

Uniwersytet Jagielloński
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyki

Wykłady z Funkcji Analitycznych

(Wykład jednosemestralny)

Marek Jarnicki

(WERSJA Z 6 CZERWCA 2010)

Spis treści

Rozdział 1.	Wstęp	1
1.1.	Liczby zespolone	1
1.2.	Sfera Riemanna	3
1.3.	Homografie	3
1.4.	Funkcja $\exp$	5
1.5.	Odwzorowania przy pomocy funkcji elementarnych	7
Rozdział 2.	Funkcje holomorficzne I	9
2.1.	Pochodna zespolona	9
2.2.	Funkcje holomorficzne	16
2.3.	Podstawowe własności funkcji holomorficznych	19
2.4.	Rodziny normalne, twierdzenia Montela i Vitalego	22
2.5.	Zasada symetrii Riemanna–Schwarza	23
2.6.	Twierdzenie Cauchy’ego–Dixona	24
2.7.	Jednowymiarowe rozmaitości zespolone	26
2.8.	Funkcje holomorficzne w ∞	27
Rozdział 3.	Osobliwości funkcji holomorficznych	29
3.1.	Szeregı Laurenta	29
3.2.	Osobliwości izolowane	31
3.3.	Funkcje meromorficzne	33
3.4.	Twierdzenie o residuach	34
3.5.	Funkcje holomorficzne dane całką	35
Rozdział 4.	Funkcje holomorficzne II	37
4.1.	Twierdzenie o residuach pochodnej logarytmicznej, twierdzenia Rouchégo i Hurwitza	37
4.2.	Krotność	38
4.3.	Odwzorowania biholomorficzne	39
4.4.	Odwzorowania biholomorficzne pierścieni	39
4.5.	Twierdzenie Riemanna	41
Rozdział	Oznaczenia	43
Rozdział	Indeks nazwisk	45
Rozdział	Indeks	47

ROZDZIAŁ 1

Wstęp

Poniższy rozdział, nie mający charakteru systematycznego wykładu, zawiera przegląd elementarnych pojęć i własności, których znajomość jest niezbędna do zrozumienia dalszych części wykładu.

1.1. Liczby zespolone

Liczby zespolone $\mathbb{C}$ to ciało $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ z działaniami określonymi następująco:

$$(x, y) + (u, v) := (x + u, y + v),$$

$$(x, y) \cdot (u, v) := (xu - yv, xv + yu).$$

Liczbę rzeczywistą $x \in \mathbb{R}$ identyfikujemy z liczbą zespoloną $(x, 0) \in \mathbb{C}$; odwzorowanie

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto (x, 0) \in \mathbb{C}$$

jest monomorfizmem ciał. Od tej chwili przyjmujemy, że $x = (x, 0)$ dla $x \in \mathbb{R}$. W szczególności, uważamy, że $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Na przestrzeń $\mathbb{C}$ możemy także patrzeć jako na dwuwymiarową rzeczywistą przestrzeń wektorową $(\mathbb{C}, +; \mathbb{R}, \cdot)$, gdzie $\alpha \cdot (x, y) := (\alpha x, \alpha y)$; odnotujemy, że to mnożenie zewnętrzne jest zgodne z wyżej zdefiniowanym mnożeniem wewnętrznym, tzn. $\alpha \cdot (x, y) = (\alpha, 0) \cdot (x, y)$. Bazą tej przestrzeni są wektory $(1, 0) = 1$ i $(0, 1) =: i$. Mamy $(x, y) = x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1) = x + iy$; liczbę x nazywamy *częścią rzeczywistą* liczby zespolonej $z = (x, y) = x + iy$ i piszemy $x = \operatorname{Re} z$, zaś liczbę y — *częścią urojoną* z i piszemy $y = \operatorname{Im} z$. Odnotujemy, że $i^2 = -1$.

Liczbę $\bar{z} := x - iy$ nazywamy *liczbą sprzężoną* do z . Odwzorowanie $\mathbb{C} \ni z \xrightarrow{J} \bar{z} \in \mathbb{C}$ jest izomorfizmem ciał. Ponadto, $J \circ J = \operatorname{id}_{\mathbb{C}}$ oraz $J|_{\mathbb{R}} = \operatorname{id}_{\mathbb{R}}$. Jest to jedyne nietrywialne odwzorowanie o tych własnościach.

Norma euklidesowa liczby zespolonej $z = x + iy$, zwana *modułem* tej liczby,

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

jest *normą zespoloną*, tzn. $|zw| = |z||w|$ dla dowolnych $z, w \in \mathbb{C}$. Zachodzi *nierówność trójkąta*:

$$||z| - |w|| \leq |z + w| \leq |z| + |w|.$$

Z topologicznego punktu widzenia przestrzeń $\mathbb{C}$ traktujemy jako przestrzeń metryczną z odległością euklidesową $\rho(z, w) := |z - w|$. Dla $a \in \mathbb{C}$ będziemy stosować następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} K(a, r) &:= \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}, \quad 0 < r \leq +\infty, & K(a, +\infty) &:= \mathbb{C}, \\ K_*(a, r) &:= K(a, r) \setminus \{a\}, & K(r) &:= K(0, r), & \mathbb{D} &:= K(1), \\ C(a, r) &:= \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\} = \partial K(a, r), & \mathbb{T} &:= C(1), \\ \overline{K}(a, r) &:= \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq r\}, \quad 0 \leq r < +\infty, & \overline{K}(a, 0) &:= \{a\}, & \overline{K}(r) &:= \overline{K}(0, r), \\ \mathbb{A}(a, r_-, r_+) &:= \{z \in \mathbb{C} : r_- < |z - a| < r_+\}, & \mathbb{A}(r_-, r_+) &:= \mathbb{A}(0, r_-, r_+) & -\infty &\leq r_- < r_+ \leq +\infty. \end{aligned}$$

Odnotujemy, że $\mathbb{A}(a, r_-, r_+) = K(a, r_+)$ dla $r_- < 0$ oraz $\mathbb{A}(a, 0, r_+) = K_*(a, r_+)$.

Dla $z = x + iy$, zbiór

$$\arg z := \{\varphi \in \mathbb{R} : x = |z| \cos \varphi, \ y = |z| \sin \varphi\}$$

nazywamy *argumentem* liczby z . Zapis $z = |z| \cos \varphi + i|z| \sin \varphi = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $\varphi \in \arg z$, nazywamy *postacią trygonometryczną* liczby zespolonej. Zauważmy, że:

- $\arg 0 = \mathbb{R}$;

1. Wstęp

- dla $z \neq 0$ mamy: $\varphi_1, \varphi_2 \in \arg z \implies \varphi_1 - \varphi_2 \in 2\pi\mathbb{Z}$ ⁽¹⁾;
- $\arg(zw) = \arg z + \arg w$;
- dla $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ mamy $z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ — jest to tzw. *wzór de Moivre'a* ⁽²⁾;
- dla $z \neq 0$ mamy: $\arg(1/z) = -\arg z$;
- $\arg \bar{z} = -\arg z$.

Dla $z \neq 0$ definiujemy *argument główny* $\text{Arg } z$ liczby z jako ten (jedyne) z jej argumentów, który leży w przedziale $(-\pi, \pi]$. Zdefiniujemy ponadto $\text{Arg } 0 := 0$. Odnotujmy, że:

- $\text{Arg } z = 0 \iff z = x \in \mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$,
- $\text{Arg } z = \pi \iff z = x \in \mathbb{R}_{<0} := (-\infty, 0)$,
- $\text{Arg } \bar{z} = -\text{Arg } z, z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

Zbiór

$$\sqrt[n]{z} := \{w \in \mathbb{C} : w^n = z\}$$

nazywamy *pierwiastkiem zespolonym n -stopnia* z liczby z . Mamy: $\sqrt[n]{0} = \{0\}$;

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) : k = 0, \dots, n-1 \right\}, \quad z \neq 0, \varphi \in \arg z,$$

gdzie $\sqrt[n]{x} \geq 0$ oznacza pierwiastek „arytmetyczny” z liczby $x \geq 0$. Geometrycznie: zbiór $\sqrt[n]{z}$ składa się z wierzchołków n -kąta foremnego wpisanego w okrąg $C(|z|^{1/n})$, którego jeden wierzchołek ma argument $\frac{1}{n} \text{Arg } z$.

Przypuśćmy, że każdemu punktowi z pewnego zbioru $A \subset \mathbb{C}$ przyporządkowaliśmy niepusty zbiór $P(z) \subset \mathbb{C}$, np. $A \ni z \mapsto \arg z$ lub $A \ni z \mapsto \sqrt[n]{z}$. Powiemy, że funkcja ciągła $p : A \rightarrow \mathbb{C}$ jest *gałęzią (jednoznaczną) funkcji wieloznacznej P* , jeżeli $p(z) \in P(z)$ dla dowolnego $z \in A$. W tym sensie możemy mówić o *gałęzi (jednoznacznej) argumentu*, czy też *gałęzi (jednoznacznej) n -tego pierwiastka*. Zauważmy, że:

- Z istnienia gałęzi argumentu $a : A \rightarrow \mathbb{R}$ wynika istnienie gałęzi n -tego pierwiastka — wystarczy położyć $p(z) := \sqrt[n]{|z|} (\cos \frac{a(z)}{n} + i \sin \frac{a(z)}{n})$. ĆWICZENIE: Czy zachodzi twierdzenie odwrotne, tzn. czy z istnienia gałęzi $p : A \rightarrow \mathbb{C}$ n -tego pierwiastka (dla $n \geq 2$) wynika istnienie gałęzi argumentu?
- Jeżeli $a : A \rightarrow \mathbb{R}$ jest gałęzią argumentu, to $a + 2k\pi$ jest również gałęzią argumentu dla dowolnego $k \in \mathbb{Z}$. Jeżeli A jest spójny, zaś $a_1, a_2 : A \rightarrow \mathbb{R}$ są dwiema gałęziami argumentu, to $a_1 - a_2 \equiv 2\pi k$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.
- Jeżeli $p : A \rightarrow \mathbb{C}$ jest gałęzią n -tego pierwiastka, to εp jest gałęzią n -tego pierwiastka dla dowolnego $\varepsilon \in \sqrt[n]{1}$. Jeżeli $A \subset \mathbb{C}_*$ jest spójny, zaś $p_1, p_2 : A \rightarrow \mathbb{C}$ są dwiema gałęziami n -tego pierwiastka, to $p_2 \equiv \varepsilon p_1$ dla pewnego $\varepsilon \in \sqrt[n]{1}$.
- W zbiorze $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ istnieje gałąź argumentu i każda gałąź argumentu w $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ ma postać $a(z) = \text{Arg } z + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$. Ogólniej, dla dowolnej półprostej L o początku w zerze, w obszarze $\mathbb{C} \setminus L$ istnieje gałąź argumentu. W szczególności, dla dowolnego $z_0 \in \mathbb{C}_* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, w kole $K(z_0, |z_0|)$ istnieje gałąź argumentu.
- Jeżeli $C(r) \subset A$ dla pewnego $r > 0$, to w zbiorze A nie istnieje gałąź n -tego pierwiastka (dla $n \geq 2$), a więc nie istnieje też gałąź argumentu.

⁽¹⁾ Dla $c \in \mathbb{C}$, $A, B \subset \mathbb{C}$, stosujemy następujące oznaczenia: $A \cdot B := \{ab : a \in A, b \in B\}$, $cA := \{ca : a \in A\} = \{c\} \cdot A$, $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$, $c + A := \{c + a : a \in A\} = \{c\} + A = A + c$, $-A := (-1)A$.

⁽²⁾ Abraham de Moivre (1667–1754) — matematyk francuski.

1.2. Sfera Riemanna

Sfera Riemanna ⁽³⁾ $\widehat{\mathbb{C}}$ to jednopunktowe uzwarcie $\mathbb{C}$; $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Topologia $\widehat{\mathbb{C}}$ jest metryzowalna, np. poprzez metrykę sferyczną

$$d(a, b) = d_{\widehat{\mathbb{C}}}(a, b) := \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } a = b = \infty \\ \frac{1}{\sqrt{1+|a|^2}}, & \text{jeżeli } a \in \mathbb{C}, b = \infty \\ \frac{1}{\sqrt{1+|b|^2}}, & \text{jeżeli } a = \infty, b \in \mathbb{C} \\ \frac{|a-b|}{\sqrt{1+|a|^2}\sqrt{1+|b|^2}}, & \text{jeżeli } a, b \in \mathbb{C} \end{cases} \quad a, b \in \widehat{\mathbb{C}}.$$

Dla ciągu $(z_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ mamy: $z_k \xrightarrow{(\widehat{\mathbb{C}}, d)} \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|z_k| \rightarrow +\infty$. Definiujemy:
 $\infty + a = a + \infty := \infty$ dla dowolnego $a \in \mathbb{C}$,
 $a \cdot \infty = \infty \cdot a := \infty$ dla dowolnego $a \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$,
 $1/0 := \infty, 1/\infty := 0$.

Ćwiczenie 1.2.1. (a) Sfera Riemanna $\widehat{\mathbb{C}}$ jest homeomorficzna z dwuwymiarową sferą euklidesową

$$\mathbf{S} := \partial \mathbb{B}_3((0, 0, 1/2), 1/2) \subset \mathbb{R}^3$$

poprzez rzut stereograficzny $R : \mathbf{S} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}, R(N) := \infty$, gdzie $N := (0, 0, 1)$,

$$R(u, v, w) := \left(\frac{u}{1-w}, \frac{v}{1-w} \right), \quad (u, v, w) \in \mathbf{S} \setminus \{N\}.$$

Odwzorowanie R jest klasy $\mathcal{C}^\omega(\mathbf{S} \setminus \{N\}, \mathbb{R}^2)$.

(b)

$$R^{-1}(z) = \left(\frac{\operatorname{Re} z}{1+|z|^2}, \frac{\operatorname{Im} z}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2}{1+|z|^2} \right), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Odwzorowanie R^{-1} jest klasy $\mathcal{C}^\omega(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.

(c) Rzut stereograficzny jest odwzorowaniem *konforemnym* w $\mathbf{S} \setminus \{N\}$, tzn. dla dowolnych dwóch krzywych $\gamma_1, \gamma_2 : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{S}$ klasy $\mathcal{C}^1$ takich, że $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) \in \mathbf{S} \setminus \{N\}$, $\gamma_1'(0) \neq 0$, $\gamma_2'(0) \neq 0$, kąt skierowany pomiędzy wektorami $(R \circ \gamma_1)'(0), (R \circ \gamma_2)'(0)$ jest równy kątowi skierowanemu pomiędzy wektorami $\gamma_1'(0), \gamma_2'(0)$.

1.3. Homografie

Homografią nazywamy dowolne odwzorowanie $h : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ postaci

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \neq 0, \quad (*)$$

przy czym:

- dla $c = 0$ kładziemy $h(\infty) := \infty$,
- dla $c \neq 0$ kładziemy $h(-d/c) := \infty$ i $h(\infty) := a/c$.

Obserwacja 1.3.1 (Własności homografii — szczegóły pozostawiamy jako ĆWICZENIE). (1) Dla homografii $h_j(z) = \frac{a_j z + b_j}{c_j z + d_j}$, $j = 1, 2$, mamy:

$$h_1 \equiv h_2 \iff \exists \mu \in \mathbb{C}_* : \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}.$$

(2) Mamy następujące *homografie elementarne*:

⁽³⁾ Bernhard Riemann (1826–1866) — matematyk niemiecki.

1. Wstęp

Nazwa	Opis	Parametry	Liczba parametrów rzeczywistych
<i>translacje</i>	$z \mapsto z + b$	$b \in \mathbb{C}$	2
<i>obroty</i>	$z \mapsto az$	$a \in \mathbb{T}$	1
<i>homotetie</i>	$z \mapsto tz$	$t > 0$	1
<i>odwzorowania afiniczne</i>	$z \mapsto az + b$	$a \in \mathbb{C}_*, b \in \mathbb{C}$	4
<i>inwersja</i>	$z \mapsto 1/z$		

Każde odwzorowanie afiniczne jest złożeniem obrotu, homotetii i translacji.

- (3) Złożenie homografii jest homografią. Każda homografia jest odwzorowaniem bijektywnym. Odwzorowanie odwrotne do homografii jest homografią. Każda homografia jest homeomorfizmem $\widehat{\mathbb{C}}$ na $\widehat{\mathbb{C}}$. Zbiór wszystkich homografii $\mathcal{H}$ jest grupą ze składaniem. Translacje, obroty i odwzorowania afiniczne tworzą podgrupy.
- (4) Każda homografia jest złożeniem homografii elementarnych. Grupa $\mathcal{H}$ zależy od 6 niezależnych parametrów rzeczywistych.
- (5) Każda homografia h jest odwzorowaniem konforemnym na $\mathbb{C} \cap h^{-1}(\mathbb{C})$.
- (6) Równanie

$$\left| \frac{z-p}{z-q} \right| = \lambda, \quad (**)$$

gdzie $p, q \in \mathbb{C}$, $p \neq q$, $\lambda > 0$, przedstawia:

- dla $\lambda = 1$ — prosta,
- dla $\lambda \neq 1$ — okrąg

$$C\left(\frac{p - \lambda^2 q}{1 - \lambda^2}, \frac{\lambda|p - q|}{|1 - \lambda^2|}\right),$$

względem których punkty p i q są *symetryczne* ⁽⁴⁾.

Odwrotnie, dowolna prosta lub okrąg mogą być opisane równaniem (**). W przypadku okręgu $C(z_0, r)$, punkt $p \in \mathbb{C} \setminus (\{z_0\} \cup C(z_0, r))$ wybieramy w sposób dowolny i kładziemy

$$q := z_0 + \frac{r^2}{p - z_0}, \quad \lambda := \frac{|p - z_0|}{r}.$$

- (7) Dowolną prostą uzupełnioną ∞ nazywamy *okręgiem niewłaściwym*. Okrąg właściwy lub nie, dany równaniem (**) jest przekształcany przez homografię (*) na okrąg właściwy lub nie dany równaniem

$$\left| \frac{w - h(p)}{w - h(q)} \right| = \lambda \left| \frac{qc + d}{pc + d} \right|.$$

W szczególności punkty symetryczne przechodzą zawsze w punkty symetryczne.

Zauważmy, że:

- jeżeli h jest odwzorowaniem afinicznym, to prosta przechodzi na prostą i okrąg — na okrąg,
- h jest inwersją, to otrzymujemy równanie

$$\left| \frac{w - 1/p}{w - 1/q} \right| = \lambda \left| \frac{q}{p} \right|,$$

co oznacza, że obrazem prostej jest albo prosta (gdy $|p| = |q|$ ⁽⁵⁾), albo okrąg (gdy $|p| \neq |q|$), zaś obrazem okręgu jest albo okrąg (gdy $\lambda|q| \neq |p|$), albo prosta (gdy $\lambda|q| = |p|$).

- (8) Niech $\mathbb{H}^+ := \{x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$. Dla dowolnego $a \in \mathbb{H}^+$ homografia

$$h(z) := \frac{z - a}{z - \bar{a}}$$

przekształca $\mathbb{H}^+$ na koło jednostkowe $\mathbb{D}$ oraz $h(\mathbb{R}) = \mathbb{T} \setminus \{1\}$.

⁽⁴⁾ W przypadku okręgu $C(z_0, r)$ oznacza to, że punkty te leżą na jednej półprostej wychodzącej z z_0 oraz $|p - z_0||q - z_0| = r^2$. Dodatkowo, umawiamy się że punkty z_0 i ∞ są również symetryczne względem $C(z_0, r)$.

⁽⁵⁾ Np. gdy przekształcamy oś rzeczywistą i $p = -q = i$.

Istotnie, $h(a) = 0$ oraz dla $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$|h(x)| = \left| \frac{x-a}{x-a} \right| = 1,$$

czyli $h(\mathbb{R}) \subset \mathbb{T}$. Ponieważ homografie są homeomorfizmami przekształcającymi proste na proste lub okręgi, musimy mieć $h(\mathbb{H}^+) = \mathbb{D}$.

- (9) Dla dowolnych $a \in \mathbb{D}$, $\zeta \in \mathbb{T}$, homografia

$$h(z) := \zeta \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

przekształca $\mathbb{D}$ na $\mathbb{D}$.

Istotnie, $h(a) = 0$ oraz dla dowolnego $z = 1/\bar{z} \in \mathbb{T}$ mamy

$$|h(z)| = \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}/\bar{z}} \right| = \left| \frac{z-a}{z-a} \right| = 1,$$

czyli $h(\mathbb{T}) \subset \mathbb{T}$. Dalej rozumiemy, jak poprzednio.

- (10) Zbiór $\mathcal{A}$ wszystkich homografii postaci takiej, jak w (9) jest podgrupą grupy $\text{Aut}_{\mathcal{H}}(\mathbb{D})$ wszystkich homografii przekształcających $\mathbb{D}$ na $\mathbb{D}$.
- (11) $\text{Aut}_{\mathcal{H}}(\mathbb{D}) = \mathcal{A}$. W szczególności, grupa $\text{Aut}_{\mathcal{H}}(\mathbb{D})$ zależy od 3 parametrów rzeczywistych. Ponadto, grupa ta działa *transytywnie* na $\mathbb{D}$, tzn. dla dowolnych $a, b \in \mathbb{D}$ istnieje $h \in \text{Aut}_{\mathcal{H}}(\mathbb{D})$ takie, że $h(a) = b$. Istotnie, niech $f \in \text{Aut}_{\mathcal{H}}(\mathbb{D})$ i niech $g \in \mathcal{A}$ będzie takie, że $g(f(0)) = 0$. Wtedy $h := g \circ f \in \text{Aut}_{\mathcal{H}}(\mathbb{D})$ oraz $h(0) = 0$. Wystarczy pokazać, że h musi być obrotem. Niech $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Ponieważ $h(0) = 0$, musi być $b = 0$. Punkty 0 i ∞ są symetryczne względem $\mathbb{T}$. Wynika stąd, że $h(\infty) = \infty$, a więc $c = 0$. Ponieważ $h(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$, musi być $a/d \in \mathbb{T}$, czyli h jest obrotem.

Ćwiczenie 1.3.2. Niech D_j będzie dowolnym kołem lub półpłaszczyzną i niech $a_j \in D_j$, $b_j \in \partial_{\mathbb{C}} D_j$, $j = 1, 2$. Pokazać, że istnieje homografia h taka, że $h(D_1) = D_2$ oraz $h(a_1) = a_2$, $h(b_1) = b_2$.

Ćwiczenie 1.3.3. Dla $h \in \mathcal{H}$, $h \neq \text{id}$, zbadać zbiór $\{z \in \hat{\mathbb{C}} : h(z) = z\}$.

1.4. Funkcja exp

Definiujemy *funkcję wykładniczą* $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\exp(z) = e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Obserwacja 1.4.1 (Własności exp). (1) Funkcja exp jest poprawnie określona. Jest to funkcja $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ klasy $\mathcal{C}^{\omega}$. Definicja jest zgodna dla $z = x \in \mathbb{R}$.

- (2) $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$, $a, b \in \mathbb{C}$.

Istotnie,

$$e^{a+b} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} \frac{b^{n-k}}{(n-k)!} \stackrel{(*)}{=} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} \right) = e^a \cdot e^b,$$

gdzie $(*)$ to iloczyn Cauchy'ego ⁽⁶⁾ szeregów.

- (3) $e^a \neq 0$, $a \in \mathbb{C}$.

- (4) $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

- (5) Definiujemy

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Są to tzw. *wzory Eulera* ⁽⁷⁾. Definicje są zgodne dla $z = x \in \mathbb{R}$. Odnotujmy, że np. $\cos i = \frac{e+1/e}{2} > \frac{3}{2}$.

⁽⁶⁾ Augustin Cauchy (1789–1857) — matematyk i fizyk francuski.

⁽⁷⁾ Leonhard Euler (1707–1783) — matematyk i fizyk szwajcarski.

1. Wstęp

- (6) $e^z = e^w \iff z - w = 2\pi i k$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.
 (7) Funkcje $\cos$ i $\sin$ mają okres 2π . Ponadto, $\cos z = 0 \iff z = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, $\sin z = 0 \iff z = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Definiujemy

$$\operatorname{tg} z := \frac{\sin z}{\cos z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}, \quad \operatorname{ctg} z := \frac{\cos z}{\sin z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Zachodzą wszystkie standardowe wzory znane dla funkcji trygonometrycznych zmiennej rzeczywistej, np. $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$, $z \in \mathbb{C}$.

- (8) $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}_*$.
 (9) Definiujemy *funkcje hiperboliczne, sinus i kosinus hiperboliczny*

$$\cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Dla $z \in \mathbb{C}$ definiujemy *logarytm zespolony*

$$\log z := \{w \in \mathbb{C} : e^w = z\}$$

oraz *logarytm główny* $\operatorname{Log} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$\operatorname{Log} z := \ln |z| + i \operatorname{Arg} z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Odnajdujemy, że:

- $\log 0 = \emptyset$.
- $\log z = \ln |z| + i \arg z$, $z \neq 0$.
- Dla dowolnego zbioru $A \subset \mathbb{C}_*$ w zbiorze A istnieje gałąź logarytmu ℓ wtedy i tylko wtedy, gdy w A istnieje gałąź argumentu a . Jeżeli $A \subset \mathbb{C}_*$ jest spójny, to $\ell(z) = \ln |z| + ia(z) + 2k\pi i$, $z \in A$, dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.
- W $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ istnieje gałąź logarytmu i każda taka gałąź ma postać $\ell(z) = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z + 2k\pi i$, $z \in A$, dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.

Dla dowolnego $a \in \mathbb{C}_*$ definiujemy *potęgę zespoloną*

$$a^b := \{e^{bw} : w \in \log a\}, \quad b \in \mathbb{C}.$$

Ponadto, kładziemy $0^b := \{0\}$ dla $b \in \mathbb{C}_*$. Odnajdujemy, że:

- $a^n = \{a^n\}$ dla dowolnego $n \in \mathbb{Z}$, gdzie po prawej stronie a^n rozumiemy w sensie klasycznym.
- $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$, $n \in \mathbb{N}$.
- Dla dowolnego $w_0 \in \log a$, funkcja $\mathbb{C} \ni z \mapsto e^{zw_0}$ jest gałęzią jednoznacznej potęgi $\mathbb{C} \ni z \mapsto a^z$. Czy każda gałąź musi być tej postaci?
- Jeżeli w zbiorze $A \subset \mathbb{C}_*$ istnieje gałąź logarytmu ℓ , to dla dowolnego $b \in \mathbb{C}$, funkcja $A \ni z \mapsto e^{b\ell(z)}$ jest gałęzią potęgi $A \ni z \mapsto z^b$. Czy każda gałąź musi być tej postaci?

Przykład 1.4.2.

$$i^i = \{e^{-(2k+1/2)\pi} : k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}_{>0}.$$

Ćwiczenie 1.4.3. Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem i niech $f : D \longrightarrow \mathbb{C}_*$ będzie funkcją ciągłą, dla której w obszarze D istnieje gałąź $\log f$ — oznaczmy ją L — mamy $e^L \equiv f$. Niech $a \in D$ i niech $f(K(a, r)) \subset K(f(a), |f(a)|)$. Niech ℓ będzie dowolną gałęzią logarytmu w $K(f(a), |f(a)|)$. Wtedy $L = \ell \circ f + 2k\pi i$ w $K(a, r)$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.

1.5. Odwzorowania przy pomocy funkcji elementarnych

Przykład 1.5.1 (n -ty pierwiastek). Wiemy, że w zbiorze $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ istnieje gałąź jednoznaczna $\sqrt[n]{z}$, np. $f(z) := e^{\frac{1}{n} \operatorname{Log} z}$. Funkcja ta odwzorowuje homeomorficznie górną półpłaszczyznę $\mathbb{H}^+$ na kąt

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Arg} z < \pi/n\}$$

(odwzorowaniem odwrotnym jest oczywiście $z \mapsto z^n$).

Przykład 1.5.2 (Funkcja Żukowskiego ⁽⁸⁾). Funkcją Żukowskiego nazywamy funkcję

$$f(z) := \frac{1}{2}(z + 1/z), \quad z \in \mathbb{C}_*.$$

Niech $f(z) = f(re^{it}) = u + iv$, czyli

$$u = \frac{1}{2}(r + 1/r) \cos t, \quad v = \frac{1}{2}(r - 1/r) \sin t.$$

Wtedy $f(z) = f(1/z)$, $z \in \mathbb{C}_*$. ponadto, f jest iniektywna w $\mathbb{D}_*$ oraz w $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ i odwzorowuje homeomorficznie każdy z tych obszarów na $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$; odwzorowania odwrotne mają postać

$$\mathbb{C} \setminus [-1, 1] \ni w \mapsto w \pm \sqrt{w^2 - 1} = w \pm e^{\frac{1}{2} \operatorname{Log}(w^2 - 1)}.$$

Istotnie, jeżeli $f(z_1) = f(z_2)$ dla $z_1, z_2 \in \mathbb{D}_*$, to $(z_1 - z_2)(1 - 1/(z_1 z_2)) = 0$, a stąd $z_1 = z_2$.

Dla $r > 0$, $r \neq 1$, obrazem okręgu $C(r)$ jest elipsa o ogniskach ± 1 i półosiach $\frac{1}{2}(r \pm 1/r)$. Jeżeli $r \rightarrow 0$, to ta elipsa oddala się do ∞ . Jeżeli $r \rightarrow 1$, to zmierza do odcinka $[-1, 1]$, który jest dwukrotnie pokryty przez obraz $\mathbb{T}$.

Przykład 1.5.3 (exp). Niech $u + iv = e^z = e^{x+iy}$ tzn.

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y.$$

(a) Dla dowolnego $y_0 \in \mathbb{R}$, pas poziomy $\{x + iy : x \in \mathbb{R}, y_0 - \pi < y \leq y_0 + \pi\}$ jest odwzorowywany bijektywnie (ale oczywiście nie homeomorficznie!) na $\mathbb{C}_*$. Pozioma prosta $y = y_0$ przechodzi na promień $\{(e^x \cos y_0, e^x \sin y_0) : x \in \mathbb{R}\}$. Pas otwarty $\{x + iy : x \in \mathbb{R}, -\pi < y < \pi\}$ jest odwzorowany homeomorficznie na $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ (odwzorowaniem odwrotnym jest Log).

(b) Dla dowolnych $p_0 \in \mathbb{R}_*$, $q_0 \in \mathbb{R}$, pas ukośny $\{(x, p_0 x + q) : x \in \mathbb{R}, q_0 - \pi < q \leq q_0 + \pi\}$ jest odwzorowywany bijektywnie na $\mathbb{C}_*$. Prosta ukośna $y = p_0 x + q_0$ przechodzi na linię śrubową postaci $\{(e^x \cos(p_0 x + q_0), e^x \sin(p_0 x + q_0)) : x \in \mathbb{R}\}$.

Przykład 1.5.4 (sin). Funkcja sinus odwzorowuje homeomorficznie pas

$$\{x + iy : -\pi/2 < x < \pi/2, y \in \mathbb{R}\}$$

na $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, 1] \cup [1, +\infty)) =: D$. Istotnie, niech

$$\begin{aligned} \sin z = \sin(x + iy) &= \frac{1}{2i}(e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}) = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \sin x + i \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) \cos x \\ &= \cosh y \sin x + i \sinh y \cos x =: u + iv. \end{aligned}$$

Prosta pionowa $x = 0$ przechodzi bijektywnie na prostą $u = 0$. Każda prosta pionowa $x = c \neq 0$ przechodzi bijektywnie w jedną z gałęzi hiperboli

$$\frac{u^2}{\sin^2 c} - \frac{v^2}{\cos^2 c} = 1.$$

Wypełniają one cały obszar D .

Ćwiczenie 1.5.5. Jak zachowuje się funkcja tg w pasie $\{x + iy : -\pi/2 < x < \pi/2, y \in \mathbb{R}\}$?

⁽⁸⁾ Nikolai Żukowski (1847–1921) — matematyk rosyjski.

Funkcje holomorficzne I

2.1. Pochodna zespolona

Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie zbiorem otwartym i niech $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $f = u + iv$. Na funkcję f możemy zawsze patrzeć jako na odwzorowanie $(u, v) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$. W szczególności, można pytać o różniczkowalność w sensie rzeczywistym tego odwzorowania w pewnym punkcie $a \in \Omega$. Niech $f'_{\mathbb{R}}(a)$ oznacza rzeczywistą różniczkę Frécheta ⁽¹⁾ odwzorowania f w punkcie a (o ile istnieje). Wiemy, że dla $Z = X + iY$ mamy

$$\begin{aligned} f'_{\mathbb{R}}(a)(Z) &= \frac{\partial f}{\partial x}(a)X + \frac{\partial f}{\partial y}(a)Y = \frac{\partial f}{\partial x}(a)\frac{Z + \bar{Z}}{2} + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\frac{Z - \bar{Z}}{2i} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) - i\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)Z + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) + i\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)\bar{Z} =: \frac{\partial f}{\partial z}(a)Z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a)\bar{Z}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) - i\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) + i\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)$$

oznaczają *pochodne formalne* funkcji f w punkcie a . Oczywiście, do ich zdefiniowania wystarczy istnienie pochodnych cząstkowych $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$.

Definicja 2.1.1. Mówimy, że funkcja f ma w punkcie a *pochodną zespoloną* $f'(a)$, jeżeli granica

$$f'(a) := \lim_{\mathbb{C} \ni h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

istnieje i jest skończona. Innymi słowy, f ma w punkcie a zespoloną różniczkę Frécheta $f'_{\mathbb{C}}(a)$ oraz $f'_{\mathbb{C}}(a)(Z) = f'(a)Z$, $Z \in \mathbb{C}$.

Propozycja 2.1.2. NWSR:

- (i) $f'(a)$ istnieje;
- (ii) $f'_{\mathbb{C}}(a)$ istnieje;
- (iii) $f'_{\mathbb{R}}(a)$ istnieje oraz jest operatorem $\mathbb{C}$ -liniowym;
- (iv) $f'_{\mathbb{R}}(a)$ istnieje oraz spełnione są równania Cauchy'ego–Riemanna

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0, \quad \text{czyli} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(a) = -\frac{\partial v}{\partial x}(a).$$

W szczególności, jeżeli $f'(a)$ istnieje, to $f'_{\mathbb{R}}(a)(Z) = f'(a)Z$ oraz

$$f'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \frac{\partial f}{\partial z}(a).$$

Przykład 2.1.3. Funkcja $f(x+iy) := \sqrt{|xy|}$, $z = x+iy \in \mathbb{C}$, ma w punkcie $a = 0$ obie pochodne cząstkowe ($\frac{\partial f}{\partial x}(0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0$), które spełniają oczywiście równania Cauchy'ego–Riemanna, ale $f'(0)$ nie istnieje.

Definicja 2.1.4. Niech $\mathcal{P}_n(\mathbb{C}) :=$ oznacza zbiór wszystkich wielomianów zespolonych jednej zmiennej zespolonej stopnia $\leq n$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), tzn. zbiór wszystkich funkcji postaci $\mathbb{C} \ni z \mapsto a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n \in \mathbb{C}$. Jest

⁽¹⁾ René Fréchet (1878–1973) — matematyk francuski.

to oczywiście zespolona przestrzeń wektorowa. Ponadto, $\mathcal{P}_n(\mathbb{C}) \subset \mathcal{P}_{n+1}(\mathbb{C})$. Połóżmy, $\mathcal{P}(\mathbb{C}) := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n(\mathbb{C})$. Jest to pierścień.

Niech $\mathcal{R}(\mathbb{C}) :=$ oznacza pierścień wszystkich funkcji wymiernych jednej zmiennej zespolonej, tzn. zbiór wszystkich ułamków L/M , gdzie $L, M \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$, $M \neq 0$. Każda funkcja wymierna jest funkcją ciągłą $\widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$.

Obserwacja 2.1.5. (a) Do różniczkowania zespolonego stosują się standardowe wzory na różniczkowanie sumy, iloczynu i ilorazu.

(b) Każdy wielomian $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ jest różniczkowalny w sensie zespolonym w każdym punkcie oraz $p'(z) = a_1 + 2a_2 z + \dots + na_n z^{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{C})$. Każda funkcja wymierna $L/M \in \mathcal{R}(\mathbb{C})$ jest różniczkowalna w sensie zespolonym w każdym punkcie $z \in \mathbb{C} \setminus M^{-1}(0)$.

(c) Niech $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ będzie odwzorowaniem bijektywnym na pewien zbiór otwarty $\Omega' \subset \mathbb{C}$ takim, że $f'(a)$ istnieje. Niech $b := f(a)$, $g := f^{-1} : \Omega' \rightarrow \Omega$. Wtedy NWSR:

(i) $g'(b)$ istnieje;

(ii) $f'(a) \neq 0$ oraz g jest ciągle w punkcie b .

Ponadto, $g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

(d) Jeżeli $f'(a)$ istnieje, to $\det f'_{\mathbb{R}}(a) = |f'(a)|^2$. Istotnie

$$\det f'_{\mathbb{R}}(a) = \det \begin{bmatrix} u'_x(a) & u'_y(a) \\ v'_x(a) & v'_y(a) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} u'_x(a) & -v'_x(a) \\ v'_x(a) & u'_x(a) \end{bmatrix} = (u'_x(a))^2 + (v'_x(a))^2 = |f'(a)|^2.$$

(e) Jeżeli $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ jest odwzorowaniem klasy $\mathcal{C}^1$ takim, że $f'(a)$ istnieje i $f'(a) \neq 0$, to dla pewnego otwartego otoczenia $U \subset \Omega$ punktu a , odwzorowanie $f|_U : U \rightarrow V$ jest $\mathcal{C}^1$ -dyfeomorfizmem na pewne otwarte otoczenie punktu $b := f(a)$ i jeżeli $g := (f|_U)^{-1}$, to $g'(b)$ istnieje i $g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

(f) Funkcja $\exp$ ma pochodną zespoloną w dowolnym punkcie oraz $\exp'(z) = \exp(z)$, $z \in \mathbb{C}$.

Istotnie, ponieważ $\exp(x + iy) = e^x(\cos y + i \sin y)$, zatem funkcja $\exp$ jest klasy $\mathcal{C}^\omega(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$. Ponadto, dla $z = x + iy$, mamy

$$\frac{\partial \exp}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \exp}{\partial x}(z) + i \frac{\partial \exp}{\partial y}(z) \right) = \frac{1}{2} \left(e^x(\cos y + i \sin y) + i e^x(-\sin y + i \cos y) \right) = 0,$$

co oznacza, że w każdym punkcie spełnione są równania Cauchy'ego–Riemanna, czyli $\exp'(z)$ istnieje dla dowolnego z . Ponadto, $\exp'(z) = \frac{\partial \exp}{\partial x}(z) = \exp(z)$, $z \in \mathbb{C}$.

(g) Niech $D \subset \mathbb{C}_*$ będzie obszarem, w którym istnieje gałąź logarytmu ℓ . Wtedy $\ell'(z) = 1/z$, $z \in D$.

Istotnie, niech $b \in D$, $a := \ell(b)$. Do funkcji $f := \exp$ stosujemy (e), z którego wnioskujemy, że $\ell'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{\exp(\ell(b))} = \frac{1}{b}$.

(h) $\sin' z = \cos z$, $\cos' z = -\sin z$, $z \in \mathbb{C}$.

Dla drogi (tzn. krzywej kawałkami klasy $\mathcal{C}^1$) $\gamma = (\gamma_1 + i\gamma_2) : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ oraz funkcji ciągłej $f = u + iv : \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$ definiujemy

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f dz &:= \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} v dx + u dy \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left(u(\gamma(t))\gamma'_1(t) - v(\gamma(t))\gamma'_2(t) + i(v(\gamma(t))\gamma'_1(t) + u(\gamma(t))\gamma'_2(t)) \right) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t))\gamma'(t) dt. \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \ell(\gamma) \|f\|_{\gamma^*},$$

gdzie

$$\ell(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} |\gamma'(t)| dt$$

oznacza długość krzywej γ , zaś dla $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ kładziemy

$$\|\varphi\|_A := \sup\{|\varphi(z)| : z \in A\}.$$

2.1. Pochodna zespolona

Propozycja 2.1.6 (Wzór Cauchy'ego–Greena ⁽²⁾). Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem p -spójnym, którego brzeg składa się z p dróg Jordana zorientowanych dodatnio względem D , tzn. $\partial D = \gamma_0^* \cup \dots \cup \gamma_{p-1}^*$, $\text{int } \gamma_j \subset \subset \text{int } \gamma_0$, $j = 1, \dots, p-1$, $\text{int } \gamma_j \subset \subset \text{ext } \gamma_k$, $j, k = 1, \dots, p-1$, $j \neq k$. Niech $f \in \mathcal{C}^1(\overline{D})$ ⁽³⁾. Wówczas

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \int_D \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \right), \quad z \in D.$$

W szczególności, jeżeli $f \in \mathcal{C}^1(\overline{D})$ oraz $f'(z)$ istnieje dla dowolnego $z \in D$, to

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in D.$$

Dowód. Ustalmy $K(a, \varepsilon) \subset \subset D$. Wówczas, na mocy wzoru Greena (zastosowanego do obszaru $D_\varepsilon := D \setminus \overline{K(a, \varepsilon)}$), mamy

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta - \int_{C(a, \varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta &= \int_{\partial D_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta = \int_{D_\varepsilon} d\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta\right) \\ &= - \int_{D_\varepsilon} \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} - \int_D \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}, \end{aligned}$$

przy czym okrąg $C(a, \varepsilon)$ utożsamiamy z krzywą $[0, 2\pi] \ni t \mapsto a + \varepsilon e^{it}$. Utożsamienie to będziemy stosować konsekwentnie w przyszłości.

Z drugiej strony,

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, \varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta - f(a) \right| \leq \max\{|f(\zeta) - f(a)| : \zeta \in C(a, \varepsilon)\} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} 0. \quad \square$$

Propozycja 2.1.7. Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem i niech $f = u + iv : D \rightarrow \mathbb{C}$ będzie ciągłą. Wtedy NWSR:

- (i) dla dowolnych $a, b \in D$, całka $\int_a^b f(z) dz := \int_\gamma f(z) dz$ nie zależy od wyboru drogi γ łączącej a i b w D ;
- (ii) funkcja f posiada pierwotną zespoloną, tzn. istnieje funkcja $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ taka, że $F'(z) = f(z)$ dla dowolnego $z \in D$.

Dowód. (ii) $\implies$ (i):

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_\alpha^\beta F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_\alpha^\beta (F \circ \gamma)'(t) dt = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha)).$$

(i) $\implies$ (ii): Niezależność całki $\int_\gamma f(z) dz$ od drogi całkowania jest równoważna niezależności całek

$$\int_\gamma u dx - v dy, \quad \int_\gamma v dx + u dy$$

od drogi całkowania, co oznacza, że istnieją funkcje $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$ takie, że

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -v, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = v, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u.$$

Niech $F := \varphi + i\psi$. Wtedy F jest klasy $\mathcal{C}^1$, spełnia w każdym punkcie równania Cauchy'ego–Riemanna oraz $F' = \varphi'_x + i\psi'_x = u + iv = f$. $\square$

Propozycja 2.1.8 (Indeks punktu względem drogi zamkniętej). Niech $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ będzie dowolną drogą zamkniętą. Wtedy całka krzywoliniowa

$$\text{Ind}_\gamma(a) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - a} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a} dt, \quad a \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*,$$

⁽²⁾ George Green (1793–1841) — matematyk i fizyk angielski.

⁽³⁾ Tzn. $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, gdzie $\Omega \subset \mathbb{C}$ jest zbiorem otwartym takim, że $\overline{D} \subset \Omega$.

nosząca nazwę indeksu punktu a względem drogi γ , przyjmuje wartości całkowite, stałe w każdej składowej spójnej zbioru $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, przy czym $\text{Ind}_\gamma = 0$ w składowej nieograniczonej zbioru $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

Odnajdujemy, że $\text{Ind}_\gamma(a)$ jest oczywiście niezależny od zmiany parametryzacji drogi γ .

Dowód. Z twierdzenia o funkcjach danych całką wynika, że Ind_γ jest funkcją ciągłą. Ponadto,

$$|\text{Ind}_\gamma(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{\ell(\gamma)}{\text{dist}(a, \gamma^*)} \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0.$$

Pozostaje więc wykazać, że $\text{Ind}_\gamma(a) \in \mathbb{Z}$ dla dowolnego $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Ustalmy a i niech

$$h(x) := \int_0^x \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a} dt, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Jest to funkcja ciągła, różniczkowalna poza skończoną liczbą punktów, $h(0) = 0$, $h(1) = 2\pi i \text{Ind}_\gamma(a)$. Zauważmy, że

$$(e^{-h}(\gamma - a))' = e^{-h}(-h'(\gamma - a) + \gamma') = 0$$

poza skończoną liczbą punktów. Tak więc $e^{-h}(\gamma - a) = \text{const} = \gamma(0) - a$. Wynika stąd, że

$$e^h = \frac{\gamma - a}{\gamma(0) - a},$$

a stąd $e^{h(1)} = 1$, a więc $h(1) = 2\pi i \text{Ind}_\gamma(a) = 2\pi i k$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$. □

Ćwiczenie 2.1.9. (a)

$$\text{Ind}_{C(a,r)}(z) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } z \in K(a,r) \\ 0, & \text{gdy } z \notin \overline{K}(a,r) \end{cases}.$$

(b) Niech $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ będzie zamkniętą drogą Jordana zorientowaną dodatnio względem $\text{int } \gamma$. Wtedy

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } z \in \text{int } \gamma \\ 0, & \text{gdy } z \in \text{ext } \gamma \end{cases}.$$

Propozycja 2.1.10. Niech $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ będzie dowolną krzywą zamkniętą, niech $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ i niech $r := \text{dist}(a, \gamma^*)$. Niech $\sigma_j : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ będzie drogą zamkniętą taką, że $\|\sigma_j - \gamma\|_{[0,1]} \leq r/4$, $j = 1, 2$. Wtedy $\text{Ind}_{\sigma_1}(a) = \text{Ind}_{\sigma_2}(a)$. W szczególności, wzór

$$\text{Ind}_\gamma(a) := \lim_{\substack{\sigma - \text{droga zamknięta} \\ \|\sigma - \gamma\|_{[0,1]} \rightarrow 0}} \text{Ind}_\sigma(a), \quad a \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*,$$

definiuje $\text{Ind}_\gamma : \mathbb{C} \setminus \gamma^* \rightarrow \mathbb{Z}$ dla dowolnej krzywej zamkniętej $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$.

Dowód. Niech

$$\sigma := \frac{\sigma_1 - a}{\sigma_2 - a}.$$

Zauważmy, że

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{\frac{\sigma'_1(\sigma_2 - a) - (\sigma_1 - a)\sigma'_2}{(\sigma_2 - a)^2}}{\frac{\sigma_1 - a}{\sigma_2 - a}} = \frac{\sigma'_1}{\sigma_1 - a} - \frac{\sigma'_2}{\sigma_2 - a}.$$

Ponadto,

$$|\sigma - 1| = \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_2 - a} \right| \leq \frac{2 \frac{r}{4}}{\frac{3}{4}r} = \frac{2}{3}.$$

Ostatecznie

$$\text{Ind}_{\sigma_1}(a) - \text{Ind}_{\sigma_2}(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \left(\frac{\sigma'_1(t)}{\sigma_1(t) - a} - \frac{\sigma'_2(t)}{\sigma_2(t) - a} \right) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} dt = \text{Ind}_\sigma(0) = 0. \quad \square$$

Ćwiczenie 2.1.11. Czy uogólniony indeks zdefiniowany w Propozycji 2.1.10 ma wszystkie własności opisane w Propozycji 2.1.8?

Twierdzenie 2.1.12 (Twierdzenie Cauchy'ego–Goursata ⁽⁴⁾). Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie otwarty i niech $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ będzie taka, że $f'(z)$ istnieje dla dowolnego $z \in \Omega$.

(a)

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0$$

dla dowolnego zwanego trójkąta $T = \text{conv}\{a, b, c\}$, przy czym ∂T rozumiemy jako łamaną zamkniętą $[a, b, c, a]$.

Wynik pozostaje prawdziwy dla wszystkich funkcji $f \in \mathcal{C}(T)$ takich, że $f'(z)$ istnieje dla dowolnego $z \in \text{int } T$.

(b) Niech $D \subset\subset \Omega$ będzie obszarem, którego brzeg składa się ze skończonej liczby łamanych Jordana ⁽⁵⁾ zorientowanych dodatnio względem D . Wtedy

$$\int_{\partial D} f(z) dz := \sum_{j=0}^{p-1} \int_{\gamma_j} f(z) dz = 0.$$

Wynik pozostaje prawdziwy dla wszystkich funkcji $f \in \mathcal{C}(\overline{D})$ takich, że $f'(z)$ istnieje dla dowolnego $z \in D$.

(c) Jeżeli założymy dodatkowo, że $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ ⁽⁶⁾, to dla dowolnego obszaru $D \subset\subset \Omega$, którego brzeg składa się ze skończonej liczby dróg Jordana zorientowanych dodatnio względem D , mamy

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 0.$$

Dowód. (a) Przypadek, w którym T jest zdegenerowany jest oczywisty (ĆWICZENIE). Dalej zakładamy, że T nie jest zdegenerowany. Trójkąt $T_0 := T$ dzielimy przy pomocy środków boków $p := \frac{1}{2}(a+b)$, $q := \frac{1}{2}(b+c)$, $r := \frac{1}{2}(c+a)$ na cztery trójkąty $T_{0,1} = \text{conv}\{a, p, r\}$, $T_{0,2} = \text{conv}\{p, b, q\}$, $T_{0,3} = \text{conv}\{q, c, r\}$, $T_{0,4} = \text{conv}\{p, r, q\}$. Wtedy

$$\int_{\partial T_0} f(z) dz = \sum_{j=1}^4 \int_{\partial T_{0,j}} f(z) dz.$$

Niech T_1 oznacza jeden spośród trójkątów $T_{0,1}, \dots, T_{0,4}$, dla którego

$$\left| \int_{\partial T_1} f(z) dz \right| = \max \left\{ \left| \int_{\partial T_{0,j}} f(z) dz \right| : j = 1, 2, 3, 4 \right\}.$$

Oczywiście,

$$\left| \int_{\partial T_0} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{\partial T_1} f(z) dz \right|.$$

Teraz powtarzamy rozumowanie rekurencyjnie i otrzymujemy zstępujący ciąg trójkątów $(T_j)_{j=1}^\infty$ taki, że $\ell(\partial T_j) = 2^{-j} \ell(\partial T_0)$ oraz

$$\left| \int_{\partial T_0} f(z) dz \right| \leq 4^j \left| \int_{\partial T_j} f(z) dz \right|, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Niech $\{z_0\} := \bigcap_{j=1}^\infty T_j$, $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \alpha(z)(z - z_0)$, gdzie $\alpha(z) \rightarrow 0$ przy $z \rightarrow z_0$. Odnajemy, że funkcja $z \mapsto f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ ma oczywiście pierwotną. Korzystając z Propozycji 2.1.7, mamy

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial T_0} f(z) dz \right| &\leq 4^j \left| \int_{\partial T_j} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \alpha(z)(z - z_0)) dz \right| = 4^j \left| \int_{\partial T_j} \alpha(z)(z - z_0) dz \right| \\ &\leq 4^j \ell(\partial T_j) \max\{|\alpha(z)(z - z_0)| : z \in \partial T_j\} \leq 4^j \ell^2(\partial T_j) \|\alpha\|_{\partial T_j} = \ell^2(\partial T_0) \|\alpha\|_{\partial T_j} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Jeżeli tylko założymy, że $f \in \mathcal{C}(T)$ oraz $f'(z)$ istnieje dla dowolnego $z \in \text{int } T$, to na podstawie poprzedniego dowodu, mamy $\int_{\partial T'} f(z) dz = 0$ dla dowolnego trójkąta $T' \subset \text{int } T$. Ustalmy punkt $d \in \text{int } T$

⁽⁴⁾ Edouard Goursat (1858–1936) — matematyk francuski.

⁽⁵⁾ Camille Jordan (1838–1922) — matematyk francuski.

⁽⁶⁾ W przyszłości zobaczymy, że założenie to jest automatycznie spełnione — Twierdzenie 2.2.5

i niech $T' = T'_s := \text{conv}\{a + s(d - a), b + s(d - b), c + s(d - c)\} \subset \text{int } T$, $s \in (0, 1)$. Pokażemy, że $\int_{\partial T'_s} f(z) dz \rightarrow \int_{\partial T} f(z) dz$ przy $s \rightarrow 0$ (co zakończy dowód). Mamy:

$$\begin{aligned} \left| \int_{[a+s(d-a), b+s(d-b)]} f(z) dz - \int_{[a, b]} f(z) dz \right| \\ \leq \int_0^1 |f(a + s(d - a) + t(1 - s)(b - a))(1 - s) - f(a + t(b - a))|(b - a) dt \xrightarrow{s \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

(wobec jednostajnej ciągłości f na T) i analogicznie dla pozostałych odcinków.

(b) Poprzez triangulację (ĆWICZENIE).

(c) Korzystamy ze wzoru Greena z Analizy oraz z równań Cauchy'ego–Riemanna:

$$\int_{\partial D} f(z) dz = \int_{\partial D} u dx - v dy + i \int_{\partial D} v dx + u dy = \int_D (-v'_x - u'_y) + i \int_D (u'_x - v'_y) = 0. \quad \square$$

Propozycja 2.1.13. Niech $G \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem gwiaździstym względem punktu c i niech $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją ciągłą taką, że $\int_{\partial T} f(z) dz = 0$ dla dowolnego zwartego trójkąta $T \subset G$ (np. $f'(z)$ istnieje dla dowolnego $z \in G$ — Twierdzenie 2.1.12). Wtedy f ma w G pierwotną zespoloną. W szczególności, na podstawie Propozycji 2.1.7, $\int_\gamma f(z) dz = 0$ dla dowolnej drogi zamkniętej w G .

Dowód. Zdefiniujemy

$$F(z) := \int_{[c, z]} f(\zeta) d\zeta, \quad z \in G.$$

Ustalmy $a \in G$. Korzystając z założenia o zerowaniu się całki po brzegu trójkąta, dla małych h mamy

$$\left| \frac{F(a + h) - F(a)}{h} - f(a) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_{[a, a+h]} (f(z) - f(a)) dz \right| \leq \max\{|f(z) - f(a)| : z \in [a, a + h]\} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \quad \square$$

Propozycja 2.1.14 (Wzór całkowy Cauchy'ego). (a) Niech $G \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem gwiaździstym i niech $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$ będzie dowolną drogą zamkniętą. Niech $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ będzie taka, że $f'(z)$ istnieje dla dowolnego $z \in G$. Wtedy

$$f(a) \text{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - a} dz, \quad a \in G \setminus \gamma^*.$$

(b) Niech $f : \bar{K}(a, r) \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją ciągłą taką, że $f'(z)$ istnieje dla dowolnego $z \in K(a, r)$. Wtedy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in K(a, r).$$

W szczególności, dla $z = a$ dostajemy:

- twierdzenie o wartości średniej po okręgu

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta =: \mathbf{J}(f; a, r),$$

oraz nierówność

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})| d\theta = \mathbf{J}(|f|; a, r),$$

- twierdzenie o wartości średniej po kole

$$f(a) = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r s ds \int_0^{2\pi} f(a + se^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r \int_0^{2\pi} f(a + se^{i\theta}) s d\theta ds = \frac{1}{\pi r^2} \int_{K(a, r)} f d\mathcal{L}^2 := \mathbf{A}(f; a, r),$$

oraz nierówność

$$|f(a)| \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{K(a, r)} |f| d\mathcal{L}^2 = \mathbf{A}(|f|; a, r).$$

Dowód. (a) Ustalmy punkt $a \in G \setminus \gamma^*$ i niech

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}, & \text{jeżeli } z \in G \setminus \{a\} \\ f'(a), & \text{jeżeli } z = a \end{cases}.$$

Oczywiście g jest ciągła oraz $g'(z)$ istnieje dla $z \in G \setminus \{a\}$. Na podstawie Twierdzenia 2.1.12(a) dostajemy $\int_{\partial T} g(z)dz = 0$ dla dowolnego zwanego trójkąta $T \subset G$. Teraz, na podstawie Propozycji 2.1.13,

$$0 = \int_{\gamma} g(z)dz = \int_{\gamma} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} dz,$$

a stąd

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(a)}{z - a} dz = f(a) \text{Ind}_{\gamma}(a).$$

(b) Ustalmy $z \in K(a, r)$. Na podstawie (a) mamy

$$f(z) = f(z) \text{Ind}_{C(a,s)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,s)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + se^{it})}{z - a - se^{it}} se^{it} dt, \quad |z - a| < s < r.$$

Teraz pozostaje przejście graniczne $s \rightarrow r$. Aby móc skorzystać z twierdzenia Lebesgue'a o zmajorzowanym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki, wystarczy upewnić się, że funkcja podcałkowa ma całkowalną majorantę:

$$\left| \frac{f(a + se^{it})}{z - a - se^{it}} se^{it} \right| \leq \frac{\|f\|_{\overline{K}(a,r)}}{\varepsilon} r, \quad |z - a| + \varepsilon < s < r. \quad \square$$

Twierdzenie 2.1.15. Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie dowolnym obszarem i niech $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ będzie taka, że $f'(z)$ istnieje dla dowolnego $z \in D$. Niech $a, b \in D$ i niech $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow D$ będą dowolnymi drogami łączącymi a i b , które są homotopijne w D . Wtedy

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

Dowód. Niech $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow D$ będzie homotopią łączącą te drogi, tzn. H jest odwzorowaniem ciągłym takim, że $H(0, \cdot) = \gamma_0$, $H(1, \cdot) = \gamma_1$, $H(s, 0) = a$, $H(s, 1) = b$, $s \in [0, 1]$ ⁽⁷⁾. Ponieważ H jest jednostajnie ciągle, znajdziemy $\delta > 0$ takie, że jeżeli $|s' - s''| \leq \delta$ i $|t' - t''| \leq \delta$, to $|H(s', t') - H(s'', t'')| < r := \text{dist}(H([0, 1] \times [0, 1]), \partial D)$. Ustalmy $n \geq 1/\delta$ i niech $s_j = t_j := j/n$, $j = 0, \dots, n$. Niech $a_{j,k} = H(s_j, t_k)$ i niech σ_k oznacza łamaną $[a_{k,0}, a_{k,1}, \dots, a_{k,n-1}, a_{k,n}]$. Zauważmy, że $G_{j,k} := K(a_{j,k}, r) \subset D$, $G_{j,k}$ jest obszarem gwiaździstym oraz $H(s, t) \in G_{j,k}$ dla $|s - s_j| \leq \delta$ i $|t - t_k| \leq \delta$, $j, k = 1, \dots, n$. Korzystając z Propozycji 2.1.13 wnioskujemy teraz, że $\int_{\gamma_0|_{[t_{k-1}, t_k]}} f(z)dz = \int_{[a_{0,k-1}, a_{0,k}]} f(z)dz$, $k = 1, \dots, n$, a stąd $\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\sigma_0} f(z)dz$. Podobnie, $\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\sigma_n} f(z)dz$. Teraz wystarczy wykazać, że $\int_{\sigma_{j-1}} f(z)dz = \int_{\sigma_j} f(z)dz$, $j = 1, \dots, n$. Wiemy, że

$$\int_{[a_{j-1,k-1}, a_{j-1,k}, a_{j,k}, a_{j,k-1}, a_{j-1,k-1}]} f(z)dz = 0, \quad j, k = 1, \dots, n.$$

Dodając te całki dla $k = 1, \dots, n$ i redukując całki po przeciwnie przebieganych odcinkach, dostajemy żądany wzór. $\square$

Jako natychmiastowy wniosek otrzymujemy:

Twierdzenie 2.1.16 (Twierdzenie Cauchy'ego–Goursata i wzór Cauchy'ego dla obszarów jednospójnych). Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem homotopijnie jednospójnym i niech $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ będzie taka, że $f'(z)$ istnieje dla

⁽⁷⁾ Odnótujemy, że $H(s, \cdot)$ nie musi być drogą dla $0 < s < 1$.

dowolnego $z \in D$. Wtedy całka $\int_{\gamma} f(z)dz$ zależy wyłącznie od końców drogi $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$ — zob. Propozycja 2.1.7. W szczególności,

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0 \quad \text{oraz} \quad f(a) \operatorname{Ind}_{\gamma}(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz, \quad a \in D \setminus \gamma^*,$$

dla dowolnej drogi zamkniętej $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$.

Obserwacja 2.1.17. Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem i niech $f : D \rightarrow \mathbb{C}_*$ będzie taka, że $f'(z)$ istnieje dla dowolnego $z \in D$. Załóżmy, że L jest gałęzią jednoznacznej funkcji $\log f$ w D (tzn. $\exp L \equiv f$). Wtedy $L' = f'/f$. W szczególności, L jest pierwotną funkcji $\frac{f'}{f}$, co wobec Propozycji 2.1.7, oznacza, że dla dowolnych $a, b \in D$, całka $\int_a^b \frac{f'(z)}{f(z)} dz := \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ nie zależy od wyboru drogi γ łączącej a i b w D .

Istotnie, wiemy, że dla dowolnego $a \in D$, w pewnym otoczeniu punktu a mamy $L = \ell \circ f + 2k\pi i$, gdzie ℓ jest gałęzią logarytmu w otoczeniu $f(a)$, zaś $k \in \mathbb{Z}$ (Ćwiczenie 1.4.3). Pozostaje skorzystać z Obserwacji g.

Propozycja 2.1.18. Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem homotopijnie jednopójnym i niech $f : D \rightarrow \mathbb{C}_*$ będzie taka, że $f''(z)$ istnieje dla dowolnego $z \in D$ ⁽⁸⁾. Wtedy f ma w D jednoznaczną gałąź logarytmu L , która musi być postaci

$$L(z) = \int_a^z \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta + \operatorname{Log} f(a) + 2k\pi i, \quad z \in D,$$

dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.

Dowód. Funkcja f'/f ma w każdym punkcie obszaru D pochodną zespoloną. Pozwala to poprawnie określić funkcję

$$h(z) := \int_a^z \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta + \operatorname{Log} f(a), \quad z \in D,$$

gdzie a jest dowolnie ustalonym punktem z D . Wiemy, że $h' = f'/f$ w D , a stąd

$$(fe^{-h})' = f'e^{-h} - fe^{-h}h' \equiv 0.$$

Oznacza to, że

$$fe^{-h} = \operatorname{const} = f(a)e^{-h(a)} = f(a)e^{-\operatorname{Log} f(a)} = 1,$$

czyli $e^h \equiv f$. Tak więc h jest gałęzią jednoznacznej logarytmu f . Mamy $e^h = f = e^L$. Ostatecznie, $(h - L)/(2\pi i)$ jako funkcja ciągła o wartościach całkowitych, jest stała. $\square$

2.2. Funkcje holomorphyczne

Definicja 2.2.1. Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie otwarty i niech $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Powiemy, że f jest *holomorphyczna* w Ω ($f \in \mathcal{O}(\Omega)$), jeżeli dla dowolnego punktu $a \in \Omega$ istnieje szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ o dodatnim promieniu zbieżności R oraz liczba $0 < r \leq \min\{R, \operatorname{dist}(a, \partial\Omega)\}$ takie, że $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$, $z \in K(a, r)$. Jeżeli $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, to mówimy, że f jest *funkcją całkowitą*. Jeżeli $G \subset \mathbb{C}$ jest otwarty, zaś $f : \Omega \rightarrow G$ jest bijekcją taką, że $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $f^{-1} \in \mathcal{O}(G)$, to mówimy, że f jest odwzorowaniem *biholomorphycznym*.

Propozycja 2.2.2. Niech

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n, \quad |z-a| < R.$$

gdzie R oznacza promień zbieżności szeregu potęgowego. Wtedy $f'(z)$ istnieje dla dowolnego $z \in K(a, R)$ oraz prawdziwy jest wzór na różniczkowanie pod znakiem szeregu

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-a)^{n-1}, \quad z \in K(a, R). \quad (')$$

⁽⁸⁾ W przyszłości (Twierdzenie 2.2.5) zobaczymy, że istnienie $f''(z)$ dla dowolnego $z \in D$ wynika z istnienia $f'(z)$ dla dowolnego $z \in D$.

Ponadto, promień zbieżności szeregu (') jest równy R , co oznacza, że funkcja f ma w każdym punkcie $z \in K(a, r)$ wszystkie pochodne zespolone oraz

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} k! \binom{n}{k} a_n (z-a)^{n-k}, \quad z \in K(a, R).$$

W szczególności, f ma w $K(a, R)$ wszystkie pochodne zespolone oraz $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, czyli

$$f(z) = T_a f(z), \quad z \in K(a, R),$$

gdzie

$$T_a f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$$

oznacza szereg Taylora ⁽⁹⁾ funkcji f w punkcie a .

Dowód. ĆWICZENIE. □

Zdefiniujemy promień zbieżności szeregu Taylora funkcji f w punkcie a

$$d(T_a f) := \sup\{r \geq 0 : \text{szereg } T_a f(z) \text{ jest zbieżny jednostajnie w } \overline{K}(a, r)\}.$$

Wniosek 2.2.3. Jeżeli $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, to f ma w każdym punkcie $z \in \Omega$ wszystkie pochodne zespolone, $f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{C})$ oraz $f^{(k)} \in \mathcal{O}(\Omega)$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$.

Lemat 2.2.4 (Lemat o produkcyj funkcji holomorfixnych). Niech $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ będzie dowolną drogą i niech $g : \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$ będzie dowolną funkcją ciągłą. Zdefiniujemy

$$f(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*.$$

Wtedy $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \gamma^*)$,

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*, \quad k \in \mathbb{N},$$

tzn. prawdziwy jest wzór na różniczkowanie pod znakiem całki, oraz

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n = T_a f(z), \quad a \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*, \quad |z-a| < \text{dist}(a, \gamma^*).$$

W szczególności, $d(T_a f) \geq \text{dist}(a, \gamma^*)$, $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

Dowód. Ustalmy $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$, niech $r := \text{dist}(a, \gamma^*)$ i niech $0 < \theta < 1$. Wtedy dla $z \in K(a, \theta r)$ i $\zeta \in \gamma^*$ mamy

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}},$$

przy czym szereg jest zbieżny jednostajnie ponieważ $|\frac{z-a}{\zeta-a}| \leq \theta$. Wynika stąd, że

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \right) (z-a)^n, \quad z \in K(a, r). \quad \square$$

Twierdzenie 2.2.5 (Charakteryzacja funkcji holomorfixnych). Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie otwarty i niech $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Wtedy NWSR:

- (i) $f'(z)$ istnieje dla dowolnego $z \in \Omega$;
- (ii) $f'_{\mathbb{R}}(z)$ istnieje dla dowolnego $z \in \Omega$ oraz $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0$, $z \in \Omega$ (tzn. f spełnia w każdym punkcie równania Cauchy'ego–Riemanna);

⁽⁹⁾ Brook Taylor (1717–1783) — matematyk angielski.

- (iii) $f \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C})$ oraz $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$ dla dowolnego trójkąta zwanego $T \subset \subset \Omega$ (równoważność (i) $\iff$ (iii) to tzw. twierdzenie Morery ⁽¹⁰⁾);
 (iv) $f \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C})$ oraz dla dowolnego obszaru gwiazdowego $G \subset \Omega$ funkcja f ma w G pierwotną zespoloną;
 (v) $f \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C})$ oraz dla dowolnego koła $K(a, r) \subset \subset \Omega$ zachodzi wzór

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in K(a, r);$$

- (vi) dla dowolnego $a \in \Omega$ funkcja f ma w punkcie a wszystkie pochodne zespolone $f^{(n)}(a)$, $n \in \mathbb{N}$, oraz

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n, \quad |z-a| < \text{dist}(a, \partial\Omega);$$

- (vii) $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Dowód. (i) $\xrightarrow{\text{Prop. 2.1.2}}$ (ii) $\xrightarrow{\text{Tw. 2.1.12}}$ (iii) $\xrightarrow{\text{Prop. 2.1.13}}$ (iv) $\xrightarrow{(*)}$ (v) $\xrightarrow{\text{Lemat 2.2.4}}$ (vi) $\xrightarrow{\text{Def. 2.2.1}}$ (vii) $\xrightarrow{\text{Prop. 2.2.2}}$ (i), gdzie $(*)$ wynika z następującego rozumowania: Na podstawie Propozycji 2.1.14, (v) zachodzi dla funkcji F i $K(a, r) \subset \subset G$. Stąd, na podstawie implikacji (v) $\implies$ (vii), $F \in \mathcal{O}(G)$. Teraz, na podstawie Wniosku 2.2.3, $f'(z)$ istnieje dla dowolnego $z \in \Omega$ i możemy zastosować Propozycję 2.1.14 do f . $\square$

Obserwacja 2.2.6. Mając Twierdzenie 2.2.5, możemy „przetłumaczyć” szereg wyników formułowanych poprzednio dla funkcji mających w każdym punkcie pochodne zespolone na język funkcji holomorphyzycznych. Dotyczy to np. Propozycji 2.1.14, 2.1.16, 2.1.18.

Twierdzenie 2.2.7 (Twierdzenie Cauchy’ego–Goursata i wzór Cauchy’ego dla obszarów jednospójnych). Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem homotopijnie jednospójnym i niech $f \in \mathcal{O}(D)$. Wtedy całka $\int_{\gamma} f(z)dz$ zależy wyłącznie od końców drogi $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$. W szczególności, $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$ oraz

$$f(a) \text{Ind}_{\gamma}(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz, \quad a \in D \setminus \gamma^*,$$

dla dowolnej drogi zamkniętej $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$.

Propozycja 2.2.8. Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem homotopijnie jednospójnym i niech $f : D \rightarrow \mathbb{C}_*$ będzie holomorphyzna. Wtedy f ma w D jednoznaczłą gałąź logarytmu L , która musi być postaci

$$L(z) = \int_a^z \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta + \text{Log } f(a) + 2k\pi i, \quad z \in D,$$

dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. W szczególności, każda gałąź logarytmu f jest holomorphyzna i $L' = \frac{f'}{f}$.

Twierdzenie 2.2.9 (Twierdzenie Cauchy’ego–Goursata i wzór Cauchy’ego dla obszarów p -spójnych). Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem p -spójnym takim, którego brzeg składa się z p dróg Jordana zorientowanych dodatnio względem D . Niech $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, gdzie $\Omega \supset \overline{D}$. Wtedy

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0 \text{ oraz } f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a} dz, \quad a \in D.$$

Jeżeli ∂D składa się z p łamanych Jordana zorientowanych dodatnio względem D , to wynik pozostaje prawdziwy dla $f \in \mathcal{O}(D) \cap \mathcal{C}(\overline{D})$.

Dowód. Wynik wynika bezpośrednio z Twierdzenia 2.1.12 oraz faktu, że drugi ze wzorów jest konsekwencją pierwszego. Istotnie, ustalmy $a \in D$ i niech

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}, & \text{gdy } z \neq a \\ f'(a), & \text{gdy } z = a \end{cases}.$$

⁽¹⁰⁾ Giacinto Morera (1856–1909) — matematyk włoski.

2.3. Podstawowe własności funkcji holomorficznych

Wtedy $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ (odp. $g \in \mathcal{O}(D) \cap \mathcal{C}(\overline{D})$) (por. dowód Propozycji 2.1.14(a)). Na podstawie pierwszej części twierdzenia mamy $\int_{\partial D} g(z) dz = 0$, czyli

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(a)}{z-a} dz = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{f(a)}{z-a} dz = f(a) \sum_{j=0}^{p-1} \text{Ind}_{\gamma_j}(a) = f(a) \text{Ind}_{\gamma_0}(a) = f(a). \quad \square$$

2.3. Podstawowe własności funkcji holomorficznych

Jako natychmiastowe wnioski z Twierdzenia 2.2.5 dostajemy.

Propozycja 2.3.1. (a) $\mathcal{O}(\Omega)$ jest algebrą.

(b) Złożenie funkcji holomorficznych jest funkcją holomorficzną.

(c) Jeżeli $f : \Omega \rightarrow G$ jest bijekcją, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ oraz $f'(z) \neq 0$, $z \in \Omega$ ⁽¹¹⁾, to $f^{-1} \in \mathcal{O}(G)$.

Propozycja 2.3.2 (Twierdzenie Weierstrassa ⁽¹²⁾). Niech $(f_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ i niech $f_k \rightarrow f_0$ niemal jednostajnie w Ω . Wtedy $f_0 \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Dowód. Oczywiście $f_0 \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C})$. Ponadto, dla dowolnego koła $K(a, r) \subset \subset \Omega$ mamy

$$f_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in K(a, r), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ponieważ $f_k \rightarrow f_0$ jednostajnie na $C(a, r)$, dostajemy

$$f_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f_0(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in K(a, r).$$

Teraz wystarczy skorzystać z Twierdzenia 2.2.5(v). □

Lemat 2.3.3. Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem i niech $f = u + iv \in \mathcal{O}(D)$. Jeżeli $|f| = \text{const}$, to $f = \text{const}$.

Dowód. Niech $u^2 + v^2 = c = \text{const}$. Przypadek $c = 0$ jest trywialny. Załóżmy więc, że $c > 0$. Różniczkując dostajemy

$$uu'_x + vv'_x = 0, \quad uu'_y + vv'_y = 0,$$

co, wobec równań Cauchy'ego–Riemanna, daje

$$uu'_x - vv'_y = 0, \quad vv'_x + uu'_y = 0.$$

Wyznacznik tego układu to $u^2 + v^2 \neq 0$. Wynika stąd, że $u'_x = u'_y = v'_x = v'_y = 0$, a więc $f = \text{const}$. □

Propozycja 2.3.4 (Zasada identyczności). Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem i niech $f, g \in \mathcal{O}(D)$,

$$A := \{z \in D : f(z) = g(z)\}.$$

Jeżeli zbiór A ma punkt skupienia w D , to $f \equiv g$.

W szczególności, jeżeli $f \in \mathcal{O}(D)$, $f \not\equiv 0$, to zbiór $f^{-1}(0)$ składa się z punktów izolowanych.

Dowód. Zastępując (f, g) przez $(f - g, 0)$, redukujemy pytanie do przypadku $g \equiv 0$. Niech

$$D_0 := \{a \in D : \exists r > 0 : f = 0 \text{ w } K(a, r)\}.$$

Zbiór $D_0 \subset A$ jest oczywiście otwarty. Aby zobaczyć, że jest niepusty, niech a będzie punktem skupienia zbioru A , tzn. dla pewnego ciągu $(a_k)_{k=1}^{\infty} \subset A \setminus \{a\}$ mamy $a_k \rightarrow a$. Mamy oczywiście $f(a) = 0$. Niech

$$k := \sup\{n \in \mathbb{Z}_+ : \forall 0 \leq m \leq n : f^{(m)}(a) = 0\}.$$

Jeżeli $k = +\infty$, to $T_a f = 0$, a stąd $f = 0$ w $K(a, d_\Omega(a)) =: K(a, R)$. Przypuśćmy, że $k < +\infty$. Ponieważ $f(z) = T_a f(z)$, $z \in K(a, R)$, wnioskujemy, że $f(z) = (z - a)^k \tilde{f}(z)$, $z \in K(a, R)$, gdzie $\tilde{f} \in \mathcal{O}(K(a, R))$,

⁽¹¹⁾ W przyszłości zobaczymy (Propozycja 4.3.3), że jeżeli $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ jest iniektywnym odwzorowaniem holomorficznym, to $f'(z) \neq 0$, $z \in \Omega$.

⁽¹²⁾ Karl Weierstrass (1815–1897) — matematyk niemiecki.

$\tilde{f}(a) \neq 0$. Z drugiej strony, ponieważ $f(a_k) = 0$, dostajemy $\tilde{f}(a_k) = 0$, $k \in \mathbb{N}$. Wynika stąd, że $\tilde{f}(a) = 0$, co prowadzi do sprzeczności.

Powyższe rozumowanie pokazuje również, że zbiór A jest domknięty w D , a więc $D_0 = D$. $\square$

Obserwacja 2.3.5. Niech P będzie wielomianem zespolonym dwóch zmiennych zespolonych. Wobec zasady identyczności, jeżeli $P(\sin x, \cos x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R}$, to $P(\sin z, \cos z) = 0$ dla $z \in \mathbb{C}$.

Obserwacja ta pozwala na „automatyczne” przenoszenie wzorów trygonometrycznych z przypadku rzeczywistego na zespolony.

ĆWICZENIE: Czy da się na tej drodze uzyskać wzór $\operatorname{tg} 2z = \frac{2 \operatorname{tg} z}{1 - \operatorname{tg}^2 z}$?

Wniosek 2.3.6. Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem otwartym i niech $f \in C^\omega(I, \mathbb{C})$. Wtedy istnieją obszar $D \subset \mathbb{C}$ i funkcja $\tilde{f} \in \mathcal{O}(D)$ takie, że $D \cap \mathbb{R} = I$ oraz $\tilde{f} = f$ na I .

Dowód. Dla dowolnego $a \in I$ istnieje $r_a > 0$ oraz szereg potęgowy $S_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ takie, że $(a-r_a, a+r_a) \subset I$, promień zbieżności szeregu S_a jest $\geq r_a$ oraz $f(x) = S_a(x)$ dla $x \in (a-r_a, a+r_a)$. Suma szeregu S_a jako funkcja zmiennej zespolonej definiuje funkcję $\tilde{f}_a \in \mathcal{O}(K(a, r_a))$ taką, że $\tilde{f}_a(x) = f(x)$ dla $x \in (a-r_a, a+r_a)$. Niech $D := \bigcup_{a \in I} K(a, r_a)$. Wobec zasady identyczności, jeżeli $K(a, r_a) \cap K(b, r_b) \neq \emptyset$, to $\tilde{f}_a = \tilde{f}_b$ na $K(a, r_a) \cap K(b, r_b)$ (bo $\tilde{f}_a = f = \tilde{f}_b$ na $K(a, r_a) \cap K(b, r_b) \cap I \neq \emptyset$). Możemy więc położyć $\tilde{f} := \tilde{f}_a$ na $K(a, r_a)$. $\square$

Propozycja 2.3.7 (Zasada maksimum). Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem, $f \in \mathcal{O}(D)$, $f \neq \text{const}$. Wtedy:

- (a) $|f|$ nie przyjmuje w D maksimum lokalnego.
- (b) $|f|$ nie przyjmuje minimum lokalnego w żadnym punkcie $a \in D$ takim, że $f(a) \neq 0$.
- (c) Jeżeli D jest ograniczony, to

$$|f(z)| < \sup_{w \rightarrow \zeta} \{\limsup |f(w)| : \zeta \in \partial D\}, \quad z \in D.$$

- (d) Jeżeli D jest ograniczony oraz $|f|$ przedłuża się do funkcji półciągłej z góry na $\overline{D}$, to

$$|f(z)| < \max_{\overline{D}} |f|, \quad z \in D.$$

Dowód. (a) Przypuśćmy, że $|f(z)| \leq |f(a)|$, $z \in K(a, r) \subset \subset D$. Na podstawie Propozycji 2.1.14(b) mamy

$$|f(a)| \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{K(a, r)} |f| d\mathcal{L}^2 \leq |f(a)|.$$

Wynika stąd, iż $|f(z)| = |f(a)|$ dla prawie wszystkich $z \in K(a, r)$, co wobec ciągłości funkcji f , implikuje, że $|f(z)| = |f(a)|$ dla wszystkich $z \in K(a, r)$. Teraz, korzystając z Lematu 2.3.3 wnioskujemy, że $f = \text{const}$ na $K(a, r)$, i ostatecznie, na podstawie zasady identyczności, że $f \equiv \text{const}$ w D ; sprzeczność.

- (b) Stosujemy (a) do funkcji $1/f$ (określonej w otoczeniu punktu a).

(c) Ustalmy $z_0 \in D$ i niech $(D_k)_{k=1}^{\infty}$ będzie ciągiem obszarów takim, że $z_0 \in D_1 \subset D_k \subset D_{k+1} \subset \subset D$, $D = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$. Dla każdego k istnieje punkt $w_k \in \overline{D_k}$ taki, że $|f(w_k)| = \max_{\overline{D_k}} |f|$. Wobec (a) oraz zasady identyczności, mamy $|f(z_0)| < |f(w_k)| \leq |f(w_{k+1})|$. Przechodząc do podciągu, możemy założyć, że $w_k \rightarrow \zeta \in \partial D$. Wtedy $|f(z_0)| < \limsup_{k \rightarrow +\infty} |f(w_k)| \leq \limsup_{w \rightarrow \zeta} |f(w)|$.

- (d) wynika z (c). $\square$

Dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset \mathbb{C}$ niech

$$K^{(r)} := \bigcup_{a \in K} \overline{K}(a, r).$$

Zauważmy, że $K^{(r)}$ jest również zbiorem zwartym (ĆWICZENIE).

Dla zbioru otwartego $\Omega \subset \mathbb{C}$ niech $d_\Omega(a) := \sup\{r > 0 : K(a, r) \subset \Omega\}$, $a \in \Omega$. Oczywiście, $d_\Omega(a) = \operatorname{dist}(a, \partial\Omega)$ o ile $\Omega \neq \mathbb{C}$ i $d_\mathbb{C} \equiv +\infty$. Jeżeli $\Omega \neq \mathbb{C}$, to $|d_\Omega(a) - d_\Omega(b)| \leq |a - b|$, $a, b \in \Omega$; w szczególności, d_Ω jest funkcją ciągłą.

Dla dowolnego zbioru $A \subset \Omega$ niech $d_\Omega(A) := \inf\{d_\Omega(a) : a \in A\}$. Zauważmy, że $K^{(r)} \subset \Omega$ dla $0 < r < d_\Omega(K)$ (ĆWICZENIE).

Propozycja 2.3.8 (Nierówności Cauchy'ego). (a) Niech $f \in \mathcal{O}(K(a, r))$, $|f| \leq C$. Wtedy

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{r^n} C, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(b) Niech $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Wtedy dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset \subset \Omega$ oraz $0 < r < d_\Omega(K)$ mamy

$$\|f^{(n)}\|_K \leq \frac{n!}{r^n} \|f\|_{K^{(r)}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dowód. (a) Na podstawie Propozycji 2.1.14 i Lematu 2.2.4, dla dowolnego $0 < s < r$, mamy

$$|f^{(n)}(a)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{C(a,s)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(a + se^{i\theta})|}{s^n} d\theta \leq \frac{n!}{s^n} C, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(b) wynika z (a). □

Wniosek 2.3.9 (Twierdzenie Weierstrassa). Niech $(f_k)_{k=1}^\infty \subset \mathcal{O}(\Omega)$ i niech $f_k \rightarrow f_0$ niemal jednostajnie w Ω . Wtedy $f_0 \in \mathcal{O}(\Omega)$ oraz, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, mamy $f_k^{(n)} \rightarrow f_0^{(n)}$ niemal jednostajnie w Ω .

Dla zbioru $\Omega \subset \mathbb{C}$ niech $L_h^p(\Omega) := L^p(\Omega) \cap \mathcal{O}(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$. $\mathcal{H}^\infty(\Omega) := L_h^\infty(\Omega)$ to przestrzeń funkcji holomorficzych ograniczonych. $L_h^2(\Omega)$ jest przestrzenią unitarną z iloczynem skalarnym

$$L_h^2(\Omega) \times L_h^2(\Omega) \ni (f, g) \mapsto \int_\Omega f \bar{g} d\mathcal{L}^2.$$

Propozycja 2.3.10. Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie zbiorem otwartym.

(a) Dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset \Omega$ mamy

$$\|f\|_K \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{K^{(r)}} |f| d\mathcal{L}^2, \quad f \in \mathcal{O}(\Omega), \quad 0 < r < d_\Omega(K).$$

(b) Dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset \Omega$ mamy

$$\|f\|_K \leq \frac{1}{\pi r^2} (\mathcal{L}(K^{(r)}))^{1/q} \left(\int_{K^{(r)}} |f|^p d\mathcal{L}^2 \right)^{1/p}, \quad f \in \mathcal{O}(\Omega), \quad 0 < r < d_\Omega(K), \quad 1 < p < +\infty,$$

gdzie $1/p + 1/q = 1$.

(c) $L_h^p(\Omega)$ jest przestrzenią Banacha, $1 \leq p \leq +\infty$.

(d) $L_h^2(\Omega)$ jest przestrzenią Hilberta.

Dowód. (a) wynika natychmiast z nierówności $|f(a)| \leq \mathbf{A}(|f|; a, r)$, $0 < r < d_\Omega(a)$, $a \in K$.

(b) wynika z (a) i nierówności Höldera ⁽¹³⁾.

(c) i (d) wynikają z (b) i twierdzenia Weierstrassa. □

Propozycja 2.3.11 (Twierdzenie Liouville'a ⁽¹⁴⁾). Niech $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Wtedy $f \in \mathcal{P}_d(\mathbb{C})$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnych stałych $R, C > 0$ mamy:

$$|f(z)| \leq C|z|^d, \quad |z| \geq R, \tag{2.3.1}$$

lub, równoważnie,

$$|f(z)| \leq M(1 + |z|)^d, \quad z \in \mathbb{C},$$

dla pewnej stałej $M > 0$.

⁽¹³⁾ Otto Hölder (1859–1937) — matematyk niemiecki.

⁽¹⁴⁾ Joseph Liouville (1809–1882) — matematyk francuski.

Dowód. Sprawdzenie, że każdy wielomian zespolony spełnia (2.3.1) pozostawiamy jako ĆWICZENIE.

Założmy teraz, że nierówność (2.3.1) jest spełniona. Wiemy, że $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$, gdzie, na podstawie nierówności Cauchy'ego, dla $r \geq R$ i $n > d$ mamy

$$|a_n| = \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| \leq \frac{Cr^d}{r^n} = Cr^{d-n} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0. \quad \square$$

Propozycja 2.3.12 (Lemat Schwarza ⁽¹⁵⁾). Niech $f \in \mathcal{O}(K(r))$, $|f| \leq C$, $f(0) = \dots = f^{(k-1)}(0) = 0$ ($k \in \mathbb{N}$). Wtedy

$$|f(z)| \leq C(|z|/r)^k, \quad z \in K(r), \quad |f^{(k)}(0)| \leq k!C/r^k.$$

Ponadto, jeżeli $|f(z_0)| = C(|z_0|/r)^k$ dla pewnego $z_0 \in K_*(r)$ lub $|f^{(k)}(0)| = k!C/r^k$, to $f(z) = Ce^{i\theta_0}(z/r)^k$, $z \in K(r)$, dla pewnego $\theta_0 \in \mathbb{R}$.

Dowód. Niech

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)}{z^k}, & z \in K_*(r) \\ \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, & z = 0 \end{cases}, \quad z \in K(r).$$

Oczywiście $g \in \mathcal{O}(K(r))$ (ĆWICZENIE). Ponadto, na podstawie zasady maksimum, mamy

$$|g(z)| \leq \sup_{\zeta \in C(r)} \limsup_{w \rightarrow \zeta} |g(w)| \leq C/r^k, \quad z \in K(r),$$

skąd natychmiast wynika teza. □

Dla dowolnego obszaru $D \subset \mathbb{C}$ niech $\text{Aut}(D)$ oznacza zbiór wszystkich odwzorowań biholomorfcznych $f : D \rightarrow D$. Jest to oczywiście grupa (ze składaniem). Przypomnijmy (Obserwacja 1.3.1(11)), że grupa $\text{Aut}_{\mathcal{H}}(\mathbb{D})$ składająca się ze wszystkich homografii przekształcających $\mathbb{D}$ na $\mathbb{D}$ ma postać

$$\text{Aut}_{\mathcal{H}}(\mathbb{D}) = \{\zeta h_a : \zeta \in \mathbb{T}, a \in \mathbb{D}\},$$

gdzie

$$h_a(z) := \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{1/\bar{a}\}.$$

Zauważmy, że $(h_a)^{-1} = h_{-a}$. Ponadto,

$$h'_a(z) = \frac{1 - \bar{a}z - (z - a)(-\bar{a})}{(1 - \bar{a}z)^2} = \frac{1 - |a|^2}{(1 - \bar{a}z)^2}.$$

W szczególności, $h'_a(a) = \frac{1}{1 - |a|^2}$.

Propozycja 2.3.13. $\text{Aut}(\mathbb{D}) = \text{Aut}_{\mathcal{H}}(\mathbb{D})$. W szczególności, grupa $\text{Aut}(\mathbb{D})$ działa tranzytywnie na $\mathbb{D}$.

Dowód. Ustalmy $g \in \text{Aut}(\mathbb{D})$. Wtedy $f := h_{g(0)} \circ g \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ oraz $f(0) = 0$. Wystarczy więc pokazać, że zbiór $\text{Aut}_0(\mathbb{D}) := \{f \in \text{Aut}(\mathbb{D}) : f(0) = 0\}$ to grupa obrotów. Z lematu Schwarza zastosowanego do f i do f^{-1} wnioskujemy, że $|f(z)| = |z|$, $z \in \mathbb{D}$, skąd natychmiast wynika teza. □

2.4. Rodziny normalne, twierdzenia Montela i Vitaliego

Definicja 2.4.1. Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem. Powiemy, że rodzina $\mathcal{R} \subset \mathcal{O}(D)$ jest *normalna*, jeżeli z dowolnego ciągu $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{R}$ można wybrać podciąg $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ taki, że $f_{n_k} \rightarrow f$ niemal jednostajnie w D (w sensie metryki $d_{\hat{\mathbb{C}}}$) do pewnej funkcji $f : D \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, gdzie albo $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, albo $f \equiv \infty$.

Dla przykładu, rodzina $\mathcal{R} := \{z^n : n \in \mathbb{N}\}$ jest normalna na $\mathbb{D}$, jest normalna na $\mathbb{A}(1, +\infty)$, ale nie jest normalna na $\mathbb{C}$.

Lemat 2.4.2. Każda rodzina lokalnie normalna jest normalna.

⁽¹⁵⁾ Hermann Schwarz (1789–1857) — matematyk niemiecki.

Dowód. Dla $a \in D$ niech $U_a \subset D$ będzie kołem o środku w punkcie a takim, że rodzina $\mathcal{R}|_{U_a}$ jest normalna. Na podstawie twierdzenia Lindelöfa, istnieje ciąg $(a_k)_{k=1}^\infty \subset D$ taki, że $D = \bigcup_{k=1}^\infty U_{a_k}$. Ustalmy dowolny ciąg $(f_{0,n})_{n=1}^\infty \subset \mathcal{R}$. Dla $k \in \mathbb{N}$, niech $(f_{k,n})_{n=1}^\infty$ będzie podciągiem ciągu $(f_{k-1,n})_{n=1}^\infty$ takim, że $f_{k,n} \rightarrow f_k$ niemal jednostajnie na U_{a_k} . Przekątniowa metoda wyboru daje podciąg $(f_{n_\ell})_{\ell=1}^\infty$ taki, że $f_{n_\ell} \rightarrow f_k$ niemal jednostajnie na U_{a_k} . Korzystając z tego, że D jest obszarem, bez trudu wykluczamy sytuację, w której $f_{k'}(U_{a_{k'}}) \subset \mathbb{C}$, ale $f_{k''} \equiv \infty$ dla pewnych k', k'' (ĆWICZENIE). $\square$

Propozycja 2.4.3 (Twierdzenie Montela ⁽¹⁶⁾). *Niech $(f_k)_{k=1}^\infty \subset \mathcal{O}(\Omega)$ będzie ciągiem lokalnie ograniczonym. Wtedy istnieje podciąg $(f_{k_n})_{n=1}^\infty$ zbieżny niemal jednostajnie na Ω .*

W szczególności, dla dowolnego obszaru $D \subset \mathbb{C}$, każda niemal jednostajnie ograniczona rodzina $\mathcal{R} \subset \mathcal{O}(D)$ jest normalna.

Dowód. Na wstępie zauważmy, że ciąg $(f_k)_{k=1}^\infty$ jest rodziną równością. Istotnie, jeżeli $K(a, r) \subset\subset \Omega$ i $|f_k(\zeta)| \leq C$, $\zeta \in K(a, r)$, $k \in \mathbb{N}$, to dla $z \in K(a, r)$, na podstawie Lematu Schwarza, mamy

$$|f_k(z) - f_k(a)| \leq \frac{2C}{r}|z - a|.$$

Niech $A \subset \Omega$ będzie dowolnym zbiorem przeliczalnym gęstym. Stosując przekątniową metodę wyboru dostajemy podciąg $(f_{k_n})_{n=1}^\infty$, który jest zbieżny punktowo na A . Wobec równością, podciąg ten musi być lokalnie jednostajnie zbieżny. Istotnie, niech $K(a, r) \subset\subset \Omega$ dla pewnego $a \in A$, i niech $\varepsilon > 0$. Wobec równością, istnieje $0 < \delta \leq r$ taka, że $|f_{k_n}(z) - f_{k_n}(a)| \leq \varepsilon$ dla $z \in K(a, \delta)$ i wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Ponadto, istnieje n_0 takie, że dla $n, m \geq n_0$ zachodzi $|f_{k_n}(a) - f_{k_m}(a)| \leq \varepsilon$. Wtedy dla $z \in K(a, \delta)$ i $n, m \geq n_0$ mamy

$$|f_{k_n}(z) - f_{k_m}(z)| \leq |f_{k_n}(z) - f_{k_n}(a)| + |f_{k_n}(a) - f_{k_m}(a)| + |f_{k_m}(a) - f_{k_m}(z)| \leq 3\varepsilon.$$

Ostatni fragment dowodu to nic innego niż twierdzenie Arzeli–Ascoliego ⁽¹⁷⁾ ⁽¹⁸⁾. $\square$

Propozycja 2.4.3 może być znacznie wzmocniona.

Twierdzenie* 2.4.4 (Twierdzenie Montela). *Dla dowolnego obszaru $D \subset \mathbb{C}$, dowolna rodzina $\mathcal{R} \subset \mathcal{O}(D)$ taka, że istnieją $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$, $w_1 \neq w_2$, takie, że $w_1, w_2 \notin f(D)$, $f \in \mathcal{R}$, jest normalna.*

Propozycja 2.4.5 (Twierdzenie Vitalego ⁽¹⁹⁾). *Niech $(f_k)_{k=1}^\infty \subset \mathcal{O}(D)$ będzie ciągiem lokalnie ograniczonym. Załóżmy, że ciąg ten jest zbieżny punktowo na pewnym zbiorze $A \subset D$ mającym punkt skupienia w D . Wtedy $(f_k)_{k=1}^\infty$ jest zbieżny niemal jednostajnie w D .*

Dowód. Wobec twierdzenia Montela wystarczy pokazać, że ciąg $(f_k)_{k=1}^\infty$ jest zbieżny punktowo na D . Przypuśćmy, że dla pewnego $a \in D$ istnieją dwa podciągi $(f_{k_n})_{n=1}^\infty$ i $(f_{s_n})_{n=1}^\infty$ takie, że $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_{k_n}(a) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f_{s_n}(a)$. Wobec twierdzenia Montela możemy założyć, że $f_{k_n} \rightarrow p$, $f_{s_n} \rightarrow q$ niemal jednostajnie w D , gdzie $p, q \in \mathcal{O}(D)$. Wiemy, że $p = q$ na A , a stąd, wobec zasady identyczności, $p \equiv q$. W szczególności, $p(a) = q(a)$ — sprzeczność. $\square$

2.5. Zasada symetrii Riemanna–Schwarza

Twierdzenie 2.5.1 (Zasada symetrii Riemanna–Schwarza). *Niech $C_1, C_2 \subset \mathbb{C}$ będą okręgami właściwymi lub nie. Niech $D \subset \text{int } C_1$ będzie obszarem (jeżeli C_j jest prostą, to $\text{int } C_j$ definiujemy jako jedną z półpłaszczyzn, na które C_j dzieli $\mathbb{C}$). Załóżmy, że $(\partial D) \cap C_1$ zawiera pewien otwarty łuk (odcinek) L . Niech $f \in \mathcal{O}(D) \cap \mathcal{C}(D \cup L)$ będzie taka, że $f(L) \subset C_2$. Niech $\mathbb{C} \ni z \mapsto S_j(z) \in \mathbb{C}$ oznacza operator symetrii względem C_j , $j = 1, 2$. Zdefiniujemy,*

$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z), & \text{jeżeli } z \in D \cup L \\ S_2(f(S_1(z))), & \text{jeżeli } S_1(z) \in D \end{cases}.$$

Wtedy $f \in \mathcal{O}(D \cup L \cup S_1(D))$.

⁽¹⁶⁾ Paul Montel (1876–1975) — matematyk francuski.

⁽¹⁷⁾ Cesare Arzelà (1847–1912) — matematyk włoski.

⁽¹⁸⁾ Giulio Ascoli (1843–1896) — matematyk włoski.

⁽¹⁹⁾ Giuseppe Vitali (1875–1932) — matematyk włoski.

W szczególności, jeżeli $C_1 = C_2 = \mathbb{R}$, to

$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z), & \text{jeżeli } z \in D \cup L \\ \overline{f(\bar{z})}, & \text{jeżeli } \bar{z} \in D \end{cases}.$$

Dowód. Po obłożeniu stosownymi homografiami i skorzystaniu z tego, iż homografie przekształcają punkty symetryczne na symetryczne (por. Obserwacja 1.3.1), sprowadzamy dowód do przypadku $C_1 = C_2 = \mathbb{R}$. Ten zaś przypadek wynika łatwo z twierdzenia Morery — ĆWICZENIE. $\square$

Wniosek 2.5.2. Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem takim, że $L_1 \subset \partial D$, gdzie $L_1 = \gamma_1((0, 1))$ jest obrazem pewnego otwartego łuku analitycznego, tzn. $\gamma_1 : (0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ jest iniektywnym odwzorowaniem analitycznym takim, że $\gamma_1'(t) \neq 0$, $t \in (0, 1)$. Niech $f \in \mathcal{O}(D) \cap \mathcal{C}(D \cup L_1)$ będzie taka, że $f(L_1) \subset L_2$, gdzie $L_2 = \gamma_2((0, 1))$ jest obrazem pewnego otwartego łuku analitycznego. Wtedy f przedłuża się holomorficznie poprzez L_1 , tzn. istnieją obszar $\tilde{D} \supset D \cup L_1$ oraz $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\tilde{D})$ takie, że $\tilde{f} = f$ na $D \cup L_1$.

Dowód. Wystarczy pokazać (ĆWICZENIE), że dla dowolnego $a \in L_1$ istnieje $r > 0$ takie, że L_1 dzieli $K(a, r)$ na dwa obszary oraz istnieje funkcja $\tilde{f}_a \in \mathcal{O}(K(a, r))$ taka, że $\tilde{f}_a = f$ na $K(a, r) \cap (D \cup L_1)$.

Niech $\tilde{\gamma}_j : U_j \rightarrow \mathbb{C}$ będzie holomorficznym rozszerzeniem funkcji γ_j (Wniosek 2.3.6), gdzie $U_j \subset \mathbb{C}$ jest obszarem i $U_j \cap \mathbb{R} = (0, 1)$. Możemy założyć, że $\tilde{\gamma}_j'(z) \neq 0$, $z \in U_j$, $j = 1, 2$. Ustalmy $a = \gamma_1(t_1) \in L_1$. Niech $f(a) = \gamma_2(t_2)$. Wtedy istnieją otoczenia V_1, V_2 punktów t_1 i t_2 takie, że:

- $V_1 \cap \mathbb{R} =: L$ jest pewnym otwartym odcinkiem,
- $\tilde{\gamma}_j|_{V_j} \rightarrow \tilde{\gamma}_j(V_j) =: W_j$ jest biholomorficzne, $j = 1, 2$,
- L_1 dzieli W_1 na dwa obszary,
- $f(W_1) \subset W_2$.

Niech $G := (\tilde{\gamma}_1|_{V_1})^{-1}(D \cap W_1)$, $g := (\tilde{\gamma}_2|_{V_2})^{-1} \circ f \circ \tilde{\gamma}_1|_{V_1} : G \cup L \rightarrow \mathbb{C}$. Wtedy $g \in \mathcal{O}(G) \cap \mathcal{C}(G \cup L)$ i $g(L) \subset \mathbb{R}$. Teraz wystarczy skorzystać ze zwykłej zasady symetrii (ĆWICZENIE). $\square$

2.6. Twierdzenie Cauchy'ego–Dixona

Będzie to wersja twierdzenia i wzoru całkowego Cauchy'ego.

Twierdzenie 2.6.1 (Twierdzenie Cauchy'ego–Dixona). Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie dowolnym zbiorem otwartym. Niech $\gamma := \sum_{j=0}^N c_j \gamma_j$ będzie cyklem, tzn. formalną kombinacją (łańcuchem) dróg zamkniętych $\gamma_j : [0, 1] \rightarrow \Omega$, $c_j \in \mathbb{C}$, $j = 0, \dots, N$. Wtedy NWSR:

(i) dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ mamy

$$f(a) \text{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz, \quad a \in \Omega \setminus \gamma^*,$$

gdzie

$$\text{Ind}_\gamma := \sum_{j=0}^N c_j \text{Ind}_{\gamma_j}, \quad \int_\gamma \cdots := \sum_{j=0}^N c_j \int_{\gamma_j} \cdots, \quad \gamma^* := \bigcup_{j=0}^N \gamma_j^*;$$

(ii) dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ mamy

$$\int_\gamma f(z) dz = 0;$$

(iii) $\text{Ind}_\gamma(a) = 0$ dla dowolnego $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, tzn. cykl γ jest homologiczny zeru w Ω .

Dowód. (i) $\implies$ (ii): Stosujemy (i) do funkcji $(z-a)f$.

(ii) $\implies$ (iii): Stosujemy (ii) do funkcji $\frac{1}{z-a}$.

(iii) $\implies$ (i): Mamy sprawdzić, że

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz = 0.$$

Zdefiniujmy

$$g(z, w) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w}, & \text{jeżeli } z \neq w \\ f'(z), & \text{jeżeli } z = w \end{cases}, \quad (z, w) \in \Omega \times \Omega.$$

Wiemy, że g jest holomorficzną ze względu na każdą zmienną. Ponadto jest ciągła. Ciągłość poza przekątną jest oczywista. Dla $(a, a) \in \Omega \times \Omega$ i $K(a, r) \subset \subset \Omega$ mamy

$$\begin{aligned} g(z, w) - g(a, a) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, r)} \left(\frac{1}{z-w} \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta-z} - \frac{f(\zeta)}{\zeta-w} \right) - \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^2} \right) d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, r)} f(\zeta) \left(\frac{1}{(\zeta-z)(\zeta-w)} - \frac{1}{(\zeta-a)^2} \right) d\zeta \xrightarrow{(z, w) \rightarrow (a, a)} 0, \end{aligned}$$

ponieważ funkcja podcałkowa dąży jednostajnie (względem ζ) przy $(z, w) \rightarrow (a, a)$.

Niech

$$h(w) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(z, w) dz, & \text{jeżeli } w \in \Omega \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-w} dz, & \text{jeżeli } w \in \mathbb{C} \setminus \Omega \end{cases}.$$

Przypomnijmy, że na podstawie lematu o produkcie funkcji holomorficznym, funkcja

$$\mathbb{C} \setminus \gamma^* \ni w \xrightarrow{h_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-w} dz$$

jest holomorficzną. Odnajdujemy, że $h_0(w) \rightarrow 0$ przy $w \rightarrow \infty$.

Z własności indeksu wynika, że $\text{Ind}_{\gamma} = 0$ w każdej składowej $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, która przecina $\mathbb{C} \setminus \Omega$. W szczególności, $\text{Ind}_{\gamma} = 0$ w pewnym otoczeniu U brzegu Ω , skąd wynika, że $h = h_0$ w U .

Teraz pokażemy, że $h \in \mathcal{O}(\Omega)$. Z Analizy wiemy, że $h \in \mathcal{C}(\Omega)$. Skorzystamy z warunku Morery. Dla dowolnego trójkąta $T \subset \subset \Omega$, korzystając z twierdzenia Fubini'ego, mamy

$$\int_{\partial T} h(w) dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\int_{\partial T} g(z, w) dw \right) dz = 0.$$

Wykazaliśmy, że $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ oraz $h(w) \rightarrow 0$ dla $w \rightarrow \infty$. Z zasady maksimum wynika, że $h \equiv 0$, co kończy dowód. $\square$

Wniosek 2.6.2. Wobec Twierdzenia 2.1.15, jeżeli droga zamknięta $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ jest homotopijna ze stałą, to jest homologiczna zeru w Ω .

Ćwiczenie 2.6.3. Czy krzywa homologiczna zeru w Ω musi być homotopijna ze stałą?

Definicja 2.6.4. $\mathcal{O}^*(\Omega) := \{f \in \mathcal{O}(\Omega) : f^{-1}(0) = \emptyset\}$.

Propozycja 2.6.5. Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem. Wtedy NWSR:

- (i) dowolna funkcja $f \in \mathcal{O}(D)$ ma pierwowrotną;
- (ii) dowolna funkcja $f \in \mathcal{O}^*(D)$ ma gałąź jednoznaczny logarytmu;
- (iii) dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{O}^*(D)$ istnieje $p = p(f) \in \mathbb{N}_2$ takie, że f ma gałąź jednoznaczny p -tego pierwiastka;
- (iv) każda droga zamknięta $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$ jest homologiczna zeru w D ;
- (v) zbiór $\widehat{\mathbb{C}} \setminus D$ jest spójny.

Dowód. (i) $\implies$ (ii): Niech $g \in \mathcal{O}(D)$ będzie taka, że $g' = f'/f$. Możemy założyć, że dla pewnego $a \in D$ mamy $e^{g(a)} = f(a)$. Mamy

$$\left(\frac{e^g}{f} \right)' = \frac{g' e^g f - e^g f'}{f^2} = 0,$$

a więc $e^g = f$.

(ii) $\implies$ (iii): $f = e^g = (e^{g/p})^p$.

(iii) $\implies$ (ii): Wystarczy pokazać, że funkcja f'/f ma pierwowrotną. Na podstawie Propozycji 2.1.7 trzeba pokazać, że $\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$ dla dowolnej drogi zamkniętej γ w D . Niech

$p_1 := p(f)$, $g_1 \in \mathcal{O}^*(D)$, $g_1^{p_1} = f$,
 $p_2 := p(g_1)$, $g_2 \in \mathcal{O}^*(D)$, $g_2^{p_2} = g_1$, $g_2^{p_1 p_2} = f$, $\dots$,
 $p_k := p(g_{k-1})$, $g_k \in \mathcal{O}^*(D)$, $g_k^{p_k} = g_{k-1}$, $g_k^{p_1 \cdots p_k} = f$, $\dots$.
 Połóżmy $q_k := p_1 \cdots p_k \nearrow +\infty$. Wtedy

$$\frac{f'}{f} = \frac{q_k g_k^{q_k-1} g'_k}{g_k^{q_k}} = q_k \frac{g'_k}{g_k},$$

a stąd

$$\text{Ind}_{f \circ \gamma}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = q_k \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g'_k(z)}{g_k(z)} dz = q_k \text{Ind}_{g_k \circ \gamma}(0), \quad k \in \mathbb{N},$$

co oznacza, że $q_k | \text{Ind}_{f \circ \gamma}(0)$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$, a to jest możliwe tylko, gdy $\text{Ind}_{f \circ \gamma}(0) = 0$.

(ii) $\implies$ (iv): Ustalmy $a \notin D$ i niech $g \in \mathcal{O}(D)$ będzie taka, że $e^g = z - a$. Wtedy $e^g g' = 1$, czyli $g' = \frac{1}{z-a}$, co oznacza, że funkcja $\frac{1}{z-a}$ ma pierwowzną. Teraz, korzystając z Propozycji 2.1.7, wnioskujemy, że $\text{Ind}_{\gamma}(a) = 0$.

(iv) $\implies$ (i): Wynika z Twierdzenia Cauchy'ego–Dixona oraz Propozycji 2.1.7.

(iv) $\implies$ (v): Gdyby zbiór $\widehat{\mathbb{C}} \setminus D$ nie był spójny, wtedy miałby składową zwartą K taką, że $U := D \cup K$ jest otwarty. Niech $G := \text{int } Q$ będzie zbiorem otwartym opartym na siatce kwadratowej o oczku $Q_{j,k} := [\frac{j}{m}, \frac{j+1}{m}] \times [\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}]$ (dla dostatecznie dużego m) tak, by $K \subset G \subset U$,

$$Q := \bigcup_{\substack{Q_{j,k}: Q_{j,k} \subset D, \\ Q_{j,k} \cap K \neq \emptyset}} Q_{j,k}.$$

G jest zbiorem otwartym, którego brzeg ∂G może być utożsamiany z formalną kombinacją $\gamma_1 + \cdots + \gamma_N$ łamanych Jordana. Wtedy $\text{Ind}_{\gamma}(a) = 1$ dla $a \in K$. W szczególności, $\text{Ind}_{\gamma_j}(a) \neq 0$ dla pewnych $a \in K \subset \mathbb{C} \setminus D$ oraz $j \in \{1, \dots, N\}$ — sprzeczność.

(v) $\implies$ (iv): Wiemy, że $\text{Ind}_{\gamma}(a) = 0$ dla $a \in D_{\infty}$, gdzie D_{∞} oznacza składową nieograniczoną $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \gamma^*$ ($\text{Ind}_{\gamma}(\infty) := 0$). Oczywiście $(\widehat{\mathbb{C}} \setminus D) \cap D_{\infty} \neq \emptyset$. Pozostaje jeszcze skorzystać ze stałości Ind_{γ} na $\widehat{\mathbb{C}} \setminus D$. $\square$

2.7. Jednowymiarowe rozmaitości zespolone

Definicja 2.7.1. Powiemy, że przestrzeń topologiczna Hausdorffa M jest *jednowymiarową rozmaitością zespoloną*, jeżeli istnieje układ map $(U_{\alpha}, \varphi_{\alpha})_{\alpha \in A}$, zwany *atlasem*, taki, że

- $U_{\alpha} \subset M$ jest zbiorem otwartym w M , $\varphi_{\alpha} : U_{\alpha} \rightarrow \varphi_{\alpha}(U_{\alpha}) \subset \mathbb{C}$ jest homeomorfizmem, $\varphi_{\alpha}(U_{\alpha})$ jest zbiorem otwartym w $\mathbb{C}$ (co, z definicji, oznacza, że $(U_{\alpha}, \varphi_{\alpha})$ jest mapą), $\alpha \in A$,
- $\bigcup_{\alpha \in A} U_{\alpha} = M$,
- $\varphi_{\beta} \circ \varphi_{\alpha}^{-1} \in \mathcal{O}(\varphi_{\alpha}(U_{\alpha} \cap U_{\beta}))$ dla dowolnych $\alpha, \beta \in A$.

Powiemy, że mapa (U, ψ) jest *zgodna z atlasem* $(U_{\alpha}, \varphi_{\alpha})_{\alpha \in A}$, jeżeli ten atlas po dołączeniu mapy (V, ψ) pozostaje atlasem, czyli $\psi \circ \varphi_{\alpha}^{-1} \in \mathcal{O}(\varphi_{\alpha}(U_{\alpha} \cap V))$ i $\varphi_{\alpha} \circ \psi^{-1} \in \mathcal{O}(\psi(V \cap U_{\alpha}))$ dla dowolnego $\alpha \in A$.

Jeżeli mapy (V_1, ψ_1) i (V_2, ψ_2) są zgodne z atlasem $(U_{\alpha}, \varphi_{\alpha})_{\alpha \in A}$, to $\psi_j \circ \psi_k^{-1} \in \mathcal{O}(\psi_k(V_j \cap V_k))$ dla dowolnych $j, k \in \{1, 2\}$ — ĆWICZENIE. W szczególności, atlas $(U_{\alpha}, \varphi_{\alpha})_{\alpha \in A}$, po dołączeniu obu map pozostaje atlasem.

Atlas $(U_{\alpha}, \varphi_{\alpha})_{\alpha \in A}$ nazywamy *atlasem maksymalnym*, jeżeli każda mapa z nim zgodna należy do niego.

Jeżeli do danego atlasu dołączymy wszystkie mapy z nim zgodne, to otrzymamy atlas maksymalny. W tym sensie każdy atlas generuje atlas maksymalny. Od tej chwili, mówiąc o atlasie na M będziemy zawsze mieć na myśli atlas maksymalny generowany przez dany atlas.

Spójne zespolone rozmaitości jednowymiarowe nazywamy *powierzchniami Riemanna*.

Definicja 2.7.2. Niech M będzie jednowymiarową rozmaitością zespoloną z atlasem $(U_{\alpha}, \varphi_{\alpha})_{\alpha \in A}$. Powiemy, że funkcja $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ jest *holomorfczna* ($f \in \mathcal{O}(M)$), jeżeli $f \circ \varphi_{\alpha}^{-1} \in \mathcal{O}(\varphi_{\alpha}(U_{\alpha}))$ dla dowolnego $\alpha \in A$.

Niech N będzie jakąś inną jednowymiarową rozmaitością zespoloną z atlasem $(V_{\beta}, \psi_{\beta})_{\beta \in B}$. Powiemy, że odwzorowanie ciągle $f : M \rightarrow N$ jest *holomorfczne* ($f \in \mathcal{O}(M, N)$), jeżeli

$$\psi_{\beta} \circ f \circ \varphi_{\alpha}^{-1} \in \mathcal{O}(\varphi_{\alpha}(U_{\alpha} \cap f^{-1}(V_{\beta}))), \quad (\alpha, \beta) \in A \times B.$$

Łatwo sprawdzić (ĆWICZENIE), że jeżeli odwzorowanie $f : M \rightarrow N$ jest holomorficzne względem atlasów $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ i $(V_\beta, \psi_\beta)_{\beta \in B}$, to jest holomorficzne względem maksymalnych atlasów generowanych przez te atlasy.

Zauważmy, że powyższe definicje są zgodne i zgadzają się Definicją 2.2.1.

Obserwacja 2.7.3. $\widehat{\mathbb{C}}$ jest zwartą powierzchnią Riemanna. Na $\widehat{\mathbb{C}}$ będziemy zawsze rozważać atlas maksymalny generowany przez atlas dwuelementowy $(\mathbb{C}, \text{id})$, $(\widehat{\mathbb{C}}_*, I)$, gdzie $I(z) := 1/z$ oznacza inwersję.

Obserwacja 2.7.4. Niech M będzie jednowymiarową rozmaitością zespoloną.

(a) Wszystkie wyniki, w których ingerują wyłącznie lokalne własności funkcji holomorficznych przenoszą się na rozmaitości, np. twierdzenie Weierstrassa: jeżeli $(f_k)_{k=1}^\infty \subset \mathcal{O}(M)$ oraz $f_k \rightarrow f$ lokalnie jednostajnie, to $f \in \mathcal{O}(M)$.

(b) Jeżeli M jest spójna, to zachodzi dla niej *zasada identyczności*: jeżeli $f, g \in \mathcal{O}(M, N)$ są takie, że zbiór $A := \{x \in M : f(x) = g(x)\}$ ma punkt skupienia w M , to $f \equiv g$.

Istotnie, niech $D_0 := \{a \in M : f = g \text{ w pewnym otoczeniu punktu } a\}$. Jest to oczywiście zbiór otwarty. Pokażemy, że niepusty. Niech $a \in A' \cap D$. Wobec ciągłości f i g mamy $f(a) = g(a) =: b$. Niech (U, φ) , (V, ψ) będą dowolnymi mapami w otoczeniach punktów a i b . Możemy założyć, że U jest spójne oraz $f(U) \subset V$. Z definicji wiemy, że funkcje $f_0 := \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ i $g_0 := \psi \circ g \circ \varphi^{-1}$ są holomorficzne na obszarze $\varphi(U) \subset \mathbb{C}$ oraz równe na zbiorze $\varphi(A)$ mającym punkt skupienia $\varphi(a)$ w tym obszarze. Stąd, na podstawie zwykłej zasady identyczności, $f_0 \equiv g_0$, co daje $f = g$ na U .

Powyższe rozumowanie pokazuje również, że zbiór D_0 jest domknięty w D . A więc $D_0 = D$.

(c) Jeżeli M jest spójna, to zachodzi dla niej *zasada maksimum*: dla $f \in \mathcal{O}(M)$, jeżeli $|f|$ przyjmuje w M maksimum lokalne, to $f \equiv \text{const}$.

(d) Jeżeli M jest spójna i zwarta, to $\mathcal{O}(M) \simeq \mathbb{C}$. Dla przykładu, $\mathcal{O}(\widehat{\mathbb{C}}) \simeq \mathbb{C}$.

(e) Jeżeli M jest spójna i ośrodkowa, to w $\mathcal{O}(M)$ zachodzi twierdzenie Montela i twierdzenie Vitalego.

(f) Sprawdzić, jakie dalsze własności funkcji holomorficznych przenoszą się na rozmaitości. Proszę pamiętać o tym ćwiczeniu również w przyszłości!

(g)* ĆWICZENIE: Czy jeżeli M jest spójna, to jest ośrodkowa?

2.8. Funkcje holomorficzne w ∞

Definicja 2.8.1. Niech $\Omega \subset \widehat{\mathbb{C}}$ będzie zbiorem otwartym takim, że $\infty \in \Omega$. Niech $R > 0$ będzie takie, że $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{K(R)} \subset \Omega$. Powiemy, że funkcja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ jest *holomorficzna* ($f \in \mathcal{O}(\Omega)$), jeżeli $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{\infty\})$ (w sensie Definicji 2.2.1) oraz f jest *holomorficzna w ∞* , tzn. funkcja $K(1/R) \ni z \mapsto f(1/z) \in \mathbb{C}$ jest holomorficzna w zwykłym sensie, a więc istnieje ciąg $(a_n)_{n=0}^\infty \subset \mathbb{C}$ taki, że szereg $\sum_{n=0}^\infty a_n w^n$ jest zbieżny w $K(1/R)$ oraz $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n (1/z)^n$ dla $|z| > R$.

Zauważmy, że powyższa jest zgodna z Definicją 2.7.2.

Osobliwości funkcji holomorficzych

3.1. Szeregi Laurenta

Definicja 3.1.1. Szeregiem Laurenta ⁽¹⁾ o środku $a \in \mathbb{C}$ nazywamy dowolny szereg postaci

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-a)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n =: S(z) + R(z),$$

gdzie $(a_n)_{n=-\infty}^{\infty} \subset \mathbb{C}$. Szereg S nazywamy *częścią osobliwą*, zaś R — *częścią regularną* szeregu Laurenta. Szeregi potęgowe utożsamiamy z tymi szeregami Laurenta, dla których $S \equiv 0$, tzn. $a_{-n} = 0$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

Zdefiniujmy liczby $R_-, R_+ \in \{-\infty\} \cup [0, +\infty]$:

$$R_- := \begin{cases} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}, & \text{jeżeli } a_{-n} \neq 0 \text{ dla pewnego } n \in \mathbb{N} \\ -\infty, & \text{jeżeli } a_{-n} = 0 \text{ dla dowolnego } n \in \mathbb{N} \end{cases}, \quad R_+ := \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Obserwacja 3.1.2. Załóżmy, że $R_- < R_+$.

(a) Z własności szeregów potęgowych wynika natychmiast, że szereg $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ jest zbieżny niemal jednostajnie w *pierszczeniu* $\mathbb{A}(a, R_-, R_+)$.

(b) Dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset \subset \mathbb{A}(a, R_-, R_+)$ istnieją stałe $C > 0$, $\theta \in (0, 1)$ takie, że

$$|a_n(z-a)^n| \leq C\theta^{|n|}, \quad z \in K, \quad n \in \mathbb{Z},$$

co oznacza, że szeregi Laurenta są zbieżne geometrycznie.

(c) Na podstawie twierdzenia Weierstrassa, funkcja $f(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$, $z \in \mathbb{A}(a, R_-, R_+)$, jest holomorficzną.

(d) Dla $R_- < r < R_+$, całkując wyraz po wyrazie dostajemy:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}} d\zeta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} (\zeta-a)^{n-k-1} d\zeta = a_k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

W szczególności, funkcja f wyznacza jednoznacznie współczynniki swojego rozwinięcia.

Propozycja 3.1.3 (Twierdzenie o rozwijaniu w szereg Laurenta). *Niech $f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}(a, r_-, r_+))$, $0 \leq r_- < r_+ \leq +\infty$. Zdefiniujmy*

$$a_n(r) := \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad r_- < r < r_+.$$

Wtedy $a_n := a_n(r)$ jest niezależne od r , szereg Laurenta $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ jest zbieżny w $\mathbb{A}(a, r_-, r_+)$ oraz $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$, $z \in \mathbb{A}(a, r_-, r_+)$.

Dowód. Niezależność od r wynika natychmiast z twierdzenia całkowego Cauchy'ego zastosowanego do funkcji holomorficzej $\mathbb{A}(a, r_-, r_+) \ni z \mapsto f(z)/(z-a)^{n+1}$ i obszaru dwuspójnego $\mathbb{A}(a, r_1, r_2) \subset \subset \mathbb{A}(a, r_-, r_+)$

⁽¹⁾ Pierre Laurent (1813–1854) — matematyk francuski.

przy $r_- < r_1 < r_2 < r_+$. Korzystając ze wzoru całkowego Cauchy'ego dla tego obszaru, dla $z \in C(a, r)$ i $r_1 < r < r_2$ mamy:

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{C(a, r_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{C(a, r_1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{C(a, r_2)} f(\zeta) \frac{1}{\zeta - a + a - z} d\zeta - \int_{C(a, r_1)} f(\zeta) \frac{1}{\zeta - a + a - z} d\zeta \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{C(a, r_2)} f(\zeta) \frac{1}{\zeta - a} \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} d\zeta + \int_{C(a, r_1)} f(\zeta) \frac{1}{z-a} \frac{1}{1 - \frac{\zeta-a}{z-a}} d\zeta \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{C(a, r_2)} f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta + \int_{C(a, r_1)} f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta-a)^n}{(z-a)^{n+1}} d\zeta \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n-1} (z-a)^{-n-1}.
 \end{aligned}$$

□

Przykład 3.1.4. Typowe zadanie dotyczące rozwijania funkcji holomorfcznych w szeregi Laurenta wygląda następująco. Mamy daną funkcję holomorfczną $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_N\})$, gdzie $|a_1| \leq \dots \leq |a_N|$. Zadanie polega na znalezieniu rozwinięcia funkcji f w szereg Laurenta w pierścieniach:

- $K(|a_1|)$ o ile $a_1 \neq 0$,
- $\mathbb{A}(|a_j|, |a_{j+1}|)$ o ile $|a_j| < |a_{j+1}|$, $j = 1, \dots, N-1$,
- $\mathbb{A}(|a_N|, +\infty)$,
- $\mathbb{A}(a_j, 0, r_j)$, $r_j := \min\{|a_k - a_j| : k = 1, \dots, N, k \neq j\}$, $j = 1, \dots, N$.

Dla przykładu:

$$f(z) := \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}.$$

Rozwinięcie w $K(1)$:

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n.$$

Rozwinięcie w $\mathbb{A}(1, 2)$:

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}.$$

Rozwinięcie w $\mathbb{A}(2, +\infty)$:

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (1 + 2^{n-1}) z^{-n}.$$

Rozwinięcie w $\mathbb{A}(1, 0, 1)$:

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{1-(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n.$$

Rozwinięcie w $\mathbb{A}(2, 0, 1)$:

$$f(z) = \frac{1}{1+(z-2)} + \frac{1}{z-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n + \frac{1}{z-2}.$$

3.2. Osobliwości izolowane

Definicja 3.2.1. Punkt $a \in \mathbb{C}$ nazywamy *osobliwością izolowaną* funkcji holomorficznej f , jeżeli f jest holomorficzna co najmniej w pewnym pierścieniu $\mathbb{A}(a, 0, r)$.

Oczywiście są też *osobliwości nieizolowane*, np. punkt 0 dla funkcji $f(z) := 1/\sin(1/z)$.

Jeżeli $f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}(a, 0, r))$, to rozwijamy f w szereg Laurenta

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n, \quad z \in \mathbb{A}(a, 0, r),$$

i wprowadzamy następującą klasyfikację izolowanych punktów osobliwych:

- *punkt pozornie osobliwy*, czyli *osobliwość usuwalna*, jeżeli $a_{-n} = 0$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$; kładąc $f(a) := a_0$ dostajemy funkcję holomorficzną w całym kole $K(a, r)$,
- *biegun rzędu d* ($d \in \mathbb{N}$), jeżeli $a_{-n} = 0$ dla $n > d$ i $a_{-d} \neq 0$; funkcję wymierną

$$g(z) := \sum_{n=1}^d a_{-n}(z-a)^{-n}$$

nazywamy wtedy *częścią główną bieguna funkcji f w punkcie a* ; zauważmy, że $g(z) = p(\frac{1}{z-a})$, gdzie p jest wielomianem stopnia d takim, że $p(0) = 0$; oczywiście $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$,

- *punkt istotnie osobliwy*, jeżeli $a_{-n} \neq 0$ dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$.

Liczba $\text{res}_a f := a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, \delta)} f(\zeta) d\zeta$ ($0 < \delta < r$) nosi nazwę *residuum funkcji f w punkcie a* .

Punkt ∞ nazywamy *osobliwością izolowaną* funkcji holomorficznej f , jeżeli f jest holomorficzna co najmniej w pewnym pierścieniu $\mathbb{A}(r, +\infty)$.

Jak poprzednio, mamy też *osobliwości nieizolowane* w ∞ , np. dla funkcji $f(z) := 1/\sin z$.

W przypadku osobliwości izolowanej w ∞ , $f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}(r, +\infty))$,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{A}(r, +\infty),$$

osobliwość klasyfikujemy względem tego, jaką osobliwością jest punkt 0 dla funkcji $g(z) := f(1/z)$, $z \in \mathbb{A}(0, 1/r)$. Tak więc:

- ∞ *jest punktem pozornie osobliwym*, czyli *osobliwością usuwalną*, jeżeli $a_n = 0$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$; kładąc $f(\infty) := a_0$ dostajemy funkcję holomorficzną w ∞ ,
- ∞ *jest biegunem rzędu d* ($d \in \mathbb{N}$), jeżeli $a_n = 0$ dla $n > d$ i $a_d \neq 0$; wielomian $\sum_{n=1}^d a_n z^n$ nazywamy wtedy *częścią główną bieguna funkcji f w ∞* ; oczywiście $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$,
- ∞ *jest punktem istotnie osobliwym*, jeżeli $a_n \neq 0$ dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$.

ĆWICZENIE Jak zdefiniować $\text{res}_{\infty} f$ (*residuum funkcji f w ∞*) ?

Propozycja 3.2.2 (Twierdzenie Riemanna o osobliwościach usuwalnych). Dla funkcji $f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}(a, 0, r))$ NWSR:

- a jest punktem pozornie osobliwym funkcji f ;
- granica $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ istnieje i jest skończona;
- funkcja f jest ograniczona w $\mathbb{A}(a, 0, \varepsilon)$ dla pewnego $0 < \varepsilon < r$;
- $f \in L_h^p(\mathbb{A}(a, 0, \varepsilon))$ dla pewnych $p \geq 2$ i $0 < \varepsilon < r$.

Dowód. Implikacje (i) $\implies$ (ii) $\implies$ (iii) $\implies$ (iv) są oczywiste. Pozostaje do wykazania, że (iv) $\implies$ (i). Możemy założyć, że $a = 0$. Ponieważ $L^p(K_*(\varepsilon)) \subset L^2(K_*(\varepsilon))$ możemy założyć, że $p = 2$. Niech $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, $z \in K_*(r)$. Pokażemy, że $a_{-n} = 0$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Ustalmy $n \in \mathbb{N}$. Naszym celem będzie wykazanie, że

$$|a_{-n}| \leq (1/\sqrt{2\pi})\varepsilon^{n-1} \|f\|_{L^2(K_*(\eta))}$$

dla $0 < \eta < \varepsilon$. Ponieważ $\|f\|_{L^2(K_*(\eta))} \rightarrow 0$, gdy $\eta \rightarrow 0$, dowód będzie zakończony. Dla $0 < t < \eta < \varepsilon$ liczymy (korzystając z nierówności Höldera):

$$|a_{-n}|^2 = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C(t)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{-n+1}} d\zeta \right|^2 \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(te^{i\theta})| t^n d\theta \right)^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(te^{i\theta})|^2 d\theta t^{2n},$$

a stąd

$$|a_{-n}|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\eta} \eta^{2n-1} \int_0^\eta \int_0^{2\pi} |f(te^{i\theta})|^2 t d\theta dt = \frac{1}{2\pi} \eta^{2n-2} \int_{K_*(\eta)} |f|^2 d\mathcal{L}^2. \quad \square$$

Obserwacja 3.2.3. $1/z \in L_h^p(\mathbb{D}_*)$ dla dowolnego $1 \leq p < 2$.

Wniosek 3.2.4 (Twierdzenie Riemanna o osobliwościach usuwalnych). Dla funkcji $f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}(r, +\infty))$ NWSR:

- (i) ∞ jest punktem pozornie osobliwym funkcji f ;
- (ii) granica $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ istnieje i jest skończona;
- (iii) funkcja f jest ograniczona w $\mathbb{A}(\varepsilon, +\infty)$ dla pewnego $\varepsilon > r$.

Definicja 3.2.5. Niech $f \in \mathcal{O}(K(a, r))$. Mówimy, że f ma w punkcie a zero krotności d ($d \in \mathbb{N}$), jeżeli $f^{(k)}(a) = 0$ dla $k \leq d-1$ oraz $f^{(d)}(a) \neq 0$. Piszemy wtedy $\text{ord}_a f = d$.

Oznacza to, że $f(z) = (z-a)^d g(z)$, $z \in K(a, r)$, gdzie $g \in \mathcal{O}(K(a, r))$ i $g(a) \neq 0$.

Jeżeli $f \in \mathcal{O}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{K}(r))$ i $g(z) := f(1/z)$, $z \in \mathbb{A}(0, 1/r)$, to $\text{ord}_\infty f =: \text{ord}_0 g$.

Propozycja 3.2.6. Dla funkcji $f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}(a, 0, r))$ (odp. $f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}(r, +\infty))$) oraz $d \in \mathbb{N}$, NWSR:

- (i) f ma w punkcie a (odp. ∞) biegun rzędu d ;
- (ii) istnieje funkcja $g \in \mathcal{O}(K(a, r))$ (odp. $g \in \mathcal{O}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{K}(r))$) taka, że $g(a) \neq 0$ oraz $f(z) = (z-a)^{-d} g(z)$, $z \in K_*(a, r)$ (odp. $f(z) = z^d g(z)$, $z \in \mathbb{A}(r, +\infty)$);
- (iii) funkcja $1/f$ (dookreślona jako 0 w punkcie a) ma w a zero krotności d .

Dowód. ĆWICZENIE. □

Propozycja 3.2.7. Jeżeli funkcja $f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}(a, 0, r))$ ma w punkcie a biegun rzędu d , to

$$\text{res}_a f = \frac{1}{(d-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \left((z-a)^d f(z) \right)^{(d-1)}.$$

Dowód. Niech $f(z) = \sum_{n=-d}^\infty a_n (z-a)^n$, $f(z) = (z-a)^{-d} g(z)$ (tak, jak w Propozycji 3.2.6(b)), $g(z) = \sum_{n=0}^\infty b_n (z-a)^n$. Wtedy $a_{-1} = b_{d-1}$ oraz

$$\frac{1}{(d-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \left((z-a)^d f(z) \right)^{(d-1)} = \frac{1}{(d-1)!} \lim_{z \rightarrow a} g^{(d-1)}(z) = \frac{1}{(d-1)!} g^{(d-1)}(a) = b_{d-1}. \quad \square$$

Ćwiczenie 3.2.8. Pokazać, że

$$\text{res}_i \frac{1}{(1+z^2)^n} = \frac{1}{2i} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}.$$

Propozycja 3.2.9 (Twierdzenie Sochockiego ⁽²⁾–Casoratiego ⁽³⁾–Weierstrassa). Jeżeli $f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}(a, 0, r))$ ma w a punkt istotnie osobliwy, to dla dowolnego $0 < \varepsilon < r$, zbiór $f(\mathbb{A}(a, 0, \varepsilon))$ jest gęsty w $\mathbb{C}$.

Dowód. Przypuśćmy, że tak nie jest i $f(\mathbb{A}(a, 0, \varepsilon)) \cap K(b, \delta) = \emptyset$, czyli $|f(z) - b| \geq \delta$ dla dowolnego $z \in \mathbb{A}(a, 0, \delta)$. Niech $g(z) := \frac{1}{f(z)-b}$, $z \in \mathbb{A}(a, 0, \delta)$. Ponieważ $|g| \leq 1/\delta$, twierdzenie Riemanna implikuje, że funkcja g ma w punkcie a osobliwość usuwalną — przedłużenie funkcji g oznaczamy tą samą literą.

Jeżeli $g(a) \neq 0$, to możemy założyć, że $g(z) \neq 0$ dla $z \in K(a, \delta)$. Wtedy też $f(z) = \frac{1}{g(z)} + b$, $z \in \mathbb{A}(a, 0, \delta)$, co oznacza, że f przedłuża się holomorficznie na $K(a, \delta)$ — sprzeczność.

⁽²⁾ Julian Sochocki (1842–1927) — matematyk polski.

⁽³⁾ Felice Casorati (1835–1890) — matematyk włoski.

3.3. Funkcje meromorficzne

Jeżeli $g(a) = 0$, to dla pewnego $d \in \mathbb{N}$ mamy $g(z) = (z - a)^d h(z)$, $z \in K(a, \delta)$, gdzie $h \in \mathcal{O}(K(a, \delta))$ i $h(a) \neq 0$. Możemy założyć, że $h(z) \neq 0$ dla dowolnego $z \in K(a, \delta)$. Wtedy

$$f(z) = (z - a)^{-d} \left(\frac{1}{h(z)} + b(z - a)^d \right), \quad z \in \mathbb{A}(a, 0, \delta),$$

co oznacza, że f ma w a biegun rzędu d — sprzeczność. $\square$

Twierdzenie 3.2.9 może być znacznie wzmocnione.

Twierdzenie* 3.2.10 (Twierdzenie Picarda ⁽⁴⁾). *Niech $f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}(a, 0, r))$ ma w a punkt istotnie osobliwy. Wtedy dla dowolnego $0 < \varepsilon < r$ każda wartość zespolona z wyjątkiem co najwyżej jednej jest przyjmowana przez f w nieskończenie wielu punktach z $\mathbb{A}(a, 0, \varepsilon)$.*

Wniosek 3.2.11. *Niech $f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}(a, 0, r))$ lub też $f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}(r, +\infty))$. Wtedy:*

- *f ma w punkcie a osobliwość usuwalną wtedy i tylko wtedy, gdy granica $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ istnieje i jest skończona;*
- *f ma w punkcie a biegun wtedy i tylko wtedy, gdy granica $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$;*
- *f ma w punkcie a osobliwość istotną wtedy i tylko wtedy, gdy granica $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ nie istnieje.*

3.3. Funkcje meromorficzne

Definicja 3.3.1. Niech $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ będzie obszarem. Powiemy, że funkcja $f : D \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ jest *meromorficzna* ($f \in \mathcal{M}(D)$), jeżeli istnieje zbiór $S = S(f) \subset D$ taki, że:

- $S' \cap D = \emptyset$,
- $f \in \mathcal{O}(D \setminus S)$,
- f ma biegun w każdym punkcie $a \in S$.

Jeżeli $\Omega \subset \widehat{\mathbb{C}}$ jest zbiorem otwartym, to mówimy, że funkcja $f : \Omega \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ jest meromorficzna ($f \in \mathcal{M}(\Omega)$), jeżeli $f|_D \in \mathcal{M}(D)$ dla dowolnej składowej spójnej D zbioru Ω .

Obserwacja 3.3.2. (a) $\mathcal{O}(\Omega) \subset \mathcal{M}(\Omega)$.

(b) Funkcje meromorficzne są ciągłe.

(c) $S(f) = f^{-1}(\infty)$.

Propozycja 3.3.3 (Zasada identyczności dla funkcji meromorficznych). *Jeżeli $f, g \in \mathcal{M}(D)$ oraz zbiór $A := \{z \in D : f(z) = g(z)\}$ ma punkt skupienia w D , to $f \equiv g$.*

Dowód. Niech $S := S(f) \cup S(g)$. Oczywiście, S nie ma punktu skupienia w D . Wynika stąd, że zbiór $A \cap (D \setminus S)$ ma punkt skupienia w obszarze $D \setminus S$. Korzystając z zasady identyczności dla funkcji holomorficznych, wnioskujemy stąd, że $f = g$ w $D \setminus S$. Ostatecznie, korzystając z ciągłości f i g , dostajemy $f \equiv g$. $\square$

Propozycja 3.3.4. $\mathcal{M}(D)$ jest ciałem.

Dowód. Niech $f, g \in \mathcal{M}(D)$, $f, g \neq 0$. Widać, że $f + g \in \mathcal{M}(D)$ i $S(f + g) \subset S(f) + S(g)$.

Jeżeli $g \neq 0$, to zbiór $A := g^{-1}(0)$ nie ma punktu skupienia w D (z zasady identyczności). Ponadto, $1/g \in \mathcal{O}(A \cap S(g))$. Na podstawie Propozycji 3.2.6 wiemy, że w każdym punkcie $a \in A$ funkcja $1/g$ ma biegun (rzędu d o ile funkcja g miała w a zero krotności d), zaś w każdym punkcie $a \in S(f)$ — zero (krotności d o ile funkcja g miała w a biegun rzędu d). Ostatecznie, $S(1/g) = A$ i $1/g \in \mathcal{M}(D)$.

Pozostaje wykazać, że $f \cdot g \in \mathcal{M}(D)$. Oczywiście, $f \cdot g \in \mathcal{O}(D \setminus A)$, gdzie $A := S(f) \cup S(g)$. Ustalmy $a \in A \cap \mathbb{C}$. Niech $f(z) = (z - a)^{d_f} f_1(z)$, $g(z) = (z - a)^{d_g} g_1(z)$, $z \in \mathbb{A}(a, 0, r) \subset D \setminus A$, gdzie $d_f, d_g \in \mathbb{Z}$ (zależnie od tego, czy dana funkcja ma zero, czy biegun), $f_1, g_1 \in \mathcal{O}^*(K(a, r))$. Stąd $f(z)g(z) = (z - a)^{d_f + d_g} f_1(z)g_1(z)$, $z \in \mathbb{A}(a, 0, r)$.

Przypadek $a = \infty$ pozostawiamy jako ĆWICZENIE.

Teraz, korzystając z Propozycji 3.2.6, wnioskujemy, że $f \cdot g \in \mathcal{M}(D)$. $\square$

⁽⁴⁾ Émile Picard (1856–1941) — matematyk francuski.

Propozycja 3.3.5. $\mathcal{M}(D) = \mathcal{O}(D, \widehat{\mathbb{C}}) \setminus \{\infty\}$, gdzie $\widehat{\mathbb{C}}$ traktujemy jako jednowymiarową rozmaitość zespoloną (por. Definicja 2.7.2).

Dowód. $\widehat{\mathbb{C}}$ wyposażamy w atlas $(\mathbb{C}, \text{id}_{\mathbb{C}})$, $(\widehat{\mathbb{C}}_*, I)$, gdzie $I(z) := 1/z$. Przypomnijmy, że funkcja ciągła $f : D \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ jest holomorficzną, jeżeli są holomorficzne (w zwykłym sensie) następujące cztery funkcje:

- (a) $D \cap \mathbb{C} \cap f^{-1}(\mathbb{C}) \ni z \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$,
- (b) $I(D \cap \widehat{\mathbb{C}}_* \cap f^{-1}(\mathbb{C})) \ni z \mapsto f(1/z) \in \mathbb{C}$,
- (c) $D \cap \mathbb{C} \cap f^{-1}(\widehat{\mathbb{C}}_*) \ni z \mapsto 1/f(z) \in \mathbb{C}$,
- (d) $I(D \cap \widehat{\mathbb{C}}_* \cap f^{-1}(\widehat{\mathbb{C}}_*)) \ni z \mapsto 1/f(1/z) \in \mathbb{C}$.

Niech $S := f^{-1}(\infty)$. Wobec zasady identyczności (Obserwacja 2.7.4), $S' \cap D = \emptyset$. Warunki (a) i (b) oznaczają łącznie, że $f \in \mathcal{O}(D \setminus S)$. Ciągłość funkcji gwarantuje, że f ma biegun w każdym punkcie $a \in S$. Wynika stąd, że $\mathcal{O}(D, \widehat{\mathbb{C}}) \setminus \{\infty\} \subset \mathcal{M}(D)$.

W drugą stronę — niech $f \in \mathcal{M}(D)$, $S := S(f)$. Wiemy, że f jest ciągła oraz, że $f \in \mathcal{O}(D \setminus S)$, co oznacza, że (a) i (b) są spełnione. Weźmy dowolny punkt $a \in S \cap \mathbb{C}$, $f(z) = (z - a)^{-d}g(z)$, $z \in \mathbb{A}(a, 0, r)$, $f \in \mathcal{O}^*(K(a, r))$. Wtedy $1/f(z) = (z - a)^d(1/g(z))$, $z \in K(a, r)$, co daje (c). Jeżeli $\infty \in S$, to $f(z) = z^k g(z)$, $z \in \mathbb{A}(r, +\infty)$, $g \in \mathcal{O}^*(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{K}(r))$. Wtedy $1/f(1/z) = z^k(1/g(1/z))$, $z \in K(1/r)$, co daje (d). □

Propozycja 3.3.6. $\mathcal{M}(\widehat{\mathbb{C}}) = \mathcal{R}(\mathbb{C})$.

Dowód. Oczywiście, $\mathcal{R}(\mathbb{C}) \subset \mathcal{M}(\widehat{\mathbb{C}})$. Niech $f \in \mathcal{M}(\widehat{\mathbb{C}})$. Zbiór $S(f)$ musi być skończony. Przypadek $S(f) = \emptyset$ jest trywialny — wtedy $f \equiv \text{const}$. Jeżeli $S(f) = \{\infty\}$, to f jest funkcją całkowitą i ponieważ w ∞ ma biegun, to musi być wielomianem. Przypuśćmy, że $S(f) \cap \mathbb{C} = \{a_1, \dots, a_n\}$ i niech

$$g_k(z) = p_k \left(\frac{1}{z - a_k} \right)$$

oznacza część główną bieguna funkcji f w punkcie a_k , $k = 1, \dots, n$. Zdefiniujmy $g := f - (g_1 + \dots + g_n) \in \mathcal{M}(\widehat{\mathbb{C}})$. Wtedy $S(g) \subset \{\infty\}$, a więc g musi być wielomianem. □

Obserwacja 3.3.7. Konstrukcja przeprowadzona w powyższym dowodzie to nic innego, jak rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste.

Propozycja 3.3.8. (a) $\text{Aut}(\mathbb{C}) = \text{Aut}_{\mathcal{H}}(\mathbb{C}) = \{\mathbb{C} \ni z \mapsto az + b \in \mathbb{C} : a \in \mathbb{C}_*, b \in \mathbb{C}\} = \mathcal{G}$.
(b) $\text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) = \text{Aut}_{\mathcal{H}}(\widehat{\mathbb{C}}) = \mathcal{H}$.

W szczególności, grupa $\text{Aut}(\mathbb{C})$ zależy od 4 parametrów rzeczywistych.

Dowód. (a) Jest oczywiste, że $\mathcal{G} \subset \text{Aut}(\mathbb{C})$. Niech $f \in \text{Aut}(\mathbb{C})$. Ponieważ f jest odwzorowaniem właściwym, zatem $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$. Oznacza to, że f ma w nieskończoności biegun, a to z kolei, oznacza, że f jest wielomianem stopnia d dla pewnego $d \in \mathbb{N}$. Ponieważ f jest injektywne musi być $d = 1$.

(b) Wiemy, że $\mathcal{H} \subset \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$. Niech $f \in \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$. Jeżeli $f(\infty) = \infty$, to $f \in \text{Aut}(\mathbb{C})$, a więc (wobec (a)), $f(z) = az + b \in \mathcal{H}$. Jeżeli $f(\infty) = w_0 \in \mathbb{C}$, wtedy $g := \frac{1}{f - w_0} \in \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ oraz $g(\infty) = \infty$, co, wobec poprzedniego przypadku, daje $f \in \mathcal{H}$. □

3.4. Twierdzenie o residuach

Twierdzenie 3.4.1 (Twierdzenie o residuach). Niech D będzie obszarem p -spójnym ograniczonym p drogami Jordana zorientowanymi dodatnio, niech $\overline{D} \subset \Omega$, gdzie Ω jest zbiorem otwartym, i niech $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ będzie taka, że $S(f) \subset D$ ($S(f)$ musi być zbiorem skończonym). Wtedy

$$\int_{\partial D} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \sum_{a \in S(f)} \text{res}_a f.$$

3.5. Funkcje holomorficzne dane całką

Dowód. Jeżeli $S(f) = \emptyset$, to wynik jest oczywisty (przyjmując, że $\sum_{a \in \emptyset} \dots := 0$). Załóżmy, że $S(f) = \{a_1, \dots, a_n\}$. Niech $r > 0$ będzie tak małe, że $K(a_j, r) \subset \subset D$ oraz $\overline{K}(a_j, r) \cap \overline{K}(a_k, r) = \emptyset$, $j \neq k$. Do obszaru $G := D \setminus \bigcup_{j=1}^n \overline{K}(a_j, r)$ stosujemy wzór Cauchy'ego (przypomnijmy, że $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus S(f))$):

$$0 = \int_{\partial G} f(\zeta) d\zeta = \int_{\partial D} f(\zeta) d\zeta - \sum_{j=1}^n \int_{C(a_j, r)} f(\zeta) d\zeta = \int_{\partial D} f(\zeta) d\zeta - \sum_{j=1}^n 2\pi i \operatorname{res}_{a_j} f. \quad \square$$

3.5. Funkcje holomorficzne dane całką

Propozycja 3.5.1 (Twierdzenie o funkcjach danych całką). *Niech $I \subset \mathbb{R}$, $I \in \{[a, b], [a, b)\}$, niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem i niech $f : D \times I \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją taką, że:*

- (a) $f(\cdot, t) \in \mathcal{O}(D)$, $t \in I$,
- (b) $f(z, \cdot) \in \mathcal{C}(I)$, $z \in D$,
- (c) f lokalnie ograniczona w $D \times I$,
- (c') dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset \subset D$ istnieje funkcja całkowna $g_K : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ taka, że $|f(z, t)| \leq g_K(t)$, $(z, t) \in K \times [a, b]$ (zauważmy, że jeżeli $I = [a, b]$, to (c') wynika z (c)).

Zdefiniujemy

$$F(z) := \int_a^b f(z, t) dt, \quad z \in D.$$

Wtedy $F \in \mathcal{O}(D)$ oraz $F^{(k)}(z) = \int_a^b \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(z, t) dt$ ⁽⁵⁾, $z \in D$, $k \in \mathbb{N}$.

Analogiczny wynik można oczywiście uzyskać dla $I = (a, b]$, czy też $I = (a, b)$ (w ostatnim przypadku wystarczy wprowadzić punkt pośredni).

Dowód. Najpierw niech $I = [a, b]$. Niech $t_{n,j} = a + \frac{j}{n}(b-a)$, $\xi_{n,j} \in [t_{n,j-1}, t_{n,j}]$, $n \in \mathbb{N}$, $j = 0, \dots, n$. Zdefiniujemy

$$F_n(z) := \sum_{j=1}^n f(z, \xi_{n,j}) \frac{b-a}{n}, \quad z \in D, \quad n \in \mathbb{N};$$

$F_n(z)$ jest sumą aproksymacyjną pośrednią dla całki $\int_a^b f(z, t) dt$ przy podziale $a = t_{n,0} < \dots < t_{n,n} = b$ i punktach pośrednich $\xi_{n,1}, \dots, \xi_{n,n}$. Oczywiście, $F_n \in \mathcal{O}(D)$ oraz $F_n \rightarrow F$ punktowo na D . Aby udowodnić, że $F \in \mathcal{O}(D)$ zastosujemy twierdzenie Vitalego. Wystarczy pokazać, że ciąg $(F_n)_{n=1}^\infty$ jest niemal jednostajnie ograniczony. Dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset \subset D$, niech $|f| \leq C$ na $K \times [a, b]$. Wtedy $|F_n| \leq C(b-a)$ na K dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

Ustalmy $k \in \mathbb{N}$ oraz $z \in D$. Z twierdzenia Weierstrassa wynika, że $F_n^{(k)}(z) \rightarrow F^{(k)}(z)$. Zauważmy, że

$$F_n^{(k)}(z) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(z, \xi_{n,j}) \frac{b-a}{n}, \quad n \in \mathbb{N};$$

$F_n^{(k)}(z)$ jest sumą aproksymacyjną pośrednią dla całki $\int_a^b \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(z, t) dt$ przy podziale $a = t_{n,0} < \dots < t_{n,n} = b$ i punktach pośrednich $\xi_{n,1}, \dots, \xi_{n,n}$. Wobec dowolności $\xi_{n,j}$ dostajemy istnienie całki $\int_a^b \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(z, t) dt$ oraz żadaną równość.

W przypadku, gdy $I = [a, b)$ ⁽⁶⁾, ustalmy $b_k \nearrow b$ i niech

$$F_k(z) := \int_a^{b_k} f(z, t) dt, \quad z \in D, \quad k \in \mathbb{N}.$$

⁽⁵⁾ Wzór ten oznacza w szczególności, że całka po prawej stronie istnieje.

⁽⁶⁾ Uwaga: dopuszczamy $b = +\infty$.

Wobec pierwszej części dowodu, wystarczy pokazać, że $F_k \rightarrow F$ niemal jednostajnie w D . Ustalmy zbiór zwarty $K \subset\subset D$. Wtedy, dla $z \in K$ oraz $\ell \geq k$, mamy

$$|F_k(z) - F_\ell(z)| = \left| \int_{b_k}^{b_\ell} f(z, t) dt \right| \leq \int_{b_k}^{b_\ell} g_K(t) dt \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0. \quad \square$$

Funkcje holomorficzne II

4.1. Twierdzenie o residuach pochodnej logarytmicznej, twierdzenia Rouchégo i Hurwitza

Twierdzenie 4.1.1 (Twierdzenie o residuach pochodnej logarytmicznej). *Niech D będzie obszarem p -spójnym ograniczonym p drogami Jordana zorientowanymi dodatnio, niech $\overline{D} \subset \Omega$, gdzie Ω jest zbiorem otwartym, i niech $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, $f \neq 0$ na D , będzie taka, że $f^{-1}(0) \cup S(f) \subset D$ ($f^{-1}(0) \cup S(f)$ musi być zbiorem skończonym). Niech $\alpha(z) := \text{ord}_z f$, $z \in f^{-1}(0)$, i niech $\beta(b)$ oznacza rząd bieguna funkcji f w punkcie $b \in S(f)$. Wtedy, dla dowolnej funkcji $\varphi \in \mathcal{O}(\Omega)$, mamy*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \varphi(\zeta) \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = \sum_{z \in f^{-1}(0)} \alpha(z) \varphi(z) - \sum_{b \in S(f)} \beta(b) \varphi(b).$$

W szczególności, dla $\varphi = 1$, mamy

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \varphi(\zeta) \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = Z - B,$$

gdzie Z (odp. B) oznacza liczbę zer (odp. biegunów) funkcji f liczonych z krotnościami.

Dowód. Na podstawie twierdzenia o residuach, mamy

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \varphi(\zeta) \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = \sum_{z \in f^{-1}(0)} \text{res}_z \left(\varphi \frac{f'}{f} \right) + \sum_{b \in S(f)} \text{res}_b \left(\varphi \frac{f'}{f} \right) = \sum_{z \in f^{-1}(0)} \alpha(z) \varphi(z) - \sum_{b \in S(f)} \beta(b) \varphi(b),$$

ponieważ, jeżeli $f(z) = (z - a)^k g(z)$, $z \in \mathbb{A}(a, 0, r) \subset \subset D$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$ oraz $g \in \mathcal{O}(K(a, r))$, $g(a) \neq 0$, to

$$\varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} = \varphi(z) \frac{k(z - a)^{k-1} g(z) + (z - a)^k g'(z)}{(z - a)^k g(z)} = \varphi(z) \frac{k}{z - a} + \varphi(z) \frac{g'(z)}{g(z)}, \quad z \in \mathbb{A}(a, 0, r). \quad \square$$

Twierdzenie 4.1.2 (Twierdzenie Rouchégo ⁽¹⁾). *Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem ograniczonym, i niech $f, g \in \mathcal{O}(D) \cap \mathcal{C}(\overline{D})$, będą takie, że $|g(\zeta)| < |f(\zeta)|$, $\zeta \in \partial D$. Wtedy $f + g$ i f mają w D tyle samo zer liczonych z krotnościami.*

Dowód. Zauważmy, że funkcje $f + g$ i f nie mogą mieć zer na ∂D — mogą więc mieć w D tylko skończoną liczbę zer. Niech $G \subset \subset D$ będzie obszarem p -spójnym ograniczonym p drogami Jordana zorientowanymi dodatnio takim, że $(f + g)^{-1}(0) \cup f^{-1}(0) \subset G$ oraz $|g(\zeta)| < |f(\zeta)|$, $\zeta \in \partial G$. Istnienie obszaru G wynika np. z rozumowania korzystającego z siatek kwadratowych, tak jak to robiliśmy w dowodzie Propozycji 2.6.5.

Zauważmy, że dla $\zeta \in \partial G$ i $t \in [0, 1]$ mamy $|f(\zeta) + tg(\zeta)| \geq |f(\zeta)| - t|g(\zeta)| \geq |f(\zeta)| - |g(\zeta)| > 0$, co w szczególności oznacza, funkcja $f + tg$ nie ma zer na ∂G . Niech $Z(t)$ oznacza liczbę zer funkcji $f + tg$ w G liczonych z krotnościami. Na podstawie twierdzenia o residuach pochodnej logarytmicznej wiemy, że

$$Z(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(\zeta) + tg'(\zeta)}{f(\zeta) + tg(\zeta)} d\zeta, \quad t \in [0, 1].$$

Pozostaje zauważyć, że Z jest funkcją ciągłą zmiennej t (na podstawie twierdzenia z Analizy o funkcjach danych całką). $\square$

⁽¹⁾ Eugene Rouché (1832–1910) — matematyk francuski.

Wniosek 4.1.3. *Dowolny wielomian $P \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C})$, $\deg P = n \geq 1$, ma dokładnie n pierwiastków zespolonych liczonych z krotnościami.*

Dowód. Niech $P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$, $f(z) := a_n z^n$, $g(z) := a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$. Wtedy $|g(\zeta)| < |f(\zeta)|$, $\zeta \in C(R)$, dla dostatecznie dużego R (ĆWICZENIE). Teraz wystarczy już tylko skorzystać z twierdzenia Rouchégo. $\square$

Twierdzenie 4.1.4 (Twierdzenie Hurwitza ⁽²⁾). *Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie dowolnym obszarem, $(f_k)_{k=1}^\infty \subset \mathcal{O}(D)$, $f_k \rightarrow f$ niemal jednostajnie w D , $f \not\equiv 0$. Wtedy dla $a \in D$ i $d \in \mathbb{Z}_+$, NWSR:*

- (i) *$a \in D$ jest zerem d -krotnym funkcji f ;*
- (ii) *istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że dla dowolnego $0 < \delta < \varepsilon$, istnieje $k_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla dowolnego $k \geq k_0$ funkcja f_k ma w $K(a, \delta)$ dokładnie d zer liczonych z krotnościami.*

Dowód. (i) $\Rightarrow$ (ii): Dobierzmy $\varepsilon > 0$ takie, że $f(z) \neq 0$, $z \in \overline{K}(a, \varepsilon) \setminus \{a\}$. Niech $0 < \delta < \varepsilon$ i niech

$$\eta := \frac{1}{2} \min\{|f(z)| : z \in C(a, \delta)\} > 0.$$

Dobierzmy $k_0 \in \mathbb{N}$ tak, by $|f_k(z) - f(z)| \leq \eta$ dla $z \in \overline{K}(a, \delta)$, $k \geq k_0$. Wtedy, dla $z \in C(a, \delta)$ i $k \geq k_0$, mamy $|f_k(z) - f(z)| \leq \eta < 2\eta \leq |f(z)|$. Korzystając z twierdzenia Rouchégo, wnioskujemy stąd, że funkcje $f_k = (f_k - f) + f$ i f mają w $K(a, \delta)$ tyle samo zer liczonych z krotnościami.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Poprzednie rozumowanie pokazuje, że f musi mieć w a zero krotności d . $\square$

Wniosek 4.1.5. *Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie dowolnym obszarem, $(f_k)_{k=1}^\infty \subset \mathcal{O}(D)$, $f_k \rightarrow f$ niemal jednostajnie w D , $f \not\equiv \text{const}$. Załóżmy, że dla dowolnego k funkcja f_k jest iniektywna. Wtedy f jest iniektywna.*

Dowód. Przypuśćmy, że $f(a) = f(b) =: c$ dla pewnych $a, b \in D$, $a \neq b$. Niech $K(a, r) \cap K(b, r) = \emptyset$. Stosując twierdzenie Hurwitza do funkcji $(f_k - c)_{k=1}^\infty$, $f - c$ i punktu a (odp. b), wnioskujemy, że istnieje $k_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla dowolnego $k \geq k_0$ funkcja $f_k - c$ ma zarówno w kole $K(a, r)$ jak i w kole $K(b, r)$, co najmniej po jednym zerze, powiedzmy, a_k, b_k , czyli $f_k(a_k) = f_k(b_k)$, $k \geq k_0$ — sprzeczność. $\square$

4.2. Krotność

Definicja 4.2.1. Niech $D \subset \hat{\mathbb{C}}$ będzie obszarem, $a \in D$, i niech $f \in \mathcal{M}(D)$. Powiemy, że funkcja f jest d -krotna w otoczeniu punktu a ($d \in \mathbb{N}$), jeżeli istnieje otoczenie $U_0 \subset D$ punktu a takie, że dla dowolnego otoczenia $U \subset U_0$ punktu a istnieje otoczenie V punktu $f(a)$ takie, że dla dowolnego $w \in V \setminus \{f(a)\}$, funkcja $f - w$ ma w U dokładnie d zer liczonych z krotnościami.

Zauważmy, że tak zdefiniowana krotność jest wyznaczona jednoznacznie.

Wniosek 4.2.2. *Niech $D \subset \hat{\mathbb{C}}$ będzie obszarem, $a \in D$, i niech $f \in \mathcal{M}(D)$. Wtedy NWSR:*

- (i) *funkcja f jest d -krotna w otoczeniu punktu a ;*
- (ii) *jeżeli $a \notin S(f)$, to a jest zerem d -krotnym funkcji $f - f(a)$;*
jeżeli $a \in S(f)$, to a jest biegunem rzędu d funkcji f (a więc, na podstawie Propozycji 3.2.6, zerem d -krotnym funkcji $1/f$).

Dowód. (ii) $\Rightarrow$ (i): Załóżmy najpierw, że $a \in D \cap \mathbb{C} \setminus S(f)$. Niech $r > 0$ będzie takie, że jedynym zerem funkcji $f - f(a)$ w kole $K(a, r) \subset D$ jest punkt a . Niech $0 < \delta < r$ i $\eta := \min\{|f(z) - f(a)| : z \in C(a, \delta)\}$. Niech $0 < |w - f(a)| < \eta$. Wtedy $|f(a) - w| < |f(z) - f(a)|$, $z \in C(a, \delta)$. Stąd, na podstawie twierdzenia Rouchégo, funkcje $f(z) - w = (f(z) - f(a)) + (f(a) - w)$ i $f(z) - f(a)$ mają w kole $K(a, \delta)$ tyle samo zer liczonych z krotnościami.

Niech teraz $a = \infty \in D \setminus S(f)$, $g(z) = f(1/z)$. Wtedy $d = \text{ord}_0(g - g(0))$. Wobec poprzedniego rozumowania, g jest d -krotna w otoczeniu 0. Wynika stąd natychmiast, że f jest d -krotna w otoczeniu ∞ .

Założmy, że $a \in \mathbb{C} \cap S(f)$. Wtedy $d = \text{ord}_a(1/f)$. Z poprzedniej części dowodu, wynika, że funkcja $1/f$ jest d -krotna w otoczeniu a , a stąd oczywiście wnioskujemy, że f jest d -krotna w otoczeniu a .

Przypadek $a = \infty \in S(f)$ pozostawiamy jako ĆWICZENIE.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Wynika z poprzedniego rozumowania — ĆWICZENIE. $\square$

⁽²⁾ Adolf Hurwitz (1859–1919) — matematyk niemiecki.

Wniosek 4.2.3. Niech $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ będzie obszarem i niech $f \in \mathcal{M}(D)$, $f \not\equiv \text{const}$. Wtedy f jest odwzorowaniem otwartym.

Obserwacja 4.2.4. Jeżeli $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ jest odwzorowaniem otwartym, to $|f| : D \rightarrow \mathbb{R}_+$ jest odwzorowaniem otwartym oraz dla $|f|$ zachodzi zasada maksimum i zasada minimum (ta ostatnia w punktach takich, że $f(a) \neq 0$).

4.3. Odwzorowania biholomorficzne

Definicja 4.3.1. Niech $D_1, D_2 \subset \widehat{\mathbb{C}}$ będą obszarami. Powiemy, że odwzorowanie bijektywne $f : D_1 \rightarrow D_2$ jest *biholomorficzne* ($f \in \text{Bih}(D_1, D_2)$), jeżeli $f \in \mathcal{M}(D_1)$ i $f^{-1} \in \mathcal{M}(D_2)$.

Niech $\text{Aut}(D) := \text{Bih}(D, D)$.

Obserwacja 4.3.2. Jeżeli $f \in \text{Bih}(D_1, D_2)$, to

$$\text{Aut}(D_1) \ni \varphi \mapsto f \circ \varphi \circ f^{-1} \in \text{Aut}(D_2)$$

jest izomorfizmem grup.

Propozycja 4.3.3. Niech $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ (odp. $D \subset \mathbb{C}$) będzie obszarem i niech $f \in \mathcal{M}(D)$ (odp. $f \in \mathcal{O}(D)$). Wtedy NWSR:

- (i) f jest biholomorficzne tzn. zbiór $G := f(D)$ jest otwarty i $f \in \text{Bih}(D, G)$;
- (ii) f jest iniektywne i jednokrotne w otoczeniu każdego punktu $a \in D$ (zauważmy, że na podstawie Wniosku 4.2.2 w przypadku holomorficznym warunek ten oznacza, że $f'(z) \neq 0$, $z \in D$);
- (iii) f jest iniektywne.

Dowód. Implikacje (i) $\implies$ (ii) $\implies$ (iii) są elementarne.

(iii) $\implies$ (i): W przypadku holomorficznym, na podstawie Wniosku 4.2.2, musi być $f'(z) \neq 0$, $z \in D$, co, na podstawie Propozycji 2.3.1(c), daje biholomorficzność f .

W przypadku meromorficznym, Wniosek 4.2.3 daje otwartość zbioru G . Pozostaje sprawdzić holomorficzność odwzorowania f^{-1} (jako odwzorowania określonego na zespolonej rozmaitości jednowymiarowej o wartościach w zespolonej rozmaitości jednowymiarowej).

Holomorficzność na $G \setminus \{\infty\}$, gdy $\infty \notin D$, lub na $G \setminus (\{\infty\} \cup f(\infty))$, gdy $\infty \in D$, wynika natychmiast z poprzedniej części dowodu.

Holomorficzność w otoczeniu ∞ wynika z zastosowania poprzedniej części do odwzorowania $g := 1/f$. Holomorficzność w otoczeniu $f(\infty)$ wynika z zastosowania poprzedniej części do odwzorowania $g(z) := f(1/z)$. Szczegóły pozostawiamy jako ĆWICZENIE. $\square$

4.4. Odwzorowania biholomorficzne pierścieni

Propozycja 4.4.1 (Twierdzenie Hadamarda ⁽³⁾ o trzech okręgach). Niech $f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}(r_1, r_2))$, $0 < r_1 < r_2 < +\infty$, i niech

$$M_j := \sup_{z \rightarrow \zeta} \{\limsup |f(z)| : \zeta \in C(r_j)\}, \quad j = 1, 2.$$

Wtedy

$$|f(z)| \leq M_1^{\frac{\ln \frac{|z|}{r_2}}{\ln \frac{r_1}{r_2}}} M_2^{\frac{\ln \frac{|z|}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}}}, \quad z \in \mathbb{A}(r_1, r_2).$$

W szczególności (ĆWICZENIE), jeżeli $f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}(r_1, r_2)) \cap \mathcal{C}(\bar{\mathbb{A}}(r_1, r_2))$ oraz

$$M(r) := \max\{|f(z)| : z \in C(r)\},$$

to funkcja

$$[\ln r_1, \ln r_2] \ni t \mapsto \ln M(e^t)$$

jest wypukła.

⁽³⁾ Jacques Hadamard (1865–1963) — matematyk francuski.

Dowód. Oczywiście możemy założyć, że $M_1, M_2 < +\infty$, $f \not\equiv \text{const}$. Niech $u(z) := |z|^\alpha |f(z)|$, $z \in \mathbb{A}(r_1, r_2)$. Zauważmy, że u jest odwzorowaniem otwartym bowiem lokalnie $u = |e^{\alpha \ell} f|$, gdzie ℓ jest lokalną gałęzią jednoznacznej logarytmu. Dla odwzorowań otwartych zachodzi zasada maksimum, a więc

$$|z|^\alpha |f(z)| \leq \max\{r_1^\alpha M_1, r_2^\alpha M_2\}, \quad z \in \mathbb{A}(r_1, r_2).$$

Dobierając α tak, by $r_1^\alpha M_1 = r_2^\alpha M_2$, dostajemy tezę (ĆWICZENIE). $\square$

Twierdzenie 4.4.2. *Jeżeli $f \in \text{Bih}(\mathbb{A}(r_1, R_1), \mathbb{A}(r_2, R_2))$, $0 < r_j < R_j < +\infty$, $j = 1, 2$, to $R_1/r_1 = R_2/r_2$ oraz, z dokładnością do obrotu, odwzorowanie f ma postać $f(z) = (r_2/r_1)z$, $z \in \mathbb{A}(r_1, R_1)$, lub $f(z) = r_1 R_2/z$, $z \in \mathbb{A}(r_1, R_1)$.*

W szczególności, dla $0 < r < R < +\infty$,

$$\text{Aut}(\mathbb{A}(r, R)) = \{z \mapsto e^{i\theta} z : \theta \in \mathbb{R}\} \cup \{z \mapsto e^{i\theta} rR/z : \theta \in \mathbb{R}\};$$

grupa $\text{Aut}(\mathbb{A}(r, R))$ zależy od jednego parametru rzeczywistego i nie działa translatywnie.

Dowód. Po obłożeniu odwzorowania f stosownymi homotetiami, możemy założyć, że $r_1 = r_2 = 1$. Niech $g := f^{-1}$. Odwzorowanie f jest właściwe, zatem

$$\lim_{\text{dist}(z, \partial\mathbb{A}(1, R_1)) \rightarrow 0} \text{dist}(f(z), \partial\mathbb{A}(1, R_2)) = 0.$$

Zasadnicza myśl dowodu polega na pokazaniu, że albo

$$\lim_{|z| \rightarrow 1} |f(z)| = 1 \text{ i } \lim_{|z| \rightarrow R_1} |f(z)| = R_2, \quad (\dagger)$$

albo

$$\lim_{|z| \rightarrow 1} |f(z)| = R_2 \text{ i } \lim_{|z| \rightarrow R_1} |f(z)| = 1. \quad (\ddagger)$$

Przyjmijmy na moment, że $(\dagger)$ zachodzi. Wtedy na podstawie twierdzenia Hadamarda o trzech okręgach mamy:

$$|f(z)| \leq R_2^{\frac{\ln |z|}{\ln R_1}} = |z|^{\frac{\ln R_2}{\ln R_1}}, \quad z \in \mathbb{A}(1, R_1), \quad |g(w)| \leq R_1^{\frac{\ln |w|}{\ln R_2}} = |w|^{\frac{\ln R_1}{\ln R_2}}, \quad w \in \mathbb{A}(1, R_2).$$

Stąd $|f(z)| = |z|^{\frac{\ln R_2}{\ln R_1}} =: |z|^\alpha$, $z \in \mathbb{A}(1, R_1)$. Chcemy pokazać, że $\alpha = 1$.

Mamy $f(z) = e^{i\theta} e^{\alpha \text{Log } z}$, $z \in \mathbb{A}(1, R_1) \setminus \mathbb{R}_-$ (dla pewnego $\theta \in \mathbb{R}$). Ponieważ f jest funkcją ciągłą musi być $e^{i\theta} e^{\alpha(\ln t + i\pi)} = e^{i\theta} e^{\alpha(\ln t - i\pi)}$, $t \in (1, R_1)$. Stąd $e^{2\alpha\pi i} = 1$, a więc $\alpha \in \mathbb{Z}$. Ponieważ f jest iniektywne musi być $\alpha = \pm 1$. Warunki $(\ddagger)$ implikują, że $\alpha = 1$.

Przypadek $(\ddagger)$ sprowadza się do powyższego poprzez obłożenie odwzorowania f inwersją

$$\mathbb{A}(1, R_2) \ni w \mapsto R_2/w \in \mathbb{A}(1, R_2). \quad (*)$$

Pozostaje pokazać $(\dagger)$, $(\ddagger)$. Niech $r := \sqrt{R_2}$, $B_- := \mathbb{A}(1, r)$, $B_+ := \mathbb{A}(r, R_2)$. Ponieważ $C(r)$ nie jest krzywą homotopijną ze stałą w $\mathbb{A}(1, R_2)$, jej obraz $g(C(r))$, będący krzywą Jordana, musi „otaczać” $\mathbb{T}$. Ponieważ $g(C(r))$ jest zbiorem zwartym, istnieją liczby $1 < s_1 < s_2 < R_1$ takie, że $g(C(r)) \subset \mathbb{A}(s_1, s_2)$. Rozważmy obszary $A_+ := f(\mathbb{A}(s_2, R_1))$ i $A_- := f(\mathbb{A}(1, s_1))$. Ponieważ $A_+ \cap C(r) = \emptyset$, obszar A_+ jest zawarty w B_+ lub w B_- . Obkładając w razie potrzeby odwzorowanie f inwersją $(*)$, możemy założyć, że $A_+ \subset B_+$. Oznacza to, że $\lim_{|z| \rightarrow R_1} |f(z)| = R_2$. Pozostaje pokazać, że $A_- \subset B_-$. Gdyby $A_- \subset B_+$, wtedy moglibyśmy połączyć pewien (dowolnie wybrany) punkt $a_+ \in A_+$ z pewnym (dowolnie wybranym) punktem $a_- \in A_-$ krzywą γ leżącą w B_+ . Obraz tej krzywej $g(\gamma)$ łączyłby punkt $g(a_+) \in \mathbb{A}(s_2, R_1)$ z punktem $g(a_-) \in \mathbb{A}(1, s_1)$ i byłby rozłączny z $g(C(r))$, co oznaczałoby, że krzywa $g(C(r))$ nie otacza $\mathbb{T}$ — sprzeczność. $\square$

Ćwiczenie 4.4.3. Scharakteryzować wszystkie biholomorfizmy $f : \mathbb{A}(r_1, R_1) \rightarrow \mathbb{A}(r_2, R_2)$, $0 \leq r_j < R_j \leq +\infty$, $j = 1, 2$, w przypadkach nie objętych przez Twierdzenie 4.4.2.

4.5. Twierdzenie Riemanna

Twierdzenie 4.5.1 (Twierdzenie Riemanna). *Niech $D \subset \hat{\mathbb{C}}$ będzie obszarem jednospójnym takim, że $\#\partial D \geq 2$. Wtedy istnieje odwzorowanie biholomorficzne $f : D \rightarrow \mathbb{D}$.*

Dowód. Przypadek, gdy $\infty \in D$ sprowadzamy do przypadku, gdy $D \subset \mathbb{C}$ przy pomocy inwersji. Niech $a, b \in \partial D$, $a \neq b$. Ustalmy $z_0 \in D$ i niech

$$\mathcal{R} := \{f \in \mathcal{O}(D, \mathbb{D}) : f(z_0) = 0, f \text{ jest iniektywna}\}.$$

Idea dowodu jest następująca: Najpierw pokażemy, że $\mathcal{R} \neq \emptyset$. Niech $M := \sup\{|f'(z_0)| : f \in \mathcal{R}\}$. Ponieważ każda $f \in \mathcal{F}$ jest iniektywna, musi być $M > 0$. Niech $(f_k)_{k=1}^\infty \subset \mathcal{R}$, $f'_k(z_0) \rightarrow M$. Na podstawie twierdzenia Montela możemy założyć, że $f_k \rightarrow f_0$ niemal jednostajnie w D . Oczywiście $f_0 \in \mathcal{O}(D, \mathbb{D})$, $f'_0(z_0) = M > 0$. W szczególności, $f_0 \neq \text{const}$. Ponieważ $f_0(z_0) = 0$, zatem $f \in \mathcal{O}(D, \mathbb{D})$. Na podstawie twierdzenia Hurwitza $f_0 \in \mathcal{R}$. Na koniec pokażemy, że $f_0(D) = \mathbb{D}$, a więc f_0 jest poszukiwanym odwzorowaniem.

$\mathcal{R} \neq \emptyset$: Oczywiście wystarczy skonstruować holomorficzne odwzorowanie iniektywne $f : D \rightarrow \mathbb{D}$. W tym zaś celu wystarczy skonstruować holomorficzne odwzorowanie iniektywne $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ takie, że $K(c, r) \cap g(D) = \emptyset$ (dla pewnych $c \in \mathbb{C}$ i $r > 0$). Istotnie, gdybyśmy takie g mieli, to jako moglibyśmy zdefiniować $f := \frac{r}{g-c}$. Przystępujemy do konstrukcji g .

Jeżeli $a \in \mathbb{C}$, to niech g będzie gałęzią jednoznacznej funkcji $\sqrt{z-a}$. Jest to funkcja iniektywna w D oraz $g(D) \cap (-g(D)) = \emptyset$ (jeżeli $g(z_1) = -g(z_2)$, to $g^2(z_1) = g^2(z_2)$, a stąd $z_1 = z_2$, a więc $h(z_1) = 0$ — sprzeczność). Teraz bierzemy dowolne $K(c, r) \subset -g(D)$.

$f_0(D) = \mathbb{D}$: Przypuśćmy, że $G := f_0(D) \subsetneq \mathbb{D}$. Wykażemy następujący pomocniczy lemat.

Lemat 4.5.2. *Niech $G \subsetneq \mathbb{D}$ będzie obszarem jednospójnym, $0 \in G$. Wtedy istnieje odwzorowanie iniektywne $\psi \in \mathcal{O}(G, \mathbb{D})$ takie, że $\psi(0) = 0$, $|\psi'(0)| > 1$ oraz $|\psi(z)| > |z|$, $z \in G \setminus \{0\}$.*

Dowód. Ustalmy $c \in \mathbb{D} \setminus G$ i niech $G_1 := h_c(G)$. Wtedy $G_1 \subset \mathbb{D}$ jest obszarem jednospójnym i $0 \notin G_1$. W szczególności, w G_1 istnieje gałąź g pierwiastka. Niech $d := g(h_c(0))$ i niech $\psi := h_d \circ g \circ h_c$. Wtedy $\psi : G \rightarrow \mathbb{D}$ jest iniektywne i $\psi(0) = 0$. Zauważmy, że $\psi^{-1} = h_{-c} \circ (h_{-d})^2 \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ (w sensie przedłużenia z $\psi(G)$ na $\mathbb{D}$). Z lematu Schwarza wynika, że $|\psi^{-1}(w)| \leq |w|$, $w \in \mathbb{D}_*$, $|(\psi^{-1})'(0)| \leq 1$. Gdyby w którejś z tych nierówności zachodziła równość, wtedy $\psi^{-1}(w) = e^{i\alpha}w$, a stąd $(h_{-d}(z))^2 = h_c(e^{i\alpha}z)$, $z \in \mathbb{D}$ — sprzeczność. $\square$

Niech teraz $\psi \in \mathcal{O}(G, \mathbb{D})$ będzie taka, jak w powyższym lemacie. Zdefiniujmy $f := \psi \circ f_0$. Wtedy $f \in \mathcal{R}$ i $|f'(z_0)| = |\psi'(0)f'_0(z_0)| = |\psi'(0)|M > M$ — sprzeczność. $\square$

Wniosek 4.5.3. *Niech $D \subset \hat{\mathbb{C}}$ będzie obszarem jednospójnym takim, że $\#\partial D \geq 2$. Niech $z_0 \in D \cap \mathbb{C}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Wtedy istnieje dokładnie jedno odwzorowanie $f \in \text{Bih}(D, \mathbb{D})$ takie, że $f(z_0) = 0$ i $\theta \in \arg f'(z_0)$.*

Dowód. Jeżeli $f_1, f_2 : D \rightarrow \mathbb{D}$ są dwoma takimi odwzorowaniami, to $\varphi = f_2 \circ f_1^{-1} \in \text{Aut}(\mathbb{D})$, $\varphi(0) = 0$ i $\varphi'(0) \in \mathbb{R}_{>0}$. Stąd $\varphi = \text{id}$, a więc $f_1 \equiv f_2$.

Na podstawie twierdzenia Riemanna istnieje odwzorowanie biholomorficzne $f : D \rightarrow \mathbb{D}$. Składając g z $h_{f(z_0)} \in \text{Aut}(\mathbb{D})$, uzyskujemy $f(z_0) = 0$. Teraz składając ze stosownym obrotem dostajemy $\theta \in \arg f'(z_0)$. $\square$

Obserwacja 4.5.4. (a) Efektywne znalezienie odwzorowania $f : D \rightarrow \mathbb{D}$ (lub $f^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow D$) w twierdzeniu Riemanna jest praktycznie niemożliwe z wyjątkiem sytuacji, gdy obszar D spełnia jakieś dodatkowe warunki regularności. Tak jest np. dla wielokątów, gdzie odwzorowanie biholomorficzne $g : \mathbb{H}^+ \rightarrow D$ może być dane tzw. wzorami Christoffela ⁽⁴⁾.

(b) Twierdzenie Riemanna ma swoje odpowiedniki dla obszarów wielospójnych, jednak obszary kanoiczne nie są już takie proste i intuicyjne, jak dla obszarów jednospójnych. Dla przykładu:

Każdy dwuspójny obszar $D \subset \mathbb{C}$, którego żadna składowa brzegu nie redukuje się do punktu, da się przekształcić biholomorficznie na pierścień $\mathbb{A}(1, \rho)$ dla pewnego $\rho > 1$, przy czym można to zrobić tak, aby z góry zadanej składowej brzegu odpowiadał okrąg jednostkowy.

⁽⁴⁾ Elwin Christoffel (1829–1900) — matematyk niemiecki.

Zauważmy, że liczba ρ jest jednoznacznie wyznaczona.

Twierdzenie* 4.5.5 (Twierdzenie Osgooda–Carathéodory’ego ⁽⁵⁾ ⁽⁶⁾). *Każde odwzorowanie biholomorficzne $f : D_1 \rightarrow D_2$ obszarów ograniczonych krzywymi Jordana przedłuża się do homeomorfizmu $\tilde{f} : \overline{D}_1 \rightarrow \overline{D}_2$.*

Wniosek 4.5.6. *Niech $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}$ będą obszarami ograniczonymi krzywymi Jordana zorientowanymi dodatnio względem tych obszarów. Niech $a_1, a_2, a_3 \in \partial D_1$, $b_1, b_2, b_3 \in \partial D_2$ będą dowolnymi układami parami różnych punktów następujących po sobie w orientacji dodatniej. Wtedy istnieje odwzorowanie $f \in \text{Bih}(D_1, D_2)$ takie, że $\tilde{f}(a_j) = b_j$, $j = 1, 2, 3$ (gdzie $\tilde{f}$ oznacza homeomorficzne rozszerzenie f z twierdzenia Osgooda–Carathéodory’ego).*

Dowód. Wobec twierdzeń Riemanna i Osgooda–Carathéodory’ego, wystarczy rozważyć przypadek $D_1 = D_2 = \mathbb{D}$ — ĆWICZENIE. $\square$

⁽⁵⁾ William Osgood (1864–1943) — matematyk amerykański.

⁽⁶⁾ Constantin Carathéodory (1873–1950) — matematyk niemiecki

Oznaczenia

Rozdział 1

$\operatorname{Re} z$	1
$\operatorname{Im} z$	1
$\bar{z}$	1
$ $	1
$K(a, r) := \{z \in \mathbb{C} : z - a < r\}, 0 < r \leq +\infty, K(a, +\infty) := \mathbb{C}, K(r) := K(0, r), \mathbb{D} := K(1)$	1
$C(a, r) := \{z \in \mathbb{C} : z - a = r\} = \partial K(a, r), \mathbb{T} := C(1)$	1
$\bar{K}(a, r) := \{z \in \mathbb{C} : z - a \leq r\}, 0 \leq 0 < +\infty, \bar{K}(a, 0) := \{a\}, \bar{K}(r) := \bar{K}(0, r)$	1
$\mathbb{A}(a, r_-, r_+) := \{z \in \mathbb{C} : r_- < z - a < r_+\}$	1
$\arg$	1
Arg	2
$\sqrt[n]{z}$	2
$\mathbb{C}_* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$	2
$\hat{\mathbb{C}}$	3
$d_{\hat{\mathbb{C}}}$	3
$\mathbb{H}^+ := \{x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$	4
$\exp z$	5
$\cos z$	5
$\sin z$	5
$\operatorname{tg} z$	6
$\operatorname{ctg} z$	6
$\sinh z$	6
$\cosh z$	6
$\log z := \{w \in \mathbb{C} : e^w = z\}$	6
$\operatorname{Log} z := \ln z + i \operatorname{Arg} z$	6
$a^b := \{e^{bw} : w \in \log a\}$	6

Rozdział 2

$f'_{\mathbb{R}}(a)$	9
----------------------------	---

$\frac{\partial f}{\partial z}(a) := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) - i \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right)$	9
$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) + i \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right)$	9
$f'(a)$	9
$f'_\mathbb{C}(a)$	9
$\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$	9
$\mathcal{P}(\mathbb{C})$	10
$\mathcal{R}(\mathbb{C})$	10
$\ell(\gamma)$	10
$\ \varphi\ _A := \sup\{ \varphi(z) : z \in A\}$	10
$\text{Ind}_\gamma(a)$	12
$\mathcal{O}(\Omega)$	16
$T_a f$	17
$d(T_a f)$	17
$K^{(r)} := \bigcup_{a \in K} \overline{K}(a, r)$	20
$d_\Omega(a) := \sup\{r > 0 : K(a, r) \subset \Omega\}$	20
$d_\Omega(A) := \inf\{d_\Omega(a) : a \in A\}$	21
$L_h^p(\Omega) := L^p(\Omega) \cap \mathcal{O}(\Omega)$	21
$\mathcal{H}^\infty(\Omega)$	21
$\text{Aut}(D)$	22
$\mathcal{O}^*(\Omega) := \{f \in \mathcal{O}(\Omega) : f^{-1}(0) = \emptyset\}$	25
$\mathcal{O}(M)$	26
$\mathcal{O}(M, N)$	27
$\mathcal{O}(\Omega), \Omega \subset \widehat{\mathbb{C}}$	27

Rozdział 3

$\text{res}_a f$	31
$\text{res}_\infty f$	31
$\text{ord}_a f$	32
$\mathcal{M}(D)$	33
$S(f)$	33
$\mathcal{M}(\Omega)$	33
$\text{Aut}(\mathbb{C})$	34
$\text{Aut}_{\mathcal{H}}(\mathbb{C})$	34

Rozdział 4

$\text{Bih}(D_1, D_2)$	39
$\text{Aut}(D)$	39

Indeks nazwisk

Arzela, 23
Ascoli, 23

Carathéodory, 42
Casorati, 32
Cauchy, 5, 9, 11, 13–15, 18, 21, 24
Christoffel, 41

Euler, 5

Fréchet, 9

Goursat, 13, 15, 18
Green, 11, 14

Hölder, 21
Hadamard, 39
Hurwitz, 38

Jordan, 13

Laurent, 29
Liouville, 21

Moivre, 2
Montel, 23
Morera, 18

Osgood, 42

Picard, 33

Riemann, 3, 9, 23, 26, 31, 32, 41
Rouché, 37

Schwarz, 22, 23
Sochocki, 32

Taylor, 17

Vitali, 23

Weierstrass, 19, 32
Żukowski, 7

Indeks

- argument, 1
 - główny, 2
- atlas, 26
 - maksymalny, 26
- biegun, 31
 - w ∞ , 31
- cykl, 24
 - homologiczny zera, 24
- część
 - główna bieguna, 31
 - główna bieguna w ∞ , 31
 - osobliwa szeregu Laurenta, 29
 - regularna szeregu Laurenta, 29
 - rzeczywista, 1
 - urojona, 1
- długość krzywej, 10
- droga, 10
- funkcja
 - d -krotna, 38
 - całkowita, 16
 - hiperboliczne, 6
 - holomorficzna, 16, 26, 27
 - meromorficzna, 33
 - wykładnicza, 5
 - Żukowskiego, 7
- gałąź jednoznaczna, 2
 - argumentu, 2
 - pierwiastka, 2
- holomorficzność w ∞ , 27
- homografia, 3
 - elementarna, 3
- homotetia, 4
- indeks punktu
 - względem drogi zamkniętej, 11
 - względem krzywej zamkniętej, 12
- inwersja, 4
- izolowany punkt osobliwy, 31
- kosinus, 5
 - hiperboliczny, 6
- kotangens, 6
- krotność zera funkcji holomorficznej, 32
- lemat
 - o produkcji funkcji holomorficznych, 17
 - Schwarza, 22
- liczba
 - sprzężona, 1
 - zespolona, 1
- logarytm
 - główny, 6
 - zaspolony, 6
- mapa, 26
 - zgodna z atlasem, 26
- metryka sferyczna, 3
- moduł, 1
- nierówność
 - trójkąta, 1
- nierówności Cauchy'ego, 21
- norma zespolona, 1
- obrót, 4
- odwzorowanie
 - afiniczne, 4
 - biholomorficzne, 16, 39
 - holomorficzne, 26
 - konforemne, 3
- okrąg niewłaściwy, 4
- osobliwość
 - izolowana, 31
 - nieizolowana, 31
 - usuwalna, 31
 - usuwalna w ∞ , 31
- pierwiastek zespolony, 2
- pierwotna zespolona, 11
- pochodna
 - formalna, 9
 - zespolona, 9
- postać trygonometryczna, 1
- potęga zespolona, 6
- powierzchnia Riemanna, 26
- promień zbieżności
 - szeregu Taylora, 17
- punkt
 - istotnie osobliwy, 31
 - istotnie osobliwy w ∞ , 31
 - pozornie osobliwy, 31

- pozornie osobliwy w ∞ , 31
- punkty symetryczne względem okręgu, 4
- różniczka Frécheta, 9
- residuum, 31
 - w ∞ , 31
- rodzina normalna, 22
- rozmaitość zespolona, 26
- rząd bieguna, 31
 - w ∞ , 31
- rzut stereograficzny, 3
- sfera Riemanna, 3
- sinus, 5
 - hiperboliczny, 6
- szereg
 - Laurenta, 29
- tangens, 6
- translacja, 4
- tranzytywność, 5
- twierdzenie
 - Cauchy’ego–Dixona, 24
 - Cauchy’ego–Goursata, 13, 15, 18
 - Hadamarda o trzech okręgach, 39
 - Hurwitza, 38
 - Liouville’a, 21
 - Montela, 23
 - Morery, 18
 - o charakteryzacji funkcji holomorficzych, 17
 - o funkcjach danych całką, 35
 - o residuach, 34
 - — pochodnej logarytmicznej, 37
 - o rozwijaniu w szereg Laurenta, 29
 - o wartości średniej, 14
 - Osgooda–Carathéodory’ego, 42
 - Picarda, 33
 - Riemanna, 41
 - — o osobliwościach usuwalnych, 31, 32
 - Rouchégo, 37
 - Sochockiego–Casoratiego–Weierstrassa, 32
 - Vitalego, 23
 - Weierstrassa, 19, 21
- wzór
 - całkowy Cauchy’ego, 14, 15, 18
 - Cauchy’ego–Greena, 11
 - de Moivre’a, 2
- wzory
 - Christoffela, 41
 - Eulera, 5
- zasada
 - identyczności
 - — dla funkcji holomorficzych, 19, 27
 - — dla funkcji meromorficzych, 33
 - maksimum, 20, 27
 - minimum, 20
 - symetrii Riemanna–Schwarza, 23