniczne	67
4.1.	Funkcje harmoniczne	67
4.2.	Funkcje harmoniczne w pierścieniu	71
4.3.	Twierdzenia Harnacka	73
4.4.	Funkcje subharmoniczne	74
Część III.	Uzupełnienia (poza zasadniczym wykładem)	87
Rozdział 5.	Obszary Riemanna i przedłużanie funkcji holomorficzych	89
5.1.	Regiony Riemanna nad $\mathbb{C}$	89
5.2.	Snop I -kielekóv funkcji holomorficzych	95
5.3.	Morfizmy	96
5.4.	Rozszerzenia holomorficzne	97
5.5.	Naturalne przestrzenie Fréchet'a	100
Rozdział 6.	Geometria hiperboliczna koła jednostkowego	103
6.1.	Geometria hiperboliczna koła jednostkowego	103
Rozdział	Oznaczenia	107
Rozdział	Literatura cytowana	111
Rozdział	Indeks nazwisk	113
Rozdział	Indeks	115

Część I

Semestr VI

ROZDZIAŁ 1

Wstęp

Poniższy rozdział, nie mający charakteru systematycznego wykładu, zawiera przegląd elementarnych pojęć i własności, których znajomość jest niezbędna do zrozumienia dalszych części wykładu.

1.1. Liczby zespolone

Liczby zespolone $\mathbb{C}$ to ciało $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ z działaniami określonymi następująco:

$$(x, y) + (u, v) := (x + u, y + v),$$

$$(x, y) \cdot (u, v) := (xu - yv, xv + yu).$$

Liczbę rzeczywistą $x \in \mathbb{R}$ identyfikujemy z liczbą zespoloną $(x, 0) \in \mathbb{C}$; odwzorowanie

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto (x, 0) \in \mathbb{C}$$

jest monomorfizmem ciał. Od tej chwili przyjmujemy, że $x = (x, 0)$ dla $x \in \mathbb{R}$. W szczególności, uważamy, że $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Na przestrzeń $\mathbb{C}$ możemy także patrzeć jako na dwuwymiarową rzeczywistą przestrzeń wektorową $(\mathbb{C}, +; \mathbb{R}, \cdot)$, gdzie $\alpha \cdot (x, y) := (\alpha x, \alpha y)$; odnotujmy, że to mnożenie zewnętrzne jest zgodne z wyżej zdefiniowanym mnożeniem wewnętrznym, tzn. $\alpha \cdot (x, y) = (\alpha, 0) \cdot (x, y)$. Bazą tej przestrzeni są wektory $(1, 0) = 1$ i $(0, 1) =: i$. Mamy $(x, y) = x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1) = x + iy$; liczbę x nazywamy *częścią rzeczywistą* liczby zespolonej $z = (x, y) = x + iy$ i piszemy $x = \operatorname{Re} z$, zaś liczbę y — *częścią urojoną* z i piszemy $y = \operatorname{Im} z$. Odnotujmy, że $i^2 = -1$.

Liczbę $\bar{z} := x - iy$ nazywamy *liczbą sprzężoną* do z . Odwzorowanie $\mathbb{C} \ni z \mapsto \bar{z} \in \mathbb{C}$ jest izomorfizmem ciał. Ponadto, $J \circ J = \operatorname{id}_{\mathbb{C}}$ oraz $J|_{\mathbb{R}} = \operatorname{id}_{\mathbb{R}}$. Jest to jedyne nietrywialne odwzorowanie o tych własnościach.

Norma euklidesowa liczby zespolonej $z = x + iy$, zwana *modułem* tej liczby,

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

jest *normą zespoloną*, tzn. $|zw| = |z||w|$ dla dowolnych $z, w \in \mathbb{C}$. Przypomnijmy *nierówność trójkąta*:

$$||z| - |w|| \leq |z + w| \leq |z| + |w|.$$

Z topologicznego punktu widzenia przestrzeń $\mathbb{C}$ traktujemy jako przestrzeń metryczną z odległością euklidesową $\rho(z, w) := |z - w|$. Dla $a \in \mathbb{C}$ będziemy stosować następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} K(a, r) &:= \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}, \quad 0 < r \leq +\infty, & K(a, +\infty) &:= \mathbb{C}, \\ K_*(a, r) &:= K(a, r) \setminus \{a\}, & K(r) &:= K(0, r), & \mathbb{D} &:= K(1), \\ C(a, r) &:= \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\} = \partial K(a, r), & \mathbb{T} &:= C(1), \\ \bar{K}(a, r) &:= \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq r\}, \quad 0 \leq r < +\infty, & \bar{K}(a, 0) &:= \{a\}, & \bar{K}(r) &:= \bar{K}(0, r), \\ \mathbb{A}(a, r_-, r_+) &:= \{z \in \mathbb{C} : r_- < |z - a| < r_+\}, & -\infty \leq r_- < r_+ \leq +\infty, & \mathbb{A}(r_-, r_+) &:= \mathbb{A}(0, r_-, r_+). \end{aligned}$$

Odnotujmy, że $\mathbb{A}(a, r_-, r_+) = K(a, r_+)$ dla $r_- < 0$ oraz $\mathbb{A}(a, 0, r_+) = K_*(a, r_+)$.

Dla $z = x + iy$, zbiór

$$\arg z := \{\varphi \in \mathbb{R} : x = |z| \cos \varphi, y = |z| \sin \varphi\}$$

nazywamy *argumentem* liczby z . Zapis $z = |z| \cos \varphi + i|z| \sin \varphi = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $\varphi \in \arg z$, nazywamy *postacią trygonometryczną* liczby zespolonej. Zauważmy, że:

- $\arg 0 = \mathbb{R}$;

1. Wstęp

- dla $z \neq 0$ mamy: $\varphi_1, \varphi_2 \in \arg z \iff \varphi_1 - \varphi_2 \in 2\pi\mathbb{Z}$ ⁽¹⁾;
- $\arg(zw) = \arg z + \arg w$;
- dla $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ mamy $z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ — jest to tzw. *wzór de Moivre'a* ⁽²⁾;
- dla $z \neq 0$ mamy: $\arg(1/z) = -\arg z$;
- $\arg \bar{z} = -\arg z$.

Dla $z \neq 0$ definiujemy *argument główny* $\text{Arg } z$ liczby z jako ten (jedyne) z jej argumentów, który leży w przedziale $(-\pi, \pi]$. Zdefiniujemy ponadto $\text{Arg } 0 := 0$. Odnotujmy, że:

- $\text{Arg } z = 0 \iff z = x \in \mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$,
- $\text{Arg } z = \pi \iff z = x \in \mathbb{R}_{<0} := (-\infty, 0)$,
- $\text{Arg } \bar{z} = -\text{Arg } z, z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

Zbiór

$$\sqrt[n]{z} := \{w \in \mathbb{C} : w^n = z\}$$

nazywamy *pierwiastkiem zespolonym n -stopnia* z liczby z . Mamy: $\sqrt[n]{0} = \{0\}$;

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ |z|^{1/n} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) : k = 0, \dots, n-1 \right\}, \quad z \neq 0, \varphi \in \arg z,$$

gdzie $a^{1/n} \geq 0$ oznacza pierwiastek „arytmetyczny” z liczby $a \geq 0$. Geometrycznie: zbiór $\sqrt[n]{z}$ składa się z wierzchołków n -kąta foremnego wpisanego w okrąg $C(|z|^{1/n})$, którego jeden wierzchołek ma argument $(\text{Arg } z)/n$.

Przypuśćmy, że każdemu punktowi z pewnego zbioru $A \subset \mathbb{C}$ przyporządkowaliśmy niepusty zbiór $P(z) \subset \mathbb{C}$, np. $A \ni z \mapsto \arg z$ lub $A \ni z \mapsto \sqrt[n]{z}$. Powiemy, że funkcja ciągła $p : A \rightarrow \mathbb{C}$ jest *gałęzią jednoznaczną funkcji wieloznacznej P* , jeżeli $p(z) \in P(z)$ dla dowolnego $z \in A$. W tym sensie możemy mówić o *gałęzi jednoznacznej argumentu*, czy też *gałęzi jednoznacznej n -tego pierwiastka*. Zauważmy, że:

- Z istnienia gałęzi jednoznacznej argumentu wynika istnienie gałęzi jednoznacznej n -tego pierwiastka ($p(z) := |z|^{1/n}(\cos \frac{\arg(z)}{n} + i \sin \frac{\arg(z)}{n})$). ĆWICZENIE: Czy zachodzi twierdzenie odwrotne?
- Jeżeli $a : A \rightarrow \mathbb{R}$ jest gałęzią jednoznaczną argumentu, to $a + 2k\pi$ jest gałęzią jednoznaczną argumentu dla dowolnego $k \in \mathbb{Z}$.
- Jeżeli A jest spójny, zaś a_1, a_2 są dwoma gałęziami jednoznacznymi argumentu, to $a_1 - a_2 \equiv 2\pi k$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.
- Jeżeli $p : A \rightarrow \mathbb{C}$ jest gałęzią jednoznaczną n -tego pierwiastka, to εp jest gałęzią jednoznaczną n -tego pierwiastka dla dowolnego $\varepsilon \in \sqrt[n]{1}$.
- W zbiorze $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ istnieje gałąź jednoznaczna argumentu i każda gałąź argumentu w $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ ma postać $a(z) = \text{Arg } z + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$. Ogólniej, dla dowolnej półprostej L o początku w zerze, w obszarze $\mathbb{C} \setminus L$ istnieje jednoznaczna gałąź argumentu. W szczególności, dla dowolnego $z_0 \in \mathbb{C}_* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, w kole $K(z_0, |z_0|)$ istnieje jednoznaczna gałąź argumentu.
- Jeżeli $C(r) \subset A$ dla pewnego $r > 0$, to w zbiorze A nie istnieje gałąź jednoznaczna pierwiastka (a więc i argumentu).

1.2. Sfera Riemanna

Sfera Riemanna ⁽³⁾ $\widehat{\mathbb{C}}$ to jednopunktowe uzwarcenie $\mathbb{C}$, $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, gdzie:

- symbol $\infty \notin \mathbb{C}$,
- zbiór $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ jest otoczeniem ∞ , jeżeli $\{\infty\} \cup \mathbb{A}(R, +\infty) \subset U$ dla pewnego $R > 0$.

⁽¹⁾ Dla $c \in \mathbb{C}$, $A, B \subset \mathbb{C}$, stosujemy następujące oznaczenia: $A \cdot B := \{ab : a \in A, b \in B\}$, $cA := \{ca : a \in A\} = \{c\} \cdot A$, $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$, $c + A := \{c + a : a \in A\} = \{c\} + A = A + c$, $-A := (-1)A$.

⁽²⁾ Abraham de Moivre (1667–1754) — matematyk francuski.

⁽³⁾ Bernhard Riemann (1826–1866) — matematyk niemiecki.

Topologia $\widehat{\mathbb{C}}$ jest metryzowalna, np. poprzez *metrykę sferyczną*

$$d(a, b) := \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } a = b = \infty \\ \frac{1}{\sqrt{1+|a|^2}}, & \text{jeżeli } a \in \mathbb{C}, b = \infty \\ \frac{1}{\sqrt{1+|b|^2}}, & \text{jeżeli } a = \infty, b \in \mathbb{C} \\ \frac{|a-b|}{\sqrt{1+|a|^2}\sqrt{1+|b|^2}}, & \text{jeżeli } a, b \in \mathbb{C} \end{cases} \quad a, b \in \widehat{\mathbb{C}}.$$

Widać, że dla ciągu $(z_k)_{k=1}^\infty \subset \mathbb{C}$ mamy: $z_k \xrightarrow{(\widehat{\mathbb{C}}, d)} \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|z_k| \longrightarrow +\infty$.

Definiujemy:

$$\infty + a = a + \infty := \infty \text{ dla dowolnego } a \in \mathbb{C},$$

$$a \cdot \infty = \infty \cdot a := \infty \text{ dla dowolnego } a \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\},$$

$$1/0 := \infty, 1/\infty := 0.$$

Ćwiczenie 1.2.1. (a) Sfera Riemanna $\widehat{\mathbb{C}}$ jest homeomorficzna z dwuwymiarową sferą euklidesową

$$\mathbf{S} := \partial \mathbb{B}_3((0, 0, 1/2), 1/2) \subset \mathbb{R}^3$$

poprzez rzut *stereograficzny* $R : \mathbf{S} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, $R(N) := \infty$, gdzie $N := (0, 0, 1)$,

$$R(u, v, w) := \left(\frac{u}{1-w}, \frac{v}{1-w} \right), \quad (u, v, w) \in \mathbf{S} \setminus \{N\};$$

$$R \in \mathcal{C}^\omega(\mathbf{S} \setminus \{N\}, \mathbb{R}^2).$$

(b)

$$R^{-1}(z) = \left(\frac{\operatorname{Re} z}{1+|z|^2}, \frac{\operatorname{Im} z}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2}{1+|z|^2} \right), \quad z \in \mathbb{C};$$

$$R^{-1} \in \mathcal{C}^\omega(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3).$$

(c) $d(a, b) = \|R^{-1}(a) - R^{-1}(b)\|$, $a, b \in \widehat{\mathbb{C}}$, gdzie $\|\cdot\|$ oznacza normę euklidesową w $\mathbb{R}^3$.

(d) Rzut stereograficzny jest odwzorowaniem *konforemnym* w $\mathbf{S} \setminus \{N\}$, tzn. dla dowolnych dwóch krzywych $\gamma_1, \gamma_2 : [-1, 1] \longrightarrow \mathbf{S}$ klasy $\mathcal{C}^1$ takich, że $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) \in \mathbf{S} \setminus \{N\}$, $\gamma_1'(0) \neq 0$, $\gamma_2'(0) \neq 0$, kąt skierowany pomiędzy wektorami $(R \circ \gamma_1)'(0), (R \circ \gamma_2)'(0)$ jest równy kątowi skierowanemu pomiędzy wektorami $\gamma_1'(0), \gamma_2'(0)$.

1.3. Homografie

Homografią nazywamy dowolne odwzorowanie $h : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ postaci

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \neq 0, \quad (*)$$

przy czym:

- dla $c = 0$ kładziemy $h(\infty) := \infty$,
- dla $c \neq 0$ kładziemy $h(-d/c) := \infty$ i $h(\infty) := a/c$.

Obserwacja 1.3.1 (Własności homografii — szczegóły pozostawiamy jako ĆWICZENIE).

(1) Mamy następujące *homografie elementarne*:

Nazwa	Opis	Parametry	Liczba parametrów rzeczywistych
<i>translacje</i>	$z \longmapsto z + b$	$b \in \mathbb{C}$	2
<i>obroty</i>	$z \longmapsto az$	$a \in \mathbb{T}$	1
<i>homotetie</i>	$z \longmapsto tz$	$t > 0$	1
<i>odwzorowania afiniczne</i>	$z \longmapsto az + b$	$a \in \mathbb{C}_*, b \in \mathbb{C}$	4
<i>inwersja</i>	$z \longmapsto 1/z$		

1. Wstęp

Każde odwzorowanie afiniczne jest złożeniem obrotu, homotetii i translacji.

- (2) Złożenie homografii jest homografią. Każda homografia jest odwzorowaniem bijektywnym. Odwzorowanie odwrotne do homografii jest homografią. Każda homografia jest homeomorfizmem $\widehat{\mathbb{C}}$ na $\widehat{\mathbb{C}}$. Zbiór wszystkich homografii $\mathcal{H}$ jest grupą ze składaniem. Translacje, obroty i odwzorowania afiniczne tworzą podgrupy.
- (3) Każda homografia jest złożeniem homografii elementarnych. Grupa $\mathcal{H}$ zależy od 6 niezależnych parametrów rzeczywistych.
- (4) Każda homografia h jest odwzorowaniem konforemnym na $\mathbb{C} \cap h^{-1}(\mathbb{C})$.
- (5) Równanie

$$\left| \frac{z-p}{z-q} \right| = \lambda, \quad (**)$$

gdzie $p, q \in \mathbb{C}$, $p \neq q$, $\lambda > 0$, przedstawia:

- dla $\lambda = 1$ — prosta,
- dla $\lambda \neq 1$ — okrąg

$$C\left(\frac{p - \lambda^2 q}{1 - \lambda^2}, \frac{\lambda|p - q|}{|1 - \lambda^2|}\right),$$

względem których punkty p i q są *symetryczne* ⁽⁴⁾.

Odwrotnie, dowolna prosta lub okrąg mogą być opisane równaniem (**). W przypadku okręgu $C(z_0, r)$, punkt $p \in \mathbb{C} \setminus (\{z_0\} \cup C(z_0, r))$ wybieramy w sposób dowolny i kładziemy

$$q := z_0 + \frac{r^2}{p - z_0}, \quad \lambda := \frac{|p - z_0|}{r}.$$

- (6) Dowolną prostą uzupełnioną ∞ nazywamy *okręgiem niewłaściwym*. Okrąg właściwy lub nie, dany równaniem (**) jest przekształcany przez homografię (*) na okrąg właściwy lub nie dany równaniem

$$\left| \frac{w - h(p)}{w - h(q)} \right| = \lambda \left| \frac{qc + d}{pc + d} \right|.$$

W szczególności punkty symetryczne przechodzą zawsze w punkty symetryczne.

Zauważmy, że:

- jeżeli h jest odwzorowaniem afinicznym, to prosta przechodzi na prostą i okrąg — na okrąg,
- h jest inwersją, to otrzymujemy równanie

$$\left| \frac{w - 1/p}{w - 1/q} \right| = \lambda \left| \frac{q}{p} \right|,$$

co oznacza, że obrazem prostej jest albo prosta (gdy $|p| = |q|$), albo okrąg (gdy $|p| \neq |q|$), zaś obrazem okręgu jest albo okrąg (gdy $\lambda|q| \neq |p|$), albo prosta (gdy $\lambda|q| = |p|$).

- (7) Niech $\mathbb{H}^+ := \{x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$. Dla dowolnego $a \in \mathbb{H}^+$ homografia

$$h(z) := \frac{z - a}{z - \bar{a}}$$

przekształca $\mathbb{H}^+$ na koło jednostkowe $\mathbb{D}$.

Istotnie, $h(a) = 0$ oraz dla $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$|h(x)| = \left| \frac{x - a}{x - \bar{a}} \right| = 1,$$

czyli $h(\mathbb{R}) \subset \mathbb{T}$. Ponieważ homografie są homeomorfizmami przekształcającymi proste na proste lub okręgi, musimy mieć $h(\mathbb{H}^+) = \mathbb{D}$.

⁽⁴⁾ W przypadku okręgu $C(z_0, r)$ oznacza to, że punkty te leżą na jednej półprostej wychodzącej z z_0 oraz $|p - z_0||q - z_0| = r^2$. Dodatkowo, umawiamy się że punkty z_0 i ∞ są również symetryczne względem $C(z_0, r)$.

- (8) Dla dowolnych
- $a \in \mathbb{D}$
- ,
- $\zeta \in \mathbb{T}$
- , homografia

$$h(z) := \zeta \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

przekształca $\mathbb{D}$ na $\mathbb{D}$.

Istotnie, $h(a) = 0$ oraz dla dowolnego $z = 1/\bar{z} \in \mathbb{T}$ mamy

$$|h(z)| = \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}/\bar{z}} \right| = \left| \frac{z - a}{z - a} \right| = 1,$$

czyli $h(\mathbb{T}) \subset \mathbb{T}$. Dalej rozumujemy, jak poprzednio.

- (9) Zbiór $\mathcal{A}$ wszystkich homografii postaci takiej, jak w (8) jest podgrupą grupy $\text{Aut}_{\mathcal{H}}(\mathbb{D})$ wszystkich homografii przekształcających $\mathbb{D}$ na $\mathbb{D}$.
- (10) $\text{Aut}_{\mathcal{H}}(\mathbb{D}) = \mathcal{A}$. W szczególności, grupa $\text{Aut}_{\mathcal{H}}(\mathbb{D})$ zależy od 3 parametrów rzeczywistych. Ponadto, grupa ta działa *transytywnie* na $\mathbb{D}$, tzn. dla dowolnych $a, b \in \mathbb{D}$ istnieje $h \in \text{Aut}_{\mathcal{H}}(\mathbb{D})$ takie, że $h(a) = b$. Istotnie, niech $f \in \text{Aut}_{\mathcal{H}}(\mathbb{D})$ i niech $g \in \mathcal{A}$ będzie takie, że $g(f(0)) = 0$. Wtedy $h := g \circ f \in \text{Aut}_{\mathcal{H}}(\mathbb{D})$ oraz $h(0) = 0$. Wystarczy pokazać, że h musi być obrotem. Niech $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Ponieważ $h(0) = 0$, musi być $b = 0$. Punkty 0 i ∞ są symetryczne względem $\mathbb{T}$. Wynika stąd, że $h(\infty) = \infty$, a więc $c = 0$. Ponieważ $h(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$, musi być $a/d \in \mathbb{T}$, czyli h jest obrotem.
- (11) Niech D_j będzie *dowolnym* kołem lub półpłaszczyzną i niech $a_j \in D_j$, $b_j \in \partial_{\mathbb{C}} D_j$, $j = 1, 2$. Wtedy istnieje homografia h taka, że $h(D_1) = D_2$ oraz $h(a_1) = a_2$, $h(b_1) = b_2$.
- (12) Homografia postaci (*), $h \neq \text{id}$, może mieć jeden lub dwa punkty stałe wyznaczone z równania $\frac{az+b}{cz+d} = z$.

1.4. Funkcja exp

Definiujemy *funkcję wykładniczą* $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$\exp(z) = e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Obserwacja 1.4.1 (Własności exp).

- (1) Funkcja exp jest poprawnie określona. Jest to funkcja $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ klasy $\mathcal{C}^{\omega}$. Definicja jest zgodna dla $z = x \in \mathbb{R}$.
- (2) $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$, $a, b \in \mathbb{C}$.
Istotnie,

$$e^{a+b} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{a^k}{k!} \frac{b^{n-k}}{(n-k)!} \stackrel{(*)}{=} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} \right) = e^a \cdot e^b,$$

gdzie (*) to iloczyn Cauchy'ego ⁽⁵⁾ szeregów.

- (3) $e^a \neq 0$, $a \in \mathbb{C}$.
- (4) $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$.
- (5) Definiujemy

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Są to tzw. *wzory Eulera* ⁽⁶⁾. Definicje są zgodne dla $z = x \in \mathbb{R}$. Odnotujmy, że np. $\cos i = \frac{e+1/e}{2} > \frac{3}{2}$.

- (6) $e^z = e^w \iff z - w = 2\pi i k$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.

⁽⁵⁾ Augustin Cauchy (1789–1857) — matematyk i fizyk francuski.

⁽⁶⁾ Leonhard Euler (1707–1783) — matematyk i fizyk szwajcarski.

1. Wstęp

- (7) Funkcje $\cos$ i $\sin$ mają okres 2π . Ponadto, $\cos z = 0 \iff z = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, $\sin z = 0 \iff z = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Definiujemy

$$\operatorname{tg} z := \frac{\sin z}{\cos z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}, \quad \operatorname{ctg} z := \frac{\cos z}{\sin z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Zachodzą wszystkie standardowe wzory znane dla funkcji trygonometrycznych zmiennej rzeczywistej, np. $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$, $z \in \mathbb{C}$.

- (8) $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}_*$.

- (9) Definiujemy *funkcje hiperboliczne, sinus i kosinus hiperboliczny*

$$\cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Dla $z \in \mathbb{C}$ definiujemy *logarytm zespolony*

$$\log z := \{w \in \mathbb{C} : e^w = z\}$$

oraz *logarytm główny* $\operatorname{Log} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$\operatorname{Log} z := \ln |z| + i \operatorname{Arg} z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Odnotujemy, że:

- $\log 0 = \emptyset$,
- $\log z = \{\ln |z|\} + i \arg z$, $z \neq 0$,
- dla dowolnego zbioru spójnego $A \subset \mathbb{C}_*$ w zbiorze A istnieje gałąź jednoznaczna logarytmu ℓ wtedy i tylko wtedy, gdy w A istnieje gałąź jednoznaczna argumentu a . Ponadto, $\ell(z) = \ln |z| + ia(z) + 2k\pi i$, $z \in A$, dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$,
- w $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ istnieje gałąź jednoznaczna logarytmu i każda taka gałąź ma postać $\ell(z) = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z + 2k\pi i$, $z \in A$, dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.

Dla dowolnego $a \in \mathbb{C}_*$ definiujemy *potęgę zespoloną*

$$a^b := \{e^{bw} : w \in \log a\}, \quad b \in \mathbb{C}.$$

Ponadto, kładziemy $0^b := \{0\}$ dla $b \in \mathbb{C}_*$. Odnotujemy, że:

- $a^n = \{a^n\}$ dla dowolnego $n \in \mathbb{Z}$, gdzie po prawej stronie a^n rozumiemy w sensie klasycznym,
- $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$, $n \in \mathbb{N}$,
- dla dowolnego $w_0 \in \log a$, funkcja $\mathbb{C} \ni z \mapsto e^{zw_0}$ jest gałęzią jednoznaczną potęgi $\mathbb{C} \ni z \mapsto a^z$; czy każda gałąź musi być tej postaci (ĆWICZENIE) ?
- jeżeli w zbiorze $A \subset \mathbb{C}_*$ istnieje gałąź jednoznaczna logarytmu ℓ , to dla dowolnego $b \in \mathbb{C}$, w A istnieje gałąź jednoznaczna potęgi $A \ni z \mapsto z^b$, np. $A \ni z \mapsto e^{b\ell(z)}$; czy każda gałąź musi być tej postaci (ĆWICZENIE) ?

Przykład 1.4.2.

$$i^i = \{e^{-(2k+1/2)\pi} : k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}_{>0}.$$

Ćwiczenie 1.4.3. Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem i niech $f : D \longrightarrow \mathbb{C}_*$ będzie funkcją ciągłą, dla której w obszarze D istnieje jednoznaczna gałąź $\log f$. Oznaczmy ją L . Mamy $e^L \equiv f$. Niech $a \in D$ i niech $f(K(a, r)) \subset K(f(a), |f(a)|)$. Niech ℓ będzie dowolną gałęzią logarytmu w $K(f(a), |f(a)|)$. Wtedy $L = \ell \circ f + 2k\pi i$ w $K(a, r)$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.

1.5. Odwzorowania przy pomocy funkcji elementarnych

Przykład 1.5.1 (n -ty pierwiastek). Wiemy, że w zbiorze $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ istnieje gałąź jednoznaczna $\sqrt[n]{z}$, np. $f(z) := e^{\frac{1}{n} \operatorname{Log} z}$. Funkcja ta odwzorowuje homeomorficznie górną półpłaszczyznę $\mathbb{H}^+$ na kąt

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Arg} z < \pi/n\}$$

(odwzorowaniem odwrotnym jest oczywiście $z \mapsto z^n$).

Przykład 1.5.2 (Funkcja Żukowskiego ⁽⁷⁾). Funkcję Żukowskiego nazywamy funkcję

$$f(z) := \frac{1}{2}(z + 1/z), \quad z \in \mathbb{C}_*.$$

Niech $f(z) = f(re^{it}) = u + iv$, czyli

$$u = \frac{1}{2}(r + 1/r) \cos t,$$

$$v = \frac{1}{2}(r - 1/r) \sin t.$$

Wtedy $f(z) = f(1/z)$, $z \in \mathbb{C}_*$. ponadto, f jest iniektywna w $\mathbb{D}_*$ oraz w $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ i odwzorowuje homeomorficznie każdy z tych obszarów na $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$; odwzorowania odwrotne mają postać

$$\mathbb{C} \setminus [-1, 1] \ni w \mapsto w \pm \sqrt{w^2 - 1} = w \pm e^{\frac{1}{2} \operatorname{Log}(w^2 - 1)}.$$

Istotnie, jeżeli $f(z_1) = f(z_2)$ dla $z_1, z_2 \in \mathbb{D}_*$, to $(z_1 - z_2)(1 - 1/(z_1 z_2)) = 0$, a stąd $z_1 = z_2$.

Dla $r > 0$, $r \neq 1$, obrazem okręgu $C(r)$ jest elipsa o ogniskach ± 1 i półosiach $\frac{1}{2}(r \pm 1/r)$. Jeżeli $r \rightarrow 0$, to ta elipsa oddala się do ∞ . Jeżeli $r \rightarrow 1$, to zmierza do odcinka $[-1, 1]$, który jest dwukrotnie pokryty przez obraz $\mathbb{T}$.

Przykład 1.5.3 (exp). Niech $u + iv = e^z = e^{x+iy}$ tzn.

$$u = e^x \cos y,$$

$$v = e^x \sin y.$$

(a) Dla dowolnego $y_0 \in \mathbb{R}$, pas poziomy $\{x + iy : x \in \mathbb{R}, y_0 - \pi < y \leq y_0 + \pi\}$ jest odwzorowywany bijektywnie (ale oczywiście nie homeomorficznie!) na $\mathbb{C}_*$. Pozioma prosta $y = y_0$ przechodzi na promień $\{(e^x \cos y_0, e^x \sin y_0) : x \in \mathbb{R}\}$. Pas otwarty $\{x + iy : x \in \mathbb{R}, y_0 - \pi < y < y_0 + \pi\}$ jest odwzorowany homeomorficznie na $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ (odwzorowaniem odwrotnym jest Log).

(b) Dla dowolnych $p_0 \in \mathbb{R}_*$, $q_0 \in \mathbb{R}$, pas ukośny $\{(x, p_0 x + q) : x \in \mathbb{R}, q_0 - \pi < q \leq q_0 + \pi\}$ jest odwzorowywany bijektywnie na $\mathbb{C}_*$. Prosta ukośna $y = p_0 x + q_0$ przechodzi na linię śrubową postaci $\{(e^x \cos(p_0 x + q_0), e^x \sin(p_0 x + q_0)) : x \in \mathbb{R}\}$.

Przykład 1.5.4 (sin). Funkcja sinus odwzorowuje homeomorficznie pas

$$\{x + iy : -\pi/2 < x < \pi/2, y \in \mathbb{R}\}$$

na $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, 1] \cup [1, +\infty)) =: D$. Istotnie, niech

$$\begin{aligned} \sin z = \sin(x + iy) &= \frac{1}{2i}(e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}) = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \sin x + i \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) \cos x \\ &= \cosh y \sin x + i \sinh y \cos x =: u + iv. \end{aligned}$$

Prosta pionowa $x = 0$ przechodzi bijektywnie na prostą $u = 0$. Każda prosta pionowa $x = c \neq 0$ przechodzi bijektywnie w jedną z gałęzi hiperboli

$$\frac{u^2}{\sin^2 c} - \frac{v^2}{\cos^2 c} = 1.$$

Wypełniają one cały obszar D .

Przykład 1.5.5. Jak zachowuje się funkcja tg w pasie $\{x + iy : -\pi/2 < x < \pi/2, y \in \mathbb{R}\}$?

⁽⁷⁾ Nikolai Żukowski (1847–1921) — matematyk rosyjski.

Funkcje holomorficzne I

2.1. Pochodna zespolona

Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie zbiorem otwartym i niech $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $f = u + iv$. Na funkcję f możemy zawsze patrzeć jako na odwzorowanie $(u, v) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$. W szczególności, można pytać o różniczkowalność w sensie rzeczywistym tego odwzorowania w pewnym punkcie $a \in \Omega$. Niech $f'_{\mathbb{R}}(a)$ oznacza rzeczywistą różniczkę Frécheta ⁽¹⁾ odwzorowania f w punkcie a (o ile istnieje). Wiemy, że dla $Z = X + iY$ mamy

$$\begin{aligned} f'_{\mathbb{R}}(a)(Z) &= \frac{\partial f}{\partial x}(a)X + \frac{\partial f}{\partial y}(a)Y = \frac{\partial f}{\partial x}(a)\frac{Z + \bar{Z}}{2} + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\frac{Z - \bar{Z}}{2i} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) - i\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)Z + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) + i\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)\bar{Z} =: \frac{\partial f}{\partial z}(a)Z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a)\bar{Z}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) - i\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) + i\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)$$

oznaczają *pochodne formalne* funkcji f w punkcie a . Oczywiście, do ich zdefiniowania wystarczy istnienie pochodnych cząstkowych $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$.

Definicja 2.1.1. Mówimy, że funkcja f ma w punkcie a *pochodną zespoloną* $f'(a)$, jeżeli granica

$$f'(a) := \lim_{\mathbb{C} \ni h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

istnieje i jest skończona. Innymi słowy, f ma w punkcie a zespoloną różniczkę Frécheta $f'_{\mathbb{C}}(a)$ oraz $f'_{\mathbb{C}}(a)(Z) = f'(a)Z$, $Z \in \mathbb{C}$.

Propozycja 2.1.2. NWSR:

- (i) $f'(a)$ istnieje;
- (ii) $f'_{\mathbb{C}}(a)$ istnieje;
- (iii) $f'_{\mathbb{R}}(a)$ istnieje oraz jest operatorem $\mathbb{C}$ -liniowym;
- (iv) $f'_{\mathbb{R}}(a)$ istnieje oraz spełnione są równania Cauchy'ego–Riemanna

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0, \text{ czyli } \frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(a) = -\frac{\partial v}{\partial x}(a).$$

W szczególności, jeżeli $f'(a)$ istnieje, to $f'_{\mathbb{R}}(a)(Z) = f'(a)Z$ oraz

$$f'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \frac{\partial f}{\partial z}(a).$$

Przykład 2.1.3. Funkcja $f(x+iy) := \sqrt{|xy|}$, $z = x+iy \in \mathbb{C}$, ma w punkcie $a = 0$ obie pochodne cząstkowe ($\frac{\partial f}{\partial x}(0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0$), które spełniają oczywiście równania Cauchy'ego–Riemanna, ale $f'(0)$ nie istnieje.

Definicja 2.1.4. Niech $\mathcal{P}_n(\mathbb{C}) :=$ oznacza zbiór wszystkich wielomianów zespolonych jednej zmiennej zespolonej stopnia $\leq n$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), tzn. zbiór wszystkich funkcji postaci $\mathbb{C} \ni z \mapsto a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n \in \mathbb{C}$. Jest

⁽¹⁾ René Fréchet (1878–1973) — matematyk francuski.

to oczywiście zespolona przestrzeń wektorowa. Ponadto, $\mathcal{P}_n(\mathbb{C}) \subset \mathcal{P}_{n+1}(\mathbb{C})$. Połóżmy, $\mathcal{P}(\mathbb{C}) := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n(\mathbb{C})$. Jest to pierścień.

Niech $\mathcal{R}(\mathbb{C}) :=$ oznacza pierścień wszystkich funkcji wymiernych jednej zmiennej zespolonej, tzn. zbiór wszystkich ułamków L/M , gdzie $L, M \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$, $M \neq 0$. Każda funkcja wymierna jest funkcją ciągłą $\widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$.

Ćwiczenie 2.1.5. (a) Do różniczkowania zespolonego stosują się standardowe wzory na różniczkowanie sumy, iloczynu i ilorazu.

(b) Każdy wielomian $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ jest różniczkowalny w sensie zespolonym w każdym punkcie oraz $p'(z) = a_1 + 2a_2 z + \dots + na_n z^{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{C})$. Każda funkcja wymierna $L/M \in \mathcal{R}(\mathbb{C})$ jest różniczkowalna w sensie zespolonym w każdym punkcie $z \in \mathbb{C} \setminus M^{-1}(0)$.

(c) Niech $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ będzie odwzorowaniem bijektywnym na pewien zbiór otwarty $\Omega' \subset \mathbb{C}$ takim, że $f'(a)$ istnieje. Niech $b := f(a)$, $g := f^{-1} : \Omega' \rightarrow \Omega$. Wtedy NWSR:

(i) $g'(b)$ istnieje;

(ii) $f'(a) \neq 0$ oraz g jest ciągle w punkcie b .

Ponadto, $g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

(d) Jeżeli $f'(a)$ istnieje, to $\det f'_{\mathbb{R}}(a) = |f'(a)|^2 = |\det f'_{\mathbb{R}}(a)|^2$. Istotnie

$$\det f'_{\mathbb{R}}(a) = \det \begin{bmatrix} u'_x(a) & u'_y(a) \\ v'_x(a) & v'_y(a) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} u'_x(a) & -v'_x(a) \\ v'_x(a) & u'_x(a) \end{bmatrix} = (u'_x(a))^2 + (v'_x(a))^2 = |f'(a)|^2.$$

(e) Jeżeli $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ jest odwzorowaniem klasy $\mathcal{C}^1$ takim, że $f'(a)$ istnieje i $f'(a) \neq 0$, to dla pewnego otwartego otoczenia $U \subset \Omega$ punktu a , odwzorowanie $f|_U : U \rightarrow V$ jest $\mathcal{C}^1$ -dyfeomorfizmem na pewne otwarte otoczenie punktu $b := f(a)$ i jeżeli $g := (f|_U)^{-1}$, to $g'(b)$ istnieje i $g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

Przykład 2.1.6. (a) Funkcja $\exp$ ma pochodną zespoloną w dowolnym punkcie oraz $\exp'(z) = \exp(z)$, $z \in \mathbb{C}$.

Istotnie, ponieważ $\exp(x+iy) = e^x(\cos y + i \sin y)$, zatem funkcja $\exp$ jest klasy $\mathcal{C}^\omega(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$. Ponadto, dla $z = x + iy$, mamy

$$\frac{\partial \exp}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \exp}{\partial x}(z) + i \frac{\partial \exp}{\partial y}(z) \right) = \frac{1}{2} \left(e^x(\cos y + i \sin y) + i e^x(-\sin y + i \cos y) \right) = 0,$$

co oznacza, że w każdym punkcie spełnione są równania Cauchy'ego–Riemanna, czyli $\exp'(z)$ istnieje dla dowolnego z . Ponadto, $\exp'(z) = \frac{\partial \exp}{\partial x}(z) = \exp(z)$, $z \in \mathbb{C}$.

(b) Niech $D \subset \mathbb{C}_*$ będzie obszarem, w którym istnieje gałąź jednoznaczna logarytmu ℓ . Wtedy $\ell'(z) = 1/z$, $z \in D$.

Istotnie, niech $b \in D$, $a := \ell(b)$. Do funkcji $f := \exp$ stosujemy Ćwiczenie 2.1.5(e), z którego wnioskujemy, że $\ell'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{\exp(\ell(b))} = \frac{1}{b}$.

Ćwiczenie 2.1.7. $\sin' z = \cos z$, $\cos' z = -\sin z$, $z \in \mathbb{C}$.

Dla drogi (tzn. krzywej kawałkami klasy $\mathcal{C}^1$) $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ oraz funkcji ciągłej $f = u + iv : \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$ definiujemy

$$\int_{\gamma} f dz := \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} v dx + u dy = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Zauważmy, że

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \ell(\gamma) \|f\|_{\gamma^*},$$

gdzie

$$\ell(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} |\gamma'(t)| dt$$

oznacza długość krzywej γ , zaś dla $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ kładziemy

$$\|\varphi\|_A := \sup\{|\varphi(z)| : z \in A\}.$$

Propozycja 2.1.8 (Wzór Cauchy’ego–Greena ⁽²⁾). Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem p -spójnym, którego brzeg składa się z p dróg Jordana zorientowanych dodatnio względem D . Niech $f \in \mathcal{C}^1(\overline{D})$ ⁽³⁾. Wówczas

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \int_D \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \right), \quad z \in D.$$

W szczególności, jeżeli $f \in \mathcal{C}^1(\overline{D})$ oraz $f'(z)$ istnieje dla dowolnego $z \in D$, to

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in D.$$

Dowód. Ustalmy $K(a, \varepsilon) \subset\subset D$. Wówczas, na mocy wzoru Greena (zastosowanego do obszaru $D_\varepsilon := D \setminus \overline{K(a, \varepsilon)}$), mamy

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta - \int_{C(a, \varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta &= \int_{\partial D_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta = \int_{D_\varepsilon} d \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta \right) \\ &= - \int_{D_\varepsilon} \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} - \int_D \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}, \end{aligned}$$

przy czym okrąg $C(a, \varepsilon)$ utożsamiamy z krzywą $[0, 2\pi] \ni t \mapsto a + \varepsilon e^{it}$. Utożsamienie to będziemy stosować konsekwentnie w przyszłości.

Z drugiej strony,

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, \varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta - f(a) \right| \leq \max\{|f(\zeta) - f(a)| : \zeta \in C(a, \varepsilon)\} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} 0. \quad \square$$

Propozycja 2.1.9. Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem i niech $f = u + iv : D \rightarrow \mathbb{C}$ będzie ciągła. Wtedy NWSR:

- (i) dla dowolnych $a, b \in D$, całka $\int_a^b f(z) dz := \int_\gamma f(z) dz$ nie zależy od wyboru drogi γ łączącej a i b w D ;
- (ii) funkcja f posiada pierwotną zespoloną, tzn. istnieje funkcja $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ taka, że $F'(z) = f(z)$ dla dowolnego $z \in D$.

Dowód. (ii) $\implies$ (i):

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_\alpha^\beta F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_\alpha^\beta (F \circ \gamma)'(t) dt = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha)).$$

(i) $\implies$ (ii): Niezależność całki $\int_\gamma f(z) dz$ od drogi całkowania jest równoważna niezależności całek

$$\int_\gamma u dx - v dy, \quad \int_\gamma v dx + u dy$$

od drogi całkowania, co oznacza, że istnieją funkcje $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$ takie, że

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -v, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = v, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u.$$

Niech $F := \varphi + i\psi$. Wtedy F jest klasy $\mathcal{C}^1$, spełnia w każdym punkcie równania Cauchy’ego–Riemanna oraz $F' = \varphi'_x + i\psi'_x = u + iv = f$. $\square$

Propozycja 2.1.10 (Indeks punktu względem drogi zamkniętej). Niech $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ będzie dowolną drogą zamkniętą. Wtedy całka krzywoliniowa

$$\text{Ind}_\gamma(a) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - a} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a} dt, \quad a \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*,$$

nosząca nazwę indeksu punktu a względem drogi γ , przyjmuje wartości całkowite, stałe w każdej składowej spójnej zbioru $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, przy czym $\text{Ind}_\gamma = 0$ w składowej nieograniczonej zbioru $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

⁽²⁾ George Green (1793–1841) — matematyk i fizyk angielski.

⁽³⁾ Tzn. $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, gdzie $\Omega \subset \mathbb{C}$ jest zbiorem otwartym takim, że $\overline{D} \subset \Omega$.

Odnajdujemy, że $\text{Ind}_\gamma(a)$ jest oczywiście niezależny od zmiany parametryzacji drogi γ .

Dowód. Z twierdzenia o funkcjach danych całką wynika, że Ind_γ jest funkcją ciągłą. Ponadto,

$$|\text{Ind}_\gamma(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{\ell(\gamma)}{\text{dist}(a, \gamma^*)} \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0.$$

Pozostaje więc wykazać, że $\text{Ind}_\gamma(a) \in \mathbb{Z}$ dla dowolnego $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Ustalmy a i niech

$$h(x) := \int_0^x \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a} dt, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Jest to funkcja ciągła, różniczkowalna poza skończoną liczbą punktów, $h(0) = 0$, $h(1) = 2\pi i \text{Ind}_\gamma(a)$. Zauważmy, że

$$(e^{-h}(\gamma - a))' = e^{-h}(-h'(\gamma - a) + \gamma') = 0$$

poza skończoną liczbą punktów. Tak więc $e^{-h}(\gamma - a) = \text{const} = \gamma(0) - a$. Wynika stąd, że

$$e^h = \frac{\gamma - a}{\gamma(0) - a},$$

a stąd $e^{h(1)} = 1$, a więc $h(1) = 2\pi i \text{Ind}_\gamma(a) = 2\pi i k$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$. □

Ćwiczenie 2.1.11. (a)

$$\text{Ind}_{C(a,r)}(z) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } z \in K(a,r) \\ 0, & \text{gdy } z \notin \overline{K}(a,r) \end{cases}.$$

(b) Niech $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ będzie zamkniętą drogą Jordana zorientowaną dodatnio względem $\text{int } \gamma$. Wtedy

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } z \in \text{int } \gamma \\ 0, & \text{gdy } z \in \text{ext } \gamma \end{cases}.$$

Propozycja 2.1.12. Niech $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ będzie dowolną krzywą zamkniętą, niech $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ i niech $r := \text{dist}(a, \gamma^*)$. Niech $\sigma_j : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ będzie drogą zamkniętą taką, że $\|\sigma_j - \gamma\|_{[0,1]} \leq r/4$, $j = 1, 2$. Wtedy $\text{Ind}_{\sigma_1}(a) = \text{Ind}_{\sigma_2}(a)$. W szczególności, wzór

$$\text{Ind}_\gamma(a) := \lim_{\substack{\sigma - \text{droga zamknięta} \\ \|\sigma - \gamma\|_{[0,1]} \rightarrow 0}} \text{Ind}_\sigma(a), \quad a \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*,$$

definiuje $\text{Ind}_\gamma : \mathbb{C} \setminus \gamma^* \rightarrow \mathbb{Z}$ dla dowolnej krzywej zamkniętej $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$.

Dowód. Niech

$$\sigma := \frac{\sigma_1 - a}{\sigma_2 - a}.$$

Zauważmy, że

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{\frac{\sigma'_1(\sigma_2 - a) - (\sigma_1 - a)\sigma'_2}{(\sigma_2 - a)^2}}{\frac{\sigma_1 - a}{\sigma_2 - a}} = \frac{\sigma'_1}{\sigma_1 - a} - \frac{\sigma'_2}{\sigma_2 - a}.$$

Ponadto,

$$|\sigma - 1| = \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_2 - a} \right| \leq \frac{2r}{\frac{3}{4}r} = \frac{2}{3}.$$

Ostatecznie

$$\text{Ind}_{\sigma_1}(a) - \text{Ind}_{\sigma_2}(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \left(\frac{\sigma'_1(t)}{\sigma_1(t) - a} - \frac{\sigma'_2(t)}{\sigma_2(t) - a} \right) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} dt = \text{Ind}_\sigma(0) = 0. \quad \square$$

Twierdzenie 2.1.13 (Twierdzenie Cauchy’ego–Goursata ⁽⁴⁾). Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie otwarty i niech $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ będzie taka, że $f'(z)$ istnieje dla dowolnego $z \in \Omega$.

(a)

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0$$

dla dowolnego zwartego trójkąta $T = \text{conv}\{a, b, c\}$, przy czym ∂T rozumiemy jako łamaną zamkniętą $[a, b, c, a]$.

Wynik pozostaje prawdziwy dla wszystkich funkcji $f \in \mathcal{C}(T)$ takich, że $f'(z)$ istnieje dla dowolnego $z \in \text{int } T$.

(b) Niech $D \subset\subset \Omega$ będzie obszarem, którego brzeg składa się ze skończonej liczby łamanych Jordana ⁽⁵⁾ zorientowanych dodatnio względem D : tzn. $\partial D = \gamma_0^* \cup \dots \cup \gamma_{p-1}^*$, $\text{int } \gamma_j \subset\subset \text{int } \gamma_0$, $j = 1, \dots, p-1$, $\text{int } \gamma_j \subset\subset \text{ext } \gamma_k$, $j, k = 1, \dots, p-1$, $j \neq k$. Wtedy

$$\int_{\partial D} f(z) dz := \sum_{j=0}^{p-1} \int_{\gamma_j} f(z) dz = 0.$$

Wynik pozostaje prawdziwy dla wszystkich funkcji $f \in \mathcal{C}(\overline{D})$ takich, że $f'(z)$ istnieje dla dowolnego $z \in D$.

(c) Jeżeli założymy dodatkowo, że $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ ⁽⁶⁾, to dla dowolnego obszaru $D \subset\subset \Omega$, którego brzeg składa się ze skończonej liczby dróg Jordana zorientowanych dodatnio względem D , mamy

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 0.$$

Dowód. (a) Przypadek, w którym T jest zdegenerowany jest oczywisty (ĆWICZENIE). Dalej zakładamy, że T nie jest zdegenerowany. Trójkąt $T_0 := T$ dzielimy przy pomocy środków boków $p := \frac{1}{2}(a+b)$, $q := \frac{1}{2}(b+c)$, $r := \frac{1}{2}(c+a)$ na cztery trójkąty $T_{0,1} = \text{conv}\{a, p, r\}$, $T_{0,2} = \text{conv}\{p, b, q\}$, $T_{0,3} = \text{conv}\{q, c, r\}$, $T_{0,4} = \text{conv}\{p, r, q\}$. Wtedy

$$\int_{\partial T_0} f(z) dz = \sum_{j=1}^4 \int_{\partial T_{0,j}} f(z) dz.$$

Niech T_1 oznacza jeden spośród trójkątów $T_{0,1}, \dots, T_{0,4}$, dla którego

$$\left| \int_{\partial T_1} f(z) dz \right| = \max \left\{ \left| \int_{\partial T_{0,j}} f(z) dz \right| : j = 1, 2, 3, 4 \right\}.$$

Oczywiście,

$$\left| \int_{\partial T_0} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{\partial T_1} f(z) dz \right|.$$

Teraz powtarzamy rozumowanie rekurencyjnie i otrzymujemy zstępujący ciąg trójkątów $(T_j)_{j=1}^\infty$ taki, że $\ell(\partial T_j) = 2^{-j} \ell(\partial T_0)$ oraz

$$\left| \int_{\partial T_0} f(z) dz \right| \leq 4^j \left| \int_{\partial T_j} f(z) dz \right|, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Niech $\{a\} := \bigcap_{j=1}^\infty T_j$, $f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \alpha(z)(z-a)$, gdzie $\alpha(z) \rightarrow 0$ przy $z \rightarrow a$. Odnotujmy, że funkcja $z \mapsto f(a) + f'(a)(z-a)$ ma oczywiście pierwotną. Korzystając z Propozycji 2.1.9, mamy

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial T_0} f(z) dz \right| &\leq 4^j \left| \int_{\partial T_j} (f(a) + f'(a)(z-a) + \alpha(z)(z-a)) dz \right| = 4^j \left| \int_{\partial T_j} \alpha(z)(z-a) dz \right| \\ &\leq 4^j \ell(\partial T_j) \max\{|\alpha(z)(z-a)| : z \in \partial T_j\} \leq 4^j \ell^2(\partial T_j) \|\alpha\|_{\partial T_j} = \ell^2(\partial T_0) \|\alpha\|_{\partial T_j} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Jeżeli tylko założymy, że $f \in \mathcal{C}(T)$ oraz $f'(z)$ istnieje dla dowolnego $z \in \text{int } T$, to na podstawie poprzedniego dowodu, mamy $\int_{\partial T'} f(z) dz = 0$ dla dowolnego trójkąta $T' \subset \text{int } T$. Ustalmy punkt $d \in \text{int } T$

⁽⁴⁾ Edouard Goursat (1858–1936) — matematyk francuski.

⁽⁵⁾ Camille Jordan (1838–1922) — matematyk francuski.

⁽⁶⁾ W przyszłości zobaczymy, że założenie to jest automatycznie spełnione — Twierdzenie 2.2.5

i niech $T' = T'_s := \text{conv}\{a + s(d - a), b + s(d - b), c + s(d - c)\} \subset \text{int } T$, $s \in (0, 1)$. Pokażemy, że $\int_{\partial T'_s} f(z) dz \rightarrow \int_{\partial T} f(z) dz$ przy $s \rightarrow 0$ (co zakończy dowód). Mamy:

$$\begin{aligned} \left| \int_{[a+s(d-a), b+s(d-b)]} f(z) dz - \int_{[a, b]} f(z) dz \right| \\ \leq \int_0^1 |f(a + s(d - a) + t(1 - s)(b - a))(1 - s) - f(a + t(b - a))|(b - a) dt \xrightarrow{s \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

(wobec jednostajnej ciągłości f na T) i analogicznie dla pozostałych odcinków.

(b) Poprzez triangulację (ĆWICZENIE).

(c) Korzystamy ze wzoru Greena z Analizy oraz z równań Cauchy'ego–Riemanna:

$$\int_{\partial D} f(z) dz = \int_{\partial D} u dx - v dy + i \int_{\partial D} v dx + u dy = \int_D (-v'_x - u'_y) + i \int_D (u'_x - v'_y) = 0. \quad \square$$

Propozycja 2.1.14. Niech $G \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem gwiaździstym względem punktu c i niech $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją ciągłą taką, że $\int_{\partial T} f(z) dz = 0$ dla dowolnego zwartego trójkąta $T \subset G$ (np. $f'(z)$ istnieje dla dowolnego $z \in G$ — Twierdzenie 2.1.13). Wtedy f ma w G pierwotną zespoloną. W szczególności, na podstawie Propozycji 2.1.9, $\int_\gamma f(z) dz = 0$ dla dowolnej drogi zamkniętej w G .

Dowód. Zdefiniujemy

$$F(z) := \int_{[c, z]} f(\zeta) d\zeta, \quad z \in G.$$

Ustalmy $a \in G$. Korzystając z założenia o zerowaniu się całki po brzegu trójkąta, dla małych h mamy

$$\left| \frac{F(a + h) - F(a)}{h} - f(a) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_{[a, a+h]} (f(z) - f(a)) dz \right| \leq \max\{|f(z) - f(a)| : z \in [a, a + h]\} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \quad \square$$

Propozycja 2.1.15 (Wzór całkowy Cauchy'ego). (a) Niech $G \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem gwiaździstym i niech $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$ będzie dowolną drogą zamkniętą. Niech $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ będzie taka, że $f'(z)$ istnieje dla dowolnego $z \in G$. Wtedy

$$f(a) \text{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - a} dz, \quad a \in G \setminus \gamma^*.$$

(b) Niech $f : \bar{K}(a, r) \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją ciągłą taką, że $f'(z)$ istnieje dla dowolnego $z \in K(a, r)$. Wtedy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in K(a, r).$$

W szczególności, dla $z = a$ dostajemy:

- twierdzenie o wartości średniej po okręgu

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta =: \mathbf{J}(f; a, r),$$

oraz nierówność

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})| d\theta = \mathbf{J}(|f|; a, r),$$

- twierdzenie o wartości średniej po kole

$$f(a) = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r s ds \int_0^{2\pi} f(a + se^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r \int_0^{2\pi} f(a + se^{i\theta}) s d\theta ds = \frac{1}{\pi r^2} \int_{K(a, r)} f d\mathcal{L}^2 := \mathbf{A}(f; a, r),$$

oraz nierówność

$$|f(a)| \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{K(a, r)} |f| d\mathcal{L}^2 = \mathbf{A}(|f|; a, r).$$

Dowód. (a) Ustalmy punkt $a \in G \setminus \gamma^*$ i niech

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}, & \text{jeżeli } z \in G \setminus \{a\} \\ f'(a), & \text{jeżeli } z = a \end{cases}.$$

Oczywiście g jest ciągła oraz $g'(z)$ istnieje dla $z \in G \setminus \{a\}$. Na podstawie Twierdzenia 2.1.13(a) dostajemy $\int_{\partial T} g(z)dz = 0$ dla dowolnego zwanego trójkąta $T \subset G$. Teraz, na podstawie Propozycji 2.1.14,

$$0 = \int_{\gamma} g(z)dz = \int_{\gamma} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} dz,$$

a stąd

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(a)}{z - a} dz = f(a) \text{Ind}_{\gamma}(a).$$

(b) Ustalmy $z \in K(a, r)$. Na podstawie (a) mamy

$$f(z) = f(z) \text{Ind}_{C(a,s)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,s)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + se^{it})}{z - a - se^{it}} se^{it} dt, \quad |z - a| < s < r.$$

Teraz pozostaje przejście graniczne $s \rightarrow r$. Aby móc skorzystać z twierdzenia Lebesgue'a o zmajoryzowanym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki, wystarczy upewnić się, że funkcja podcałkowa ma całkowalną majorantę:

$$\left| \frac{f(a + se^{it})}{z - a - se^{it}} se^{it} \right| \leq \frac{\|f\|_{\overline{K}(a,r)}}{\varepsilon} r, \quad |z - a| + \varepsilon < s < r. \quad \square$$

Twierdzenie 2.1.16. Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie dowolnym obszarem i niech $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ będzie taka, że $f'(z)$ istnieje dla dowolnego $z \in D$. Niech $a, b \in D$ i niech $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow D$ będą dowolnymi drogami łączącymi a i b , które są homotopijne w D . Wtedy

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

Dowód. Niech $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow D$ będzie homotopią łączącą te drogi, tzn. H jest odwzorowaniem ciągłym takim, że $H(0, \cdot) = \gamma_0$, $H(1, \cdot) = \gamma_1$, $H(s, 0) = a$, $H(s, 1) = b$, $s \in [0, 1]$ ⁽⁷⁾. Ponieważ H jest jednostajnie ciągle, znajdziemy $\delta > 0$ takie, że jeżeli $|s' - s''| \leq \delta$ i $|t' - t''| \leq \delta$, to $|H(s', t') - H(s'', t'')| < r := \text{dist}(H([0, 1] \times [0, 1]), \partial D)$. Ustalmy $n \geq 1/\delta$ i niech $s_j = t_j := j/n$, $j = 0, \dots, n$. Niech $a_{j,k} = H(s_j, t_k)$ i niech σ_k oznacza łamaną $[a_{k,0}, a_{k,1}, \dots, a_{k,n-1}, a_{k,n}]$. Zauważmy, że $G_{j,k} := K(a_{j,k}, r) \subset D$, $G_{j,k}$ jest obszarem gwiazdzystym oraz $H(s, t) \in G_{j,k}$ dla $|s - s_j| \leq \delta$ i $|t - t_k| \leq \delta$, $j, k = 1, \dots, n$. Korzystając z Propozycji 2.1.14 wnioskujemy teraz, że $\int_{\gamma_0|_{[t_{k-1}, t_k]}} f(z)dz = \int_{[a_{0,k-1}, a_{0,k}]} f(z)dz$, $k = 1, \dots, n$, a stąd $\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\sigma_0} f(z)dz$. Podobnie, $\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\sigma_n} f(z)dz$. Teraz wystarczy wykazać, że $\int_{\sigma_{j-1}} f(z)dz = \int_{\sigma_j} f(z)dz$, $j = 1, \dots, n$. Wiemy, że

$$\int_{[a_{j-1,k-1}, a_{j-1,k}, a_{j,k}, a_{j,k-1}, a_{j-1,k-1}]} f(z)dz = 0, \quad j, k = 1, \dots, n.$$

Dodając te całki dla $k = 1, \dots, n$ i redukując całki po przeciwnie przebieganych odcinkach, dostajemy żądany wzór. $\square$

Jako natychmiastowy wniosek otrzymujemy:

Twierdzenie 2.1.17 (Twierdzenie Cauchy'ego–Goursata i wzór Cauchy'ego dla obszarów jednospójnych). Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem homotopijnie jednospójnym i niech $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ będzie taka, że $f'(z)$ istnieje dla

⁽⁷⁾ Odnótujemy, że $H(s, \cdot)$ nie musi być drogą dla $0 < s < 1$ — por. Ćwiczenie 2.1.18.

dowolnego $z \in D$. Wtedy całka $\int_{\gamma} f(z)dz$ zależy wyłącznie od końców drogi $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$ — zob. Propozycja 2.1.9. W szczególności,

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0 \quad \text{oraz} \quad f(a) \operatorname{Ind}_{\gamma}(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} d\zeta, \quad a \in D \setminus \gamma^*,$$

dla dowolnej drogi zamkniętej $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$.

Ćwiczenie 2.1.18. Niech D , γ_0 , γ_1 i H będą takie, jak w założeniach Twierdzenia 2.1.16. Korzystając z dowodu tego twierdzenia, pokazać, że istnieje homotopia $H_0 : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow D$ dróg γ_0 i γ_1 taka, że $H_0(s, \cdot)$ jest drogą dla dowolnego $0 < s < 1$.

Obserwacja 2.1.19. Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem i niech $f : D \rightarrow \mathbb{C}_*$ będzie taka, że $f'(z)$ istnieje dla dowolnego $z \in D$. Załóżmy, że L jest gałęzią jednoznacznej funkcji $\log f$ w D (tzn. $\exp L \equiv f$). Wtedy $L' = f'/f$. W szczególności, L jest pierwotną funkcji $\frac{f'}{f}$, co wobec Propozycji 2.1.9, oznacza, że dla dowolnych $a, b \in D$, całka $\int_a^b \frac{f'(z)}{f(z)} dz := \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ nie zależy od wyboru drogi γ łączącej a i b w D .

Istotnie, wiemy, że dla dowolnego $a \in D$, w pewnym otoczeniu punktu a mamy $L = \ell \circ f + 2k\pi i$, gdzie ℓ jest gałęzią logarytmu w otoczeniu $f(a)$, zaś $k \in \mathbb{Z}$ (Ćwiczenie 1.4.3). Pozostaje skorzystać z Przykładu 2.1.6(b).

Propozycja 2.1.20. Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem homotopijnie jednopójnym i niech $f : D \rightarrow \mathbb{C}_*$ będzie taka, że $f''(z)$ istnieje dla dowolnego $z \in D$ ⁽⁸⁾. Wtedy f ma w D jednoznaczną gałąź logarytmu L , która musi być postaci

$$L(z) = \int_a^z \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta + \operatorname{Log} f(a) + 2k\pi i, \quad z \in D,$$

dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.

Dowód. Funkcja f'/f ma w każdym punkcie obszaru D pochodną zespoloną. Pozwala to poprawnie określić funkcję

$$h(z) := \int_a^z \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta + \operatorname{Log} f(a), \quad z \in D,$$

gdzie a jest dowolnie ustalonym punktem z D . Wiemy, że $h' = f'/f$ w D , a stąd

$$(fe^{-h})' = f'e^{-h} - fe^{-h}h' \equiv 0.$$

Oznacza to, że

$$fe^{-h} = \operatorname{const} = f(a)e^{-h(a)} = f(a)e^{-\operatorname{Log} f(a)} = 1,$$

czyli $e^h \equiv f$. Tak więc h jest gałęzią jednoznacznej logarytmu f . Mamy $e^h = f = e^L$. Ostatecznie, $(h - L)/(2\pi i)$ jako funkcja ciągła o wartościach całkowitych, jest stała. $\square$

2.2. Funkcje holomorphyne

Definicja 2.2.1. Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie otwarty i niech $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Powiemy, że f jest *holomorphyne* w Ω ($f \in \mathcal{O}(\Omega)$), jeżeli dla dowolnego punktu $a \in \Omega$ istnieje szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ o dodatnim promieniu zbieżności R oraz liczba $0 < r \leq \min\{R, \operatorname{dist}(a, \partial\Omega)\}$ takie, że $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$, $z \in K(a, r)$.

Jeżeli $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, to mówimy, że f jest *funkcją całkowitą*.

Jeżeli $G \subset \mathbb{C}$ jest otwarty, zaś $f : \Omega \rightarrow G$ jest bijekcją taką, że $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $f^{-1} \in \mathcal{O}(G)$, to mówimy, że f jest odwzorowaniem *biholomorphyne*.

⁽⁸⁾ W przyszłości (Twierdzenie 2.2.5) zobaczymy, że istnienie $f''(z)$ dla dowolnego $z \in D$ wynika z istnienia $f'(z)$ dla dowolnego $z \in D$.

Propozycja 2.2.2. *Niech*

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n, \quad |z-a| < R.$$

gdzie R oznacza promień zbieżności szeregu potęgowego. Wtedy $f'(z)$ istnieje dla dowolnego $z \in K(a, R)$ oraz prawdziwy jest wzór na różniczkowanie pod znakiem szeregu

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-a)^{n-1}, \quad z \in K(a, R). \quad (')$$

Ponadto, promień zbieżności szeregu $(')$ jest równy R , co oznacza, że funkcja f ma w każdym punkcie $z \in K(a, r)$ wszystkie pochodne zespolone oraz

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} k! \binom{n}{k} a_n (z-a)^{n-k}, \quad z \in K(a, R).$$

W szczególności, $f \in C^\infty(K(a, R), \mathbb{C})$ oraz $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, czyli

$$f(z) = T_a f(z), \quad z \in K(a, R),$$

gdzie

$$T_a f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$$

oznacza szereg Taylora ⁽⁹⁾ funkcji f w punkcie a .

Dowód. ĆWICZENIE. □

Zdefiniujmy *promień zbieżności szeregu Taylora* funkcji f w punkcie a

$$d(T_a f) := \sup\{r \geq 0 : \text{szereg } T_a f(z) \text{ jest zbieżny jednostajnie w } \overline{K}(a, r)\}.$$

Wniosek 2.2.3. *Jeżeli $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, to f ma w każdym punkcie $z \in \Omega$ wszystkie pochodne zespolone, $f \in C^\omega(\Omega, \mathbb{C})$ oraz $f^{(k)} \in \mathcal{O}(\Omega)$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$.*

Lemat 2.2.4 (Lemat o produkcyjności funkcji holomorfe). *Niech $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ będzie dowolną drogą i niech $g : \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$ będzie dowolną funkcją ciągłą. Zdefiniujmy*

$$f(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*.$$

Wtedy $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \gamma^*)$,

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*, \quad k \in \mathbb{N},$$

tzn. prawdziwy jest wzór na różniczkowanie pod znakiem całki, oraz

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n = T_a f(z), \quad a \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*, \quad |z-a| < \text{dist}(a, \gamma^*).$$

W szczególności, $d(T_a f) \geq \text{dist}(a, \gamma^*)$, $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

⁽⁹⁾ Brook Taylor (1717–1783) — matematyk angielski.

Dowód. Ustalmy $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$, niech $r := \text{dist}(a, \gamma^*)$ i niech $0 < \theta < 1$. Wtedy dla $z \in K(a, \theta r)$ i $\zeta \in \gamma^*$ mamy

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}},$$

przy czym szereg jest zbieżny jednostajnie ponieważ $|\frac{z-a}{\zeta-a}| \leq \theta$. Wynika stąd, że

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \right) (z-a)^n, \quad z \in K(a, r). \quad \square$$

Twierdzenie 2.2.5 (Charakteryzacja funkcji holomorfcznych). *Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie otwarty i niech $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Wtedy NWSR:*

- (i) $f'(z)$ istnieje dla dowolnego $z \in \Omega$;
- (ii) $f'_{\mathbb{R}}(z)$ istnieje dla dowolnego $z \in \Omega$ oraz $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0$, $z \in \Omega$ (tzn. f spełnia w każdym punkcie równania Cauchy'ego–Riemanna);
- (iii) $f \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C})$ oraz $\int_{\partial T} f(z) dz = 0$ dla dowolnego trójkąta zwartego $T \subset \subset \Omega$ (równoważność (i) $\iff$ (iii) to tzw. twierdzenie Morera⁽¹⁰⁾);
- (iv) $f \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C})$ oraz dla dowolnego obszaru gwiaździstego $G \subset \Omega$ funkcja f ma w G pierwotną zespoloną;
- (v) $f \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C})$ oraz dla dowolnego koła $K(a, r) \subset \subset \Omega$ zachodzi wzór

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, r)} \frac{f(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta, \quad z \in K(a, r);$$

- (vi) dla dowolnego $a \in \Omega$ funkcja f ma w punkcie a wszystkie pochodne zespolone $f^{(n)}(a)$, $n \in \mathbb{N}$, oraz

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n, \quad |z-a| < \text{dist}(a, \partial\Omega);$$

- (vii) $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Dowód. (i) $\xLeftrightarrow{\text{Prop. 2.1.2}}$ (ii) $\xRightarrow{\text{Tw. 2.1.13}}$ (iii) $\xLeftrightarrow{\text{Prop. 2.1.14}}$ (iv) $\xRightarrow{(*)}$ (v) $\xRightarrow{\text{Lemat 2.2.4}}$ (vi) $\xRightarrow{\text{Def. 2.2.1}}$ (vii) $\xRightarrow{\text{Prop. 2.2.2}}$ (i), gdzie $(*)$ wynika z następującego rozumowania: Na podstawie Propozycji 2.1.15, (v) zachodzi dla funkcji F i $K(a, r) \subset \subset G$. Stąd, na podstawie implikacji (v) $\implies$ (vii), $F \in \mathcal{O}(G)$. Teraz, na podstawie Wniosku 2.2.3, $f'(z)$ istnieje dla dowolnego $z \in \Omega$ i możemy zastosować Propozycję 2.1.15 do f . $\square$

Obserwacja 2.2.6. Mając Twierdzenie 2.2.5, możemy „przetłumaczyć” szereg wyników formułowanych poprzednio dla funkcji mających w każdym punkcie pochodne zespolone na język funkcji holomorfcznych. Dotyczy to np. Propozycji 2.1.15, 2.1.17, 2.1.20.

Twierdzenie 2.2.7 (Twierdzenie Cauchy'ego–Goursata i wzór Cauchy'ego dla obszarów jednospójnych). *Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem homotopijnie jednospójnym i niech $f \in \mathcal{O}(D)$. Wtedy całka $\int_{\gamma} f(z) dz$ zależy wyłącznie od końców drogi $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$. W szczególności, $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ oraz*

$$f(a) \text{Ind}_{\gamma}(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} d\zeta, \quad a \in D \setminus \gamma^*,$$

dla dowolnej drogi zamkniętej $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$.

Propozycja 2.2.8. *Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem homotopijnie jednospójnym i niech $f : D \rightarrow \mathbb{C}_*$ będzie holomorfczna. Wtedy f ma w D jednoznaczną gałąź logarytmu L , która musi być postaci*

$$L(z) = \int_a^z \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta + \text{Log } f(a) + 2k\pi i, \quad z \in D,$$

dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. W szczególności, każda gałąź logarytmu f jest holomorfczna i $L' = \frac{f'}{f}$.

⁽¹⁰⁾ Giacinto Morera (1856–1909) — matematyk włoski.

Twierdzenie 2.2.9 (Twierdzenie Cauchy’ego–Goursata i wzór Cauchy’ego dla obszarów p -spójnych). *Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem p -spójnym takim, którego brzeg składa się z p dróg Jordana zorientowanych dodatnio względem D , tzn. $\partial D = \gamma_0^* \cup \dots \cup \gamma_{p-1}^*$, $\text{int } \gamma_j \subset \subset \text{int } \gamma_0$, $j = 1, \dots, p-1$, $\text{int } \gamma_j \subset \subset \text{ext } \gamma_k$, $j, k = 1, \dots, p-1$, $j \neq k$. Niech $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, gdzie $\Omega \supset \overline{D}$. Wtedy*

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 0 \text{ oraz } f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a} d\zeta, \quad a \in D.$$

Jeżeli ∂D składa się z p łamanych Jordana zorientowanych dodatnio względem D , to wynik pozostaje prawdziwy dla $f \in \mathcal{O}(D) \cap \mathcal{C}(\overline{D})$.

Dowód. Wynik wynika bezpośrednio z Twierdzenia 2.1.13 oraz faktu, że drugi ze wzorów jest konsekwencją pierwszego. Istotnie, ustalmy $a \in D$ i niech

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}, & \text{gdy } z \neq a \\ f'(a), & \text{gdy } z = a \end{cases}.$$

Wtedy $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ (odp. $g \in \mathcal{O}(D) \cap \mathcal{C}(\overline{D})$) (por. dowód Propozycji 2.1.15(a)). Na podstawie pierwszej części twierdzenia mamy $\int_{\partial D} g(z) dz = 0$, czyli

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(a)}{z-a} dz = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{f(a)}{z-a} dz = f(a) \sum_{j=0}^{p-1} \text{Ind}_{\gamma_j}(a) = f(a) \text{Ind}_{\gamma_0}(a) = f(a). \quad \square$$

Obserwacja 2.2.10. Zauważmy, że Twierdzenie 2.2.9 zachodzi dla $f \in \mathcal{O}(D) \cap \mathcal{C}(\overline{D})$ dla znacznie szerszej klasy obszarów, niż obszary p -spójne ograniczone łamanymi Jordana.

Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem p -spójnym takim, którego brzeg składa się z p dróg Jordana zorientowanych dodatnio względem D , $\partial D = \gamma_0^* \cup \dots \cup \gamma_{p-1}^*$. Przypuśćmy, że każdą z dróg γ_j możemy aproksymować ciągiem dróg Jordana $(\gamma_{j,k})_{k=1}^\infty$ w ten sposób, że:

- $\gamma_{j,k} \rightarrow \gamma_j$ jednostajnie na $[0, 1]$,
- jeżeli dla pewnego przedziału $[a, b] \subset [0, 1]$ funkcja $\gamma_j|_{(a,b)}$ przedłuża się do funkcji klasy $\mathcal{C}^1([a, b])$, to dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ funkcja $\gamma_{j,k}|_{(a,b)}$ przedłuża się do funkcji klasy $\mathcal{C}^1([a, b])$ oraz $\gamma'_{j,k} \rightarrow \gamma'_j$ jednostajnie na $[a, b]$,
- dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$, drogi Jordana $\gamma_{0,k}, \dots, \gamma_{p-1,k}$ ograniczają pewien obszar p -spójny D_k w ten sposób, że $D_k \subset \subset D$.

Wtedy dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{O}(D) \cap \mathcal{C}(\overline{D})$ mamy $\int_{\partial D_k} f(z) dz = 0$, $k \in \mathbb{N}$, a stąd $\int_{\partial D_k} f(z) dz \rightarrow \int_{\partial D} f(z) dz$. Istotnie, jeżeli przedział $[a, b] \subset [0, 1]$ jest jak powyżej, to

$$\int_{\gamma_{j,k}|_{[a,b]}} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma_{j,k}(t)) \gamma'_{j,k}(t) dt \rightarrow \int_a^b f(\gamma_j(t)) \gamma'_j(t) dt = \int_{\gamma_j|_{[a,b]}} f(z) dz,$$

przy czym zbieżność całek wynika z jednostajnej zbieżności funkcji podcałkowych.

Pytanie dla jakiej klasy obszarów taka aproksymacja ma miejsce pozostawiamy jako ĆWICZENIE. W tej chwili zauważmy tylko, że tak jest jeżeli każda droga Jordana γ_j jest ściśle gwiazdzista względem pewnego punktu $a_j \in \text{int } \gamma_j$ w tym sensie, że:

$$\gamma_{0,k}(t) := a_0 + (1 - 1/k)(\gamma_0(t) - a_0) \in \text{int } \gamma_0, \quad \gamma_{j,k}(t) := a_j + (1 + 1/k)(\gamma_j(t) - a_j) \in \text{ext } \gamma_j, \\ t \in [0, 1], \quad j = 1, \dots, p-1, \quad k \gg 1.$$

Wiemy również z Analizy, że tak jest jeżeli każda droga γ_j jest klasy $\mathcal{C}^1$ i $\gamma'_j(t) \neq 0$, $t \in [0, 1]$, oraz $\gamma'_j(0) = \gamma'_j(1)$, $j = 0, \dots, p-1$.

2.3. Podstawowe własności funkcji holomorfcznych

Jako natychmiastowe wnioski z Twierdzenia 2.2.5 dostajemy.

Propozycja 2.3.1. (a) $\mathcal{O}(\Omega)$ jest algebrą.

(b) Złożenie funkcji holomorfcznych jest funkcją holomorfczną.

(c) Jeżeli $f : \Omega \rightarrow G$ jest bijekcją, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ oraz $f'(z) \neq 0$, $z \in \Omega$ ⁽¹¹⁾, to $f^{-1} \in \mathcal{O}(G)$.

Propozycja 2.3.2 (Twierdzenie Weierstrassa ⁽¹²⁾). Niech $(f_k)_{k=1}^\infty \subset \mathcal{O}(\Omega)$ i niech $f_k \rightarrow f_0$ niemal jednostajnie w Ω . Wtedy $f_0 \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Dowód. Oczywiście $f_0 \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C})$. Ponadto, dla dowolnego koła $K(a, r) \subset \subset \Omega$ mamy

$$f_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, r)} \frac{f_k(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta, \quad z \in K(a, r), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ponieważ $f_k \rightarrow f_0$ jednostajnie na $C(a, r)$, dostajemy

$$f_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, r)} \frac{f_0(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta, \quad z \in K(a, r).$$

Teraz wystarczy skorzystać z Twierdzenia 2.2.5(v). □

Lemat 2.3.3. Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem i niech $f = u + iv \in \mathcal{O}(D)$. Jeżeli $|f| = \text{const}$, to $f = \text{const}$.

Dowód. Niech $u^2 + v^2 = c = \text{const}$. Przypadek $c = 0$ jest trywialny. Załóżmy więc, że $c > 0$. Różniczkując dostajemy

$$uu'_x + vv'_x = 0,$$

$$uu'_y + vv'_y = 0,$$

co, wobec równań Cauchy'ego–Riemanna, daje

$$uu'_x - vu'_y = 0,$$

$$vu'_x + uu'_y = 0.$$

Wyznacznik tego układu to $u^2 + v^2 \neq 0$. Wynika stąd, że $u'_x = u'_y = v'_x = v'_y = 0$, a więc $f = \text{const}$. □

Propozycja 2.3.4 (Zasada identyczności). Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem i niech $f, g \in \mathcal{O}(D)$,

$$A := \{z \in D : f(z) = g(z)\}.$$

Jeżeli zbiór A ma punkt skupienia w D , to $f \equiv g$.

W szczególności, jeżeli $f \in \mathcal{O}(D)$, $f \not\equiv 0$, to zbiór $f^{-1}(0)$ składa się z punktów izolowanych.

Dowód. Zastępując (f, g) przez $(f - g, 0)$, redukujemy pytanie do przypadku $g \equiv 0$. Niech

$$D_0 := \{a \in D : \exists r_{>0} : f = 0 \text{ w } K(a, r)\}.$$

Zbiór $D_0 \subset A$ jest oczywiście otwarty. Aby zobaczyć, że jest niepusty, niech a będzie punktem skupienia zbioru A , tzn. dla pewnego ciągu $(a_k)_{k=1}^\infty \subset A \setminus \{a\}$ mamy $a_k \rightarrow a$. Mamy oczywiście $f(a) = 0$. Niech

$$k := \sup\{n \in \mathbb{Z}_+ : \forall 0 \leq m \leq n : f^{(m)}(a) = 0\}.$$

Jeżeli $k = +\infty$, to $T_a f = 0$, a stąd $f = 0$ w $K(a, d_\Omega(a)) =: K(a, R)$. Przypuśćmy, że $k < +\infty$. Ponieważ $f(z) = T_a f(z)$, $z \in K(a, R)$, wnioskujemy, że $f(z) = (z - a)^k \tilde{f}(z)$, $z \in K(a, R)$, gdzie $\tilde{f} \in \mathcal{O}(K(a, R))$, $\tilde{f}(a) \neq 0$. Z drugiej strony, ponieważ $f(a_k) = 0$, dostajemy $\tilde{f}(a_k) = 0$, $k \in \mathbb{N}$. Wynika stąd, że $\tilde{f}(a) = 0$, co prowadzi do sprzeczności.

Powyższe rozumowanie pokazuje również, że zbiór A jest domknięty w D , a więc $D_0 = D$. □

⁽¹¹⁾ W przyszłości zobaczymy (Propozycja 3.5.3), że jeżeli $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ jest iniektywnym odwzorowaniem holomorfcznym, to $f'(z) \neq 0$, $z \in \Omega$.

⁽¹²⁾ Karl Weierstrass (1815–1897) — matematyk niemiecki.

Obserwacja 2.3.5. Niech P będzie wielomianem zespolonym dwóch zmiennych zespolonych. Wobec zasady identyczności, jeżeli $P(\sin x, \cos x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R}$, to $P(\sin z, \cos z) = 0$ dla $z \in \mathbb{C}$.

Obserwacja ta pozwala na „automatyczne” przenoszenie wzorów trygonometrycznych z przypadku rzeczywistego na zespolony.

ĆWICZENIE: Czy da się na tej drodze uzyskać wzór $\operatorname{tg} 2z = \frac{2 \operatorname{tg} z}{1 - \operatorname{tg}^2 z}$?

Ćwiczenie 2.3.6. Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem otwartym i niech $f \in \mathcal{C}^\omega(I, \mathbb{C})$. Wtedy istnieją obszar $D \subset \mathbb{C}$ i funkcja $\tilde{f} \in \mathcal{O}(D)$ takie, że $D \cap \mathbb{R} = I$ oraz $\tilde{f} = f$ na I .

Propozycja 2.3.7 (Zasada maksimum). Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem, $f \in \mathcal{O}(D)$, $f \neq \text{const}$. Wtedy:

- (a) $|f|$ nie przyjmuje w D maksimum lokalnego.
- (b) $|f|$ nie przyjmuje minimum lokalnego w żadnym punkcie $a \in D$ takim, że $f(a) \neq 0$.
- (c) Jeżeli D jest ograniczony, to

$$|f(z)| < \sup_{w \rightarrow \zeta} \{\limsup |f(w)| : \zeta \in \partial D\}, \quad z \in D.$$

- (d) Jeżeli D jest ograniczony oraz $|f|$ przedłuża się do funkcji półciągłej z góry na $\overline{D}$, to

$$|f(z)| < \max_{\overline{D}} |f|, \quad z \in D.$$

Dowód. (a) Przypuśćmy, że $|f(z)| \leq |f(a)|$, $z \in K(a, r) \subset\subset D$. Na podstawie Propozycji 2.1.15(b) mamy

$$|f(a)| \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{K(a, r)} |f| d\mathcal{L}^2 \leq |f(a)|.$$

Wynika stąd, iż $|f(z)| = |f(a)|$ dla prawie wszystkich $z \in K(a, r)$, co wobec ciągłości funkcji f , implikuje, że $|f(z)| = |f(a)|$ dla wszystkich $z \in K(a, r)$. Teraz, korzystając z Lematu 2.3.3 wnioskujemy, że $f = \text{const}$ na $K(a, r)$, i ostatecznie, na podstawie zasady identyczności, że $f \equiv \text{const}$ w D ; sprzeczność.

(b) Stosujemy (a) do funkcji $1/f$ (określonej w otoczeniu punktu a).

(c) Ustalmy $z_0 \in D$ i niech $(D_k)_{k=1}^\infty$ będzie ciągiem obszarów takim, że $z_0 \in D_1 \subset D_k \subset D_{k+1} \subset\subset D$, $D = \bigcup_{k=1}^\infty D_k$. Dla każdego k istnieje punkt $w_k \in \overline{D}_k$ taki, że $|f(w_k)| = \max_{\overline{D}_k} |f|$. Wobec (a) oraz zasady identyczności, mamy $|f(z_0)| < |f(w_k)| \leq |f(w_{k+1})|$. Przechodząc do podciągu, możemy założyć, że $w_k \rightarrow \zeta \in \partial D$. Wtedy $|f(z_0)| < \limsup_{k \rightarrow +\infty} |f(w_k)| \leq \limsup_{w \rightarrow \zeta} |f(w)|$.

(d) wynika z (c). □

Dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset \mathbb{C}$ niech

$$K^{(r)} := \bigcup_{a \in K} \overline{K}(a, r).$$

Zauważmy, że $K^{(r)}$ jest również zbiorem zwartym (ĆWICZENIE).

Dla zbioru otwartego $\Omega \subset \mathbb{C}$ niech $d_\Omega(a) := \sup\{r > 0 : K(a, r) \subset \Omega\}$, $a \in \Omega$. Oczywiście, $d_\Omega(a) = \operatorname{dist}(a, \partial\Omega)$ o ile $\Omega \neq \mathbb{C}$ i $d_\mathbb{C} \equiv +\infty$. Jeżeli $\Omega \neq \mathbb{C}$, to $|d_\Omega(a) - d_\Omega(b)| \leq |a - b|$, $a, b \in \Omega$; w szczególności, d_Ω jest funkcją ciągłą.

Dla dowolnego zbioru $A \subset \Omega$ niech $d_\Omega(A) := \inf\{d_\Omega(a) : a \in A\}$. Zauważmy, że $K^{(r)} \subset \Omega$ dla $0 < r < d_\Omega(K)$ (ĆWICZENIE).

Propozycja 2.3.8 (Nierówności Cauchy’ego). (a) Niech $f \in \mathcal{O}(K(a, r))$, $|f| \leq C$. Wtedy

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{r^n} C, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(b) Niech $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Wtedy dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset\subset \Omega$ oraz $0 < r < d_\Omega(K)$ mamy

$$\|f^{(n)}\|_K \leq \frac{n!}{r^n} \|f\|_{K^{(r)}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dowód. (a) Na podstawie Propozycji 2.1.15 i Lematu 2.2.4, dla dowolnego $0 < s < r$, mamy

$$|f^{(n)}(a)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{C(a,s)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(a + se^{i\theta})|}{s^n} d\theta \leq \frac{n!}{s^n} C, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(b) wynika z (a). $\square$

Wniosek 2.3.9 (Twierdzenie Weierstrassa). *Niech $(f_k)_{k=1}^\infty \subset \mathcal{O}(\Omega)$ i niech $f_k \rightarrow f_0$ niemal jednostajnie w Ω . Wtedy $f_0 \in \mathcal{O}(\Omega)$ oraz, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, mamy $f_k^{(n)} \rightarrow f_0^{(n)}$ niemal jednostajnie w Ω .*

Dla zbioru $\Omega \subset \mathbb{C}$ niech $L_h^p(\Omega) := L^p(\Omega) \cap \mathcal{O}(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$. $\mathcal{H}^\infty(\Omega) := L_h^\infty(\Omega)$ to przestrzeń funkcji holomorfcznych ograniczonych. $L_h^2(\Omega)$ jest przestrzenią unitarną z iloczynem skalarnym

$$L_h^2(\Omega) \times L_h^2(\Omega) \ni (f, g) \mapsto \int_\Omega f \bar{g} d\mathcal{L}^2.$$

Propozycja 2.3.10. *Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie zbiorem otwartym.*

(a) *Dla dowolnego zbioru zwanego $K \subset \Omega$ mamy*

$$\|f\|_K \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{K(r)} |f| d\mathcal{L}^2, \quad f \in \mathcal{O}(\Omega), \quad 0 < r < d_\Omega(K).$$

(b) *Dla dowolnego zbioru zwanego $K \subset \Omega$ mamy*

$$\|f\|_K \leq \frac{1}{\pi r^2} (\mathcal{L}(K(r)))^{1/q} \left(\int_{K(r)} |f|^p d\mathcal{L}^2 \right)^{1/p}, \quad f \in \mathcal{O}(\Omega), \quad 0 < r < d_\Omega(K), \quad 1 \leq p < +\infty,$$

gdzie $1/p + 1/q = 1$.

(c) $L_h^p(\Omega)$ jest przestrzenią Banacha, $1 \leq p \leq +\infty$.

(d) $L_h^2(\Omega)$ jest przestrzenią Hilberta.

Dowód. (a) wynika natychmiast z nierówności $|f(a)| \leq \mathbf{A}(|f|; a, r)$, $0 < r < d_\Omega(a)$, $a \in K$.

(b) wynika z (a) i nierówności Höldera ⁽¹³⁾.

(c) i (d) wynikają z (b) i twierdzenia Weierstrassa. $\square$

Obserwacja 2.3.11. Dla $f(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k(z - a)^k \in \mathcal{O}(K(a, r))$ i $0 < s < r$ mamy

$$\mathbf{J}(|f|^2; a, s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + se^{i\theta})|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi} \sum_{k, \ell=0}^\infty a_k \bar{a}_\ell s^{k+\ell} \int_0^{2\pi} e^{i(k-\ell)\theta} d\theta = \sum_{k=0}^\infty |a_k|^2 s^{2k}.$$

Zauważmy, że powyższa równość daje alternatywny dowód zasady maksimum: jeżeli $|f(z)| \leq |f(a)|$, $z \in K(a, r)$, to

$$\sum_{k=0}^\infty |a_k|^2 s^{2k} = \mathbf{J}(|f|^2; a, s) \leq |f(a)|^2 = |a_0|^2, \quad 0 < s < r,$$

a stąd $a_k = 0$, $k = 1, 2, \dots$, a więc f jest stała. Z równości tej dostajemy również alternatywny dowód nierówności Cauchy'ego: jeżeli $|f(z)| \leq C$, $z \in K(a, r)$, to

$$\sum_{k=0}^\infty |a_k|^2 s^{2k} = \mathbf{J}(|f|^2; a, s) \leq C^2, \quad 0 < s < r, \quad \text{a stąd } |a_k| \leq \frac{C}{r^k}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Zauważmy, że dla $0 < s < r$ mamy

$$\mathbf{A}(|f|^2; a, s) = \frac{1}{\pi s^2} \int_0^s \left(\int_0^{2\pi} |f(a + \tau e^{i\theta})|^2 d\theta \right) \tau d\tau = \frac{1}{\pi s^2} \int_0^s 2\pi \sum_{k=0}^\infty |a_k|^2 \tau^{2k+1} d\tau = \sum_{k=0}^\infty |a_k|^2 \frac{s^{2k}}{k+1},$$

⁽¹³⁾ Otto Hölder (1859–1937) — matematyk niemiecki.

skąd wynika, że

$$\int_{K(r)} |f|^2 d\mathcal{L}^2 = \pi \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \frac{r^{2k+2}}{k+1}.$$

Podobnie, dla $0 < s < r$ mamy

$$\int_{K(s)} f(z) \bar{z}^k d\mathcal{L}^2(z) = \int_{K(s)} a_k |z^k|^2 d\mathcal{L}^2 = \pi a_k \frac{s^{2k+2}}{k+1}.$$

W szczególności, ciąg $(z^k)_{k=0}^{\infty}$ stanowi układ ortogonalny zupełny w $L_h^2(K(r))$ oraz

$$\int_{K(r)} |f|^2 d\mathcal{L}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{K(r)} |a_k z^k|^2 d\mathcal{L}^2 = \pi \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \frac{r^{2k+2}}{k+1}.$$

Propozycja 2.3.12 (Twierdzenie Liouville'a ⁽¹⁴⁾). *Niech $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Wtedy $f \in \mathcal{P}_d(\mathbb{C})$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnych stałych $R, C > 0$ mamy:*

$$|f(z)| \leq C|z|^d, \quad |z| \geq R, \quad (2.3.1)$$

lub, równoważnie,

$$|f(z)| \leq M(1 + |z|)^d, \quad z \in \mathbb{C},$$

dla pewnej stałej $M > 0$.

Dowód. Sprawdzenie, że każdy wielomian zespolony spełnia (2.3.1) pozostawiamy jako ĆWICZENIE.

Założmy teraz, że nierówność (2.3.1) jest spełniona. Wiemy, że $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$, gdzie, na podstawie nierówności Cauchy'ego, dla $r \geq R$ i $n > d$ mamy

$$|a_n| = \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| \leq \frac{Cr^d}{r^n} = Cr^{d-n} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0. \quad \square$$

Propozycja 2.3.13 (Lemat Schwarza ⁽¹⁵⁾). (a) *Niech $f \in \mathcal{O}(K(r))$, $|f| \leq C$, $f(0) = 0$. Wtedy*

$$|f(z)| \leq C|z|/r, \quad z \in \mathbb{D}, \quad |f'(0)| \leq C/r$$

Ponadto, jeżeli $|f(z_0)| = C|z_0|/r$ dla pewnego $z_0 \in K_(r)$ lub też $|f'(0)| = C/r$, to $f(z) = Ce^{i\theta_0} z/r$, $z \in K(r)$, dla pewnego $\theta_0 \in \mathbb{R}$.*

(b) *Niech $f \in \mathcal{O}(K(r))$, $|f| \leq C$, $f(0) = \dots = f^{(k-1)}(0) = 0$ ($k \in \mathbb{N}$). Wtedy*

$$|f(z)| \leq C(|z|/r)^k, \quad z \in \mathbb{D}, \quad |f^{(k)}(0)| \leq k!C/r^k.$$

Ponadto, jeżeli $|f(z_0)| = C(|z_0|/r)^k$ dla pewnego $z_0 \in K_(r)$ lub $|f^{(k)}(0)| = k!C/r^k$, to $f(z) = Ce^{i\theta_0} (z/r)^k$, $z \in K(r)$, dla pewnego $\theta_0 \in \mathbb{R}$.*

Dowód. (a) wynika z (b).

(b) Niech

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)}{z^k}, & z \in K_*(r) \\ \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, & z = 0 \end{cases}, \quad z \in K(r).$$

Oczywiście $g \in \mathcal{O}(K(r))$ (ĆWICZENIE). Ponadto, na podstawie zasady maksimum, mamy

$$|g(z)| \leq \sup_{\zeta \in C(r)} \limsup_{w \rightarrow \zeta} |g(w)| \leq C/r^k, \quad z \in K(r),$$

skąd natychmiast wynika teza. □

⁽¹⁴⁾ Joseph Liouville (1809–1882) — matematyk francuski.

⁽¹⁵⁾ Hermann Schwarz (1789–1857) — matematyk niemiecki.

Dla dowolnego obszaru $D \subset \mathbb{C}$ niech $\text{Aut}(D)$ oznacza zbiór wszystkich odwzorowań biholomorficznych $f : D \rightarrow D$. Jest to oczywiście grupa (ze składaniem). Przypomnijmy (Obserwacja 1.3.1(10)), że grupa $\text{Aut}_{\mathcal{H}}(\mathbb{D})$ składająca się ze wszystkich homografii przekształcających $\mathbb{D}$ na $\mathbb{D}$ ma postać

$$\text{Aut}_{\mathcal{H}}(\mathbb{D}) = \{\zeta h_a : \zeta \in \mathbb{T}, a \in \mathbb{D}\},$$

gdzie

$$h_a(z) := \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{1/\bar{a}\}.$$

Zauważmy, że $(h_a)^{-1} = h_{-a}$. Ponadto,

$$h'_a(z) = \frac{1 - \bar{a}z - (z - a)(-\bar{a})}{(1 - \bar{a}z)^2} = \frac{1 - |a|^2}{(1 - \bar{a}z)^2}.$$

W szczególności, $h'_a(a) = \frac{1}{1 - |a|^2}$.

Propozycja 2.3.14. $\text{Aut}(\mathbb{D}) = \text{Aut}_{\mathcal{H}}(\mathbb{D})$. W szczególności, grupa $\text{Aut}(\mathbb{D})$ działa tranzytywnie na $\mathbb{D}$.

Dowód. Ustalmy $g \in \text{Aut}(\mathbb{D})$. Wtedy $f := h_{g(0)} \circ g \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ oraz $f(0) = 0$. Wystarczy więc pokazać, że zbiór $\text{Aut}_0(\mathbb{D}) := \{f \in \text{Aut}(\mathbb{D}) : f(0) = 0\}$ to grupa obrotów. Z lematu Schwarza zastosowanego do f i do f^{-1} wnioskujemy, że $|f(z)| = |z|$, $z \in \mathbb{D}$, skąd natychmiast wynika teza. $\square$

Zdefiniujmy

$$\mathbf{m}(z', z'') := \left| \frac{z' - z''}{1 - \bar{z}'z''} \right| = |h_{z''}(z')|, \quad z', z'' \in \mathbb{D}, \quad \gamma(z) := \frac{1}{1 - |z|^2} = h'_z(z), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Lemat 2.3.15 (Lemat Schwarza-Picka⁽¹⁶⁾). Niech $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. Wtedy:

- (a) $\mathbf{m}(f(z'), f(z'')) \leq \mathbf{m}(z', z'')$, $z', z'' \in \mathbb{D}$.
- (b) $\gamma(f(z))|f'(z)| \leq \gamma(z)$, $z \in \mathbb{D}$.
- (c) *NWSR*:
 - (i) $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$;
 - (ii) $\mathbf{m}(f(z'), f(z'')) = \mathbf{m}(z', z'')$, $z', z'' \in \mathbb{D}$;
 - (iii) $\mathbf{m}(f(z'_0), f(z''_0)) = \mathbf{m}(z'_0, z''_0)$ dla pewnych $z'_0, z''_0 \in \mathbb{D}$, $z'_0 \neq z''_0$;
 - (iv) $\gamma(f(z))|f'(z)| = \gamma(z)$, $z \in \mathbb{D}$;
 - (v) $\gamma(f(z_0))|f'(z_0)| = \gamma(z_0)$ dla pewnego $z_0 \in \mathbb{D}$.

Dowód. (a) Ustalmy $z'_0, z''_0 \in \mathbb{D}$ i zdefiniujmy $g := h_{f(z''_0)} \circ f \circ h_{-z''_0}$. Wtedy $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ oraz $g(0) = 0$. Stąd, na podstawie lematu Schwarza, $|g(z)| \leq |z|$, $z \in \mathbb{D}$. Podstawiając $z := h_{z''_0}(z'_0)$ dostajemy

$$\mathbf{m}(f(z'_0), f(z''_0)) = |h_{f(z''_0)}(f(z'_0))| = |h_{f(z''_0)} \circ f \circ h_{-z''_0} \circ h_{z''_0}(z'_0)| \leq |h_{z''_0}(z'_0)| = \mathbf{m}(z'_0, z''_0).$$

(b) Ustalmy $z_0 \in \mathbb{D}$ i niech $g := h_{f(z_0)} \circ f \circ h_{-z_0}$. Wtedy $g(0) = 0$, więc na mocy lematu Schwarza mamy $|g'(0)| \leq 1$, czyli

$$1 \geq |h'_{f(z_0)}(f(z_0))f'(z_0)h'_{-z_0}(0)| = \frac{1}{1 - |f(z_0)|^2} |f'(z_0)|(1 - |z_0|^2) = \gamma(f(z_0))|f'(z_0)| \frac{1}{\gamma(z_0)},$$

co natychmiast daje (b).

(c) Implikacje (i) $\implies$ (ii) (odp. (i) $\implies$ (iv)) wynikają z (a) (odp. (b)). Implikacje (ii) $\implies$ (iii) (odp. (iv) $\implies$ (v)) są trywialne. Jeżeli zachodzi (iii), to funkcja g zdefiniowana w dowodzie (a) spełnia równość $|g(z_0)| = |z_0|$ dla $z_0 := h_{z''_0}(z'_0) \neq 0$. Z lematu Schwarza wynika więc, że g jest obrotem, a więc, w szczególności, automorfizmem $\mathbb{D}$. Pozostaje zauważyć, że ze wzoru na g wynika teraz, że f musi być automorfizmem $\mathbb{D}$. Jeżeli zachodzi (v), to funkcja g zdefiniowana w dowodzie (b) spełnia warunek $|g'(0)| = 1$. Jest więc automorfizmem. Dalej postępujemy, jak powyżej. $\square$

⁽¹⁶⁾ Georg Pick (1859–1942) — matematyk austriacki.

2.4. Rodziny normalne, twierdzenia Montela i Vitalego

Definicja 2.4.1. Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem. Powiemy, że rodzina $\mathcal{R} \subset \mathcal{O}(D)$ jest *normalna*, jeżeli z dowolnego ciągu $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{R}$ można wybrać podciąg $(f_{n_k})_{k=1}^\infty$ taki, że $f_{n_k} \rightarrow f$ niemal jednostajnie w D ⁽¹⁷⁾, gdzie albo $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, albo $f \equiv \infty$.

Lemat 2.4.2. Każda rodzina lokalnie normalna jest normalna.

Dowód. Dla $a \in D$ niech $U_a \subset D$ będzie kołem o środku w punkcie a takim, że rodzina $\mathcal{R}|_{U_a}$ jest normalna. Na podstawie twierdzenia Lindelöfa, istnieje ciąg $(a_k)_{k=1}^\infty \subset D$ taki, że $D = \bigcup_{k=1}^\infty U_{a_k}$. Ustalmy dowolny ciąg $(f_{0,n})_{n=1}^\infty \subset \mathcal{R}$. Dla $k \in \mathbb{N}$, niech $(f_{k,n})_{n=1}^\infty$ będzie podciągiem ciągu $(f_{k-1,n})_{n=1}^\infty$ takim, że $f_{k,n} \rightarrow f_k$ niemal jednostajnie na U_{a_k} . Przekątniowa metoda wyboru daje podciąg $(f_{n_\ell})_{\ell=1}^\infty$ taki, że $f_{n_\ell} \rightarrow f_k$ niemal jednostajnie na U_{a_k} . Korzystając z tego, że D jest obszarem, bez trudu wykluczamy sytuację, w której $f_{k'}(U_{a_{k'}}) \subset \mathbb{C}$ ale $f_{k''} \equiv \infty$ dla pewnych k', k'' (ĆWICZENIE). $\square$

Propozycja 2.4.3 (Twierdzenie Montela ⁽¹⁸⁾). Niech $(f_k)_{k=1}^\infty \subset \mathcal{O}(\Omega)$ będzie ciągiem lokalnie ograniczonym. Wtedy istnieje podciąg $(f_{k_n})_{n=1}^\infty$ zbieżny niemal jednostajnie na Ω .

W szczególności, dla dowolnego obszaru $D \subset \mathbb{C}$, każda niemal jednostajnie ograniczona rodzina $\mathcal{R} \subset \mathcal{O}(D)$ jest normalna.

Dowód. Na wstępie zauważmy, że ciąg $(f_k)_{k=1}^\infty$ jest rodziną równociągłą. Istotnie, jeżeli $K(a, 2r) \subset\subset \Omega$ i $|f_k(\zeta)| \leq C$, $\zeta \in C(a, 2r)$, $k \in \mathbb{N}$, to dla $z \in K(a, r)$ mamy

$$|f_k(z) - f_k(a)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, 2r)} f_k(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - a} \right) d\zeta \right| \leq \frac{C}{2\pi} |z - a| \int_0^{2\pi} \frac{1}{|a + 2re^{i\theta} - z|} d\theta \leq \frac{C}{r} |z - a|.$$

Niech $A \subset \Omega$ będzie dowolnym zbiorem przeliczalnym gęstym. Stosując przekątniową metodę wyboru dostajemy podciąg $(f_{k_n})_{n=1}^\infty$, który jest zbieżny punktowo na A . Wobec równociągłości, podciąg ten musi być lokalnie jednostajnie zbieżny. Istotnie, niech $K(a, r) \subset\subset \Omega$ dla pewnego $a \in A$, i niech $\varepsilon > 0$. Wobec równociągłości, istnieje $0 < \delta \leq r$ taka, że $|f_{k_n}(z) - f_{k_n}(a)| \leq \varepsilon$ dla $z \in K(a, \delta)$ i wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Ponadto, istnieje n_0 takie, że dla $n, m \geq n_0$ zachodzi $|f_{k_n}(a) - f_{k_m}(a)| \leq \varepsilon$. Wtedy dla $z \in K(a, \delta)$ i $n, m \geq n_0$ mamy

$$|f_{k_n}(z) - f_{k_m}(z)| \leq |f_{k_n}(z) - f_{k_n}(a)| + |f_{k_n}(a) - f_{k_m}(a)| + |f_{k_m}(a) - f_{k_m}(z)| \leq 3\varepsilon.$$

Ostatni fragment dowodu to nic innego niż twierdzenie Arzeli–Ascoli ⁽¹⁹⁾ ⁽²⁰⁾. $\square$

Odnotujmy, że twierdzenie to może być znacznie wzmocnione — zob. Twierdzenie 3.2.2.

Propozycja 2.4.4 (Twierdzenie Vitalego ⁽²¹⁾). Niech $(f_k)_{k=1}^\infty \subset \mathcal{O}(D)$ będzie ciągiem lokalnie ograniczonym. Załóżmy, że ciąg ten jest zbieżny punktowo na pewnym zbiorze $A \subset D$ mającym punkt skupienia w D . Wtedy $(f_k)_{k=1}^\infty$ jest zbieżny niemal jednostajnie w D .

Dowód. Wobec twierdzenia Montela wystarczy pokazać, że ciąg $(f_k)_{k=1}^\infty$ jest zbieżny punktowo na D . Przypuśćmy, że dla pewnego $a \in D$ istnieją dwa podciągi $(f_{k_n})_{n=1}^\infty$ i $(f_{s_n})_{n=1}^\infty$ takie, że $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_{k_n}(a) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f_{s_n}(a)$. Wobec twierdzenia Montela możemy założyć, że $f_{k_n} \rightarrow p$, $f_{s_n} \rightarrow q$ niemal jednostajnie w D , gdzie $p, q \in \mathcal{O}(D)$. Wiemy, że $p = q$ na A , a stąd, wobec zasady identyczności, $p \equiv q$. W szczególności, $p(a) = q(a)$ — sprzeczność. $\square$

⁽¹⁷⁾ Jako ciąg funkcji $D \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ w sensie metryki na $\hat{\mathbb{C}}$.

⁽¹⁸⁾ Paul Montel (1876–1975) — matematyk francuski.

⁽¹⁹⁾ Cesare Arzelà (1847–1912) — matematyk włoski.

⁽²⁰⁾ Giulio Ascoli (1843–1896) — matematyk włoski.

⁽²¹⁾ Giuseppe Vitali (1875–1932) — matematyk włoski.

2.5. Zasada symetrii Riemanna–Schwarza

Twierdzenie 2.5.1 (Zasada symetrii Riemanna–Schwarza). *Niech $C_1, C_2 \subset \mathbb{C}$ będą okręgami właściwymi lub nie. Niech $D \subset \text{int } C_1$ będzie obszarem (jeżeli C_j jest prostą, to $\text{int } C_j$ definiujemy jako jedną z półpłaszczyzn, na które C_j dzieli $\mathbb{C}$). Załóżmy, że $(\partial D) \cap C_1$ zawiera pewien otwarty łuk (odcinek) L . Niech $f \in \mathcal{O}(D) \cap \mathcal{C}(D \cup L)$ będzie taka, że $f(L) \subset C_2$. Niech $\mathbb{C} \ni z \mapsto z^{*, C_j} \in \mathbb{C}$ oznacza operator symetrii względem C_j , $j = 1, 2$. Zdefiniujemy,*

$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z), & \text{jeżeli } z \in D \cup L \\ (f(z^{*, C_1}))^{*, C_2}, & \text{jeżeli } z^{*, C_1} \in D \end{cases}.$$

Wtedy $f \in \mathcal{O}(D \cup L \cup D^{*, C_1})$.

W szczególności, jeżeli $C_1 = C_2 = \mathbb{R}$, to

$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z), & \text{jeżeli } z \in D \cup L \\ f(\bar{z}), & \text{jeżeli } \bar{z} \in D \end{cases}.$$

Dowód. Po obłożeniu stosownymi homografiami i skorzystaniu z tego, iż homografie przekształcają punkty symetryczne na symetryczne (por. Obserwacja 1.3.1), sprowadzamy dowód do przypadku $C_1 = C_2 = \mathbb{R}$. Ten zaś przypadek wynika łatwo z twierdzenia Morery — ĆWICZENIE. $\square$

Wniosek 2.5.2. *Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem takim, że $L_1 \subset \partial D$, gdzie L_1 jest obrazem pewnego otwartego łuku analitycznego, tzn. $L_1 = \gamma_1((0, 1))$, $\gamma_1 : (0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ jest iniektywnym odwzorowaniem analitycznym takim, że $\gamma_1'(t) \neq 0$, $t \in (0, 1)$. Niech $f \in \mathcal{O}(D) \cap \mathcal{C}(D \cup L_1)$ będzie taka, że $f(L_1) \subset L_2$, gdzie L_2 jest obrazem pewnego otwartego łuku analitycznego, $L_2 = \gamma_2((0, 1))$. Wtedy f przedłuża się holomorficznie poprzez L_1 , tzn. istnieją obszar $\tilde{D} \supset D \cup L_1$ oraz $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\tilde{D})$ takie, że $\tilde{f} = f$ na $D \cup L_1$.*

Dowód. Wystarczy pokazać (ĆWICZENIE), że dla dowolnego $a \in L_1$ istnieje $r > 0$ takie, że L_1 dzieli $K(a, r)$ na dwa obszary oraz istnieje funkcja $\tilde{f}_a \in \mathcal{O}(K(a, r))$ taka, że $\tilde{f}_a = f$ na $K(a, r) \cap (D \cup L_1)$.

Niech $\tilde{\gamma}_j : U_j \rightarrow \mathbb{C}$ będzie holomorficznym rozszerzeniem funkcji γ_j (Ćwiczenie 2.3.6), gdzie $U_j \subset \mathbb{C}$ jest obszarem i $U_j \cap \mathbb{R} = (0, 1)$. Możemy założyć, że $\tilde{\gamma}_j(z) \neq 0$, $z \in U_j$, $j = 1, 2$. Ustalmy $a = \gamma_1(t_1) \in L_1$. Niech $f(a) = \gamma_2(t_2)$. Wtedy istnieją otoczenia V_1, V_2 punktów t_1 i t_2 takie, że:

- $V_1 \cap \mathbb{R} =: L$ jest pewnym otwartym odcinkiem,
- $\tilde{\gamma}_j|_{V_j} \rightarrow \tilde{\gamma}_j(V_j) =: W_j$ jest biholomorficzne, $j = 1, 2$,
- L_1 dzieli W_1 na dwa obszary,
- $f(W_1) \subset W_2$.

Niech $G := (\tilde{\gamma}_1|_{V_1})^{-1}(D \cap W_1)$, $g := (\tilde{\gamma}_2|_{V_2})^{-1} \circ f \circ \tilde{\gamma}_1|_{V_1} : G \cup L \rightarrow \mathbb{C}$. Wtedy $g \in \mathcal{O}(G) \cap \mathcal{C}(G \cup L)$ i $g(L) \subset \mathbb{R}$. Teraz wystarczy skorzystać ze zwykłej zasady symetrii (ĆWICZENIE). $\square$

2.6. Twierdzenie Cauchy’ego–Dixona

Będzie to wersja twierdzenia i wzoru całkowego Cauchy’ego.

Twierdzenie 2.6.1 (Twierdzenie Cauchy’ego–Dixona). *Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie dowolnym zbiorem otwartym. Niech $\gamma := \sum_{j=0}^N c_j \gamma_j$ będzie cyklem, tzn. formalną kombinacją (łańcuchem) dróg zamkniętych $\gamma_j : [0, 1] \rightarrow \Omega$, $c_j \in \mathbb{C}$, $j = 0, \dots, N$. Wtedy NWSR:*

(i) *dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ mamy*

$$f(a) \text{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - a} dz, \quad a \in \Omega \setminus \gamma^*,$$

gdzie

$$\text{Ind}_\gamma := \sum_{j=0}^N c_j \text{Ind}_{\gamma_j}, \quad \int_\gamma \cdots := \sum_{j=0}^N c_j \int_{\gamma_j} \cdots, \quad \gamma^* := \bigcup_{j=0}^N \gamma_j^*;$$

(ii) dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ mamy

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0;$$

(iii) $\text{Ind}_{\gamma}(a) = 0$ dla dowolnego $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, tzn. cykl γ jest homologiczny zeru w Ω .

Dowód. (i) $\implies$ (ii): Stosujemy (i) do funkcji $(z - a)f$.

(ii) $\implies$ (iii): Stosujemy (ii) do funkcji $\frac{1}{z-a}$.

(iii) $\implies$ (i): Mamy sprawdzić, że

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} dz = 0.$$

Zdefiniujmy

$$g(z, w) := \begin{cases} \frac{f(z) - f(w)}{z - w}, & \text{jeżeli } z \neq w \\ f'(z), & \text{jeżeli } z = w \end{cases}, \quad (z, w) \in \Omega \times \Omega.$$

Wiemy, że g jest holomorficzną ze względu na każdą zmienną. Ponadto jest ciągła. Ciągłość poza przekątną jest oczywista. Dla $(a, a) \in \Omega \times \Omega$ i $K(a, r) \subset \subset \Omega$ mamy

$$\begin{aligned} g(z, w) - g(a, a) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, r)} \left(\frac{1}{z - w} \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{f(\zeta)}{\zeta - w} \right) - \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^2} \right) d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, r)} f(\zeta) \left(\frac{1}{(\zeta - z)(\zeta - w)} - \frac{1}{(\zeta - a)^2} \right) d\zeta \xrightarrow{(z, w) \rightarrow (a, a)} 0, \end{aligned}$$

ponieważ funkcja podcałkowa dąży jednostajnie (względem ζ) przy $(z, w) \rightarrow (a, a)$.

Niech

$$h(w) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(z, w) dz, & \text{jeżeli } w \in \Omega \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - w} dz, & \text{jeżeli } w \in \mathbb{C} \setminus \Omega \end{cases}.$$

Przypomnijmy, że na podstawie lematu o produkcie funkcji holomorficzych, funkcja

$$\mathbb{C} \setminus \gamma^* \ni w \xrightarrow{h_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - w} dz$$

jest holomorficzną. Odnajdujemy, że $h_0(w) \rightarrow 0$ przy $w \rightarrow \infty$.

Z własności indeksu wynika, że $\text{Ind}_{\gamma} = 0$ w każdej składowej $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, która przecina $\mathbb{C} \setminus \Omega$. W szczególności, $\text{Ind}_{\gamma} = 0$ w pewnym otoczeniu U brzegu Ω , skąd wynika, że $h = h_0$ w U .

Teraz pokażemy, że $h \in \mathcal{O}(\Omega)$. Z Analizy wiemy, że $h \in \mathcal{C}(\Omega)$. Skorzystamy z warunku Morery. Dla dowolnego trójkąta $T \subset \subset \Omega$, korzystając z twierdzenia Fubini'ego, mamy

$$\int_{\partial T} h(w) dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\int_{\partial T} g(z, w) dw \right) dz = 0.$$

Wykazaliśmy, że $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ oraz $h(w) \rightarrow 0$ dla $w \rightarrow \infty$. Z zasady maksimum wynika, że $h \equiv 0$, co kończy dowód. $\square$

Wniosek 2.6.2. Wobec Twierdzenia 2.1.16, jeżeli droga zamknięta $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ jest homotopijna ze stałą, to jest homologiczna zeru w Ω .

Ćwiczenie 2.6.3. Czy krzywa homologiczna zeru w Ω musi być homotopijna ze stałą?

Definicja 2.6.4. $\mathcal{O}^*(\Omega) := \{f \in \mathcal{O}(\Omega) : f^{-1}(0) = \emptyset\}$.

Propozycja 2.6.5. Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem. Wtedy NWSR:

- (i) dowolna funkcja $f \in \mathcal{O}(D)$ ma pierwotną;
- (ii) dowolna funkcja $f \in \mathcal{O}^*(D)$ ma gałąź jednoznaczny logarytmu;
- (iii) dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{O}^*(D)$ istnieje $p = p(f) \in \mathbb{N}_2$ takie, że f ma gałąź jednoznaczny p -tego pierwiastka;

- (iv) każda droga zamknięta $\gamma : [0, 1] \longrightarrow D$ jest homologiczna zeru w D ;
 (v) zbiór $\widehat{\mathbb{C}} \setminus D$ jest spójny.

Dowód. (i) $\implies$ (ii): Niech $g \in \mathcal{O}(D)$ będzie taka, że $g' = f'/f$. Możemy założyć, że dla pewnego $a \in D$ mamy $e^{g(a)} = f(a)$. Mamy

$$\left(\frac{e^g}{f}\right)' = \frac{g'e^g f - e^g f'}{f^2} = 0,$$

a więc $e^g = f$.

(ii) $\implies$ (iii): $f = e^g = (e^{g/p})^p$.

(iii) $\implies$ (ii): Wystarczy pokazać, że funkcja f'/f ma pierwotną. Na podstawie Propozycji 2.1.9 trzeba pokazać, że $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$ dla dowolnej drogi zamkniętej γ w D . Niech

$$\begin{aligned} p_1 &:= p(f), g_1 \in \mathcal{O}^*(D), g_1^{p_1} = f, \\ p_2 &:= p(g_1), g_2 \in \mathcal{O}^*(D), g_2^{p_2} = g_1, g_2^{p_1 p_2} = f, \dots, \\ p_k &:= p(g_{k-1}), g_k \in \mathcal{O}^*(D), g_k^{p_k} = g_{k-1}, g_k^{p_1 \cdots p_k} = f, \dots \end{aligned}$$

Położmy $q_k := p_1 \cdots p_k \nearrow +\infty$. Wtedy

$$\frac{f'}{f} = \frac{q_k g_k^{q_k-1} g'_k}{g_k^{q_k}} = q_k \frac{g'_k}{g_k},$$

a stąd

$$\text{Ind}_{f \circ \gamma}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = q_k \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g'_k(z)}{g_k(z)} dz = q_k \text{Ind}_{g_k \circ \gamma}(0), \quad k \in \mathbb{N},$$

co oznacza, że $q_k | \text{Ind}_{f \circ \gamma}(0)$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$, a to jest możliwe tylko, gdy $\text{Ind}_{f \circ \gamma}(0) = 0$.

(ii) $\implies$ (iv): Ustalmy $a \notin D$ i niech $g \in \mathcal{O}(D)$ będzie taka, że $e^g = z - a$. Wtedy $e^g g' = 1$, czyli $g' = \frac{1}{z-a}$, co oznacza, że funkcja $\frac{1}{z-a}$ ma pierwotną. Teraz, korzystając z Propozycji 2.1.9, wnioskujemy, że $\text{Ind}_\gamma(a) = 0$.

(iv) $\implies$ (i): Wynika z Twierdzenia Cauchy'ego–Dixona oraz Propozycji 2.1.9.

(iv) $\implies$ (v): Gdyby zbiór $\widehat{\mathbb{C}} \setminus D$ nie był spójny, wtedy miałby składową zwartą K taką, że $U := D \cup K$ jest otwarty. Niech $G := \text{int } Q$ będzie zbiorem otwartym opartym na siatce kwadratowej o oczku $Q_{j,k} := [\frac{j}{m}, \frac{j+1}{m}] \times [\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}]$ (dla dostatecznie dużego m) tak, by $K \subset G \subset \subset U$,

$$Q := \bigcup_{\substack{Q_{j,k}: Q_{j,k} \subset D, \\ Q_{j,k} \cap K \neq \emptyset}} Q_{j,k}.$$

G jest zbiorem otwartym, którego brzeg ∂G może być utożsamiany z formalną kombinacją $\gamma_1 + \cdots + \gamma_N$ łamanych Jordana. Wtedy $\text{Ind}_\gamma(a) = 1$ dla $a \in K$. W szczególności, $\text{Ind}_{\gamma_j}(a) \neq 0$ dla pewnych $a \in K \subset \mathbb{C} \setminus D$ oraz $j \in \{1, \dots, N\}$ — sprzeczność.

(v) $\implies$ (iv): Wiemy, że $\text{Ind}_\gamma(a) = 0$ dla $a \in D_\infty$, gdzie D_∞ oznacza składową nieograniczoną $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \gamma^*$ ($\text{Ind}_\gamma(\infty) := 0$). Oczywiście $(\widehat{\mathbb{C}} \setminus D) \cap D_\infty \neq \emptyset$. Pozostaje jeszcze skorzystać ze stałości Ind_γ na $\widehat{\mathbb{C}} \setminus D$. $\square$

2.7. Jednowymiarowe rozmaitości zespolone

Definicja 2.7.1. Powiemy, że przestrzeń topologiczna Hausdorffa M jest *jednowymiarową rozmaitością zespoloną*, jeżeli istnieje układ *map* $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$, zwany *atlasem*, taki, że

- $U_\alpha \subset M$ jest zbiorem otwartym w M , $\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{C}$ jest homeomorfizmem, $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ jest zbiorem otwartym w $\mathbb{C}$ (co, z definicji, oznacza, że $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ jest mapą), $\alpha \in A$,
- $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$,
- $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \in \mathcal{O}(\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta))$ dla dowolnych $\alpha, \beta \in A$.

Powiemy, że mapa (U, ψ) jest *zgodna z atlasem* $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$, jeżeli ten atlas po dołączeniu mapy (V, ψ) pozostaje atlasem, czyli $\psi \circ \varphi_\alpha^{-1} \in \mathcal{O}(\varphi_\alpha(U_\alpha \cap V))$ i $\varphi_\alpha \circ \psi^{-1} \in \mathcal{O}(\psi(V \cap U_\alpha))$ dla dowolnego $\alpha \in A$.

Jeżeli mapy (V_1, ψ_1) i (V_2, ψ_2) są zgodne z atlasem $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$, to $\psi_j \circ \psi_k^{-1} \in \mathcal{O}(\psi_k(V_j \cap V_k))$ dla dowolnych $j, k \in \{1, 2\}$ — ĆWICZENIE. W szczególności, atlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$, po dołączeniu obu map pozostaje atlasem.

Atlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ nazywamy *atlasem maksymalnym*, jeżeli każda mapa z nim zgodna należy do niego.

Jeżeli do danego atlasu dołączymy wszystkie mapy z nim zgodne, to otrzymamy atlas maksymalny. W tym sensie każdy atlas generuje atlas maksymalny. Od tej chwili, mówiąc o atlasie na M będziemy zawsze mieć na myśli atlas maksymalny generowany przez dany atlas.

Spójne zespolone rozmaitości jednowymiarowe nazywamy *powierzchniami Riemanna*.

Definicja 2.7.2. Niech M będzie jednowymiarową rozmaitością zespoloną z atlasem $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$. Powiemy, że funkcja $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ jest *holomorficzna* ($f \in \mathcal{O}(M)$), jeżeli $f \circ \varphi_\alpha^{-1} \in \mathcal{O}(\varphi_\alpha(U_\alpha))$ dla dowolnego $\alpha \in A$.

Niech N będzie jakąś inną jednowymiarową rozmaitością zespoloną z atlasem $(V_\beta, \psi_\beta)_{\beta \in B}$. Powiemy, że odwzorowanie ciągłe $f : M \rightarrow N$ jest *holomorficzne* ($f \in \mathcal{O}(M, N)$), jeżeli

$$\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} \in \mathcal{O}(\varphi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta))), \quad (\alpha, \beta) \in A \times B.$$

Łatwo sprawdzić (ĆWICZENIE), że jeżeli odwzorowanie $f : M \rightarrow N$ jest holomorficzne względem atlasów $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ i $(V_\beta, \psi_\beta)_{\beta \in B}$, to jest holomorficzne względem maksymalnych atlasów generowanych przez te atlasy.

Zauważmy, że powyższe definicje są zgodne i zgadzają się z Definicją 2.2.1.

Obserwacja 2.7.3. $\widehat{\mathbb{C}}$ jest zwartą powierzchnią Riemanna. Na $\widehat{\mathbb{C}}$ będziemy zawsze rozważać atlas maksymalny generowany przez atlas dwuelementowy $(\mathbb{C}, \text{id})$, $(\widehat{\mathbb{C}}_*, I)$, gdzie $I(z) := 1/z$ oznacza inwersję.

Obserwacja 2.7.4. Niech M będzie jednowymiarową rozmaitością zespoloną.

(a) Wszystkie wyniki, w których ingerują wyłącznie lokalne własności funkcji holomorficznych przenoszą się na rozmaitości, np. twierdzenie Weierstrassa: jeżeli $(f_k)_{k=1}^\infty \subset \mathcal{O}(M)$ oraz $f_k \rightarrow f$ lokalnie jednostajnie, to $f \in \mathcal{O}(M)$.

(b) Jeżeli M jest spójna, to zachodzi dla niej *zasada identyczności*: jeżeli $f, g \in \mathcal{O}(M, N)$ są takie, że zbiór $A := \{x \in M : f(x) = g(x)\}$ ma punkt skupienia w M , to $f \equiv g$.

Istotnie, niech $D_0 := \{a \in M : f = g \text{ w pewnym otoczeniu punktu } a\}$. Jest to oczywiście zbiór otwarty. Pokażemy, że niepusty. Niech $a \in A' \cap D$. Wobec ciągłości f i g mamy $f(a) = g(a) =: b$. Niech (U, φ) , (V, ψ) będą dowolnymi mapami w otoczeniach punktów a i b . Możemy założyć, że U jest spójne oraz $f(U) \subset V$. Z definicji wiemy, że funkcje $f_0 := \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ i $g_0 := \psi \circ g \circ \varphi^{-1}$ są holomorficzne na obszarze $\varphi(U) \subset \mathbb{C}$ oraz równe na zbiorze $\varphi(A)$ mającym punkt skupienia $\varphi(a)$ w tym obszarze. Stąd, na podstawie zwykłej zasady identyczności, $f_0 \equiv g_0$, co daje $f = g$ na U .

Powyższe rozumowanie pokazuje również, że zbiór D_0 jest domknięty w D . A więc $D_0 = D$.

(c) Jeżeli M jest spójna, to zachodzi dla niej *zasada maksimum*: dla $f \in \mathcal{O}(M)$, jeżeli $|f|$ przyjmuje w M maksimum lokalne, to $f \equiv \text{const}$.

(d) Jeżeli M jest spójna i zwarta, to $\mathcal{O}(M) \simeq \mathbb{C}$. Dla przykładu, $\mathcal{O}(\widehat{\mathbb{C}}) \simeq \mathbb{C}$.

(e) Jeżeli M jest spójna i ośrodkowa, to w $\mathcal{O}(M)$ zachodzi twierdzenie Montela i twierdzenie Vitalego.

(f) Sprawdzić, jakie dalsze własności funkcji holomorficznych przenoszą się na rozmaitości. Proszę pamiętać o tym ćwiczeniu również w przyszłości!

(g)* ĆWICZENIE: Czy jeżeli M jest spójna, to jest ośrodkowa?

2.8. Funkcje holomorficzne w ∞

Definicja 2.8.1. Niech $\Omega \subset \widehat{\mathbb{C}}$ będzie zbiorem otwartym takim, że $\infty \in \Omega$. Niech $R > 0$ będzie takie, że $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{K(R)} \subset \Omega$. Powiemy, że funkcja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ jest *holomorficzna* ($f \in \mathcal{O}(\Omega)$), jeżeli $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{\infty\})$ (w sensie Definicji 2.2.1) oraz f jest *holomorficzna w ∞* , tzn. funkcja $K(1/R) \ni z \mapsto f(1/z) \in \mathbb{C}$ jest holomorficzna w zwykłym sensie, a więc istnieje ciąg $(a_n)_{n=0}^\infty \subset \mathbb{C}$ taki, że szereg $\sum_{n=0}^\infty a_n w^n$ jest zbieżny w $K(1/R)$ oraz $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n (1/z)^n$ dla $|z| > R$.

Zauważmy, że powyższa jest zgodna z Definicją 2.7.2.

2.9. Szeregi Laurenta

Definicja 2.9.1. Szeregiem Laurenta ⁽²²⁾ o środku $a \in \mathbb{C}$ nazywamy dowolny szereg postaci

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-a)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n =: S(z) + R(z),$$

gdzie $(a_n)_{n=-\infty}^{\infty} \subset \mathbb{C}$. Szereg S nazywamy *częścią osobliwą*, zaś R — *częścią regularną* szeregu Laurenta. Szeregi potęgowe utożsamiamy z tymi szeregami Laurenta, dla których $S \equiv 0$, tzn. $a_{-n} = 0$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

Zdefiniujmy liczby $R_-, R_+ \in \{-\infty\} \cup [0, +\infty]$:

$$R_- := \begin{cases} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}, & \text{jeżeli } a_{-n} \neq 0 \text{ dla pewnego } n \in \mathbb{N} \\ -\infty, & \text{jeżeli } a_{-n} = 0 \text{ dla dowolnego } n \in \mathbb{N} \end{cases}, \quad R_+ := \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Obserwacja 2.9.2. Załóżmy, że $R_- < R_+$.

(a) Z własności szeregów potęgowych wynika natychmiast, że szereg $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ jest zbieżny niemal jednostajnie w *pierszczeniu* $\mathbb{A}(a, R_-, R_+)$.

(b) Dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset \subset \mathbb{A}(a, R_-, R_+)$ istnieją stałe $C > 0$, $\theta \in (0, 1)$ takie, że

$$|a_n(z-a)^n| \leq C\theta^{|n|}, \quad z \in K, \quad n \in \mathbb{Z},$$

co oznacza, że szeregi Laurenta są zbieżne geometrycznie.

(c) Na podstawie twierdzenia Weierstrassa, funkcja $f(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$, $z \in \mathbb{A}(a, R_-, R_+)$, jest holomorficzna.

(d) Dla $R_- < r < R_+$, całkując wyraz po wyrazie dostajemy:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}} d\zeta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} (\zeta-a)^{n-k-1} d\zeta = a_k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

W szczególności, funkcja f wyznacza jednoznacznie współczynniki swojego rozwinięcia.

Propozycja 2.9.3 (Twierdzenie o rozwijaniu w szereg Laurenta). *Niech $f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}(a, r_-, r_+))$, $0 \leq r_- < r_+ \leq +\infty$. Zdefiniujmy*

$$a_n(r) := \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad r_- < r < r_+.$$

Wtedy $a_n := a_n(r)$ jest niezależne od r , szereg Laurenta $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ jest zbieżny w $\mathbb{A}(a, r_-, r_+)$ oraz $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$, $z \in \mathbb{A}(a, r_-, r_+)$.

Dowód. Niezależność od r wynika natychmiast z twierdzenia całkowego Cauchy'ego zastosowanego do funkcji holomorficznej $\mathbb{A}(a, r_-, r_+) \ni z \mapsto f(z)/(z-a)^{n+1}$ i obszaru dwuspójnego $\mathbb{A}(a, r_1, r_2) \subset \subset \mathbb{A}(a, r_-, r_+)$ przy $r_- < r_1 < r_2 < r_+$. Korzystając ze wzoru całkowego Cauchy'ego dla tego obszaru, dla $z \in C(a, r)$

⁽²²⁾ Pierre Laurent (1813–1854) — matematyk francuski.

i $r_1 < r < r_2$ mamy:

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{C(a, r_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{C(a, r_1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{C(a, r_2)} f(\zeta) \frac{1}{\zeta - a + a - z} d\zeta - \int_{C(a, r_1)} f(\zeta) \frac{1}{\zeta - a + a - z} d\zeta \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{C(a, r_2)} f(\zeta) \frac{1}{\zeta - a} \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} d\zeta + \int_{C(a, r_1)} f(\zeta) \frac{1}{z - a} \frac{1}{1 - \frac{\zeta-a}{z-a}} d\zeta \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{C(a, r_2)} f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta + \int_{C(a, r_1)} f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta-a)^n}{(z-a)^{n+1}} d\zeta \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n-1} (z-a)^{-n-1}.
 \end{aligned}$$

□

Przykład 2.9.4. Typowe zadanie dotyczące rozwijania funkcji holomorficznych w szeregi Laurenta wygląda następująco. Mamy daną funkcję holomorficzną $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_N\})$, gdzie $|a_1| \leq \dots \leq |a_N|$. Zadanie polega na znalezieniu rozwinięcia funkcji f w szereg Laurenta w pierścieniach:

- $K(|a_1|)$ o ile $a_1 \neq 0$,
- $\mathbb{A}(|a_j|, |a_{j+1}|)$ o ile $|a_j| < |a_{j+1}|$, $j = 1, \dots, N-1$,
- $\mathbb{A}(|a_N|, +\infty)$,
- $\mathbb{A}(a_j, 0, r_j)$, $r_j := \min\{|a_k - a_j| : k = 1, \dots, N, k \neq j\}$, $j = 1, \dots, N$.

Dla przykładu:

$$f(z) := \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}.$$

Rozwinięcie w $K(1)$:

$$f(z) = - \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = - \sum_{n=0}^{\infty} (1 + 1/2^{n+1}) z^n.$$

Rozwinięcie w $\mathbb{A}(1, 2)$:

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = - \sum_{n=0}^{\infty} 1/2^{n+1} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}.$$

Rozwinięcie w $\mathbb{A}(2, +\infty)$:

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (1 + 2^{n-1}) z^{-n}.$$

Rozwinięcie w $\mathbb{A}(1, 0, 1)$:

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{1-(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n.$$

Rozwinięcie w $\mathbb{A}(2, 0, 1)$:

$$f(z) = \frac{1}{1+(z-2)} + \frac{1}{z-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n + \frac{1}{z-2}.$$

2.10. Osobliwości izolowane

Definicja 2.10.1. Punkt $a \in \mathbb{C}$ nazywamy *osobliwością izolowaną* funkcji holomorfeicznej f , jeżeli f jest holomorfeiczna co najmniej w pewnym pierścieniu $\mathbb{A}(a, 0, r)$.

Oczywiście są też *osobliwości nieizolowane*, np. punkt 0 dla funkcji $f(z) := 1/\sin(1/z)$.

Jeżeli $f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}(a, 0, r))$, to rozwijamy f w szereg Laurenta

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n, \quad z \in \mathbb{A}(a, 0, r),$$

i wprowadzamy następującą klasyfikację izolowanych punktów osobliwych:

- *punkt pozornie osobliwy*, czyli *osobliwość usuwalna*, jeżeli $a_{-n} = 0$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$; kładąc $f(a) := a_0$ dostajemy funkcję holomorfeiczną w całym kole $K(a, r)$,
- *biegun rzędu d* ($d \in \mathbb{N}$), jeżeli $a_{-n} = 0$ dla $n > d$ i $a_{-d} \neq 0$; funkcję wymierną

$$g(z) := \sum_{n=1}^d a_{-n}(z-a)^{-n}$$

nazywamy wtedy *częścią główną bieguna funkcji f w punkcie a* ; zauważmy, że $g(z) = p(\frac{1}{z-a})$, gdzie p jest wielomianem stopnia d ; oczywiście $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$,

- *punkt istotnie osobliwy*, jeżeli $a_{-n} \neq 0$ dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$.

Liczba $\text{res}_a f := a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, \delta)} f(\zeta) d\zeta$ ($0 < \delta < r$) nosi nazwę *residuum funkcji f w punkcie a* .

Punkt ∞ nazywamy *osobliwością izolowaną* funkcji holomorfeicznej f , jeżeli f jest holomorfeiczna co najmniej w pewnym pierścieniu $\mathbb{A}(r, +\infty)$.

Jak poprzednio, mamy też *osobliwości nieizolowane* w ∞ , np. dla funkcji $f(z) := 1/\sin z$.

W przypadku osobliwości izolowanej w ∞ , $f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}(r, +\infty))$,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{A}(r, +\infty),$$

osobliwość klasyfikujemy względem tego, jaką osobliwością jest punkt 0 dla funkcji $g(z) := f(1/z)$, $z \in \mathbb{A}(0, 1/r)$. Tak więc:

- ∞ jest *punktem pozornie osobliwym*, czyli *osobliwością usuwalną*, jeżeli $a_n = 0$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$; kładąc $f(\infty) := a_0$ dostajemy funkcję holomorfeiczną w ∞ ,
- ∞ jest *biegunem rzędu d* ($d \in \mathbb{N}$), jeżeli $a_n = 0$ dla $n > d$ i $a_d \neq 0$; wielomian $\sum_{n=1}^d a_n z^n$ nazywamy wtedy *częścią główną bieguna funkcji f w ∞* ; oczywiście $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$,
- ∞ jest *punktem istotnie osobliwym*, jeżeli $a_n \neq 0$ dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$.

ĆWICZENIE Jak zdefiniować $\text{res}_{\infty} f$ (*residuum funkcji f w ∞*) ?

Propozycja 2.10.2 (Twierdzenie Riemanna o osobliwościach usuwalnych). Dla funkcji $f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}(a, 0, r))$ NWSR:

- a jest punktem pozornie osobliwym funkcji f ;
- granica $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ istnieje i jest skończona;
- funkcja f jest ograniczona w $\mathbb{A}(a, 0, \varepsilon)$ dla pewnego $0 < \varepsilon < r$;
- $f \in L_h^p(\mathbb{A}(a, 0, \varepsilon))$ dla pewnych $p \geq 2$ i $0 < \varepsilon < r$.

Dowód. Implikacje (i) $\implies$ (ii) $\implies$ (iii) $\implies$ (iv) są oczywiste. Pozostaje do wykazania, że (iv) $\implies$ (i). Możemy założyć, że $a = 0$. Ponieważ $L^p(K_*(\varepsilon)) \subset L^2(K_*(\varepsilon))$ możemy założyć, że $p = 2$. Niech $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, $z \in K_*(r)$. Pokażemy, że $a_{-n} = 0$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Ustalmy $n \in \mathbb{N}$. Naszym celem będzie wykazanie, że

$$|a_{-n}| \leq (1/\sqrt{2\pi})\varepsilon^{n-1} \|f\|_{L^2(K_*(\eta))}$$

dla $0 < \eta < \varepsilon$. Ponieważ $\|f\|_{L^2(K_*(\eta))} \rightarrow 0$, gdy $\eta \rightarrow 0$, dowód będzie zakończony. Dla $0 < t < \eta < \varepsilon$ liczymy (korzystając z nierówności Höldera):

$$|a_{-n}|^2 = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C(t)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{-n+1}} d\zeta \right|^2 \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(te^{i\theta})| t^n d\theta \right)^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(te^{i\theta})|^2 d\theta t^{2n},$$

a stąd

$$|a_{-n}|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\eta} \eta^{2n-1} \int_0^\eta \int_0^{2\pi} |f(te^{i\theta})|^2 t d\theta dt = \frac{1}{2\pi} \eta^{2n-2} \int_{K_*(\eta)} |f|^2 d\mathcal{L}^2. \quad \square$$

Obserwacja 2.10.3. $1/z \in L_h^p(\mathbb{D}_*)$ dla dowolnego $1 \leq p < 2$.

Wniosek 2.10.4 (Twierdzenie Riemanna o osobliwościach usuwalnych). Dla funkcji $f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}(r, +\infty))$ NWSR:

- (i) ∞ jest punktem pozornie osobliwym funkcji f ;
- (ii) granica $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ istnieje i jest skończona;
- (iii) funkcja f jest ograniczona w $\mathbb{A}(\varepsilon, +\infty)$ dla pewnego $\varepsilon > r$.

Definicja 2.10.5. Niech $f \in \mathcal{O}(K(a, r))$. Mówimy, że f ma w punkcie a zero krotności d ($d \in \mathbb{N}$), jeżeli $f^{(k)}(a) = 0$ dla $k \leq d-1$ oraz $f^{(d)}(a) \neq 0$. Piszemy wtedy $\text{ord}_a f = d$.

Oznacza to, że $f(z) = (z-a)^d g(z)$, $z \in K(a, r)$, gdzie $g \in \mathcal{O}(K(a, r))$ i $g(a) \neq 0$.

Jeżeli $f \in \mathcal{O}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{K}(r))$ i $g(z) := f(1/z)$, $z \in \mathbb{A}(0, 1/r)$, to $\text{ord}_\infty f =: \text{ord}_0 g$.

Propozycja 2.10.6. Dla funkcji $f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}(a, 0, r))$ (odp. $f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}(r, +\infty))$) oraz $d \in \mathbb{N}$, NWSR:

- (i) f ma w punkcie a (odp. ∞) biegun rzędu d ;
- (ii) istnieje funkcja $g \in \mathcal{O}(K(a, r))$ (odp. $g \in \mathcal{O}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{K}(r))$) taka, że $g(a) \neq 0$ oraz $f(z) = (z-a)^{-d} g(z)$, $z \in K_*(a, r)$ (odp. $f(z) = z^d g(z)$, $z \in \mathbb{A}(r, +\infty)$);
- (iii) funkcja $1/f$ (dookreślona jako 0 w punkcie a) ma w a zero krotności d .

Dowód. ĆWICZENIE. □

Propozycja 2.10.7. Jeżeli funkcja $f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}(a, 0, r))$ ma w punkcie a biegun rzędu d , to

$$\text{res}_a f = \frac{1}{(d-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \left((z-a)^d f(z) \right)^{(d-1)}.$$

Dowód. Niech $f(z) = \sum_{n=-d}^\infty a_n (z-a)^n$, $f(z) = (z-a)^{-d} g(z)$ (tak, jak w Propozycji 2.10.6(b)), $g(z) = \sum_{n=0}^\infty b_n (z-a)^n$. Wtedy $a_{-1} = b_{d-1}$ oraz

$$\frac{1}{(d-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \left((z-a)^d f(z) \right)^{(d-1)} = \frac{1}{(d-1)!} \lim_{z \rightarrow a} g^{(d-1)}(z) = \frac{1}{(d-1)!} g^{(d-1)}(a) = b_{d-1}. \quad \square$$

Przykład 2.10.8.

$$\text{res}_i \frac{1}{(1+z^2)^n} = \frac{1}{2i} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}.$$

Liczymy:

$$\begin{aligned} \text{res}_i \frac{1}{(1+z^2)^n} &= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{1}{(z+i)^n} \right)^{(n-1)} = \frac{1}{(n-1)!} \frac{(-n)(-n-1) \cdots (-n-n+2)}{(2i)^{2n-1}} \\ &= \frac{1}{2i} \frac{1}{(n-1)!} \frac{(-1)^{n-1} n(n+1) \cdots (2n-2)}{2^{2n-2} (-1)^{n-1}} = \frac{1}{2i} \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2n-3)(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n-2)}{((n-1)!)^2 2^{2n-2}} \\ &= \frac{1}{2i} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}. \end{aligned}$$

Propozycja 2.10.9 (Twierdzenie Sochockiego⁽²³⁾–Casoratiego⁽²⁴⁾–Weierstrassa). *Jeżeli $f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}(a, 0, r))$ ma w a punkt istotnie osobliwy, to dla dowolnego $0 < \varepsilon < r$, zbiór $f(\mathbb{A}(a, 0, \varepsilon))$ jest gęsty w $\mathbb{C}$.*

Odnótujemy, że twierdzenie to może być znacznie wzmocnione — zob. twierdzenie Picarda (Twierdzenie 3.3.1).

Dowód. Przypuśćmy, że tak nie jest i $f(\mathbb{A}(a, 0, \varepsilon)) \cap K(b, \delta) = \emptyset$, czyli $|f(z) - b| \geq \delta$ dla dowolnego $z \in \mathbb{A}(a, 0, \delta)$. Niech $g(z) := \frac{1}{f(z) - b}$, $z \in \mathbb{A}(a, 0, \delta)$. Ponieważ $|g| \leq 1/\delta$, twierdzenie Riemanna implikuje, że funkcja g ma w punkcie a osobliwość usuwalną — przedłużenie funkcji g oznaczamy tą samą literą.

Jeżeli $g(a) \neq 0$, to możemy założyć, że $g(z) \neq 0$ dla $z \in K(a, \delta)$. Wtedy też $f(z) = \frac{1}{g(z)} + b$, $z \in \mathbb{A}(a, 0, \delta)$, co oznacza, że f przedłuża się holomorphyzycznie na $K(a, \delta)$ — sprzeczność.

Jeżeli $g(a) = 0$, to dla pewnego $d \in \mathbb{N}$ mamy $g(z) = (z - a)^d h(z)$, $z \in K(a, \delta)$, gdzie $h \in \mathcal{O}(K(a, \delta))$ i $h(a) \neq 0$. Możemy założyć, że $h(z) \neq 0$ dla dowolnego $z \in K(a, \delta)$. Wtedy

$$f(z) = (z - a)^{-d} \left(\frac{1}{h(z)} + b(z - a)^d \right), \quad z \in \mathbb{A}(a, 0, \delta),$$

co oznacza, że f ma w a biegun rzędu d — sprzeczność. $\square$

Wniosek 2.10.10. *Niech $f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}(a, 0, r))$ lub też $f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}(r, +\infty))$. Wtedy:*

- *f ma w punkcie a osobliwość usuwalną wtedy i tylko wtedy, gdy granica $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ istnieje i jest skończona;*
- *f ma w punkcie a biegun wtedy i tylko wtedy, gdy granica $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$;*
- *f ma w punkcie a osobliwość istotną wtedy i tylko wtedy, gdy granica $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ nie istnieje.*

2.11. Funkcje meromorphyzyczne

Definicja 2.11.1. Niech $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ będzie obszarem. Powiemy, że funkcja $f : D \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ jest *meromorphyzyczna* ($f \in \mathcal{M}(D)$), jeżeli istnieje zbiór $S = S(f) \subset D$ taki, że:

- $S' \cap D = \emptyset$,
- $f \in \mathcal{O}(D \setminus S)$,
- f ma biegun w każdym punkcie $a \in S$.

Jeżeli $\Omega \subset \widehat{\mathbb{C}}$ jest zbiorem otwartym, to mówimy, że funkcja $f : \Omega \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ jest meromorphyzyczna ($f \in \mathcal{M}(\Omega)$), jeżeli $f|_D \in \mathcal{M}(D)$ dla dowolnej składowej spójnej D zbioru Ω .

Obserwacja 2.11.2. (a) $\mathcal{O}(\Omega) \subset \mathcal{M}(\Omega)$.

(b) Funkcje meromorphyzyczne są ciągłe.

(c) $S(f) = f^{-1}(\infty)$.

Propozycja 2.11.3 (Zasada identyczności dla funkcji meromorphyzycznych). *Jeżeli $f, g \in \mathcal{M}(D)$ oraz zbiór $A := \{z \in D : f(z) = g(z)\}$ ma punkt skupienia w D , to $f \equiv g$.*

Dowód. Niech $S := S(f) \cup S(g)$. Oczywiście, S nie ma punktu skupienia w D . Wynika stąd, że zbiór $A \cap (D \setminus S)$ ma punkt skupienia w obszarze $D \setminus S$. Korzystając z zasady identyczności dla funkcji holomorphyzycznych, wnioskujemy stąd, że $f = g$ w $D \setminus S$. Ostatecznie, korzystając z ciągłości f i g , dostajemy $f \equiv g$. $\square$

Propozycja 2.11.4. $\mathcal{M}(D)$ jest ciałem.

Dowód. Niech $f, g \in \mathcal{M}(D)$, $f, g \neq 0$. Widać, że $f + g \in \mathcal{M}(D)$ i $S(f + g) \subset S(f) + S(g)$.

Jeżeli $g \neq 0$, to zbiór $A := g^{-1}(0)$ nie ma punktu skupienia w D (z zasady identyczności). Ponadto, $1/g \in \mathcal{O}(A \cap S(g))$. Na podstawie Propozycji 2.10.6 wiemy, że w każdym punkcie $a \in A$ funkcja $1/g$ ma biegun (rzędu d o ile funkcja g miała w a zero krotności d), zaś w każdym punkcie $a \in S(f)$ — zero (krotności d o ile funkcja g miała w a biegun rzędu d). Ostatecznie, $S(1/g) = A$ i $1/g \in \mathcal{M}(D)$.

Pozostaje wykazać, że $f \cdot g \in \mathcal{M}(D)$. Oczywiście, $f \cdot g \in \mathcal{O}(D \setminus A)$, gdzie $A := S(f) \cup S(g)$. Ustalmy $a \in A \cap \mathbb{C}$. Niech $f(z) = (z - a)^{d_f} f_1(z)$, $g(z) = (z - a)^{d_g} g_1(z)$, $z \in \mathbb{A}(a, 0, r) \subset D \setminus A$, gdzie $d_f, d_g \in \mathbb{Z}$ (zależnie

⁽²³⁾ Julian Sochocki (1842–1927) — matematyk polski.

⁽²⁴⁾ Felice Casorati (1835–1890) — matematyk włoski.

2.12. Twierdzenie o residuach

od tego, czy dana funkcja ma zero, czy biegun), $f_1, g_1 \in \mathcal{O}^*(K(a, r))$. Stąd $f(z)g(z) = (z-a)^{d_f+d_g} f_1(z)g_1(z)$, $z \in \mathbb{A}(a, 0, r)$.

Przypadek $a = \infty$ pozostawiamy jako ĆWICZENIE.

Teraz, korzystając z Propozycji 2.10.6, wnioskujemy, że $f \cdot g \in \mathcal{M}(D)$. $\square$

Propozycja 2.11.5. $\mathcal{M}(D) = \mathcal{O}(D, \widehat{\mathbb{C}}) \setminus \{\infty\}$, gdzie $\widehat{\mathbb{C}}$ traktujemy jako jednowymiarową rozmaitość zespoloną (por. Definicja 2.7.2).

Dowód. $\widehat{\mathbb{C}}$ wyposażamy w atlas $(\mathbb{C}, \text{id}_{\mathbb{C}})$, $(\widehat{\mathbb{C}}_*, I)$, gdzie $I(z) := 1/z$. Przypomnijmy, że funkcja ciągła $f : D \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ jest holomorphyzna, jeżeli są holomorphyzne (w zwykłym sensie) następujące cztery funkcje:

- (a) $D \cap \mathbb{C} \cap f^{-1}(\mathbb{C}) \ni z \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$,
- (b) $I(D \cap \widehat{\mathbb{C}}_* \cap f^{-1}(\mathbb{C})) \ni z \mapsto f(1/z) \in \mathbb{C}$,
- (c) $D \cap \mathbb{C} \cap f^{-1}(\widehat{\mathbb{C}}_*) \ni z \mapsto 1/f(z) \in \mathbb{C}$,
- (d) $I(D \cap \widehat{\mathbb{C}}_* \cap f^{-1}(\widehat{\mathbb{C}}_*)) \ni z \mapsto 1/f(1/z) \in \mathbb{C}$.

Niech $S := f^{-1}(\infty)$. Wobec zasady identyczności (Obserwacja 2.7.4), $S' \cap D = \emptyset$. Warunki (a) i (b) oznaczają łącznie, że $f \in \mathcal{O}(D \setminus S)$. Ciągłość funkcji gwarantuje, że f ma biegun w każdym punkcie $a \in S$. Wynika stąd, że $\mathcal{O}(D, \widehat{\mathbb{C}}) \setminus \{\infty\} \subset \mathcal{M}(D)$.

W drugą stronę — niech $f \in \mathcal{M}(D)$, $S := S(f)$. Wiemy, że f jest ciągła oraz, że $f \in \mathcal{O}(D \setminus S)$, co oznacza, że (a) i (b) są spełnione. Weźmy dowolny punkt $a \in S \cap \mathbb{C}$, $f(z) = (z-a)^{-d}g(z)$, $z \in \mathbb{A}(a, 0, r)$, $f \in \mathcal{O}^*(K(a, r))$. Wtedy $1/f(z) = (z-a)^d(1/g(z))$, $z \in K(a, r)$, co daje (c). Jeżeli $\infty \in S$, to $f(z) = z^k g(z)$, $z \in \mathbb{A}(r, +\infty)$, $g \in \mathcal{O}^*(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{K}(r))$. Wtedy $1/f(1/z) = z^k(1/g(1/z))$, $z \in K(1/r)$, co daje (d). $\square$

Propozycja 2.11.6. $\mathcal{M}(\widehat{\mathbb{C}}) = \mathcal{R}(\mathbb{C})$.

Dowód. Oczywiście, $\mathcal{R}(\mathbb{C}) \subset \mathcal{M}(\widehat{\mathbb{C}})$. Niech $f \in \mathcal{M}(\widehat{\mathbb{C}})$. Zbiór $S(f)$ musi być skończony. Przypadek $S(f) = \emptyset$ jest trywialny — wtedy $f \equiv \text{const}$. Jeżeli $S(f) = \{\infty\}$, to f jest funkcją całkowitą i ponieważ w ∞ ma biegun, to musi być wielomianem. Przypuśćmy, że $S(f) \cap \mathbb{C} = \{a_1, \dots, a_n\}$ i niech

$$g_k(z) = p_k \left(\frac{1}{z - a_k} \right)$$

oznacza część główną bieguna funkcji f w punkcie a_k , $k = 1, \dots, n$. Zdefiniujmy $g := f - (g_1 + \dots + g_n) \in \mathcal{M}(\widehat{\mathbb{C}})$. Wtedy $S(g) \subset \{\infty\}$, a więc g musi być wielomianem. $\square$

Obserwacja 2.11.7. Konstrukcja przeprowadzona w powyższym dowodzie to nic innego, jak rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste.

Propozycja 2.11.8. (a) $\text{Aut}(\mathbb{C}) = \text{Aut}_{\mathcal{H}}(\mathbb{C}) = \{\mathbb{C} \ni z \mapsto az + b \in \mathbb{C} : a \in \mathbb{C}_*, b \in \mathbb{C}\} = \mathcal{G}$.

(b) $\text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) = \text{Aut}_{\mathcal{H}}(\widehat{\mathbb{C}}) = \mathcal{H}$.

W szczególności, grupa $\text{Aut}(\mathbb{C})$ zależy od 4 parametrów rzeczywistych.

Dowód. (a) Jest oczywiste, że $\mathcal{G} \subset \text{Aut}(\mathbb{C})$. Niech $f \in \text{Aut}(\mathbb{C})$. Ponieważ f jest odwzorowaniem właściwym, zatem $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$. Oznacza to, że f ma w nieskończoności biegun, a to z kolei, oznacza, że f jest wielomianem stopnia d dla pewnego $d \in \mathbb{N}$. Ponieważ f jest iniektywne musi być $d = 1$.

(b) Wiemy, że $\mathcal{H} \subset \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$. Niech $f \in \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$. Jeżeli $f(\infty) = \infty$, to $f \in \text{Aut}(\mathbb{C})$, a więc (wobec (a)), $f(z) = az + b \in \mathcal{H}$. Jeżeli $f(\infty) = w_0 \in \mathbb{C}$, wtedy $g := \frac{1}{f-w_0} \in \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ oraz $g(\infty) = \infty$, co, wobec poprzedniego przypadku, daje $f \in \mathcal{H}$. $\square$

2.12. Twierdzenie o residuach

Twierdzenie 2.12.1 (Twierdzenie o residuach). Niech D będzie obszarem p -spójnym ograniczonym p drogami Jordana zorientowanymi dodatnio, niech $\overline{D} \subset \Omega$, gdzie Ω jest zbiorem otwartym, i niech $f \in \mathcal{M}(\Omega)$

będzie taka, że $S(f) \subset D$ ($S(f)$ musi być zbiorem skończonym). Wtedy

$$\int_{\partial D} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \sum_{a \in S(f)} \operatorname{res}_a f.$$

Dowód. Jeżeli $S(f) = \emptyset$, to wynik jest oczywisty (przyjmując, że $\sum_{a \in \emptyset} \dots := 0$). Załóżmy, że $S(f) = \{a_1, \dots, a_n\}$. Niech $r > 0$ będzie tak małe, że $K(a_j, r) \subset \subset D$ oraz $\overline{K}(a_j, r) \cap \overline{K}(a_k, r) = \emptyset$, $j \neq k$. Do obszaru $G := D \setminus \bigcup_{j=1}^n \overline{K}(a_j, r)$ stosujemy wzór Cauchy'ego (przypomnijmy, że $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus S(f))$):

$$0 = \int_{\partial G} f(\zeta) d\zeta = \int_{\partial D} f(\zeta) d\zeta - \sum_{j=1}^n \int_{C(a_j, r)} f(\zeta) d\zeta = \int_{\partial D} f(\zeta) d\zeta - \sum_{j=1}^n 2\pi i \operatorname{res}_{a_j} f. \quad \square$$

2.13. Zastosowania do obliczania całek

(I) $I := \int_0^{2\pi} W(\cos t, \sin t) dt$, gdzie W jest funkcją wymierną dwóch zmiennych zespolonych.

Przypomnijmy, że dla $z = e^{it}$ mamy $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) = \frac{1}{2}(z + 1/z)$ oraz $\sin t = \frac{1}{2i}(z - 1/z)$. Wynika stąd, że

$$I = \int_{\mathbb{T}} W\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{1}{iz} dz = \int_{\mathbb{T}} f(z) dz = 2\pi i \sum_{a \in \mathbb{D}} \operatorname{res}_a f,$$

przy założeniu, że funkcja wymierna f nie ma biegunów na $\mathbb{T}$.

(II) $I := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$, gdzie $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, $\overline{\mathbb{H}}^+ \subset \Omega$, $S(f) = \{a_1, \dots, a_N\} \subset \mathbb{H}^+$.

Niech $C^+(r)$ oznacza górną połowę okręgu $C(r)$ utożsamianą z krzywą $[0, \pi] \ni t \mapsto re^{it}$. Stosując twierdzenie o residuach do obszaru $\{x + iy \in K(R) : y > 0\}$ dla dużych R , dostajemy

$$I = 2\pi i \sum_{j=1}^N \operatorname{res}_{a_j} f - \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C^+(R)} f(z) dz.$$

Nas będą interesować przypadki, gdy $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C^+(R)} f(z) dz = 0$.

(*) Jeżeli dla pewnego $\alpha > 1$ mamy $|f(z)| \leq C/|z|^\alpha$ dla $z \in \mathbb{H}^+$, $|z| \geq R_0$ (np. $f(z) = L(z)/M(z)$ jest funkcją wymierną i $\deg L \leq \deg M - 2$), to $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C^+(R)} f(z) dz = 0$.

Istotnie, dla $R > R_0$ mamy

$$\left| \int_{C^+(R)} f(z) dz \right| \leq \int_0^\pi |f(Re^{it})| R dt \leq \pi C/R^{\alpha-1} \rightarrow 0.$$

Dla przykładu,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = 2\pi i \operatorname{res}_i \frac{1}{(1+z^2)^n} = \pi \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(**) (Lemat Jordana) Jeżeli $f(z) = g(z)e^{i\lambda z}$, $z \in \Omega$, gdzie $\lambda > 0$ i

$$M(R) := \sup\{|g(z)| : z \in C^+(R)\} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$$

(np. $g(z) = L(z)/M(z)$ jest funkcją wymierną i $\deg L \leq \deg M - 1$), to $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C^+(R)} f(z) dz = 0$.

Istotnie,

$$\begin{aligned} \left| \int_{C^+(R)} f(z) e^{i\lambda z} dz \right| &\leq \int_0^\pi |g(Re^{it})| e^{\operatorname{Re}(i\lambda Re^{it})} R dt \leq 2M(R)R \int_0^{\pi/2} e^{-\lambda R \sin t} dt \\ &\leq 2M(R)R \int_0^{\pi/2} e^{-\lambda R \frac{2}{\pi} t} dt = 2M(R)R \left(-\frac{\pi}{2\lambda R} \right) e^{-\frac{2\lambda R}{\pi} t} \Big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi M(R)}{\lambda} (1 - e^{-\lambda R}) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Dla przykładu,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2} dx = \operatorname{Im} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{-ix}}{1+x^2} dx \right) = \operatorname{Im} \left(2\pi i \operatorname{res}_i \frac{z e^{iz}}{1+z^2} \right) = \operatorname{Im} \left(2\pi i \frac{ie^{-1}}{2i} \right) = \frac{\pi}{e}.$$

(III)

$$I := \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right) = \dots$$

stosujemy twierdzenie o residuach do obszaru $\{x+iy \in K(R) \setminus \bar{K}(r) : y > 0\}$, $0 < r < R$ (w którym nie ma biegunów funkcji $\frac{e^{iz}}{z}$) i dostajemy

$$\dots = -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C^+(r)} \frac{e^{iz}}{z} dz \right) = -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\pi i \operatorname{res}_0 \frac{e^{iz}}{z} \right) = -\frac{\pi}{2},$$

gdzie ostatnia równość wynika z następującej obserwacji.

Jeżeli funkcja $f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}(a, 0, r_0))$ ma w punkcie a biegun rzędu 1, $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq 2\pi$ oraz $C_{\theta_1}^{\theta_2}(r)$ oznacza krzywą $[\theta_1, \theta_2] \ni t \mapsto re^{it}$, to

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_{\theta_1}^{\theta_2}(r)} f(z) dz = (\theta_2 - \theta_1) i \operatorname{res}_a f.$$

Istotnie, wiemy, że $f(z) = \frac{\operatorname{res}_a f}{z-a} + g(z)$, $z \in \mathbb{A}(a, 0, r_0)$, gdzie $g \in \mathcal{O}(K(a, r_0))$. Możemy założyć, że $|g| \leq M$. Wtedy

$$\int_{C_{\theta_1}^{\theta_2}(r)} f(z) dz = (\operatorname{res}_a f) \int_{C_{\theta_1}^{\theta_2}(r)} \frac{1}{z-a} dz + \int_{C_{\theta_1}^{\theta_2}(r)} g(z) dz = (\theta_2 - \theta_1) i \operatorname{res}_a f + \int_{C_{\theta_1}^{\theta_2}(r)} g(z) dz$$

oraz

$$\left| \int_{C_{\theta_1}^{\theta_2}(r)} g(z) dz \right| \leq 2\pi M r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0.$$

(IV)

$$I := \int_0^{\infty} \cos x^2 dx + i \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{\infty} e^{iz^2} dz = \dots$$

stosujemy twierdzenie o residuach do obszaru $\{\tau e^{it} : 0 < \tau < R, 0 < t < \pi/4\}$ (w którym nie ma biegunów funkcji e^{iz^2}) i dostajemy

$$\dots = - \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_0^{\pi/4}(R)} e^{iz^2} dz + \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{[0, Re^{i\pi/2}]} e^{iz^2} dz.$$

zauważmy, że

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_0^{\pi/4}(R)} e^{iz^2} dz \right| &\leq \int_0^{\pi/4} e^{\operatorname{Re} i(Re^{it})^2} R dt = R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \sin 2t} dt \leq R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \frac{2}{\pi} 2t} dt \\ &= R \left(-\frac{\pi}{4R^2} \right) e^{-\frac{4R^2}{\pi} t} \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4R} (1 - e^{-R^2}) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

$$\int_{[0, Re^{i\pi/2}]} e^{iz^2} dz = \int_0^R e^{i(te^{i\pi/4})^2} e^{i\pi/4} dt = e^{i\pi/4} \int_0^R e^{-t^2} dt \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} e^{i\pi/4} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = e^{i\pi/4} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ostatecznie,

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

(V)

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} dx, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Stosujemy twierdzenie o residuach do obszaru $\{x + iy \in \mathbb{H}^+ : -R < x < R, y < 2\pi\}$ (w którym jest jeden biegun funkcji $f(z) := \frac{e^{\alpha z}}{1+e^z}$ w punkcie πi). Stąd dostajemy

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i \operatorname{res}_{\pi i} f + \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\int_{[-R, -R+2\pi i]} f(z) dz + \int_{[-R+2\pi i, R+2\pi i]} f(z) dz - \int_{[R, R+2\pi i]} f(z) dz \right) \\ &= -2\pi i e^{\alpha \pi i} + \lim_{R \rightarrow +\infty} (A(R) + B(R) - C(R)). \end{aligned}$$

Szacujemy:

$$|A(R)| \leq \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\alpha R}}{|1 + e^{-R+it}|} dt \leq \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\alpha R}}{1 - e^{-R}} dt = 2\pi \frac{e^{-\alpha R}}{1 - e^{-R}} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$$

i podobnie $C(R) \rightarrow 0$. Ponadto,

$$B(R) = \int_{-R}^R \frac{e^{\alpha(t+2\pi i)}}{1 + e^{t+2\pi i}} dt = e^{2\alpha \pi i} \int_{-R}^R \frac{e^{\alpha x}}{1 + e^x} dx \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} e^{2\alpha \pi i} I.$$

Ostatecznie,

$$I = \frac{-2\pi i e^{\alpha \pi i}}{1 - e^{2\alpha \pi i}} = \frac{\pi}{\sin \alpha \pi}.$$

2.14. Funkcje holomorfczne dane całką

Propozycja 2.14.1 (Twierdzenie o funkcjach danych całką). *Niech $I \subset \mathbb{R}$, $I \in \{[a, b], [a, b)\}$, niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem i niech $f : D \times I \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją taka, że:*

- (a) $f(\cdot, t) \in \mathcal{O}(D)$, $t \in I$,
- (b) $f(z, \cdot) \in \mathcal{C}(I)$, $z \in D$,
- (c) f lokalnie ograniczona w $D \times I$,
- (c') dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset \subset D$ istnieje funkcja całkowalna $g_K : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ taka, że $|f(z, t)| \leq g_K(t)$, $(z, t) \in K \times [a, b]$ (zauważmy, że jeżeli $I = [a, b]$, to (c') wynika z (c)).

Zdefiniujemy

$$F(z) := \int_a^b f(z, t) dt, \quad z \in D.$$

Wtedy $F \in \mathcal{O}(D)$ oraz $F^{(k)}(z) = \int_a^b \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(z, t) dt$ ⁽²⁵⁾, $z \in D$, $k \in \mathbb{N}$.

Analogiczny wynik można oczywiście uzyskać dla $I = (a, b]$, czy też $I = (a, b)$ (w ostatnim przypadku wystarczy wprowadzić punkt pośredni).

Dowód. Najpierw niech $I = [a, b]$. Niech $t_{n,j} = a + \frac{j}{n}(b - a)$, $\xi_{n,j} \in [t_{n,j-1}, t_{n,j}]$, $n \in \mathbb{N}$, $j = 0, \dots, n$. Zdefiniujemy

$$F_n(z) := \sum_{j=1}^n f(z, \xi_{n,j}) \frac{b - a}{n}, \quad z \in D, \quad n \in \mathbb{N};$$

$F_n(z)$ jest sumą aproksymacyjną pośrednią dla całki $\int_a^b f(z, t) dt$ przy podziale $a = t_{n,0} < \dots < t_{n,n} = b$ i punktach pośrednich $\xi_{n,1}, \dots, \xi_{n,n}$. Oczywiście, $F_n \in \mathcal{O}(D)$ oraz $F_n \rightarrow F$ punktowo na D . Aby udowodnić, że $F \in \mathcal{O}(D)$ zastosujemy twierdzenie Vitaliego. Wystarczy pokazać, że ciąg $(F_n)_{n=1}^\infty$ jest niemal jednostajnie ograniczony. Dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset \subset D$, niech $|f| \leq C$ na $K \times [a, b]$. Wtedy $|F_n| \leq C(b - a)$ na K dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

Ustalmy $k \in \mathbb{N}$ oraz $z \in D$. Z twierdzenia Weierstrassa wynika, że $F_n^{(k)}(z) \rightarrow F^{(k)}(z)$. Zauważmy, że

$$F_n^{(k)}(z) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(z, \xi_{n,j}) \frac{b - a}{n}, \quad n \in \mathbb{N};$$

⁽²⁵⁾ Wzór ten oznacza w szczególności, że całka po prawej stronie istnieje.

$F_n^{(k)}(z)$ jest sumą aproksymacyjną pośrednią dla całki $\int_a^b \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(z, t) dt$ przy podziale $a = t_{n,0} < \dots < t_{n,n} = b$ i punktach pośrednich $\xi_{n,1}, \dots, \xi_{n,n}$. Wobec dowolności $\xi_{n,j}$ dostajemy istnienie całki $\int_a^b \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(z, t) dt$ oraz żadaną równość.

W przypadku, gdy $I = [a, b)$ ⁽²⁶⁾, ustalmy $b_k \nearrow b$ i niech

$$F_k(z) := \int_a^{b_k} f(z, t) dt, \quad z \in D, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Wobec pierwszej części dowodu, wystarczy pokazać, że $F_k \rightarrow F$ niemal jednostajnie w D . Ustalmy zbiór zwarty $K \subset\subset D$. Wtedy, dla $z \in K$ oraz $\ell \geq k$, mamy

$$|F_k(z) - F_\ell(z)| = \left| \int_{b_k}^{b_\ell} f(z, t) dt \right| \leq \int_{b_k}^{b_\ell} g_K(t) dt \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0. \quad \square$$

2.15. Funkcja Γ Eulera

Niech

$$\mathbb{H}_m := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > m\}, \quad m \in \mathbb{R}.$$

Propozycja 2.15.1. (a) *Funkcja Γ Eulera*

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty e^{(z-1) \ln t - t} dt, \quad z \in \mathbb{H}_0,$$

jest poprawnie określona, holomorficzna, $\Gamma(1) = 1$ oraz $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

(b) W konsekwencji, $\Gamma(z+n) = (z+n-1) \cdots z\Gamma(z)$, co pozwala przy pomocy wzoru

$$\Gamma(z) := \frac{\Gamma(z+n)}{(z+n-1) \cdots z}, \quad z \in \mathbb{H}_{-n},$$

przedłużyć holomorficznie funkcję Γ na $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$.

(c) Dla $n \in \mathbb{Z}_+$, funkcja Eulera ma w punkcie $-n$ biegun rzędu pierwszego oraz $\operatorname{res}_{-n} \Gamma = \frac{(-1)^n}{n!}$.

Dowód. (a), (b) ĆWICZENIE.

(c)

$$\lim_{z \rightarrow -n} (z+n)\Gamma(z) = \lim_{z \rightarrow -n} (z+n) \frac{\Gamma(z+n+1)}{(z+n)(z+n-1) \cdots z} = \frac{\Gamma(1)}{(-1) \cdots (-n)} = \frac{(-1)^n}{n!}. \quad \square$$

2.16. Transformacja Laplace'a

Niech $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ oznacza rodzinę wszystkich funkcji $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ takich, że:

- f jest kawałkami ciągła w $\mathbb{R}_+$ w tym sensie, że istnieją punkty $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N$ takie, że $f|_{(t_{j-1}, t_j)}$ ma ciągłe przedłużenie na $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \dots, N$, oraz $f|_{(t_N, +\infty)}$ ma ciągłe przedłużenie na $[t_N, +\infty)$.

- istnieją stałe $M, m \geq 0$ takie, że $|f(t)| \leq Me^{mt}$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Zauważmy, że $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ jest $\mathbb{C}$ -algebrą. Dla $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ zdefiniujmy

$$m(f) := \inf\{m \geq 0 : \exists M \geq 0 : |f(t)| \leq Me^{mt}, t \in \mathbb{R}_+\}.$$

Oczywiście dla funkcji ograniczonych f mamy $m(f) = 0$.

Dla $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ zdefiniujmy *transformatę Laplace'a* ⁽²⁷⁾

$$F(s) = \mathcal{L}(f)(s) := \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt, \quad s \in \mathbb{H}_{m(f)}.$$

⁽²⁶⁾ Uwaga: dopuszczamy $b = +\infty$.

⁽²⁷⁾ Pierre Simon de Laplace (1749–1827) — astronom, matematyk i fizyk francuski.

Zauważmy, że funkcja F jest poprawnie określona bowiem dla dowolnego $m > m(f)$ mamy $|f(t)| \leq Me^{mt}$, $t \in \mathbb{R}_+$, dla pewnej stałej $M \geq 0$. Wtedy $|f(t)e^{-st}| \leq Me^{(m-\operatorname{Re} s)t}$, $t \in \mathbb{R}$, skąd wynika, że $F(s)$ jest poprawnie określona dla $s \in \mathbb{H}_m$. Z twierdzenia o funkcjach danych całką wynika, że $F \in \mathcal{O}(\mathbb{H}_{m(f)})$. Ponadto,

$$|F(s)| \leq \frac{M}{\operatorname{Re} s - m} \xrightarrow{\mathbb{H}_m \ni s \rightarrow \infty} 0.$$

$\mathcal{L}$ jest oczywiście operatorem $\mathbb{C}$ -liniowym.

Ćwiczenie 2.16.1. Sprawdzić i uzupełnić następującą tabelkę.

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
$e^{\lambda t}$ ($\lambda \in \mathbb{C}$)	$\frac{1}{s-\lambda}$
$\sin t$	
$\cos t$	
$\sinh t$	
$\cosh t$	
$f(at)$ ($a > 0$)	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
$f(t + \omega) = f(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ ($\omega > 0$)	$\frac{1}{1-e^{-\omega s}} \int_0^\omega f(t)e^{-st} dt$
$f(t-b)$ ($b > 0$)	$e^{-bs} F(s)$
$f(t+b)$ ($b > 0$)	$e^{bs} (F(s) - \int_0^b f(t)e^{-st} dt)$
t^α ($\alpha \geq 0$)	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$
$e^{-\lambda t} f(t)$ ($\lambda \in \mathbb{C}$)	$F(s+\lambda)$
$\frac{e^{ct} t^{k-1}}{(k-1)!}$	$\frac{1}{(s-c)^k}$
$(-t)^k f(t)$	$F^{(k)}(s)$
$f^{(k)}(t)$ ($f^{(j)} \in \mathcal{D}(\mathcal{L}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_{>0})$, $j = 1, \dots, k$)	$s^k F(s) - \sum_{j=0}^{k-1} s^j f^{(k-j-1)}(0+)$

Jedynym trudniejszym wzorem jest wzór na $\mathcal{L}(t^\alpha)$. Dla $s \in \mathbb{H}_0$ mamy

$$\mathcal{L}(t^\alpha)(s) = \lim_{\substack{r \rightarrow 0+ \\ R \rightarrow +\infty}} \int_r^R t^\alpha e^{-st} dt \stackrel{t=u/s}{=} \lim_{\substack{r \rightarrow 0+ \\ R \rightarrow +\infty}} \int_{[rs, Rs]} \left(\frac{u}{s}\right)^\alpha e^{-u} \frac{1}{s} du = \frac{1}{s^{\alpha+1}} \lim_{\substack{r \rightarrow 0+ \\ R \rightarrow +\infty}} \int_{[rs, Rs]} u^\alpha e^{-u} du.$$

Pozostaje pokazać, że

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0+ \\ R \rightarrow +\infty}} \int_{[rs, Rs]} u^\alpha e^{-u} du = \lim_{\substack{r \rightarrow 0+ \\ R \rightarrow +\infty}} \int_{[r|s|, R|s|]} u^\alpha e^{-u} du = \int_0^\infty u^\alpha e^{-u} du = \Gamma(\alpha+1).$$

W tym celu korzystamy z twierdzenia o residuach dla obszaru ograniczonego drogą

$$[r|s|, R|s|] \cup C_0^\varphi(R|s|) \cup (-[rs, Rs]) \cup (-C_0^\varphi(r|s|)),$$

gdzie $\varphi = \operatorname{Arg} s \in (-\pi/2, \pi/2)$. Pozostaje oszacować całki po łukach:

$$\left| \int_{C_0^\varphi(r|s|)} z^\alpha e^{-z} dz \right| \leq \left| \int_0^\varphi (\tau|s|)^{\alpha+1} e^{-\tau|s| \cos t} dt \right| \leq \frac{\pi}{2} (\tau|s|)^{\alpha+1} e^{-\tau|s| \cos \varphi} \begin{cases} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0+} 0 \\ \xrightarrow{\tau \rightarrow +\infty} 0 \end{cases}.$$

Przykład 2.16.2. Rozważmy równanie

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(t),$$

gdzie $y \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$, $y^{(j)} \in \mathcal{D}(\mathcal{L}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_{>0})$, $j = 1, \dots, n$, $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$. Niech $\mathcal{L}(f) = F$, $\mathcal{L}(y) = Y$, $p_j := y^{(j)}(0+)$, $j = 0, \dots, n$, $P(s) := a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0$. Dostajemy

$$F = \sum_{k=0}^n a_k \mathcal{L}(y^{(k)}) = \sum_{k=0}^n a_k \left(s^k Y - \sum_{j=0}^{k-1} s^j p_{k-j-1} \right) = PY - Q,$$

gdzie $Q \in \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{C})$.

Część II

Semestr VII

Funkcje holomorficzne II

3.1. Twierdzenie o residuach pochodnej logarytmicznej, twierdzenia Rouchégo i Hurwitza

Twierdzenie 3.1.1 (Twierdzenie o residuach pochodnej logarytmicznej). *Niech D będzie obszarem p -spójnym ograniczonym p drogami Jordana zorientowanymi dodatnio, niech $\overline{D} \subset \Omega$, gdzie Ω jest zbiorem otwartym, i niech $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, $f \not\equiv 0$ na D , będzie taka, że $f^{-1}(0) \cup S(f) \subset D$ ($f^{-1}(0) \cup S(f)$ musi być zbiorem skończonym). Niech $\alpha(z) := \text{ord}_z f$, $z \in f^{-1}(0)$, i niech $\beta(b)$ oznacza rząd bieguna funkcji f w punkcie $b \in S(f)$. Wtedy, dla dowolnej funkcji $\varphi \in \mathcal{O}(\Omega)$, mamy*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \varphi(\zeta) \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = \sum_{z \in f^{-1}(0)} \alpha(z) \varphi(z) - \sum_{b \in S(f)} \beta(b) \varphi(b).$$

W szczególności, dla $\varphi = 1$, mamy

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \varphi(\zeta) \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = Z - B,$$

gdzie Z (odp. B) oznacza liczbę zer (odp. biegunów) funkcji f liczonych z krotnościami.

Dowód. Na podstawie twierdzenia o residuach, mamy

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \varphi(\zeta) \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = \sum_{z \in f^{-1}(0)} \text{res}_z \left(\varphi \frac{f'}{f} \right) + \sum_{b \in S(f)} \text{res}_b \left(\varphi \frac{f'}{f} \right) = \sum_{z \in f^{-1}(0)} \alpha(z) \varphi(z) - \sum_{b \in S(f)} \beta(b) \varphi(b),$$

ponieważ, jeżeli $f(z) = (z - a)^k g(z)$, $z \in \mathbb{A}(a, 0, r) \subset \subset D$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$ oraz $g \in \mathcal{O}(K(a, r))$, $g(a) \neq 0$, to

$$\varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} = \varphi(z) \frac{k(z - a)^{k-1} g(z) + (z - a)^k g'(z)}{(z - a)^k g(z)} = \varphi(z) \frac{k}{z - a} + \varphi(z) \frac{g'(z)}{g(z)}, \quad z \in \mathbb{A}(a, 0, r). \quad \square$$

Twierdzenie 3.1.2 (Twierdzenie Rouchégo ⁽¹⁾). *Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem ograniczonym, i niech $f, g \in \mathcal{O}(D) \cap \mathcal{C}(\overline{D})$, będą takie, że $|g(\zeta)| < |f(\zeta)|$, $\zeta \in \partial D$. Wtedy $f + g$ i f mają w D tyle samo zer liczonych z krotnościami.*

Dowód. Zauważmy, że funkcje $f + g$ i f nie mogą mieć zer na ∂D — mogą więc mieć w D tylko skończoną liczbę zer. Niech $G \subset \subset D$ będzie obszarem p -spójnym ograniczonym p drogami Jordana zorientowanymi dodatnio takim, że $(f + g)^{-1}(0) \cup f^{-1}(0) \subset G$ oraz $|g(\zeta)| < |f(\zeta)|$, $\zeta \in \partial G$. Istnienie obszaru G wynika np. z rozumowania korzystającego z siatek kwadratowych, tak jak to robiliśmy w dowodzie Propozycji 2.6.5.

Zauważmy, że dla $\zeta \in \partial G$ i $t \in [0, 1]$ mamy $|f(\zeta) + tg(\zeta)| \geq |f(\zeta)| - t|g(\zeta)| \geq |f(\zeta)| - |g(\zeta)| > 0$, co w szczególności oznacza, że funkcja $f + tg$ nie ma zer na ∂G . Niech $Z(t)$ oznacza liczbę zer funkcji $f + tg$ w G liczonych z krotnościami. Na podstawie twierdzenia o residuach pochodnej logarytmicznej wiemy, że

$$Z(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(\zeta) + tg'(\zeta)}{f(\zeta) + tg(\zeta)} d\zeta, \quad t \in [0, 1].$$

Pozostaje zauważyć, że Z jest funkcją ciągłą zmiennej t (na podstawie twierdzenia z Analizy o funkcjach danych całką). $\square$

⁽¹⁾ Eugene Rouché (1832–1910) — matematyk francuski.

Wniosek 3.1.3. *Dowolny wielomian $P \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C})$, $\deg P = n \geq 1$, ma dokładnie n pierwiastków zespolonych liczonych z krotnościami.*

Dowód. Niech $P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$, $f(z) := a_n z^n$, $g(z) := a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$. Wtedy $|g(\zeta)| < |f(\zeta)|$, $\zeta \in C(R)$, dla dostatecznie dużego R (ĆWICZENIE). Teraz wystarczy już tylko skorzystać z twierdzenia Rouchégo. $\square$

Twierdzenie 3.1.4 (Twierdzenie Hurwitza ⁽²⁾). *Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie dowolnym obszarem, $(f_k)_{k=1}^\infty \subset \mathcal{O}(D)$, $f_k \rightarrow f$ niemal jednostajnie w D , $f \not\equiv 0$. Wtedy dla $a \in D$ i $d \in \mathbb{Z}_+$, NWSR:*

- (i) $a \in D$ jest zerem d -krotnym funkcji f ;
- (ii) istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że dla dowolnego $0 < \delta < \varepsilon$, istnieje $k_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla dowolnego $k \geq k_0$ funkcja f_k ma w $K(a, \delta)$ dokładnie d zer liczonych z krotnościami.

Dowód. (i) $\Rightarrow$ (ii): Dobierzmy $\varepsilon > 0$ takie, że $f(z) \neq 0$, $z \in \overline{K}(a, \varepsilon) \setminus \{a\}$. Niech $0 < \delta < \varepsilon$ i niech

$$\eta := \frac{1}{2} \min\{|f(z)| : z \in C(a, \delta)\} > 0.$$

Dobierzmy $k_0 \in \mathbb{N}$ tak, by $|f_k(z) - f(z)| \leq \eta$ dla $z \in \overline{K}(a, \delta)$, $k \geq k_0$. Wtedy, dla $z \in C(a, \delta)$ i $k \geq k_0$, mamy $|f_k(z) - f(z)| \leq \eta < 2\eta \leq |f(z)|$. Korzystając z twierdzenia Rouchégo, wnioskujemy stąd, że funkcje $f_k = (f_k - f) + f$ i f mają w $K(a, \delta)$ tyle samo zer liczonych z krotnościami.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Poprzednie rozumowanie pokazuje, że f musi mieć w a zero krotności d . $\square$

Wniosek 3.1.5. *Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie dowolnym obszarem, $(f_k)_{k=1}^\infty \subset \mathcal{O}(D)$, $f_k \rightarrow f$ niemal jednostajnie w D , $f \not\equiv \text{const}$. Załóżmy, że dla dowolnego k funkcja f_k jest iniektywna. Wtedy f jest iniektywna.*

Dowód. Przypuśćmy, że $f(a) = f(b) =: c$ dla pewnych $a, b \in D$, $a \neq b$. Niech $K(a, r) \cap K(b, r) = \emptyset$. Stosując twierdzenie Hurwitza do funkcji $(f_k - c)_{k=1}^\infty$, $f - c$ i punktu a (odp. b), wnioskujemy, że istnieje $k_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla dowolnego $k \geq k_0$ funkcja $f_k - c$ ma zarówno w kole $K(a, r)$ jak i w kole $K(b, r)$, co najmniej po jednym zerze, powiedzmy, a_k, b_k , czyli $f_k(a_k) = f_k(b_k)$, $k \geq k_0$ — sprzeczność. $\square$

3.2. Twierdzenie Schottky'ego

Twierdzenie 3.2.1 (Twierdzenie Schottky'ego ⁽³⁾). *Dla dowolnych liczb $\alpha > 0$ i $0 < \theta < 1$ istnieje stała $M(\alpha, \theta) > 0$ taka, że dla dowolnego $r > 0$ i funkcji $f \in \mathcal{O}(K(r))$ takiej, że $0, 1 \notin f(K(r))$ oraz $|f(0)| \leq \alpha$, mamy $|f(z)| \leq M(\alpha, \theta)$, $z \in \overline{K}(\theta r)$.*

Na wstępie pokażemy, że Twierdzenie Schottky'ego jest równoważne każdemu z następujących dwóch twierdzeń.

Twierdzenie 3.2.2 (Twierdzenie Montela). *Dla dowolnego obszaru $D \subset \mathbb{C}$, dowolna rodzina $\mathcal{R} \subset \mathcal{O}(D)$ taka, że istnieją $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$, $w_1 \neq w_2$, takie, że $w_1, w_2 \notin f(D)$, $f \in \mathcal{R}$, jest normalna.*

Zauważmy, że oczywiście każda rodzina ograniczona nie przyjmuje dwóch wartości. Stąd oraz z Lematu 2.4.2 wynika, że powyższe twierdzenie Montela stanowi daleko idące uogólnienie Propozycji 2.4.3.

Twierdzenie 3.2.3 (Twierdzenie Schottky'ego II). *Dla dowolnego $\alpha > 0$ rodzina*

$$\mathcal{F}_\alpha := \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}) : |f(0)| \leq \alpha\}$$

jest normalna.

Dowód tego, że Twierdzenie 3.2.1 $\Rightarrow$ Twierdzenie 3.2.2. Po zastosowaniu transformacji $f \mapsto \frac{f-w_1}{w_2-w_1}$, możemy założyć, że $w_1 = 0$, $w_2 = 1$. Wobec Lematu 2.4.2, wystarczy pokazać, że rodzina $\mathcal{R}$ jest lokalnie normalna. Weźmy dowolny ciąg $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{R}$. Ustalmy $K(a, r) \subset D$. Jeżeli ciąg $(f_n(a))_{n=1}^\infty$ jest ograniczony, np. $|f_n(a)| \leq \alpha$, $n \in \mathbb{N}$, to na podstawie twierdzenia Schottky'ego $|f_n(z)| \leq M(\alpha, \theta)$, $z \in K(\theta r)$, $n \in \mathbb{N}$ (dla dowolnego $0 < \theta < 1$). Możemy więc skorzystać, ze standardowego twierdzenia Montela (Propozycja 2.4.3).

⁽²⁾ Adolf Hurwitz (1859–1919) — matematyk niemiecki.

⁽³⁾ Friedrich Schottky (1851–1935) — matematyk niemiecki.

Jeżeli ciąg $(f_n(a))_{n=1}^\infty$ jest nieograniczony, to przechodząc do podciągu, możemy założyć, że $(1/f_n(a))_{n=1}^\infty$ jest ciągiem ograniczonym. Zdefiniujmy $g_n := 1/f_n$ (pamiętamy, że $0 \notin f_n(D)$), $n \in \mathbb{N}$. Oczywiście $0, 1 \notin g_n(D)$, $n \in \mathbb{N}$. Powtarzając poprzednią część dowodu wnioskujemy, że $g_{n_k} \rightarrow g$ niemal jednostajnie w $K(r)$ oraz $g(a) = 0$. Wobec twierdzenia Hurwitza, musi być $g \equiv 0$, a stąd $f_{n_k} \rightarrow \infty$ niemal jednostajnie w $K(a, r)$. $\square$

Jest oczywiste, że Twierdzenie 3.2.2 $\implies$ Twierdzenie 3.2.3.

Dowód tego, że Twierdzenie 3.2.3 $\implies$ Twierdzenie 3.2.1. Przypuśćmy, że dla pewnych $\alpha > 0$, $0 < \theta < 1$ istnieją ciągi $(r_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}_{>0}$, $f_n \in \mathcal{O}(K(r_n), \mathbb{C} \setminus \{0, 1\})$ i $a_n \in \overline{K}(\theta r_n)$ takie, że $|f_n(0)| \leq \alpha$, ale $f_n(a_n) \rightarrow \infty$. Zdefiniujmy $g_n(z) := f_n(r_n z)$, $z \in \mathbb{D}$, $n \in \mathbb{N}$. Oczywiście, $(g_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{F}_\alpha$. W takim razie, wobec normalności rodziny $\mathcal{F}_\alpha$ oraz faktu, iż ciąg $(g_n(0))_{n=1}^\infty$ jest ograniczony, możemy założyć, że $g_n \rightarrow g_0$ niemal jednostajnie w $\mathbb{D}$, gdzie $g_0 \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$. Niech $b_n := a_n/r_n$. Oczywiście, $|b_n| \leq \theta$. Możemy więc założyć, że $b_n \rightarrow b_0 \in \overline{K}(\theta)$. W takim razie, $f_n(a_n) = g_n(b_n) \rightarrow g_0(b_0) \in \mathbb{C}$ — sprzeczność. $\square$

Idea dowodu Twierdzenia 3.2.3 będzie oparta na [Min-Sch 1983]. Przypomnijmy, że

$$\gamma(z) := \frac{1}{1 - |z|^2}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Lemat 3.2.4. (a) $\Delta(\ln \gamma) = 4\gamma^2$ na $\mathbb{D}$.

(b) Niech $\delta \in \mathcal{C}(\mathbb{D}, \mathbb{R}_+)$, $U := \{z \in \mathbb{D} : \delta(z) > 0\}$. Załóżmy, że $\delta \in \mathcal{C}^2(U)$ oraz $\Delta(\ln \delta) \geq 4\delta^2$ na U . Wtedy $\delta \leq \gamma$ ⁽⁴⁾.

Dowód. (a)

$$\begin{aligned} \Delta(\ln \gamma)(z) &= -\Delta \ln(1 - |z|^2) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{2x}{1 - |z|^2} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{2y}{1 - |z|^2} \\ &= \frac{2}{1 - |z|^2} + \frac{4x^2}{(1 - |z|^2)^2} + \frac{2}{1 - |z|^2} + \frac{4y^2}{(1 - |z|^2)^2} = 4\gamma^2(z), \quad z \in \mathbb{D}. \end{aligned}$$

(b) Dla $0 < r < 1$, zdefiniujmy

$$\gamma_r(z) := \frac{r}{r^2 - |z|^2}, \quad g_r(z) := \frac{\delta(z)}{\gamma_r(z)} = \delta(z) \frac{r^2 - |z|^2}{r}, \quad z \in K(r).$$

Zauważmy, że $\Delta(\ln \gamma_r) = 4\gamma_r^2$. Oczywiście $\lim_{|z| \rightarrow r} g_r(z) = 0$. Jeżeli $\delta \not\equiv 0$ w $K(r)$, to istnieje punkt $z_r \in K(r)$, w którym g_r przyjmuje maksimum dodatnie. Funkcja δ jest klasy $\mathcal{C}^2$ w otoczeniu z_r . W takim razie $\Delta(\ln g_r)(z_r) \leq 0$, a stąd

$$4(\delta^2(z_r) - \gamma_r^2(z_r)) \leq \Delta(\ln \delta)(z_r) - \Delta(\ln \gamma_r)(z_r) = \Delta(\ln g_r)(z_r) \leq 0.$$

Wynika stąd, że $g_r \leq 1$ w $K(r)$, a więc

$$\frac{\delta(z)}{\gamma(z)} = \lim_{r \rightarrow 1-} g_r(z) \leq 1, \quad z \in \mathbb{D}. \quad \square$$

Lemat 3.2.5 (Lemat Ahlforsa–Schwarza ⁽⁵⁾). Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem, $\beta \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}_+)$,

$$D_0 := \{z \in D : \beta(z) > 0\}.$$

Założmy, że $\beta \in \mathcal{C}^2(D_0)$ oraz $\Delta(\ln \beta) \geq C\beta^2$ na D_0 dla pewnej stałej $C > 0$. Wtedy dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D)$ mamy $\beta(f)|f'| \leq \frac{2}{\sqrt{C}}\gamma$ ⁽⁶⁾.

⁽⁴⁾ Uwaga: Można pokazać (ĆWICZENIE), że albo $\delta(z) < \gamma(z)$, $z \in \mathbb{D}$, albo $\delta \equiv \gamma$.

⁽⁵⁾ Lars Ahlfors (1907–1996) — matematyk fiński.

⁽⁶⁾ A przy silniejszej wersji Lematu 3.2.4 mamy nawet więcej: albo $\beta(f(z))|f'(z)| < \frac{2}{\sqrt{C}}\gamma(z)$, $z \in \mathbb{D}$, albo $\beta(f)|f'| \equiv \frac{2}{\sqrt{C}}\gamma$.

Dowód. Zdefiniujmy, $\delta := \frac{\sqrt{C}}{2}\beta(f)|f'|$. Zauważmy, że $\delta \in \mathcal{C}(\mathbb{D}, \mathbb{R}_+)$,

$$U := \{z \in \mathbb{D} : \delta(z) > 0\} = \{z \in f^{-1}(D_0) : f'(z) \neq 0\},$$

$\delta \in \mathcal{C}^2(U)$, $\ln|f'| \in \mathcal{H}(U)$ (zob. Wniosek 4.1.5(b)). Na U mamy

$$\Delta(\ln \delta) = \Delta(\ln(\beta \circ f)) = ((\Delta \ln \beta) \circ f)|f'|^2 \geq C\beta^2(f)|f'|^2 = 4\delta^2.$$

Teraz możemy zastosować Lemat 3.2.4. □

Twierdzenie 3.2.6 (Twierdzenie Liouville’a). *Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem, $\beta \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}_{>0}) \cap \mathcal{C}^2(D)$. Załóżmy, że $\Delta(\ln \beta) \geq C\beta^2$ na D dla pewnej stałej $C > 0$. Wtedy $\mathcal{O}(\mathbb{C}, D) \simeq \mathbb{C}$.*

Dowód. Przypuśćmy, że $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, D)$, $g \not\equiv \text{const}$. Możemy założyć, że $g'(0) \neq 0$. Dla $R > 0$ zastosujmy Lemat 3.2.5 do funkcji $f(z) := g(Rz)$, $z \in \mathbb{D}$. Dostajemy $\beta(g(0))R|g'(0)| \leq \frac{2}{\sqrt{C}}$, co przy $R \rightarrow +\infty$ prowadzi do sprzeczności. □

Obserwacja 3.2.7. W przypadku, gdy $D := \mathbb{D}$, $\beta := \gamma$, Twierdzenie 3.2.6 redukuje się do klasycznego twierdzenia Liouville’a.

Lemat 3.2.8. *Niech $D := \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$,*

$$\beta(z) := \frac{(1 + |z|^{1/3})^{1/2}}{|z|^{5/6}} \cdot \frac{(1 + |1 - z|^{1/3})^{1/2}}{|1 - z|^{5/6}}, \quad z \in D.$$

Wtedy

$$\Delta(\log \beta)(z) = \frac{1}{18} \left(\frac{1}{|z|^{5/3}(1 + |z|^{1/3})^2} + \frac{1}{|1 - z|^{5/3}(1 + |1 - z|^{1/3})^2} \right)$$

oraz

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{\Delta(\log \beta)(z)}{\beta^2(z)} = \begin{cases} +\infty, & \text{jeżeli } a = \infty \\ 1/36, & \text{jeżeli } a \in \{0, 1\} \end{cases}.$$

W szczególności, istnieje $C > 0$ takie, że $\Delta(\ln \beta) \geq C\beta^2$.

Dowód. Ponieważ $\ln|z|, \ln|1 - z| \in \mathcal{H}(D)$, dostajemy

$$\Delta(\ln \beta)(z) = \frac{1}{2} \left(\Delta \ln(1 + |z|^{1/3}) + \Delta \ln(1 + |1 - z|^{1/3}) \right),$$

co po prostych rachunkach (ĆWICZENIE) daje żądany wzór. □

Dowód Twierdzenia 3.2.3. Ustalmy $\alpha > 0$. Na rodzinę $\mathcal{F}_\alpha$ patrzymy jako na rodzinę funkcji $\mathbb{D} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$. Ponieważ przestrzeń docelowa jest zwarta, normalność rodziny $\mathcal{F}$ jest równoważna jej równości (Twierdzenie Ascoliiego) (ĆWICZENIE). Równości możemy sprawdzać w metryce sferycznej d na $\widehat{\mathbb{C}}$ (która na $\mathbb{C}$ jest równoważna zwykłej metryce euklidesowej). Przypomnijmy, że

$$d(w_1, w_2) = \frac{|w_1 - w_2|}{\sqrt{1 + |w_1|^2} \sqrt{1 + |w_2|^2}}, \quad w_1, w_2 \in \mathbb{C}.$$

Niech β, C będą takie, jak w Lemacie 3.2.8. Na podstawie lematu Ahlforsa dostajemy:

$$\beta(f)|f'| \leq \frac{2}{\sqrt{C}}\gamma.$$

Z drugiej strony, biorąc pod uwagę wzrost funkcji β w ∞ , istnieje stała $C_1 > 0$ (niezależna od f) taka, że

$$\frac{1}{1 + |w|^2} \leq C_1\beta(w), \quad w \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}.$$

a stąd

$$\frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2} \leq C_1\beta(f(z))|f'(z)| \leq C_1 \frac{2}{\sqrt{C}} \frac{1}{1 - |z|^2} = C_2 \frac{1}{1 - |z|^2}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Dla zbadania równości $\mathcal{F}_\alpha$, ustalmy dowolne koło domknięte $\Delta = \overline{K}(a, r) \subset \subset \mathbb{D}$. Z poprzedniego oszacowania dostajemy istnienie stałej $M > 0$ niezależnej od f takiej, że

$$\frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2} \leq M, \quad z \in \Delta.$$

Niech teraz $z_1, z_2 \in \Delta$. Pokażemy, że $d(f(z_1), f(z_2)) \leq M|z_1 - z_2|$, $f \in \mathcal{F}_\alpha$. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$ i niech $\xi_0, \dots, \xi_n \in [z_1, z_2]$ będzie „podziałem” odcinka $[z_1, z_2]$ ($\xi_0 = z_1$, $\xi_n = z_2$) takim, że:

$$\begin{aligned} \frac{1 + |f(\xi_{k-1})|^2}{\sqrt{1 + |f(\xi_k)|^2} \sqrt{1 + |f(\xi_{k-1})|^2}} &< 1 + \varepsilon, \\ \left| \frac{f(\xi_k) - f(\xi_{k-1})}{\xi_k - \xi_{k-1}} - f'(\xi_{k-1}) \right| &< \varepsilon, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Położmy $\beta_k := \sqrt{1 + |f(\xi_k)|^2} \sqrt{1 + |f(\xi_{k-1})|^2}$. Szacujemy:

$$\begin{aligned} d(f(z_1), f(z_2)) &\leq \sum_{k=1}^n d(f(\xi_{k-1}), f(\xi_k)) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\beta_k} |f(\xi_k) - f(\xi_{k-1})| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\beta_k} \left| \frac{f(\xi_k) - f(\xi_{k-1})}{\xi_k - \xi_{k-1}} - f'(\xi_{k-1}) \right| |\xi_k - \xi_{k-1}| + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\beta_k} |f'(\xi_{k-1})| |\xi_k - \xi_{k-1}| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{\beta_k} |\xi_k - \xi_{k-1}| + \sum_{k=1}^n \frac{M}{\beta_k} (1 + |f(\xi_{k-1})|^2) |\xi_k - \xi_{k-1}| \\ &\leq \varepsilon |z_1 - z_2| + C \sum_{k=1}^n (1 + \varepsilon) |\xi_k - \xi_{k-1}| = (\varepsilon + M(1 + \varepsilon)) |z_1 - z_2|, \end{aligned}$$

co przy $\varepsilon \rightarrow 0$ daje szukane oszacowanie. $\square$

3.3. Twierdzenia Picarda

Twierdzenie Sochockiego–Casoratiego–Weierstrassa posiada następujące daleko idące uogólnienie.

Twierdzenie 3.3.1 (Twierdzenie Picarda ⁽⁷⁾). *Niech $f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}(a, 0, r))$ ma w a punkt istotnie osobliwy. Wtedy dla dowolnego $0 < \varepsilon < r$:*

(a) (Małe twierdzenie Picarda) *każda wartość zespolona z wyjątkiem co najwyżej jednej jest przyjmowana przez f w $\mathbb{A}(a, 0, \varepsilon)$;*

(b) (Wielkie twierdzenie Picarda) *każda wartość zespolona z wyjątkiem co najwyżej jednej jest przyjmowana przez f w nieskończenie wielu punktach z $\mathbb{A}(a, 0, \varepsilon)$.*

Dowód. Oczywiście, wystarczy pokazać (b). Możemy założyć, że $a = 0$. Przypuśćmy, że dla pewnego $0 < \varepsilon < r$ pewne dwie różne wartości $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ są przyjmowane przez f tylko w skończonej liczbie punktów z $D_0 := \mathbb{A}(0, \varepsilon)$. Zastępując f przez $\frac{f-w_1}{w_2-w_1}$, sprowadzamy dowód do sytuacji, gdy $w_1 = 0$, $w_2 = 1$. Rozważmy ciąg $f_n(z) := f(z/2^n)$, $z \in D_0$, $n \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że $f_n(D_0) = f(D_n)$, gdzie $D_n := \mathbb{A}(0, \varepsilon/2^n)$. Wynika stąd, że $0, 1 \notin f_n(D_0)$ dla $n \gg 1$. Na podstawie „dużego” twierdzenia Montela, istnieje podciąg $(f_{n_k})_{k=1}^\infty$ taki, że $f_{n_k} \rightarrow g$ niemal jednostajnie w D_0 .

Jeżeli $g : D_0 \rightarrow \mathbb{C}$, to $|f_{n_k}| \leq M$ na $K_0 := \overline{\mathbb{A}}(\varepsilon/3, 2\varepsilon/3)$ dla pewnego $M > 0$, a stąd $|f| \leq M$ na $K_k := \overline{\mathbb{A}}(\varepsilon/(3 \cdot 2^{n_k}), 2\varepsilon/2^{n_k})$, $k \in \mathbb{N}$. W konsekwencji, korzystając z zasady maksimum, wnioskujemy, że $|f| \leq M$ na $\mathbb{A}(0, \delta)$ dla pewnego $\delta > 0$. Wobec twierdzenia Riemanna, wynika stąd, że f musi mieć w 0 osobliwość pozorną — sprzeczność.

Jeżeli $g \equiv \infty$, to dla dowolnego $M > 0$ mamy $|f_{n_k}| \geq M$ na K_0 , $k \gg 1$. Wynika stąd, że $|f| \geq M$ na K_k , $k \gg 1$. Korzystając z zasady minimum, wnioskujemy, że $|f| \leq M$ na $\mathbb{A}(0, \delta)$ dla pewnego $\delta > 0$. Wynika stąd, że $f(z) \rightarrow \infty$ przy $z \rightarrow 0$ — sprzeczność. $\square$

⁽⁷⁾ Émile Picard (1856–1941) — matematyk francuski.

3.4. Krotność

Definicja 3.4.1. Niech $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ będzie obszarem, $a \in D$, i niech $f \in \mathcal{M}(D)$. Powiemy, że funkcja f jest d -krotna w otoczeniu punktu a ($d \in \mathbb{N}$), jeżeli istnieje otoczenie $U_0 \subset D$ punktu a takie, że dla dowolnego otoczenia $U \subset U_0$ punktu a istnieje otoczenie V punktu $f(a)$ takie, że dla dowolnego $w \in V \setminus \{f(a)\}$, funkcja $f - w$ ma w U dokładnie d zer liczonych z krotnościami.

Zauważmy, że tak zdefiniowana krotność jest wyznaczona jednoznacznie.

Wniosek 3.4.2. Niech $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ będzie obszarem, $a \in D$, i niech $f \in \mathcal{M}(D)$. Wtedy NWSR:

- (i) funkcja f jest d -krotna w otoczeniu punktu a ;
- (ii) jeżeli $a \notin S(f)$, to a jest zerem d -krotnym funkcji $f - f(a)$;

jeżeli $a \in S(f)$, to a jest biegunem rzędu d funkcji f (a więc, na podstawie Propozycji 2.10.6, zerem d -krotnym funkcji $1/f$).

Dowód. (ii) $\implies$ (i): Załóżmy najpierw, że $a \in D \cap \mathbb{C} \setminus S(f)$. Niech $r > 0$ będzie takie, że jedynym zerem funkcji $f - f(a)$ w kole $K(a, r) \subset D$ jest punkt a . Niech $0 < \delta < r$ i $\eta := \min\{|f(z) - f(a)| : z \in C(a, \delta)\}$. Niech $0 < |w - f(a)| < \eta$. Wtedy $|f(a) - w| < |f(z) - f(a)|$, $z \in C(a, \delta)$. Stąd, na podstawie twierdzenia Rouchégo, funkcje $f(z) - w = (f(z) - f(a)) + (f(a) - w)$ i $f(z) - f(a)$ mają w kole $K(a, \delta)$ tyle samo zer liczonych z krotnościami.

Niech teraz $a = \infty \in D \setminus S(f)$, $g(z) = f(1/z)$. Wtedy $d = \text{ord}_0(g - g(0))$. Wobec poprzedniego rozumowania, g jest d -krotna w otoczeniu 0. Wynika stąd natychmiast, że f jest d -krotna w otoczeniu ∞ .

Założmy, że $a \in \mathbb{C} \cap S(f)$. Wtedy $d = \text{ord}_a(1/f)$. Z poprzedniej części dowodu, wynika, że funkcja $1/f$ jest d -krotna w otoczeniu a , a stąd oczywiście wnioskujemy, że f jest d -krotna w otoczeniu a .

Przypadek $a = \infty \in S(f)$ pozostawiamy jako ĆWICZENIE.

(i) $\implies$ (ii): Wynika z poprzedniego rozumowania — ĆWICZENIE. □

Wniosek 3.4.3. Niech $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ będzie obszarem i niech $f \in \mathcal{M}(D)$, $f \not\equiv \text{const}$. Wtedy f jest odwzorowaniem otwartym.

Obserwacja 3.4.4. Jeżeli $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ jest odwzorowaniem otwartym, to $|f| : D \rightarrow \mathbb{R}_+$ jest odwzorowaniem otwartym oraz dla $|f|$ zachodzi zasada maksimum i zasada minimum (ta ostatnia w punktach takich, że $f(a) \neq 0$).

3.5. Odwzorowania biholomorficzne

Definicja 3.5.1. Niech $D_1, D_2 \subset \widehat{\mathbb{C}}$ będą obszarami. Powiemy, że odwzorowanie bijektywne $f : D_1 \rightarrow D_2$ jest biholomorficzne ($f \in \text{Bih}(D_1, D_2)$), jeżeli $f \in \mathcal{M}(D_1)$ i $f^{-1} \in \mathcal{M}(D_2)$.

Niech $\text{Aut}(D) := \text{Bih}(D, D)$.

Obserwacja 3.5.2. Jeżeli $f \in \text{Bih}(D_1, D_2)$, to

$$\text{Aut}(D_1) \ni \varphi \mapsto f \circ \varphi \circ f^{-1} \in \text{Aut}(D_2)$$

jest izomorfizmem grup.

Propozycja 3.5.3. Niech $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ (odp. $D \subset \mathbb{C}$) będzie obszarem i niech $f \in \mathcal{M}(D)$ (odp. $f \in \mathcal{O}(D)$). Wtedy NWSR:

- (i) f jest biholomorficzne tzn. zbiór $G := f(D)$ jest otwarty i $f \in \text{Bih}(D, G)$;
- (ii) f jest injektywne i jednokrotne w otoczeniu każdego punktu $a \in D$ (zauważmy, że na podstawie Wniosku 3.4.2 w przypadku holomorficznym warunek ten oznacza, że $f'(z) \neq 0$, $z \in D$);
- (iii) f jest injektywne.

Dowód. Implikacje (i) $\implies$ (ii) $\implies$ (iii) są elementarne.

(iii) $\implies$ (i): W przypadku holomorficznym, na podstawie Wniosku 3.4.2, musi być $f'(z) \neq 0$, $z \in D$, co, na podstawie Propozycji 2.3.1(c), daje biholomorficzność f .

W przypadku meromorficznym, Wniosek 3.4.3 daje otwartość zbioru G . Pozostaje sprawdzić holomorficzność odwzorowania f^{-1} (jako odwzorowania określonego na zespolonej rozmaitości jednowymiarowej o wartościach w zespolonej rozmaitości jednowymiarowej).

Holomorficzność na $G \setminus \{\infty\}$, gdy $\infty \notin D$, lub na $G \setminus (\{\infty\} \cup f(\infty))$, gdy $\infty \in D$, wynika natychmiast z poprzedniej części dowodu.

Holomorficzność w otoczeniu ∞ wynika z zastosowania poprzedniej części do odwzorowania $g := 1/f$. Holomorficzność w otoczeniu $f(\infty)$ wynika z zastosowania poprzedniej części do odwzorowania $g(z) := f(1/z)$. Szczegóły pozostawiamy jako ĆWICZENIE. $\square$

3.6. Odwzorowania biholomorficzne pierścieni

Propozycja 3.6.1 (Twierdzenie Hadamarda ⁽⁸⁾ o trzech okręgach). *Niech $f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}(r_1, r_2))$, $0 < r_1 < r_2 < +\infty$, i niech*

$$M_j := \sup\{\limsup_{z \rightarrow \zeta} |f(z)| : \zeta \in C(r_j)\}, \quad j = 1, 2.$$

Wtedy

$$|f(z)| \leq M_1^{\frac{\ln \frac{|z|}{r_2}}{\ln \frac{r_2}{r_1}}} M_2^{\frac{\ln \frac{|z|}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}}}, \quad z \in \mathbb{A}(r_1, r_2).$$

W szczególności (ĆWICZENIE), jeżeli $f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}(r_1, r_2)) \cap \mathcal{C}(\bar{\mathbb{A}}(r_1, r_2))$ oraz

$$M(r) := \max\{|f(z)| : z \in C(r)\},$$

to funkcja

$$[\ln r_1, \ln r_2] \ni t \longmapsto \ln M(e^t)$$

jest wypukła.

Zobacz również Propozycja 4.4.42.

Dowód. Oczywiście możemy założyć, że $M_1, M_2 < +\infty$, $f \not\equiv \text{const}$. Niech $u(z) := |z|^\alpha |f(z)|$, $z \in \mathbb{A}(r_1, r_2)$. Zauważmy, że u jest odwzorowaniem otwartym bowiem lokalnie $u = |e^{\alpha \ell} f|$, gdzie ℓ jest lokalną gałęzią jednoznacznej logarytmu. Dla odwzorowań otwartych zachodzi zasada maksimum, a więc

$$|z|^\alpha |f(z)| \leq \max\{r_1^\alpha M_1, r_2^\alpha M_2\}, \quad z \in \mathbb{A}(r_1, r_2).$$

Dobierając α tak, by $r_1^\alpha M_1 = r_2^\alpha M_2$, dostajemy tezę (ĆWICZENIE). $\square$

Twierdzenie 3.6.2. *Jeżeli $f \in \text{Bih}(\mathbb{A}(r_1, R_1), \mathbb{A}(r_2, R_2))$, $0 < r_j < R_j < +\infty$, $j = 1, 2$, to $R_1/r_1 = R_2/r_2$ oraz, z dokładnością do obrotu, odwzorowanie f ma postać $f(z) = (r_2/r_1)z$, $z \in \mathbb{A}(r_1, R_1)$, lub $f(z) = r_1 R_2/z$, $z \in \mathbb{A}(r_1, R_1)$.*

W szczególności, dla $0 < r < R < +\infty$,

$$\text{Aut}(\mathbb{A}(r, R)) = \{z \longmapsto e^{i\theta} z : \theta \in \mathbb{R}\} \cup \{z \longmapsto e^{i\theta} r R/z : \theta \in \mathbb{R}\};$$

grupa $\text{Aut}(\mathbb{A}(r, R))$ zależy od jednego parametru rzeczywistego i nie działa translatywnie.

Dowód. Po obłożeniu odwzorowania f stosownymi homotetiami, możemy założyć, że $r_1 = r_2 = 1$. Niech $g := f^{-1}$. Odwzorowanie f jest właściwe, zatem

$$\lim_{\text{dist}(z, \partial \mathbb{A}(1, R_1)) \rightarrow 0} \text{dist}(f(z), \partial \mathbb{A}(1, R_2)) = 0.$$

Zasadnicza myśl dowodu polega na pokazaniu, że albo

$$\lim_{|z| \rightarrow 1} |f(z)| = 1 \text{ i } \lim_{|z| \rightarrow R_1} |f(z)| = R_2, \quad (\dagger)$$

albo

$$\lim_{|z| \rightarrow 1} |f(z)| = R_2 \text{ i } \lim_{|z| \rightarrow R_1} |f(z)| = 1. \quad (\ddagger)$$

⁽⁸⁾ Jacques Hadamard (1865–1963) — matematyk francuski.

Przyjmijmy na moment, że $(\dagger)$ zachodzi. Wtedy na podstawie twierdzenia Hadamarda o trzech okręgach mamy:

$$|f(z)| \leq R_2^{\frac{\ln |z|}{\ln R_1}} = |z|^{\frac{\ln R_2}{\ln R_1}}, \quad z \in \mathbb{A}(1, R_1), \quad |g(w)| \leq R_1^{\frac{\ln |w|}{\ln R_2}} = |w|^{\frac{\ln R_1}{\ln R_2}}, \quad w \in \mathbb{A}(1, R_2).$$

Stąd $|f(z)| = |z|^{\frac{\ln R_2}{\ln R_1}} =: |z|^\alpha$, $z \in \mathbb{A}(1, R_1)$. Chcemy pokazać, że $\alpha = 1$.

Mamy $f(z) = e^{i\theta} e^{\alpha \operatorname{Log} z}$, $z \in \mathbb{A}(1, R_1) \setminus \mathbb{R}_-$ (dla pewnego $\theta \in \mathbb{R}$). Ponieważ f jest funkcją ciągłą musi być $e^{i\theta} e^{\alpha(\ln t + i\pi)} = e^{i\theta} e^{\alpha(\ln t - i\pi)}$, $t \in (1, R_1)$. Stąd $e^{2\alpha\pi i} = 1$, a więc $\alpha \in \mathbb{Z}$. Ponieważ f jest iniektywne musi być $\alpha = \pm 1$. Warunki $(\dagger)$ implikują, że $\alpha = 1$.

Przypadek $(\ddagger)$ sprowadza się do powyższego poprzez obłożenie odwzorowania f inwersją

$$\mathbb{A}(1, R_2) \ni w \mapsto R_2/w \in \mathbb{A}(1, R_2). \quad (*)$$

Pozostaje pokazać $(\dagger)$, $(\ddagger)$. Niech $r := \sqrt{R_2}$, $B_- := \mathbb{A}(1, r)$, $B_+ := \mathbb{A}(r, R_2)$. Ponieważ $C(r)$ nie jest krzywą homotopijną ze stałą w $\mathbb{A}(1, R_2)$, jej obraz $g(C(r))$, będący krzywą Jordana, musi „otaczać” $\mathbb{T}$. Ponieważ $g(C(r))$ jest zbiorem zwartym, istnieją liczby $1 < s_1 < s_2 < R_1$ takie, że $g(C(r)) \subset \mathbb{A}(s_1, s_2)$. Rozważmy obszary $A_+ := f(\mathbb{A}(s_2, R_1))$ i $A_- := f(\mathbb{A}(1, s_1))$. Ponieważ $A_+ \cap C(r) = \emptyset$, obszar A_+ jest zawarty w B_+ lub w B_- . Obkładając w razie potrzeby odwzorowanie f inwersją $(*)$, możemy założyć, że $A_+ \subset B_+$. Oznacza to, że $\lim_{|z| \rightarrow R_1} |f(z)| = R_2$. Pozostaje pokazać, że $A_- \subset B_-$. Gdyby $A_- \subset B_+$, wtedy moglibyśmy połączyć pewien (dowolnie wybrany) punkt $a_+ \in A_+$ z pewnym (dowolnie wybranym) punktem $a_- \in A_-$ krzywą γ leżącą w B_+ . Obraz tej krzywej $g(\gamma)$ łączyłby punkt $g(a_+) \in \mathbb{A}(s_2, R_1)$ z punktem $g(a_-) \in \mathbb{A}(1, s_1)$ i byłby rozłączny z $g(C(r))$, co oznaczałoby, że krzywa $g(C(r))$ nie otacza $\mathbb{T}$ — sprzeczność. $\square$

Ćwiczenie 3.6.3. Scharakteryzować wszystkie biholomorfizmy $f : \mathbb{A}(r_1, R_1) \rightarrow \mathbb{A}(r_2, R_2)$, $0 \leq r_j < R_j \leq +\infty$, $j = 1, 2$, w przypadkach nie objętych przez Twierdzenie 3.6.2.

3.7. Twierdzenie Riemanna

Twierdzenie 3.7.1 (Twierdzenie Riemanna). *Niech $D \subset \hat{\mathbb{C}}$ będzie obszarem jednospójnym takim, że $\# \partial D \geq 2$. Wtedy istnieje odwzorowanie biholomorficzne $f : D \rightarrow \mathbb{D}$.*

Dowód. Przypadek, gdy $\infty \in D$ sprowadzamy do przypadku, gdy $D \subset \mathbb{C}$ przy pomocy inwersji. Niech $a, b \in \partial D$, $a \neq b$. Ustalmy $z_0 \in D$ i niech

$$\mathcal{R} := \{f \in \mathcal{O}(D, \mathbb{D}) : f(z_0) = 0, f \text{ jest iniektywna}\}.$$

Idea dowodu jest następująca: Najpierw pokażemy, że $\mathcal{R} \neq \emptyset$. Niech $M := \sup\{|f'(z_0)| : f \in \mathcal{R}\}$. Ponieważ każda $f \in \mathcal{F}$ jest iniektywna, musi być $M > 0$. Niech $(f_k)_{k=1}^\infty \subset \mathcal{R}$, $f'_k(z_0) \rightarrow M$. Na podstawie twierdzenia Montela możemy założyć, że $f_k \rightarrow f_0$ niemal jednostajnie w D . Oczywiście $f_0 \in \mathcal{O}(D, \mathbb{D})$, $f'_0(z_0) = M > 0$. W szczególności, $f_0 \not\equiv \text{const}$. Ponieważ $f_0(z_0) = 0$, zatem $f \in \mathcal{O}(D, \mathbb{D})$. Na podstawie twierdzenia Hurwitza $f_0 \in \mathcal{R}$. Na koniec pokażemy, że $f_0(D) = \mathbb{D}$, a więc f_0 jest poszukiwanym odwzorowaniem.

$\mathcal{R} \neq \emptyset$: Oczywiście wystarczy skonstruować holomorficzne odwzorowanie iniektywne $f : D \rightarrow \mathbb{D}$. W tym zaś celu wystarczy skonstruować holomorficzne odwzorowanie iniektywne $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ takie, że $K(c, r) \cap g(D) = \emptyset$ (dla pewnych $c \in \mathbb{C}$ i $r > 0$). Istotnie, gdybyśmy takie g mieli, to jako moglibyśmy zdefiniować $f := \frac{r}{g-c}$. Przystępujemy do konstrukcji g .

Jeżeli $a \in \mathbb{C}$, to niech g będzie gałęzią jednoznacznej funkcji $\sqrt{z-a}$. Jest to funkcja iniektywna w D oraz $g(D) \cap (-g(D)) = \emptyset$ (jeżeli $g(z_1) = -g(z_2)$, to $g^2(z_1) = g^2(z_2)$, a stąd $z_1 = z_2$, a więc $h(z_1) = 0$ — sprzeczność). Teraz bierzemy dowolne $K(c, r) \subset -g(D)$.

$f_0(D) = \mathbb{D}$: Przypuśćmy, że $G := f_0(D) \subsetneq \mathbb{D}$. Wykażemy następujący pomocniczy lemat.

Lemat 3.7.2. *Niech $G \subsetneq \mathbb{D}$ będzie obszarem jednospójnym, $0 \in G$. Wtedy istnieje odwzorowanie iniektywne $\psi \in \mathcal{O}(G, \mathbb{D})$ takie, że $\psi(0) = 0$, $|\psi'(0)| > 1$ oraz $|\psi(z)| > |z|$, $z \in G \setminus \{0\}$.*

Dowód. Ustalmy $c \in \mathbb{D} \setminus G$ i niech $G_1 := h_c(G)$. Wtedy $G_1 \subset \mathbb{D}$ jest obszarem jednospójnym i $0 \notin G_1$. W szczególności, w G_1 istnieje gałąź g pierwiastka. Niech $d := g(h_c(0))$ i niech $\psi := h_d \circ g \circ h_c$. Wtedy $\psi : G \rightarrow \mathbb{D}$ jest iniektywne i $\psi(0) = 0$. Zauważmy, że $\psi^{-1} = h_{-c} \circ (h_{-d})^2 \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ (w sensie przedłużenia z $\psi(G)$ na $\mathbb{D}$). Z lematu Schwarza wynika, że $|\psi^{-1}(w)| \leq |w|$, $w \in \mathbb{D}_*$, $|(\psi^{-1})'(0)| \leq 1$. Gdyby w którejś z tych nierówności zachodziła równość, wtedy $\psi^{-1}(w) = e^{i\alpha}w$, a stąd $(h_{-d}(z))^2 = h_c(e^{i\alpha}z)$, $z \in \mathbb{D}$ — sprzeczność. $\square$

Niech teraz $\psi \in \mathcal{O}(G, \mathbb{D})$ będzie taka, jak w powyższym lemacie. Zdefiniujmy $f := \psi \circ f_0$. Wtedy $f \in \mathcal{R}$ i $|f'(z_0)| = |\psi'(0)f'_0(z_0)| = |\psi'(0)|M > M$ — sprzeczność. $\square$

Wniosek 3.7.3. Niech $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ będzie obszarem jednospójnym takim, że $\#\partial D \geq 2$. Niech $z_0 \in D \cap \mathbb{C}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Wtedy istnieje dokładnie jedno odwzorowanie $f \in \text{Bih}(D, \mathbb{D})$ takie, że $f(z_0) = 0$ i $\theta \in \arg f'(z_0)$.

Dowód. Jeżeli $f_1, f_2 : D \rightarrow \mathbb{D}$ są dwoma takimi odwzorowaniami, to $\varphi = f_2 \circ f_1^{-1} \in \text{Aut}(\mathbb{D})$, $\varphi(0) = 0$ i $\varphi'(0) \in \mathbb{R}_{>0}$. Stąd $\varphi = \text{id}$, a więc $f_1 \equiv f_2$.

Na podstawie twierdzenia Riemanna istnieje odwzorowanie biholomorficzne $f : D \rightarrow \mathbb{D}$. Składając g z $h_{f(z_0)} \in \text{Aut}(\mathbb{D})$, uzyskujemy $f(z_0) = 0$. Teraz składając ze stosownym obrotem dostajemy $\theta \in \arg f'(z_0)$. $\square$

Obserwacja 3.7.4. (a) Efektywne znalezienie odwzorowania $f : D \rightarrow \mathbb{D}$ (lub $f^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow D$) w twierdzeniu Riemanna jest praktycznie niemożliwe z wyjątkiem sytuacji, gdy obszar D spełnia jakieś dodatkowe warunki regularności. Tak jest np. dla wielokątów, gdzie odwzorowanie biholomorficzne $g : \mathbb{H}^+ \rightarrow D$ może być dane tzw. wzorami Christoffela ⁽⁹⁾.

(b) Twierdzenie Riemanna ma swoje odpowiedniki dla obszarów wielospójnych, jednak obszary kanoiczne nie są już takie proste i intuicyjne, jak dla obszarów jednospójnych. Dla przykładu:

Każdy dwuspójny obszar $D \subset \mathbb{C}$, którego żadna składowa brzegu nie redukuje się do punktu, da się przekształcić biholomorficznie na pierścień $\mathbb{A}(1, \rho)$ dla pewnego $\rho > 1$, przy czym można to zrobić tak, aby z góry zadanej składowej brzegu odpowiadał okrąg jednostkowy.

Zauważmy, że liczba ρ jest jednoznacznie wyznaczona.

Twierdzenie* 3.7.5 (Twierdzenie Osgooda–Carathéodory’ego ⁽¹⁰⁾ ⁽¹¹⁾). Każde odwzorowanie biholomorficzne $f : D_1 \rightarrow D_2$ obszarów ograniczonych krzywymi Jordana przedłuża się do homeomorfizmu $\tilde{f} : \overline{D}_1 \rightarrow \overline{D}_2$.

Obserwacja 3.7.6. Twierdzenie Osgooda–Carathéodory’ego można „lokalizować”, np.:

Niech D będzie obszarem jednospójnym takim, że $L \subset \partial D$, gdzie L jest obrazem łuku Jordana $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ takim, że $\gamma((0, 1)) = U \cap \partial D$, gdzie U jest pewnym zbiorem otwartym. Wtedy każde odwzorowanie biholomorficzne $f : D \rightarrow \mathbb{D}$ rozszerza się do homeomorfizmu $\tilde{f} : D \cup L \rightarrow \mathbb{D} \cup C$, gdzie $C \subset \mathbb{T}$ jest pewnym (domkniętym) łukiem.

Wniosek 3.7.7. Niech $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}$ będą obszarami ograniczonymi krzywymi Jordana zorientowanymi dodatnio względem tych obszarów. Niech $a_1, a_2, a_3 \in \partial D_1$, $b_1, b_2, b_3 \in \partial D_2$ będą dowolnymi układami parami różnych punktów następujących po sobie w orientacji dodatniej. Wtedy istnieje odwzorowanie $f \in \text{Bih}(D_1, D_2)$ takie, że $\tilde{f}(a_j) = b_j$, $j = 1, 2, 3$ (gdzie $\tilde{f}$ oznacza homeomorficzne rozszerzenie f z twierdzenia Osgooda–Carathéodory’ego).

Dowód. Wobec twierdzeń Riemanna i Osgooda–Carathéodory’ego, wystarczy rozważyć przypadek $D_1 = D_2 = \mathbb{D}$ — ĆWICZENIE. $\square$

⁽⁹⁾ Elwin Christoffel (1829–1900) — matematyk niemiecki.

⁽¹⁰⁾ William Osgood (1864–1943) — matematyk amerykański.

⁽¹¹⁾ Constantin Carathéodory (1873–1950) — matematyk niemiecki

3.8. Twierdzenie Runego

Obserwacja 3.8.1. Dla dowolnego zbioru otwartego $\Omega \subset \widehat{\mathbb{C}}$ istnieje ciąg zbiorów zwartych $K_k \subset \subset \Omega$, $k \in \mathbb{N}$, taki, że $K_k \subset \text{int } K_{k+1}$, $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} K_k$ oraz każda składowa spójna zbioru otwartego $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K_k$ przecina $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$, $k \in \mathbb{N}$.

Istotnie, przypadek $\Omega = \widehat{\mathbb{C}}$ jest trywialny. Jeżeli $\infty \in \Omega \subsetneq \widehat{\mathbb{C}}$, to biorąc $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ i stosując homografię $\frac{1}{z-z_0}$ sprowadzamy zadanie do $\Omega \subset \mathbb{C}$. Wtedy bierzemy $K_k := \{z \in \Omega : |z| \leq k, \text{dist}(z, \partial\Omega) \geq 1/k\}$, $k \gg 1$. Niech U będzie składową $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K_k$. Przypuśćmy, że $U \subset \Omega$. Rozważmy dwa przypadki:

- Istnieje punkt $a \in U$ taki, że $|a| > k$. Wtedy $\{ta : 1 \leq t \leq +\infty\} \subset U$, co oznacza, że $\infty \in U$ — sprzeczność.
- Istnieje punkt $a \in U$ taki, że $\text{dist}(a, \partial\Omega) < 1/k$. Niech $b \in \partial\Omega$ będzie taki, że $|a - b| = \text{dist}(a, \partial\Omega)$. Wtedy $[a, b] \subset U$ — sprzeczność.

Twierdzenie 3.8.2 (Twierdzenie Runego ⁽¹²⁾). (a) Niech $\Omega \subset \widehat{\mathbb{C}}$ będzie zbiorem otwartym i niech $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Wtedy istnieje ciąg $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ funkcji wymiernych o biegunach w $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ taki, że $f_k \rightarrow f$ niemal jednostajnie w Ω . Równoważnie (ĆWICZENIE): dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset \subset \Omega$ oraz $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja wymierna g o biegunach w $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ taka, że $|g - f| \leq \varepsilon$ na K .

(b) Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie zbiorem otwartym takim, że $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ jest spójny i niech $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Wtedy istnieje ciąg $(f_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(\mathbb{C})$ taki, że $f_k \rightarrow f$ niemal jednostajnie w Ω . Równoważnie (ĆWICZENIE): dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset \subset \Omega$ oraz $\varepsilon > 0$ istnieje wielomian $g \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ taki, że $|g - f| \leq \varepsilon$ na K .

Ćwiczenie 3.8.3. Pokazać, że twierdzenie Runego o aproksymacji wielomianami nie zachodzi dla pierścienia $\mathbb{A}(r, R)$, $0 < r < R < +\infty$.

Dowód. (a) Jeżeli $\Omega = \widehat{\mathbb{C}}$, to $f \equiv \text{const}$ i twierdzenie jest trywialne. Jeżeli $\infty \in \Omega \subsetneq \widehat{\mathbb{C}}$, to bierzemy $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ i przekształcamy całość przez homografię $h(z) := \frac{1}{z-z_0}$. Jeżeli g_1 jest funkcją wymierną o biegunach w $\widehat{\mathbb{C}} \setminus h(\Omega)$ taką, że $|g_1 - f \circ h^{-1}| \leq \varepsilon$ na $h(K)$, to $g := g_1 \circ h$ jest rozwiązaniem naszego problemu. Możemy więc założyć, że $\infty \notin \Omega$.

Niech $(K_k)_{k=1}^{\infty}$ będzie taki, jak w Obserwacji 3.8.1. Wystarczy umieć aproksymować funkcję f na każdym zbiorze K_k . Ustalmy zbiór $K := K_{k_0}$ i ε . Niech G będzie zbiorem otwartym opartym na siatce kwadratowej o oczku $[\frac{j}{m}, \frac{j+1}{m}] \times [\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}]$ (dla dostatecznie dużego m) tak, by $K \subset G \subset \subset \Omega$ (por. dowód Propozycji 2.6.5). Ze wzoru całkowego Cauchy'ego dostajemy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{s=1}^N \frac{1}{2\pi i} \int_{L_s} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta =: \sum_{s=1}^N f_s(z), \quad z \in G,$$

gdzie każde L_s jest pojedynczym odcinkiem (poziomym lub pionowym) naszej siatki. Teraz wystarczy umieć aproksymować każdą z funkcji f_s jednostajnie na K funkcjami wymiernymi o biegunach w $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$. Ustalmy s . Zrobimy to w dwóch etapach.

Najpierw znajdziemy aproksymację funkcjami wymiernymi o biegunach na $L_s =: [a, b]$. Niech $\zeta(t) := a + t(b - a)$, $\zeta_{n,j} := \zeta(\frac{j}{n})$, $n \in \mathbb{N}$, $j = 0, \dots, n$. Dla $z \in K$ szacujemy

$$\begin{aligned} \left| f_s(z) - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^n \frac{f(\zeta_{n,j})}{\zeta_{n,j} - z} \frac{b-a}{n} \right| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^n \int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} \frac{f(\zeta(t))}{\zeta(t) - z} (b-a) dt - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^n \frac{f(\zeta_{n,j})}{\zeta_{n,j} - z} \frac{b-a}{n} \right| \\ &\leq \frac{|b-a|}{2\pi} \sum_{j=1}^n \int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} \left| \frac{f(\zeta(t))}{\zeta(t) - z} - \frac{f(\zeta_{n,j})}{\zeta_{n,j} - z} \right| dt. \end{aligned}$$

⁽¹²⁾ Karl Runge (1856–1927) — matematyk niemiecki.

Korzystając teraz z jednostajnej ciągłości funkcji $K \times [a, b] \ni (z, \zeta) \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$, wnioskujemy, że dla dostatecznie dużego n mamy

$$\left| f_s(z) - \frac{b-a}{2\pi i n} \sum_{j=1}^n \frac{f(\zeta_{n,j})}{\zeta_{n,j} - z} \right| \leq \frac{|b-a|}{2\pi} \varepsilon, \quad z \in K.$$

W drugim etapie wystarczy, dla danego $c \in [a, b]$, umieć aproksymować funkcję $\frac{1}{z-c}$ jednostajnie na K funkcjami wymiernymi o biegunach w $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$. Wynika to natychmiast z następującego ogólnego lematu (i własności zbioru K).

Lemat 3.8.4 (Lemat o przesuwaniu biegunów). *Niech $K \subset \subset \mathbb{C}$ będzie zbiorem zwartym i niech $f = P(\frac{1}{z-a})$ będzie funkcją wymierną o biegunie w punkcie $a \in \mathbb{C} \setminus K$ ($P \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$, $\deg P \geq 1$). Niech $b \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus K$ leży w tej samej składowej zbioru $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$ co punkt a . Wtedy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja wymierna $g = Q(\frac{1}{z-b})$ o biegunie w punkcie b taka, że $|f - g| \leq \varepsilon$ na K (jeżeli $b = \infty$, to rozumiemy, że g jest wielomianem).*

Dowód. Niech G oznacza składową $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$, do której należą punkty a i b . Odnajmy, że zbiór $G \cap \mathbb{C}$ jest obszarem. Niech G_0 oznacza zbiór tych punktów $c \in G \cap \mathbb{C}$, dla których przy dowolnym $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja wymierna $h = R(\frac{1}{z-c})$ taka, że $|h - f| \leq \varepsilon$ na K . Oczywiście $a \in G_0$. Pokażemy, że zbiór G_0 jest otwarty i domknięty w $G \cap \mathbb{C}$, co udowodni, że $G_0 = G \cap \mathbb{C}$.

Otwartość: Niech $c \in G_0$ i niech $h = R(\frac{1}{z-c})$ będzie funkcją wymierną taką, że $|f - h| \leq \varepsilon/2$ na K . Niech $r := \text{dist}(c, K)$, $d \in K(c, r/3) \subset \subset G$. Wystarczy umieć aproksymować jednostajnie na K funkcję $\frac{1}{z-c}$ funkcjami postaci $S(\frac{1}{z-d})$. W tym celu wystarczy zauważyć, że dla $z \in K$ mamy $|\frac{c-d}{z-d}| \leq 1/2$ oraz

$$\frac{1}{z-c} = \frac{1}{z-d+d-c} = \frac{1}{z-d} \frac{1}{1 - \frac{c-d}{z-d}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c-d)^n}{(z-d)^{n+1}},$$

przy czym szereg jest jednostajnie zbieżny na K .

Domkniętość: Niech $d \in G'_0 \cap G \cap \mathbb{C}$. Dobieramy $c \in G_0 \cap K(d, r/2)$, gdzie $r := \text{dist}(d, K)$. Wtedy $|\frac{c-d}{z-d}| \leq 1/2$ i możemy powtórzyć powyższe rozumowanie.

Pozostaje przypadek, w którym $\infty \in G$. Dobieramy $c \in G_0 \setminus K(2r)$, gdzie $K \subset K(r)$. Wtedy $|\frac{z}{c}| \leq 1/2$, $z \in K$, oraz

$$\frac{1}{z-c} = -\frac{1}{c} \frac{1}{1 - \frac{z}{c}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{c^{n+1}},$$

przy czym szereg jest zbieżny jednostajnie na K . □

(b) Dowód wynika z (a) i z lematu o przesuwaniu biegunów. □

Twierdzenie Rungego o aproksymacji wielomianami można istotnie wzmocnić.

Twierdzenie* 3.8.5 (Twierdzenie Mergeljana⁽¹³⁾). *Niech $K \subset \mathbb{C}$ będzie zbiorem zwartym takim, że zbiór $\mathbb{C} \setminus K$ jest spójny i niech $f \in \mathcal{C}(K) \cap \mathcal{O}(\text{int } K)$. Wtedy istnieje ciąg $(f_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(\mathbb{C})$ taki, że $f_k \rightarrow f$ jednostajnie na K .*

Obserwacja 3.8.6. Zauważmy, że założenia w twierdzeniu Mergeljana, to również warunki konieczne. Istotnie, jeżeli funkcja $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ aproksymuje się jednostajnie na K wielomianami zespolonymi, to f musi być ciągła i na podstawie twierdzenia Weierstrassa, f musi być holomorficzna w $\text{int } K$. Gdyby zbiór otwarty $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$ miał składową ograniczoną D , to dla dowolnego $a \in D$, funkcja $f(z) := \frac{1}{z-a}$ nie może być aproksymowalna jednostajnie na K wielomianami, bowiem wtedy, na podstawie zasady maksimum, byłaby aproksymowalna jednostajnie na D wielomianami.

⁽¹³⁾ Sergiej Mergeljan (1928–2008) — matematyk armeński.

3.9. Twierdzenie Mittag-Lefflera

Twierdzenie 3.9.1 (Twierdzenie Mittag-Lefflera ⁽¹⁴⁾). Dla dowolnego podzbioru otwartego $\Omega \subsetneq \widehat{\mathbb{C}}$, zbioru $B \subset \Omega$ nie mającego punktów skupienia w Ω i rodziny wielomianów $(P_a)_{a \in B} \subset \mathcal{P}(\mathbb{C})$ stopnia ≥ 1 takich, że $P_a(0) = 0$, $a \in B$, istnieje funkcja $f \in \mathcal{M}(\Omega) \cap \mathcal{O}(\Omega \setminus B)$ taka, że dla każdego $a \in B$ funkcja

$$f - P_a\left(\frac{1}{z-a}\right)$$

przedłuża się holomorficznie na pewne otoczenie punktu a , tzn. funkcja wymierna $P_a(\frac{1}{z-a})$ jest częścią główną bieguna funkcji f w punkcie a , przy czym, jeżeli $\infty \in B$, to rozumiemy, że P_∞ jest częścią główną bieguna funkcji f w punkcie ∞ .

Dowód. Jeżeli $\infty \in B$, $B_1 := B \setminus \{\infty\}$ i $f_1 \in \mathcal{M}(\Omega) \cap \mathcal{O}(\Omega \setminus B_1)$ jest taka, że dla dowolnego $a \in B_1$, częścią główną bieguna funkcji f_1 w punkcie a jest $P_a(\frac{1}{z-a})$, to funkcja $f := f_1 + P_\infty$ jest rozwiązaniem wyjściowego problemu. Możemy więc założyć, że $\infty \notin B$.

Jeżeli zbiór B jest skończony, to bierzemy $f := \sum_{a \in B} P_a(\frac{1}{z-a})$. Załóżmy, że B jest nieskończony.

Niech $(K_k)_{k=1}^\infty$ będzie ciągiem kompaktów z Obserwacji 3.8.1 i niech

$$f_k(z) := \sum_{a \in B \cap (K_k \setminus K_{k-1})} P_a\left(\frac{1}{z-a}\right), \quad k \in \mathbb{N},$$

przy czym $K_0 := \emptyset$ oraz $\sum_{a \in \emptyset} \cdots := 0$. Każdy ze zbiorów $B \cap (K_k \setminus K_{k-1})$ jest skończony, zatem funkcja f_k jest poprawnie zdefiniowaną funkcją wymierną o biegunach w $\mathbb{C} \setminus K_{k-1}$. Na podstawie lematu o przesuwaniu biegunów istnieje funkcja wymierna g_k o biegunach w $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ taka, że $|f_k - g_k| \leq 1/2^k$ w K_{k-1} . W szczególności, szereg $\sum_{n=k}^\infty (f_n - g_n)$ jest jednostajnie zbieżny na K_{k-1} . Niech $f := \sum_{n=1}^\infty (f_n - g_n)$. Oczywiście $f \in \mathcal{M}(\Omega) \cap \mathcal{O}(\Omega \setminus B)$. Ponadto, dla $a \in B \cap (K_{k_0} \setminus K_{k_0-1})$, mamy

$$f - P_a\left(\frac{1}{z-a}\right) = \sum_{n=1}^{k_0-1} (f_n - g_n) + \left(f_{k_0} - P_a\left(\frac{1}{z-a}\right)\right) - g_{k_0} + \sum_{n=k_0+1}^\infty (f_n - g_n) =: A + B - g_{k_0} + C,$$

gdzie

- A ma bieguny w K_{k_0-1} ,
- B jest holomorficzna w otoczeniu a ,
- C ma bieguny poza K_{k_0} .

□

Twierdzenie Mittag-Lefflera można sformułować również w następujący sposób:

Twierdzenie 3.9.2 (Twierdzenie Mittag-Lefflera). Dla dowolnego podzbioru otwartego $\Omega \subsetneq \widehat{\mathbb{C}}$, dowolnego pokrycia otwartego $(\Omega_\alpha)_{\alpha \in A}$ zbioru Ω i dowolnej rodziny $f_\alpha \in \mathcal{M}(\Omega_\alpha)$, $\alpha \in A$ takiej, że

$$f_\alpha - f_\beta \in \mathcal{O}(\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta), \quad \alpha, \beta \in A, \quad (15)$$

istnieje funkcja $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ taka, że

$$f - f_\alpha \in \mathcal{O}(\Omega_\alpha), \quad \alpha \in A.$$

Dowód, że Twierdzenie 3.9.2 implikuje Twierdzenie 3.9.1. Niech Ω , B i $(P_a)_{a \in B}$ będą takie, jak w założeniach Twierdzenia 3.9.1. Dobierzmy $r_a > 0$, $a \in B$, tak małe, że $K(a, r_a) \cap K(b, r_b) = \emptyset$ dla każdych dwóch punktów $a \neq b$, $a, b \in B$, przy czym, jeżeli $\infty \in B$, to przez $K(\infty, r_\infty)$ rozumiemy stosowne otoczenie ∞ . Połóżmy

$$A := \{*\} \cup B, \quad \Omega_* := \Omega \setminus B, \quad \Omega_a := K(a, r_a), \quad f_* := 0, \quad f_a := P_a\left(\frac{1}{z-a}\right), \quad a \in B,$$

⁽¹⁴⁾ Magnus Mittag-Leffler (1846–1927) — matematyk szwedzki.

⁽¹⁵⁾ Tzn. funkcja $f_\alpha - f_\beta$ przedłuża się holomorficznie na $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta$.

3.10. Twierdzenie Weierstrassa

przy czym, jeżeli $\infty \in B$, to $f_\infty := P_\infty$. Można łatwo sprawdzić, że wszystkie założenia Twierdzenia 3.9.2 są spełnione. Niech $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ będzie funkcją, której istnienie wynika z tezy Twierdzenia 3.9.2. Wówczas

$$f = f - f_* \in \mathcal{O}(\Omega_*) = \mathcal{O}(\Omega \setminus B), \quad f - P_a\left(\frac{1}{z-a}\right) = f - f_a \in \mathcal{O}(\Omega_a) = \mathcal{O}(K(a, r_a)), \quad a \in B. \quad \square$$

Dowód, że Twierdzenie 3.9.1 implikuje Twierdzenie 3.9.2. Niech Ω , $(\Omega_\alpha)_{\alpha \in A}$ i $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ będą jak w założeniach Twierdzenia 3.9.2. Połóżmy

$$B_\alpha := S(f_\alpha), \quad B := \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha.$$

Ponieważ $f_\alpha - f_\beta \in \mathcal{O}(\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta)$, $B_\alpha \cap \Omega_\beta \subset B_\beta$ dla każdych $\alpha, \beta \in A$. W szczególności, zbiór B nie ma punktów skupienia w Ω . Dla $a \in B_\alpha$, niech $P_{\alpha,a} \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ będzie takim wielomianem stopnia ≥ 1 , że $P_{\alpha,a}(0) = 0$ i $f_\alpha - P_{\alpha,a}\left(\frac{1}{z-a}\right)$ przedłuża się holomorficznie na pewne otoczenie punktu a (tzn. $P_{\alpha,a}\left(\frac{1}{z-a}\right)$ jest częścią główną bieguna funkcji f_α w punkcie a), ze stosowną zmianą definicji, jeżeli $\infty \in B_\alpha$. Ponieważ $f_\alpha - f_\beta \in \mathcal{O}(\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta)$, wnioskujemy stąd, że $P_{\alpha,a}$ nie zależy od α . Połóżmy $P_a := P_{\alpha,a}$. Niech $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ będzie funkcją z tezy Twierdzenia 3.9.1. Wówczas $S(f) = B$ i dla dowolnego $\alpha \in A$ i $a \in B_\alpha$, funkcja

$$f - f_\alpha = \left(f - P_a\left(\frac{1}{z-a}\right)\right) - \left(f_\alpha - P_a\left(\frac{1}{z-a}\right)\right)$$

przedłuża się holomorficznie na pewne otoczenie punktu a , przy czym, jeżeli $\infty \in B$, to $f - f_\infty = (f - P_\infty) - (f_\alpha - P_\infty)$. $\square$

3.10. Twierdzenie Weierstrassa

Twierdzenie 3.10.1 (Twierdzenie Weierstrassa). *Dla każdego podzbioru otwartego $\Omega \subsetneq \widehat{\mathbb{C}}$, każdego zbioru $S \subset \Omega$ nie mającego punktu skupienia w Ω i dowolnej funkcji $k : S \rightarrow \mathbb{N}$, istnieje funkcja $f \in \mathcal{O}^*(\Omega \setminus S)$ taka, że f ma w punkcie a zero krotności $k(a)$, $a \in S$.*

Dowód. Jeżeli $\infty \notin \Omega$, to wybieramy dowolny punkt $z_0 \in \Omega \setminus S$ i przekształcamy Ω poprzez homografię $h(z) := \frac{1}{z-z_0}$. Wtedy $\infty \in \Omega_1 := h(\Omega)$. Niech $S_1 := h(S)$. Przypuśćmy, że $f_1 \in \mathcal{O}^*(\Omega_1 \setminus S_1)$ jest taka, że f_1 ma w punkcie $h(a)$ zero krotności $k(a)$, $a \in S$. Wtedy $f := f_1 \circ h$ stanowi rozwiązanie naszego problemu. Tak więc możemy założyć, że $\infty \in \Omega$.

Jeżeli $\infty \in S$, to wybieramy dowolny punkt $z_0 \in \partial\Omega$. Niech $S_1 := S \setminus \{\infty\}$. Przypuśćmy, że $f_1 \in \mathcal{O}^*(\Omega \setminus S_1)$ jest taka, że f_1 ma w punkcie a zero krotności $k(a)$, $a \in S_1$. Wtedy $f(z) = \frac{f_1(z)}{(z-z_0)^{k(\infty)}}$, $z \in \Omega$, stanowi rozwiązanie naszego problemu. Możemy więc założyć, że $\infty \in \Omega \setminus S$.

Jeżeli S jest zbiorem skończonym, to oczywiście jako f można wziąć wielomian

$$f(z) := \prod_{a \in S} (z-a)^{k(a)}.$$

Załóżmy więc, że S jest nieskończony, zapiszmy go w postaci ciągu $s_1, s_2, \dots$ i niech $a_1, a_2, \dots$ będzie ciągiem powstałym z tego ciągu przez $k(s_j)$ -krotne powtórzenie wyrazu s_j . Niech $c_k \in \partial\Omega$ będzie taki, że $|a_k - c_k| = \text{dist}(a_k, \partial\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że $|a_k - c_k| \rightarrow 0$ (ĆWICZENIE).

Przyjmijmy na chwilę, że następujące dwa lematy są prawdziwe.

Lemat 3.10.2. *Niech $\Omega \subsetneq \widehat{\mathbb{C}}$ będzie zbiorem otwartym i niech $f_k \in \mathcal{O}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że szereg $\sum_{k=1}^\infty |f_k|$ jest niemal jednostajnie zbieżny w Ω . Zdefiniujmy $I_n := \prod_{k=1}^n (1 + f_k) \in \mathcal{O}(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy ciąg $(I_n)_{n=1}^\infty$ jest niemal jednostajnie zbieżny w Ω . Niech $I := \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \prod_{k=1}^\infty (1 + f_k)$. Ponadto, dla $a \in \Omega$, mamy: $I(a) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{N} : 1 + f_k(a) = 0$.*

Lemat 3.10.3. *Dla $k \in \mathbb{N}$, niech*

$$E_k(u) := (1-u) \exp\left(u + \frac{u^2}{2} + \dots + \frac{u^k}{k}\right).$$

Wtedy $|1 - E_k(u)| \leq |u|^{k+1}$ dla $u \in \mathbb{D}$.

Zakończmy dowód twierdzenia Weierstrassa. Niech

$$f(z) := \prod_{k=1}^{\infty} E_k\left(\frac{a_k - c_k}{z - c_k}\right), \quad z \in \Omega$$

Na podstawie Lematu 3.10.2, wystarczy tylko pokazać, że dla $f_k(z) := E_k\left(\frac{a_k - c_k}{z - c_k}\right) - 1$, szereg $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$ jest niemal jednostajnie zbieżny w Ω . Ustalmy zbiór zwarty $K \subset\subset \Omega$ i niech $k_0 \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $2|a_k - c_k| \leq \text{dist}(K, \partial\Omega)$, $k \geq k_0$. Wtedy $|\frac{a_k - c_k}{z - c_k}| \leq 1/2$ dla $z \in K$ i $k \geq k_0$. Teraz, korzystając z Lematu 3.10.3, wnioskujemy, że $|f_k| \leq (1/2)^{k+1}$ na K dla $k \geq k_0$, co kończy dowód twierdzenia Weierstrassa. $\square$

Dowód Lematu 3.10.2. Wystarczy pokazać niemal jednostajną zbieżność szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} (I_n - I_{n-1})$. Zauważmy, że

$$|I_n| \leq \prod_{k=1}^n (1 + |f_k|) \leq \prod_{k=1}^n e^{|f_k|} = \exp\left(\sum_{k=1}^n |f_k|\right),$$

skąd wynika, że ciąg $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ jest niemal jednostajnie ograniczony, co, wobec równości $|I_n - I_{n-1}| = |I_{n-1}| |f_n|$, daje jego niemal jednostajną zbieżność.

Dla dowodu drugiej części lematu wystarczy pokazać, że istnieje stała $C > 0$ taka, że dla dostatecznie dużych $n > k_0$ mamy $|\prod_{k=k_0}^n (1 + f_k(a))| \geq C$.

Ustalmy otoczenie $U \subset\subset \Omega$ punktu a i niech $k_0 \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $|f_k| \leq 1/2$ na U dla $k \geq k_0$. Wtedy dla $k \geq k_0$, na zbiorze U mamy

$$\left| \frac{f_k}{1 + f_k} \right| \leq \frac{|f_k|}{1 - |f_k|} \leq 2|f_k|,$$

co oznacza, że szereg $\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{f_k}{1 + f_k}$ jest zbieżny niemal jednostajnie na U . Stąd, na podstawie pierwszej części dowodu, iloczyn nieskończony

$$\prod_{k=k_0}^{\infty} \left(1 - \frac{f_k}{1 + f_k}\right) = \prod_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{1 + f_k} = \frac{1}{\prod_{k=k_0}^{\infty} (1 + f_k)}$$

jest zbieżny na U . $\square$

Dowód Lematu 3.10.3. Mamy:

$$\begin{aligned} E'_k(u) &= -\exp\left(u + \frac{u^2}{2} + \cdots + \frac{u^k}{k}\right) + (1 - u) \exp\left(u + \frac{u^2}{2} + \cdots + \frac{u^k}{k}\right)(1 + u + \cdots + u^{k-1}) \\ &= -u^k \exp\left(u + \frac{u^2}{2} + \cdots + \frac{u^k}{k}\right) = -u^k \sum_{j=0}^{\infty} c_j u^j. \end{aligned}$$

Zauważmy, że $c_j \geq 0$, $j \in \mathbb{Z}_+$. W szczególności, $\text{ord}_0(1 - E_k) \geq k + 1$. Niech

$$f(u) := \frac{1 - E_k(u)}{u^{k+1}} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j u^j.$$

Po porównaniu współczynników (ĆWICZENIE), dostajemy $a_j = \frac{c_j}{k+j+1}$, a stąd $a_j \geq 0$, $j \in \mathbb{Z}_+$. Dla $u \in \mathbb{D}$ mamy więc $|f(u)| \leq f(1) = 1$. $\square$

Lemat 3.10.2 można uzupełnić następująco.

Lemat 3.10.4. *Przy założeniach Lematu 3.10.2 mamy*

$$\frac{I'(z)}{I(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f'_k(z)}{1 + f_k(z)}, \quad z \in \Omega_0 := \{z \in \Omega : I(z) \neq 0\},$$

przy czym szereg jest niemal jednostajnie zbieżny w Ω_0 .

Dowód. Oczywiście

$$\frac{I'_n(z)}{I_n(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{f'_k(z)}{1 + f_k(z)}, \quad z \in \Omega_0.$$

Ponadto,

$$\left| \frac{I'_n}{I_n} - \frac{I'}{I} \right| \leq \frac{|I||I'_n - I'| + |I'||I_n - I|}{|I_n I|}.$$

Wystarczy jeszcze zauważyć, że mianownik ostatniego ułamka jest oddzielony od zera niemal jednostajnie w Ω_0 . $\square$

Wniosek 3.10.5. Dla dowolnego obszaru $D \subsetneq \widehat{\mathbb{C}}$ i dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{M}(D)$ istnieją funkcje $g, h \in \mathcal{O}(D)$ takie, że $h \in \mathcal{O}^*(D \setminus S(f))$ oraz $f = g/h$. W szczególności, $\mathcal{M}(D)$ jest ciałem ułamków $\mathcal{O}(D)$.

Dowód. Na podstawie twierdzenia Weierstrassa istnieje funkcja $h \in \mathcal{O}(D)$ mająca zera dokładnie w biegunach funkcji f i to krotności równej rzędowi bieguna, a poza tym nigdzie się nie zerująca. Wystarczy teraz wziąć $g := f \cdot h$. $\square$

Obserwacja 3.10.6. (a) Dla dowolnych ciągów $(a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}_*$, $a_n \rightarrow \infty$, $(\alpha_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{N}$, niech $(z_k)_{k=1}^\infty$ powstaje z $(a_n)_{n=1}^\infty$ przez α_n -krotne powtórzenie wyrazu a_n . Dla $\alpha \in \mathbb{Z}_+$, zdefiniujmy

$$f(z) := z^\alpha \prod_{k=1}^\infty E_k\left(\frac{z}{z_k}\right), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Wtedy $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, f ma w $z = 0$ zero krotności α , oraz w $z = a_n$ zero krotności α_n , $n \in \mathbb{N}$. Innymi zerami funkcja f nie ma.

Istotnie, jedyny problem to niemal jednostajna zbieżność iloczynu nieskończonego. Niech $K \subset\subset \mathbb{C}$. Wtedy $|z/z_k| \leq 1/2$ dla $z \in K$ i $k \geq k_0$. Wynika stąd, że

$$\left| E_k\left(\frac{z}{z_k}\right) - 1 \right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}, \quad z \in K, \quad k \geq k_0.$$

(b) Każda funkcja $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ mająca nieskończenie wiele zer przedstawia się w postaci

$$f(z) = e^{g(z)} z^\alpha \prod_{k=1}^\infty E_k\left(\frac{z}{z_k}\right), \quad z \in \mathbb{C},$$

gdzie $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$.

(c) W konstrukcji przedstawionej w (a) można również wziąć

$$f(z) := z^\alpha \prod_{k=1}^\infty E_{n_k}\left(\frac{z}{z_k}\right), \quad z \in \mathbb{C},$$

gdzie ciąg $(n_k)_{k=1}^\infty$ jest taki, że szereg $\sum_{k=1}^\infty |z/z_k|^{n_k+1}$ jest zbieżny niemal jednostajnie w $\mathbb{C}$.

(d) Zilustrujmy (c): $z_k := -k$, $n_k := 1$, $\alpha := 1$,

$$f(z) = z \prod_{k=1}^\infty \left(1 + \frac{z}{k}\right) \exp\left(-\frac{z}{k}\right), \quad z \in \mathbb{C}.$$

(e)

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{k=1}^\infty \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Istotnie, wiemy, że

$$\sin \pi z = e^{g(z)} z \prod_{k=1}^\infty \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (3.10.2)$$

dla pewnej funkcji $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Musimy pokazać, że $e^g \equiv \pi$. Liczymy pochodną logarytmiczną

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{(\sin \pi z)'}{\sin \pi z} = g'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{z+k} \right). \quad (3.10.3)$$

Ze wzoru tego wynika w szczególności, że g' jest funkcją nieparzystą. Jeszcze raz różniczkujemy

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = g''(z) - \frac{1}{z^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(z-k)^2} + \frac{1}{(z+k)^2} \right) = g''(z) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-k)^2}.$$

Wynika stąd w szczególności, że $g''(z+1) = g''(z)$, $z \in \mathbb{C}$. Niech $A := \{x+iy : 0 \leq x \leq 1\}$. Dla $z = x+iy \in A$, $|y| \geq 1$, mamy:

$$\left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-k)^2} \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-k)^2 + y^2} \leq 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2 + y^2},$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} \right| &= \frac{4\pi^2}{|e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}|^2} = \frac{4\pi^2}{|(e^{-\pi y} - e^{\pi y}) \cos \pi x + i(e^{-\pi y} + e^{\pi y}) \sin \pi x|^2} \\ &= \frac{4\pi^2}{e^{2\pi y} + e^{-2\pi y} - 2 \cos 2\pi x} \leq \frac{4\pi^2}{e^{2\pi|y|} - 2}. \end{aligned}$$

Oznacza to, że $\lim_{A \ni z \rightarrow \infty} g''(z) = 0$. A więc g'' jest ograniczona w A , a wobec okresowości, jest również ograniczona w $\mathbb{C}$, co oznacza, że $g' \equiv \text{const}$. Ponieważ g' jest nieparzysta, musi być $g' \equiv 0$, a więc $g \equiv \text{const} = c$. Ze wzoru (3.10.2) wynika, że

$$\pi = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin \pi z}{z} = e^c.$$

(f) Ze wzoru (3.10.3) dostajemy

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{z+k} \right), \quad z \in \mathbb{C}.$$

(g)

$$1/\Gamma(z) = e^{\gamma z} z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k} \right) \exp \left(-\frac{z}{k} \right), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (3.10.4)$$

gdzie

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = 0,577 \dots$$

jest stałą *Eulera*. W szczególności,

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(-z)} = -\frac{z}{\pi} \sin \pi z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Wzór (3.10.4) wynika z następującego alternatywnego wzoru na funkcję Γ

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! e^{z \ln n}}{z(z+1) \cdots (z+n)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-. \quad (3.10.5)$$

Istotnie, (3.10.5) implikuje, że

$$1/\Gamma(z) = z \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-z \ln n} (1+z/1) \cdots (1+z/n) = z \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\gamma_n z} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k} \right) \exp \left(-\frac{z}{k} \right). \quad (3.10.6)$$

Pozostaje udowodnić (3.10.5). Niech $\hat{\Gamma}$ oznacza funkcję daną prawą stroną wzoru (3.10.5). Rozumowanie zastosowane w (3.10.6) pokazuje, że $\hat{\Gamma}$ jest poprawnie określona oraz $\hat{\Gamma} \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-)$. Wystarczy pokazać, że $\hat{\Gamma} = \Gamma$ na $(0, 1]$, czyli

$$\Gamma(x) \frac{x(x+1) \cdots (x+n)}{n!n^x} \longrightarrow 1, \quad x \in (0, 1].$$

Z własności funkcji Γ wynika, że jest to równoważne pokazaniu, że

$$\frac{\Gamma(x+n+1)}{n!n^x} \longrightarrow 1, \quad x \in (0, 1].$$

Zauważmy, że dla $x \in (0, 1]$ mamy

$$\begin{aligned} \Gamma(x+n+1) &= \int_0^\infty t^{x+n} e^{-t} dt \leq n^x \int_0^n t^n e^{-t} dt + n^{x-1} \int_n^\infty t^{n+1} e^{-t} dt \\ &= n^x \int_0^n t^n e^{-t} dt + n^{x-1} \left(-t^{n+1} e^{-t} \Big|_n^\infty + (n+1) \int_n^\infty t^n e^{-t} dt \right) \\ &= n^x \int_0^\infty t^n e^{-t} dt + n^{x-1} \int_n^\infty t^n e^{-t} dt + n^{x+n} e^{-n} \\ &= n^x n! + n^{x-1} \int_n^\infty t^n e^{-t} dt + n^{x+n} e^{-n} \leq n^x n! + n^{x-1} n! + n^{x+n} e^{-n}. \end{aligned}$$

Analogicznie,

$$\begin{aligned} \Gamma(x+n+1) &\geq n^{x-1} \int_0^n t^{n+1} e^{-t} dt + n^x \int_n^\infty t^n e^{-t} dt \\ &= n^{x-1} \left(-t^{n+1} e^{-t} \Big|_0^n + (n+1) \int_0^n t^n e^{-t} dt \right) + n^x \int_n^\infty t^n e^{-t} dt \\ &= n^x n! + n^{x-1} \int_0^n t^n e^{-t} dt - n^{x+n} e^{-n} \geq n^x n! - n^{x+n} e^{-n}. \end{aligned}$$

W konsekwencji,

$$1 - \frac{n^n e^{-n}}{n!} \leq \frac{\Gamma(x+n+1)}{n!n^x} \leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{n^n e^{-n}}{n!}.$$

Pozostaje jeszcze tylko skorzystać ze wzoru Stirlinga⁽¹⁶⁾

$$n! \approx \frac{n^{n+1/2} \sqrt{2\pi}}{e^n}.$$

Twierdzenie 3.10.7 (Twierdzenie Weierstrassa–Mittag-Lefflera). *Dla każdego podzbioru otwartego $\Omega \subsetneq \hat{\mathbb{C}}$, każdego zbioru $S \subset \Omega$ nie mającego punktu skupienia w Ω i dowolnej funkcji $k : S \rightarrow \mathbb{Z}_*$, istnieje funkcja $f \in \mathcal{M}(\Omega) \cap \mathcal{O}^*(\Omega \setminus S)$, taka, że f ma w punkcie a zero krotności $k(a)$, jeżeli $k(a) > 0$, i biegun rzędu $-k(a)$, jeżeli $k(a) < 0$.*

Dowód. Niech $S_\pm := \{a \in S : \pm k(a) > 0\}$ i niech $f_\pm$ będzie funkcją skonstruowaną na podstawie twierdzenia Weierstrassa dla zbioru $S_\pm$ i funkcji $\pm k|_{S_\pm}$: $f_\pm \in \mathcal{O}^*(\Omega \setminus S_\pm)$, f ma zero krotności $\pm k(a)$ w punkcie $a \in S_\pm$. Teraz wystarczy wziąć $f := f_+/f_-$. $\square$

Równoważnym sformułowaniem Twierdzenia 3.10.7 jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.10.8 (Twierdzenie Weierstrassa–Mittag-Lefflera). *Dla każdego podzbioru otwartego $\Omega \subsetneq \hat{\mathbb{C}}$, każdego pokrycia otwartego $(\Omega_\alpha)_{\alpha \in A}$ zbioru Ω i dla każdej rodziny $f_\alpha \in \mathcal{M}(\Omega_\alpha)$, $\alpha \in A$ takiej, że*

$$f_\alpha/f_\beta \in \mathcal{O}^*(\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta), \quad \alpha, \beta \in A,$$

istnieje funkcja $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ taka, że

$$f/f_\alpha \in \mathcal{O}^*(\Omega_\alpha), \quad \alpha \in A.$$

⁽¹⁶⁾ James Stirling (1692–1770) — matematyk szkocki.

3. Funkcje holomorficzne II

Dowód, że Twierdzenie 3.10.8 implikuje Twierdzenie 3.10.7. Niech Ω , S i $k : S \rightarrow \mathbb{Z}_*$ będą takie, jak w założeniach Twierdzenia 3.10.7. Dobierzmy $r_a > 0$, $a \in S$, tak małe, że $K(a, r_a) \cap K(b, r_b) = \emptyset$ dla dowolnych dwóch punktów $a \neq b$, $a, b \in S$, przy czym, jeżeli $\infty \in S$, to przez $K(\infty, r_\infty)$ rozumiemy stosowne otoczenie ∞ . Połóżmy

$$A := \{*\} \cup S, \quad \Omega_* := \Omega \setminus S, \quad \Omega_a := K(a, r_a), \quad a \in S, \quad f_* := 1, \quad f_a := (z - a)^{k(a)}, \quad a \in S,$$

przy czym, jeżeli $\infty \in S$, to $f_\infty := z^{-k(\infty)}$. Jest widoczne, że wszystkie założenia Twierdzenia 3.10.8 są spełnione. Niech $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ będzie funkcją, której istnienie wynika z tezy Twierdzenia 3.10.8. Wówczas

$$f = f/f_* \in \mathcal{O}^*(\Omega_*) = \mathcal{O}^*(\Omega \setminus S), \quad f \cdot (z - a)^{-k(a)} = f/f_a \in \mathcal{O}^*(\Omega_a) = \mathcal{O}^*(K(a, r_a)), \quad a \in S. \quad \square$$

Dowód, że Twierdzenie 3.10.7 implikuje Twierdzenie 3.10.8. Niech Ω , $(\Omega_\alpha)_{\alpha \in A}$ i $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ będą takie, jak w założeniach Twierdzenia 3.10.8. Połóżmy

$$S_\alpha := S(f_\alpha) \cup f_\alpha^{-1}(0), \quad S := \bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha.$$

Ponieważ $f_\alpha/f_\beta \in \mathcal{O}^*(\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta)$, $S_\alpha \cap \Omega_\beta \subset S_\beta$ dla dowolnych $\alpha, \beta \in A$. W szczególności, zbiór S nie ma punktów skupienia w Ω . Dla $a \in S_\alpha$ niech

$$k(\alpha, a) := \begin{cases} -(\text{rzęd bieguna funkcji } f_\alpha \text{ w punkcie } a), & \text{gdy } a \in S(f_\alpha) \\ \text{ord}_a f, & \text{gdy } f_\alpha(a) = 0 \end{cases}.$$

Ponieważ $f_\alpha/f_\beta \in \mathcal{O}^*(\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta)$, wnioskujemy stąd, że $k(\alpha, a)$ nie zależy od α . Połóżmy $k(a) := k(\alpha, a)$. Niech $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ będzie funkcją z tezy Twierdzenia 3.10.7. Wówczas f nie ma zer ani biegunów poza zbiorem S i dla każdego $\alpha \in A$ i $a \in S_\alpha$ funkcja

$$\frac{f}{f_\alpha} = \frac{f \cdot (z - a)^{-k(a)}}{f_\alpha \cdot (z - a)^{-k(a)}}$$

przedłuża się do funkcji holomorficznej, nie mającej zer w pewnym otoczeniu punktu a , przy czym, jeżeli $\infty \in S_\alpha$, to

$$\frac{f}{f_\alpha} = \frac{f \cdot z^{k(\infty)}}{f_\alpha \cdot z^{k(\infty)}}. \quad \square$$

Twierdzenie 3.10.9 (Twierdzenie Weierstrassa–Mittag-Lefflera). *Dla każdego podzbioru otwartego $\Omega \subsetneq \widehat{\mathbb{C}}$, każdego zbioru $S \subset \Omega$ nie mającego punktu skupienia w Ω , dowolnej rodziny wielomianów $(P_a)_{a \in S} \subset \mathcal{P}(\mathbb{C})$, istnieje funkcja $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ taka, że dla dowolnego $a \in S$ rozwinięcie funkcji f w szereg Taylora o środku w punkcie zaczyna się od $P_a(z - a)$, przy czym, jeżeli $\infty \in S$ rozumiemy, że rozwinięcie funkcji $f(1/z)$ w szereg Taylora o środku w 0 zaczyna się od $P_\infty(z)$.*

Zauważmy, że twierdzenie implikuje, że $\text{ord}_a(f - P_a) \geq \deg P_a + 1$, $a \in S$.

Dowód. Na podstawie twierdzenia Weierstrassa istnieje funkcja $g \in \mathcal{O}^*(\Omega \setminus S)$ taka, że $\text{ord}_a g = \deg P_a + 1$, $a \in S$. Na podstawie twierdzenia Mittag-Lefflera, istnieje funkcja $h \in \mathcal{M}(\Omega) \cap \mathcal{O}(\Omega \setminus S)$ taka, że $h_a := h - \frac{P_a(z-a)}{g}$ jest holomorficzna w otoczeniu a dla dowolnego $a \in S$ (jeżeli $a = \infty$, to $h_\infty := h - \frac{P_\infty(1/z)}{g}$ jest holomorficzna w otoczeniu ∞). Zdefiniujmy $f := h \cdot g$. W otoczeniu każdego punktu $a \in S$ mamy

$$f - P_a(z - a) = h \cdot g - P_a(z - a) = g \left(h - \frac{P_a(z - a)}{g} \right) = g \cdot h_a,$$

skąd wynika, że $\text{ord}_a(f - P_a(z - a)) \geq \text{ord}_a g = \deg P_a + 1$, co oznacza, że początek rozwinięcia Taylora funkcji f w punkcie a musi się pokrywać z $P_a(z - a)$. $\square$

3.11. Funkcja ζ Riemanna

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{z \ln n}}, \quad z \in \mathbb{H}_1.$$

Ponieważ $|n^z| = |e^{z \ln n}| = e^{(\operatorname{Re} z) \ln n} = n^{\operatorname{Re} z}$, powyższy szereg jest niemal jednostajnie zbieżny i definiuje funkcję holomorficzną, zwaną *funkcją ζ Riemanna*.

Propozycja 3.11.1 (Twierdzenie Eulera). *Niech $(p_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ oznacza ciąg wszystkich kolejnych liczb pierwszych. Wtedy*

$$\zeta(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_k^{-z}}, \quad z \in \mathbb{H}_1.$$

Dowód. Ustalmy $z \in \mathbb{H}_1$. Ponieważ $|p_k^{-z}| = p_k^{-\operatorname{Re} z} < 1$, zatem

$$\prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - p_k^{-z}} = \prod_{k=1}^n \sum_{m=0}^{\infty} (p_k^{-z})^m = \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} (p_1^{m_1} \cdots p_n^{m_n})^{-z}.$$

Pozostaje jeszcze skorzystać z jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze. $\square$

Twierdzenie* 3.11.2. *Funkcja ζ przedłuża się do funkcji meromorficznej na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ takiej, że:*

- ζ ma w punkcie 1 biegun jednokrotny oraz $\operatorname{res}_1 \zeta = 1$,
- ζ spełnia równanie Riemanna

$$\zeta(z) = 2e^{(z-1)\ln(2\pi)} \Gamma(1-z) \zeta(1-z) \sin\left(\frac{\pi}{2}z\right),$$

- $\zeta(-2k) = 0$, $k \in \mathbb{N}$ (zera w punktach $z = -2k$, $k \in \mathbb{N}$, nazywamy trywialnymi),
- funkcja ζ nie ma nietrywialnych zer poza pasem $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$.

Hipoteza Riemanna. *Wszystkie nietrywialne zera funkcji Riemanna leżą na prostej $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$.*

3.12. Lemat Fatou

Twierdzenie 3.12.1 (Twierdzenie Lindelöfa⁽¹⁷⁾). *Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem Jordana, $\zeta_0 \in \partial D$ i niech $f \in \mathcal{O}(D) \cap \mathcal{C}(\overline{D} \setminus \{\zeta_0\})$ będzie ograniczona. Wtedy, jeżeli $\lim_{\partial D \ni \zeta \rightarrow \zeta_0^-} f(\zeta) = a$ i $\lim_{\partial D \ni \zeta \rightarrow \zeta_0^+} f(\zeta) = b$, to $a = b$ oraz $\lim_{D \ni z \rightarrow \zeta_0} f(z) = a$.*

Dowód. Wobec twierdzenia Osgooda–Carathéodory’ego można założyć, że $D = \mathbb{D}$. Niech $|f| \leq M$.

Założmy najpierw, że $a = b = 0$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech punkty $A, B \in \mathbb{T}$ leżą symetrycznie względem ζ_0 i tak, że $|f(\zeta)| \leq \varepsilon$, $\zeta \in \widehat{AB}$. Będziemy chcieli pokazać, że $|f(z)| \leq \sqrt{M\varepsilon}$, $z \in [A, B]$ (co zakończy dowód). Dla uproszczenia założymy, że prosta AB pokrywa się z osią $0x$. Niech S oznacza obszar ograniczony łukiem $\widehat{AB}$ i odcinkiem $[A, B]$. Niech S' będzie obszarem symetrycznym względem S (względem osi $0x$) i niech Δ oznacza całą „soczewkę”. Dla $0 < \alpha < 1$ zdefiniujmy

$$g_{\alpha}(z) := f(z) \overline{f(\bar{z})} (z - \zeta_0)^{\alpha} (\bar{z} - \bar{\zeta}_0)^{\alpha}, \quad \zeta \in \overline{\Delta} \setminus \{\zeta_0\}.$$

Jest to funkcja holomorficzna w Δ i ciągła w $\overline{\Delta}$ (w punktach ζ_0 i $\bar{\zeta}_0$ kładziemy zero — tu korzystamy z ograniczoneści funkcji f). Na $\partial\Delta$ mamy $|g_{\alpha}| \leq M\varepsilon d^{2\alpha}$, gdzie $d := \operatorname{diam} \Delta$. Z zasady maksimum nierówność ta przenosi się do Δ . W szczególności, na odcinku $[A, B]$ dostajemy $|g_{\alpha}(z)| = |f(z)|^2 |z - \zeta_0|^{2\alpha} \leq M\varepsilon d^{2\alpha}$. Teraz wystarczy $\alpha \rightarrow 0$.

W przypadku ogólnym postępujemy następująco. Niech $g := (f - a)(f - b)$. Wtedy g spełnia założenia naszego twierdzenia z $a = b = 0$ i na podstawie pierwszej części dowodu mamy $\lim_{D \ni z \rightarrow \zeta_0} g(z) = 0$. Ponieważ f jest ograniczona, z dowolnego ciągu $D \ni z_k \rightarrow \zeta_0$ możemy wybrać podciąg $(z_{k(\ell)})_{\ell=1}^{\infty}$ taki, że $f(z_{k(\ell)}) \rightarrow a$

⁽¹⁷⁾ Ernst Lindelöf (1870–1946) — matematyk fiński.

lub $f(z_{k(\ell)}) \rightarrow b$. Wystarczy więc wykluczyć sytuację, w której $a \neq b$. W tej sytuacji, niech $D \ni z_k \rightarrow \zeta_0$, $f(z_k) \rightarrow a$, $D \ni w_k \rightarrow \zeta_0$, $f(w_k) \rightarrow b$, $\overline{K}(a, r) \cap \overline{K}(b, r) = \emptyset$, $f(z_k) \in K(a, r)$, $f(w_k) \in K(b, r)$, $k \in \mathbb{N}$. Niech c_k będzie punktem leżącym na przecięciu $f([z_k, w_k])$ i symetralnej odcinka $[a, b]$ i niech $u_k \in [z_k, w_k] \cap f^{-1}(c_k)$. Wtedy $u_k \rightarrow \zeta_0$, ale z ciągu $(f(u_k))_{k=1}^\infty$ nie można wybrać podciągu zbieżnego do a lub b . $\square$

Twierdzenie 3.12.2 (Lemat Fatou ⁽¹⁸⁾). *Jeżeli $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ jest ograniczona, to dla prawie wszystkich $\zeta_0 = e^{i\theta_0} \in \mathbb{T}$ istnieje skończona granica kątowna, tzn. dla dowolnego $A > 1$ istnieje granica*

$$\lim_{\substack{\mathbb{D} \ni z \rightarrow \zeta_0 \\ |z - \zeta_0| \leq A(1 - |z|)}} f(z);$$

w szczególności, istnieje granica radialna

$$\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta_0}).$$

Dowód będzie oparty następującym lemacie.

Lemat 3.12.3 (Lemat Łojasiewicza ⁽¹⁹⁾). *Niech $D \subsetneq \mathbb{C}$ będzie obszarem, $g \in \mathcal{O}(D)$, $\zeta_0 \in \partial D$. Załóżmy, że granica $\lim_{z \rightarrow \zeta_0} g(z) =: c$ istnieje i jest skończona. Wtedy dla dowolnego $A > 2$ mamy*

$$\lim_{\substack{D \ni z \rightarrow \zeta_0 \\ |z - \zeta_0| \leq A\delta(z)}} (z - \zeta_0)g'(z) = 0,$$

gdzie $\delta(z) := \frac{1}{2} \text{dist}(z, \partial D)$, $z \in D$.

Zauważmy, że w przypadku $D = \mathbb{D}$ mamy $\delta(z) = \frac{1}{2}(1 - |z|)$, co oznacza, że istnieje granica kątowna.

Dowód. Niech $C(z) := C(z, \delta(z))$, $\eta(z) = \max\{|g(\zeta) - c| : \zeta \in C(z)\}$, $z \in D$. Ze wzoru Cauchy'ego dla pochodnej, dla $|z - \zeta_0| \leq A\delta(z)$, dostajemy

$$|(z - \zeta_0)g'(z)| = \left| (z - \zeta_0) \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z)} \frac{g(\zeta) - c}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \leq |z - \zeta_0| \frac{\eta(z)}{\delta(z)} \leq A\eta(z) \xrightarrow{z \rightarrow \zeta_0} 0. \quad \square$$

Dowód lematu Fatou. Niech $|f| \leq M$. Zdefiniujmy

$$F(z) := \int_{[0, z]} f(\zeta) d\zeta, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Wtedy $F \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$, $F' = f$ oraz

$$|F(z_1) - F(z_2)| \leq M|z_1 - z_2|, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{D}.$$

W szczególności, funkcja F przedłuża się na $\overline{\mathbb{D}}$ do funkcji $\widehat{F}$ spełniającej warunek Lipschitza ze stałą M (ĆWICZENIE). Niech $\Phi(\theta) := \widehat{F}(e^{i\theta})$. Zauważmy, że

$$|\Phi(\theta_1) - \Phi(\theta_2)| \leq M|e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}| \stackrel{(\text{ĆWICZENIE})}{\leq} \text{const} |\theta_1 - \theta_2|, \quad \theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi].$$

Na podstawie twierdzenia Rademachera ⁽²⁰⁾ wiemy, że funkcja Φ ma dla prawie wszystkich $\theta \in [0, 2\pi]$ pochodną. Niech $\theta_0 \in (0, 2\pi)$ będzie takie, że $\Phi'(\theta_0)$ istnieje. Zdefiniujmy $\zeta_0 := e^{i\theta_0}$ i niech

$$g(z) := \frac{\widehat{F}(z) - \widehat{F}(\zeta_0)}{z - \zeta_0}, \quad z \in \mathbb{D} \setminus \{\zeta_0\}.$$

Wtedy

$$\lim_{\mathbb{T} \ni \zeta \rightarrow \zeta_0} g(\zeta) = \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \frac{\Phi(\theta) - \Phi(\theta_0)}{\theta - \theta_0} \frac{1}{\frac{e^{i\theta} - e^{i\theta_0}}{\theta - \theta_0}} = \Phi'(\theta_0) \frac{1}{ie^{i\theta_0}}.$$

⁽¹⁸⁾ Pierre Fatou (1878–1929) — matematyk francuski.

⁽¹⁹⁾ Stanisław Łojasiewicz (1926–2002) — matematyk polski.

⁽²⁰⁾ Hans Rademacher (1892–1969) — matematyk niemiecki.

Na podstawie twierdzenia Lindelöfa (korzystamy tu tylko z przypadku $a = b$) wnioskujemy, że

$$\lim_{\mathbb{D} \ni z \rightarrow \zeta_0} g(z) = -ie^{-\theta_0} \Phi'(\theta_0).$$

Zauważmy, że $f(z) - g(z) = (z - \zeta_0)g'(z)$. Teraz lemat Łojasiewicza daje

$$\lim_{\substack{\mathbb{D} \ni z \rightarrow \zeta_0 \\ |z - \zeta_0| \leq A(1 - |z|)}} (f(z) - g(z)) = 0,$$

a stąd

$$\lim_{\substack{\mathbb{D} \ni z \rightarrow \zeta_0 \\ |z - \zeta_0| \leq A(1 - |z|)}} f(z) = -ie^{-\theta_0} \Phi'(\theta_0).$$

□

ROZDZIAŁ 4

Funkcje harmoniczne i subharmoniczne

4.1. Funkcje harmoniczne

Definicja 4.1.1. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym i niech $h \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$. Powiemy, że funkcja h jest *harmoniczna* na Ω ($h \in \mathcal{H}(\Omega)$), jeżeli

$$\Delta h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \equiv 0 \quad \text{na } \Omega.$$

Obserwacja 4.1.2. (a) $\mathcal{H}(\Omega)$ jest przestrzenią wektorową.

(b) $\Delta = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$.

(c) Pojęcie harmoniczności przenosi się oczywiście na dowolny zbiór otwarty $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: mówimy, że funkcja $h \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ jest *harmoniczna* na Ω ($h \in \mathcal{H}(\Omega)$), jeżeli

$$\Delta h = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 h}{\partial x_j^2} \equiv 0 \quad \text{na } \Omega.$$

(d) Dla $n = 1$, jeżeli $\Omega \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem, to dla funkcji $h \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ mamy $h \in \mathcal{H}(\Omega) \iff h$ jest liniowa.

Propozycja 4.1.3. Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem gwiaździstym i niech $h : D \rightarrow \mathbb{R}$. Wówczas $h \in \mathcal{H}(D)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $f \in \mathcal{O}(D)$ taka, że $h = \operatorname{Re} f$.

Dowód. Niech $f = u + iv \in \mathcal{O}(D)$. Wtedy

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0.$$

Niech $h \in \mathcal{H}(D)$. Wtedy forma $Pdx + Qdy := -h'_y dx + h'_x dy$ jest d -zamknięta ponieważ $P'_y - Q'_x = -h''_{xy} - h''_{yx} = -\Delta h = 0$. Wynika stąd, że istnieje $v \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$ taka, że $v'_x = P = -h'_y$, $v'_y = Q = h'_x$, co oznacza, że $h + iv \in \mathcal{O}(D)$. $\square$

Definicja 4.1.4. Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem. Jeżeli $h \in \mathcal{H}(D)$ i $h + iv \in \mathcal{O}(D)$, to mówimy, że v jest funkcją harmoniczną sprzężoną z h .

Wniosek 4.1.5. Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie otwarty.

(a) $\mathcal{H}(\Omega) \subset \mathcal{C}^\omega(\Omega)$.

(b) Jeżeli $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ i $0 \notin f(\Omega)$, to $\ln |f| \in \mathcal{H}(\Omega)$.

(c) Niech $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{C}$ będą otwarte, $h \in \mathcal{H}(\Omega')$, $f = u + iv \in \mathcal{O}(\Omega, \Omega')$. Wówczas $h \circ f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Obserwacja 4.1.6. Funkcja harmoniczna sprzężona jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do stałej.

Propozycja 4.1.7 (Zasada identyczności). Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem i niech $h \in \mathcal{H}(D)$ będzie taka, że $h = 0$ na pewnym niepustym zbiorze otwartym $U \subset D$. Wtedy $h \equiv 0$ na D . W szczególności, jeżeli dwie funkcje $h_1, h_2 \in \mathcal{H}(D)$ są równe na niepustym podzbiórze otwartym, to $h_1 \equiv h_2$ na D .

Dowód. Niech $D_0 := \{a \in D : h = 0 \text{ w pewnym otwartym otoczeniu } U \subset D \text{ punktu } a\}$. Oczywiście, $D_0 \neq \emptyset$ oraz D_0 jest otwarty. Pozostaje pokazać, że D_0 jest domknięty w D . Niech $b \in D \cap \overline{D_0}$. Niech $U \subset D$ będzie obszarem gwiazdzystym, $b \in U$, i niech $f \in \mathcal{O}(U)$ będzie taka, że $\operatorname{Re} f = h$ (Propozycja 4.1.3). Wiemy, że $\operatorname{Re} f = h = 0$ na $U \cap D_0 \neq \emptyset$. Stąd $h = \operatorname{Re} f = 0$ na U . $\square$

Propozycja 4.1.8 (Zasada maksimum). *Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem i niech $h \in \mathcal{H}(D)$, $h \neq \operatorname{const}$. Wtedy funkcja h nie osiąga w D maksimum lokalnych. Jeżeli D jest ponadto ograniczony, to*

$$h(z) < \sup_{D \ni z \rightarrow \zeta} \{\limsup h(z) : \zeta \in \partial D\}, \quad z \in D.$$

Oczywiście, zastępując w powyższej propozycji funkcję h przez $-h$, dostajemy *zasadę minimum*.

Dowód. Przypuśćmy, że h osiąga maksimum lokalne w pewnym punkcie $a \in D$. Niech $U \subset D$ będzie obszarem gwiazdzystym, $a \in U$, takim, że $h(z) \leq h(a)$, $z \in U$. Niech $h = \operatorname{Re} f$, gdzie $f \in \mathcal{O}(U)$. Wtedy $|e^f| = e^h$ osiąga maksimum lokalne w punkcie a . Stąd $e^h = \operatorname{const}$ i w konsekwencji $h = \operatorname{const}$ w U , co wobec zasady identyczności dla funkcji harmonicznych, daje sprzeczność.

W przypadku, gdy D jest ograniczony postępujemy tak, jak w dowodzie Propozycji 2.3.7. $\square$

Niech $u : C(a, r) \rightarrow [-\infty, +\infty]$ będzie dowolną ograniczoną od góry funkcją *mierzalną* (tzn. funkcja $[0, 2\pi) \ni \theta \mapsto u(a + re^{i\theta})$ jest mierzalna), np. funkcją półciągłą z góry. Zdefiniujmy

$$P(u; a, r; z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - |z - a|^2}{|re^{i\theta} - (z - a)|^2} u(a + re^{i\theta}) d\theta, \quad z \in K(a, r),$$

$$J(u; a, r) := P(u; a, r; a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta.$$

Funkcja

$$P(z, \zeta) := \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}$$

nosi nazwę *jądra Poissona* ⁽¹⁾. Mamy więc wzór

$$P(u; a, r; z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z - a, re^{i\theta}) u(a + re^{i\theta}) d\theta$$

Liczba $J(u; a, r)$ to *średnia całkowa* funkcji u na okręgu $C(a, r)$.

Obserwacja 4.1.9.

$$\frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} = \operatorname{Re} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{\zeta\}.$$

Wynika stąd, że $P(\cdot, \zeta) \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{\zeta\})$. W konsekwencji, na podstawie twierdzenia o funkcjach danych całką, dostajemy $P(u; a, r; \cdot) \in \mathcal{H}(K(a, r))$.

Propozycja 4.1.10 (Wzór Poissona). *Niech $h \in \mathcal{C}(\overline{K}(a, r)) \cap \mathcal{H}(K(a, r))$. Wtedy*

$$h(z) = P(h; a, r; z), \quad z \in K(a, r).$$

W szczególności:

- $h(a) = J(h; a, r)$ (twierdzenie o wartości średniej),
- $1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z - a, re^{i\theta}) d\theta$, $z \in K(a, r)$.

⁽¹⁾ Siméon Poisson (1781–1840) — matematyk i fizyk francuski.

4.1. Funkcje harmoniczne

Dowód. Możemy założyć, że $a = 0$. Niech $f \in \mathcal{O}(K(r))$, $h = \operatorname{Re} f$. Wtedy dla $|z| < s < r$, mamy $s^2/\bar{z} \notin \overline{K}(s)$, a stąd na podstawie wzoru całkowego Cauchy'ego, dostajemy

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(s)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \frac{s^2}{\bar{z}}} d\zeta$$

i dalej

$$\begin{aligned} h(z) &= \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C(s)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{C(s)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \frac{s^2}{\bar{z}}} d\zeta \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C(s)} \frac{-\frac{s^2}{\bar{z}} + z}{(\zeta - z)(\zeta - \frac{s^2}{\bar{z}})} f(\zeta) d\zeta \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C(s)} \frac{-s^2 + |z|^2}{(\zeta - z)(\zeta \bar{z} - s^2)} f(\zeta) d\zeta \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C(s)} \frac{s^2 - |z|^2}{\zeta |\zeta - z|^2} f(\zeta) d\zeta \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{s^2 - |z|^2}{|se^{i\theta} - z|^2} f(se^{i\theta}) d\theta \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{s^2 - |z|^2}{|se^{i\theta} - z|^2} h(se^{i\theta}) d\theta. \end{aligned}$$

Pozostaje tylko $s \nearrow r$. □

Wniosek 4.1.11 (Wzór Schwarza). *Dla $h \in \mathcal{H}(K(a, r)) \cap \mathcal{C}(\overline{K}(a, r))$, niech*

$$f(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{i\theta} + (z - a)}{re^{i\theta} - (z - a)} h(a + re^{i\theta}) d\theta, \quad z \in K(a, r).$$

Wtedy $f \in \mathcal{O}(K(a, r))$, $\operatorname{Re} f = h$.

Wniosek 4.1.12 (Wzór Poissona–Jensena ⁽²⁾). *Niech $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, gdzie $\Omega \supset \overline{\mathbb{D}}$. Załóżmy, że f nie ma zer ani biegunów na $\mathbb{T}$ i niech $a_1, \dots, a_p$ oznaczają zera funkcji f w $\mathbb{D}$, zaś $b_1, \dots, b_q$ — bieguny w $\mathbb{D}$ liczone z krotnościami. Wtedy:*

$$\ln \left| f(z) \frac{\prod_{j=1}^q h_{b_j}(z)}{\prod_{j=1}^p h_{a_j}(z)} \right| = P(\ln |f|; 0, 1; z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta}) \ln |f(e^{i\theta})| d\theta, \quad z \in \mathbb{D},$$

przy czym jeżeli $p = 0$ lub $q = 0$, to uważamy, że stosowny iloczyn jest równy 1. W szczególności:

- Dla $z = 0$ dostajemy:

$$\ln \left| f(0) \frac{b_1 \cdots b_q}{a_1 \cdots a_p} \right| = J(\ln |f|; 0, 1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(e^{i\theta})| d\theta.$$

- Jeżeli f nie ma biegunów, to

$$\ln |f(z)| \leq P(\ln |f|; 0, 1; z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta}) \ln |f(e^{i\theta})| d\theta, \quad z \in \mathbb{D}; \quad \ln |f(0)| \leq J(\ln |f|; 0, 1).$$

Ćwiczenie 4.1.13. Sformułować wzór Poissona–Jensena dla $K(a, r)$.

Twierdzenie 4.1.14 (Twierdzenie Rieszów ⁽³⁾ ⁽⁴⁾). *Niech $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ będzie taka, że*

$$M := \sup\{J(\ln^+ |f|; 0, r) : 0 < r < 1\} < +\infty$$

(np. f jest ograniczona). Załóżmy, że zbiór

$$E := \{\theta \in [0, 2\pi] : \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta}) = 0\}$$

jest miary dodatniej. Wtedy $f \equiv 0$.

⁽²⁾ Johan Jensen (1859–1925) — matematyk duński.

⁽³⁾ Frederic Riesz (1880–1956) — matematyk węgierski.

⁽⁴⁾ Marcel Riesz (1886–1969) — matematyk węgierski.

Dowód. Ustalmy $0 < \varepsilon < 1$ i niech

$$E_k := \{\theta \in E : |f(re^{i\theta})| \leq \varepsilon \text{ dla } r \in (1 - 1/k, 1)\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Oczywiście, $E_k \nearrow E$. Teraz dla $k \in \mathbb{N}_2$, $z \in K(1/2)$, $1 - 1/k < r < 1$, korzystając ze wzoru Poissona–Jensena, szacujemy

$$\begin{aligned} \ln |f(z)| &\leq P(\ln |f|; 0, r; z) = \frac{1}{2\pi} \int_{E_k} P(z, re^{i\theta}) \ln |f(re^{i\theta})| d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi] \setminus E_k} P(z, re^{i\theta}) \ln |f(re^{i\theta})| d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{E_k} P(z, re^{i\theta}) \ln \varepsilon d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi] \setminus E_k} P(z, re^{i\theta}) \ln^+ |f(re^{i\theta})| d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{E_k} \frac{r - |z|}{r + |z|} \ln \varepsilon d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi] \setminus E_k} \frac{r + |z|}{r - |z|} \ln^+ |f(re^{i\theta})| d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \mathcal{L}^1(E_k) \frac{r - |z|}{r + |z|} \ln \varepsilon + \frac{r + |z|}{r - |z|} M \\ &\xrightarrow{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \mathcal{L}^1(E_k) \frac{1 - |z|}{1 + |z|} \ln \varepsilon + \frac{1 + |z|}{1 - |z|} M \leq \frac{1}{2\pi} \mathcal{L}^1(E_k) \frac{1/2}{3/2} \ln \varepsilon + \frac{3/2}{1/2} M \\ &\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \mathcal{L}^1(E) \frac{1}{3} \ln \varepsilon + 3M, \end{aligned}$$

skąd wynika, że $|f| \leq \varepsilon^{\frac{\mathcal{L}^1(E)}{6\pi}} e^{3M}$ na $K(1/2)$. □

Definicja 4.1.15. Dla obszaru ograniczonego $D \subset \mathbb{C}$ i funkcji ciągłej $b : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$, *problem Dirichleta* ⁽⁵⁾ polega na znalezieniu funkcji $h \in \mathcal{H}(D) \cap \mathcal{C}(\bar{D})$ takiej, że $h = b$ na ∂D .

Z zasady maksimum dla funkcji harmonicznych wynika, że funkcja h jest jednoznacznie wyznaczona (o ile istnieje).

Ćwiczenie 4.1.16. Pokazać, że dla $\mathbb{D}_*$ problem Dirichleta nie zawsze ma rozwiązanie.

Propozycja 4.1.17 (Problem Dirichleta dla koła). *Dla funkcji ciągłej $b : C(a, r) \rightarrow \mathbb{R}$ połóżmy*

$$h(z) := \begin{cases} b(z), & z \in C(a, r) \\ P(b; a, r; z), & z \in K(a, r) \end{cases}.$$

Wtedy $h \in \mathcal{C}(\bar{K}(a, r)) \cap \mathcal{H}(K(a, r))$.

Dowód. Możemy założyć, że $a = 0$. Na podstawie Obserwacji 4.1.9 oraz twierdzenia o funkcjach danych całką wnioskujemy, że $h \in \mathcal{H}(K(r))$. Pozostaje pokazać, że dla dowolnego $\zeta \in C(r)$ mamy $\lim_{z \rightarrow \zeta_0} P(b; 0, r; z) = b(\zeta_0)$. Niech $C > 0$ będzie takie, że $|b(z)| \leq C$ dla $z \in C(r)$. Ustalmy $\zeta_0 = re^{i\theta_0} \in C(r)$. Możemy założyć, $0 < \theta_0 < 2\pi$. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ niech $0 < \delta < \min\{\theta_0, 2\pi - \theta_0\}$ będzie takie, że $|b(re^{i\theta}) - b(re^{i\theta_0})| \leq \varepsilon$ dla $|\theta - \theta_0| \leq \delta$. Liczymy:

$$\begin{aligned} |P(b; 0, r; z) - b(\zeta_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, re^{i\theta}) b(re^{i\theta}) d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, re^{i\theta}) b(\zeta_0) d\theta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left(\int_{[0, 2\pi] \setminus [\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta]} P(z, re^{i\theta}) |b(re^{i\theta}) - b(re^{i\theta_0})| d\theta + \int_{[\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta]} P(z, re^{i\theta}) |b(re^{i\theta}) - b(re^{i\theta_0})| d\theta \right) \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left(2C \int_{[0, 2\pi] \setminus [\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta]} P(z, re^{i\theta}) d\theta + \varepsilon \int_{[\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta]} P(z, re^{i\theta}) d\theta \right) \\ &\leq \frac{C}{\pi} \int_{[0, 2\pi] \setminus [\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta]} \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2} d\theta + \varepsilon \xrightarrow{z \rightarrow \zeta_0} \varepsilon. \end{aligned}$$

□

⁽⁵⁾ Peter Dirichlet (1805–1859) — matematyk niemiecki.

4.2. Funkcje harmoniczne w pierścieniu

Ćwiczenie 4.1.18. Korzystając z powyższego dowodu, wykazać następujące ogólniejsze twierdzenie.

Niech $b : C(a, r) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną ograniczoną funkcją mierzalną, ciągłą w pewnym punkcie $\zeta_0 \in C(a, r)$. Wtedy $\lim_{z \rightarrow \zeta_0} P(b; a, r; z) = b(\zeta_0)$.

Wniosek 4.1.19. Problem Dirichleta posiada rozwiązanie w dowolnym obszarze D ograniczonym krzywą Jordana (przy dowolnym b).

Dowód. Niech $f : D \rightarrow \mathbb{D}$ będzie odwzorowaniem biholomorficznym (twierdzenie Riemanna), które jest homeomorfizmem $\overline{D} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ (twierdzenie Osgooda–Carathéodory’ego). Niech h będzie rozwiązaniem problemu Dirichleta dla $\mathbb{D}$ z obłożeniem $b \circ f^{-1}$ (Propozycja 4.1.17). Wtedy $h \circ f$ jest rozwiązaniem wyjściowego problemu Dirichleta dla D (Wniosek 4.1.5(c)). $\square$

4.2. Funkcje harmoniczne w pierścieniu

Niech $A := \mathbb{A}(a, r_1, r_2)$, $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$.

Propozycja 4.2.1. Każda funkcja $h \in \mathcal{H}(A)$ ma przedstawienie postaci

$$h(z) = \alpha \ln |z - a| + \operatorname{Re} f(z), \quad z \in A,$$

przy czym stała $\alpha \in \mathbb{R}$ jest wyznaczona jednoznacznie, zaś funkcja $f \in \mathcal{O}(A)$ jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do stałej urojonej.

Zauważmy, że każda funkcja powyższej postaci jest oczywiście harmoniczna.

Dowód. Możemy założyć, że $a = 0$. Niech $g := h'_x - ih'_y$. Łatwo widać, że $g \in \mathcal{O}(A)$. Niech $g(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k z^k$, $z \in A$, będzie szeregiem Laurenta funkcji g . Ustalmy $r_0 \in (r_1, r_2)$ i niech $\alpha := \operatorname{Re} b_{-1}$,

$$f(z) := h(r_0) - b_{-1} \ln r_0 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq -1}}^{\infty} b_k \frac{z^{k+1} - r_0^{k+1}}{k+1}, \quad z \in A.$$

Łatwo sprawdzić, że szereg definiujący funkcję f jest niemal jednostajnie zbieżny (ĆWICZENIE), a więc $f \in \mathcal{O}(A)$. Zauważmy, że $f(r_0) = h(r_0) - b_{-1} \ln r_0$. Przechodzimy do sprawdzenia wzoru. Niech $z = re^{i\varphi}$, $\varphi \in (0, 2\pi]$. Liczymy

$$\begin{aligned} h(z) - h(r_0) &= (h(r) - h(r_0)) + (h(re^{i\theta}) - h(r)) = \int_{r_0}^r h'_x(x) dx + \int_0^\varphi \frac{d}{dt} h(re^{it}) dt \\ &= \operatorname{Re} \int_{[r_0, r]} g(z) dz + \operatorname{Re} \int_{C_0^\varphi(r)} g(z) dz = \operatorname{Re} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \int_{[r_0, r] \cup C_0^\varphi(r)} z^k dz \\ &= \operatorname{Re} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq -1}}^{\infty} b_k \frac{z^{k+1} - r_0^{k+1}}{k+1} + \operatorname{Re} \left(b_{-1} \int_{[r_0, r] \cup C_0^\varphi(r)} \frac{dz}{z} \right) \\ &= \operatorname{Re}(f(z) - h(r_0) + b_{-1} \ln r_0) + \operatorname{Re}(b_{-1}(\ln r + i\varphi - \ln r_0)) \\ &= \operatorname{Re} f(z) - h(r_0) + (\operatorname{Re} b_{-1}) \ln r - (\operatorname{Im} b_{-1}) \varphi. \end{aligned}$$

Dla $z = r_0$ ($\varphi = 2\pi$) dostajemy $0 = -(\operatorname{Im} b_{-1})2\pi$, skąd wynika, że $\operatorname{Im} b_{-1} = 0$.

Przechodzimy do dowodu jednoznaczności rozkładu. Wystarczy pokazać, że jeżeli $h = 0$, to $\alpha = 0$ i $\operatorname{Re} f \equiv 0$. Mamy $0 = \alpha \ln |z| + \operatorname{Re} f(z)$, $z \in A$. Niech $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$. Wiemy, że

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) d\theta$$

jest niezależne od r . Wynika stąd, że $0 = J(0; 0, r) = \alpha \ln r + \operatorname{Re} a_0$, $r_1 < r < r_2$, a więc $\alpha = 0$. W konsekwencji, $\operatorname{Re} f \equiv 0$. $\square$

Wniosek 4.2.2. Jeżeli $h \in \mathcal{H}(A)$, to

$$J(h; a, r) = \alpha \ln r + \beta, \quad r_1 < r < r_2,$$

dla pewnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Definicja 4.2.3. Niech $h \in \mathcal{H}(\mathbb{A}(a, 0, r))$ (tzn. $r_1 = 0, r_2 = r$) i niech

$$h(z) = \alpha \ln |z - a| + \operatorname{Re} f(z), \quad z \in \mathbb{A}(a, 0, r),$$

będzie reprezentacją funkcji h daną przez Propozycję 4.2.1. Wprowadzamy następującą klasyfikację *izolowanych punktów osobliwych funkcji harmonicznych*:

- *punkt pozornie osobliwy (osobliwość usuwalną)*, jeżeli $\alpha = 0$ oraz f ma w punkcie a osobliwość pozorną; wtedy funkcja h przedłuża się harmonicznie na $K(a, r)$ ($\tilde{h} := \operatorname{Re} \tilde{f}$);
- *biegunem logarytmicznym rzędu $-\alpha$* , jeżeli $\alpha \neq 0$ oraz f ma w punkcie a osobliwość pozorną; wtedy granica $\lim_{z \rightarrow a} h(z)$ istnieje i jest nieskończona;
- *punktem istotnie osobliwym (punktem nieoznaczoności)*, jeżeli f ma w punkcie a biegun lub osobliwość istotną.

Wniosek 4.2.4. Jeżeli $h \in \mathcal{H}(\mathbb{A}(a, 0, r))$ ma w a punkt istotnie osobliwy, to $h(\mathbb{A}(a, 0, \delta)) = \mathbb{R}$ dla dowolnego $0 < \delta < r$.

W szczególności, granica $\lim_{z \rightarrow a} h(z)$ nie istnieje.

Dowód. Możemy założyć, że $a = 0$ i niech $h(z) = \alpha \ln |z| + \operatorname{Re} f(z)$, $z \in \mathbb{A}(0, r)$ będzie reprezentacją h z Propozycji 4.2.1. Przypuśćmy, że dla pewnego $0 < \delta < r$ istnieje $c \in \mathbb{R} \setminus h(\mathbb{A}(0, \delta))$. Wtedy (z własności Darboux) albo $h(z) < c$, $z \in \mathbb{A}(0, \delta)$ albo $h(z) > c$, $z \in \mathbb{A}(0, \delta)$. Zastępując ewentualnie h przez $-h$, redukujemy sytuację do pierwszego przypadku.

Niech $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$, $z \in \mathbb{A}(0, r)$. Wiemy, że $a_{-p} \neq 0$ dla pewnego $p \in \mathbb{N}$. Przypomnijmy, że

$$J(h; 0, s) = \alpha \ln s + \operatorname{Re} a_0$$

i zauważmy, że

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} h(se^{it}) e^{-pit} dt &= \int_0^{2\pi} (\operatorname{Re} f(se^{it})) e^{-pit} dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k s^k e^{kit} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{a}_k s^k e^{-kit} \right) e^{-pit} dt \\ &= \pi(a_p s^p + \bar{a}_{-p} s^{-p}). \end{aligned}$$

W konsekwencji,

$$\begin{aligned} \alpha \ln s + \operatorname{Re} a_0 + \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\zeta a_p) s^p + \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\zeta \bar{a}_{-p}) s^{-p} &= \alpha \ln s + \operatorname{Re} a_0 + \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\zeta(a_p s^p + \bar{a}_{-p} s^{-p})) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(se^{it}) \operatorname{Re}(1 + \zeta e^{-pit}) dt < 2c, \quad \zeta \in \mathbb{T}, \quad 0 < s < \delta. \end{aligned}$$

W szczególności, jeżeli $s \rightarrow 0+$, to musi być (ĆWICZENIE) $\operatorname{Re}(\zeta \bar{a}_{-p}) = 0$ dla dowolnego $\zeta \in \mathbb{T}$ — sprzeczność. $\square$

Wniosek 4.2.5. Niech $h \in \mathcal{H}(\mathbb{A}(a, 0, r))$. Wtedy:

- h ma w a punkt pozornie osobliwy wtedy i tylko wtedy, gdy granica $\lim_{z \rightarrow a} h(z)$ istnieje i jest skończona;
- h ma w a biegun logarytmiczny wtedy i tylko wtedy, gdy granica $\lim_{z \rightarrow a} h(z)$ istnieje i jest nieskończona;
- h ma w a punkt istotnie osobliwy wtedy i tylko wtedy, gdy granica $\lim_{z \rightarrow a} h(z)$ nie istnieje.

Propozycja 4.2.6. Każda funkcja $h \in \mathcal{H}(A)$ ma (niejednoznaczne) przedstawienie postaci

$$h(z) = \lambda \ln |g(z)|, \quad z \in A,$$

gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$, zaś $g \in \mathcal{O}^*(A)$.

Zauważmy, że każda funkcja powyższej postaci jest oczywiście harmoniczna.

Niejednoznaczność wynika np. z faktu, iż $h = \frac{\lambda}{n} \ln |g^n|$, $n \in \mathbb{Z}_*$.

Dowód. Możemy założyć, że $a = 0$.

Niech $h + iv \in \mathcal{O}(A \setminus \mathbb{R}_-)$, gdzie v jest funkcją harmoniczną sprzężoną z h w obszarze jednospójnym $D := A \setminus \mathbb{R}_-$, daną wzorem

$$v(z) := \int_{C_0^{\text{Arg } z}(|z|)} -h'_y dx + h'_x dy, \quad z \in D.$$

Zasadniczy dowód polega na wykazaniu istnienia stałej $\lambda \in \mathbb{R}$ takiej, że

$$R(x) := \lim_{\substack{z \rightarrow x \\ \text{Im } z > 0}} v(z) - \lim_{\substack{z \rightarrow x \\ \text{Im } z < 0}} v(z) = 2\pi\lambda, \quad -r_2 < x < -r_1.$$

Istotnie, dla $x \in (-r_2, -r_1)$ mamy

$$R(x) = \int_{C_0^\pi(-x)} -h'_y dx + h'_x dy - \int_{C_0^{-\pi}(-x)} -h'_y dx + h'_x dy = \int_{C(-x)} -h'_y dx + h'_x dy.$$

Równość $R(x_1) = R(x_2)$ dla $-r_2 < x_1, x_2 < -r_1$, wynika teraz natychmiast z faktu, że forma $-h'_y dx + h'_x dy$ jest zamknięta.

Jeżeli $\lambda = 0$, to $h + iv \in \mathcal{O}(A \setminus \mathbb{R}_-) \cap \mathcal{C}(A) = \mathcal{O}(A)$ (twierdzenie Morery) oraz $h = \ln |e^{h+iv}|$.

Jeżeli $\lambda \neq 0$, to $g := \exp(\frac{1}{\lambda}(h + iv)) \in \mathcal{O}(A \setminus \mathbb{R}_-) \cap \mathcal{C}(A) = \mathcal{O}(A)$ oraz $h = \lambda \ln |g|$. $\square$

Obserwacja 4.2.7. Niech $h \in \mathcal{H}(\mathbb{A}(a, 0, r))$ i niech $h = \lambda \ln |g|$ będzie reprezentacją funkcji z Propozycji 4.2.6. Możemy założyć, że $\lambda \in \mathbb{R}_+$ (zastępując w razie potrzeby g przez $1/g$). Załóżmy, że $\lambda > 0$.

- Przypuśćmy, że a jest punktem pozornie osobliwym dla h . Wtedy granica $\lim_{z \rightarrow a} h(z)$ istnieje i jest skończona, co oznacza, że funkcja g jest ograniczona w sąsiedztwie a , a to z kolei implikuje, że a jest punktem pozornie osobliwym dla g . Ponadto, $\tilde{g}(a) \neq 0$ ($\tilde{g}$ oznacza holomorficzne rozszerzenie g).

Zachodzi również implikacja odwrotna: jeżeli a jest pozornie osobliwy dla g i $\tilde{g}(a) \neq 0$, to jest pozornie osobliwy dla h .

- Przypuśćmy teraz, że a jest biegunem logarytmicznym dla h . Wtedy a nie może być punktem istotnie osobliwym dla g (czyli jest biegunem lub punktem pozornie osobliwym dla g). Ponadto, jeżeli jest to osobliwość usuwalna dla g , to $\tilde{g}(a) = 0$.

Zachodzi również implikacja odwrotna: jeżeli a jest pozornie osobliwy dla g i $\tilde{g}(a) = 0$, lub a jest biegunem dla g , to a jest biegunem logarytmicznym dla h .

- W konsekwencji, a jest punktem istotnie osobliwym dla h , wtedy i tylko wtedy, gdy a jest punktem istotnie osobliwym dla g .

Twierdzenie* 4.2.8 (Problem Dirichleta dla pierścienia). Niech $A := \mathbb{A}(a, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < +\infty$. Wtedy dla dowolnej funkcji ciągłej $b : \partial A \rightarrow \mathbb{R}$ istnieje funkcja $h \in \mathcal{C}(\bar{A}) \cap \mathcal{H}(A)$ taka, że $h = b$ na ∂A .

4.3. Twierdzenia Harnacka

Propozycja 4.3.1 (Twierdzenia Harnacka ⁽⁶⁾). (a) Niech $(h_k)_{k=1}^\infty \subset \mathcal{H}(\Omega)$ oraz $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Jeżeli $h_k \rightarrow h$ niemal jednostajnie w Ω , to $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ oraz $\frac{\partial^{p+q} h_k}{\partial x^p \partial y^q} \rightarrow \frac{\partial^{p+q} h}{\partial x^p \partial y^q}$ niemal jednostajnie w Ω dla dowolnych $p, q \in \mathbb{Z}_+$.

(b) Niech $(h_k)_{k=1}^\infty \subset \mathcal{H}(D)$, gdzie $D \subset \mathbb{C}$ jest obszarem. Jeżeli $(h_k)_{k=1}^\infty$ jest ciągiem monotonicznym oraz ciąg $(h_k(z_0))_{k=1}^\infty$ jest zbieżny (do liczby skończonej) dla pewnego $z_0 \in D$, to ciąg $(h_k)_{k=1}^\infty$ jest zbieżny niemal jednostajnie w D . W szczególności, funkcja $h := \lim_{k \rightarrow +\infty} h_k$ jest harmoniczną w D .

Dowód. (a) Niech $K(a, r) \subset \subset \Omega$ będzie dowolne,

$$f_k(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{i\theta} + (z - a)}{re^{i\theta} - (z - a)} h_k(a + re^{i\theta}) d\theta, \quad z \in K(a, r), \quad k \in \mathbb{N}.$$

⁽⁶⁾ Karl Harnack (1851–1888) — matematyk niemiecki.

Ponieważ $h_k \rightarrow h$ jednostajnie na $C(a, r)$, dostajemy stąd $f_k \rightarrow f$ niemal jednostajnie w $K(a, r)$, gdzie

$$f(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{i\theta} + (z-a)}{re^{i\theta} - (z-a)} h(a + re^{i\theta}) d\theta, \quad z \in K(a, r).$$

Wynika stąd, że $f \in \mathcal{O}(K(a, r))$, a więc $h = \operatorname{Re} f \in \mathcal{H}(K(a, r))$. Ponadto, $f_k^{(\ell)} \rightarrow f^{(\ell)}$ niemal jednostajnie w $K(a, r)$ dla dowolnego $\ell \in \mathbb{N}$, a stąd $\frac{\partial^{p+q} f_k}{\partial x^p \partial y^q} = i^q f_k^{(p+q)} \rightarrow i^q f^{(p+q)} = \frac{\partial^{p+q} f}{\partial x^p \partial y^q}$ niemal jednostajnie w $K(a, r)$.

(b) Możemy założyć, że $h_k \leq h_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$. Niech $K(z_0, r) \subset\subset D$. Pokażemy, że $(h_k)_{k=1}^\infty$ jest zbieżny niemal jednostajnie w kole $K(z_0, r)$. Zastępując punkt z_0 dowolnym punktem tego koła, możemy „rozpropagować” zbieżność na cały obszar D . Dla uproszczenia załóżmy, że $z_0 = 0$. Dla $\ell \geq k$ i $z \in K(r)$ mamy

$$\begin{aligned} h_\ell(z) - h_k(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2} (h_\ell(re^{i\theta}) - h_k(re^{i\theta})) d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r + |z|}{r - |z|} (h_\ell(re^{i\theta}) - h_k(re^{i\theta})) d\theta = \frac{r + |z|}{r - |z|} (h_\ell(0) - h_k(0)). \end{aligned}$$

Wynika stąd natychmiast, że ciąg $(h_k)_{k=1}^\infty$ spełnia niemal jednostajny warunek Cauchy’ego w $K(r)$. $\square$

4.4. Funkcje subharmoniczne

Definicja 4.4.1. Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie zbiorem otwartym. Funkcję $u : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty)$ nazywamy *subharmoniczną* na Ω ($u \in \mathcal{SH}(\Omega)$), jeżeli:

- u jest półciągłą z góry na Ω , tzn. $u \in \mathcal{C}^\uparrow(\Omega)$,
- dla dowolnego obszaru $D \subset\subset \Omega$ i dla dowolnej funkcji $h \in \mathcal{C}(\overline{D}) \cap \mathcal{H}(D)$, jeżeli $u \leq h$ na ∂D , to $u \leq h$ w D .

Obserwacja 4.4.2. (a) Bezpośrednio z powyższej definicji oraz z zasady maksimum dla funkcji harmonicznych wynika, że:

- $\mathcal{H}(\Omega) \subset \mathcal{SH}(\Omega)$,
- $\mathcal{SH}(\Omega) + \mathcal{H}(\Omega) = \mathcal{SH}(\Omega)$,
- $\mathbb{R}_{>0} \cdot \mathcal{SH}(\Omega) = \mathcal{SH}(\Omega)$.

(b) Pojęcie subharmoniczności przenosi się oczywiście na przypadek zbioru otwartego $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: funkcję półciągłą z góry $u : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty)$ nazywamy *subharmoniczną* na Ω ($u \in \mathcal{SH}(\Omega)$), jeżeli dla dowolnego obszaru $D \subset\subset \Omega$ i dla dowolnej funkcji $h \in \mathcal{C}(\overline{D}) \cap \mathcal{H}(D)$, jeżeli $u \leq h$ na ∂D , to $u \leq h$ w D .

(c) Dla $n = 1$, jeżeli $\Omega \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem, to dla $u : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty)$ mamy $u \in \mathcal{SH}(\Omega) \iff u$ jest funkcją wypukłą.

Propozycja 4.4.3 (Twierdzenie o wartości średniej). *Założmy, że $u \in \mathcal{SH}(\Omega)$. Wtedy*

$$u(a) \leq J(u; a, r), \quad a \in \Omega, \quad 0 < r < d_\Omega(a).$$

Dowód. Ustalmy $a \in \Omega$ i $0 < r < d_\Omega(a)$. Niech $(b_k)_{k=1}^\infty \subset \mathcal{C}(C(a, r), \mathbb{R})$ będzie ciągiem takim, że $b_k \searrow u$ punktowo na $C(a, r)$. Niech h_k oznacza rozwiązanie Problemu Dirichleta dla koła $K(a, r)$ z warunkiem brzegowym b_k (Propozycja 4.1.17). Oczywiście $u \leq h_k$ na $C(a, r)$, a stąd, wobec definicji funkcji subharmonicznej i Propozycji 4.1.10, dostajemy

$$u(a) \leq h_k(a) = J(b_k; a, r), \quad k \geq 1.$$

Pozostaje jeszcze tylko skorzystać z twierdzenia o monotonicznym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki. $\square$

Lemat 4.4.4. *Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem i niech $v \in \mathcal{C}^\uparrow(D, [-\infty, +\infty))$, $v \not\equiv \text{const}$. Przypuśćmy, że dla dowolnego $a \in D$ istnieje liczba $R(a) \in (0, d_D(a)]$ o tej własności, że*

$$v(a) \leq J(v; a, r), \quad 0 < r < R(a).$$

Wtedy funkcja v nie osiąga w D maksimum globalnego.

4.4. Funkcje subharmoniczne

Dowód. Przypuśćmy, że dla pewnego $z_0 \in D$ mamy $v(z) \leq v(z_0)$, $z \in D$. Niech $D_0 := v^{-1}(v(z_0))$. Oczywiście $D_0 \neq \emptyset$. Zauważmy, że dla dowolnego punktu $a \in D'_0 \cap D$ mamy

$$v(z_0) = \limsup_{D_0 \ni z \rightarrow a} v(z) \leq \limsup_{D \ni z \rightarrow a} v(z) = v(a) \leq v(z_0),$$

co oznacza, że D_0 jest zbiorem domkniętym w D . Z drugiej strony, jeżeli $a \in D_0$, to

$$v(z_0) = v(a) \leq \mathbf{J}(v; a, r) \leq v(z_0), \quad 0 < r < R(a),$$

co oznacza, że $K(a, R(a)) \subset D_0$, czyli że D_0 jest otwarty. Zatem, wobec spójności D , dostajemy $D_0 = D$, czyli $v \equiv v(z_0)$; sprzeczność. $\square$

Z Propozycji 4.4.3 i Lematu 4.4.4 dostajemy natychmiast

Wniosek 4.4.5 (Zasada maksimum). *Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem i niech $u \in \mathcal{SH}(D)$, $u \not\equiv \text{const}$. Wtedy u nie osiąga w D maksimum globalnego. Jeżeli ponadto D jest ograniczony, to*

$$u(z) < \sup\{\limsup_{D \ni z \rightarrow \zeta} u(z) : \zeta \in \partial D\}, \quad z \in D.$$

Propozycja 4.4.6. *Niech $u : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty)$. Wtedy $u \in \mathcal{SH}(\Omega)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u \in \mathcal{C}^\uparrow(\Omega)$ oraz dla dowolnego $a \in \Omega$ istnieje liczba $R(a) \in (0, d_\Omega(a)]$ taka, że*

$$u(a) \leq \mathbf{J}(u; a, r), \quad 0 < r < R(a).$$

Dowód. Implikacja ($\implies$) wynika z Propozycji 4.4.3. Dla dowodu implikacji przeciwnej, ustalmy obszar $D \subset \subset \Omega$ oraz funkcję $h \in \mathcal{C}(\overline{D}) \cap \mathcal{H}(D)$ taką, że $u \leq h$ na ∂D . Niech $v(z) := u(z) - h(z)$, $z \in \overline{D}$. Wobec Propozycji 4.1.10, mamy $v(a) \leq \mathbf{J}(v; a, r)$, $0 < r < \min\{R(a), d_D(a)\}$, $a \in D$. Stąd, korzystając z Lematu 4.4.4, wnioskujemy, że $v \leq 0$ w D , czyli że $u \leq h$ w D . $\square$

Wniosek 4.4.7. (a) *Niech $u : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty)$. Wtedy $u \in \mathcal{SH}(\Omega)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dowolny punkt $a \in \Omega$ posiada otoczenie otwarte $U_a \subset \Omega$ takie, że $u|_{U_a} \in \mathcal{SH}(U_a)$. Innymi słowy, subharmoniczność jest własnością lokalną.*

(b) $\mathcal{SH}(\Omega) + \mathcal{SH}(\Omega) = \mathcal{SH}(\Omega)$.

Propozycja 4.4.8. *Niech $u : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty)$. Wtedy $u \in \mathcal{SH}(\Omega)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u \in \mathcal{C}^\uparrow(\Omega)$ oraz dla dowolnego punktu $a \in D$, $0 < r < d_\Omega(a)$ i wielomianu $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$, jeżeli $u \leq \text{Re } p$ na $C(a, r)$, to $u \leq \text{Re } p$ w $K(a, r)$.*

Dowód. Implikacja ($\implies$) jest oczywista. Przejdźmy do dowodu implikacji przeciwnej. Ustalmy $a \in \Omega$ i $0 < r < d_\Omega(a)$. Wobec Propozycji 4.4.6, wystarczy pokazać, że dla dowolnej funkcji ciągłej $b : C(a, r) \rightarrow \mathbb{R}$ takiej, że $u \leq b$ mamy $u(a) \leq \mathbf{J}(b; a, r)$ – por. dowód Propozycji 4.4.3. Ustalmy funkcję b i niech $\varphi_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $k \geq 1$, będzie ciągiem wielomianów trygonometrycznych ⁽⁷⁾ takim, że

$$|b(a + re^{i\theta}) + \frac{1}{k} - \varphi_k(\theta)| < \frac{1}{k}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Niech $p_k \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ będzie taki, że $\varphi_k(\theta) = \text{Re } p_k(a + e^{i\theta})$, $\theta \in \mathbb{R}$, $k \geq 1$. Wtedy $u \leq \text{Re } p_k$ na $C(a, r)$, a zatem

$$u(a) \leq \text{Re } p_k(a) = \mathbf{J}(\text{Re } p_k; a, r) \leq \mathbf{J}(b; a, r) + \frac{2}{k}, \quad k \geq 1,$$

co przy $k \rightarrow +\infty$ kończy dowód. $\square$

⁽⁷⁾ Przypomnijmy, że wielomianem trygonometrycznym nazywamy każdą funkcję $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ postaci

$$\varphi(\theta) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^k (\alpha_j \cos j\theta + \beta_j \sin j\theta), \quad \theta \in \mathbb{R},$$

gdzie $\alpha_0, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{R}$. Zauważmy, że $\varphi(\theta) = \text{Re } p(a + re^{i\theta})$, gdzie

$$p(z) := q\left(\frac{z-a}{r}\right), \quad q(z) := \alpha_0 + \sum_{j=1}^k (\alpha_j - i\beta_j)z^j.$$

Propozycja 4.4.9. Jeżeli $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ (Ω otwarty w $\mathbb{C}$), wówczas $\ln |f| \in \mathcal{SH}(\Omega)$.

Dowód. Wystarczy skorzystać np. ze wzoru Poissona–Jensena (oraz Propozycji 4.4.6). $\square$

Propozycja 4.4.10. Niech $(u_k)_{k=1}^\infty \subset \mathcal{SH}(\Omega)$.

(a) Jeżeli $u_k \searrow u$, to $u \in \mathcal{SH}(\Omega)$.

(b) Jeżeli $u_k \rightarrow u$ niemal jednostajnie w Ω , to $u \in \mathcal{SH}(\Omega)$.

Dowód. W obu przypadkach jest jasne, że $u \in \mathcal{C}^\uparrow(\Omega)$. Ponieważ dla dowolnego k mamy $u_k(a) \leq \mathbf{J}(u_k; a, r)$, $a \in \Omega$, $0 < r < d_\Omega(a)$, pozostaje skorzystać ze stosownego twierdzenia o przechodzeniu do granicy pod znakiem całki oraz z Propozycji 4.4.6. $\square$

Propozycja 4.4.11. Niech $(u_i)_{i \in I} \subset \mathcal{SH}(\Omega)$ będzie dowolną lokalnie ograniczoną z góry rodziną funkcji subharmonicznych. Połóżmy $u := (\sup_{i \in I} u_i)^*$, gdzie v^* oznacza górną regularyzację funkcji v ⁽⁸⁾. Wtedy $u \in \mathcal{SH}(\Omega)$. W szczególności, $\max\{u_1, \dots, u_N\} \in \mathcal{SH}(\Omega)$ dla dowolnych funkcji $u_1, \dots, u_N \in \mathcal{SH}(\Omega)$.

Dowód. Oczywiście funkcja u jest półciągła z góry. Niech $D \subset \subset \Omega$, $h \in \mathcal{C}(\overline{D}) \cap \mathcal{H}(D)$, $u \leq h$ na ∂D . Wtedy $u_i \leq h$ na ∂D dla dowolnego $i \in I$, a stąd $\sup_{i \in I} u_i \leq h$ w D . Ostatecznie, ponieważ h jest ciągła, dostajemy $u \leq h$ w D . $\square$

Propozycja 4.4.12. Niech $G \subset \Omega$ będą zbiorami otwartymi w $\mathbb{C}$ i niech $v \in \mathcal{SH}(G)$, $u \in \mathcal{SH}(\Omega)$. Przypuśćmy, że

$$\limsup_{G \ni z \rightarrow \zeta} v(z) \leq u(\zeta), \quad \zeta \in (\partial G) \cap \Omega.$$

Niech

$$\tilde{u}(z) := \begin{cases} \max\{v(z), u(z)\}, & z \in G \\ u(z), & z \in \Omega \setminus G \end{cases}.$$

Wtedy $\tilde{u} \in \mathcal{SH}(\Omega)$.

Dowód. Oczywiście $\tilde{u} \in \mathcal{C}^\uparrow(\Omega)$ i $\tilde{u} \in \mathcal{SH}(\Omega \setminus \partial G)$. Dla $a \in \Omega \cap \partial G$ mamy

$$\tilde{u}(a) = u(a) \leq \mathbf{J}(u; a, r) \leq \mathbf{J}(\tilde{u}; a, r), \quad 0 < r < d_\Omega(a). \quad \square$$

Propozycja 4.4.13. Niech $u : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty)$. Wtedy $u \in \mathcal{SH}(\Omega)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u \in \mathcal{C}^\uparrow(\Omega)$ oraz dla dowolnego $a \in \Omega$ istnieje liczba $R(a) \in (0, d_\Omega(a)]$ taka, że

$$u(z) \leq \mathbf{P}(u; a, r; z), \quad 0 < r < R(a), \quad z \in K(a, r).$$

Dowód. Implikacja ($\Leftarrow$) wynika z Propozycji 4.4.6. Dla dowodu implikacji ($\Rightarrow$) wystarczy rozumować tak, jak w dowodzie Propozycji 4.4.3, i wykorzystać wzór Poissona:

$$u(z) \leq h_k(z) = \mathbf{P}(b_k; a, r; z) \searrow \mathbf{P}(u; a, r; z). \quad \square$$

Wniosek 4.4.14. $\mathcal{SH}(\Omega) \cap (-\mathcal{SH}(\Omega)) = \mathcal{H}(\Omega)$.

Propozycja 4.4.15. Niech $(u_k)_{k=1}^\infty \subset \mathcal{SH}(\Omega)$ będzie dowolnym lokalnie ograniczonym z góry ciągiem funkcji subharmonicznych. Połóżmy $u := (\limsup_{k \rightarrow +\infty} u_k)^*$. Wtedy $u \in \mathcal{SH}(\Omega)$.

Dowód. Oczywiście u jest półciągła z góry. Ustalmy $a \in \Omega$ oraz $0 < r < d_\Omega(a)$. Na podstawie Lematu Fatou mamy

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} u_k(z) \leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(u_k; a, r; z) \leq \mathbf{P}(\limsup_{k \rightarrow +\infty} u_k; a, r; z) \leq \mathbf{P}(u; a, r; z), \quad z \in K(a, r).$$

Ponieważ prawa strona jest funkcją ciągłą zmiennej z , dostajemy ostatecznie $u(z) \leq \mathbf{P}(u; a, r; z)$, $z \in K(a, r)$. $\square$

⁽⁸⁾ Przypomnijmy, że dla lokalnie ograniczonej z góry funkcji $v : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty)$ mamy $v^*(z) = \limsup_{z' \rightarrow z} v(z') = \inf\{\varphi(z) : \varphi \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R}), v \leq \varphi\}$, $z \in \Omega$. Uwaga: na ogół $\sup_{i \in I} u_i$ nie jest funkcją półciągłą z góry.

Obserwacja 4.4.16. Funkcje subharmoniczne $u \in \mathcal{SH}(\Omega)$ takie, że

$$u = \left(\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \ln |f_k| \right)^*$$

gdzie $f_k \in \mathcal{O}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, oraz ciąg $(|f_k|^{1/k})_{k=1}^\infty$ jest lokalnie ograniczony w Ω , nazywamy *funkcjami klasy Hartogsa*.

Twierdzenie* 4.4.17. *Każda funkcja subharmoniczna jest klasy Hartogsa.*

Niech $u : K(a, r) \rightarrow [-\infty, +\infty)$ będzie dowolną funkcją półciągłą z góry. Zdefiniujemy *średnią całkową* funkcji u na kole $K(a, r)$:

$$\mathbf{A}(u; a, r) := \frac{1}{\pi r^2} \int_{K(a, r)} u \, d\mathcal{L}^2.$$

Propozycja 4.4.18 (Twierdzenie o wartości średniej). *Niech $u : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty)$. Wtedy $u \in \mathcal{SH}(\Omega)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ oraz dla dowolnego $a \in D$ istnieje liczba $R(a) \in (0, d_\Omega(a)]$ taka, że*

$$u(a) \leq \mathbf{A}(u; a, r), \quad 0 < r < R(a).$$

Dowód. Jeżeli $u \in \mathcal{SH}(\Omega)$, to na podstawie Propozycji 4.4.3, mamy

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(u; a, r) &= \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r \int_0^{2\pi} u(a + \tau e^{i\theta}) \tau d\theta d\tau = \frac{2}{r^2} \int_0^r \mathbf{J}(u; a, \tau) \tau d\tau \geq \frac{2}{r^2} \int_0^r u(a) \tau d\tau = u(a), \\ &\quad a \in \Omega, \quad 0 < r < d_\Omega(a). \end{aligned}$$

Dowodząc implikacji przeciwnej, sprawdzamy najpierw, że u nie osiąga maksimum (analogicznie jak w dowodzie Lematu 4.4.4), a następnie rozumujemy tak, jak w dowodzie Propozycji 4.4.6. $\square$

Propozycja 4.4.19. *Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem i niech $u \in \mathcal{SH}(D)$, $u \not\equiv -\infty$. Wtedy $u \in L^1(D, \text{loc})$. W szczególności, $\mathcal{L}^2(u^{-1}(-\infty)) = 0$.*

Dowód. Przypuśćmy, że dla pewnego $z_0 \in D$ mamy $\int_U u \, d\mathcal{L}^2 = -\infty$ przy dowolnym otoczeniu U punktu z_0 . Stąd, na podstawie Propozycji 4.4.18, łatwo wnioskujemy, że dla $z \in K(z_0, \frac{1}{2}d_D(z_0))$ mamy

$$u(z) \leq \mathbf{A}(u; z, \frac{1}{2}d_D(z_0)) = -\infty.$$

Niech $D_0 := \{z \in D : u = -\infty \text{ w pewnym otoczeniu punktu } z\}$. Zbiór D_0 jest oczywiście otwarty. Pokazaliśmy już, że jest niepusty. Aby otrzymać sprzeczność, wystarczy zauważyć, że rozumując dokładnie tak, jak wyżej, możemy udowodnić, że D_0 jest domknięty w D . $\square$

Propozycja 4.4.20 (Lemat Hartogsa⁽⁹⁾). *Niech $(u_k)_{k=1}^\infty \subset \mathcal{SH}(\Omega)$ będzie dowolnym lokalnie ograniczonym z góry ciągiem funkcji subharmonicznych. Przypuśćmy, że dla pewnego $m \in \mathbb{R}$ mamy*

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} u_k \leq m.$$

Wtedy dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset \Omega$ i dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje k_0 takie, że

$$\max_K u_k \leq m + \varepsilon, \quad k \geq k_0.$$

Dowód. Wystarczy pokazać, że dla dowolnego $a \in \Omega$ teza propozycji zachodzi dla $K := \overline{K}(a, \delta(a))$ przy dostatecznie małym promieniu $\delta(a) > 0$. Ustalmy a i $0 < R < \frac{1}{2}d_\Omega(a)$. Można założyć, że $u_k \leq 0$ w $\overline{K}(a, 2R)$, $k \geq 1$, oraz że $m < 0$. Na wstępie zauważmy, że na podstawie Lematu Fatou, mamy

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{A}(u_k; a, R) \leq \mathbf{A}(\limsup_{k \rightarrow +\infty} u_k; a, R) \leq m.$$

⁽⁹⁾ Friedrich Hartogs (1874–1943) — matematyk belgijski.

Niech $0 < \delta < R/2$. Korzystając z powyższej nierówności oraz z niedodatniości funkcji u_k na $\overline{K}(a, 2R)$, dostajemy

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \max_{z \in \overline{K}(a, \delta)} u_k(z) \leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} \max_{z \in \overline{K}(a, \delta)} A(u_k; z, R + \delta) \leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{R^2}{(R + \delta)^2} A(u_k; a, R) \leq \frac{R^2}{(R + \delta)^2} m.$$

Wystarczy teraz wziąć $\delta = \delta(a)$ tak małe, by ostatni wyraz był mniejszy od $m + \varepsilon$. $\square$

Propozycja 4.4.21. (a) Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem otwartym i niech $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ będzie dowolną niemalejącą funkcją wypukłą. Wtedy dla dowolnego zbioru otwartego $\Omega \subset \mathbb{C}$ i dla dowolnej funkcji subharmonicznej $u : \Omega \rightarrow I$ mamy $\varphi \circ u \in \mathcal{SH}(\Omega)$.

(b) $e^u \in \mathcal{SH}(\Omega)$ dla dowolnej funkcji $u \in \mathcal{SH}(\Omega)$,

(c) $u^p \in \mathcal{SH}(\Omega)$ dla dowolnej funkcji subharmonicznej $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ i $p \geq 1$.

Dowód. (a) Na wstępie zauważmy, że funkcja φ jest ciągła (ĆWICZENIE). Stąd $\varphi \circ u \in C^1(\Omega)$. Ustalmy $a \in \Omega$ i $0 < r < d_\Omega(a)$. Korzystając z monotoniczności funkcji φ oraz z nierówności Jensena, dostajemy

$$\varphi(u(a)) \leq \varphi(J(u; a, r)) \leq J(\varphi \circ u; a, r).$$

(b) Niech $u_k := \max\{-k, u\} \in \mathcal{SH}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$. Oczywiście $u_k \searrow u$. Na podstawie (a) z $I := \mathbb{R}$ i $\varphi(t) := e^t$, wnioskujemy, że $e^{u_k} \in \mathcal{SH}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$. Teraz, z Propozycji 4.4.10(a) wynika, że $e^u \in \mathcal{SH}(\Omega)$.

(c) Niech $u_k := \max\{1/k, u\} \in \mathcal{SH}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$. Oczywiście $u_k \searrow u$. Na podstawie (a) z $I := (0, +\infty)$ i $\varphi(t) := t^p$, wnioskujemy, że $u_k^p \in \mathcal{SH}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$. Teraz, z Propozycji 4.4.10(a) wynika, że $u^p \in \mathcal{SH}(\Omega)$. $\square$

Propozycja 4.4.22. Niech $u \in \mathcal{SH}(\Omega)$, $a \in \Omega$. Wtedy funkcje

$$(-\infty, \ln d_\Omega(a)) \ni t \mapsto J(u; a, e^t), \quad (-\infty, \ln d_\Omega(a)) \ni t \mapsto A(u; a, e^t)$$

są niemalejące i wypukłe. Ponadto, jeżeli $r \searrow 0$, to

$$J(u; a, r) \searrow u(a), \quad A(u; a, r) \searrow u(a)$$

Dowód. Na wstępie pokażemy, iż wystarczy się ograniczyć wyłącznie do funkcji J . Zauważmy, że jeżeli funkcja $J(u; a, \cdot)$ jest wypukła względem $\ln r$, to jest ciągła, a więc mamy

$$A(u; a, r) = \frac{2}{r^2} \int_0^r J(u; a, \tau) \tau d\tau = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{2}{N^2} \sum_{j=1}^N j J(u; a, \frac{jr}{N}) =: \lim_{N \rightarrow +\infty} \varphi_N(r).$$

Jeżeli funkcja $J(u; a, \cdot)$ jest niemalejąca i wypukła względem $\ln r$, to te same własności ma każda z funkcji φ_N , a zatem również i granica. Ponadto,

$$u(a) \leq A(u; a, r) = \frac{2}{r^2} \int_0^r J(u; a, \tau) \tau d\tau \leq \sup_{0 < \tau < r} J(u; a, \tau) \leq J(u; a, r),$$

a zatem, jeżeli $J(u; a, r) \rightarrow u(a)$, to tę samą własność ma funkcja A . Przechodzimy do dowodu dla funkcji J . Niech $0 < r_1 < r_2 < d_\Omega(a)$, niech $b_k \in \mathcal{C}(C(a, r_2), \mathbb{R})$, $b_k \searrow u$ i niech h_k oznacza rozwiązanie Problemu Dirichleta dla $K(a, r_2)$ z warunkiem brzegowym b_k . Wtedy

$$J(u; a, r_1) \leq J(h_k; a, r_1) = h_k(a) = J(b_k; a, r_2),$$

co przy $k \rightarrow +\infty$ daje monotoniczność funkcji $J(u; a, \cdot)$. Zauważmy, że korzystając z lematu Fatou, mamy

$$u(a) \leq \liminf_{r \rightarrow 0} J(u; a, r) \leq \limsup_{r \rightarrow 0} J(u; a, r) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \limsup_{r \rightarrow 0} u(a + re^{i\theta}) d\theta \leq u(a),$$

co dowodzi, że $J(u; a, r) \searrow u(a)$ przy $r \searrow 0$. Pozostaje sprawdzić wypukłość względem $\ln r$, tzn.

$$J(u; a, r) \leq J(u; a, r_1) + \frac{J(u; a, r_2) - J(u; a, r_1)}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \frac{r}{r_1}, \quad 0 < r_1 < r < r_2 < d_\Omega(a).$$

Ustalmy $0 < r_1 < r_2 < d_\Omega(a)$, niech $b_k \in \mathcal{C}(\partial A(a, r_1, r_2), \mathbb{R})$, $b_k \searrow u$, i niech h_k oznacza rozwiązanie problemu Dirichleta dla pierścienia $A(a, r_1, r_2)$ z warunkiem brzegowym b_k (Twierdzenie 4.2.8). Wtedy, na podstawie Wniosku 4.2.2,

$$J(h_k; a, r) = \alpha_k \ln r + \beta_k, \quad r_1 < r < r_2,$$

dla pewnych $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$. Ostatecznie, dla $r_1 < r < r_2$ dostajemy

$$\begin{aligned} J(u; a, r) &\leq J(h_k; a, r) = J(h_k; a, r_1) + \frac{J(h_k; a, r_2) - J(h_k; a, r_1)}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \frac{r}{r_1} \\ &= J(b_k; a, r_1) + \frac{J(b_k; a, r_2) - J(b_k; a, r_1)}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \frac{r}{r_1}, \end{aligned}$$

co przy $k \rightarrow +\infty$ kończy dowód. $\square$

Wniosek 4.4.23. Niech $u_1, u_2 \in \mathcal{SH}(\Omega)$. Jeżeli $u_1 \leq u_2$ $\mathcal{L}^2$ -prawie wszędzie w Ω , to $u_1 \leq u_2$ w Ω .

Propozycja 4.4.24. Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie otwarty i niech $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{SH}(\Omega)$ będzie lokalnie ograniczony od góry.

- (a) Jeżeli $u := \sup_{k \in \mathbb{N}} u_k$, to zbiór $\{z \in \Omega : u(z) < u^*(z)\}$ jest miary zero.
- (b) Jeżeli $u := \limsup_{k \rightarrow +\infty} u_k$, to zbiór $\{z \in \Omega : u(z) < u^*(z)\}$ jest miary zero.

Dowód. (a) Funkcja u jest oczywiście mierzalna. Wystarczy pokazać, że $A(u; a, r) = A(u^*; a, r)$ dla dowolnych $a \in \Omega$ i $0 < r < d_\Omega(a)$. Ustalmy a i r . Mamy

$$u(z) \leq P(u; a, \tau; z), \quad z \in K(a, \tau), \quad 0 < \tau < r.$$

Stąd

$$u^*(z) \leq P(u; a, \tau; z), \quad z \in \mathbb{P}(a, \tau), \quad 0 < \tau < r.$$

Zauważmy, że

$$P(P(u; a, \tau; \cdot); a, \tau'; z) = P(u; a, \tau; z), \quad z \in K(a, \tau'), \quad 0 < \tau' < \tau < r.$$

Tak więc

$$P(u^*; a, \tau; z) \leq P(u; a, \tau, z), \quad z \in K(a, \tau), \quad 0 < \tau < r.$$

W szczególności, $J(u^*; a, \tau) \leq J(u; a, \tau)$, $0 < \tau < r$. Ostatecznie, $A(u; a, r) = A(u^*; a, r)$.

- (b) Niech $v_k := \sup_{k \geq k} u_k$, $k \in \mathbb{N}$. Wtedy $v_k \searrow u$ oraz

$$\{z \in \Omega : u(z) < u^*(z)\} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \{z \in \Omega : v_k(z) < v_k^*(z)\}$$

i możemy zastosować (a). $\square$

Definicja 4.4.25. Powiemy, że zbiór $M \subset \mathbb{C}$ jest *polarny*, jeżeli dla dowolnego punktu $a \in M$ istnieje spójne otoczenie otwarte U_a oraz funkcja $v_a \in \mathcal{SH}(U_a)$, $v_a \not\equiv -\infty$, takie, że $M \cap U_a \subset v_a^{-1}(-\infty)$.

Każdy zbiór polarny jest miary zero (na podstawie Propozycji 4.4.19).

Propozycja 4.4.26 (Twierdzenie o osobliwościach usuwalnych dla funkcji subharmonicznych). Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem i niech $M \subset D$ będzie relatywnie domkniętym podzbiorem polarnym w D . Niech dalej $u \in \mathcal{SH}(D \setminus M)$ będzie dowolną funkcją lokalnie ograniczoną z góry na D ⁽¹⁰⁾. Zdefiniujemy

$$\tilde{u}(z) := \limsup_{D \setminus M \ni z' \rightarrow z} u(z'), \quad z \in D. \quad (11)$$

Wtedy $\tilde{u} \in \mathcal{SH}(D)$. Ponadto, zbiór $D \setminus M$ jest obszarem.

⁽¹⁰⁾ Tzn. dowolny punkt $a \in D$ posiada otoczenie otwarte $U_a \subset D$ takie, że funkcja u jest ograniczona z góry na zbiorze $U_a \cap (D \setminus M)$.

⁽¹¹⁾ Ponieważ zbiór M jest nigdziegęsty, więc funkcja $\tilde{u}$ jest poprawnie określona dla dowolnego $z \in D$. Lokalna ograniczoność funkcji u na D gwarantuje, że $\tilde{u} < +\infty$. Zauważmy, że $\tilde{u} = (u_1)^*$, gdzie $u_1 := u$ na $D \setminus M$ i $u_1 := -\infty$ na M . W szczególności, $\tilde{u} \in \mathcal{C}^\uparrow(D)$. Oczywiście $\tilde{u} = u$ na $D \setminus M$.

Dowód. Wynik ma charakter lokalny. Możemy więc założyć, że $u \leq 0$ in $D \setminus M$ oraz $M \subset v^{-1}(-\infty)$, gdzie $v \in \mathcal{SH}(D)$, $v \leq 0$, $v \not\equiv -\infty$. Niech

$$u_k := \begin{cases} u + (1/k)v & \text{on } D \setminus M \\ -\infty & \text{on } M \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Wtedy $u_k \in \mathcal{SH}(D)$, $k \in \mathbb{N}$ (ĆWICZENIE). Niech $u_0 = \sup_{k \in \mathbb{N}} u_k$. Zauważmy, że $u_0 = u$ na $D \setminus P$ oraz $u_0 = -\infty$ na P , gdzie $P := v^{-1}(-\infty) \supset M$ (P jest polarny). Na podstawie Propozycji 4.4.11, $(u_0)^* \in \mathcal{SH}(D)$. Na podstawie Propozycji 4.4.24(a), zbiór $A := \{z \in D : u_0(z) < (u_0)^*(z)\}$ jest miary zero. Stąd $(u_0)^* = u_0 = u$ on $D \setminus (P \cup A)$, a więc, na podstawie Propozycji 4.4.23, $(u_0)^* = u$ na $D \setminus M$.

Pozostaje pokazać, że $(u_0)^* = \tilde{u}$. Oczywiście, $(u_0)^* = u = \tilde{u}$ na $D \setminus M$. Ustalmy $a \in M$. Wtedy

$$\begin{aligned} \tilde{u}(a) &= \limsup_{D \setminus M \ni z \rightarrow a} u(z) = \limsup_{D \setminus M \ni z \rightarrow a} (u_0)^*(z) \leq \limsup_{z \rightarrow a} (u_0)^*(z) = (u_0)^*(a) \\ &= \limsup_{z \rightarrow a} u_0(z) \leq \limsup_{D \setminus P \ni z \rightarrow a} u_0(z) = \limsup_{D \setminus P \ni z \rightarrow a} u(z) \leq \limsup_{D \setminus M \ni z \rightarrow a} u(z) = \tilde{u}(a). \end{aligned}$$

Aby uzyskać ostatnią część tezy, przypuśćmy, że $D \setminus M = U_1 \cup U_2$, gdzie U_1, U_2 są rozłącznymi, niepustymi zbiorami otwartymi. Wtedy funkcja $u(z) := j$ dla $z \in U_j$ musiałaby się przedłużać do funkcji subharmonicznej na D , co jest oczywiście niemożliwe. $\square$

Wniosek 4.4.27. Niech D i M będą takie, jak w Propozycji 4.4.26.

- (a) Wtedy dla dowolnej funkcji $u \in \mathcal{SH}(D)$ mamy $u(z) := \limsup_{D \setminus M \ni z' \rightarrow z} u(z')$, $z \in D$.
- (b) Niech $u \in \mathcal{H}(D \setminus M)$ będzie lokalnie ograniczona w D . Wtedy u rozszerza się harmonicznie na D .
- (c) Niech $f \in \mathcal{O}(D \setminus M)$ będzie lokalnie ograniczona w D . Wtedy f rozszerza się holomorficznie na D .

Dowód. (a) wynika natychmiast z Propozycji 4.4.26.

(b) Ponieważ $u \in \mathcal{SH}(\Omega \setminus M)$ i u jest lokalnie ograniczona, Propozycja 4.4.26 daje rozszerzenie $\tilde{u}_+ \in \mathcal{SH}(D)$. Powtarzamy to samo dla funkcji $-u$ i dostajemy rozszerzenie $\tilde{u}_- \in \mathcal{SH}(\Omega)$. Mamy $\tilde{u}_+ + \tilde{u}_- \in \mathcal{SH}(D)$ oraz $\tilde{u}_+ + \tilde{u}_- = u + (-u) = 0$ on $D \setminus M$. Stąd, wobec Propozycji 4.4.23, $\tilde{u}_+ + \tilde{u}_- \equiv 0$, co implikuje, że u rozszerza się do funkcji $\tilde{u} \in \mathcal{C}(D)$ takiej, że $\tilde{u}(z) = P(\tilde{u}; a, r; z)$, $z \in K(a, r)$, $a \in M$, $0 < r < d_D(a)$ (Propozycja 4.4.13), skąd natychmiast wynika, że $\tilde{u}$ jest harmoniczna.

(c) wynika z (b) — ĆWICZENIE. $\square$

Twierdzenie* 4.4.28 (Por. Propozycja 4.4.24). Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie otwarty i niech $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{SH}(\Omega)$ będzie lokalnie ograniczony od góry.

- (a) Jeżeli $u := \sup_{k \in \mathbb{N}} u_k$, to zbiór $\{z \in \Omega : u(z) < u^*(z)\}$ jest polarny.
- (b) Jeżeli $u := \limsup_{k \rightarrow +\infty} u_k$, to zbiór $\{z \in \Omega : u(z) < u^*(z)\}$ jest polarny.

Ustalmy funkcję $\Psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{R}_+)$ taką, że $\text{supp } \Psi = \overline{\mathbb{D}}$, $\Psi(z) = \Psi(|z|)$, $z \in \mathbb{C}$, oraz $\int \Psi d\mathcal{L}^2 = 1$. Niech

$$\Psi_\varepsilon(z) := \frac{1}{\varepsilon^2} \Psi\left(\frac{z}{\varepsilon}\right), \quad z \in \mathbb{C}, \quad \varepsilon > 0.$$

Dla dowolnej funkcji $u \in L^1(\Omega, \text{loc})$, niech

$$u_\varepsilon(z) := \int_\Omega u(w) \Psi_\varepsilon(z - w) d\mathcal{L}^2(w) = \int_{\mathbb{D}} u(z + \varepsilon w) \Psi(w) d\mathcal{L}^2(w), \quad z \in \Omega_\varepsilon := \{z \in \Omega : d_\Omega(z) > \varepsilon\}.$$

Propozycja 4.4.29 (Regularizacja funkcji subharmonicznych). Dla funkcji $u \in \mathcal{SH}(\Omega) \cap L^1(\Omega, \text{loc})$ mamy $u_\varepsilon \in \mathcal{SH}(\Omega_\varepsilon) \cap \mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$ oraz $u_\varepsilon \searrow u$ punktowo na Ω , gdy $\varepsilon \searrow 0$.

Dowód. Jest oczywiste, że $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Dla $a \in \Omega_\varepsilon$ i $0 < r < d_{\Omega_\varepsilon}(a)$ mamy

$$\begin{aligned} J(u_\varepsilon; a, r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{D}} u(a + re^{i\theta} + \varepsilon w) \Psi(w) d\mathcal{L}^2(w) d\theta = \int_{\mathbb{D}} J(u; a + \varepsilon w, r) \Psi(w) d\mathcal{L}^2(w) \\ &\geq \int_{\mathbb{D}} u(a + \varepsilon w) \Psi(w) d\mathcal{L}^2(w) = u_\varepsilon(a), \end{aligned}$$

co dowodzi, że $u_\varepsilon \in \mathcal{SH}(\Omega_\varepsilon)$. Zauważmy, że

$$u_\varepsilon(a) = \int_{\mathbb{D}} u(a + \varepsilon w) \Psi(w) d\mathcal{L}^2(w) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} u(a + \varepsilon \tau e^{i\theta}) \Psi(\tau) \tau d\theta d\tau = 2\pi \int_0^1 \mathbf{J}(u; a, \varepsilon \tau) \Psi(\tau) \tau d\tau,$$

skąd, na podstawie Propozycji 4.4.22 oraz twierdzenia o monotonicznym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki, wnioskujemy, że $u_\varepsilon(a) \searrow u(a)$ gdy $\varepsilon \searrow 0$, przy dowolnym $a \in \Omega$. $\square$

Obserwacja 4.4.30. Z dowodu Propozycji 4.4.29 wynika, że dla dowolnej funkcji $\Psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{R}_+)$ takiej, że $\text{supp } \Psi = \overline{\mathbb{D}}$ ⁽¹²⁾ oraz dla dowolnej funkcji $u \in \mathcal{SH}(\Omega)$ funkcje

$$u_\varepsilon(z) := \int_{\mathbb{D}} u(z + \varepsilon w) \Psi(w) d\mathcal{L}^2(w), \quad z \in \Omega_\varepsilon, \varepsilon > 0,$$

są subharmoniczne ⁽¹³⁾.

Propozycja 4.4.31. Niech $u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$. Wtedy $u \in \mathcal{SH}(\Omega) \iff \Delta u \geq 0$ w Ω .

Dowód. ($\Leftarrow$): Na wstępie załóżmy, że $\Delta u > 0$ w Ω . Niech $D \subset\subset \Omega$, $h \in \mathcal{C}(\overline{D}) \cap \mathcal{H}(D)$, $u \leq h$ na ∂D . Niech $v := u - h$ i niech $z_0 \in \overline{D}$ będzie taki, że $v(z_0) = \max_{\overline{D}} v$. Przypuśćmy, że $v(z_0) > 0$ (w szczególności, $z_0 \in D$). Wtedy oczywiście $(\Delta u)(z_0) \leq 0$, co daje sprzeczność. W przypadku ogólnym wystarczy rozważyć ciąg $v_\varepsilon(z) := u(z) + \varepsilon|z|^2$, $z \in \Omega$, $\varepsilon > 0$, i zauważyć, że $\Delta v_\varepsilon = \Delta u + 4\varepsilon > 0$ oraz $v_\varepsilon \searrow u$.

($\Rightarrow$): Gdyby $\Delta u < 0$ na pewnym obszarze $D \subset \Omega$, to z poprzedniej części dowodu wynikałoby, że $-u \in \mathcal{SH}(D)$. Stąd $u \in \mathcal{H}(D)$; sprzeczność. $\square$

Propozycja 4.4.32. Jeżeli $u \in \mathcal{SH}(\Omega) \cap L^1(\Omega, \text{loc})$, to $\Delta u \geq 0$ na Ω w sensie dystrybucyjnym, tzn.

$$\int_{\Omega} u \Delta \varphi d\mathcal{L}^2 \geq 0, \quad \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}_+).$$

Odwrotnie, jeżeli $u \in L^1(\Omega, \text{loc})$ jest funkcją taką, że $\Delta u \geq 0$ na Ω w sensie dystrybucyjnym, to istnieje funkcja $v \in \mathcal{SH}(\Omega)$ taka, że $u = v$ $\mathcal{L}^2$ -prawie wszędzie w Ω ⁽¹⁴⁾.

Dowód. Na wstępie zauważmy, że dla funkcji $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$: $\Delta u \geq 0$ na Ω w sensie dystrybucyjnym wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta u \geq 0$ na Ω w zwykłym sensie (ĆWICZENIE).

($\Rightarrow$): Niech u_ε oznacza regularyzację funkcji u (tak, jak w Propozycji 4.4.29). Oczywiście $\Delta u_\varepsilon \geq 0$ na Ω_ε w sensie dystrybucyjnym, czyli:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon \Delta \varphi d\mathcal{L}^2 \geq 0, \quad \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_\varepsilon, \mathbb{R}_+).$$

Ponieważ $u_\varepsilon \searrow u$ (Propozycja 4.4.29), zatem

$$\int_{\Omega} u \Delta \varphi d\mathcal{L}^2 \geq 0, \quad \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}_+).$$

($\Leftarrow$): Na podstawie twierdzenia o różniczkowaniu pod znakiem całki mamy

$$\Delta u_\varepsilon(z) = \int_{\Omega} u(w) \Delta(\Psi_\varepsilon(\cdot - w))(z) d\mathcal{L}^2(w) \geq 0.$$

⁽¹²⁾ Nie zakładamy, że $\Psi(z) = \Psi(|z|)$ oraz $\int \Psi d\mathcal{L}^2 = 1$.

⁽¹³⁾ Uwaga: Nic nie mówimy o monotoniczności i zbieżności.

⁽¹⁴⁾ Mówiąc obrazowo: nie ma funkcji „udających” funkcje subharmoniczne.

Oznacza to, że $u_\varepsilon \in \mathcal{SH}(\Omega_\varepsilon)$. Obecnie pokażemy, że ciąg u_ε maleje, gdy $\varepsilon \searrow 0$. Niech $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$. Korzystając z Propozycji 4.4.29 dla $z \in \Omega_{\varepsilon_2}$, mamy

$$\begin{aligned} u_{\varepsilon_2}(z) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (u_{\varepsilon_2})_\varepsilon(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{D}} \left(\int_{\mathbb{D}} u(z + \varepsilon w + \varepsilon_2 \xi) \Psi(\xi) d\mathcal{L}^2(\xi) \right) \Psi(w) d\mathcal{L}^2(w) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{D}} \left(\int_{\mathbb{D}} u(z + \varepsilon w + \varepsilon_2 \xi) \Psi(w) d\mathcal{L}^2(w) \right) \Psi(\xi) d\mathcal{L}^2(\xi) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (u_\varepsilon)_{\varepsilon_2}(z) \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (u_\varepsilon)_{\varepsilon_1}(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (u_{\varepsilon_1})_\varepsilon(z) = u_{\varepsilon_1}(z). \end{aligned}$$

Niech $v := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon$. Oczywiście $v \in \mathcal{SH}(\Omega)$. Z drugiej strony, jak wiadomo, $u_\varepsilon \rightarrow u$ $\mathcal{L}^2$ -prawie wszędzie w Ω , a zatem $u = v$ $\mathcal{L}^2$ -prawie wszędzie w Ω . $\square$

Propozycja 4.4.33. *Przypuśćmy, że funkcja $u \in L^1(\Omega, \text{loc})$ jest taka, że $\Delta u = 0$ w sensie dystrybucyjnym, tzn.*

$$\int_{\Omega} u \Delta \varphi d\mathcal{L}^2 = 0, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Wtedy istnieje funkcja $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ taka, że $u = h$ $\mathcal{L}^2$ -prawie wszędzie w Ω ⁽¹⁵⁾.

Dowód. Na podstawie Propozycji 4.4.32 wnioskujemy, że istnieje funkcja $u_+ \in \mathcal{SH}(\Omega)$ taka, że $u = u_+$ $\mathcal{L}^2$ -prawie wszędzie w Ω . Możemy więc założyć, że $u = u_+ \in \mathcal{SH}(\Omega)$. Korzystając ponownie z Propozycji 4.4.32, wnioskujemy, że istnieje funkcja $u_- \in \mathcal{SH}(\Omega)$ taka, że $-u = u_-$ $\mathcal{L}^2$ -prawie wszędzie w Ω . Stąd, na podstawie Wniosku 4.4.23, $h + u_- \equiv 0$. Teraz wystarczy już tylko skorzystać z Wniosku 4.4.14, z którego wynika, że $h \in \mathcal{H}(\Omega)$. $\square$

Propozycja 4.4.34. *Przypuśćmy, że funkcja $f \in L^1(\Omega, \text{loc})$ jest taka, że $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ w sensie dystrybucyjnym, tzn.*

$$\int_{\Omega} f \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} d\mathcal{L}^2 = 0, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{C}).$$

Wtedy istnieje funkcja $f_0 \in \mathcal{O}(\Omega)$ taka, że $f_0 = f$ $\mathcal{L}^2$ -prawie wszędzie w Ω ⁽¹⁶⁾.

Dowód. Wynik jest elementarny dla $f \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$. Niech $f = u + iv$. Wystarczy pokazać, że funkcje u i v są harmoniczne w sensie dystrybucyjnym. Niech $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Wtedy

$$\int_{\Omega} f \Delta \varphi d\mathcal{L}^2 = 4 \int_{\Omega} f \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) d\mathcal{L}^2 = 0. \quad \square$$

Propozycja 4.4.35. *Dla dowolnych zbiorów otwartych $\Omega, G \subset \mathbb{C}$ oraz dla dowolnych funkcji $f \in \mathcal{O}(\Omega, G)$, $u \in \mathcal{SH}(G)$ mamy $u \circ f \in \mathcal{SH}(\Omega)$.*

Dowód. W przypadku gdy $u \in \mathcal{C}^2(G)$, wystarczy zauważyć, że

$$\Delta(u \circ f) = ((\Delta u) \circ f) \cdot |f'|^2,$$

i skorzystać z Propozycji 4.4.31. W przypadku ogólnym skorzystamy z regularyzacji $(u_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ – por. Propozycja 4.4.29. Niech $v_\varepsilon := u_\varepsilon \circ f$. Wtedy $v_\varepsilon \in \mathcal{SH}(f^{-1}(G_\varepsilon))$ i $v_\varepsilon \searrow u \circ f$. $\square$

Propozycja 4.4.36 (Twierdzenie Liouville’a). *Jeżeli $u \in \mathcal{SH}(\mathbb{C})$ i u jest ograniczona z góry, to $u \equiv \text{const}$.*

Dowód. Niech $v(z) := u(\frac{1}{z})$, $z \in \mathbb{C}_*$. Wtedy $v \in \mathcal{SH}(\mathbb{C}_*)$ oraz v jest ograniczona z góry. W takim razie, na podstawie Propozycji 4.4.26, v rozszerza się do funkcji $\tilde{v} \in \mathcal{SH}(\mathbb{C})$. Stąd, na podstawie zasady maksimum, dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$, mamy

$$u(z) \leq \max_{\mathbb{T}} \{ \max_{\mathbb{T}} u, \max_{\mathbb{T}} v \} = u(z_0)$$

dla pewnego $z_0 \in \mathbb{T}$. Ostatecznie, korzystając ponownie z zasady maksimum, wnioskujemy, że $u \equiv \text{const}$. $\square$

⁽¹⁵⁾ Mówiąc obrazowo: nie ma funkcji „udających” funkcje harmoniczne.

⁽¹⁶⁾ Mówiąc obrazowo: nie ma funkcji „udających” funkcje holomorfczne.

Propozycja 4.4.37 (Twierdzenie Oki ⁽¹⁷⁾). Dla dowolnego łuku Jordana $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ mamy

$$u(\gamma(0)) = \limsup_{t \rightarrow 0+} u(\gamma(t)), \quad u \in \mathcal{SH}(\Omega).$$

Dowód. Oczywiście możemy założyć, że $\gamma(0) = 0 \in \Omega$. Przypuśćmy, że

$$u(0) > A := \limsup_{t \rightarrow 0+} u(\gamma(t)).$$

Ustalmy $r > 0$ i $0 < t_0 \leq 1$ takie, że:

- $K(r) \subset \subset \Omega$,
- $|\gamma(t)| < r$ dla $0 \leq t < t_0$,
- $|\gamma(t_0)| = r$,
- $u(\gamma(t)) \leq \frac{1}{2}(u(0) + A)$ dla $0 < t \leq t_0$.

Możemy założyć, że $t_0 = 1$. Dla $0 < \rho < r$ niech $0 < t_\rho < 1$ będzie takie, że:

- $|\gamma(t_\rho)| = \rho$,
- $|\gamma(t)| > \rho$ dla $t_\rho < t \leq 1$.

Niech $L_\rho := \gamma([t_\rho, 1])$, $D_\rho := K(r) \setminus L_\rho$. Zauważmy, że D_ρ jest obszarem jednospójnym. Niech $\varphi_\rho : \mathbb{D} \rightarrow D_\rho$ będzie odwzorowaniem konforemnym (z twierdzenia Riemanna) takim, że $\varphi_\rho(0) = 0$ i $\varphi'_\rho(0) \in \mathbb{R}_{>0}$. Na mocy twierdzenia Carathéodory'ego, odwzorowanie φ_ρ przedłuża się w sposób ciągły na $\mathbb{T}$ (przedłużenie to oznaczymy również przez φ_ρ) tak, że $\varphi_\rho(\mathbb{T}) \subset \partial D_\rho$. Niech $T_\rho := \{\theta \in [0, 2\pi) : \varphi_\rho(e^{i\theta}) \in L_\rho\}$ (zauważmy, że T_ρ jest podzbiorem domkniętym w $[0, 2\pi)$) i niech $m_\rho := \frac{1}{2\pi} \mathcal{L}^1(T_\rho)$. Odnótujmy, że $|\varphi_\rho(e^{i\theta})| = r$ dla $\theta \in T'_\rho := [0, 2\pi) \setminus T_\rho$. Funkcja

$$\psi_\rho(z) := \begin{cases} \varphi_\rho(z)/z, & z \neq 0 \\ \varphi'_\rho(0), & z = 0 \end{cases}$$

jest holomorficzną w $\mathbb{D}$ i ciągłą w $\overline{\mathbb{D}}$; ponadto nigdzie się nie zeruje. W szczególności, $\ln |\psi_\rho| \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$, a stąd

$$\begin{aligned} \ln \varphi'_\rho(0) &= \ln |\psi_\rho(0)| = \mathbf{J}(\ln |\psi_\rho|; 0, 1) = \mathbf{J}(\ln |\varphi_\rho|; 0, 1) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{T_\rho} \ln |\varphi_\rho(e^{i\theta})| d\theta + \int_{T'_\rho} \ln |\varphi_\rho(e^{i\theta})| d\theta \right) \\ &\geq m_\rho \ln \rho + (1 - m_\rho) \ln r. \end{aligned}$$

Z drugiej strony, na mocy twierdzenia Koebe'go ⁽¹⁸⁾ ⁽¹⁹⁾, dostajemy $\varphi'_\rho(0) \leq 4\rho$ (ponieważ $\gamma(t_\rho) \notin D_\rho$). Łącząc te fakty, dostajemy

$$4\rho^{1-m_\rho} \geq r^{1-m_\rho},$$

a zatem $\lim_{\rho \rightarrow 0} m_\rho = 1$. Ostatecznie:

$$u(0) \leq \mathbf{J}(u \circ \varphi_\rho; 0, 1) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{T_\rho} u(\varphi_\rho(e^{i\theta})) d\theta + \int_{T'_\rho} u(\varphi_\rho(e^{i\theta})) d\theta \right) \leq m_\rho \frac{1}{2}(u(0) + A) + (1 - m_\rho)c,$$

gdzie $c := \sup_{\overline{K(r)}} u$, co przy $\rho \rightarrow 0$ prowadzi do nierówności $u(0) \leq \frac{1}{2}(u(0) + A)$ – sprzeczność. $\square$

Propozycja 4.4.38. Niech $u \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}_+)$. Wtedy $\ln u \in \mathcal{SH}(\Omega)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego wielomianu $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ funkcja $|e^p|u(z)$ jest subharmoniczna. W szczególności, jeżeli $\ln u_1, \ln u_2 \in \mathcal{SH}(\Omega)$, to $\ln(u_1 + u_2) \in \mathcal{SH}(\Omega)$.

Dowód. ($\Rightarrow$): Niech $v(z) := |e^{p(z)}|u(z)$, $z \in \Omega$. Wtedy $\ln v = \operatorname{Re} p + \ln u$, stąd $\ln v \in \mathcal{SH}(\Omega)$, a więc tym bardziej $v \in \mathcal{SH}(\Omega)$.

($\Leftarrow$): Skorzystamy z Propozycji 4.4.8. Ustalmy $a \in \Omega$ oraz $0 < r < d_\Omega(a)$ i niech $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ będzie taki, że $\ln u \leq \operatorname{Re} p$ na $C(a, r)$. Wtedy $v := |e^{-p}|u \leq 1$ na $C(a, r)$, a ponieważ funkcja v jest subharmoniczna, więc z zasady maksimum dostajemy $v \leq 1$ w $K(a, r)$, czyli $\ln u \leq \operatorname{Re} p$ w $K(a, r)$. $\square$

⁽¹⁷⁾ Kiyoshi Oka (1901–1978) — matematyk japoński.

⁽¹⁸⁾ Paul Koebe (1882–1945) — matematyk niemiecki.

⁽¹⁹⁾ Jeżeli $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ jest funkcją injektywną taką, że $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$, to $K(1/4) \subset \varphi(\mathbb{D})$ — zob. [Lej 1957], § XIII.7.

Propozycję 4.4.38 można uogólnić w następujący sposób.

Propozycja 4.4.39. *Niech $u \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}_+)$. Wtedy $\ln u \in \mathcal{SH}(\Omega)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $a \in \mathbb{C}$ funkcja $|e^{az}|u(z)$ jest subharmoniczna.*

Dowód. Oczywiście jedyny problem to implikacja ($\Leftarrow$). Załóżmy najpierw, że $u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}_+)$. Wystarczy sprawdzić, że $\Delta(\ln u) \geq 0$ w $\Omega \setminus u^{-1}(0)$. Zauważmy, że

$$\Delta(\ln u) = \frac{1}{u} \left(\Delta u - \frac{(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2}{u} \right).$$

Niech $a = \alpha + i\beta$ i niech $v := |e^{az}|u$. Wtedy

$$0 \leq \Delta v = |e^{az}| \left(\Delta u + |a|^2 u + 2(\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y}) \right).$$

Jeżeli teraz ustalimy $z_0 \in \Omega \setminus u^{-1}(0)$ i przyjmiemy

$$\alpha := -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(z_0)}{u(z_0)}, \quad \beta := -\frac{\frac{\partial u}{\partial y}(z_0)}{u(z_0)},$$

to dostaniemy $(\Delta(\ln u))(z_0) \geq 0$.

W przypadku ogólnym zauważmy najpierw, że funkcja u musi być subharmoniczna ($u = |e^{0z}|u$). Niech $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ oznaczają regularyzacje funkcji u . Oczywiście $u_\varepsilon + \varepsilon \searrow u$. Wystarczy więc pokazać, że $\ln(u_\varepsilon + \varepsilon) \in \mathcal{SH}(\Omega_\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Ponieważ $u_\varepsilon + \varepsilon$ jest klasy $\mathcal{C}^\infty$, więc na podstawie pierwszej części dowodu wystarczy pokazać, że $|e^{az}|u_\varepsilon \in \mathcal{SH}(\Omega_\varepsilon)$ dla dowolnego $a \in \mathbb{C}$. Ustalmy $a \in \mathbb{C}$. Wtedy

$$|e^{az}|u_\varepsilon(z) = \int_{\mathbb{D}} |e^{a(z+\varepsilon w)}|u(z+\varepsilon w)\Psi(w)|e^{-a\varepsilon w}|d\mathcal{L}^2(w), \quad z \in \Omega_\varepsilon,$$

i teraz wystarczy już tylko zastosować Obserwację 4.4.30. □

Propozycja 4.4.40 (Lemat Schwarza). *Niech $u : \mathbb{D} \rightarrow [0, 1]$ będzie funkcją taką, że $\ln u \in \mathcal{SH}(\mathbb{D})$ oraz $u(0) = 0$. Jeżeli*

$$\limsup_{\mathbb{D}_* \ni z \rightarrow 0} \frac{u(z)}{|z|} < +\infty,$$

to

$$u(z) \leq |z|, \quad z \in \mathbb{D}, \quad \text{oraz} \quad \limsup_{\mathbb{D}_* \ni z \rightarrow 0} \frac{u(z)}{|z|} \leq 1.$$

Ponadto, jeżeli

$$\exists z_0 \in \mathbb{D}_* : u(z_0) = |z_0| \quad \text{lub} \quad \limsup_{\mathbb{D}_* \ni z \rightarrow 0} \frac{u(z)}{|z|} = 1,$$

to $u(z) = |z|$, $z \in \mathbb{D}$.

Dowód. Niech $v(z) := \frac{u(z)}{|z|}$, $z \in \mathbb{D}_*$. Ponieważ $\ln v = \ln u - \ln |z|$, zatem $v \in \mathcal{SH}(\mathbb{D}_*)$. Z założeń wynika, że funkcja v jest lokalnie ograniczona w $\mathbb{D}$, zatem kładąc $v(0) := \limsup_{\mathbb{D}_* \ni z \rightarrow 0} v(z)$, dostajemy funkcję subharmoniczną na $\mathbb{D}$. Stosując do funkcji v zasadę maksimum, otrzymujemy tezę. □

Propozycja 4.4.41. *Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem wypukłym i niech $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją wypukłą. Wtedy $u \in \mathcal{SH}(D)$.*

Dowód. Oczywiście funkcja u jako wypukła jest ciągła. Ustalmy $a \in D$ i $0 < r < d_D(a)$. Mamy

$$\mathbf{J}(u; a, r) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^N \frac{1}{N} u(a + re^{i\frac{2\pi j}{N}}) \geq \limsup_{N \rightarrow +\infty} u\left(\sum_{j=1}^N \frac{1}{N} (a + re^{i\frac{2\pi j}{N}})\right) = u(a). \quad \square$$

4.4. Funkcje subharmoniczne

Propozycja 4.4.42 (Twierdzenie Hadamarda o trzech okręgach). *Niech $A := \mathbb{A}(r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < +\infty$ i niech funkcja u będzie taka, że $\ln u \in \mathcal{SH}(A)$. Przypuśćmy, że $\limsup_{|z| \rightarrow r_j} u(z) \leq M_j$, $j = 1, 2$. Wtedy*

$$u(z) \leq M_1^{\frac{\ln \frac{|z|}{r_2}}{\ln \frac{r_2}{r_1}}} M_2^{\frac{\ln \frac{|z|}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}}}, \quad z \in A.$$

Dowód. Wystarczy zastosować zasadę maksimum (Wniosek 4.4.5) do funkcji $A \ni z \rightarrow |z|^\alpha u(z)$, gdzie $\alpha > 0$ jest takie, że $r_1^\alpha M_1 = r_2^\alpha M_2$. $\square$

Część III

Uzupełnienia (poza zasadniczym wykładem)

Obszary Riemanna i przedłużanie funkcji holomorficznych

5.1. Regiony Riemanna nad $\mathbb{C}$

Regiony Riemanna stanowią z jednej strony naturalne uogólnienie zbiorów otwartych w $\mathbb{C}$. Z pewnego punktu widzenia (Twierdzenie Thullena 5.4.6) są one może nawet bardziej właściwym polem do uprawiania teorii funkcji holomorficznych niż zbiory otwarte w $\mathbb{C}$. Z drugiej strony, każda niezwarła jednowymiarowa rozmaitość zespolona (por. Definicja 2.7.1) jest regionem Riemanna (Twierdzenie 5.5.8), co oznacza, że teoria regionów Riemanna obejmuje wszystkie niezwarłe jednowymiarowe rozmaitości zespolone.

Definicja 5.1.1. Parę (X, p) nazywamy *regionem Riemanna* nad $\mathbb{C}$ $((X, p) \in \mathfrak{R})$, jeżeli:

- X jest przestrzenią topologiczną Hausdorffa,
 - $p : X \rightarrow \mathbb{C}^n$ jest lokalnym homeomorfizmem, tzn. dowolny punkt $a \in X$ posiada otoczenie otwarte U takie, że zbiór $p(U) \subset \mathbb{C}^n$ jest otwarty oraz odwzorowanie $p|_U : U \rightarrow p(U)$ jest homeomorfizmem.
- Jeżeli przestrzeń X jest spójna, to mówimy, że (X, p) jest *obszarem Riemanna* $((X, p) \in \mathfrak{R}_c)$.
 Jeżeli przestrzeń X jest σ -zwarta, to mówimy, że region (X, p) jest *przeliczalny w nieskończoności* $((X, p) \in \mathfrak{R}_\infty)$.

Odwzorowanie p nazywamy *projekcją*. Zbiór $p^{-1}(a)$ nazywamy *włóknem* na punktem $a \in p(X)$. Zauważmy, że każde włókno jest zbiorem dyskretnym.

Każdy zbiór $A \subset X$ taki, że $p|_A : A \rightarrow p(A)$ jest homeomorfizmem, nazywamy zbiorem *jednolistnym*.

Obserwacja 5.1.2 (ĆWICZENIE). (a) $(X, p) \in \mathfrak{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(C, p|_C) \in \mathfrak{R}_c$ dla dowolnej składowej spójnej C przestrzeni X .

(b) Jeżeli Ω jest zbiorem otwartym w $\mathbb{C}$, to $(\Omega, \text{id}) \in \mathfrak{R}_\infty$. Będzie to kanoniczny sposób traktowania zbiorów otwartych jako regionów Riemanna.

Oczywiście, każde lokalnie homeomorficzne odwzorowanie $p : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ pozwala traktować (Ω, p) jako region Riemanna, np. $(\mathbb{C}, \exp)$.

(c) Jeżeli $(X, p) \in \mathfrak{R}$ i $Y \subset X$ jest zbiorem otwartym, to $(Y, p|_Y) \in \mathfrak{R}$.

(d) Jeżeli $(X, p) \in \mathfrak{R}$, to odwzorowanie p jest otwarte. W szczególności:

- $p(X)$ jest zbiorem otwartym,
- zbiór otwarty $U \subset X$ jest jednolistny wtedy i tylko wtedy, gdy odwzorowanie $p|_U$ jest iniektywne.

(e) Rodzina $(U, p|_U)$, gdzie U przebiega wszystkie otwarte zbiory jednolistne, zadaje na X atlas jednowymiarowej (niezwartej) rozmaitości zespolonej.

(f) Niech $(X, p) \in \mathfrak{R}_c$ i niech Y będzie otwartym jednolistnym podzbiorem X takim, że $p(Y) = p(X)$. Wtedy $Y = X$.

Definicja 5.1.3. Niech $(X, p) \in \mathfrak{R}$ i niech T będzie dowolną przestrzenią topologiczną. Powiemy, że odwzorowanie ciągle $\hat{\gamma} : T \rightarrow X$ jest *podniesieniem* odwzorowania ciągłego $\gamma : T \rightarrow p(X)$, jeżeli $p \circ \hat{\gamma} \equiv \gamma$.

Jeżeli $T \subset p(X)$, to każde podniesienie $\hat{\gamma}$ odwzorowania id_T nazywamy *sekcją* nad T ($\hat{\gamma} \in \Gamma(T, (X, p))$).

Obserwacja 5.1.4 (ĆWICZENIE). (a) Jeżeli $\hat{\gamma} \in \Gamma(T, (X, p))$, to zbiór $\hat{\gamma}(T)$ jest jednolistny.

(b) Wobec Obserwacji 5.1.2(f), jeżeli $(X, p) \in \mathfrak{R}_c$ i $\Gamma(p(X), (X, p)) \neq \emptyset$, to X jest jednolistny.

Propozycja 5.1.5 (Zasada identyczności dla podniesień). Jeżeli przestrzeń T jest spójna, $t_0 \in T$ oraz $\hat{\gamma}_j : T \rightarrow X$, $j = 1, 2$, są dwoma podniesieniami odwzorowania $\gamma : T \rightarrow p(X)$ takimi, że $\hat{\gamma}_1(t_0) = \hat{\gamma}_2(t_0)$, to $\hat{\gamma}_1 \equiv \hat{\gamma}_2$.

Dowód. Niech $T_0 := \{t \in T : \hat{\gamma}_1(t) = \hat{\gamma}_2(t)\}$; T_0 jest domknięty i niepusty. Pozostaje pokazać, że T_0 jest otwarty. Niech $u \in T_0$, $a := \hat{\gamma}_1(u) = \hat{\gamma}_2(u)$ i niech U będzie otwartym jednolistnym otoczeniem a . Wobec ciągłości $\hat{\gamma}_j$ istnieje otwarte otoczenie V punktu u takie, że $\hat{\gamma}_j(V) \subset U$, $j = 1, 2$. Wtedy $\hat{\gamma}_j|_V = (p|_U)^{-1} \circ \gamma|_V$, $j = 1, 2$, a stąd $V \subset T_0$. $\square$

Wniosek 5.1.6. (a) (Zasada identyczności dla sekcji) *Jeżeli $T \subset p(X)$ jest zbiorem spójnym, $s_1, s_2 \in \Gamma(T, (X, p))$ i $s_1(z_0) = s_2(z_0)$ dla pewnego punktu $z_0 \in T$, to $s_1 \equiv s_2$.*

(b) *Jeżeli $A_1, A_2 \subset X$ są jednolistne, $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ oraz zbiór $p(A_1) \cap p(A_2)$ jest spójny, to $A_1 \cup A_2$ jest zbiorem jednolistnym.*

Zauważmy, że jeżeli $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ lub zbiór $p(A_1) \cap p(A_2)$ nie jest spójny, to $A_1 \cup A_2$ nie musi być jednolistny — ĆWICZENIE.

Dowód. (a) wynika natychmiast z zasady identyczności dla podniesień.

(b) Ustalmy $x_0 \in A_1 \cap A_2$. Niech $T := p(A_1) \cap p(A_2)$, $s_j := (p|_{A_j})^{-1}|_T \in \Gamma(T, (X, p))$, $j = 1, 2$. Wtedy $s_1(p(x_0)) = s_2(p(x_0))$, stąd wobec (a), $s_1 \equiv s_2$, co implikuje, że $s_1 \cup s_2 \in \Gamma(p(A_1 \cup A_2), (X, p))$, a więc $A_1 \cup A_2$ jest jednolistny. $\square$

Niech $(X, p) \in \mathfrak{R}$. Dla $a \in X$ i $r \in (0, +\infty]$, niech $\mathbb{K}_X(a, r)$ oznacza otwarte jednolistne otoczenie a takie, że $p(\mathbb{K}_X(a, r)) = K(p(a), r)$ (o ile takie otoczenie istnieje). Zauważmy, że:

- $\mathbb{K}_X(a, r)$ istnieje dla małych $r > 0$;
- jeżeli „koło” $\mathbb{K}_X(a, r)$ istnieje, to jest jednoznacznie wyznaczone;
- jeżeli $\mathbb{K}_X(a, r)$ istnieje, to dla dowolnych $b \in \mathbb{K}_X(b, r)$ i $0 < s \leq r - |p(b) - p(a)|$, „koło” $\mathbb{K}_X(b, s)$ istnieje oraz

$$\mathbb{K}_X(b, r) = (p|_{\mathbb{K}_X(a, r)})^{-1}(K(p(b), s));$$

- jeżeli $\mathbb{K}_X(a, s)$ istnieje dla $0 < s < r$, to „koło” $\mathbb{K}_X(a, r)$ istnieje oraz

$$\mathbb{K}_X(a, r) = \bigcup_{0 < s < r} \mathbb{K}_X(a, s).$$

W szczególności, jeżeli zdefiniujemy *odległość od brzegu*

$$d_X : X \longrightarrow (0, +\infty], \quad d_X(a) := \sup\{r \in (0, +\infty] : \mathbb{K}_X(a, r) \text{ istnieje}\}, \quad a \in X,$$

to dla dowolnego $a \in X$ maksymalne „koło”

$$\mathbb{K}_X(a) := \mathbb{K}_X(a, d_X(a))$$

jest dobrze określone. Zdefiniujemy

$$p_a := p|_{\mathbb{K}_X(a)}, \quad X_\infty := \{a \in X : d_X(a) = +\infty\}, \quad d_X(A) := \inf\{d_X(a) : a \in A\}, \quad A \subset X,$$

$$A^{(r)} := \bigcup_{a \in A} \overline{\mathbb{K}_X(a, r)}, \quad A \subset X, \quad 0 < r < d_X(A).$$

Obserwacja 5.1.7. (a) Jeżeli $(X, p) = (\Omega, \text{id})$, gdzie $\Omega \subset \mathbb{C}$ jest otwarty, to d_Ω zgadza się z klasyczną definicją. Ogólnie mamy:

$$d_X \leq d_{p(X)} \circ p.$$

(b) Wobec Obserwacji 5.1.2(f), jeżeli $X_\infty \neq \emptyset$, to każda składowa X_∞ jest odwzorowywana przez p homeomorficznie na $\mathbb{C}$.

(c)

$$|d_X(a) - d_X(b)| \leq |p(a) - p(b)|, \quad a \in X \setminus X_\infty, \quad b \in \mathbb{K}_X(a).$$

W szczególności, d_X jest funkcją ciągłą.

Istotnie, wobec Wniosku 5.1.6(b), dla dowolnego $b \in \mathbb{K}_X(a)$, zbiór $U := \mathbb{K}_X(a) \cup \mathbb{K}_X(b)$ jest obszarem jednolistnym. Stąd:

$$|d_X(a) - d_X(b)| = |d_U(a) - d_U(b)| = |d_{p(U)}(p(a)) - d_{p(U)}(p(b))| \leq |p(a) - p(b)|.$$

(e) Niech $K \subset\subset X$ będzie zwarty. Wtedy:

- Zbiór $K^{(r)}$ jest zwarty dla dowolnego $0 < r < d_X(K)$.

Istotnie, niech $(x_k)_{k=1}^\infty \subset K^{(r)}$, $x_k \in \overline{\mathbb{K}_X(a_k, r)}$, $a_k \in K$, $k \geq 1$ (w przyszłości (zob. Obserwacja 5.1.9) zobaczymy, że X jest metryzowalna, więc zwartość można sprawdzać „ciągowo”). Możemy założyć, że $a_k \rightarrow a_0 \in K$, $p(x_k) \rightarrow z_0 \in \mathbb{C}^n$ oraz $a_k \in \mathbb{K}_X(a_0, \varepsilon)$, $k \geq 1$, gdzie $\varepsilon := d_X(K) - r$. Wtedy $\mathbb{K}_X(a_k, r) \subset \mathbb{K}_X(a_0)$ i w związku z tym $x_k = p_{a_0}^{-1}(p(x_k)) \rightarrow p_{a_0}^{-1}(z_0) =: x_0$. Ponadto, $|p(x_0) - p(a_0)| \leq r$. Ostatecznie $x_0 \in \overline{\mathbb{K}_X(a_0, r)} \subset K^{(r)}$.

- $d_X(K^{(r)}) \geq d_X(K) - r$ (w rzeczywistości zachodzi równość — ĆWICZENIE).
- $K = \bigcap_{0 < r < d_X(K)} K^{(r)}$.

(f) Jeżeli K jest zwarty i jednolisty, to $K^{(r)}$ jest jednolisty dla małych $r > 0$.

Istotnie, niech $x_k \in \mathbb{K}_X(a_k, 1/k)$, $y_k \in \mathbb{K}_X(b_k, 1/k)$, $a_k, b_k \in K$, $x_k \neq y_k$, $p(x_k) = p(y_k)$, $k \gg 1$. Możemy założyć, że $a_k \rightarrow a_0 \in K$, $b_k \rightarrow b_0 \in K$. Wtedy $p(a_0) = p(b_0)$ a stąd $a_0 = b_0$. Stąd $x_k, y_k \in \mathbb{K}_X(a_0)$, $k \gg 1$ — sprzeczność.

Obserwacja 5.1.8. Niech $\gamma : [0, 1] \rightarrow p(X)$ będzie krzywą, $a \in p^{-1}(\gamma(0))$ i niech I_0 oznacza zbiór tych $t \in [0, 1]$, dla których istnieje podniesienie $\hat{\gamma}_t : [0, t] \rightarrow X$ krzywej $\gamma|_{[0, t]}$ takie, że $\hat{\gamma}_t(0) = a$. Wtedy:

- $0 \in I_0$.
- Jeżeli $t \in I_0$, to $[0, t] \subset I_0$ i dlatego I_0 jest przedziałem.
- $\hat{\gamma}_{t'} = \hat{\gamma}_{t''}|_{[0, t']}$ dla $0 \leq t' \leq t''$, $t'' \in I_0$ (wobec zasady identyczności dla podniesień) i stąd mamy podniesienie $\hat{\gamma} : I_0 \rightarrow X$ krzywej $\gamma|_{I_0}$, dla którego $\hat{\gamma}(0) = a$.
- I_0 jest otwarty w $[0, 1]$. Istotnie, jeżeli U jest otwartym jednolistnym otoczeniem punktu $\hat{\gamma}(\bar{t})$ (dla pewnego $\bar{t} \in I_0 \cap [0, 1)$) oraz $0 < \delta \leq 1 - \bar{t}$ jest takie, że $\gamma([\bar{t}, \bar{t} + \delta]) \subset p(U)$, to możemy zdefiniować:

$$\hat{\gamma}_{\bar{t}+\delta}(t) := \begin{cases} \hat{\gamma}_{\bar{t}}(t), & t \in [0, \bar{t}] \\ (p|_U)^{-1}(\gamma(t)), & t \in [\bar{t}, \bar{t} + \delta] \end{cases}.$$

Z powyższego wynika, że albo $I_0 = [0, 1]$ (i wtedy mamy podniesienie $\hat{\gamma}$ krzywej γ) albo $I_0 = [0, t^*)$ dla pewnego $0 < t^* \leq 1$.

- Jeżeli $I_0 = [0, t^*)$, to $d_X(\hat{\gamma}(I_0)) = 0$ (w szczególności, $\hat{\gamma}(I_0)$ nie jest relatywnie zwarty). Istotnie, gdyby $d_X(\hat{\gamma}(I_0)) = r > 0$, to biorąc $0 < \bar{t} < t^*$ tak, że $\gamma(t) \in K(\gamma(\bar{t}), r)$ dla $t \in [\bar{t}, t^*]$, i definiując

$$\hat{\gamma}_{t^*}(t) := \begin{cases} \hat{\gamma}_{\bar{t}}(t), & t \in [0, \bar{t}] \\ p_{\hat{\gamma}(\bar{t})}^{-1}(\gamma(t)), & t \in [\bar{t}, t^*] \end{cases},$$

dostalibyśmy podniesienie $\hat{\gamma}_{t^*}$ krzywej $\gamma|_{[0, t^*]}$ — sprzeczność.

Niech $(X, p) \in \mathfrak{R}_c$. Zauważmy (ĆWICZENIE), że dla dowolnych punktów $a, b \in X$ istnieje krzywa $\hat{\gamma} : [0, 1] \rightarrow X$ taka, że $\hat{\gamma}(0) = a$, $\hat{\gamma}(1) = b$ i $p \circ \hat{\gamma}$ jest łamaną. Zdefiniujemy $\sigma_X = \sigma_{(X, p)} : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$,

$$\sigma_X(a, b) := \inf \{ \ell(p \circ \hat{\gamma}) : \hat{\gamma} : [0, 1] \rightarrow X \text{ jest krzywą, } \hat{\gamma}(0) = a, \hat{\gamma}(1) = b \}, \quad a, b \in X.$$

Obserwacja 5.1.9. (a) $\sigma_{(X, p)}(a, b) \geq \sigma_{(p(X), \text{id})}(p(a), p(b))$, $a, b \in X$.

(b) Jeżeli $A \subset X$ jest zbiorem jednolistnym takim, że $p(A)$ jest wypukły, to

$$\sigma_X(a, b) = |p(a) - p(b)|, \quad a, b \in A.$$

(c)

$$\mathbb{K}_X(a, r) = \{x \in X : \sigma_X(a, x) < r\}, \quad a \in X, 0 < r \leq d_X(a).$$

Istotnie, inkluzja $\subset$ wynika z (b). Jeżeli $\sigma_X(a, x) < r$ i $\hat{\gamma} : [0, 1] \rightarrow X$ jest krzywą taką, że $\hat{\gamma}(0) = a$, $\hat{\gamma}(1) = x$ i $\ell(p \circ \hat{\gamma}) < r$, to $(p \circ \hat{\gamma})([0, 1]) \subset K(p(a), r)$. Stąd, z zasady identyczności dla podniesień, dostajemy $\hat{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K}_X(a, r)$.

(d) σ_X jest ciągłą metryką. Topologia generowana przez σ_X pokrywa się z wyjściową topologią przestrzeni X .

(e) Dla dowolnej przestrzeni metrycznej (Y, d) i odwzorowania $f : X \rightarrow Y$, NWSR:

- (i) $d(f(a), f(b)) \leq \sigma_X(a, b)$, $a, b \in X$;
- (ii) $d(f(a), f(b)) \leq |p(a) - p(b)|$, $a \in X$, $b \in \mathbb{K}_X(a)$.

Istotnie, implikacja (i) $\implies$ (ii) wynika z (b). Dla dowodu implikacji przeciwnej, ustalmy $a, b \in X$ i krzywą $\hat{\gamma} : [0, 1] \rightarrow X$ taką, że $\hat{\gamma}(0) = a$, $\hat{\gamma}(1) = b$. Wtedy (ĆWICZENIE) istnieje $N \in \mathbb{N}$ oraz punkty $0 = t_0 < \dots < t_N = 1$ takie, że $\hat{\gamma}(t_j) \in \mathbb{K}_X(\hat{\gamma}(t_{j-1}))$, $j = 1, \dots, N$. Stąd

$$d(f(a), f(b)) \leq \sum_{j=1}^N d(f(\hat{\gamma}(t_{j-1})), f(\hat{\gamma}(t_j))) \leq \sum_{j=1}^N |p(\hat{\gamma}(t_{j-1})) - p(\hat{\gamma}(t_j))| \leq \ell(p \circ \hat{\gamma}),$$

co daje (i).

W szczególności, wobec Obserwacji 5.1.7(c),

$$|d_X(a) - d_X(b)| \leq \sigma_X(a, b), \quad a, b \in X \setminus X_\infty.$$

(f) Niech $a_0 \in X$, $0 < \varepsilon < d_X(a_0)$ i niech U_ε będzie składową spójną zbioru $\{x \in X : d_X(x) > \varepsilon\}$, do której należy a_0 . Wtedy, dla dowolnego $t > 0$, zbiór

$$U_{\varepsilon, t} := \{x \in U_\varepsilon : \sigma_{U_\varepsilon}(a_0, x) < t\}$$

jest relatywnie zwarty w X .

Istotnie, niech $I := \{t > 0 : U_{\varepsilon, t} \subset\subset X\}$. Wobec (c), mamy $(0, \varepsilon] \subset I$. Aby udowodnić, że $I = \mathbb{R}_{>0}$ wystarczy pokazać, że dla $t \geq \varepsilon$, zachodzi implikacja $t \in I \implies t + \varepsilon/2 \in I$. Wystarczy więc pokazać np. że

$$U_{\varepsilon, t+\varepsilon/2} \subset \bigcup_{b \in U_{\varepsilon, t}} \mathbb{K}_X(b, \varepsilon).$$

Ustalmy $a \in U_{\varepsilon, t+\varepsilon/2} \setminus U_{\varepsilon, t}$ i niech $\hat{\gamma} : [0, 1] \rightarrow U_\varepsilon$ będzie krzywą taką, że $\hat{\gamma}(0) = a_0$, $\hat{\gamma}(1) = a$ oraz $\ell(p \circ \hat{\gamma}) < t + \varepsilon/2$. Niech $\tau \in (0, 1)$ będzie takie, że $b := \hat{\gamma}(\tau) \in \mathbb{K}_X(a, \varepsilon) \setminus \overline{\mathbb{K}_X(a, \varepsilon/2)}$. Wtedy

$$t + \varepsilon/2 > \ell(p \circ \hat{\gamma}) = \ell(p \circ \hat{\gamma}|_{[0, \tau]}) + \ell(p \circ \hat{\gamma}|_{[\tau, 1]}) \geq \ell(p \circ \hat{\gamma}|_{[0, \tau]}) + |p(b) - p(a)| > L(p \circ \hat{\gamma}|_{[0, \tau]}) + \varepsilon/2,$$

Skąd wynika że, $\ell(p \circ \hat{\gamma}|_{[0, \tau]}) < t$, a więc $b \in U_{\varepsilon, t}$ oraz $a \in \mathbb{K}_X(b, \varepsilon)$.

Obserwacja 5.1.10. (a) Wiadomo (zob. [Die 1944], [Bou 1965]), że dla dowolnej rozmaitości spójnej M klasy $\mathcal{C}^1$, NWSR:

- (i) M jest σ -zwarta;
- (ii) topologia M ma bazę przeliczalną.

(b) Wiadomo również, że każda powierzchnia Riemanna jest σ -zwarta (zob. [Rad 1925]; wynika to również pośrednio z twierdzenia Poicarégo–Volterry (Twierdzenie 5.1.11) oraz twierdzenia Gunninga – Narasimhana (Twierdzenie 5.5.8).

(c) Istnieje spójna, jednospójna dwuwymiarowa rozmaitość zespolona, która nie jest σ -zwarta (zob. [Cal-Ros 1954]).

Twierdzenie 5.1.11 (Twierdzenie Poincarégo–Volterry ⁽¹⁾ ⁽²⁾). $\mathfrak{R}_c \subset \mathfrak{R}_\infty$. W szczególności, jeżeli $(X, p) \in \mathfrak{R}_c$, to:

- włókna są co najwyżej przeliczalne,
- topologia przestrzeni X ma bazę przeliczalną złożoną z relatywnie zwartych obszarów jednolistnych.

Dowód. Ustalmy $a_0 \in X$ i niech U_ε and $U_{\varepsilon, t}$ będą takie, jak w Obserwacji 5.1.9(f). Niech $k_0 \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $1/k_0 < d_X(a_0)$ i niech $V_k := U_{1/k, k}$, $k \geq k_0$. Wobec Obserwacji 5.1.9(f), mamy $V_k \subset\subset X$, $k \geq k_0$. Zauważmy, że $V_k \subset V_{k+1}$ (ĆWICZENIE) oraz $X = \bigcup_{k=k_0}^\infty V_k$ (ĆWICZENIE).

Jest jasne, że jeżeli X jest σ -zwarta i włókna są dyskretne, to są co najwyżej przeliczalne. Pokażemy jeszcze, że topologia X ma bazę przeliczalną złożoną z relatywnie zwartych obszarów jednolistnych. Niech $X = \bigcup_{j=1}^\infty K_j$, gdzie każdy ze zbiorów K_j jest zwarty. Dla ustalonych $j \in \mathbb{N}$ i $0 < r < d_X(K_j)$, istnieje zbiór skończony $S_{j, r} \subset K_j$ taki, że $K_j \subset \bigcup_{x \in S_{j, r}} \mathbb{K}_X(x, r)$. Pozostaje sprawdzić (ĆWICZENIE), że rodzina

$$\{\mathbb{K}_X(x, r) : j \in \mathbb{N}, 0 < r < d_X(K_j), r \in \mathbb{Q}, x \in S_{j, r}\}$$

jest poszukiwaną bazą. □

⁽¹⁾ Jules Henri Poincaré (1854–1912) — matematyk francuski.

⁽²⁾ Vito Volterra (1860–1940) — matematyk włoski.

Twierdzenie 5.1.12 (Twierdzenie o monodromii). *Niech $(X, p) \in \mathfrak{R}$. Niech A będzie przestrzenią lokalnie zwartą, spójną i lokalnie spójną, i niech B będzie przestrzenią lokalnie spójną. Ustalmy $a_0 \in A$. Załóżmy, że*

$$F : A \times B \longrightarrow p(X)$$

jest odwzorowaniem ciągłym oraz dla dowolnego $b \in B$ istnieje podniesienie $\hat{F}_b : A \longrightarrow X$ odwzorowania $F_b := F(\cdot, b)$ takie, że odwzorowanie $B \ni b \longmapsto \hat{F}_b(a_0) \in X$ jest ciągłe. Wtedy odwzorowanie

$$A \times B \ni (a, b) \longmapsto \hat{F}_b(a) \in X$$

jest ciągłe.

Dowód. Najpierw sprawdzimy, że $\hat{F}$ jest ciągłe w każdym punkcie (a_0, b) , $b \in B$.

Istotnie, ustalmy $b_1 \in B$ i niech W będzie otwartym jednolistnym otoczeniem $\hat{F}(a_0, b_1)$. Istnieją spójne otoczenia $U \subset A$ punktu a_0 i $V \subset B$ punktu b_1 takie, że:

$$\begin{aligned} \hat{F}(\{a_0\} \times V) &\subset W \text{ (korzystamy z ciągłości } b \longmapsto \hat{F}(a_0, b)), \\ F(U \times V) &\subset p(W). \end{aligned}$$

Zdefiniujemy $\sigma := (p|_W)^{-1} \circ F|_{U \times V}$. Wtedy dla dowolnego $b \in V$ odwzorowania $U \ni a \longmapsto \hat{F}(a, b)$ i $U \ni a \longmapsto \sigma(a, b)$ są podniesieniami $U \ni a \longmapsto F(a, b)$ zgodnymi dla $a = a_0$. W konsekwencji, na podstawie zasady identyczności dla podniesień, $\hat{F}|_{U \times V} = \sigma$. W szczególności, odwzorowanie $\hat{F}$ jest ciągłe w (a_0, b_1) .

Teraz sprawdzimy ciągłość w dowolnym punkcie $(a_1, b_1) \in A \times B$ — pokażemy, że istnieją otoczenia $U \subset A$ punktu a_1 , $V \subset B$ punktu b_1 i jednolistne $W \subset X$ punktu $\hat{F}(a_1, b_1)$ takie, że $F(U \times V) \subset p(W)$ i $\hat{F}|_{U \times V} = (p|_W)^{-1} \circ F|_{U \times V}$.

Dla $x \in A$ niech $W_x \subset X$ będzie jednolistnym otoczeniem $\hat{F}_{b_1}(x)$. Wybierzemy otoczenie $\tilde{U}_x \subset\subset A$ punktu x takie, że $\hat{F}_{b_1}(\tilde{U}_x) \subset\subset W_x$. Z ciągłości odwzorowania $\hat{F}$ w punkcie (a_0, b_1) , wynika, że możemy założyć, że $\hat{F}(\tilde{U}_{a_0} \times \tilde{V}) \subset W_{a_0}$ dla pewnego otoczenia $\tilde{V} \subset B$ punktu b_1 .

Ponieważ A jest spójną i lokalnie spójną przestrzenią Hausdorffa istnieją punkty $x_1, \dots, x_N \in A$ i obszary $U_1, \dots, U_N$ takie, że $x_1 = a_0$, $a_1 \in U_N$, $U_j \subset \tilde{U}_{x_j}$, $j = 1, \dots, N$, $U_j \cap U_{j+1} \neq \emptyset$, $j = 1, \dots, N-1$. Niech $W_j := W_{x_j}$, $j = 1, \dots, N$. Ponieważ $F(U_j \times \{b_1\}) = p(\hat{F}_{b_1}(U_j)) \subset\subset p(W_j)$, $j = 1, \dots, N$, istnieje spójne otoczenie $V \subset \tilde{V}$ punktu b_1 takie, że $F(U_j \times V) \subset p(W_j)$, $j = 1, \dots, N$. Zauważmy, że $\hat{F}(U_1 \times V) \subset W_1$. Zdefiniujemy $\sigma_j := (p|_{W_j})^{-1} \circ F|_{U_j \times V} : U_j \times V \longrightarrow X$. Wystarczy pokazać, że dla dowolnego $j = 1, \dots, N$, mamy

$$(*) \quad \sigma_j = \hat{F}|_{U_j \times V}.$$

Odnótujemy, że $\sigma_j = \hat{F}$ on $U_j \times \{b_1\}$, $j = 1, \dots, N$. Ponadto, $(*)$ zachodzi dla $j = 1$. Przypuśćmy, że $(*)$ zachodzi dla $j = 1, \dots, k$ dla pewnego $1 \leq k \leq N-1$. Ustalmy punkt $x_0 \in U_k \cap U_{k+1}$. Zauważmy, że $\hat{F}(x_0, b) = \sigma_k(x_0, b)$, $b \in V$. Ustalmy $b \in V$. Zauważmy, że odwzorowania $U_{k+1} \ni x \longmapsto \hat{F}(x, b)$, $U_{k+1} \ni x \longmapsto \sigma_{k+1}(x, b)$ są podniesieniami odwzorowania $U_{k+1} \ni x \longmapsto F(x, b)$. Wobec zasady identyczności, wystarczy pokazać, że $\sigma_k(x_0, b) = \hat{F}(x_0, b) = \sigma_{k+1}(x_0, b)$. Dla dowodu, zauważmy, że odwzorowania $V \ni y \longmapsto \sigma_k(x_0, y)$ i $V \ni y \longmapsto \sigma_{k+1}(x_0, y)$ są podniesieniami odwzorowania $V \ni y \longmapsto F(x_0, y)$, które się pokrywają dla $y = b_1$. Stąd, ponownie korzystając z zasady identyczności, dostajemy żądany wynik. $\square$

W przypadku, gdy $A = B := [0, 1]$, $a_0 := 0$, dostajemy klasyczne twierdzenie o monodromii.

Twierdzenie 5.1.13 (Klasyczne twierdzenie o monodromii). *Niech $(X, p) \in \mathfrak{R}_c$, $x_0 \in X$ i niech*

$$F : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow p(X)$$

będzie odwzorowaniem ciągłym takim, że $F(0, u) = p(x_0)$, $u \in [0, 1]$. Przypuśćmy, że dla dowolnego $u \in [0, 1]$ istnieje podniesienie $\hat{\gamma}_u : [0, 1] \longrightarrow X$ krzywej $F(\cdot, u)$ takie, że $\hat{\gamma}_u(0) = x_0$. Zdefiniujemy $\hat{F}(t, u) := \hat{\gamma}_u(t)$, $t, u \in [0, 1]$. Wtedy $\hat{F}$ jest ciągłe.

W szczególności, jeżeli $F(1, \cdot) \equiv \text{const} = z_1$, to $\hat{F}(1, \cdot) \equiv \text{const} \in p^{-1}(z_1)$.

Definicja 5.1.14. Powiemy, że obszar Riemanna (X, p) jest *pokrywą*, dowolny punkt $z_0 \in p(X)$ ma otoczenie otwarte U_0 takie, że każda składowa spójna U zbioru $p^{-1}(U_0)$ jest jednolista oraz $p(U) = U_0$.

Powiemy, że obszar (X, p) jest *dowolnie przedłużalny*, jeżeli dla dowolnej krzywej $\gamma : [0, 1] \rightarrow p(X)$ oraz punktu $a \in p^{-1}(\gamma(0))$ istnieje podniesienie $\hat{\gamma} : [0, 1] \rightarrow X$ krzywej γ takie, że $\hat{\gamma}(0) = a$.

Propozycja 5.1.15. Niech $(X, p) \in \mathfrak{R}$. Wtedy NWSR:

- (i) (X, p) jest *pokrywą*;
- (ii) (X, p) jest *dowolnie przedłużalny*;
- (iii) dla dowolnego zbioru wypukłego $T \subset \mathbb{R}^k$ ⁽³⁾, dla dowolnej funkcji ciągłej $\gamma : T \rightarrow p(X)$, dla dowolnych $t_0 \in T$ oraz $a \in p^{-1}(\gamma(t_0))$, istnieje podniesienie $\hat{\gamma} : [0, 1] \rightarrow X$ takie, że $\hat{\gamma}(t_0) = a$.
- (iv) $d_X = d_{p(X)} \circ p$.

Dowód. (Szczegóły pozostawiamy jako ĆWICZENIE.)

(i) $\implies$ (ii): Niech $\gamma : [0, 1] \rightarrow p(X)$ będzie krzywą i niech $a \in p^{-1}(\gamma(0))$. Niech I_0 będzie taki, jak w Obserwacji 5.1.8. Korzystając z tego, że (X, p) jest *pokrywą*, sprawdzamy, że I_0 jest domknięty, a więc $I_0 = I$.

(ii) $\implies$ (iii): Dla $t \in T$ niech $\sigma_t : [0, 1] \rightarrow T$ będzie dowolną krzywą taką, że $\sigma_t(0) = t_0$, $\sigma_t(1) = t$. Zdefiniujemy $\delta_t := \gamma \circ \sigma_t : [0, 1] \rightarrow p(X)$ i niech $\hat{\delta}_t : [0, 1] \rightarrow X$ będzie podniesieniem δ_t , dla którego $\hat{\delta}_t(0) = a$. Z klasycznego twierdzenia o monodromii wynika, że $\hat{\delta}_t(1)$ jest niezależne od σ_t . Połóżmy $\hat{\gamma}(t) := \hat{\delta}_t(1)$. Pozostaje wykazać, że $\hat{\gamma}$ jest ciągłą.

(iii) $\implies$ (iv): Ustalmy $a \in X$. Stosujemy (iii) do $T := K(p(a), d_{p(X)}(p(a)))$.

(iv) $\implies$ (i): Ustalmy $z_0 \in p(X)$ i $K(z_0, 2r) \subset p(X)$. Zdefiniujemy $U_0 := K(z_0, r)$. Niech U będzie składową spójną zbioru $p^{-1}(U_0)$. Wtedy $U = \mathbb{K}_X(a, r)$ dla pewnego $a \in p^{-1}(z_0)$. $\square$

Propozycja 5.1.16. Niech (X, p) będzie *pokrywą*. Wtedy

- (a) $\#p^{-1}(z_1) = \#p^{-1}(z_2)$ dla dowolnych $z_1, z_2 \in p(X)$.
- (b) Jeżeli obszar $p(X)$ jest *homotopijnie jednospójny*, to p jest *iniektywne*.

Dowód. (a) Ustalmy $z_1, z_2 \in p(X)$, $z_1 \neq z_2$, i niech $\gamma : [0, 1] \rightarrow p(X)$ będzie krzywą taką, że $\gamma(0) = z_1$, $\gamma(1) = z_2$. Dla $x \in p^{-1}(z_1)$ niech $f(x) = \hat{\gamma}_x(1)$, gdzie $\hat{\gamma}_x$ jest podniesieniem γ , przy czym $\hat{\gamma}_x(0) = x$. Wobec zasady identyczności dla podniesień odwzorowanie $f : p^{-1}(z_1) \rightarrow p^{-1}(z_2)$ jest iniektywne.

(b) Niech $a_1, a_2 \in X$, $p(a_1) = p(a_2) =: z_0$ i niech $\sigma : [0, 1] \rightarrow X$ będzie krzywą taką, że $\sigma(0) = a_1$, $\sigma(1) = a_2$. Niech $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow p(X)$ będzie homotopią ściągającą $p \circ \sigma$ do punktu z_0 : $F(\cdot, 0) = p \circ \sigma$, $F(0, \cdot) = F(1, \cdot) = F(\cdot, 1) = z_0$. Ponieważ (X, p) jest *dowolnie przedłużalny* (Propozycja 5.1.15(iii)), homotopia F może być podniesiona do $\hat{F}$, przy czym $\hat{F}(0, u) = a_1$. Wobec twierdzenia o monodromii, $a_2 = \hat{F}(1, 0) = \hat{F}(1, 1) = a_1$. $\square$

Definicja 5.1.17. Dla $f \in \mathcal{O}(X)$, $a \in X$ i $k \in \mathbb{N}$, definiujemy k -tą *pochodną funkcji f w punkcie a*

$$f^{(k)}(a) := (f \circ p_a^{-1})^{(k)}(p(a)).$$

Dalej, definiujemy *szereg Taylora funkcji f w punkcie a*

$$T_a f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z - p(a))^k = T_{p(a)}(f \circ p_a^{-1})(z)$$

i jego promień zbieżności $d(T_a f)$.

Definicja jest oczywiście zgodna dla $(X, p) = (\Omega, \text{id})$.

⁽³⁾ Lub ogólniej, dla dowolnej przestrzeni metrycznej T , która jest łukowo spójna, lokalnie łukowo spójna i homotopijnie jednospójna.

5.2. Snop I -kiełków funkcji holomorfcznych

Niech I będzie dowolnym zbiorem wskaźników. Szczególną rolę będzie odgrywać przypadek, gdy $\#I = 1$. Dla $a \in \mathbb{C}$ zdefiniujemy

$$\tilde{\mathcal{O}}_a^I := \{(U, \mathbf{f}) : U \text{ jest otwartym otoczeniem } a, \mathbf{f} = (f_i)_{i \in I} \subset \mathcal{O}(U)\},$$

Dla $(U, \mathbf{f}), (V, \mathbf{g}) \in \tilde{\mathcal{O}}_a^I$ definiujemy relację równoważnościową

$$(U, \mathbf{f}) \stackrel{a}{\simeq} (V, \mathbf{g}) : \Longleftrightarrow \exists W - \text{otoczenie } a : W \subset U \cap V, f_i|_W = g_i|_W, i \in I.$$

Niech

$$\mathcal{O}_a^I := \tilde{\mathcal{O}}_a^I / \stackrel{a}{\simeq}.$$

Każdą klasę równoważności $\hat{\mathbf{f}}_a := [(U, \mathbf{f})]_{\stackrel{a}{\simeq}}$ nazywamy I -kiełkiem $\mathbf{f}$ w punkcie a . Zauważmy, że wartość $\hat{\mathbf{f}}_a(a) := (f_i(a))_{i \in I}$ jest poprawnie określona. Niech

$$[(U, \mathbf{f})]_{\stackrel{a}{\simeq}} + [(V, \mathbf{g})]_{\stackrel{a}{\simeq}} := [(U \cap V, \mathbf{f} + \mathbf{g})]_{\stackrel{a}{\simeq}}, \quad [(U, \mathbf{f})]_{\stackrel{a}{\simeq}} \cdot [(V, \mathbf{g})]_{\stackrel{a}{\simeq}} := [(U \cap V, \mathbf{f} \cdot \mathbf{g})]_{\stackrel{a}{\simeq}},$$

gdzie $\mathbf{f} + \mathbf{g} := (f_i|_{U \cap V} + g_i|_{U \cap V})_{i \in I}$, $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} := (f_i|_{U \cap V} \cdot g_i|_{U \cap V})_{i \in I}$. Działania te zadają w $\mathcal{O}_a^I$ strukturę pierścienia przemennego — jest to *pierścień I -kiełków funkcji holomorfcznych w punkcie a* .

Niech $\mathcal{R}_a^I$ oznacza pierścień rodzin $(S_i)_{i \in I}$ złożonych z szeregow potęgowych o środku w punkcie a takich, że $\inf\{d(S_i) : i \in I\} > 0$. Wtedy odwzorowanie

$$\mathcal{O}_a^I \ni \hat{\mathbf{f}}_a \longrightarrow (T_a f_i)_{i \in I} \in \mathcal{R}_a^I$$

jest dobrze określone i jest izomorfizmem pierścieni.

Niech

$$\mathcal{O}^I := \bigvee_{a \in \mathbb{C}} \mathcal{O}_a^I$$

i niech $\pi^I : \mathcal{O}^I \longrightarrow \mathbb{C}^n$, $\pi^I(\hat{\mathbf{f}}_a) := a$. Dla $\hat{\mathbf{f}}_a = [(U, \mathbf{f})]_{\stackrel{a}{\simeq}}$ zdefiniujemy

$$\mathbb{V}(\hat{\mathbf{f}}_a, U) := \{[(U, \mathbf{f})]_{\stackrel{b}{\simeq}} : b \in U\}.$$

Wtedy:

- rodzina $\{\mathbb{V}(\hat{\mathbf{f}}_a, U) : \hat{\mathbf{f}}_a \in \mathcal{O}^I, (U, \mathbf{f}) \in \hat{\mathbf{f}}_a\}$ jest bazą otoczeń pewnej topologii na $\mathcal{O}^I$ (ĆWICZENIE).
- Jest to topologia Hausdorffa. Istotnie, niech $\hat{\mathbf{f}}_a = [(U, \mathbf{f})]_{\stackrel{a}{\simeq}}$, $\hat{\mathbf{g}}_b = [(V, \mathbf{g})]_{\stackrel{b}{\simeq}}$, $\hat{\mathbf{f}}_a \neq \hat{\mathbf{g}}_b$. Jeżeli $a \neq b$,

to $\mathbb{V}(\hat{\mathbf{f}}_a, U) \cap \mathbb{V}(\hat{\mathbf{g}}_b, V) = \emptyset$, o ile $U \cap V = \emptyset$. Jeżeli $a = b$, to możemy założyć, że $V = U$ jest obszarem. Przypuśćmy, że $[(U, \mathbf{f})]_{\stackrel{c}{\simeq}} = [(U, \mathbf{g})]_{\stackrel{c}{\simeq}}$ dla pewnego $c \in U$. Wtedy, z zasady identyczności, $f_i \equiv g_i$, $i \in I$, co daje sprzeczność.

- $\pi^I|_{\mathbb{V}(\hat{\mathbf{f}}_a, U)} : \mathbb{V}(\hat{\mathbf{f}}_a, U) \longrightarrow U$ jest homeomorfizmem (ĆWICZENIE).

Tak więc $(\mathcal{O}^I, \pi^I)$ jest regionem Riemanna — nosi on nazwę *snopu I -kiełków funkcji holomorfcznych jednej zmiennej*. Zauważmy (ĆWICZENIE), że

$$d_{\mathcal{O}^I}(\hat{\mathbf{f}}_a) = \inf\{d(T_a f_i) : i \in I\}.$$

Dla $i_0 \in I$ niech $\mathbb{F}_{i_0} : \mathcal{O}^I \longrightarrow \mathbb{C}$, $\mathbb{F}_{i_0}(\hat{\mathbf{f}}_a) := f_{i_0}(a)$. Wtedy

$$\mathbb{F}_{i_0} \circ (\pi^I|_{\mathbb{V}(\hat{\mathbf{f}}_a, U)})^{-1} = f_{i_0} \text{ na } U,$$

co oznacza, że $\mathbb{F}_{i_0} \in \mathcal{O}(\mathcal{O}^I)$.

Szczególną uwagę poświęcimy przypadkowi, gdy $\#I = 1$. Wtedy będziemy pomijać indeks I . Mamy więc region Riemanna $(\mathcal{O}, \pi)$ nad $\mathbb{C}$ taki, że $\mathbb{K}_{\mathcal{O}}(\hat{f}_a, r) = \mathbb{V}(\hat{f}_a, K(a, r))$, $0 < r \leq d(T_a f) = d_{\mathcal{O}}(\hat{f}_a) = d(T_a f)$. Ponadto, mamy funkcję holomorfczną $\mathbb{F} \in \mathcal{O}(\mathcal{O})$, $\mathbb{F}(\hat{f}_a) := f(a)$. Zauważmy (ĆWICZENIE), że dla dowolnego zbioru otwartego $\Omega \subset \mathbb{C}$ odwzorowanie

$$\mathcal{O}(\Omega) \ni f \xrightarrow{\Xi} (\Omega \ni z \longmapsto \hat{f}_z \in \mathcal{O}_z) \in \Gamma(\Omega, (\mathcal{O}, \pi))$$

jest izomorfizmem; odwzorowanie odwrotne ma postać

$$\Gamma(\Omega, (\mathcal{O}, \pi)) \ni s \longmapsto \mathbb{F} \circ s \in \mathcal{O}(\Omega).$$

Definicja 5.2.1. Dowolny obszar $F \subset \mathcal{O}$ nazywamy *funkcją analityczną (wieloznaczną)*.

Każdą składową spójną snopa $\mathcal{O}$ nazywamy *pełną funkcją analityczną*.

Na funkcję analityczną przenosimy pojęcie dowolnej przedłużalności (pokrywy) i mówimy, że funkcja analityczna F jest *dowolnie przedłużalna*.

Obserwacja 5.2.2. (a) Dla każdej funkcji $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ istnieje pełna funkcja analityczna F_f taka, że $\Xi(f)(\Omega) \subset F_f$.

(b) Niech $F \subset \mathcal{O}$ będzie funkcją analityczną. Jako natychmiastowy wniosek z Twierdzenia 5.1.11 dostajemy: $\#(F \cap \pi^{-1}(z)) \leq \aleph_0$, $z \in D := \pi(F)$;

(c) Niech $F \subset \mathcal{O}$ będzie dowolnie przedłużalna funkcją analityczną. Jako natychmiastowy wniosek z Propozycji 5.1.16 dostajemy:

- $\#(F \cap \pi^{-1}(z_1)) = \#(F \cap \pi^{-1}(z_2))$ dla dowolnych $z_1, z_2 \in D := \pi(F)$;
- jeżeli obszar D jest homotopijnie jednospójny, to F jest obszarem jednolistnym, tzn. F może być utożsamiona ze zwykłą funkcją $\mathbb{F} \circ (\pi|_F)^{-1} \in \mathcal{O}(D)$.

Ćwiczenie 5.2.3. Niech $F \subset \mathcal{O}$ będzie funkcją analityczną.

(a) Pokazać, że *pochodna*

$$F' := \{\widehat{f}'_a : \widehat{f}_a \in F, a \in \pi(F)\}$$

jest dobrze określoną funkcją analityczną, $\pi(F') = \pi(F)$.

(b) Pokazać, że *funkcja odwrotna*

$$F^{-1} := \{\widehat{f^{-1}}_b : \widehat{f}_a \in F, f'(a) \neq 0, b = f(a), a \in \pi(F)\}$$

jest dobrze określoną funkcją analityczną.

5.3. Morfizmy

Definicja 5.3.1. Niech $(X, p), (Y, q) \in \mathfrak{R}$. Powiemy, że odwzorowanie ciągłe $\varphi : X \longrightarrow Y$ jest *morfizmem*, jeżeli $q \circ \varphi = p$. Jeżeli ponadto φ jest bijektywne i φ^{-1} jest również morfizmem, to mówimy, że φ jest *izomorfizmem*.

Obserwacja 5.3.2. (a) Jeżeli $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ są otwarte i $\varphi : (\Omega_1, \text{id}) \longrightarrow (\Omega_2, \text{id})$ jest morfizmem, to $\Omega_1 \subset \Omega_2$ i φ jest operatorem inkluzji.

(b) Złożenie morfizmów jest morfizmem.

(c) Jeżeli $(X, p) \in \mathfrak{R}$, to $p : (X, p) \longrightarrow (\mathbb{C}, \text{id})$ jest morfizmem.

(d) Każdy morfizm jest lokalnym biholomorfizmem. Jest zatem odwzorowaniem otwartym. W szczególności, $\varphi(X)$ jest zbiorem otwartym w Y .

(e) Jeżeli morfizm φ jest bijektywny, to jest izomorfizmem.

(f) (Zasada identyczności dla morfizmów) Jeżeli $\varphi, \psi : (X, p) \longrightarrow (Y, q)$ są morfizmami i $\varphi(a) = \psi(a)$ dla pewnego $a \in X$, to $\varphi = \psi$ w składowej spójnej, do której należy a .

(g) Jeżeli $\varphi : (X, p) \longrightarrow (Y, q)$ jest morfizmem i $A \subset X$ jest jednolistny, to $\varphi(A)$ jest jednolistny $((q|_{\varphi(A)})^{-1} = \varphi \circ (p|_A)^{-1})$. W szczególności,

$$\varphi(\mathbb{K}_X(x, r)) = \mathbb{K}_Y(\varphi(x), r), \quad x \in X, 0 < r \leq d_X(x),$$

a stąd:

- $d_Y \circ \varphi \geq d_X$,
- jeżeli φ jest izomorfizmem, to $d_Y \circ \varphi = d_X$.

(h) Jeżeli $\varphi : (X, p) \longrightarrow (Y, q)$ jest morfizmem, każda składowa Y przecina $\varphi(X)$ oraz $d_Y \circ \varphi = d_X$, to $\varphi(X) = Y$.

Istotnie, wystarczy pokazać, że zbiór $\varphi(X)$ jest domknięty w Y . Niech $y_0 \in \overline{\varphi(X)}$, $0 < 2r_0 < d_Y(y_0)$, $y = \varphi(x) \in \widehat{\mathbb{P}}_Y(y_0, r_0)$. Wtedy $d_X(x) = d_Y(y) > r_0$ i stąd $y_0 \in \widehat{\mathbb{P}}_Y(y, r_0) = \varphi(\widehat{\mathbb{P}}_X(x, r_0)) \subset \varphi(X)$.

(i) Odwzorowanie

$$\varphi^* : \mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(X), \quad \varphi^*(g) := g \circ \varphi,$$

jest iniektywne wtedy i tylko wtedy, gdy każda składowa Y przecina $\varphi(X)$. Jeżeli φ^* jest iniektywne, wtedy definiujemy

$$f^\varphi := (\varphi^*)^{-1}(f), \quad f \in \varphi^*(\mathcal{O}(Y)).$$

(j) $g'^Y \circ \varphi = (g \circ \varphi)'^X$, $g \in \mathcal{O}(Y)$. W szczególności, $T_{\varphi(x)}g = T_x(g \circ \varphi)$, $g \in \mathcal{O}(Y)$, $x \in X$.

(k) $d(T_af) \geq d_Y(\varphi(a))$, $a \in X$, $f \in \varphi^*(\mathcal{O}(Y))$.

5.4. Rozszerzenia holomorficzne

Definicja 5.4.1. Niech $(X, p) \in \mathfrak{R}$ i niech $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(X)$. Powiemy, że morfizm $\varphi : (X, p) \longrightarrow (Y, q)$ jest $\mathcal{F}$ -rozszerzeniem obszaru (X, p) , jeżeli φ^* jest iniektywne oraz $\mathcal{F} \subset \varphi^*(\mathcal{O}(Y))$, tzn. dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{F}$ istnieje dokładnie jedna funkcja $\tilde{f} \in \mathcal{O}(Y)$ taka, że $\tilde{f} \circ \varphi = f$. W przypadku $\mathcal{F} = \mathcal{O}(X)$ mówimy po prostu o *rozszerzeniu holomorficznym*. Zdefiniujemy

$$\mathcal{F}^\varphi := (\varphi^*)^{-1}(\mathcal{F}) = \{f^\varphi : f \in \mathcal{F}\} = \{g \in \mathcal{O}(Y) : g \circ \varphi \in \mathcal{F}\}.$$

Obserwacja 5.4.2. Niech $\varphi : (X, p) \longrightarrow (Y, q)$ będzie $\mathcal{F}$ -rozszerzeniem.

(a) Jeżeli $\psi : (Y, q) \longrightarrow (Z, r)$ jest $\mathcal{F}^\varphi$ -rozszerzeniem, to $\psi \circ \varphi : (X, p) \longrightarrow (Z, r)$ jest $\mathcal{F}$ -rozszerzeniem.

(b) Jeżeli $\psi : (Y, q) \longrightarrow (Z, r)$ jest morfizmem takim, że $\psi \circ \varphi : (X, p) \longrightarrow (Z, r)$ jest $\mathcal{F}$ -rozszerzeniem, to $\psi : (Y, q) \longrightarrow (Z, r)$ jest $\mathcal{F}^\varphi$ -rozszerzeniem.

(c) Jeżeli $\mathcal{F} = \mathcal{O}(X)$, to $\mathcal{F}^\varphi = \mathcal{O}(Y)$.

(d) $d(T_af) = d(T_{\varphi(a)}f^\varphi) \geq d_Y(\varphi(a))$, $a \in X$, $f \in \mathcal{F}$.

(e) $\varphi : (X, p) \longrightarrow (Y, q)$ jest również $[\mathcal{F}]$ -rozszerzeniem, gdzie $[\mathcal{F}]$ jest minimalną spośród podalgebr $\mathcal{A}$ algebry $\mathcal{O}(\Omega)$ spełniających warunki:

- $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$,
- $p \in \mathcal{A}$,
- $f \in \mathcal{A} \implies f' \in \mathcal{A}$ (jest to tzw. ∂ -stabilność).

W szczególności, w teorii rozszerzeń holomorficznych możemy zawsze zakładać, że $\mathcal{F} = [\mathcal{F}]$.

(f) (X, p) jest $\mathcal{F}$ -obszarem holomorficzności wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej składowej spójnej C przestrzeni, $(C, p|_C)$ jest $\mathcal{F}|_C$ -obszarem holomorficzności.

(g) $\mathbb{C}$ jest $\mathcal{F}$ -obszarem holomorficzności dla dowolnej rodziny $\emptyset \neq \mathcal{F} \subset \mathcal{O}(\mathbb{C})$.

Propozycja 5.4.3. Niech $\varphi : (X, p) \longrightarrow (Y, q)$ będzie $\mathcal{F}$ -rozszerzeniem.

(a) Jeżeli $\mathcal{F} = \mathcal{O}(X)$, to $f^\varphi(Y) = f(X)$ dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{O}(X)$.

(b) Jeżeli $\mathcal{F} = \mathcal{H}^\infty(X) := \{f \in \mathcal{O}(X) : f \text{ jest ograniczona}\}$, to $\sup_Y |f^\varphi| = \sup_X |f|$ dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{H}^\infty(X)$.

Dowód. (a) Przypuśćmy, że dla pewnego $a \in Y$ i dla pewnej funkcji $f \in \mathcal{O}(X)$ mamy $w_0 := f^\varphi(a) \notin f(X)$. Niech $g := \frac{1}{f - w_0}$. Oczywiście $g \in \mathcal{O}(X)$. Ponieważ $g \cdot (f - z_0) \equiv 1$ na X , zatem $g^\varphi \cdot (f^\varphi - f^\varphi(a)) \equiv 1$ na Y – sprzeczność.

(b) Przypuśćmy, że dla pewnego $a \in Y$ i dla pewnej funkcji $f \in \mathcal{H}^\infty(X)$ mamy $|f^\varphi(a)| > \sup_X |f|$. Dalej dowód przebiega identycznie jak w (a) ($g \in \mathcal{H}^\infty(X)$). $\square$

Definicja 5.4.4. Powiemy, że $\mathcal{F}$ -rozszerzenie $\varphi : (X, p) \longrightarrow (Y, q)$ jest *maksymalnym $\mathcal{F}$ -rozszerzeniem* lub *$\mathcal{F}$ -obwiednią holomorficzności*, jeżeli dla dowolnego $\mathcal{F}$ -rozszerzenia $\psi : (X, p) \longrightarrow (Z, r)$ istnieje morfizm $\sigma : (Z, r) \longrightarrow (Y, q)$ taki, że $\sigma \circ \psi = \varphi$.

Obszar (X, p) nazywamy *$\mathcal{F}$ -obszarem holomorficzności*, jeżeli dla dowolnego $\mathcal{F}$ -rozszerzenia

$$\varphi : (X, p) \longrightarrow (Y, q)$$

morfizm φ jest izomorfizmem.

W przypadku, gdy $\mathcal{F} = \mathcal{O}(X)$, mówimy po prostu o *maksymalnym rozszerzeniu holomorficznym*, *obwiedni holomorficzności* i *obszarze holomorficzności*.

Propozycja 5.4.5. (a) *Maksymalne $\mathcal{F}$ -rozszerzenie obszaru (X, p) jest wyznaczone jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu.*

(b) *Jeżeli $\varphi : (X, p) \rightarrow (Y, q)$ jest maksymalnym $\mathcal{F}$ -rozszerzeniem, to Y jest $\mathcal{F}^\varphi$ -obszarem holomorficzności.*

(c) *Jeżeli $\varphi : (X, p) \rightarrow (Y, q)$ jest maksymalnym $\mathcal{F}$ -rozszerzeniem, wówczas (X, p) jest $\mathcal{F}$ -obszarem holomorficzności wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest izomorfizmem.*

Dowód. (a) Przypuśćmy, że $\varphi : (X, p) \rightarrow (Y, q)$ i $\psi : (X, p) \rightarrow (Z, r)$ są dwoma maksymalnymi $\mathcal{F}$ -rozszerzeniami. Zgodnie z definicją, istnieją morfizmy $\sigma : (Z, r) \rightarrow (Y, q)$ i $\tau : (Y, q) \rightarrow (Z, r)$ takie, że $\sigma \circ \psi = \varphi$, $\tau \circ \varphi = \psi$. Pokażemy, że σ jest izomorfizmem i $\sigma^{-1} = \tau$. Zauważmy, że $\sigma \circ \tau = \text{id}$ na $\varphi(X)$. Ponieważ każda składowa spójna przestrzeni Y przecina $\varphi(X)$, zatem z zasady identyczności dostajemy $\sigma \circ \tau = \text{id}$ na Y . Analogicznie dowodzimy, że $\tau \circ \sigma = \text{id}$ na Z .

(b) Załóżmy, że $\psi : (Y, q) \rightarrow (Z, r)$ jest $\mathcal{F}^\varphi$ -rozszerzeniem. Wówczas $\psi \circ \varphi : (X, p) \rightarrow (Z, r)$ jest $\mathcal{F}$ -rozszerzeniem. Zatem, ponieważ rozszerzenie $\varphi : (X, p) \rightarrow (Y, q)$ jest maksymalne, istnieje morfizm $\sigma : (Z, r) \rightarrow (Y, q)$ taki, że $\sigma \circ (\psi \circ \varphi) = \varphi$. Rozumując podobnie jak w (a), dostajemy $\sigma \circ \psi = \text{id}_Y$, $\psi \circ \sigma = \text{id}_Z$. W szczególności, ψ jest izomorfizmem.

(c) Implikacja $(\Rightarrow)$ jest widoczna. Aby wykazać, że zachodzi $(\Leftarrow)$, przypuśćmy, że

$$\psi : (X, p) \rightarrow (Z, r)$$

jest dowolnym $\mathcal{F}$ -rozszerzeniem. Ponieważ rozszerzenie $\varphi : (X, p) \rightarrow (Y, q)$ jest maksymalne, istnieje morfizm $\sigma : (Z, r) \rightarrow (Y, q)$ taki, że $\sigma \circ \psi = \varphi$. Wiemy, że φ jest izomorfizmem. Zatem ψ również jest izomorfizmem i $\psi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \sigma$. $\square$

Twierdzenie 5.4.6 (Thullen ⁽⁴⁾). *Dla dowolnego obszaru Riemanna $(X, p) \in \mathfrak{R}$ i dla dowolnej rodziny $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(X)$ istnieje $\mathcal{F}$ -obwiednia holomorficzności regionu (X, p) .*

Dowód. Na wstępie zdefiniujemy morfizm

$$\varphi : (X, p) \rightarrow (\mathcal{O}^\mathcal{F}, \pi^\mathcal{F})$$

gdzie $(\mathcal{O}^\mathcal{F}, \pi^\mathcal{F})$ jest snopem $\mathcal{F}$ -kiełków funkcji holomorficzych,

$$\varphi(x) := [(p(\mathbb{K}_X(x)), (f \circ p_x^{-1})_{f \in \mathcal{F}})]_{\underline{p(x)}}, \quad x \in X.$$

Bez trudu sprawdzamy, że odwzorowanie φ jest morfizmem. Zauważmy, że dla dowolnego $f \in \mathcal{F}$ odwzorowanie holomorficzne $\mathbb{F}_f \in \mathcal{O}(\mathcal{O}^\mathcal{F})$ spełnia zależność $\mathbb{F}_f \circ \varphi = f$. Tak więc, jeżeli przyjmiemy jako Y sumę składowych przestrzeni $\mathcal{O}^\mathcal{F}$, które przecinają $\varphi(X)$, i położymy $q := \pi^\mathcal{F}|_Y$, to $\varphi : (X, p) \rightarrow (Y, q)$ jest $\mathcal{F}$ -rozszerzeniem. Dla dowodu maksymalności tego rozszerzenia, niech

$$\psi : (X, p) \rightarrow (Z, r)$$

będzie dowolnym $\mathcal{F}$ -rozszerzeniem. Niech $\tilde{f} := (\varphi^*)^{-1}(f)$, $f \in \mathcal{F}$. Zdefiniujmy $\sigma : (Z, r) \rightarrow (\mathcal{O}^\mathcal{F}, \pi^\mathcal{F})$,

$$\sigma(z) := [(r(\mathbb{K}_Z(z)), (\tilde{f} \circ r_z^{-1})_{f \in \mathcal{F}})]_{\underline{r(z)}}, \quad z \in Z.$$

Łatwo sprawdzić, że σ jest morfizmem oraz że $\sigma \circ \psi = \varphi$. Pozostaje jeszcze zauważyć, że skoro każda składowa przestrzeni Z przecina $\psi(X)$, to $\sigma(Z) \subset Y$. $\square$

Obserwacja 5.4.7. Niech $\varphi : (X, p) \rightarrow (Y, q)$ będzie morfizmem skonstruowanym w dowodzie twierdzenia Thullena. Wtedy:

(a) Morfizm φ jest iniektywny wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{F}$ *słabo rozdziela punkty w X* , tzn. dla dowolnych $x', x'' \in X$ takich, że $x' \neq x''$ i $p(x') = p(x'')$, istnieją $f \in \mathcal{F}$ i $k \in \mathbb{Z}_+$ takie, że $f^{(k)}(x') \neq f^{(k)}(x'')$, innymi słowy: dla dowolnych $x', x'' \in X$, $x' \neq x''$, istnieje $f \in \mathcal{F}$ takie, że $T_{x'}f \neq T_{x''}f$. Zauważmy, że dla $(X, p) = (\Omega, \text{id})$ warunek ten jest automatycznie spełniony (dla dowolnej rodziny $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(\Omega)$).

⁽⁴⁾ Peter Thullen (1907–1996) — matematyk niemiecki.

$$(b) \ d_Y(\varphi(x)) = \inf\{d(T_x f) : f \in \mathcal{F}\}, \ x \in X.$$

Propozycja 5.4.8. Niech $(X, p) \in \mathfrak{R}$, $\emptyset \neq \mathcal{F} \subset \mathcal{O}(X)$. Wtedy NWSR:

- (i) (X, p) jest $\mathcal{F}$ -region holomorficzności;
- (ii) $\mathcal{F}$ słabo rozdziela punkty w X oraz (X, p) jest $\mathcal{F}$ -regionem istnienia, tzn. $\inf\{d(T_a f) : f \in \mathcal{F}\} = d_X(a)$, $a \in X$;
- (iii) istnieje zbiór gęsty $A \subset X$ taki, że:
 - $A = p^{-1}(p(A))$,
 - dla dowolnych $x', x'' \in A$, $x' \neq x''$, istnieje $f \in \mathcal{F}$ taka, że $T_{x'} f \neq T_{x''} f$,
 - $\inf\{d(T_x f) : f \in \mathcal{F}\} = d_X(x)$, $x \in A$.

Dowód. Korzystając z Obserwacji 5.4.7 oraz 5.3.2(h), dostajemy równoważność (i) $\iff$ (ii).

(iii) $\implies$ (ii): Jest oczywiste, że (X, p) jest $\mathcal{F}$ -obszarem istnienia. Przypuśćmy, że dla pewnych $x', x'' \in X$, takich, że $x' \neq x''$ i $p(x') = p(x'') = z_0$, mamy $T_{x'} f = T_{x''} f$ dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{F}$. Wtedy dla $f \in \mathcal{F}$ i $r := \min\{d_X(x'), d_X(x'')\}$ mamy $f(p_{x'}^{-1}(z)) = f(p_{x''}^{-1}(z))$, $z \in K(z_0, r)$ — sprzeczność. $\square$

Propozycja 5.4.9. Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie zbiorem otwartym i niech $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(\Omega)$. Wtedy (Ω, id) jest $\mathcal{F}$ -obszarem holomorficzności (w sensie Definicji 5.4.4) wtedy i tylko wtedy, gdy

(*) nie istnieją obszary $\tilde{\Omega}$, $\Omega_0 \subset \mathbb{C}^n$ takie, że $\tilde{\Omega} \not\subset \Omega$, $\emptyset \neq \Omega_0 \subset \Omega \cap \tilde{\Omega}$ oraz dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{F}$ istnieje funkcja $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\tilde{\Omega})$ taka, że $\tilde{f} = f$ na Ω_0 .

Dowód. ($\implies$): Przypuśćmy, że $\tilde{\Omega}, \Omega_0$ są takie, jak w (*). Niech $\varphi : (\Omega, \text{id}) \longrightarrow (Y, q)$ będzie maksymalnym $\mathcal{F}$ -rozszerzeniem skonstruowanym w dowodzie twierdzenia Thullena. Mamy

$$\varphi(a) = [(\Omega_0, \mathcal{F})]_{\underline{a}} = [(\tilde{\Omega}, \mathcal{F}^\varphi)]_{\underline{a}}, \quad a \in \Omega_0.$$

Zatem

$$\{[(\tilde{\Omega}, \mathcal{F}^\varphi)]_{\underline{a}} : a \in \tilde{\Omega}\} \subset Y.$$

W szczególności, $\tilde{\Omega} \subset q(Y)$. Wynika stąd, że φ nie może być izomorfizmem; sprzeczność.

($\impliedby$): Niech $\varphi : (\Omega, \text{id}) \longrightarrow (Y, q)$ będzie dowolnym $\mathcal{F}$ -rozszerzeniem holomorficznym. Mamy pokazać, że φ jest bijektywne. Wobec Obserwacji 5.4.7, problemem jest tylko surjektywność. Przypuśćmy, że φ nie jest surjektywne i niech $b \in Y$ będzie dowolnym punktem brzegowym zbioru $\varphi(\Omega)$ (korzystamy tu z faktu, że każda składowa spójna Y przecina $\varphi(\Omega)$). Niech $\tilde{\Omega} := q(\mathbb{K}_Y(b))$ i niech Ω_0 będzie dowolną składową spójną zbioru $\Omega \cap \tilde{\Omega}$. Zauważmy, że $\tilde{\Omega} \not\subset \Omega$. Dla $f \in \mathcal{F}$ niech $\tilde{f} := f^\varphi \circ q_b^{-1}$. Oczywiście $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\tilde{\Omega})$. Łatwo widać, że $\tilde{f} = f$ na Ω_0 — sprzeczność. $\square$

Wniosek 5.4.10. Niech $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ będzie otwarty. Wtedy:

- Ω jest $\mathcal{F}$ -obszarem holomorficzności względem rodziny

$$\mathcal{F} := \left\{ \Omega \ni z \longmapsto \frac{1}{z-a}, \ a \notin \Omega \right\}.$$

W szczególności, każdy podzbiór otwarty płaszczyzny zespolonej $\mathbb{C}$ jest obszarem holomorficzności.

- Jeżeli Ω jest tłusty, to jest $\mathcal{F}$ -obszarem holomorficzności względem rodziny

$$\mathcal{F} := \left\{ \Omega \ni z \longmapsto \frac{1}{z-a}, \ a \notin \overline{\Omega} \right\}.$$

W szczególności, każdy otwarty i tłusty podzbiór $\mathbb{C}$ jest $\mathcal{H}^\infty(\Omega)$ -obszarem holomorficzności.

Obserwacja 5.4.11. Niech $M \subset D$ będzie relatywnie domkniętym zbiorem polarnym w obszarze $D \subset \mathbb{C}$. Wtedy, na podstawie Wniosku 4.4.27(c), $D \setminus M$ nie jest $\mathcal{H}^\infty(D \setminus M)$ -obszarem holomorficzności.

5.5. Naturalne przestrzenie Fréchéta

Definicja 5.5.1. Niech $(X, p) \in \mathfrak{R}_\infty$ i niech $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(X)$ będzie podprzestrzenią wektorową wyposażoną w topologię przestrzeni Fréchéta. Mówimy, że $\mathcal{F}$ jest *naturalną przestrzenią Fréchéta* w $\mathcal{O}(X)$, jeżeli odwzorowanie identycznościowe $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{O}(\Omega)$ jest ciągłe, tzn. jeżeli ciąg $(f_\nu)_{\nu=1}^\infty \subset \mathcal{F}$ jest zbieżny do $f_0 \in \mathcal{F}$ w sensie topologii przestrzeni $\mathcal{F}$, to $f_\nu \rightarrow f_0$ niemal jednostajnie w X .

Przykład 5.5.2. Standardowe przykłady naturalnych przestrzeni Fréchéta:

- $\mathcal{O}(X)$ z topologią niemal jednostajnej zbieżności;
- $\mathcal{H}^\infty(X)$ z topologią jednostajnej zbieżności;
- $\mathcal{A}^k(\Omega) := \{f \in \mathcal{O}(\Omega) : \forall j \leq k : f^{(j)} \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})\}$ ($k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$) z topologią niemal jednostajnej zbieżności w $\overline{\Omega}$, gdzie $(X, p) = (\Omega, \text{id})$;
- $L_h^p(\Omega)$ z topologią indukowaną z $L^p(\Omega)$ ($1 \leq p < +\infty$).

Propozycja 5.5.3. Niech $\mathcal{F}$ będzie naturalną przestrzenią Fréchéta w $\mathcal{O}(X)$. Wtedy NWSR:

- (i) (X, p) jest $\mathcal{F}$ -regionem holomorficzności;
- (ii) $\mathfrak{N}(\mathcal{F}) := \{f \in \mathcal{F} : f \text{ jest nieprzedłużalna}\} \neq \emptyset$;
- (iii) $\mathfrak{N}(\mathcal{F})$ jest zbiorem drugiej kategorii Baire'a w $\mathcal{F}$.

Dowód. Jedyny problem to (i) $\implies$ (iii). Niech $A \subset X$ będzie dowolnym zbiorem przeliczalnym gęstym w X . Zdefiniujmy

$$\mathcal{F}_{a,r} := \{f \in \mathcal{F} : d(T_a f) \geq r\}, \quad a \in A, \quad r > 0, \quad \mathcal{G}_{x',x''} := \{f \in \mathcal{F} : T_{x'} f = T_{x''} f\}, \quad x', x'' \in X.$$

Na podstawie Propozycji 5.4.8 mamy

$$\mathcal{F} \setminus \mathfrak{N}(\mathcal{F}) = \bigcup_{\substack{a \in A \\ \exists r > d_X(a)}} \mathcal{F}_{a,r} \cup \bigcup_{\substack{x', x'' \in A \\ x' \neq x'', p(x')=p(x'')}} \mathcal{G}_{x',x''}.$$

Zauważmy, że $\mathcal{G}_{x',x''}$ jest domkniętą podprzestrzenią $\mathcal{O}(X)$ oraz $\mathcal{G}_{x',x''} \subsetneq \mathcal{O}(X)$ dla $x' \neq x''$. Stąd, wobec twierdzenia Banacha, $\mathcal{G}_{x',x''}$ jest I kategorii Baire'a w $\mathcal{O}(X)$.

Niech $r > d_X(a)$. Wtedy $\mathcal{F}_{a,r}$ jest podprzestrzenią wektorową w $\mathcal{F}$ oraz $\mathcal{F}_{a,r} \subsetneq \mathcal{F}$. W przestrzeni $\mathcal{H}$ zadajemy topologię: ciąg $(f_k)_{k=1}^\infty \subset \mathcal{F}_{a,r}$ jest zbieżny do $f_0 \in \mathcal{F}_{a,r}$, jeżeli $f_k \rightarrow f_0$ w sensie topologii przestrzeni $\mathcal{F}$ oraz $T_a f_k \rightarrow T_a f_0$ niemal jednostajnie na $K(p(a), r)$. Jest to topologia przestrzeni Fréchéta (por. dowód Propozycji 5.5.7). Przy tak przyjętej topologii, odwzorowanie identycznościowe $\mathcal{F}_{a,r} \rightarrow \mathcal{F}$ jest oczywiście ciągłe. W szczególności, na podstawie twierdzenia Banacha, $\mathcal{F}_{a,r}$ jest zbiorem pierwszej kategorii w $\mathcal{F}$. $\square$

Wniosek 5.5.4. Wobec Wniosku 5.4.10, dla dowolnego zbioru otwartego $\Omega \subset \mathbb{C}$, zbiór

$$\{f \in \mathcal{O}(\Omega) : f \text{ jest nieprzedłużalna poza } \Omega\}$$

jest drugiej kategorii Baire'a w $\mathcal{O}(\Omega)$.

Oczywiście powyższy wniosek nie daje przepisu na znalezienie funkcji nieprzedłużalnych. Funkcje takie można znaleźć efektywnie.

Przykład 5.5.5. Niech $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ będzie otwarty.

(a) Niech $(c_k)_{k=1}^\infty \subset \Omega$ będzie dowolnym ciągiem gęstym, w którym każdy wyraz powtarza się nieskończenie wiele razy. Niech $\Omega = \bigcup_{j=1}^\infty K_j$, $K_j \subset \text{int } K_{j+1}$, K_j – zwarty, $j \in \mathbb{N}$. Niech a_j będzie dowolnym wyrazem ciągu $(c_k)_{k=1}^\infty$, który leży w $K(c_j, d_\Omega(c_j)) \setminus K_j$, $j \in \mathbb{N}$. Oczywiście, ciąg $(a_j)_{j=1}^\infty$ nie ma punktu skupienia w Ω . Zauważmy, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ zbiór $\{j \in \mathbb{N} : a_j \in K(c_k, d_\Omega(c_k))\}$ jest nieskończony. Z twierdzenia Weierstrassa wynika istnienie funkcji $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $f \not\equiv 0$, takie, że $f(a_j) = 0$, $j \in \mathbb{N}$. Teraz z zasady identyczności wynika, że jeżeli $\Omega_0, \tilde{\Omega}$ są takie, jak w (*), to nie jest możliwe, aby dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ istniała funkcja meromorficzna $\tilde{f} \in \mathcal{M}(\tilde{\Omega})$ taka, że $\tilde{f} = f$ na Ω_0 .

(b) Niech $(a_k)_{k=1}^\infty$ będzie dowolnym ciągiem gęstym i niech $c_k \in \partial\Omega$ będzie taki, że $|c_k - a_k| = d_\Omega(a_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Niech $(b_n)_{n=1}^\infty$ powstaje z $(c_k)_{k=1}^\infty$ przez odrzucenie wyrazów powtarzających się. Ustalmy $0 < |c| < 1/2$ i zdefiniujemy

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n}{z - b_n}, \quad z \in \Omega.$$

Dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset\subset \Omega$ mamy

$$\left| \frac{c^n}{z - b_n} \right| \leq \frac{|c|^n}{d_\Omega(K)}, \quad z \in K, \quad n \in \mathbb{N},$$

co daje zbieżność niemal jednostajną szeregu. Dla dowolnego c_k niech b_ℓ będzie takie, że $|c_k - b_\ell| = d_\Omega(c_k)$. Pokażemy, że $\lim_{[c_k, b_\ell] \ni z \rightarrow b_\ell} |f(z)| = +\infty$. Dla $z \in [c_k, b_\ell]$ mamy:

$$|f(z)| \geq \frac{|c|^\ell}{|z - b_\ell|} - \sum_{n=\ell+1}^{\infty} \frac{|c|^n}{|z - b_n|} - \sum_{n=1}^{\ell-1} \frac{|c|^n}{|z - b_n|} \geq \frac{|c|^\ell}{|z - b_\ell|} \frac{1 - 2|c|}{1 - |c|} - \sum_{n=1}^{\ell-1} \frac{|c|^n}{|z - b_n|}.$$

Twierdzenie* 5.5.6. *Dowolny region Riemanna jest regionem holomorficzności.*

Propozycja 5.5.7 (Ciągłość przedłużania). *Niech $(X, p), (Y, q) \in \mathfrak{R}_\infty$, niech $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(X)$ będzie naturalną przestrzenią Frécheta i niech $\varphi : (X, p) \rightarrow (Y, q)$ będzie $\mathcal{F}$ -rozszerzeniem. W $\mathcal{F}^\varphi$ wprowadzamy topologię: ciąg $(f_k^\varphi)_{k=1}^\infty$ jest zbieżny do f_0^φ , jeżeli $f_k \rightarrow f_0$ w sensie topologii przestrzeni $\mathcal{F}$ oraz $f_k^\varphi \rightarrow f_0^\varphi$ niemal jednostajnie w Y .*

Wtedy $\mathcal{F}^\varphi$ z tak wprowadzoną topologią jest naturalną przestrzenią Frécheta w $\mathcal{O}(Y)$, a operator przedłużania $\mathcal{F} \ni f \mapsto f^\varphi \in \mathcal{F}^\varphi$ jest izomorfizmem topologicznym.

W szczególności, dla $\mathcal{F} = \mathcal{O}(X)$ (z topologią niemal jednostajnej zbieżności w X), operator przedłużania $\mathcal{O}(X) \ni f \mapsto f^\varphi \in \mathcal{O}(Y)$ jest izomorfizmem w topologiach niemal jednostajnej zbieżności.

Dowód. Niech $(f_k^\varphi)_{k=1}^\infty \subset \mathcal{F}^\varphi$ będzie ciągiem Cauchy'ego w topologii zadanej na $\mathcal{F}^\varphi$. Wówczas $(f_k)_{k=1}^\infty$ jest ciągiem Cauchy'ego w $\mathcal{F}$. Zatem, $f_k \rightarrow f_0$ w $\mathcal{F}$ dla pewnego $f_0 \in \mathcal{F}$. Z drugiej strony $(f_k^\varphi)_{k=1}^\infty \subset \mathcal{O}(Y)$ jest ciągiem Cauchy'ego w topologii niemal jednostajnej zbieżności w Y . Zatem $f_k^\varphi \rightarrow g_0$ niemal jednostajnie w Y . Wiemy, że $f_k^\varphi \circ \varphi = f_k$, $k \in \mathbb{N}$. Korzystając z tego, że zbieżność w $\mathcal{F}$ pociąga za sobą zbieżność punktową w X , wnioskujemy, że $g_0 \circ \varphi = f_0$. Wynika stąd, że $g_0 = f_0^\varphi$, a stąd $f_k^\varphi \rightarrow f_0^\varphi$ w $\mathcal{F}^\varphi$. $\square$

Twierdzenie* 5.5.8 (Twierdzenie Gunninga–Narasimhana; zob. [Gun-Nar 1967]). *Dla dowolnej niezwanej jednowymiarowej rozmaitości X istnieje odwzorowanie lokalnie biholomorficzne $p : X \rightarrow \mathbb{C}$ takie, że $(X, p) \in \mathfrak{R}$.*

Geometria hiperboliczna koła jednostkowego

6.1. Geometria hiperboliczna koła jednostkowego

Zasadniczym celem tego rozdziału jest przedstawienie najbardziej elementarnego przypadku budowy teorii holomorficznie niezmienniczych pseudoodległości. Główna idea tej teorii polega na przyporządkowaniu każdemu obszarowi $D \subset \mathbb{C}$ pewnej pseudoodległości $d_D : D \times D \rightarrow \mathbb{R}_+$ w ten sposób, aby dla dowolnego odwzorowania holomorficznego $f : D \rightarrow G$ zachodził związek

$$d_G(f(z'), f(z'')) \leq d_D(z', z''), \quad z', z'' \in D.$$

W szczególności, każde odwzorowanie biholomorficzne $f : D \rightarrow G$ jest izometrią przestrzeni (D, d_D) i (G, d_G) . Dodatkowo, żądamy, aby odległość $d_{\mathbb{D}}$ była w pewien sposób znormalizowana, np. $d_{\mathbb{D}} = \mathbf{m}$ (zob. poniżej). Mając takie przyporządkowanie, $D \mapsto d_D$, można mieć nadzieję, że pewne własności przestrzeni (pseudo)metrycznej (D, d_D) ilustrują własności przestrzeni $(D, \mathcal{O}(D))$ (np. tak, jak to było w lemacie Schwarza – Picka).

Przypomnijmy definicje

$$\begin{aligned} h_a(z) &:= \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad a \in \mathbb{D}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{1/\bar{a}\}, \\ \mathbf{m}(z', z'') &:= \left| \frac{z' - z''}{1 - \bar{z}'z''} \right| = |h_{z''}(z')|, \quad z', z'' \in \mathbb{D}, \\ \gamma(z) &:= \frac{1}{1 - |z|^2} = h'_z(z), \quad z \in \mathbb{D}. \end{aligned}$$

oraz lemat Schwarza–Picka (Lemat 2.3.15):

Lemat 6.1.1 (Lemat Schwarza-Picka). *Niech $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. Wtedy:*

- (a) $\mathbf{m}(f(z'), f(z'')) \leq \mathbf{m}(z', z'')$, $z', z'' \in \mathbb{D}$.
- (b) $\gamma(f(z))|f'(z)| \leq \gamma(z)$, $z \in \mathbb{D}$.
- (c) *NWSR:*
 - (i) $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$;
 - (ii) $\mathbf{m}(f(z'), f(z'')) = \mathbf{m}(z', z'')$, $z', z'' \in \mathbb{D}$;
 - (iii) $\mathbf{m}(f(z'_0), f(z''_0)) = \mathbf{m}(z'_0, z''_0)$ dla pewnych $z'_0, z''_0 \in \mathbb{D}$, $z'_0 \neq z''_0$;
 - (iv) $\gamma(f(z))|f'(z)| = \gamma(z)$, $z \in \mathbb{D}$;
 - (v) $\gamma(f(z_0))|f'(z_0)| = \gamma(z_0)$ dla pewnego $z_0 \in \mathbb{D}$.

Ćwiczenie 6.1.2. Udowodnić następujące własności funkcji $\mathbf{m}$ i γ .

- (1) $\mathbf{m} \in C^\infty(\mathbb{D} \times \mathbb{D} \setminus \{(z, z) : z \in \mathbb{D}\})$, $\mathbf{m}^2 \in C^\infty(\mathbb{D} \times \mathbb{D})$, $\gamma \in C^\infty(\mathbb{D})$.
- (2) $\ln \mathbf{m}(\cdot, a), \ln \mathbf{m}(a, \cdot) \in \mathcal{SH}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{H}(\mathbb{D} \setminus \{a\})$, $\ln \gamma \in \mathcal{SH}(D)$.
- (3)

$$\lim_{\substack{z', z'' \rightarrow a \\ z' \neq z''}} \frac{\mathbf{m}(z', z'')}{|z' - z''|} = \gamma(a), \quad a \in \mathbb{D}.$$

Lemat 6.1.3. Dla dowolnych $a, b, c \in \mathbb{D}$, $a \neq b \neq c \neq a$, mamy

$$\mathbf{m}(a, b) < \mathbf{m}(a, c) + \mathbf{m}(c, b). \tag{6.1.7}$$

W szczególności, $\mathbf{m} : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow [0, 1)$ jest odległością — jest to tzw. odległość Möbiusa.

Dowód. Na wstępie zauważmy, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{D}$, $a \neq b$, istnieje jedyny automorfizm $h = h_{a,b} \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ taki, że $h(a) = 0$ i $h(b) \in (0, 1)$. Ponieważ $\mathbf{m}$ jest niezmiennicza względem $\text{Aut}(\mathbb{D})$, możemy założyć, że $a = 0$ oraz $b \in (0, 1)$. Wtedy (6.1.7) ma postać

$$b < |c| + \left| \frac{c-b}{1-cb} \right|, \quad c \in \mathbb{D} \setminus \{0, b\}. \quad \square$$

Ćwiczenie 6.1.4. Udowodnić, że:

$$B_{\mathbf{m}}(a, r) := \{z \in \mathbb{D} : \mathbf{m}(a, z) < r\} = h_{-a}(K(r)) = K\left(\frac{a(1-r^2)}{1-r^2|a|^2}, \frac{r(1-|a|^2)}{1-r^2|a|^2}\right), \quad a \in \mathbb{D}, 0 < r < 1.$$

Obserwacja 6.1.5. (a) Topologia generowana przez odległość $\mathbf{m}$ jest identyczna z topologią euklidesową koła jednostkowego.

(b) Przestrzeń $(\mathbb{D}, \mathbf{m})$ jest zupełna.

(c) Silna nierówność trójkąta (6.1.7) implikuje, że $\mathbf{m}$ -odcinek

$$[a, b]_{\mathbf{m}} := \{z \in \mathbb{D} : \mathbf{m}(a, z) + \mathbf{m}(z, b) = \mathbf{m}(a, b)\}$$

składa się jedynie z końców, co oznacza, że geometria wyznaczona przez odległość $\mathbf{m}$ jest trywialna.

Dla drogi $\alpha : [a, b] \rightarrow D$ zdefiniujemy jej γ -długość $L_{\gamma}(\alpha)$ wzorem

$$L_{\gamma}(\alpha) := \int_a^b \gamma(\alpha(t)) |\alpha'(t)| dt.$$

Zauważmy, że $L_{\gamma}(\alpha)$ nie zależy od zmiany parametryzacji i orientacji drogi α oraz $L_{\gamma}(\alpha) \geq \mathbf{d}(\alpha)$ (ponieważ $\gamma \geq 1$). Na podstawie lematu Schwarza–Picka mamy

Obserwacja 6.1.6. Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ mamy $L_{\gamma}(f \circ \alpha) \leq L_{\gamma}(\alpha)$. W szczególności, γ -długość jest niezmiennicza względem $\text{Aut}(\mathbb{D})$.

Zdefiniujmy

$$\mathbf{p}(z', z'') := \inf\{L_{\gamma}(\alpha) : \alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}, \alpha \text{ droga}, z' = \alpha(0), z'' = \alpha(1)\}, \quad z', z'' \in \mathbb{D}.$$

Zauważmy, że $\mathbf{p}(z', z'') \geq \|z' - z''\|$, $z', z'' \in \mathbb{D}$.

Obserwacja 6.1.7. $\mathbf{p} : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}_+$ jest odległością oraz dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ mamy

$$\mathbf{p}(f(z'), f(z'')) \leq \mathbf{p}(z', z''), \quad z', z'' \in \mathbb{D}.$$

W szczególności, $\mathbf{p}$ jest niezmiennicza względem $\text{Aut}(\mathbb{D})$.

Jest rzeczą naturalną zapytać, czy dla danych $a, b \in \mathbb{D}$, $a \neq b$, istnieje droga łącząca a i b taka, że $\mathbf{p}(a, b) = L_{\gamma}(\alpha)$ — drogę taką będziemy nazywać *bs γ -geodezyjną* dla (a, b) . Jeżeli taka droga istnieje, to można dalej zapytać, czy jest jedyna.

Dla $0 < s < 1$ niech $\alpha_s(t) := ts$, $0 \leq t \leq 1$, i.e. $\alpha_s \simeq [0, s]$. Dla $a, b \in \mathbb{D}$, $a \neq b$, niech $\alpha_{a,b} := h_{a,b}^{-1} \circ \alpha_{h(b)}$, gdzie $h_{a,b} \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ został zdefiniowany w dowodzie Lematu 6.1.3. Zauważmy, że $\alpha_{a,b}^* \subset C_{a,b}$, gdzie $C_{a,b}$ jest jedynym okręgiem przechodzącym przez a i b oraz prostopadłym do $\mathbb{T}$; innymi słowy $C_{a,b} := h_{a,b}^{-1}(\mathbb{R})$.

Lemat 6.1.8. Dla $a, b \in \mathbb{D}$, $a \neq b$, mamy

$$\mathbf{p}(a, b) = L_{\gamma}(\alpha_{a,b}) = \text{tgh}^{-1}(\mathbf{m}(a, b)). \quad (6.1.8)$$

Ponadto, $\alpha_{a,b}$ jest jedyną γ -geodezyjną dla (a, b) .

Przypomnijmy, że

$$\operatorname{tgh}^{-1}(t) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t}, \quad (\operatorname{tgh}^{-1})'(t) = \frac{1}{1-t^2} = \gamma(t), \quad 0 \leq t < 1.$$

Dowód. Możemy założyć, że $a = 0$, $b \in (0, 1)$. W konsekwencji, $\alpha_{a,b} = \alpha_b$. Zauważmy, że

$$\mathbf{p}(0, b) \leq L_\gamma(\alpha_b) = \int_0^b \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+b}{1-b} = \operatorname{tgh}^{-1}(\mathbf{m}(0, b)).$$

Z drugiej strony, jeżeli $\alpha = u + iv : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}$ jest drogą łączącą 0 i b , to

$$L_\gamma(\alpha) \geq \int_0^1 \frac{u'(t)}{1-u^2(t)} dt = \frac{1}{2} \ln \frac{1+b}{1-b}. \quad (6.1.9)$$

Jeżeli $\mathbf{p}(0, b) = L_\gamma(\alpha)$, to w (6.1.9) mamy równość, co oznacza, że $v \equiv 0$, $u : [0, 1] \rightarrow [0, b]$ i u jest rosnącą, a więc $\alpha \simeq \alpha_b$ (w sensie zmiany parametryzacji). $\square$

Wniosek 6.1.9. (a) $\mathbf{p}$ jest odległością oraz $\mathbf{m} \leq \mathbf{p}$.

(b) Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ jeżeli $\mathbf{p}(f(z'_0), f(z''_0)) = \mathbf{p}(z'_0, z''_0)$ dla pewnych $z'_0, z''_0 \in \mathbb{D}$, $z'_0 \neq z''_0$, to $f \in \operatorname{Aut}(\mathbb{D})$.

(c) $B_{\mathbf{p}}(a, r) = B_{\mathbf{m}}(a, \operatorname{tgh}(r))$, $a \in \mathbb{D}$, $r > 0$. W szczególności:

- topologia generowana przez $\mathbf{p}$ jest identyczna z topologią euklidesową $\mathbb{D}$,
- $(\mathbb{D}, \mathbf{p})$ jest przestrzenią zupełną.

(d)

$$\lim_{\substack{z', z'' \rightarrow a \\ z' \neq z''}} \frac{\mathbf{p}(z', z'')}{|z' - z''|} = \gamma(a), \quad a \in \mathbb{D}.$$

(e) $[a, b]_{\mathbf{p}} = \alpha_{a,b}^*$, tzn. $\mathbf{p}$ -odcinek jest identyczny z obrazem geometrycznym γ -geodezyjnej. W szczególności, $\mathbf{p}(0, s) = \mathbf{p}(0, t) + \mathbf{p}(t, s)$, $0 \leq t \leq s < 1$.

Odległość $\mathbf{p}$ nosi nazwę *odległości Poincarého (hiperbolicznej)*. Przestrzeń $(\mathbb{D}, \mathbf{p})$ stanowi standardowy model geometrii nieeuklidesowej.

Niech $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}$ będzie krzywą. Zdefiniujemy

$$L_{\mathbf{p}}(\alpha) := \sup \left\{ \sum_{j=1}^N \mathbf{p}(\alpha(t_{j-1}), \alpha(t_j)) : N \in \mathbb{N}, 0 = t_0 < \dots < t_N = 1 \right\}.$$

Liczba $L_{\mathbf{p}}(\alpha) \in [0, +\infty]$ nosi nazwę $\mathbf{p}$ -długości krzywej α . Jeżeli $L_{\mathbf{p}}(\alpha) < +\infty$, to mówimy, że α jest $\mathbf{p}$ -prostowalna. Zauważmy, że $L_{\mathbf{p}}(\alpha) \geq \mathbf{p}(\alpha(0), \alpha(1))$.

Obserwacja 6.1.10. (a) Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ mamy $L_{\mathbf{p}}(f \circ \alpha) \leq L_{\mathbf{p}}(\alpha)$. W szczególności, wielkość $L_{\mathbf{p}}$ jest niezmiennicza względem $\operatorname{Aut}(\mathbb{D})$.

(b) Korzystając z Wniosku 6.1.9(e), dostajemy $L_{\mathbf{p}}(\alpha_{a,b}) = \mathbf{p}(a, b)$.

Wniosek 6.1.11.

$$\mathbf{p}(a, b) = \mathbf{p}^i(a, b) := \inf \{ L_{\mathbf{p}}(\alpha) : \alpha \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{D}), \alpha(0) = a, \alpha(1) = b \}, \quad a, b \in \mathbb{D}.$$

Te same procedury możemy powtórzyć dla odległości $\mathbf{m}$: najpierw definiujemy $L_{\mathbf{m}}(\alpha)$ (zauważmy, że Obserwacja 6.1.10(a) pozostaje prawdziwa), a następnie definiujemy

$$\mathbf{m}^i(a, b) := \inf \{ L_{\mathbf{m}}(\alpha) : \alpha \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{D}), \alpha(0) = a, \alpha(1) = b \}, \quad a, b \in \mathbb{D}.$$

Lemat 6.1.12. (a) Dla dowolnej krzywej $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}$ mamy $L_{\mathbf{m}}(\alpha) = L_{\mathbf{p}}(\alpha)$. W szczególności,

$$\mathbf{m}^i = \mathbf{p}.$$

Ponadto, α jest $\mathbf{m}$ - lub $\mathbf{p}$ -prostowalna wtedy i tylko wtedy, gdy α jest prostowalna w sensie euklidesowym.

(b) Dla dowolnej drogi $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}$ mamy

$$L_{\mathbf{p}}(\alpha) = L_{\gamma}(\alpha). \quad (6.1.10)$$

Dowód. (a) Dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset \subset \mathbb{D}$ istnieje $M > 0$ takie, że

$$\frac{1}{M}|z' - z''| \leq \mathbf{m}(z', z'') \leq \mathbf{p}(z', z'') \leq M|z' - z''|, \quad z', z'' \in K.$$

W taki razie, dla dowolnej krzywej $\alpha : [0, 1] \rightarrow K$ mamy

$$\frac{1}{M}\ell(\alpha) \leq L_{\mathbf{m}}(\alpha) \leq L_{\mathbf{p}}(\alpha) \leq M\ell(\alpha),$$

Wobec Ćwiczenia 6.1.2(3) i Wniosku 6.1.9(d), dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset \subset \mathbb{D}$ i $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że

$$0 \leq \mathbf{p}(z', z'') - \mathbf{m}(z', z'') \leq \varepsilon|z' - z''|, \quad z', z'' \in K, \quad |z' - z''| \leq \delta,$$

co implikuje, że $L_{\mathbf{m}}(\alpha) = L_{\mathbf{p}}(\alpha)$ (por. Lemat 2.5.2(a)).

(b) Możemy założyć, że $\alpha \in C^1$. Korzystając z Wniosku 6.1.9(d)), wnioskujemy, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\eta > 0$ takie, że

$$\left| \frac{\mathbf{p}(\alpha(t'), \alpha(t''))}{|t' - t''|} - \gamma(\alpha(t'))|\alpha'(t')| \right| \leq \varepsilon, \quad 0 \leq t', t'' \leq 1, \quad |t' - t''| \leq \eta,$$

co daje (6.1.10). □

Ćwiczenie 6.1.13. Niech μ oznacza miarę daną wzorem

$$\mu(A) = \int_A \gamma^2(z) d\mathcal{L}^2(z), \quad A \in \mathcal{L}_2.$$

(a) Udowodnić, że μ jest niezmiennicza względem $\text{Aut}(\mathbb{D})$.

(b) Niech T oznacza $\mathbf{p}$ -trójkąt o wierzchołkach $a, b, c \in \mathbb{D}$, tzn. T obszar wyznaczony przez $C_{a,b}$, $C_{b,c}$ i $C_{c,a}$. Udowodnić, że $\mu(T) = \frac{1}{4}(\pi - (\alpha + \beta + \gamma))$, gdzie α, β, γ oznaczają kąty T .

Oznaczenia

Rozdział 1

$\operatorname{Re} z$	3
$\operatorname{Im} z$	3
$\bar{z}$	3
$ $	3
$K(a, r) := \{z \in \mathbb{C} : z - a < r\}$, $0 < r \leq +\infty$, $K(a, +\infty) := \mathbb{C}$, $K(r) := K(0, r)$, $\mathbb{D} := K(1)$	3
$C(a, r) := \{z \in \mathbb{C} : z - a = r\} = \partial K(a, r)$, $\mathbb{T} := C(1)$	3
$\bar{K}(a, r) := \{z \in \mathbb{C} : z - a \leq r\}$, $0 \leq 0 < +\infty$, $\bar{K}(a, 0) := \{a\}$, $\bar{K}(r) := \bar{K}(0, r)$	3
$\mathbb{A}(a, r_-, r_+) := \{z \in \mathbb{C} : r_- < z - a < r_+\}$	3
$\arg$	3
Arg	4
$\sqrt[n]{z}$	4
$\mathbb{C}_* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$	4
$\hat{\mathbb{C}}$	4
$\mathbb{H}^+ := \{x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$	6
$\exp z$	7
$\cos z$	7
$\sin z$	7
$\operatorname{tg} z$	8
$\operatorname{ctg} z$	8
$\sinh z$	8
$\cosh z$	8
$\log z := \{w \in \mathbb{C} : e^w = z\}$	8
$\operatorname{Log} z := \ln z + i \operatorname{Arg} z$	8
$a^b := \{e^{bw} : w \in \log a\}$	8

Rozdział 2

$f'_{\mathbb{R}}(a)$	11
$\frac{\partial f}{\partial z}(a) := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) - i \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right)$	11

$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) + i \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right)$	11
$f'(a)$	11
$f'_\mathbb{C}(a)$	11
$\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$	11
$\mathcal{P}(\mathbb{C})$	12
$\mathcal{R}(\mathbb{C})$	12
$\ell(\gamma)$	12
$\ \varphi\ _A := \sup\{ \varphi(z) : z \in A\}$	12
$\text{Ind}_\gamma(a)$	13
$\mathcal{O}(\Omega)$	18
$T_a f$	19
$d(T_a f)$	19
$K^{(r)} := \bigcup_{a \in K} \overline{K}(a, r)$	23
$d_\Omega(a) := \sup\{r > 0 : K(a, r) \subset \Omega\}$	23
$d_\Omega(A) := \inf\{d_\Omega(a) : a \in A\}$	23
$L_h^p(\Omega) := L^p(\Omega) \cap \mathcal{O}(\Omega)$	24
$\mathcal{H}^\infty(\Omega)$	24
$\text{Aut}(D)$	26
$\mathbf{m}(z', z'') := \left \frac{z' - z''}{1 - \bar{z}' z''} \right $	26
$\gamma(z) := \frac{1}{1 - z ^2}$	26
$\mathcal{O}^*(\Omega) := \{f \in \mathcal{O}(\Omega) : f^{-1}(0) = \emptyset\}$	29
$\mathcal{O}(M)$	31
$\mathcal{O}(M, N)$	31
$\mathcal{O}(\Omega), \Omega \subset \widehat{\mathbb{C}}$	31
$\text{res}_a f$	34
$\text{res}_\infty f$	34
$\text{ord}_a f$	35
$\mathcal{M}(D)$	36
$S(f)$	36
$\mathcal{M}(\Omega)$	36
$\text{Aut}(\mathbb{C})$	37
$\text{Aut}_{\mathcal{H}}(\mathbb{C})$	37
$\mathbb{H}_m := \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z > m\}$	41
$\mathcal{D}(\mathcal{L})$	41
$m(f)$	41
$\mathcal{L}(f)$	42

Rozdział 3

$\text{Bih}(D_1, D_2)$	50
------------------------	----

$\text{Aut}(D)$	50
-----------------------	----

Rozdział 4

$\mathcal{H}(\Omega)$	67
$\Delta h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$	67
$\mathcal{H}(\Omega)$	67
$\Delta h = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 h}{\partial x_j^2}$	67
$P(u; a, r; z)$	68
$J(u; a, r) := P(u; a, r; a)$	68
$P(z, \zeta) := \frac{ \zeta ^2 - z ^2}{ \zeta - z ^2}$	68
$\mathcal{SH}(\Omega)$	74
$\mathcal{C}^\uparrow(\Omega)$	74
$\mathcal{SH}(\Omega)$	74
$A(u; a, r)$	77

Rozdział 5

$\Re$	89
$\Re_c$	89
$\Re_\infty$	89
$\Gamma(T, (X, p))$	89
$\mathbb{K}_X(a, r)$	90
$d_X(a)$	90
$\mathbb{K}_X(a)$	90
$\sigma_X = \sigma_{(X, p)}$	91
$f^{(k)}(a)$	94
$d(T_a f)$	94
$\tilde{\mathcal{O}}_a^I$	95
$\mathcal{O}_a^I$	95
$\mathbb{V}(\hat{f}_a, U)$	95
φ^*	97
f^φ	97
$\mathcal{F}^\varphi$	97
$\mathcal{H}^\infty(X)$	97
$\mathcal{A}^k(\Omega)$	100

Rozdział 6

$B_{\mathbf{m}}(a, r) := \{z \in \mathbb{D} : \mathbf{m}(a, z) < r\}$	104
$\{z \in \mathbb{D} : \mathbf{m}(a, z) + \mathbf{m}(z, b) = \mathbf{m}(a, b)\}$	104
$L_{\gamma}(\alpha) := \int_a^b \gamma(\alpha(t)) \alpha'(t) dt$	104
$\mathbf{p}(z', z'') := \inf\{L_{\gamma}(\alpha) : \alpha : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{D}, \alpha \text{ droga}, z' = \alpha(0), z'' = \alpha(1)\}$	104
$C_{a,b} := h_{a,b}^{-1}(\mathbb{R})$	104
$[a, b]_{\mathbf{p}}$	105
$L_{\mathbf{p}}(\alpha)$	105
$\mathbf{p}^i$	105
$L_{\mathbf{m}}(\alpha)$	105
$\mathbf{m}^i$	105

Literatura cytowana

- [Bou 1965] N. Bourbaki, *Topologie générale*, Hermann, Paris, 1965.
- [Cal-Ros 1954] E. Calabi, M. Rosenlicht, *Complex analytic manifolds without countable base*, Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1954), 335–340.
- [Die 1944] J. Dieudonné, *Une généralisation des espaces compacts*, J. Math. Pure Appl. 23 (1944), 65–76.
- [Gun-Nar 1967] R.C. Gunning, R. Narasimhan, *Immersion of open Riemann surfaces*, Math. Ann. 174 (1967), 103–108.
- [Lej 1957] F. Leja, *Teoria funkcji analitycznych*, PWN, Warszawa, 1957. PWN, Warszawa, 1971.
- [Min-Sch 1983] D. Minda, G. Schober, *Another elementary approach to the theorems of Landau, Montel, Picard and Schottky*, Complex Analysis 2 (1983), 157–164.
- [Rad 1925] T. Radó, *Über den Begriff der Riemannschen Fläche*, Acta Univ. Szeged 2, 1925.

Indeks nazwisk

- Łojasiewicz, 64
- Ahlfors, 47
- Arzela, 27
- Ascoli, 27
- Carathéodory, 53
- Casorati, 36
- Cauchy, 7, 11, 13, 15–17, 20, 21, 23, 28
- Christoffel, 53
- Dirichlet, 70
- Euler, 7, 41, 63
- Fatou, 64
- Fréchet, 11, 100
- Goursat, 15, 17, 20, 21
- Green, 13, 16
- Hölder, 24
- Hadamard, 51
- Harnack, 73
- Hartogs, 77
- Hurwitz, 46
- Jensen, 69
- Jordan, 15, 38
- Koebe, 83
- Laplace, 41
- Laurent, 32
- Lindelöf, 63
- Liouville, 25, 48, 82
- Mergeljan, 55
- Mittag-Leffler, 56, 61, 62
- Moivre, 4
- Montel, 27, 46
- Morera, 20
- Oka, 83
- Osgood, 53
- Picard, 49
- Pick, 26, 103
- Poincaré, 92
- Poisson, 68, 69
- Rademacher, 64
- Riemann, 4, 11, 28, 31, 34, 35, 52, 63
- Riesz, F., 69
- Riesz, M., 69
- Rouché, 45
- Runge, 54
- Schottky, 46
- Schwarz, 25, 26, 28, 47, 69, 84, 103
- Sochocki, 36
- Stirling, 61
- Taylor, 19
- Thullen, 98
- Vitali, 27
- Volterra, 92
- Weierstrass, 22, 36, 57, 61, 62
- Żukowski, 9

Indeks

średnia całkowa, 68, 77

argument, 3
— główny, 4

atlas, 30
— maksymalny, 31

biegun, 34
— logarytmiczny, 72
— w ∞ , 34

ciągłość przedłużania, 101

cykl, 28
— homologiczny zera, 29

część
— główna bieguna, 34
— główna bieguna w ∞ , 34
— osobliwa szeregu Laurenta, 32
— regularna szeregu Laurenta, 32
— rzeczywista, 3
— urojona, 3

długość krzywej, 12

∂ -stabilność, 97
dowolna przedłużalność, 94
droga, 12

$\mathcal{F}$ -
— obszar holomorficzności, 97
— obwiednia holomorficzności, 97
— rozszerzenie, 97

funkcja
— d -krotna, 50
— analityczna, 96
— analityczna dowolnie przedłużalna, 96
— całkowita, 18
— harmoniczna, 67
— harmoniczna sprzężona, 67
— hiperboliczne, 8
— holomorficzna, 18, 31
— klasy Hartogsa, 77
— meromorficzna, 36
— odwrotna do funkcji analitycznej, 96
— subharmoniczna, 74
— wykładnicza, 7
— ζ Riemanna, 63
— Żukowskiego, 9

gałąź jednoznaczna, 4

— argumentu, 4
— pierwiastka, 4

γ -
— długość, 104
— geodezyjna, 104

granica
— katowa, 64
— radialna, 64

holomorficzność w ∞ , 31

homografia, 5
— elementarna, 5
homotetia, 5

I -kielek, 95
indeks punktu
— względem drogi zamkniętej, 13
— względem krzywej zamkniętej, 14
inwersja, 5
izolowany punkt osobliwy, 34
— funkcji harmonicznej, 72
izomorfizm, 96

jądro
— Poissona, 68

klasyczne twierdzenie o monodromii, 93
koło maksymalne, 90
kosinus, 7
— hiperboliczny, 8
kotangens, 8
krotność zera funkcji holomorficznej, 35

laplasjan, 67
lemat
— Ahlforsa-Schwarza, 47
— Fatou, 64
— Hartogsa
— — dla funkcji subharmonicznych, 77
— Jordana, 38
— Łojasiewicza, 64
— o produkcji funkcji holomorficznych, 19
— o przesuwaniu biegunów, 55
— Schwarza, 25
— — dla funkcji subharmonicznych, 84
liczba
— sprzężona, 3

- zespolona, 3
- logarytm
 - główny, 8
 - zaspolony, 8
- m**-odcinek, 104
- małe twierdzenie Picarda, 49
- maksymalne
 - $\mathcal{F}$ -rozszerzenie, 97
 - rozszerzenie holomorficzne, 98
- mapa, 30
 - zgodna z atlasem, 30
- metryka sferyczna, 5
- moduł, 3
- morfizm, 96
- naturalna przestrzeń Frécheta, 100
- nierówność
 - trójkąta, 3
- nierówności Cauchy'ego, 23
- norma zespolona, 3
- obrót, 5
- obszar
 - holomorficzności, 98
 - Riemanna, 89
- obwiednia holomorficzności, 98
- odległość
 - hiperboliczna, 105
 - Möbiusa, 104
 - od brzegu, 90
 - Poincarégo, 105
- odwzorowanie
 - afiniczne, 5
 - biholomorficzne, 18, 50
 - holomorficzne, 31
 - konforemne, 5
- okrąg niewłaściwy, 6
- osobliwość
 - izolowana, 34
 - — funkcji harmonicznej, 72
 - nieizolowana, 34
 - usuwalna, 34
 - — funkcji harmonicznej, 72
 - usuwalna w ∞ , 34
- p**-
 - długość, 105
 - odcinek, 105
 - prostowalność, 105
 - trójkąt, 106
- pełna funkcja analityczna, 96
- pierścień I -kielek funkcji holomorficznych, 95
- pierwiastek zespolony, 4
- pierwotna zespolona, 13
- pochodna, 94
 - formalna, 11
 - funkcji analitycznej, 96
 - zespolona, 11
- podniesienie, 89
- pokrywa, 94
- postać trygonometryczna, 3
- potęga zespolona, 8
- powierzchnia Riemanna, 31
- problem
 - Dirichleta, 70
 - — dla koła, 70
 - — dla pierścienia, 73
- projekcja, 89
- promień zbieżności, 94
 - szeregu Taylora, 19
- przeliczalność w nieskończoności, 89
- punkt
 - istotnie osobliwy, 34
 - — funkcji harmonicznej, 72
 - istotnie osobliwy w ∞ , 34
 - nieoznaczoności funkcji harmonicznej, 72
 - pozornie osobliwy, 34
 - — funkcji harmonicznej, 72
 - pozornie osobliwy w ∞ , 34
- punkty symetryczne względem okręgu, 6
- różniczka Frécheta, 11
- równanie Riemanna, 63
- region
 - istnienia, 99
 - Riemanna, 89
- regularyzacja
 - funkcji subharmonicznych, 80
- górna, 76
- residuum, 34
 - w ∞ , 34
- Riemann, 83
- rodzina normalna, 27
- rozmaitość zespolona, 30
- rozszerzenie holomorficzne, 97
- rząd bieguna, 34
 - w ∞ , 34
- rzut stereograficzny, 5
- słabe rozdzielanie punktów, 98
- sekcja, 89
- sfera Riemanna, 4
- sinus, 7
 - hiperboliczny, 8
- snop I -kielek funkcji holomorficznych, 95
- stała Eulera, 60
- szereg
 - Laurenta, 32
 - Taylora, 94
- tangens, 8
- transformata Laplace'a, 41
- translacja, 5
- tranzytywność, 7
- twierdzenie
 - Cauchy'ego–Dixona, 28
 - Cauchy'ego–Goursata, 15, 17, 20, 21
 - Gunninga–Narasimhana, 101
 - Hadamarda o trzech okręgach, 51
 - — dla funkcji subharmonicznych, 85
 - Harnacka, 73
 - Hurwitza, 46

- klasyczne twierdzenie o monodromii, 93
- Lindelöfa, 63
- Liouville'a, 25, 48
- — dla funkcji subharmonicznych, 82
- małe twierdzenie Picarda, 49
- Mergeljana, 55
- Mittag-Lefflera, 56
- Montela, 27, 46
- Morery, 20
- o charakteryzacji funkcji holomorficzych, 20
- o funkcjach danych całką, 40
- o monodromii, 93
- o osobliwościach usuwalnych
- — dla funkcji subharmonicznych, 79
- o residuach, 37
- — pochodnej logarytmicznej, 45
- o rozwijaniu w szereg Laurenta, 32
- o wartości średniej, 16
- — dla funkcji harmonicznych, 68
- — dla funkcji subharmonicznych, 74, 77
- Oki
- — dla funkcji subharmonicznych, 83
- Osgooda–Carathéodory'ego, 53
- Picarda, 49
- Poincarégo–Volterry, 92
- Riemanna, 52
- — o osobliwościach usuwalnych, 34, 35
- Rieszów, 69
- Rouchégo, 45
- Rungego, 54
- Schottky'ego, 46
- Sochockiego–Casoratiego–Weierstrassa, 36
- Thullena, 98
- Vitalego, 27
- Weierstrassa, 22, 24, 57
- Weierstrassa–Mittag-Lefflera, 61, 62
- wielkie twierdzenie Picarda, 49
- — maksimum, 23, 31
- — dla funkcji harmonicznych, 68
- — dla funkcji subharmonicznych, 75
- minimum, 23
- — dla funkcji harmonicznych, 68
- symetrii Riemanna–Schwarza, 28
- zbiór
- jednolistny, 89
- polarny, 79
- zera trywialne funkcji ζ , 63
- włókno, 89
- wielkie twierdzenie Picarda, 49
- wielomian
- trygonometryczny, 75
- wzór
- całkowy Cauchy'ego, 16, 17, 20, 21
- Cauchy'ego–Greena, 13
- de Moivre'a, 4
- Poissona, 68
- Poissona–Jensena, 69
- Schwarza, 69
- wzory
- Christoffela, 53
- Eulera, 7
- zasada
- identyczności
- — dla funkcji harmonicznych, 67
- — dla funkcji holomorficzych, 22, 31
- — dla funkcji meromorficzych, 36
- — dla morfizmów, 96
- — dla podniesień, 89
- — dla sekcji, 90