KRATY BANACHA

Marek Kosiek

Wykład monograficzny dla studentów Uniwersytetu Jagiellońskiego

Spis treści

ROZDZIAŁ 1

Kraty wektorowe i operatory dodatnie

1. Kraty wektorowe

Znakiem $\geqslant$ będziemy oznaczać relację częściowego porządku tzn. relację spełniającą następujące warunki:

(1) **(Refleksywność)** $x \geqslant x \ \forall x$.
(2) **(Antysymetria)** $x \geqslant y,\ y \geqslant x \implies x = y$.
(3) **(Tranzytywność)** $x \geqslant y,\ y \geqslant z \implies x \geqslant z$.

Oznaczenia:

(1) $x \leqslant y \overset{\text{df}}{\iff} y \geqslant x$
(2) $x > y \overset{\text{df}}{\iff} y < x \overset{\text{df}}{\iff} x \geqslant y,\ x \neq y$

Rzeczywista przestrzeń wektorowa X nazywamy **przestrzenią wektorową z porządkiem** lub **przestrzenią liniową częściowo uporządkowaną** (w skrócie **l.c.u.**), jeżeli jest w niej określona relacja częściowego porządku $\geqslant$ kompatybilna z jej strukturą algebraiczną t.j. spełniająca warunki:

(a) $x \geqslant y \implies x + z \geqslant y + z \quad \forall z \in X$.
(b) $x \geqslant y, \implies \alpha x \geqslant \alpha y \quad \forall \alpha \geqslant 0$.

Stwierdzenie 1.1. *Wtedy*

(a') $x \leqslant y \implies -x \geqslant -y$.
(b') $x \leqslant y,\ \alpha < 0 \implies \alpha x \geqslant \alpha y$.
(c') $x \geqslant 0,\ \alpha \leqslant \beta \implies \alpha x \leqslant \beta x$.

Dowód. $x \leqslant y \implies -y = x - y - x \leqslant y - y - x = -x \implies$ (a'); (a'),(2) $\implies$ (b'); (a),(b) $\implies$ (c'). □

Jeżeli X l.c.u., to zbiór $X^+ := \{x \in X : x \geqslant 0\}$ nazywamy **stożkiem dodatnim**. Ma on następujące własności:

(i) $X^+ + X^+ \subset X^+$.
(ii) $\alpha X^+ \subset X^+ \quad \forall \alpha \geqslant 0$.
(iii) $X^+ \cap (-X^+) = \{0\}$.

Dowód. (a) $\implies$ (i); (b) $\implies$ (ii); (2) $\implies$ (iii);. □

Podzbiór K rzeczywistej przestrzeni wektorowej X jest stożkiem, jeżeli

(j) $K + K \subset K$.
(jj) $\alpha K \subset K \quad \forall \alpha \geqslant 0$.
(jjj) $K \cap (-K) = \{0\}$.

STWIERDZENIE 1.2. *Wtedy X z relacją $x \leqslant y \overset{df}{\Longleftrightarrow} y - x \in K$ jest przestrzenią l.c.u.*

DOWÓD. - Ćwiczenie. □

Jeżeli K jest stożkiem w X, to $\operatorname{Lin} K = K - K$. Stożek K nazywa się **reprodukujący**, jeżeli $X = K - K$.

STWIERDZENIE 1.3. *Stożek K jest reprodukujący w X w.t.w., gdy dla dowolnych $x, y \in X$ istnieje $z \in K$ takie, że $z \geqslant x$ i $z \geqslant y$.*

DOWÓD. - Ćwiczenie. □

DEFINICJA 1.4. L.c.u. przestrzeń E jest **kratą wektorową** (inaczej **przestrzenią Riesza**) jeżeli

$$\forall\, x, y \in E \quad \exists\, x \vee y := \sup\{x, y\}, \quad \exists\, x \wedge y := \inf\{x, y\}.$$

DEFINICJA 1.5.

$$x^+ := x \vee 0, \quad x^- := (-x) \vee 0, \quad |x| := x^+ + x^-.$$

Elementy x, y są **rozłączne**, jeżeli $|x| \wedge |y| = 0$.

WNIOSEK 1.6. *Jeżeli E jest kratą wektorową, to dla $x, y, x_1, y_1 \in E$ oraz $\lambda \in \mathbb{R}$ zachodzi*

(1) $x = x^+ - x^-$,
(2) $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0; \quad |\lambda x| = |\lambda||x|, \quad |x + y| \leqslant |x| + |y|$,
(3) $x + y = x \vee y + x \wedge y$,
(4) $|x - y| = x \vee y - x \wedge y$,
(5) $|x \vee y - x_1 \vee y_1| \leqslant |x - x_1| + |y - y_1|$,
(6) $|x \wedge y - x_1 \wedge y_1| \leqslant |x - x_1| + |y - y_1|$
(7) $x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$,
(8) $x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$,
(9) $|x| \vee |y| = \frac{1}{2}(|x + y| + |x - y|)$,
(10) $|x| \wedge |y| = \frac{1}{2}|(|x + y| - |x - y|)|$,
(11) *Wzór (1) jest jedyną reprezentacją x jako różnicy dwóch dodatnich rozłącznych elementów E.*
(12) *Elementy x, y są rozłączne wtedy i tylko wtedy, gdy $|x + y| = |x - y|$.*
(13) $x \leqslant y \Longleftrightarrow (x^+ \leqslant y^+,\ y^- \leqslant x^-)$.
(14) *x rozłączne z y* $\Longrightarrow |x| \vee |y| = |x| + |y| = |x + y|,\ (x + y)^+ = x^+ + y^+$.
(15) $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset E,\ \{y_\beta\}_{\beta \in B} \subset E,\ x = \sup_\alpha x_\alpha,\ y = \inf_\beta y_\beta\ z \in E \implies x \wedge z = \sup_\alpha (x_\alpha \wedge z),\ y \vee z = \inf_\beta (y_\beta \vee z)$.

DOWÓD. - Ćwiczenie. □

STWIERDZENIE 1.7. *Elementy x^+, x^- są rozłączne oraz $|x| = x \vee (-x)$.*

DOWÓD. Korzystamy ze wzoru $z \wedge y = z + (y - z) \wedge 0$, który wynika z niezmienniczości relacji $\geqslant$ względem translacji (a). Stąd dla $z = x^-, y = x^+$ mamy $x^+ \wedge x^- = x^- + x \wedge 0 = x^- - (-x) \vee 0 = x^- - x^- = 0$, a zatem x^+, x^- są rozłączne.

Korzystając teraz z punktu (3) poprzedniego wniosku i rozłączności x^+, x^- mamy $|x| = x^+ + x^- = x^+ \vee x^- + x^+ \wedge x^- = x^+ \vee x^- = x \vee 0 \vee (-x) \vee 0 = x \vee (-x) \vee 0$. Ponieważ $x \vee (-x) \geqslant x$ i $x \vee (-x) \geqslant -x$, więc z niezmienniczości relacji $\geqslant$ względem translacji (a) mamy $x \vee (-x) - x \geqslant 0$ i $x \vee (-x) + x \geqslant 0$, skąd po dodaniu nierówności stronami otrzymujemy $x \vee (-x) \geqslant 0$. Zatem $|x| = x \vee (-x)$. $\square$

Definicja 1.8. Krata wektorowa jest

- **zupełna w sensie Dedekinda** (inaczej **porządkowo zupełna**) jeżeli jej każdy niepusty podzbiór ograniczony z góry ma kres górny,
- σ**-zupełna w sensie Dedekinda** (inaczej σ**-porządkowo zupełna**) jeżeli jej każdy niepusty przeliczalny podzbiór ograniczony z góry ma kres górny.

2. Operatory dodatnie

Definicja 2.1. Operator liniowy $T : X \to Y$ pomiędzy dwoma przestrzeniami l.c.u. nazywamy

(1) **dodatnim** (ozn. $T \geqslant 0$), gdy $Tx \geqslant 0\ \forall x \geqslant 0$;
(2) **ściśle dodatnim**, gdy $Tx > 0\ \forall x > 0$;
(3) **regularnym**, gdy T jest różnicą dwóch operatorów dodatnich.

Podzbiór $A \subset X$ l.c.u. nazywamy **porządkowo ograniczonym**, jeżeli istnieją $x, y \in X$ takie, że $x \leqslant a \leqslant y$ dla każdego $a \in A$.

Definicja 2.2. Operator liniowy $T : X \to Y$ pomiędzy dwoma przestrzeniami l.c.u. nazywamy **porządkowo ograniczonym** jeżeli $T(A)$ jest porządkowo ograniczony dla każdego porządkowo ograniczonego zbioru A.

$\mathcal{L}_\mathbf{r}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ - przestrzeń operatorów regularnych
$\mathcal{L}_\mathbf{b}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ - przestrzeń operatorów porządkowo ograniczonych

Stwierdzenie 2.3. *$\mathcal{L}_r(X,Y) \subset \mathcal{L}_b(X,Y)$.*

Definicja 2.4. przestrzeń l.c.u. Y nazywamy **archimedesową**, jeżeli dla $x \in Y$ spełniona jest implikacja $nx \leqslant y\ \forall\ n \implies x \leqslant 0$.

Twierdzenie 2.5. *(Kantorowicz) Niech X, Y będą przestrzeniami l.c.u. i niech $T : X^+ \to Y^+$ będzie odwzorowaniem addytywnym tzn. $T(x+y) = T(x) + T(y)$ dla $x, y \in X^+$. Jeżeli stożek dodatni X jest generujący, a Y jest archimedesowa, to T rozszerza się jednoznacznie do operatora dodatniego z X do Y. Oznaczając to rozszerzenie przez $\hat{T}$, otrzymujemy:*

$$\hat{T}x = Tx_1 - Tx_2, \tag{2.1}$$

gdzie $x = x_1 - x_2$ jest dowolną reprezentacją x w postaci różnicy dwóch dodatnich wektorów.

Dowód. Zaobserwujmy, że jeżeli $x = x_1 - x_2 = y_1 - y_2$ dla $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$, to $x_1 + y_2 = y_1 + x_2$, a więc z addytywności T dostajemy

$$Tx_1 + Ty_2 = T(x_1 + y_2) = T(y_1 + x_2) = Ty_1 + Tx_2.$$

Stąd $Tx_1 - Tx_2 = Ty_1 - Ty_2$, a więc $\hat{T}$ jest dobrze określony. Z (2.1) wynika bezpośrednio, że $\hat{T}x = Tx \geqslant 0$ dla $x \in X^+$ oraz $\hat{T}(-x) = -\hat{T}x$ dla $x \in X$. Następnie zweryfikujemy liniowość $\hat{T}$.

Dla dowodu addytywności $\hat{T}$ niech $x = x_1 - x_2$ oraz $y = y_1 - y_2$, gdzie $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X^+$. Wtedy

$$\begin{aligned}\hat{T}(x+y) &= \hat{T}(x_1 + y_1 - (x_2 + y_2)) = T(x_1 + y_1) - T(x_2 + y_2)\\ &= Tx_1 + Ty_1 - Tx_2 - Ty_2 = (Tx_1 - Tx_2) + (Ty_1 - Ty_2)\\ &= \hat{T}x + \hat{T}y.\end{aligned}$$

Z addytywności w szczególności wynika równość $\hat{T}(rx) = r\hat{T}(x)$ dla r wymiernych i $x \in X$. Dla homogeniczności $\hat{T}$ potrzebujemy dwóch własności:

(i) T jest monotoniczny na X^+, tzn. zachodzi następująca implikacja $0 \leqslant x \leqslant y \implies Tx \leqslant Ty$.

(ii) Niech Z będzie archimedesową przestrzenią l.c.u. i niech $x \in Z^+$ oraz $y \in Z$. Niech $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{R}$ oraz $\alpha_n \to \alpha$. Jeżeli $\alpha_n x \leqslant y$ (odp. $y \leqslant \alpha_n x$) dla każdego n, to $\alpha x \leqslant y$ (odp. $y \leqslant \alpha x$).

Dla dowodu (i) zauważmy, że gdy $0 \leqslant x \leqslant y$, to $Ty = T(x+(y-x)) = Tx + T(y-x) \geqslant Tx$.

Dla dowodu (ii) ustalmy k. Wtedy dla wszystkich dostatecznie dużych n mamy $\alpha - \alpha_n \leqslant \frac{1}{k}$, a więc $(\alpha - \alpha_n)x \leqslant \frac{1}{k}x$ dla dostatecznie dużych n. Stąd $\alpha x - y \leqslant \alpha x - \alpha_n x \leqslant \frac{1}{k}x$, czyli $k(\alpha x - y) \leqslant x$ dla każdego k. Ponieważ X jest archimedesowa, więc $\alpha x - y \leqslant 0$ czyli $\alpha x \leqslant y$.

Niech teraz $x \in X^+$ i $\alpha > 0$. Wybierzmy teraz dwa ciągi liczb wymiernych $\{r_n\}$ i $\{s_n\}$ takie, że $r_n \uparrow \alpha$ i $s_n \downarrow \alpha$. Korzystając z (i) oraz homogeniczności T dla liczb wymiernych, dostajemy

$$r_n Tx = T(r_n x) \leqslant T(\alpha x) \leqslant T(s_n x) = s_n Tx.$$

Stąd, na mocy (ii), $\alpha Tx \leqslant T(\alpha x) \leqslant \alpha Tx$ czyli $\alpha Tx = T(\alpha x)$.

Na koniec ustalmy $\alpha \geqslant 0$ i $x = x_1 - x_2 \in X$, gdzie $x_1, x_2 \in X^+$. Wtedy

$$\hat{T}(\alpha x) = \hat{T}(\alpha x_1 - \alpha x_2) = T(\alpha x_1) - T(\alpha x_2) = \alpha(Tx_1 - Tx_2) = \alpha\hat{T}x,$$

$$\hat{T}(-\alpha x) = \hat{T}(\alpha x_2 - \alpha x_1) = T(\alpha x_2) - T(\alpha x_1) = \alpha(Tx_2 - Tx_1) = (-\alpha)\hat{T}x.$$

Czyli $\hat{T}$ jest homogeniczny, a więc również liniowy. $\square$

Lemat 2.6. *Krata wektorowa porządkowo zupełna jest archimedesowa.*

Dowód. - Ćwiczenie. $\square$

Lemat 2.7. *Jeżeli X jest kratą wektorową, $u, v, y \in X$ oraz $0 \leqslant y \leqslant u + v$, to istnieją $y_1, y_2 \in X$ takie, że $y = y_1 + y_2$ oraz $0 \leqslant y_1 \leqslant u$, $0 \leqslant y_2 \leqslant v$.*

Dowód. Połóżmy $y_1 := y \wedge u$, $y_2 := y - y \wedge u$. Wtedy $0 \leqslant y_1 \leqslant u$, $0 \leqslant y_2$ oraz

$$\begin{array}{r} y \leqslant u + v \implies y - v \leqslant u \\ v \geqslant 0 \implies y - v \leqslant y \end{array} \implies y - v \leqslant y \wedge u \implies y_2 = y - y \wedge u \leqslant v.$$

$\square$

TWIERDZENIE 2.8. *(F. Riesz - Kantorowicz) Jeżeli E, F są kratami wektorowymi, przy czym F jest porządkowo zupełna, to $\mathcal{L}_r(E,F)$ jest porządkowo zupełną kratą wektorową oraz $\mathcal{L}_r(E,F) = \mathcal{L}_b(E,F)$. Ponadto*

(1) $T^+x = \sup\{Ty : 0 \leqslant y \leqslant x\}$,
(2) $T^-x = \sup\{-Ty : 0 \leqslant y \leqslant x\}$,
(3) $|T|x = \sup\{Ty : -x \leqslant y \leqslant x\}$

dla $T \in \mathcal{L}_r(E,F)$, $x \in E^+$.

DOWÓD. Zdefiniujmy odwzorowanie $R : E^+ \to F^+$ następująco:

$$Rx = \sup_{0 \leqslant y \leqslant x} Ty.$$

Ponieważ F jest porządkowo zupełna, a T porządkowo ograniczony, więc R jest dobrze określone. Wykażemy, że R jest addytywne.

Niech $u, v \in E^+$, $0 \leqslant y \leqslant u$ i $0 \leqslant z \leqslant v$. Wtedy $0 \leqslant y + z \leqslant u + v$, skąd $Ty + Tz = T(y+z) \leqslant R(u+v)$. Po przejściu do supremów po lewej stronie otrzymujemy $Ru + Rv \leqslant R(u+v)$. Aby wykazać przeciwną nierówność załóżmy $0 \leqslant y \leqslant u+v$. Z lematu (2.7) wynika, że istnieją $0 \leqslant y_1 \leqslant u$, $0 \leqslant y_2 \leqslant v$ takie, że $y = y_1 + y_2$ oraz $Ty = Ty_1 + Ty_2 \leqslant Ru + Rv$. Stąd $R(u+v) \leqslant Ru + Rv$, a zatem $R(u+v) = Ru + Rv$, co oznacza, że R jest addytywne.

Na mocy twierdzenia 2.5 (Kantorowicza) odwzorowanie R posiada jedyne liniowe, dodatnie rozszerzenie $\hat{R} : E \to F$. Aby zakończyć dowód powinniśmy wykazać równość $\hat{R} = T^+$.

Zauważmy najpierw, że $Tx \leqslant \hat{R}x$ dla $x \in E^+$, a więc $T \leqslant \hat{R}$. Weźmy teraz dowolny operator $Q \in \mathcal{L}_b(E,F)$ spełniający nierówności $Q \geqslant 0$ i $Q \geqslant T$. Jeżeli $x \in E^+$, to dla każdego $0 \leqslant y \leqslant x$ mamy $Ty \leqslant Qy \leqslant Qx$, a więc $\hat{R}x = \sup_{0 \leqslant y \leqslant x} Ty \leqslant Qx$. Stąd $Q \geqslant \hat{R}$. Zatem $\hat{R}$ jest równy supremum elementów T i 0 w $\mathcal{L}_b(E,F)$. Czyli $T^+ = T \vee 0 = \hat{R}$. Wykazaliśmy równocześnie istnienie w $\mathcal{L}_b(E,F)$ supremum dowolnego elementu i zera.

Równość (2) wynika z równości $T^- = (-T)^+$, a równość (3) z (1) i (2). Z istnienia T^+ i T^- dla każdego $T \in \mathcal{L}_b(E,F)$ wynika istnienie supremum i infimum dwóch dowolnych elementów $\mathcal{L}_b(E,F)$, a zatem $\mathcal{L}_b(E,F)$ jest kratą wektorową. Z równości $T = T^+ - T^-$ dla każdego $T \in \mathcal{L}_b(E,F)$ wynika równość $\mathcal{L}_r(E,F) = \mathcal{L}_b(E,F)$.

Dowód porządkowej zupełności $\mathcal{L}_b(E,F)$ - ćwiczenie. □

WNIOSEK 2.9. *Jeżeli E, F są porządkowo zupełnymi kratami wektorowymi, to*

(1) $(S \vee T)x = \sup\{Sy + Tz : \ y, z \in E^+, \ y + z = x\}$,
(2) $(S \wedge T)x = \inf\{Sy + Tz : \ y, z \in E^+, \ y + z = x\}$

dla $S, T \in \mathcal{L}_r(E,F)$, $x \in E^+$.

Stosując punkt (3) Twierdzenia 2.8 Riesza-Kantorowicza oraz Stwierdzenie 1.7 otrzymujemy:

STWIERDZENIE 2.10. *$|T| = T \vee (-T)$ oraz $|T||x| \geqslant |Tx|$ dla $x \in E$, $T \in \mathcal{L}_b(E,F)$.*

DOWÓD. Na mocy punktu (3) Twierdzenia 2.8, $|T||x| = \sup\{Ty : -|x| \leqslant y \leqslant |x|\}$. Stąd $|T||x| \geqslant Tx$ i $|T||x| \geqslant T(-x) = -Tx$. □

TWIERDZENIE 2.11. *(Abramowicz) Jeżeli E, F są porządkowo zupełnymi kratami wektorowymi, to*

(1) $T^+x = \sup\{Ty :\ y \in E,\ y \wedge (x-y) = 0\}$,
(2) $T^-x = \sup\{-Ty :\ y \in E,\ y \wedge (x-y) = 0\}$,
(3) $|T|x = \sup\{Ty - T(x-y) :\ y \in E,\ y \wedge (x-y) = 0\}$

dla $T \in \mathcal{L}_r(E,F)$, $x \in E^+$.

3. Granice i ciągłość w sensie porządku

DEFINICJA 3.1. Ciąg uogólniony $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ zbiorze częściowo uporządkowanym jest **malejący** - ozn. $x \downarrow$ (**rosnący**- ozn. $x \uparrow$), jeżeli dla $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$ mamy $x_{\alpha_1} \geqslant x_{\alpha_2}$ ($x_{\alpha_1} \leqslant x_{\alpha_2}$). Oznaczamy

$$x_\alpha \downarrow x \overset{\text{df}}{\iff} x_\alpha \downarrow \ \text{ oraz } x = \inf\{x_\alpha\}$$
$$x_\alpha \uparrow x \overset{\text{df}}{\iff} x_\alpha \uparrow \ \text{ oraz } x = \sup\{x_\alpha\}$$

DEFINICJA 3.2. Ciąg uogólniony $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ w zbiorze częściowo uporządkowanym jest **porządkowo zbieżny** (**zbieżny w sensie porządku**) do elementu x, ozn. $x_\alpha \xrightarrow{o} x$, jeżeli istnieją dwa ciągi uogólnione $\{y_\beta\}_{\beta\in B}$, $\{z_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ takie, że

(1) $y_\beta \uparrow x,\ z_\gamma \downarrow x$,
(2) $\forall\ \beta \in B\ \forall\ \gamma \in \Gamma\ \exists \alpha_0 \in A\ :\ y_\beta \leqslant x_\alpha \leqslant z_\gamma\ \forall\ \alpha \geqslant \alpha_0$.

Element x nazywamy **granicą porządkową** (**granicą w sensie porządku**) ciągu uogólnionego $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$.

W definicji zbieżności porządkowej możemy przyjąć, że zbiór indeksów B równa się Γ. W tym celu wystarczy przyjąć $\Lambda := B \times \Gamma$ i zdefiniować nowe ciągi uogólnione $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ $\{v_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ w następujący sposób:

$$u_\lambda := y_\beta,\ v_\lambda := z_\gamma \quad \forall\ \lambda := (\beta,\gamma) \in \Lambda.$$

Wtedy w definicji zbieżności porządkowej można zastąpić ciągi $\{y_\beta\}_{\beta\in B}$, $\{z_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ przez $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ $\{v_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. - Ćwiczenie

Jak jest wtedy określony częściowy porządek w $B \times \Gamma$?

ĆWICZENIE 3.3.

(1) Ciąg uogólniony w zbiorze częściowo uporządkowanym może mieć conajwyżej jedną granicę porządkową.
(2) Jeżeli $x_\alpha \uparrow x$ lub $x_\alpha \downarrow x$, to $x_\alpha \xrightarrow{o} x$.
(3) Jeżeli $x_\alpha \uparrow$ (odp. $x_\alpha \downarrow$) i $x_\alpha \xrightarrow{o} x$, to $x_\alpha \uparrow x$ (odp. $x_\alpha \downarrow x$).

LEMAT 3.4. *Niech E będzie kratą wektorową, a $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ciągiem uogólnionym w E. Wtedy*

(a) *Jeżeli istnieje ciąg uogólniony $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ (z tym samym indeksem) taki, że $u_\alpha \downarrow 0$ i $|x_\alpha - x| \leqslant u_\alpha\ \forall\ \alpha \in A$, to $x_\alpha \xrightarrow{o} x$.*
(b) *Jeżeli E jest porządkowo zupełna i $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ jest porządkowo ograniczony, to $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg uogólniony $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ (z tym samym indeksem) taki, że $u_\alpha \downarrow 0$ i $|x_\alpha - x| \leqslant u_\alpha\ \forall\ \alpha \in A$.*

DOWÓD. (a) Załóżmy, że istnieje ciąg uogólniony $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ taki, że $u_\alpha \downarrow 0$ i $|x_\alpha - x| \leqslant u_\alpha\ \forall\ \alpha \in A$. Niech $y_\alpha := x - u_\alpha$ i $z_\alpha := x + u_\alpha$. Wtedy $y_\alpha \uparrow x$, $z_\alpha \downarrow x$ oraz $y_\alpha \leqslant x_\alpha \leqslant z_\alpha$ $\forall\ \alpha \in A$. Stąd $x_\alpha \xrightarrow{o} x$.

(b) Z założenia E jest porządkowo zupełna i $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ jest porządkowo ograniczony, to $x_\alpha \xrightarrow{o} x$. Weźmy dwa ciągi uogólnione $\{y_\beta\}_{\beta\in B}$ i $\{z_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ dla których $y_\beta \uparrow x$, $z_\gamma \downarrow x$ i takie, że dla każdego $\beta \in B$, $\gamma \in \Gamma$ istnieje $\alpha(\beta,\gamma) \in A$ spełniające warunek $y_\beta \leqslant x_\alpha \leqslant z_\gamma$ $\forall\ \alpha \geqslant \alpha(\beta,\gamma)$. Dla każdego $\alpha \in A$ zdefiniujmy

$$v_\alpha := \inf_{\alpha'\geqslant\alpha} x_{\alpha'}, \quad w_\alpha := \sup_{\alpha'\geqslant\alpha} x_{\alpha'}.$$

Powyższe kresy istnieją, gdyż $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ jest porządkowo ograniczony, a E porządkowo zupełna. Z tego samego powodu istnieją $v := \sup v_\alpha$ i $w := \inf w_\alpha$ oraz $v_\alpha \uparrow v$, $w_\alpha \downarrow w$. Ponieważ $y_\beta \leqslant x_{\alpha'} \leqslant z_\gamma$ dla $\alpha' \geqslant \alpha(\beta,\gamma)$, więc $y_\beta \leqslant v_\alpha \leqslant z_\gamma$ dla $\alpha \geqslant \alpha(\beta,\gamma)$. Stąd $y_\beta \leqslant v \leqslant z_\gamma$ dla $\beta \in B$, $\gamma \in \Gamma$. Stąd, ponieważ $y_\beta \uparrow x$ i $z_\gamma \downarrow x$, więc $v = x$. Podobnie $w_\alpha \downarrow x$. Dla dokończenia dowodu zauważmy, że $x \geqslant v_\alpha$, ponieważ $v_\alpha \uparrow x$, a z definicji $w_\alpha \geqslant x_\alpha$, zatem $x_\alpha - x \leqslant w_\alpha - v_\alpha$. Podobnie $w_\alpha \geqslant x$, ponieważ $w_\alpha \downarrow x$, a z definicji $v_\alpha \leqslant x_\alpha$, zatem $x - x_\alpha \leqslant w_\alpha - v_\alpha$. Stąd na mocy Stwierdzenia 1.7, $|x_\alpha - x| \leqslant w_\alpha - v_\alpha$. □

WNIOSEK 3.5. *Jeżeli E jest σ-porządkowo zupełną kratą wektorową, a $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ciągiem w E, to $x_n \xrightarrow{o} x$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in E$ taki, że $u_n \downarrow 0$ i $|x_n - x| \leqslant u_n\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.*

DOWÓD. - Ćwiczenie. □

LEMAT 3.6. *Niech E będzie kratą wektorową, a $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ciągiem uogólnionym w E. Ciąg x_α jest porządkowo zbieżny do $x \in E$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg uogólniony $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ taki, że $u_\lambda \downarrow 0$ i dla każdego $\lambda \in \Lambda$ istnieje α_0 takie, że $|x_\alpha - x| \leqslant u_\lambda\ \forall\ \alpha \geqslant \alpha_0$.*

DOWÓD. - Ćwiczenie. □

W ogólnym przypadku zbieżność porządkową ciągów definiujemy w następujący sposób (definicja ta nie jest na ogół szczególnym przypadkiem Definicji 3.2):

DEFINICJA 3.7. Ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ w zbiorze częściowo uporządkowanym jest **porządkowo zbieżny** (**zbieżny w sensie porządku**) do elementu x, ozn. $x_n \xrightarrow{o} x$, jeżeli istnieją dwa ciągi $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ takie, że $y_n \uparrow x$, $z_n \downarrow x$ i $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n\ \forall n$.

LEMAT 3.8. *Jeżeli E jest kratą wektorową, a $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ciągiem w E, to $x_n \xrightarrow{o} x$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in E$ taki, że $u_n \downarrow 0$ i $|x_n - x| \leqslant u_n\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.*

DEFINICJA 3.9. Podzbiór D zbioru częściowo uporządkowanego nazywamy **porządkowo domkniętym** (odp. **σ-porządkowo domkniętym**), jeżeli $(\{x_\alpha\} \subset D,\ x_\alpha \xrightarrow{o} x \implies x \in D)$, odp. $(\{x_n\} \subset D,\ x_n \xrightarrow{o} x \implies x \in D)$.

DEFINICJA 3.10. Odwzorowanie $f : X \to Y$ pomiędzy częściowo uporządkowanymi zbiorami X, Y jest

(1) **σ-porządkowo ciągłe** jeżeli dla $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mamy implikację $x_n \xrightarrow{o} x \implies f(x_n) \xrightarrow{o} f(x)$.
(2) **porządkowo ciągłe** jeżeli dla $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ mamy implikację $x_\alpha \xrightarrow{o} x \implies f(x_\alpha) \xrightarrow{o} f(x)$.

STWIERDZENIE 3.11. *W kratach wektorowych operacje kratowe są porządkowo ciągłe.*

DOWÓD. - Ćwiczenie w oparciu o Lemat 3.6. □

LEMAT 3.12. *Operator dodatni $T : X \to Y$ pomiędzy dwoma przestrzeniami l.c.u. jest porządkowo ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy dla $\{x_\alpha\} \subset X$ mamy $x_\alpha \downarrow 0 \implies Tx_\alpha \downarrow 0$.*

Operator dodatni $T : X \to Y$ pomiędzy dwoma przestrzeniami l.c.u. jest σ-porządkowo ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy dla $\{x_n\} \subset X$ mamy $x_n \downarrow 0 \implies Tx_n \downarrow 0$.

DOWÓD. - Ćwiczenie. □

TWIERDZENIE 3.13. *Zakładamy, że E, F są kratami wektorowymi, przy czym F jest porządkowo zupełna oraz, że $T : E \to F$ jest porządkowo ograniczony. Wtedy następujące warunki są równoważne:*
(1) *T jest porządkowo ciągły.*
(2) $x_\alpha \downarrow 0 \implies Tx_\alpha \xrightarrow{o} 0$.
(3) $x_\alpha \downarrow 0 \implies \inf_\alpha |Tx_\alpha| = 0$.
(4) *T^+ i T^- są porządkowo ciągłe.*
(5) *$|T|$ jest porządkowo ciągły.*

DOWÓD. (1) $\implies$ (2) $x_\alpha \downarrow 0 \implies x_\alpha \xrightarrow{o} 0 \implies Tx_\alpha \xrightarrow{o} 0$.

(2) $\implies$ (3) Załóżmy $x_\alpha \downarrow 0$ i że istnieje $y \in F$ takie, że $y \leqslant |Tx_\alpha|$ dla każdego α. Ponieważ $Tx_\alpha \xrightarrow{o} 0$, zatem od pewnego miejsca począwszy jest porządkowo ograniczony, a więc na mocy Lematu 3.4 istnieje ciąg uogólniony $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ taki, że $u_\alpha \downarrow 0$ i $|Tx_\alpha| \leqslant u_\alpha \ \forall\ \alpha$. Stąd $y \leqslant |Tx_\alpha| \leqslant u_\alpha$, a zatem $y \leqslant u_\alpha$ dla każdego $\alpha \in A$. Z warunku $u_\alpha \downarrow 0$ dostajemy $y \leqslant 0$. Stąd $\inf_\alpha |Tx_\alpha| = 0$.

(3) $\implies$ (4) Wystarczy dowieść, że T^+ jest porządkowo ciągły. W tym celu załóżmy, że $x_\alpha \downarrow 0$ w E. Niech $0 \leqslant u \leqslant T^+x_\alpha$ dla każdego α. Ponieważ T^+ jest dodatni, więc ciąg T^+x_α jest malejący. Zatem na mocy Lematu 3.12 wystarczy wykazać, że $u = 0$.

Ustalmy indeks α_0 i przyjmijmy $x := x_{\alpha_0}$. Weźmy dowolny y taki, że $0 \leqslant y \leqslant x$ oraz $\alpha_1 \geqslant \alpha$ takie, że $y \geqslant x_\alpha$ dla $\alpha \geqslant \alpha_1$. Wtedy dla $\alpha \geqslant \alpha_1$ mamy $0 \leqslant y - x_\alpha = y \wedge x - x_\alpha \leqslant x - x_\alpha$. Stąd

$$Ty - T(x_\alpha) = T(y - x_\alpha) \leqslant T^+(x - x_\alpha) = T^+x - T^+x_\alpha,$$

a w konsekwencji

$$0 \leqslant u \leqslant T^+x_\alpha \leqslant T^+x + |Tx_\alpha| - Ty \tag{3.1}$$

dla $\alpha \geqslant \alpha_1$. Ponieważ $x_\alpha \downarrow 0$, więc na mocy (3), $\inf_{\alpha\geqslant\alpha_1} |Tx_\alpha| = 0$. Z nierówności (3.1) wynika zatem nierówność $0 \leqslant u \leqslant T^+x - Ty$ dla $0 \leqslant y \leqslant x$. Ale z Twierdzenia 2.8 Riesza-Kantorowicza mamy równość $T^+x = \sup_{0\leqslant y\leqslant x} Ty$, skąd $u = 0$.

(4) $\implies$ (5) - oczywiste.

(5) $\implies$ (1) Niech $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ w E. Wybierzmy dwa ciągi uogólnione $\{y_\beta\}_{\beta\in B}$, $\{z_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ takie, że $y_\beta \uparrow 0$, $z_\gamma \downarrow 0$ oraz takie, że dla każdego $\beta \in B, \gamma \in \Gamma$ istnieje $\alpha(\beta, \gamma) \in A$ spełniające warunek $y_\beta \leqslant x_\alpha \leqslant z_\gamma$ dla $\alpha \geqslant \alpha(\beta, \gamma)$. Wtedy $x_\alpha^+ \leqslant z_\gamma^+ = z_\gamma$ i $x_\alpha^- \leqslant y_\beta^- = -y_\beta$, skąd $x_\alpha^+ + x_\alpha^- = |x_\alpha| \leqslant z_\gamma - y_\beta$ dla $\alpha \geqslant \alpha(\beta, \gamma)$.

Jeżeli przyjmiemy $\Lambda := B \times \Gamma$ i dla każdego $\lambda = (\beta, \gamma)$ zdefiniujemy $u_\lambda := z_\gamma - y_\beta \geqslant 0$, to na mocy Stwierdzenia 2.10, nierówność $|Tx_\alpha| \leqslant |T|(u_\lambda)$ zachodzi dla $\alpha \geqslant \alpha(\beta, \gamma) =$

$\alpha(\lambda)$. Ponieważ $u_\lambda \downarrow 0$, więc ciągłość porządkowa $|T|$ implikuje $|T|(u_\lambda) \downarrow 0$, a stąd $Tx_\alpha \xrightarrow{o} 0$, co kończy dowód. $\square$

Analogiczny wynik dla σ-porządkowo ciągłych operatorów jest następujący:

TWIERDZENIE 3.14. *Zakładamy, że E, F są kratami wektorowymi, przy czym F jest porządkowo zupełna oraz, że $T : E \to F$ jest porządkowo ograniczony. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(1) *T σ-jest porządkowo ciągły.*
(2) $x_n \downarrow 0 \implies Tx_n \xrightarrow{o} 0$.
(3) $x_n \downarrow 0 \implies \inf_n |Tx_n| = 0$.
(4) *T^+ i T^- są σ-porządkowo ciągłe.*
(5) *$|T|$ jest σ-porządkowo ciągły.*

DEFINICJA 3.15. Operator dodatni $T : E \to F$ pomiędzy kratami wektorowymi nazywamy **homomorfizmem kratowym**, jeżeli $T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)$.

TWIERDZENIE 3.16. *Jeżeli $T : E \to F$ jest operatorem dodatnim pomiędzy kratami wektorowymi, to następujące warunki są równoważne:*

(1) *T jest homomorfizmem kratowym.*
(2) $T(x^+) = (Tx)^+ \quad \forall\, x \in E$.
(3) $T(x \wedge y) = T(x) \wedge T(y) \quad \forall\, x, y \in E$.
(4) $|Tx| = T|x| \quad \forall\, x \in E$.
(5) $\forall\, x, y \in E : \quad x \wedge y = 0 \implies Tx \wedge Ty = 0$.

4. Ideały porządkowe

DEFINICJA 4.1. Mówimy, że podzbiór A kraty wektorowej E jest **solidny**, gdy zachodzi implikacja

$$x \in E,\ y \in A,\ |x| \leqslant |y| \implies x \in A.$$

Podprzestrzeń kraty wektorowej, która jest solidna nazywamy **ideałem porządkowym**. Najmniejszy (ze względu na inkluzję) ideał zawierający niepusty zbiór A nazywamy **ideałem generowanym przez** A i oznaczamy E_A.

STWIERDZENIE 4.2. *Ideał porządkowy jest podkratą wektorową.*

STWIERDZENIE 4.3.

$$E_A = \{x \in E : \exists x_1, \ldots, x_n \in A,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+ : |x| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |x_i|\}.$$

DEFINICJA 4.4. Jeżeli $A = \{x\}$, to $E_x := E_{\{x\}}$ nazywamy **ideałem głównym** generowanym przez x.

STWIERDZENIE 4.5.

$$E_x = \{y \in E : \exists\ \lambda > 0 : |y| \leqslant \lambda |x|\}.$$

DEFINICJA 4.6. Wektor $e > 0$ nazywamy **jedynką porządkową** (lub **silną jedynką** lub po prostu **jedynką**, jeżeli $E_e = E$, tzn. jeśli dla każdego $x \in E$ istnieje $\lambda \geqslant 0$ takie, że $|x| \leqslant \lambda e$.

Niech E będzie kratą wektorową, I ideałem porządkowym w E, a $q : E \to E/I$ rzutowaniem kanonicznym na przestrzeń ilorazową E/I. W E/I wprowadzamy relację częściowego porządku w następujący sposób:

$$q(x) \leqslant q(y) \Longleftrightarrow \exists\, x_1 \in x + I,\ \exists\, y_1 \in y + I : x_1 \leqslant y_1.$$

STWIERDZENIE 4.7. *Przestrzeń E/I jest kratą wektorową, a odwzorowanie q dodatnim homomorfizmem kratowym.*

DOWÓD. Relacja "$\leqslant$" zdefiniowana w przestrzeni E/I spełnia w sposób oczywisty (1), (3) oraz (a) i (b). Aby wykazać aksjomat antysymetrii (2) wykorzystamy fakt, że I jest ideałem porządkowym. Jeżeli $q(x) \leqslant 0$ i $q(x) \geqslant 0$ dla $x \in E$, to istnieją $x_1, x_2 \in E$ takie, że $0 \leqslant x_1 \in x + I$ oraz $0 \leqslant x_2 \in -x + I$. Stąd $x_1 + x_2 \in I$, a ponieważ $0 \leqslant x_1 \leqslant x_1 + x_2$, więc również $x_1 \in I$ czyli $q(x) = 0$.

Dodatniość q wynika bezpośrednio z definicji relacji częściowego porządku W E/I. Aby dowieść, że E/I jest kratą, a q jest homomorfizmem kratowym wykażemy, że dla dowolnych $x, y \in E$ mamy równość $q(x \vee y) = q(x) \vee q(y)$. Ponieważ q jest dodatnie, więc $q(x \vee y)$ jest majorantą $q(x)$ i $q(y)$. Niech $z \in E$ będzie takie, że $q(z) \geqslant q(x)$ i $q(z) \geqslant q(y)$. Wtedy istnieją elementy $z_1, z_2 \in z + I$ takie, że $z_1 \geqslant x$ i $z_2 \geqslant y$. Ponadto $z_1 - z_2 \in I$ i, ponieważ I jest podkratą wektorową, $|z_1 - z_2| \in I$. Stąd $w := z_2 + |z_1 - z_2| \in z + I$ oraz $w \geqslant x \vee y$, bo $w \geqslant z_2 \geqslant y$ i $w = z_2 + |z_1 - z_2| = z_2 + (z_1 - z_2) \vee (z_2 - z_1) = z_1 \vee (2z_2 - z_1) \geqslant z_1 \geqslant x$. A więc $q(z) = q(w) \geqslant q(x \vee y)$. Zatem $q(x \vee y) = q(x) \vee q(y)$.

□

DEFINICJA 4.8. Ideał porządkowy domknięty w sensie porządku będziemy nazywać **ideałem zamkniętym**. (Po angielsku **band**.)

STWIERDZENIE 4.9.

(1) *Solidny podzbiór D kraty wektorowej E jest porządkowo domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy $\{x_\alpha\} \subset D \cap E^+,\ x_\alpha \uparrow x \in E \implies x \in D$.*
(2) *Ideał porządkowy A jest ideałem zamkniętym wtedy i tylko wtedy, gdy $\{x_\alpha\} \subset A,\ 0 \leqslant x_\alpha \uparrow x \in E \implies x \in A$.*

DOWÓD. - Ćwiczenie (skorzystać z Lematu 3.4 lub 3.6). □

DEFINICJA 4.10. Ideałem zamkniętym generowanym przez niepusty podzbiór D kraty wektorowej E nazywamy najmniejszy (w sensie inkluzji) ideał zamknięty B_D zawierający D. Jeżeli $D = \{x\}$, to $B_x := B_{\{x\}}$ nazywamy **zamkniętym ideałem głównym** generowanym przez wektor x.

TWIERDZENIE 4.11. *Jeżeli J jest ideałem porządkowym w kracie wektorowej E, to ideał zamknięty B_J generowany przez J spełnia równość*

$$B_J = \{x \in E : \exists\, \{x_\alpha\} \subset J : 0 \leqslant x_\alpha \uparrow |x|\}.$$

Ponadto $\forall\, x \in E$ zamknięty ideał główny B_x generowany przez x spełnia równość

$$B_x = \{y \in E : |y| \wedge n|x| \uparrow |y|\}.$$

DOWÓD. Niech

$$B := \{x \in E : \exists\, \{x_\alpha\} \subset J : 0 \leqslant x_\alpha \uparrow |x|\}.$$

Jest oczywiste, że każdy ideał zamknięty zawierający J musi zawierać B. Zatem, żeby dowieść równości $B = B_J$, wystarczy pokazać, że B jest ideałem zamkniętym. Niech $x, y \in B$. Weźmy dwa ciągi uogólnione $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $\{y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ spełniające zależności $0 \leqslant x_\alpha \uparrow |x|$, $0 \leqslant y_\gamma \uparrow |y|$. Z warunku

$$|x + y| \wedge (x_\alpha + y_\gamma) \uparrow |x + y| \wedge (|x| + |y|) = |x + y|$$

opartego o punkt (15) wniosku 1.6 oraz $|\mu|x_\alpha \uparrow |\mu||x| = |\mu x|$ dla każdego skalara μ wynika, że B jest podprzestrzenią wektorową. Z faktu, że J jest ideałem porządkowym oraz z nierówności $|z| \wedge x_\alpha \leqslant x_\alpha$, $x_\alpha \geqslant 0$ wynika inkluzja $\{|z| \wedge x_\alpha\} \subset J$. Zatem, jeżeli $|z| \leqslant |x|$, to na mocy punktu (15) wniosku 1.6 mamy $|z| \wedge x_\alpha \uparrow |z| \wedge |x| = |z|$, a stąd $z \in B$ czyli B jest ideałem.

Załóżmy teraz, że ciąg uogólniony $\{u_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset B$ spełnia warunek $0 \leqslant u_\gamma \uparrow u$. Niech

$$D := \{v \in J : \exists\ \gamma \in \Gamma : v \leqslant u_\gamma\}.$$

Zbiór D można interpretować jako ciąg uogólniony taki, że $D \uparrow u$. A więc, na mocy stwierdzenia 4.9, B jest ideałem zamkniętym.

Aby wykazać drugą część tezy zauważmy, że $B_x = B_{E_x}$. Niech $y \in B_x$. na mocy poprzednio wykazanego przypadku istnieje ciąg uogólniony $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset E_x$ spełniający warunek $0 \leqslant x_\alpha \uparrow |y|$. Dla każdego α istnieje zatem n takie, że $x_\alpha \leqslant |y| \wedge n|x| \leqslant |y|$. Stąd $|y| \wedge n|x| \uparrow |y|$, co kończy dowód. □

Definicja 4.12. Wektor $e > 0$ nazywamy **słabą jedynką** jeżeli $B_e = E$ tzn. jeżeli $x \wedge ne \uparrow x\ \forall\ x \in E^+$. Gdy E jest archimedesowa, to $e > 0$ jest słabą jedynką wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi implikacja $|x| \wedge e = 0 \implies x = 0$. (Ćwiczenie.) W oczywisty sposób każda jedynka porządkowa jest słabą jedynką.

Definicja 4.13. **Rozłączne dopełnienie** niepustego zbioru A definiujemy następująco:

$$A^d := \{x \in E : |x| \wedge |a| = 0\ \forall\ a \in A\}.$$

Twierdzenie 4.14. *Jeżeli A jest niepustym podzbiorem kraty wektorowej E, to A^d jest ideałem zamkniętym. Gdy E jest archimedesowa, to $B_A = A^{dd} := (A^d)^d$. W szczególności każdy ideał zamknięty B spełnia równość $B = B^{dd}$.*

Dowód. Fakt, że A^d jest ideałem zamkniętym wynika z porządkowej ciągłości operacji kratowych.

Zawsze $A \subset A^{dd}$, a stąd $B_A \subset A^{dd}$. Aby zakończyć dowód dla E archimedesowej wystarczy dowieść, że $A^{dd} \subset B_A$. Niech $0 < x \in A^{dd}$ i $D := \{z \in B_A : 0 \leqslant z \leqslant x\}$. Musimy wykazać, że istnieje $\sup D = x$.

Niech $z \in E$ będzie wektorem spełniającym nierówność $a \leqslant z\ \forall\ a \in D$. Wtedy również

$$a \leqslant x \wedge z\ \forall\ a \in D. \tag{4.1}$$

Należy dowieść, że $x \leqslant z$ czyli, że $x = x \wedge z$. Dla dowodu niewprost załóżmy $u := x - x \wedge z > 0$. W oczywisty sposób $u \in A^{dd}$ oraz $u \notin A^d$ ponieważ $A^d \cap A^{dd} = 0$. Zatem istnieje $y \in A$ taki, że $v := |y| \wedge u > 0$, skąd $v \in B_A$. Ponieważ $v \leqslant u \leqslant x$, więc $v \in D$ i na mocy (4.1)

$$2v = v + v \leqslant x \wedge z + (x - x \wedge z) = x.$$

Stosując indukcję, otrzymujemy $nv \leqslant x\ \forall n$. Z archimedesowości E mamy $v = 0$, co prowadzi do sprzeczności. Stąd $u = 0$, a zatem $x = x \wedge z \leqslant z$.

Wykazaliśmy więc, że $\sup D = x$. Ponieważ $D \subset B_A$, a B_A jest ideałem zamkniętym, otrzymujemy $x \in B_A$, skąd $B_A = D^{dd}$. □

DEFINICJA 4.15. Ideał zamknięty B w kracie wektorowej E **projekcyjny** (**projection band**), jeżeli $E = B \oplus B^d$.

STWIERDZENIE 4.16. *Projekcja na ideał projekcyjny jest dodatnia.*

DOWÓD. Niech B będzie ideałem projekcyjnym w E, a P projekcją na ten ideał. Wtedy $E = B \oplus B^d$. Niech $x = y + z$ będzie rozkładem dowolnego elementu $x \in E$ względem tej sumy prostej. Jeżeli $x \geqslant 0$, to $0 \leqslant y^+ + z^+ - (y^- + z^-)$ czyli $0 \leqslant y^- + z^- \leqslant y^+ + z^+$. Element y^- jest rozłączny z $y^+ + z^+$, gdyż $y^+ \wedge y^- = 0$ i $y^- \wedge z^+ = 0$. Ponieważ równocześnie $y^- \leqslant y^- + z^- \leqslant y^+ + z^+$, więc $y^- = 0$, czyli $Px = y = y^+ \geqslant 0$. □

TWIERDZENIE 4.17. *Jeżeli E jest porządkowo zupełna, to każdy ideał zamknięty jest projekcyjny, tzn. $\forall\ A \subset E$ mamy $B_A \oplus A^d = E$.*

DOWÓD. Ideały B_A i A^d są rozłączne, gdyż $A \subset A^{dd} = B_A$. Ponieważ E jest porządkowo zupełna, więc dla każdego $x \in E^+$ istnieje $y := \sup[0, x] \cap B_A$ oraz $y \in B_A$. Niech $z := x - y$. Dowód będzie zakończony, jeżeli wykażemy, że $z \in A^d$. Niech $u \in A$ będzie dowolne i niech $w := z \wedge |u|$. Ponieważ $w \in B_A$ i $w + y \leqslant z + y = x$ oraz $z \geqslant 0$ a więc również $w \geqslant 0$, zatem z definicji y i warunku $y \in B_A$ mamy $w + y \leqslant y$, a stąd $w = 0$. Rozkład dowolnego wektora otrzymujemy z rozkładu jego części dodatniej i ujemnej. □

TWIERDZENIE 4.18. *Jeżeli A jest podzbiorem kraty wektorowej E, to B_A jest projekcyjny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$x_A := \sup_{n,H}(x \wedge n \sum_{y \in H} |y|),$$

istnieje dla każdego $x \in E^+$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, a H jest dowolnym skończonym podzbiorem A. W takim przypadku odwzorowanie $E \ni x \to (x^+)_A - (x^-)_A$ jest projekcją na B_A.

DOWÓD. Z dowodu poprzedniego twierdzenia wynika, że B_A jest projekcyjny wtedy i tylko wtedy, gdy $P_A x := \sup[0, x] \cap B_A$ istnieje dla każdego $x \in E^+$. Wtedy też odwzorowanie $E \ni x \to P_A(x^+) - P_A(x^-)$ jest projekcją na B_A. Ideał porządkowy E_A generowany przez A składa się dokładnie z $w \in E$ spełniających nierówność $|w| \leqslant n \sum_{y \in H} |y|$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ i pewnego skończonego $H \subset A$.

Oznaczmy przez J podprzestrzeń wektorową generowaną przez wszystkie takie $z \in E^+$, które są postaci $z = \sup C$, gdzie C jest skierowanym podzbiorem $(E_A)^+$. Chcemy dowieść równości $J = B_A$.

Każdy z elementów $z \in J$ jest postaci $z = \sup C_1 - \sup C_2$ dla odpowiednich skierowanych podzbiorów $C_1, C_2 \subset (E_A)^+$, zatem na mocy punktów (13) i (15) wniosku 1.6, J jest ideałem porządkowym. Ponadto, jeżeli $D \subset J^+$ jest zbiorem skierowanym i w E istnieje $w := \sup D$, to dla każdego $z \in D$ istnieje zbiór skierowany $C_z \subset (E_A)^+$ taki, że $z = \sup C_z$. Stąd $w = \sup \bigcup_{z \in D} C_z$, a zatem $w \in J$. Czyli J jest ideałem zamkniętym i ponieważ $A \subset J \subset B_A$ otrzymujemy $J = B_A$. A więc $P_A x$, o ile istnieje, musi się równać $\sup[0, x] \cap E_A$ i na odwrót, jeżeli istnieje $\sup[0, x] \cap E_A$, to musi się równać $P_A x$. □

WNIOSEK 4.19. *Zamknięty ideał główny* B_u *jest projekcyjny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $x \in E^+$ *istnieje* $\sup_n(x \wedge n|u|)$.

DOWÓD. - Ćwiczenie. $\square$

WNIOSEK 4.20. *Każdy zamknięty ideał główny w* E *jest projekcyjny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej pary wektorów* $x, y \in E^+$ *istnieje* $\sup_n(x \wedge ny)$. *W szczególności każda* σ*-porządkowo zupełna krata wektorowa ma tę własność.*

DOWÓD. - Ćwiczenie. $\square$

DEFINICJA 4.21. X, Y - kraty wektorowe

$$\mathcal{L}_n(X,Y) \stackrel{\text{df}}{=} \{T \in \mathcal{L}_r(X,Y) : T - \text{porządkowo ciągły}\}$$
$$\mathcal{L}_c(X,Y) \stackrel{\text{df}}{=} \{T \in \mathcal{L}_r(X,Y) : T - \sigma - \text{porządkowo ciągły}\}$$

TWIERDZENIE 4.22. *(Ogasawara). Jeżeli* E *i* F *są kratami wektorowymi i* F *jest porządkowo zupełna, to* $\mathcal{L}_n(E,F)$ *i* $\mathcal{L}_c(E,F)$ *są ideałami zamkniętymi w* $\mathcal{L}_r(E,F)$ *oraz*

$$\mathcal{L}_r(E,F) = \mathcal{L}_n(E,F) \oplus \mathcal{L}_n(E,F)^d = \mathcal{L}_c(E,F) \oplus \mathcal{L}_c(E,F)^d.$$

DOWÓD. - bez dowodu. $\square$

DEFINICJA 4.23. Jeżeli E jest kratą wektorową, to porządkowo zupełną kratę wektorową $E^{\sim} := \mathcal{L}_r(E,\mathbb{R})$ nazywamy **porządkowo dualną** do E. Ideał zamknięty $E_n^{\sim} := \mathcal{L}_n(E,\mathbb{R})$ nazywamy **porządkowo sprzężoną**. Jeżeli $E_n^{\sim}$ rozdziela punkty E, to E nazywamy **normalną kratą wektorową**.

ROZDZIAŁ 2

Kraty Banacha

1. Unormowane kraty wektorowe

Definicja 1.1. Seminormę p określoną na kracie wektorowej E nazywamy **seminormą kratową**, jeżeli dla $x, y \in E$ zachodzi implikacja: $|x| \leqslant |y| \implies p(x) \leqslant p(y)$. **Kratą unormowaną** nazywamy kratę wektorową z określoną w niej normą kratową. **Kratą Banacha** nazywamy kratę unormowaną zupełną w normie.

Stwierdzenie 1.2. *W kracie unormowanej E*

(a) *Operacje kratowe są ciągłe w normie.*
(b) *Stożek E^+ jest domknięty w normie i w słabej topologii, E jest archimedesowa.*
(c) *Przedziały porządkowe są domknięte w normie i w słabej topologii.*
(d) *Jeżeli $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ jest ciągiem uogólnionym w E i $x_\alpha \uparrow$ oraz $\|x_\alpha - x\| \to 0$, to $x_\alpha \uparrow x$.*
(e) *Domknięcie zbioru solidnego jest zbiorem solidnym.*
(f) *Każdy ideał zamknięty jest domknięty w E.*
(g) *Projekcja na zamknięty ideał projekcyjny jest ciągła i ma normę 1.*

Dowód. (a) Ciągłość $x \to |x|$ wynika bezpośrednio z definicji, a stąd ciągłość $x \to x^+$ i $x \to x^-$, bo $x^+ = \frac{1}{2}(|x| + x)$, $x^- = \frac{1}{2}(|x| - x)$.

(b) $E^+ = \{x \in E : x^- = 0\}$, a więc jest przeciwobrazem zera przez odwzorowanie $x \to x^-$. Słaba domkniętość wynika z wypukłości. Gdy $x, y \in E$ i $nx \leqslant y$ dla $n \in \mathbb{N}$, to $x - n^{-1}y \in -E^+$ dla $n \in \mathbb{N}$ i $x - n^{-1}y \to x$, zatem $x \in -E^+$ z domkniętości E^+, czyli $x \leqslant 0$. A więc E jest archimedesowa.

(c) Gdy $x \leqslant y$, to $[x, y] = (x + E^+) \cap (y - E^+)$, a więc $[x, y]$ jest domknięty i jako wypukły również słabo domknięty.

(d) Przy ustalonym α ciąg uogólniony $\{x_\beta - x_\alpha\}_{\beta \geqslant \alpha}$ jest zawarty w E^+ i spełnia warunek $x_\beta - x_\alpha \underset{\beta}{\to} x - x_\alpha$. Zatem $x - x_\alpha \in E^+$, a stąd $x \geqslant x_\alpha \ \forall\, \alpha$. A więc x jest majorantą $\{x_\alpha\}$. Załóżmy, że $y \geqslant x_\alpha \ \forall\, \alpha$. Zatem $y - x_\alpha \in E^+ \ \forall\, \alpha$, a ponieważ $y - x_\alpha \to y - x$, więc $y - x \in E^+$ czyli $y \geqslant x$. Stąd $x = \sup\{x_\alpha\}$.

(e) Niech A będzie zbiorem solidnym w E i załóżmy, że $|y| \leqslant |x|$ dla pewnego $x \in \overline{A}$, $y \in E$. Istnieje zatem ciąg $\{x_n\} \subset A$ zbieżny do x. Zdefiniujmy $y_n^+ := y^+ \wedge |x_n|$, $y_n^- := y^- \wedge |x_n|$. Wtedy $y_n^+ + y_n^- = y_n^+ \vee y_n^- \leqslant |x_n| \in A$, a więc $y_n := y_n^+ - y_n^- \in A$, bo $|y_n| := y_n^+ + y_n^- \leqslant |x_n|$. Na mocy (a), $y = \lim_{n\to\infty} y_n$, a zatem $y \in \overline{A}$.

(f) Niech B będzie ideałem zamkniętym w E, $\{z_n\} \subset B$ i $z_n \to z$. Zdefiniujmy $y_n := |z_n| \wedge |z|$. Wtedy $y_n \in B$, bo $|y_n| \leqslant |z_n|$ i na mocy (a), $y_n \to |z|$. Ciąg $x_n := \sup_{1 \leqslant m \leqslant n} y_m$ ($n \in \mathbb{N}$) jest rosnący w B i spełnia nierówność $y_n \leqslant x_n \leqslant |z|$. Stąd

$$\|x_n - |z|\,\| \leqslant \|y_n - |z|\,\|,$$

a więc $x_n \to |z|$. Na mocy (d) $|z| = \sup_n x_n$, a zatem $|z| \in B$, ponieważ B jest zamknięty.

(g) Niech P będzie projekcją na ideał projekcyjny. Na mocy stwierdzenia 4.16, P jest operatorem dodatnim. Zatem, korzystając ze stwierdzenia 1.7, mamy $|Px| \leqslant P|x| \leqslant |x|$, a stąd $\|Px\| \leqslant \|x\|$ dla $x \in E$. $\square$

LEMAT 1.3. *Jeżeli w kracie Banacha $x_n \to x$, to istnieje podciąg $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $u \geqslant 0$ takie, że $|y_n - x| \leqslant \frac{1}{n}u$.*

DOWÓD. Wybieramy podciąg $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ w taki sposób, że $\|n\,|y_n - x|\,\| \leqslant \frac{1}{2^n}$ dla każdego n. Na mocy zupełności kraty Banacha, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n\,|y_n - x|$ jest zbieżny w normie. Niech $u := \sum_{n=1}^{\infty} n\,|y_n - x|$. Ze stwierdzenia 1.2 (b) wynika dodatniość u, skąd $n\,|y_n - x| \leqslant u$ czyli $|y_n - x| \leqslant \frac{1}{n}u$ dla każdego n. $\square$

TWIERDZENIE 1.4. *Jeżeli E jest kratą Banacha, F unormowaną kratą wektorową, a $T : E \to F$ porządkowo ograniczonym operatorem liniowym, to T jest ciągły. (Zatem również operatory dodatnie lub regularne między tymi przestrzeniami są ciągłe.)*

DOWÓD. Dla dowodu niewprost załóżmy, że T jest nieciągły. Zatem istnieje ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ taki, że $x_n \to 0$ a $Tx_n \nrightarrow 0$. To oznacza, że istnieje podciąg $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $\varepsilon > 0$ takie, że $\|Ty_n\| > \varepsilon$ dla każdego n. Na mocy lematu 1.3, podciąg $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ może być tak wybrany, że $|y_n| \leqslant \frac{1}{n}u$ dla pewnego $u \in E^+$ oraz $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Ponieważ T jest porządkowo ograniczony, więc istnieje $w \in F$ takie, że $T([-u,u]) \subset [-w,w]$. Z nierówności $|ny_n| \leqslant u$ wynika zależność $n|Ty_n| = |T(ny_n)| \leqslant w$ czyli $|Ty_n| \leqslant \frac{1}{n}w$ dla każdego n. Ale wtedy mamy

$$0 < \varepsilon \leqslant \|Ty_n\| \leqslant \frac{1}{n}\|w\| \to 0,$$

co prowadzi do sprzeczności. $\square$

DEFINICJA 1.5. Jeżeli E, F są kratami Banacha, przy czym F jest porządkowo zupełna oraz operator liniowy $T : E \to F$ jest regularny, to jego r-**normę** definiujemy następująco: $\|T\|_r := \|\,|T|\,\|$.

Mamy przy tym zależność

$$\|T\|_r = \inf\{\|S\| : \pm T \leqslant S\},$$

którą możemy wykorzystać jako definicję r-normy operatora regularnego o wartościach w przestrzenie niekoniecznie porządkowo zupełnej.

TWIERDZENIE 1.6. *Krata unormowana E jest kratą Banacha wtedy i tylko wtedy, gdy każdy rosnący ciąg Cauchy'ego w E^+ jest zbieżny w normie.*

DOWÓD. Niech $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w E. Wybierzmy podciąg $\{u_n\} \subset \{x_n\}$ spełniający dla każdego n nierówność $\|u_{n+1} - u_n\| < \frac{1}{2^n}$ i rozważmy ciągi $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E^+$ zdefiniowane następująco

$$y_n := \sum_{i=1}^{n}(u_{i+1} - u_i)^+, \quad z_n := \sum_{i=1}^{n}(u_{i+1} - u_i)^-.$$

Wtedy $0 \leqslant y_n \uparrow$ oraz

$$\begin{aligned}\|y_{n+p} - y_n\| =& \| \sum_{i=n}^{n+p-1} (u_{i+1} - u_i)^+ \| \leqslant \sum_{i=n}^{n+p-1} \|(u_{i+1} - u_i)^+\| \\ &\leqslant \sum_{i=n}^{n+p-1} \|(u_{i+1} - u_i)\| \leqslant \sum_{i=n}^{n+p-1} \frac{1}{2^i} < \frac{1}{2^{n-1}},\end{aligned}$$

skąd wynika, że $\{y_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego w normie. Podobnie dowodzimy, że rosnący ciąg $\{z_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego. Z założenia wynika zatem istnienie $y, z \in E^+$ takich, że $y_n \to y$, $z_n \to z$.

Ponieważ $y_n - z_n = u_{n+1} - u_1 \ \forall\ n$, więc $u_n = y_{n-1} - z_{n-1} + u_1 \to y - z + u_1$. Ze zbieżności podciągu ciągu Cauchy'ego wynika zbieżność samego ciągu.

Dowód w drugą stronę jest oczywisty. □

TWIERDZENIE 1.7. *Jeżeli E, F są kratami Banacha, przy czym F jest porządkowo zupełna, to porządkowo zupełna krata wektorowa $\mathcal{L}_r(E, F)$ zaopatrzona w r-normę jest kratą Banacha.*

DOWÓD. Fakt, że r-norma jest rzeczywiście normą jest oczywisty.

Jeżeli T jest operatorem dodatnim, to $\|T\|_r = \| \, |T| \, \| = \|T\|$. Jeżeli dwa operatory $S, T \in \mathcal{L}_r(E, F)$ spełniają nierówność $0 \leqslant S \leqslant T$ i $\|x\| \leqslant 1$, to $|Sx| \leqslant S|x| \leqslant T|x|$, a stąd

$$\|Sx\| = \| \, |Sx| \, \| \leqslant \|S|x| \, \| \leqslant \|T|x| \, \| \leqslant \|T\|.$$

Zatem $\|S\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Sx\| \leqslant \|T\|$. W szczególności, jeżeli $S, T \in \mathcal{L}_r(E, F)$ spełniają nierówność $|S| \leqslant |T|$, to

$$\|S\|_r = \| \, |S| \, \| \leqslant \| \, |T| \, \| = \|T\|_r,$$

co dowodzi, że $\| \cdot \|_r$ jest normą kratową w $\mathcal{L}_r(E, F)$.

Aby udowodnić zupełność normy $\| \cdot \|_r$, wystarczy na mocy twierdzenia 1.6 wykazać, że każdy rosnący ciąg operatorów dodatnich, spełniający warunek Cauchy'ego względem normy $\| \cdot \|_r$ jest zbieżny w $\mathcal{L}_r(E, F)$. Niech $\{T_n\}$ będzie takim ciągiem. Z nierówności $\|T_n - T_m\| \leqslant \|T_n - T_m\|_r$ wynika, że $\{T_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego w normie operatorowej. Istnieje więc operator $T \in \mathcal{L}(E, F)$ spełniający warunek $\|T_n - T\| \to 0$.

Dla każdego $x \in E^+$ mamy $0 \leqslant T_n x \uparrow$ i $\|T_n x - Tx\| \to 0$, a stąd na mocy stwierdzenia 1.2 (d), $T_n x \uparrow Tx$ dla każdego $x \in E^+$. Zatem T spełnia dla każdego n nierówność $0 \leqslant T_n \leqslant T$, skąd wynika, że jest dodatni, a więc należy do $\mathcal{L}_r(E, F)$. na mocy ostatniej nierówności otrzymujemy ponadto

$$\|T_n - T\|_r = \| \, |T_n - T| \, \| = \|T - T_n\| \to 0,$$

co dowodzi, że $\mathcal{L}_r(E, F)$ z r-normą jest kratą Banacha. □

Przez E^* będziemy oznaczać przestrzeń rzeczywistych funkcjonałów liniowych, ciągłych na przestrzeni liniowo-topologicznej E.

STWIERDZENIE 1.8. $E^* \subset E^{\sim}$.

DOWÓD. - Ćwiczenie. □

Twierdzenie 1.9. *jeżeli E jest kratą unormowaną, to E^* jest kratą Banacha oraz dla $x^* \in E^*$ i $x \in E^+$ mamy*

$$(x^*)^+(x) = \sup\{x^*(y) : 0 \leqslant y \leqslant x\}, \tag{1.1}$$

$$(x^*)^-(x) = \sup\{-x^*(y) : 0 \leqslant y \leqslant x\}, \tag{1.2}$$

$$|x^*|(x) = \sup\{x^*(y) : |y| \leqslant x\}, \tag{1.3}$$

$$\|x^*\| = \|x^*\|_r = \|\,|x^*|\,\|. \tag{1.4}$$

Ponadto E^* jest ideałem porządkowym w $E^\sim$ i jeżeli E jest kratą Banacha, to $E^* = E^\sim$.

Dowód. Pierwsze trzy równości wynikają bezpośrednio z twierdzenia 2.8. Dla dowodu czwartej rozważmy następującą nierówność wynikającą ze stwierdzenia 1.7:

$$|x^*(x)| \leqslant |x^*|(|x|) \leqslant \|\,|x^*|\,\| \cdot \|x\|.$$

Jej konsekwencją jest nierówność $\|x^*\| \leqslant \|\,|x^*|\,\|$. Z drugiej strony, jeżeli $\|x\| \leqslant 1$ i weźmiemy dowolne ustalone $\varepsilon > 0$, to to z równości (1.3) wynika istnienie $y \in E$ takiego, że $|y| \leqslant |x|$ i $|x^*|(|x|) - \varepsilon < |x^*(y)| \leqslant \|x^*\|$. Zatem

$$\|\,|x^*|\,\| = \sup\{|x^*|(|x|) : \|x\| \leqslant 1\} \leqslant \|x^*\| + \varepsilon \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

Stąd $\|\,|x^*|\,\| \leqslant \|x^*\|$, a więc $\|\,|x^*|\,\| = \|x^*\|$.

Aby wykazać, że E^* jest ideałem porządkowym w $E^\sim$ zauważmy, że gdy $x^* \in E^*$, $y^* \in E^\sim$ oraz $|y^*| \leqslant |x^*|$, to na mocy stwierdzenia 1.7,

$$|y^*(x)| \leqslant |y^*|(|x|) \leqslant |x^*|(|x|) \leqslant \|\,|x^*|\,\| \cdot \|x\| \quad \text{dla } x \in E.$$

co oznacza ciągłość y^*.

W przypadku, gdy E jest kratą Banacha, równość $E^* = E^\sim$ wynika z twierdzenia 1.4 i ze stwierdzenia 1.8. □

Definicja 1.10. Homomorfizm kratowy między dwiema unormowanymi kratami wektorowymi E, F jest **izometrią kratową** jeżeli $\|Tx\| = \|x\|$ dla $x \in E$.

Definicja 1.11. Operator $T : E \to F$ pomiędzy dwiema kratami wektorowymi **zachowuje przedziały** jeżeli $T[0, x] = [0, Tx]$ dla $x \in E^+$.

Twierdzenie 1.12. *Niech E, F będą kratami Banacha, a $T : E \to F$ operatorem dodatnim. Wtedy*

1. *Jeżeli T zachowuje przedziały, to $T^* : F^* \to E^*$ jest homomorfizmem kratowym.*
2. *T jest homomorfizmem kratowym wtedy i tylko wtedy, gdy T^* zachowuje przedziały.*

Dowód. - bez dowodu. □

Twierdzenie 1.13. *(Luxemburg-de Pagter) Niech E będzie archimedesową kratą wektorową, F porządkowo zupełną kratą wektorową, a $T : E \to F$ operatorem dodatnim. Wtedy istnieje porządkowo zupełna krata wektorowa $L \supset E$ i porządkowo ciągły, zachowujący przedziały operator $\hat{T} : L \to F$ będący rozszerzeniem T.*

Dowód. - bez dowodu. □

DEFINICJA 1.14. Porządkowo zupełną kratę wektorową $\hat{E}$ nazywamy **porządkowym uzupełnieniem** kraty wektorowej E, jeżeli istnieje izomorfizm kratowy $\pi : E \to \pi(E) \subset \hat{E}$ taki, że

$$\hat{x} = \sup\{\pi(v) : v \in E, \pi(v) \leqslant \hat{x}\} = \inf\{\pi(w) : w \in E, \pi(w) \geqslant \hat{x}\}$$

dla każdego $\hat{x} \in \hat{E}$.

ĆWICZENIE 1.15. Tylko archimedesowa krata wektorowa może mieć porządkowe uzupełnienie. Uzupełnienie takie jest jednoznaczne z dokładnością do izomorfizmu kratowego.

TWIERDZENIE 1.16. *Załóżmy, że E jest kratą Banacha, a E^δ jej porządkowym uzupełnieniem. Na E^δ definiujemy normę*

$$|||\hat{x}||| := \inf\{\|x\| : x \in E^+, |\hat{x}| \leqslant x\}.$$

Wtedy $(E^\delta, |||\cdot|||)$ jest kratą Banacha.

DOWÓD. Sprawdzenie, że $|||\cdot|||$ jest normą kratową jest natychmiastowe. Aby sprawdzić jej zupełność skorzystamy z twierdzenia 1.6.

Załóżmy, że ciąg $\{\hat{x}_n\} \in E^\delta$ spełnia dla każdego n warunek $0 \leqslant \hat{x}_n \uparrow$, $\|\hat{x}_{n+1} - \hat{x}_n\| < \frac{1}{2^n}$. Dla każdego n wybierzmy $y_n \in E^+$ takie, że $0 \leqslant \hat{x}_{n+1} - \hat{x}_n \leqslant y_n$ oraz $\|y_n\| < \frac{1}{2^n}$ (istnienie takiego y_n wynika z własności porządkowego uzupełnienia). Zdefiniujmy $x_n := \sum_{i=1}^n y_i$. Ciąg x_n, jest ciągiem Cauchy'ego, a zatem jest zbieżny do pewnego $x = \sum_{n=1}^\infty y_n \in E$. Ze stwierdzenia 1.2 (d) wnioskujemy, że $x_n \uparrow x$. W szczególności, definiując $z_n := \sum_{i=n}^\infty y_i$, mamy $\|z_n\| \to 0$. Przyjmując $\hat{x}_0 := 0$ i wybierając $y_0 \in E$ takie, że $y_0 \geqslant \hat{x}_1$ (istnienie takiego y_0 wynika z własności porządkowego uzupełnienia), otrzymujemy

$$\hat{x}_n = \sum_{i=1}^n (\hat{x}_i - \hat{x}_{i-1}) \leqslant \sum_{i=1}^n y_{i-1} = x_{n-1} + y_0.$$

Stąd $\hat{x}_n \leqslant x + y_0 \ \forall\, n$, co oznacza, że ciąg $\{\hat{x}_n\}$ jest ograniczony. Z porządkowej zupełności E^δ wynika więc istnienie $\hat{x} \in E^\delta$ takiego, że $\hat{x}_n \uparrow \hat{x}$.

Zauważmy następnie, że dla każdego n i p mamy

$$0 \leqslant \hat{x}_{n+p} - \hat{x}_n = \sum_{i=n}^{n+p-1} (\hat{x}_{i+1} - \hat{x}_i) \leqslant \sum_{i=n}^{n+p-1} y_i \leqslant \sum_{i=n}^\infty y_i = z_n.$$

Zmierzając z p do nieskończoności dostajemy $0 \leqslant \hat{x} - \hat{x}_n \leqslant z_n \ \forall\, n$. Stąd $\|\hat{x} - \hat{x}_n\| \leqslant \|z_n\|$, a zatem $\|\hat{x} - \hat{x}_n\| \to 0$, co kończy dowód. □

2. Kraty Banacha z normą porządkowo ciągłą

DEFINICJA 2.1. Seminorma p w kracie wektorowej jest **porządkowo ciągła** jeżeli spełniona jest implikacja $x_\alpha \downarrow 0 \implies p(x_\alpha) \downarrow 0$.

TWIERDZENIE 2.2. *Naturalne zanurzenie unormowanej kraty wektorowej $E \to E^{**}$ jest izometrią kratową.*

DOWÓD. - ćwiczenie. □

TWIERDZENIE 2.3. *Dla kraty Banacha następujące warunki są równoważne:*

(1) *E ma porządkowo ciągłą normę.*

(2) *Każdy liniowy, ciągły funkcjonał na E jest porządkowo ciągły.*
(3) *E jest ideałem porządkowym w E^{**}.*
(4) *Przedziały porządkowe w E są słabo zwarte.*
(5) *Każdy porządkowo ograniczony ciąg elementów rozłącznych w E jest zbieżny w normie do zera.*

Dowód. - bez dowodu. □

Wniosek 2.4. *Krata Banacha z porządkowo ciągłą normą jest porządkowo zupełna.*

Dowód. - ćwiczenie. □

Twierdzenie 2.5. *(Krengel-Synnatzschke) Jeżeli E i F są kratami Banacha, przy czym F ma porządkowo ciągłą normę, to odwzorowanie $\mathcal{L}_r(E,F) \ni T \to T^* \in \mathcal{L}_r(F^*,E^*)$ jest izometrią kratową, tzn.*

$$|T^*| = |T|^*, \quad \|T^*\|_r = \|T\|_r \quad \forall\ T \in \mathcal{L}_r(E,F).$$

Dowód. (Szkic dowodu.) Twierdzenie zostanie wykazane przy dodatkowym założeniu, że E jest porządkowo zupełna.

Z nierówności $\pm T \leqslant |T|$ wynika wprost z definicji sprzężeń nierówność $\pm T^* \leqslant |T|^*$, a stąd

$$|T^*| \leqslant |T|^*. \tag{2.1}$$

Aby wykazać nierówność przeciwną musimy dowieść, że

$$\langle |T|^* x^*, x\rangle \leqslant \langle |T^*| x^*, x\rangle \quad \text{dla } x^* \in (F^*)^+,\ x \in E^+.$$

(Piszemy $\langle x^*, x\rangle$ zamiast $x^*(x)$.)

Niech $x^* \in (F^*)^+$ i $x \in E^+$. Ponieważ $Tx \in F \subset F^{**}$ i F jest podkratą wektorową F^{**}, więc z twierdzenia 1.9 dla każdego $z \in E^+$ otrzymujemy

$$\langle x^*, |Tz|\rangle = \sup_{|y^*|\leqslant x^*} \langle y^*, Tz\rangle = \sup_{|y^*|\leqslant x^*} \langle T^*y^*, z\rangle \leqslant \sup_{|y^*|\leqslant x^*} \langle |T^*|\,|y^*|, z\rangle = \langle |T^*|\, x^*, z\rangle. \tag{2.2}$$

Niech

$$\mathcal{C} := \{\sum_{i=1}^n |Tx_i| : x_i \in E^+\ \forall\ i,\ x_i \wedge x_j = 0 \text{ dla } i \neq j,\ \sum_{i=1}^n x_i = x\}.$$

Zbiór $\mathcal{C}$ jest skierowany w górę (dw. w oparciu o tw. 2.11 - ćwiczenie. Może trzeba trochę poprawić jego definicję). Z nierówności $\sum_{i=1}^n |Tx_i| \leqslant \sum_{i=1}^n |T|x_i = |T|x$ i twierdzenia 2.11 (Abramowicza) otrzymujemy warunek $\mathcal{C} \uparrow |T|x$. Zatem z porządkowej ciągłości normy (tw. 2.3 (2)) mamy

$$\{x^*(c) : c \in \mathcal{C}\} \uparrow \langle x^*, |T|x\rangle = \langle |T|^* x^*, x\rangle. \tag{2.3}$$

Z (2.2) wynika dla każdego $c = \sum_{i=1}^n |Tx_i| \in \mathcal{C}$ następująca zależność:

$$x^*(c) = \langle x^*, \sum_{i=1}^n |Tx_i|\rangle = \sum_{i=1}^n \langle x^*, |Tx_i|\rangle \leqslant \sum_{i=1}^n \langle |T^*| x^*, x_i\rangle = \langle |T^*| x^*, \sum_{i=1}^n x_i\rangle = \langle |T^*| x^*, x\rangle.$$

Zatem, na mocy (2.3), otrzymujemy $\langle |T|^* x^*, x\rangle \leqslant \langle |T^*| x^*, x\rangle$, co łącznie z (2.1) daje równość $|T^*| = |T|^*$. Ponadto

$$\|T^*\|_r = \|\,|T^*|\,\| = \|\,|T|^*\,\| = \|\,|T|\,\| = \|T\|_r,$$

co kończy dowód twierdzenia. □

Definicja 2.6. Wektor $u > 0$ w kracie wektorowej jest

(1) **atomem**, gdy $0 \leqslant x \leqslant u,\ 0 \leqslant y \leqslant u,\ x \wedge y = 0 \implies x = 0$ lub $y = 0$.
(2) **wektorem dyskretnym**, gdy $\forall\ 0 \leqslant x \leqslant u\ \exists\ \lambda \geqslant 0 : x = \lambda u$, tzn. gdy $[0, u] = \{\lambda u : 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$.

Lemat 2.7. *W archimedesowej kracie wektorowej E wektor dodatni jest atomem wtedy i tylko wtedy, gdy jest wektorem dyskretnym. Ponadto w takim przypadku przestrzeń wektorowa $\{\lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}$ generowana przez atom u jest ideałem projekcyjnym.*

Dowód. Załóżmy, że $u > 0$ jest atomem w E i niech $0 < x \leqslant u$. Zdefiniujmy $\alpha := \sup\{\beta \geqslant 0 : \beta x \leqslant u\}$. Z archimedesowości E wynika nierówność $1 \leqslant \alpha < \infty$. Ponadto $\alpha x \leqslant u$. Chcemy dowieść równości $\alpha x = u$.

Dla dowodu niewprost załóżmy $v := u - \alpha x > 0$. Z archimedesowości E mamy $(v - \frac{1}{n}x)^+ \uparrow v$, a stąd $(v - \frac{1}{k}x)^+ > 0$ dla pewnego k takiego, że $\frac{1}{k} < \alpha$. Poza tym

$$(v - \frac{1}{k}x)^+ = (u - (\alpha + \frac{1}{k})x)^+ \leqslant u^+ = u \leqslant 2\alpha u,$$

gdyż $\alpha \geqslant 1$. Z drugiej strony $(u - (\alpha + \frac{1}{k})x)^- > 0$, bo gdyby tak nie było, to mielibyśmy $(\alpha + \frac{1}{k})x \leqslant u$, co jest sprzeczne z definicją α. Zaobserwujmy, że również

$$(u - (\alpha + \frac{1}{k})x)^- = ((\alpha + \frac{1}{k})x - u)^+ \leqslant 2\alpha x \leqslant 2\alpha u.$$

Zatem dla $y := \frac{1}{2\alpha}(u - (\alpha + \frac{1}{k})x)^+$ i $z := \frac{1}{2\alpha}(u - (\alpha + \frac{1}{k})x)^-$ mamy $0 < y \leqslant u$, $0 < z \leqslant u$ oraz $y \wedge z = 0$ co jest sprzeczne z założeniem, że u jest atomem.

Wykażemy teraz drugą część lematu. Niech $A := \{\lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Z pierwszej części lematu wynika, że A jest ideałem porządkowym. Aby wykazać jego zamkniętość załóżmy $0 \leqslant \lambda_n u \uparrow x \in E$. Wtedy $0 \leqslant \lambda_n \uparrow$ w $\mathbb{R}$, a stąd $\lambda_n \uparrow \lambda$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{R}$, gdyż E jest archimedesowa. Zatem $\lambda_n u \uparrow \lambda u$, a więc $x = \lambda u$ t.j., $x \in A$, co kończy dowód zamkniętości A.

Dla dowodu projekcyjności A weźmy $0 < x \in E$ i oznaczmy

$$\alpha := \sup\{\beta \geqslant 0 : \beta u \leqslant x\}.$$

Stąd $\alpha u \leqslant x$, a korzystając z archimedesowości E mamy $0 \leqslant \alpha < \infty$. Wobec równości $x = \alpha u + (x - \alpha u)$, wystarczy wykazać rozłączność elementów $x - \alpha u$ i αu czyli rozłączność $x - \alpha u$ i u.

W tym celu zauważmy, że z definicji α wynika zależność

$$0 < (x - (\alpha + \frac{1}{n})u)^- = ((\alpha + \frac{1}{n})u - x)^+ \leqslant (1 + \alpha)u \ \ \forall\ n.$$

Z oczywistych powodów dla każdego n mamy również nierówność $0 \leqslant (x - (\alpha + \frac{1}{n})u)^+ \wedge u \leqslant (1 + \alpha)u$. Ponadto $(1 + \alpha)u$ jest atomem oraz $((x - (\alpha + \frac{1}{n})u)^+ \wedge u) \wedge ((x - (\alpha + \frac{1}{n})u)^-) = 0$. Zatem $(x - (\alpha + \frac{1}{n})u)^+ \wedge u = 0$ dla każdego n. Ponieważ $\alpha + \frac{1}{n} \downarrow \alpha$ i operacje kratowe są porządkowo ciągłe, więc $(x - \alpha u) \wedge u = (x - \alpha u)^+ \wedge u = 0$, a to oznacza, że $x - \alpha u \in A^d$.
□

Definicja 2.8. Krata wektorowa jest **bezatomowa** jeżeli nie ma w niej żadnych atomów.

Lemat 2.9. *Dla kraty Banacha E zachodzą następujące warunki:*

(1) *Jeżeli E ma porządkowo ciągłą normę i jest bezatomowa, to E^* jest bezatomową kratą Banacha.*
(2) *Jeżeli E^* jest bezatomowa, to E również.*

Dowód. (1) Dla dowodu niewprost załóżmy, że $0 < \phi \in E^*$ jest atomem. Z poprzedniego lematu wynika zatem implikacja:

$$\psi \in E^*,\ 0 \leqslant \psi \leqslant \phi \implies \exists\, \lambda \geqslant 0 : \psi = \lambda\phi.$$

Ponieważ ψ jest dodatni, więc zbiór $N_\phi := \{x \in E : \phi(|x|) = 0\}$ jest ideałem porządkowym (nazywamy go **ideałem zerowym** ϕ). Porządkowa ciągłość normy w E pociąga za sobą porządkową ciągłość ϕ, a zatem N_ϕ jest ideałem zamkniętym. Na mocy wniosku 2.4, E jest porządkowo zupełna, skąd w oparciu o twierdzenie 4.17 wnioskujemy, że N_ϕ jest projekcyjny. A więc przyjmując oznaczenie $C_\phi := N_\phi^d$, otrzymujemy równość $E = N_\phi \oplus C_\phi$. Z założenia $\phi > 0$ wynika $C_\phi \neq \{0\}$, a zatem istnieje $u > 0$ takie, że $u \in C_\phi$. Wykażemy, że u jest atomem w E.

Niech $0 < x \leqslant u$, $0 \leqslant y \leqslant u$ oraz $x \wedge y = 0$. Chcemy dowieść, że $y = 0$. Niech P_x oznacza projekcję na ideał zamknięty B_x generowany przez x. Wtedy $\phi \circ P_x \in E^*$ (bo $\|P_x\| \leqslant 1$) i $0 \leqslant \phi \circ P_x \leqslant \phi$. Zatem na mocy lematu 2.7 istnieje $\lambda \geqslant 0$ taka, że $\phi \circ P_x = \lambda\phi$. Z warunku $0 < \phi(x) = (\phi \circ P_x)(x) = \lambda\phi(x)$ otrzymujemy $\lambda = 1$, skąd $\phi = \phi \circ P_x$. W konsekwencji $\phi(y) = \phi \circ P_x(y) = \phi(0) = 0$ i ze ścisłej dodatniości ϕ na C_ϕ wnioskujemy, że $y = 0$. Zatem u jest atomem, co prowadzi do sprzeczności z założeniem.

(2) Dla dowodu niewprost załóżmy, że $0 < u \in E$ jest atomem. Wtedy przestrzeń $B := \{\lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}$ jest na mocy lematu 2.7 ideałem projekcyjnym. Oznaczając $A := B^d$ otrzymujemy $E = A \oplus B$. To oznacza, że E jest topologicznie i kratowo izomorficzna z kratą Banacha $A \oplus \mathbb{R}$. A więc E^* jest kratowo izomorficzna z $A^* \oplus \mathbb{R}$, która posiada atomy. Fakt ten prowadzi do sprzeczności z założeniem. □

3. L- i M-przestrzenie

Definicja 3.1. Kratę Banacha E nazywamy:

(1) **L-przestrzenią**, jeżeli $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ dla rozłącznych $x, y \in E^+$,
(2) **M-przestrzenią**, jeżeli $\|x \vee y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$ dla rozłącznych $x, y \in E^+$.

Definicja 3.2. Krata Banacha jest **M-przestrzenią z jedynką**, jeżeli jest M-przestrzenią i posiada jedynkę porządkową.

Stwierdzenie 3.3. *Jeżeli E jest M-przestrzenią z jedynką e, to wzór*

$$\|x\|_\infty := \inf\{\lambda > 0 : |x| \leqslant \lambda e\} = \min\{\lambda > 0 : |x| \leqslant \lambda e\} \tag{3.1}$$

określa równoważną normę kratową w E. Krata E z nową normą jest również M-przestrzenią, a jej domknięta kula jednostkowa jest równa przedziałowi $[-e, e]$.

Dowód. Ponieważ e jest jedynką, więc zbiór $\{\lambda > 0 : |x| \leqslant \lambda e\}$ jest niepusty, a zatem $\|\cdot\|_\infty$ jest dobrze określona i nieujemna. Ponadto $\|0\|_\infty = 0$. Jeżeli $\|x\|_\infty = 0$, to $|x| \leqslant \frac{1}{n}e$ dla każdego n. Stąd $x = 0$. Gdy $|x| \leqslant \lambda e$ i $|y| \leqslant \mu e$, to $|x+y| \leqslant |x| + |y| \leqslant (\lambda+\mu)e$, skąd $\|x+y\|_\infty \leqslant \lambda+\mu$. Zatem $\|x+y\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$. Warunek $\|\lambda x\|_\infty = |\lambda|\|x\|_\infty$ jest oczywisty.

Ponieważ warunek $x \in [-e, e]$ jest równoważny warunkowi $|x| \leqslant e$, więc każdy $x \in [-e, e]$ spełnia nierówność $\|x\|_\infty \leqslant 1$, co oznacza inkluzję $[-e, e] \subset B := \{x \in E : \|x\|_\infty \leqslant 1\}$. Załóżmy teraz, że $x \in B$. Zatem dla każdego n mamy nierówność $|x| \leqslant (1 + \frac{1}{n})e$, skąd $|x| \leqslant e$, co jest równoważne warunkowi $x \in [-e, e]$. W konsekwencji $B = [-e, e]$. Z ostatniej równości otrzymujemy także implikację $(x, y \in B \implies x \vee y \in B)$, z której w szczególności wynika fakt, że $\|\cdot\|_\infty$ jest M-normą.

Pozostała do wykazania równoważność norm $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|_\infty$. Z warunku $|x| \leqslant \|x\|_\infty$ otrzymujemy nierówność $\|x\| \leqslant \|e\| \cdot \|x\|_\infty e$ dla każdego $x \in E$. Ponieważ $(E, \|\cdot\|)$ jest kratą Banacha, więc z twierdzenia 1.4 wynika ciągłość operatora identycznościowego $I : (E, \|\cdot\|) \to (E, \|\cdot\|_\infty)$. To oznacza, że istnieje stała $c > 0$ taka, że $\|x\| \geqslant c\|x\|_\infty$ dla $x \in E$. W konsekwencji $c\|x\|_\infty \leqslant \|x\| \leqslant \|e\|\|x\|_\infty$ dla $x \in E$, a zatem normy $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|_\infty$ są równoważne. □

O ile nie będzie wyraźnie powiedziane inaczej, to będziemy zakładać, że M-przestrzeń z jedynką jest wyposażona w normę zadaną wzorem (3.1) dla pewnej jedynki porządkowej e.

Lemat 3.4. *Jeżeli E jest M-przestrzenią z jedynką e, F dowolną kratą Banacha i $T : E \to F$ operatorem dodatnim, to $\|T\| = \|Te\|$.*

Dowód. Z dodatniości T wynika nierówność $|Tx| \leqslant T|x|$ dla $x \in E$. Oznaczmy przez U_E domkniętą kulę jednostkową w E. Z poprzedniego stwierdzenia wiemy, że $U_E = [-e, e]$ czyli, że $x \in U_E$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|x| \leqslant e$. Zatem $T|x| \leqslant Te$, a stąd $\|Tx\| = \|\,|Tx|\,\| \leqslant \|Te\|$ dla $x \in U_E$. A więc $\|T\| = \sup_{x \in U_E} \|Tx\| = \|Te\|$. □

Wniosek 3.5. *Jeżeli E jest M-przestrzenią z jedynką e, to E^* jest L-przestrzenią spełniającą warunek $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ dla dowolnych $x, y \in (E^*)^+$.*

Dowód. Z lematu 3.4 dla $x, y \in (E^*)^+$ mamy

$$\|x + y\| = (x + y)(e) = x(e) + y(e) = \|x\| + \|y\|.$$

□

Twierdzenie 3.6. *Krata Banacha E jest L-przestrzenią(odp. M-przestrzenią) wtedy i tylko wtedy, gdy jej dualna E^* jest M-przestrzenią(odp. L-przestrzenią). Ponadto*

(a) *Jeżeli E jest L-przestrzenią, to E^* jest porządkowo zupełną M-przestrzenią z jedynką e^*, gdzie (z dokładnością do normy równoważnej) $e^*(x) = \|x^+\| - \|x^-\|$ dla $x \in E$.*
(b) *Jeżeli E jest M-przestrzenią z jedynką e, to E^{**} jest też M-przestrzenią z jedynką e.*

Lemat 3.7. *Jeżeli E jest kratą Banacha, $x^*, y^* \in (E^*)^+$, $x^* \wedge y^* = 0$, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją $x, y \in E^+$ takie, że $\|x\| \leqslant 1$, $\|y\| \leqslant 1$, $x \wedge y = 0$ oraz $\|x^*\| \leqslant x^*(x) + \varepsilon$, $\|y^*\| \leqslant y^*(y) + \varepsilon$.*

Dowód. Niech $\delta := \varepsilon/3$. Weźmy $u, v \in E^+$ o normie 1 takie, że $\|x\|^* \leqslant x^*(u) + \delta$, $\|y\|^* \leqslant y^*(v) + \delta$. Ponieważ $(x^* \wedge y^*)(u) = (x^* \wedge y^*)(v) = 0$, więc na mocy wniosku 2.9

$$\exists\, u_1, u_2 \in E^+ : \; u_1 + u_2 = u, \quad x^*(u_1) + y^*(u_2) < \delta$$
$$\exists\, v_1, v_2 \in E^+ : \; v_1 + v_2 = u, \quad x^*(v_1) + y^*(v_2) < \delta$$

Zdefiniujmy $x := u_2 - v_1 \wedge u_2$, $y := v_1 - v_1 \wedge u_2$. Wtedy $\|x\| \leqslant 1$ $\|y\| \leqslant 1$ oraz $x \wedge y = 0$. Zatem

$$\begin{aligned} x^*(x) = x^*(u_2) - x^*(v_1 \wedge u_2) &\geqslant x^*(u_2) - x^*(v_1) \geqslant x^*(u_2) - x^*(v_1) - x^*(v_2) \geqslant x^*(u_2) - \delta \\ = x^*(u) - x^*(u_1) - \delta &\geqslant (\|x^*\| - \delta) - x^*(u_1) - \delta \geqslant \|x^*\| - 3\delta \geqslant \|x^*\| - \varepsilon \end{aligned}$$

Analogicznie $y^*(y) \geqslant \|y^*\| - \varepsilon$. □

Dowód. (Twierdzenia 3.6) Wykażemy najpierw, że gdy E jest L-przestrzenią, to E^* jest M-przestrzenią. Niech $x^*, y^* \in E^*$ oraz $x^* \wedge y^* = 0$. Oznaczmy $m = \max\{\|x^*\|, \|y^*\|\}$. Oczywiście $m \leqslant \|x^* + y^*\|$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i wybierzmy $x \in E^+$ o normie 1 takie, że

$$\|x^* + y^*\| \leqslant (x^* + y^*)(x) + \varepsilon. \tag{3.2}$$

Ponieważ $(x^* \wedge y^*)(x) = 0$, więc na mocy wniosku 2.9 istnieją $u, v \in E^+$ takie, że $u + v = x$ oraz $x^*(u) + y^*(v) < \varepsilon$. Zatem $0 \leqslant u + v - 2(u \wedge v) \leqslant u + v = x$, skąd

$$\|u - u \wedge v\| + \|v - u \wedge v\| = \|u + v - 2(u \wedge v)\| \leqslant \|x\| = 1 \tag{3.3}$$

ponieważ E jest L-przestrzenią. Korzystając z (3.2), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|x^* + y^*\| &\leqslant x^*(v) + y^*(u) + x^*(u) + y^*(v) + \varepsilon \\ &\leqslant x^*(v) + y^*(u) + x^*(u) + y^*(v) + x^*(u - v \wedge u) + y^*(v - v \wedge u) + \varepsilon \\ &\leqslant x^*(v - v \wedge u) + y^*(u - v \wedge u) + 2(x^*(u) + y^*(v)) + \varepsilon \\ &\leqslant x^*(v - v \wedge u) + y^*(u - v \wedge u) + 3\varepsilon \\ &\leqslant m(\|u - u \wedge v\| + \|v - u \wedge v\|) + 3\varepsilon. \end{aligned}$$

A więc wobec (3.3), mamy $\|x^* \vee y^*\| = \|x^* + y^*\| \leqslant m + 3\varepsilon$ dla dowolnego ε. Zatem $\|x^* \vee y^*\| = m = \max\{\|x^*\|, \|y^*\|\}$, czyli E^* jest M-przestrzenią.

Załóżmy teraz, że E jest M-przestrzenią oraz, że $x^*, y^* \in E^*$ przy czym $x^* \wedge y^* = 0$. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Wtedy, na mocy lematu 3.7, istnieją rozłączne elementy $x, y \in E^+$ o normie niewiększej od 1 takie, że $\|x^*\| \leqslant x^*(x) + \varepsilon$, $\|y^*\| \leqslant y^*(y) + \varepsilon$. Stąd

$$\begin{aligned} \|x^* + y^*\| \leqslant \|x^*\| + \|y^*\| &\leqslant x^*(x + y) + y^*(x + y) + 2\varepsilon \leqslant (x^* + y^*)(x + y) + 2\varepsilon \\ &\leqslant \|x^* + y^*\|\|x + y\| + 2\varepsilon \leqslant \|x^* + y^*\|\|x \vee y\| + 2\varepsilon \leqslant \|x^* + y^*\| + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

A zatem mamy równość $\|x^* + y^*\| = \|x^*\| + \|y^*\|$.

Jeżeli E^* jest L-przestrzenią (odp. M-przestrzenią), to E^{**} jest M-przestrzenią (odp. L-przestrzenią). Wtedy E jako domknięta podprzestrzeń E^{**} jest też M-przestrzenią (odp. L-przestrzenią), co kończy dowód pierwszej części twierdzenia.

(a) Zdefiniujmy odwzorowanie $e^* : E^+ \to \mathbb{R}$ następująco: $e^*(x) = \|x\|$. Ponieważ E jest L-przestrzenią, więc (z dokładnością do normy równoważnej) e^* jest addytywne na mocy twierdzenia 6.3. Z twierdzenia Kantorowicza (tw. 2.5, str. 7) wynika, że istnieje jedyne liniowe dodatnie rozszerzenie tego odwzorowania na całe E postaci $e^* : E \ni x \to \|x^+\| - \|x^-\| \in \mathbb{R}$. Ponadto

$$|e^*(x)| = \|x^+\| + \|x^-\| = \|x^+ + x^-\| = \| \, |x| \, \| = \|x\|,$$

co oznacza, że przedział $[-e^*, e^*]$ jest zawarty w kuli jednostkowej E^*. Z drugiej strony, jeżeli x^* jest dowolnym elementem kuli jednostkowej przestrzeni E^*, to $|x^*|$ również. Wtedy dla $x \in E^+$ otrzymujemy nierówność

$$|x^*|(x) \leqslant \| \, |x^*| \, \| \cdot \|x\| \leqslant \|x\| = e^*(x).$$

A więc $x^* \in [-e^*, e^*]$. Wykazaliśmy więc, że domknięta kula jednostkowa w E^* jest równa przedziałowi $[-e^*, e^*]$, co oznacza, że e^* jest silną jedynką. Porządkowa zupełność E^* wynika z twierdzeń 1.7 i 1.9.

(b) Jeżeli E jest M-przestrzenią z jedynką e, to oczywiście $e \in E^{**}$. Ponadto $\forall\, x^* \in E^* :$ $\|x^*\| = x^*(e) = e(x^*)$. Wtedy dla $x^{**} \in E^{**}$, $x^* \in (E^*)^+$ mamy $x^{**}(x^*) \leqslant \|x^{**}\| \|x^*\| \leqslant \|x^{**}\| e(x^*)$, skąd $x^{**} \leqslant \|x^{**}\| e$, a więc e jest również jedynką w E^{**}. □

Twierdzenie 3.8. *Jeżeli E jest kratą Banacha, to ideał główny E_u generowany przez element $u \in E$ z normą*

$$\|x\|_\infty = \inf\{\lambda \geqslant 0 : |x| \leqslant \lambda |u|\}$$

jest M-przestrzenią z jedynką $|u|$.

Dowód. - ćwiczenie. □

Twierdzenie 3.9. *Każda L-przestrzeń ma porządkowo ciągłą normę i jest porządkowo zupełna.*

Dowód. Na mocy twierdzenia 2.3 wystarczy wykazać, że każdy porządkowo ograniczony ciąg elementów rozłącznych w L-przestrzeni jest zbieżny w normie do zera.

Niech $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem elementów rozłącznych dodatnich (zawsze można wziąć moduły) ograniczonym przez element $u \geqslant 0$ tzn. takich, że $x_n \leqslant u$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy dla każdego n mamy $x_1 + ... + x_n = x_1 \vee ... \vee x_n \leqslant u$. Stąd $\|x_1\| + ... + \|x_n\| = \|x_1 + ... + x_n\| \leqslant \|u\|$, a zatem $\|x_n\| \to 0$.

Porządkowa zupełność L-przestrzeni wynika z wniosku 2.4. □

Twierdzenie 3.10. *Jeżeli E jest M-przestrzenią z jedynką e, to dla $x^* \in (E^*)^+$ o normie 1 następujące warunki są równoważne:*

(1) *x^* jest atomem,*
(2) *x^* jest wektorem dyskretnym,*
(3) *x^* jest punktem ekstremalnym zbioru $\{y^* \in (E^*)^+ : \|y^*\| = 1\}$,*
(4) *x^* jest homomorfizmem kratowym o normie 1.*

Dowód. Równoważność punktów (1) i (2) wynika z lematu 2.7. Implikacja (2) $\Longrightarrow$ (3) jest oczywista.

(3) $\Longrightarrow$ (2) Załóżmy $0 < g \leqslant x^*$. Definiujemy $f := x^* - g$. Na mocy wniosku 3.5, E^* jest L-przestrzenią i $\|x^*\| = \|f\| + \|g\|$. Ponieważ x^* jest punktem ekstremalnym, więc $g = \lambda x^*$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

(4) $\Longrightarrow$ (2) Niech $x^* \in E^*$ i niech v^* należy do ideału głównego generowanego przez x^*. Wtedy $|v^*| \leqslant c\, x^*$ dla pewnego $c \in [0, +\infty)$. A więc, jeżeli $x \in (x^*)^{-1}(0)$, to na

mocy stwierdzenia 2.10 str. 9 i twierdzenia 3.16 mamy $|v^*(x)| \leqslant |v^*|(|x|) \leqslant c\,x^*(|x|) = c|x^*(x)| = 0$. Zatem $(x^*)^{-1}(0) \subset (v^*)^{-1}(0)$. Stąd $v^* = 0$ lub $(x^*)^{-1}(0) = (v^*)^{-1}(0)$ czyli $v^* = \lambda x^*$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{R}$.

(2) $\Longrightarrow$ (4) Niech $x \in E$. Załóżmy, że $x^*(x^-) > 0$. Rozważmy stożek $P := \bigcup_{n=1}^{\infty} n[0, x^-] \subset E^+$ i zdefiniujmy odwzorowanie $r : E^+ \to \mathbb{R}^+$ w następujący sposób

$$r(y) := \sup\{x^*(z) : z \in [0, y] \cap P\} \quad y \in E^+.$$

Z lematu 2.7 mamy równość $[0, y_1 + y_2] = [0, y_1] + [0, y_2]$, skąd $[0, y_1 + y_2] \cap P = [0, y_1] \cap P + [0, y_2] \cap P$, co implikuje addytywność r. Zatem, na mocy twierdzenia 2.5 (Kantorowicza), r rozszerza się do odwzorowania liniowego dodatniego $f : E \to \mathbb{R}$, przy czym z definicji r otrzymujemy $f \leqslant x^*$. Ponieważ x^* jest wektorem dyskretnym, więc $f = \lambda x^*$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{R}$. Ale z równości $f(x^-) = x^*(x^-) > 0$ mamy $\lambda = 0$, czyli $f = x^*$. Z drugiej strony, z definicji r wynika równość $r(x^+) = 0$, skąd również $x^*(x^+) = 0$, a więc $x^*(x^+) \wedge x^*(x^-) = 0$ dla każdego $x \in E$. Z ostatniej równości wnioskujemy, że x^* jest homomorfizmem kratowym. □

Twierdzenie 3.11. *Niech K będzie przestrzenią zwartą, a F wektorową podkratą $C(K)$ zawierającą jedynkę $e \in C(K)$ (czyli funkcję identycznie równą 1 na K). Jeżeli F rozdziela punkty K, to F jest gęste w $C(K)$.*

Dowód. Niech $h \in C(K)$ i $\varepsilon > 0$ będzie ustalone oraz s będzie dowolnym, ustalonym punktem K. Niech $t \in K$. Wtedy istnieje funkcja $\tilde{f}_t \in F$ taka, że $\tilde{f}_t(t) \neq \tilde{f}_t(s)$. Biorąc odpowiednią kombinację liniową $\tilde{f}_t$ i e uzyskamy funkcję $f_t \in F$ taką, że $f_t(s) = h(s)$ oraz $f_t(t) = h(t)$. Dla każdego t zbiór $U_t := \{r \in K : f_t(r) > h(r) - \varepsilon\}$ jest otwarty oraz zawiera s i t. Stąd $K = \bigcup_{t \in K \setminus \{s\}} U_t$, zatem ze zwartości K wynika równość $K = \bigcup_{i=1}^{n} U_{t_i}$ dla pewnego skończonego zbioru $\{t_1, \ldots, t_n\} \subset K$. Ponieważ F jest kratą, więc $g_s := \sup_i f_{t_i} \in F$, $g_s(s) = h(s)$ oraz $g_s(t) > h(t) - \varepsilon$ dla $t \in K$.

Mamy więc dla każdego $s \in K$ funkcję g_s skonstruowaną jak powyżej. Zatem dla każdego $s \in K$ zbiór $V_s := \{r \in K : g_s(r) < h(r) + \varepsilon\}$ jest otwarty i zawiera s. Ponieważ $K = \bigcup_{s \in K} V_s$, więc $K = \bigcup_{i=1}^{m} U_{s_i}$ dla pewnego skończonego zbioru $\{s_1, \ldots, s_m\} \subset K$. Zatem $g := \inf_i g_{s_i} \in F$ oraz $h(r) - \varepsilon < g(r) < h(r) + \varepsilon$ dla $r \in K$. Stąd $\|h - g\| < \varepsilon$. □

Twierdzenie 3.12. *(Kakutani-Bohenblust-Krein). Krata Banacha E jest M-przestrzenią z jedynką e wtedy i tylko wtedy, gdy jest kratowo izomorficznie izometryczna z dokładnością do normy równoważnej z pewną przestrzenią $C(\Omega)$ (wszystkich funkcji ciągłych na zbiorze zwartym Ω), przy czym Ω jest wyznaczony jednoznaczne z dokładnością do homeomorfizmu w taki sposób, że jedynka e jest identyfikowana z funkcją identycznie równą 1 na Ω.*

Krata Banacha E jest M-przestrzenią wtedy i tylko wtedy, gdy jest kratowo izometryczna z domkniętą podkratą wektorową pewnej przestrzeni $C(\Omega)$.

Dowód. Z lematu 3.4 otrzymujemy równość

$$S^+ := \{y^* \in (E^*)^+ : \|y^*\| = 1\} = \{y^* \in (E^*)^+ : y^*(e) = 1\}. \tag{3.4}$$

Niech Ω będzie zbiorem punktów ekstremalnych S^+. Zbiór ten jest podzbiorem kuli jednostkowej przestrzeni E^* i jest *-słabo domknięty w tej przestrzeni, a zatem na mocy twierdzenia Banacha-Alaoglu jest zwarty w *-słabej topologii. Ponadto dla każdego $x \in E$ mamy równość

$$\|x\| = \| \, |x| \, \| = \sup\{y^*(|x|) : y^* \in \Omega\}. \tag{3.5}$$

Z twierdzenia 3.10 (4) wynika, że elementy Ω mogą być traktowane jak punkty, na których elementy przestrzeni E zachowują się jak funkcje ciągłe oraz, że utożsamienie to jest homomorfizmem kratowym. Wobec (3.5) izomorfizm ten jest też izometrią, a z twierdzenia 3.11 wynika jego suriektywność. Dowód jednoznaczności - ćwiczenie.

Drugą część twierdzenia pozostawiamy bez dowodu. □

Wniosek 3.13. *W każdej M-przestrzeni zachodzi równość* $\|x \vee y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$ *dla dowolnych* $x, y \in E^+$.

Uwaga 3.14. $C(\Omega)$ jest porządkowo zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy Ω jako przestrzeń topologiczna jest ekstremalnie niespójna.

4. Zespolone kraty Banacha

Standardowa kompleksyfikacja przestrzeni unormowanych: Jeżeli X jest rzeczywistą przestrzenią wektorową, to przez kompleksyfikację X rozumiemy zespoloną przestrzeń wektorową zdefiniowaną następująco:

$$X_C = X \oplus iX =: \{x + iy : x, y \in X\}$$

ze standardowo zdefiniowanymi operacjami dodawania wektorów i mnożenia przez skalary zespolone. Wtedy X może być identyfikowana z rzeczywistą podprzestrzenią $X + i\{0\} \subset X_C$.

Jeżeli X jest przestrzenią unormowaną, to jej normę możemy rozszerzyć na całą przestrzeń X_C w następujący sposób:

$$\|z\| := \sup_{\theta \in [0,2\pi]} \|x \cos\theta + y \sin\theta\|$$

dla $z = x + iy \in X_C$. Zauważmy, że

$$\frac{1}{2}(\|x\| + \|y\|) \leqslant \|z\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

dla $z = x + iy \in X_C$.

Każdy operator liniowy $T : X \to Y$ pomiędzy dwiema rzeczywistymi przestrzeniami wektorowymi ma naturalne rozszerzenie do zespolonego operatora liniowego $T_C : X_C \to Y_C$ określone wzorem

$$T_C(x + iy) := Tx + iTy. \tag{4.1}$$

Lemat 4.1. *Jeżeli* X, Y *są przestrzeniami unormowanymi, a* $T : X \to Y$ *operatorem liniowym ograniczonym, to operator* $T_C : X_C \to Y_C$ *jest także ograniczony i spełnia równość* $\|T_C\| = \|T\|$.

Dowód. - ćwiczenie. □

Zespolone kraty Banacha - w przypadku kraty Banacha E na E_C definiujemy równoważną normę w inny niż opisany powyżej standardowy sposób.

Załóżmy najpierw, że $E = C(\Omega)$ dla pewnej przestrzeni zwartej Ω. (Przez $C(\Omega)$ rozumiemy przestrzeń funkcji ciągłych na Ω o wartościach rzeczywistych.) Wtedy dla $f, g \in C(\Omega)$ oraz $\omega \in \Omega$ mamy

$$\sup_{\theta\in[0,2\pi]}(f(\omega)\cos\theta + g(\omega)\sin\theta) = \sup_{\theta\in\mathbb{R}}(f(\omega)\cos\theta + g(\omega)\sin\theta) = \sqrt{(f(\omega))^2 + (g(\omega))^2}.$$

Stąd

$$\sup_{\theta\in[0,2\pi]}(f\cos\theta + g\sin\theta) = \sup_{\theta\in\mathbb{R}}(f\cos\theta + g\sin\theta) = \sqrt{f^2+g^2} = |f+ig|,$$

gdzie supremum w $C(\Omega)$ jest rozumiane w zwykłym kratowym sensie.

Wróćmy teraz do przypadku ogólnego rzeczywistej kraty Banacha E. Niech $x, y \in E$, niech $u := |x| + |y|$. Dla $z := x + iy$ jego moduł definiujemy następująco:

$$|z| := \sup_{\theta\in[0,2\pi]}(x\cos\theta + y\sin\theta).$$

Na mocy twierdzeń 3.8 i 3.12, ideał E_u jest kratowo izomorficzny z $C(\Omega)$ dla pewnej przestrzeni zwartej Ω. A więc powyższa wartość jest poprawnie określona. Zauważmy, że (ćwiczenie)

$$|z| = |\pm x \pm iy| = |\pm|x| \pm i|y|\,| = |\pm y \pm ix| = |\pm|y| \pm i|x|\,| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Stwierdzenie 4.2. *Jeżeli $z_1, z_2, z_3 \in E_C$ oraz $\lambda \in \mathbb{C}$, to*

(1) $|z| \geqslant 0$ *oraz* $|z| = 0 \iff z = 0$;
(2) $|\lambda z| = |\lambda| \cdot |z|$;
(3) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

A więc odwzorowanie $\|\cdot\|_C : E_C \to \mathbb{R}$ określone definicją

$$\|z\|_C := \|\,|z|\,\|, \tag{4.2}$$

jest normą. Ponadto z nierówności $|x|, |y| \leqslant |z|$ oraz (3) wynika warunek

$$\frac{1}{2}(\|x\| + \|y\|) \leqslant \|z\|_C \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

Wniosek 4.3.

(1) *Norma $\|\cdot\|$ jest równoważna standardowej normie na E_C zadanej wzorem*

$$\|z\| := \sup_{\theta\in[0,2\pi]}\|x\cos\theta + y\sin\theta\|.$$

(2) *Jeżeli $x \in E$, to $\|x\|_C = \|x\|$.*
(3) *Jeżeli $z_1, z_2 \in E_C$ oraz $|z_1| \leqslant |z_2|$, to $\|z_1\|_C \leqslant \|z_2\|_C$.*

Począwszy od teraz, przez **kompleksyfikację** E będziemy rozumieć przestrzeń E_C z normą określoną wzorem (4.2).

Definicja 4.4. Przez **zespoloną kratę Banacha** rozumiemy zespoloną przestrzeń Banacha postaci $E_C = E \oplus iE$, gdzie E jest rzeczywistą kratą Banacha.

Liniowa izometria $T : E_C \to F_C$ pomiędzy dwiema zespolonymi kratami Banacha jest **izometrią kratową**, jeżeli $|Tz| = T|z|$ dla $z \in E_C$.

Dwie zespolone kraty Banacha są kratowo izometryczne, jeżeli istnieje pomiędzy nimi izometria kratowa.

Lemat 4.5. *Jeżeli $T : E \to F$ jest suriektywną izometrią kratową, to $T_C : E_C \to F_C$ zadane wzorem (4.1) jest też suriektywną izometrią kratową.*

Dowód. Weźmy $z = x + iy \in E_C$. Zdefiniujmy

$$D := \{\bigvee_{i=1}^{n} (x \cos\theta_i + y \sin\theta_i) : \theta_i \in \mathbb{R},\ i = 1, ..., n\}.$$

Wtedy $D \uparrow |z|$. Ponieważ T jest porządkowo ciągły (stwierdzenie 3.11), więc $T(D) \uparrow T|z|$. Z drugiej strony dla $w = \bigvee_{i=1}^{n}(x \cos\theta_i + y \sin\theta_i) \in D$, $T(w) = \bigvee_{i=1}^{n}((Tx)\cos\theta_i + (Ty)\sin\theta_i)$, a więc $T(D) \uparrow |T_C z|$. Zatem $|T_C z| = T|z|$ dla $z \in E_C$. W konsekwencji

$$\|T_C z\| = \|\,|T_C z|\,\| = \|T|z|\,\| = \|\,|z|\,\| = \|z\|,$$

co oznacza, że T_C jest suriektywną izometrią kratową. □

Definicja 4.6. Przez **zespoloną M-przestrzeń z jedynką** rozumiemy komleksyfikację rzeczywistej M-przestrzeni z jedynką, przy czym jedynka przstrzeni rzeczywistej jest równocześnie jedynką przestrzeni zespolonej.

Dwie M-przestrzenie E, F z jedynkami u, v są **kratowo izomorficzne (odp. izometryczne)** jeżeli istnieje izomorfizm kratowy (odp. suriektywna izometria kratowa) $T : E \to F$ taki (taka), że $Tu = v$.

Z twierdzenia 3.12 wynika

Twierdzenie 4.7. *Jeżeli $E_C = E \oplus iE$ jest zespoloną M-przestrzenią z jedynką e, to E_C jest kratowo izomorficznie izometryczna z dokładnością do normy równoważnej z pewną przestrzenią $C_C(\Omega)$ (wszystkich funkcji ciągłych na zbiorze zwartym Ω o wartościach zespolonych), przy czym Ω jest wyznaczony jednoznaczne z dokładnością do homeomorfizmu w taki sposób, że jedynka e jest identyfikowana z funkcją identycznie równą 1 na Ω.*

Wniosek 4.8. *Jeżeli u jest dodatnim wektorem rzeczywistej kraty Banacha E, to kompleksyfikacja ideału E_u*

$$E_u \oplus iE_u = \{z \in E_C : |z| \in E_u\}$$

jest kratowo izomorficznie izometryczna z dokładnością do normy równoważnej z pewną przestrzenią $C_C(\Omega)$.

Ponadto dla każdego $z \in E_u \oplus iE_u \subset E \oplus iE$ moduł z w $E_u \oplus iE_u$ jest równy modułowi z w $E \oplus iE$.

Definicja 4.9. Niech E, F będą rzeczywistymi kratami Banacha. Dla operatora $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ przez normę $\|T\|_C$ rozumiemy operatorową normę operatora $T_C : E_C \to F_C$, tzn.

$$\|T\|_C := \sup_{\|z\|_C \leqslant 1} \|T_C z\|_C.$$

WNIOSEK 4.10. *Dla* $T : E \to F$ *mamy warunek* $\|T\| \leqslant \|T\|_C \leqslant 2\|T\|$.

LEMAT 4.11. *Jeżeli* $T : E \to F$ *jest operatorem dodatnim, to* $|T_C z| \leqslant T|z|$ *dla* $z \in E_C$.

DOWÓD. Niech $z = x + iy \in E_C$. Wtedy $T_C z = Tx + iTy$ oraz

$$(Tx)\cos\theta + (Ty)\sin\theta = T(x\cos\theta + y\sin\theta) \leqslant T|z|,$$

skąd $|T_C z| = \sup_{\theta\in[0,2\pi]}((Tx)\cos\theta + (Ty)\sin\theta) \leqslant T|z|$. □

WNIOSEK 4.12. *Jeżeli* T *jest dodatni, to* $\|T\| = \|T\|_C$.

STWIERDZENIE 4.13. *Jeżeli* E, F *są kratami Banacha, to*

(1) $\mathcal{L}(E_C, F_C) = \mathcal{L}(E, F) \oplus i\mathcal{L}(E, F)$,
(2) *każdy element* $\mathcal{L}(E_C, F_C)$ *jest postaci* $T + iS$, *gdzie* $T, S \in \mathcal{L}(E, F)$ *przy czym*
(3) $(T + iS)(x + iy) = (Tx - Sy) + i(Sx + Ty)$ *dla* $z = x + iy \in E_C$.

DEFINICJA 4.14. Operator $T + iS \in \mathcal{L}(E_C, F_C)$ jest **regularny**, jeżeli $T, S \in \mathcal{L}(E, F)$ są regularne.

STWIERDZENIE 4.15. $\mathcal{L}_r(E_C, F_C) = \mathcal{L}_r(E, F) \oplus i\mathcal{L}_r(E, F)$. *Jeżeli* F *jest porządkowo zupełna, to* $\mathcal{L}_r(E_C, F_C)$ *z r-normą jest zespoloną kratą Banacha.*

DOWÓD. Fakt, że $\mathcal{L}_r(E_C, F_C)$ z r-normą jest zespoloną kratą Banacha wynika z twierdzenia 1.7. □

TWIERDZENIE 4.16. *Niech* E, F *będą rzeczywistymi kratami Banacha, przy czym* F *kratą porządkowo zupełną, niech* $\mathcal{T} = T + iS \in \mathcal{L}_r(E_C, F_C)$. *Wtedy* $|\mathcal{T}|$ *spełnia równanie Riesza-Kantorowicza, tzn. dla każdego* $u \in E^+$ *mamy*

$$|\mathcal{T}|u = |T + iS|u = \sup_{|z|\leqslant u} |(T + iS)z| = \sup_{|x+iy|\leqslant u} |(T + iS)(x + iy)|.$$

DOWÓD. Bez dowodu. □

WNIOSEK 4.17. *Jeżeli* E, F *są kratami Banacha, przy czym* F *jest porządkowo zupełna oraz* $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(E_C, F_F)$, *to* $|\mathcal{T}z| \leqslant |\mathcal{T}|(|z|)$ *dla* $z \in E_C$.

WNIOSEK 4.18. *Jeżeli* E *jest kratą Banacha, to* $E_C^* = E^* \oplus iE^*$. *Ponadto dla* $f \in E_C^*$, $u \in E^+$ *mamy* $|f|(u) = \sup_{|z|\leqslant u} |f(z)|$.

WNIOSEK 4.19. *Jeżeli* E *jest porządkowo zupełną kratą Banacha, to* $\mathcal{L}_r(E_C)$ *z r-normą jest zespoloną algebrą Banacha z jedynką.*

DOWÓD. Ze stwierdzenia 4.15 wynika równość $\mathcal{L}_r(E_C) = \mathcal{L}_r(E) \oplus i\mathcal{L}_r(E)$ oraz fakt, że $\mathcal{L}_r(E_C)$ z r-normą jest zespoloną kratą Banacha. Niech $\mathcal{S}, \mathcal{T} \in \mathcal{L}_r(E_C)$ oraz $|z| \leqslant u$ dla pewnego $u \in E^+$. Wtedy korzystając z lematu 4.11, otrzymujemy

$$|(\mathcal{S}\mathcal{T})z| = |\mathcal{S}(\mathcal{T}z)| \leqslant |\mathcal{S}|(|\mathcal{T}z|)| \leqslant |\mathcal{S}|(|\mathcal{T}|u)| = (|\mathcal{S}||\mathcal{T}|)u,$$

skąd na mocy twierdzenia 4.16 mamy $|\mathcal{S}\mathcal{T}| \leqslant |\mathcal{S}||\mathcal{T}|$. W konsekwencji

$$\|\mathcal{S}\mathcal{T}\|_r = \|\,|\mathcal{S}\mathcal{T}|\,\| = \|\,|\mathcal{S}|\,|\mathcal{T}|\,\| \leqslant \|\,|\mathcal{S}|\,\| \cdot \|\,|\mathcal{T}|\,\| = \|\mathcal{S}\|_r \cdot \|\mathcal{T}\|_r.$$

Zatem $\mathcal{L}_r(E_C)$ jest zespoloną algebrą Banacha z jedynką. □

DEFINICJA 4.20. Jeżeli E, F są kratami Banacha, to operator $S : E_C \to F_C$ jest **zdominowany** przez dodatni operator $T : E \to F$, gdy $|Sz| \leqslant T|z|$ dla $z \in E_C$.

Wtedy S automatycznie jest ciągły.

5. Przestrzeń predualna do ideału głównego

Niech E będzie (rzeczywistą) kratą Banacha i niech $0 < \phi \in E^*$. Jak zwykle E^*_ϕ oznacza ideał główny generowany przez ϕ, tzn.

$$E^*_\phi = \{x^* \in E^* : \exists\ \lambda > 0 : |x^*| \leqslant \lambda\phi\}.$$

Ideał E^*_ϕ z normą $\|x^*\|_\infty = \inf\{\lambda \geqslant 0 : |x^*| \leqslant \lambda\phi\}$ jest M-przestrzenią z jedynką ϕ.

Funkcjonał ϕ definiuje na E seminormę $\|\cdot\|_\phi$ następująco

$$\|x\|_\phi := \phi(|x|).$$

Jest to L-seminorma, tzn. jest kratowa oraz $\|x+y\|_\phi = \|x\|_\phi + \|y\|_\phi$ dla $x, y \in E^+$. Dla ideału zerowego ϕ tzn. dla $N_\phi = \{x \in E : \phi(|x|) = 0\}$ krata ilorazowa E/N_ϕ z normą

$$\|[x]\|_\phi = \inf_{y\in[x]} \|y\|_\phi = \phi(|x|),$$

po uzupełnieniu jest L-przestrzenią spełniającą warunek

$$\|[x+y]\|_\phi = \|[x]\|_\phi + \|[y]\|_\phi$$

dla $x, y \in E^+$. Będziemy ją oznaczać przez $E(\phi)$. Jej dualna $E(\phi)^*$ jest M-przestrzenią z jedynką $e^* = \phi$.

Definiujemy naturalne odwzorowanie $\Phi : E^*_\phi \ni x^* \to \Phi_{x^*} \in E(\phi)^*$ w następujący sposób

$$\Phi_{x^*}([x]) := x^*(x), \tag{5.1}$$

dla $x^* \in E^*_\phi$, $x \in E$. Aby stwierdzić, że Φ jest dobrze określone ustalmy $x^* \in E^*_\phi$ oraz $\lambda > 0$ takie, że $|x^*| \leqslant \lambda\phi$. Załóżmy $y \in [x]$ tzn. $[y] = [x]$ czyli $\phi(|x-y|) = 0$. Wtedy $|x^*(x) - x^*(y)| \leqslant |x^*|(|x-y|) \leqslant \lambda\phi(|x-y|) = 0$, skąd $x^*(x) = x^*(y)$. Z warunku

$$|\Phi_{x^*}([x])| = |x^*(x)| \leqslant |x^*|(|x|) \leqslant \lambda\phi(|x|) = \lambda\|[x]\|_\phi, \tag{5.2}$$

wynika, że Φ jest liniowym, ciągłym funkcjonałem na E/N_ϕ, a zatem przedłuża się jednoznacznie na $E(\phi)$. Z (5.2) wynika równość $\|\Phi_{x^*}\| = \|x^*\|_\infty$ dla $x^* \in E^*_\phi$.

WNIOSEK 5.1. *Odzorowanie $\Phi : E^*_\phi \to E(\phi)^*$ określone wzorem (5.1) jest suriektywną izometrią kratową.*

DOWÓD. Wobec rozważań poprzedzających wniosek, wystarczy udowodnić tylko suriektywność Φ. Niech $\psi \in E(\phi)^*$. Zatem ψ zawężone do $E/N(\phi)$ spełnia równość $\psi\circ\pi = x^*$ dla pewnego $x^* \in E^*$ oraz rzutowania kanonicznego $\pi : E \to E/N(\phi)$. Z ograniczoności ψ na $E(\phi)$ wynika istnienie stałej $\lambda > 0$ takiej, że $|x^*(x)| = |\psi([x])| \leqslant \lambda\|[x]\|_\phi = \lambda\phi(|x|)$, dla $x \in E$, skąd otrzymujemy nierówność $|x^*| \leqslant \lambda\phi$, co oznacza, że $x^* \in E^*_\phi$ i $\Phi(x^*) = \psi$. □

TWIERDZENIE 5.2. *Załóżmy, że $T : E \to E$ jest dodatnim operatorem liniowym takim, że dla pewnego $0 < \phi \in E^*$ mamy $T^*(E^*_\phi) \subset E^*_\phi$. Wtedy istnieje dodatni operator $T_\phi : E(\phi) \to E(\phi)$, dla którego diagram*

$$\begin{array}{ccc} E^*_\phi & \xrightarrow{\Phi} & E(\phi)^* \\ {\scriptstyle T^*}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle T^*_\phi} \\ E^*_\phi & \xrightarrow{\Phi} & E(\phi)^* \end{array} \tag{5.3}$$

jest przemienny. Ponadto, gdy T jest homomorfizmem kratowym, to T^* również.

Dowód. Operator T_ϕ definiujemy następująco:

$$T_\phi([x]) := [Tx] \qquad \text{dla } [x] \in E/N_\phi. \tag{5.4}$$

Aby stwierdzić poprawność definicji załóżmy, że $y \in [x]$ tzn. $[y] = [x]$, czyli $\phi(|x-y|) = 0$. Z niezmienniczości E_ϕ^* dla T^* wynika, że $T^*\phi \in E_\phi^*$, a więc istnieje $\lambda_0 > 0$ takie, że $T^*\phi \leqslant \lambda_0\phi$. Stąd

$$0 \leqslant \phi(|Tx - Ty|) \leqslant \phi(T|x-y|) = (T^*\phi)(|x-y|) \leqslant \lambda_0\phi(|x-y|) = 0,$$

a zatem $\phi(|Tx - Ty|) = 0$, czyli $[Tx] = [Ty]$, co oznacza, że (5.4) określa operator $T_\phi : E/N_\phi \to E/N_\phi$. Z warunku

$$\|T_\phi([x])\|_\phi = \|[Tx]\|_\phi = \phi(|Tx|) \leqslant \phi(T|x|) = (T^*\phi)(|x|) =\leqslant \lambda_0\phi(|x|) = \lambda_0\|[x]\|_\phi,$$

wynika ciągłość T^*. Zatem T^* posiada ciągłe rozszerzenie na całe $E(\phi)$. Będziemy je oznaczać również przez T^*. Aby stwierdzić przemienność diagramu (5.3) weźmy $x^* \in E_\phi^*$ oraz dowolne $x \in E$. Wtedy

$$((T_\phi^* \circ \Phi)x^*)([x]) = (T_\phi^*(\Phi(x^*))([x]) = (\Phi(x^*))(T_\phi([x]) = (\Phi(x^*))([Tx]) = x^*(Tx) = (T^*x^*)x.$$

Z drugiej strony

$$((\Phi \circ T^*)x^*)([x]) = (\Phi(T^*x^*))([x]) = \Phi_{T^*x^*}([x]) = (T^*x^*)x,$$

co oznacza równość $T_\phi^* \circ \Phi = \Phi \circ T^*$.

Pozostał tylko do wykazania fakt, że jeżeli T jest homomorfizmem kratowym, to T^* również. Ponieważ kanoniczna projekcja $E \ni x \to [x] \in E/N_\phi$ jest homomorfizmem kratowym, więc

$$T_\phi([x] \vee [y]) = T_\phi([x \vee y]) = [Tx \vee Ty] = [Tx] \vee [Ty] = T_\phi([x]) \vee T_\phi([y]),$$

co oznacza, że $T_\phi : E/N_\phi \to E/N_\phi$ jest homomorfizmem kratowym. Wobec ciągłości T_ϕ, również jego rozszerzenie na całe $E(\phi)$ jest homomorfizmem kratowym. □

6. L- i M-przestrzenie - c.d.

Twierdzenie 6.1. *(Nakano) Niech E będzie archimedesową kratą wektorową i niech dla $f \in E^\sim$ zbiór C_f będzie nośnikiem f, tzn. $C_f = N_f^d$, gdzie $N_f = \{x \in E : |f|(|x|) = 0\}$.*

Jeżeli $f, g \in E_n^\sim$ (tzn. są regularnymi funkcjonałami porządkowo ciągłymi na E), to

$$|f| \wedge |g| = 0 \iff C_f \cap C_g = \{0\}.$$

Ponadto wtedy $C_f \subset N_g$ i $C_g \subset N_f$.

Dowód. Możemy założyć $f, g \geqslant 0$. Niech $f \wedge g = 0$. Ustalmy $0 < x \in C_f$ oraz $\varepsilon > 0$. A więc $(f \wedge g)(x) = 0$ i na mocy wniosku 2.9 (str. 9), również

$$\inf\{f(y) + g(x-y) : y \in [0, x]\} = 0.$$

Wynika stąd istnienie ciągu $\{y_n\} \subset [0, x]$ takiego, że $f(y_n) + g(x - y_n) < 2^{-n}\varepsilon$ dla każdego n. Zdefiniujmy $x_n := \bigwedge_{i=1}^n y_i$. Wykażemy, że $x_n \downarrow 0$. Rzeczywiście, jeżeli $0 \leqslant z \leqslant x_n \ \forall\, n$, to $0 \leqslant f(z) \leqslant f(x_n) \leqslant f(y_n) < 2^{-n}\varepsilon$, skąd $f(z) = 0$. Zatem $z \in N_f \cap C_f = \{0\}$ czyli $z = 0$.

Z nierówności $x - x_n = x - \bigwedge_{i=1}^n y_i = \bigvee_{i=1}^n (x - y_i) \leqslant \sum_{i=1}^n (x - y_i)$ wynika, że $0 \leqslant g(x - x_n) \leqslant \sum_{i=1}^n g(x - y_i) < \varepsilon \ \forall\ n$. Ponieważ g jest porządkowo ciągłe i $x - x_n \uparrow x$, więc $g(x) = \lim_{n\to\infty} g(x - x_n) \leqslant \varepsilon \ \forall\ \varepsilon > 0$. Stąd $g(x) = 0$. Zatem $C_f \subset N_g$ i w konsekwencji $C_f \cap C_g = \{0\}$.

Załóżmy teraz $C_f \cap C_g = \{0\}$. Ponieważ f jest porządkowo ciągłe, więc N_f jest ideałem zamkniętym. Stąd $C_g \subset C_f^d = N_f^{dd} = N_f$. Zatem, jeżeli $0 \leqslant x = y + z \in N_g \oplus C_g$, to

$$0 \leqslant (f \wedge g)(x) \leqslant (f \wedge g)(y) + (f \wedge g)(z) \leqslant g(y) + f(z) = 0.$$

To oznacza, że $f \wedge g = 0$ na porządkowo gęstym ideale $N_g \oplus C_g$. Ponieważ E jest archimedesowa, więc $f \wedge g = 0$. □

Każda L-przestrzeń E jest kratą Banacha, a więc $E^{\sim} = E^*$ i posiada porządkowo ciągła normę. Zatem każdy element $E^{\sim} = E^*$ jest porządkowo ciągły i E jest porządkowo zupełna, a więc w szczególności archimedesowa. Stąd

Wniosek 6.2. *Teza twierdzenia 6.1 jest prawdziwa dla każdej L-przestrzeni.*

Twierdzenie 6.3. *Jeżeli E jest L-przestrzenią, to istnieje w niej norma równoważna $\|\cdot\|_L$ taka, że $\|x + y\|_L = \|x\|_L + \|y\|_L$ dla wszystkich $x, y \in E^+$.*

Dowód. Na mocy lematu Kuratowskiego-Zorna w $(E^*)^+$ istnieje pewien maksymalny układ $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ elementów rozłącznych o normie 1. Określamy zbiór skierowany

$$D := \{f_{\alpha_1} \vee ... \vee f_{\alpha_n} : \alpha_1, ..., \alpha_n \in A,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Weźmy dowolne $x \in E^+$. Norma każdego elementu $g \in D$ jest równa 1, skąd

$$|g(x)| \leqslant \|g\|\|x\| = \|x\|. \tag{6.1}$$

Zatem zbiór $D(x)$ jest ograniczony, a ponieważ jest również skierowany, więc istnieje $\sup D(x)$. Ponadto dla dowolnych $x, y \in E^+$ oraz $g \in D$ mamy $g(x + y) = g(x) + g(y)$. Stąd $g(x+y) \leqslant \sup D(x) + \sup D(y)$ dla każdego $g \in D$, a w konsekwencji $\sup D(x+y) \leqslant \sup D(x) + \sup D(y)$. Podobnie dla $x \in E^+$ i $\lambda > 0$ mamy $\sup D(\lambda x) = \lambda \sup D(x)$. A więc odwzorowanie $\|\cdot\|_A : E \ni x \to \sup D(|x|)$ jest seminormą na E. Wykażemy, że jest to L-seminorma tzn., że $\|x + y\|_A = \|x\|_A + \|y\|_A$ dla $x, y \in E^+$.

Z lematu 6.1 wynika, że dla $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \neq \beta$ mamy $C_{f_\alpha} \cap C_{f_\beta} = \{0\}$ i ideały te są rozłączne. Na mocy twierdzenia 4.17 (str. 16) ideały te są projekcyjne, a więc suma prosta $\bigoplus_{\alpha\in A} C_{f_\alpha}$ jest dobrze określona. Przez sumę prostą rozumiemy tu $\{x_{\alpha_1} + ... + x_{\alpha_n} : \alpha_1, ..., \alpha_n \in A,\ n \in \mathbb{N}\}$. Ponadto $\forall\ \beta \neq \alpha$ zachodzi inkluzja $C_{f_\beta} \subset N_{f_\alpha}$ (lemat 6.1), skąd dla $x_\alpha \in C_{f_\alpha}$ mamy $\|\,|x_\alpha|\,\|_L = f_\alpha(|x_\alpha|)$. W konsekwencji dla $x = x_{\alpha_1} + ... + x_{\alpha_n}$, $x \geqslant 0$ oraz $g = f_{\alpha_1} \vee ... \vee f_{\alpha_k} = f_{\alpha_1} + ... + f_{\alpha_k}$ mamy $g(x) = (f_{\alpha_1} \vee ... \vee f_{\alpha_n})(x_{\alpha_1} + ... + x_{\alpha_n})$, gdy $k \geqslant n$, skąd również $\sup_{g\in D} g(x) = (f_{\alpha_1} \vee ... \vee f_{\alpha_n})(x_{\alpha_1} + ... + x_{\alpha_n})$. A więc dla $x = x_{\alpha_1} + ... + x_{\alpha_n}$, $y = y_{\alpha_1} + ... + y_{\alpha_n}$, gdzie $x_\alpha, y_\alpha \in C_{f_\alpha}$, $x, y \geqslant 0$ otrzymujemy

$$\|x+y\|_L = (f_{\alpha_1} \vee ... \vee f_{\alpha_n})(x+y) = (f_{\alpha_1} \vee ... \vee f_{\alpha_n})(x) + (f_{\alpha_1} \vee ... \vee f_{\alpha_n})(y) = \|x\|_L + \|y\|_L.$$

Gdy $\sup D(|x|) = 0$ i $x \in \bigoplus_{\alpha\in A} C_{f_\alpha}$, to $f_\alpha(|x|) = 0 \ \forall\ \alpha$, a więc $x = 0$. Zatem $\|\cdot\|_L$ jest normą na $\bigoplus_{\alpha\in A} C_{f_\alpha}$ i wobec wynikającej z (6.1) nierówności $\|x\|_L \leqslant \|x\|$ dla $x \in \bigoplus_{\alpha\in A} C_{f_\alpha}$, jest to norma ciągła. Rozszerza się więc jednoznacznie do normy określonej na domknięciu $\bigoplus_{\alpha\in A} C_{f_\alpha}$ i spełniającej również powyższą nierówność. Jeżeli istnieje $x \neq 0$ nie należący do domknięcia $\bigoplus_{\alpha\in A} C_{f_\alpha}$, to istnieje $h \in E^*$ taki, że $\forall\ \alpha$ jądro h zawiera C_{f_α}

oraz $h(x) \neq 0$. Z równości $|h|(|y|) = \sup\{h(z) : |z| \leqslant |y|\}$ i z faktu, że każdy C_{f_α} jest ideałem wnioskujemy, że $N_{|h|} \supset C_{f_\alpha}$ $\forall$ α, skąd $C_{|h|} \cap C_{f_\alpha} = \{0\}$, a więc na mocy lematu 6.1, $|h| \wedge f_\alpha = 0$ $\forall$ α. Zaprzecza to maksymalności układu $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$. A więc $\bigoplus_{\alpha \in A} C_{f_\alpha}$ jest gęsty w E, a $\|\cdot\|_L$ jest normą na E spełniającą nierówność $\|x\|_L \leqslant \|x\|$ dla $x \in E$.

Na mocy powyższej nierówności odwzorowanie

$$\phi : E \ni x \to \|x^+\|_L - \|x^-\|_L$$

okazuje się być liniowym ciągłym funkcjonałem na E. Z rozważań poprzedniego podrozdziału wynika, że norma $\|\cdot\|_\infty$ w ideale głównym generowanym przez ϕ jest normą dualną do $\|\cdot\|_L$ na $E = E/N_\phi$, (ostatnia równość wynika z równości $N_\phi = \{0\}$). Na mocy stwierdzenia 3.3, normy $\|\cdot\|_\infty$ i $\|\cdot\|$ są równoważne w E^*_ϕ, skąd wynika równoważność norm $\|\cdot\|_L$ i $\|\cdot\|$ w E. □

Twierdzenie 6.4. *(Kakutani-Bohenblust-Nakano). Krata Banacha E jest L-przestrzenią wtedy i tylko wtedy, gdy jest kratowo izomorficzna z $L^1(\mu)$ dla pewnej miary nieujemnej μ określonej na lokalnie zwartej przestrzeni X. Miara ta jest wewnętrznie regularna i skończona na zbiorach zwartych.*

Przestrzeń X jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy E posiada słabą jedynkę.

Dowód. Korzystając z twierdzenia 6.3, możemy założyć, że dla $x, y \in E^+$ zachodzi równość $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$.

Załóżmy najpierw, że E posiada słabą jedynkę e. Na mocy twierdzenia 3.12, ideał E_e może być identyfikowany z $C(\Omega)$ dla pewnej zwartej przestrzeni Ω. Ponadto odwzorowanie $\phi : E \ni x \to \|x^+\| - \|x^-\|$ może być traktowane jako ściśle dodatni funkcjonał liniowy na $C(\Omega)$, przy czym wartość $\|x\| = \phi(|x|)$. Z twierdzenia Riesza o postaci funkcjonału wnioskujemy, że istnieje dodatnia skończona borelowska miara regularna μ na Ω taka, że $\phi(x) = \int x\, d\mu$ dla $x \in E_e$. Ponieważ $C(\Omega)$ jest gęsta w $L^1(\mu)$, więc izomorfizm $E_u \to C(\Omega)$ rozszerza się do izomorfizmu $E \to L^1(\mu)$.

W przypadku braku słabej jedynki w E bierzemy dowolny maksymalny układ rozłączny $S = \{u_\alpha : \alpha \in A\}$. Wtedy ideał $I = \bigoplus_\alpha E_{u_\alpha}$ generowany przez S jest gęsty w E, przy czym każdy ideał E_{u_α} jest izomorficzny z $C(\Omega_\alpha)$. Zatem I jest izomorficzny z $C(\Omega)$, gdzie Ω jest topologiczną sumą prostą rodziny $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Dalsza część dowodu przebiega analogicznie jak poprzednio, przy czym otrzymana miara jest tylko wewnętrznie regularna i skończona na zbiorach zwartych. □

Definicja 6.5. Kratę Banacha E nazywamy KB-przestrzenią, gdy każdy rosnący, ograniczony w normie ciąg jest zbieżny w normie.

Lemat 6.6. *Jeżeli E jest KB-przestrzenią lub porządkowo zupełną M-przestrzenią z jedynką, to istnieje dodatnia projekcja $P : E^{**} \to E^{**}$ o obrazie równym E.*

Twierdzenie 6.7. *Załóżmy, że F jest porządkowo zupełną M-przestrzenią z jedynką lub E jest L-przestrzenią i F jest KB-przestrzenią. Wtedy $\mathcal{L}(E, F) = \mathcal{L}_r(E, F)$. W szczególności dla każdego $T \in \mathcal{L}(E, F)$ istnieje $|T|$.*

Dowód. Załóżmy najpierw, że F jest porządkowo zupełną M-przestrzenią z jedynką i weźmy dowolny liniowy, ciągły operator $T : E \to F$. Ponieważ T odwzorowuje kulę jednostkową U_E w zbiór ograniczony w normie, więc ze stwierdzenia 3.3 wnioskujemy, że

$T(U_E)$ jest również porządkowo ograniczony, co oznacza, że operator T jest porządkowo ograniczony. Zatem na mocy twierdzenia Riesza-Kantorowicza (tw. 2.8, str. 9) T jest regularny i $|T|$ istnieje.

Załóżmy teraz, że E jest L-przestrzenią i F jest KB-przestrzenią i weźmy dowolny $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Wtedy E^*, na mocy twierdzenia 3.6, jest porządkowo zupełną M-przestrzenią z jedynką. Z poprzedniego przypadku wynika więc regularność T^*. Zatem również T^{**} jest regularny, czyli istnieją dodatnie operatory $A, B : E^{**} \to F^{**}$ takie, że $T^{**} = A - B$. Z lematu 6.6 wynika istnienie dodatniej projekcji P z F^{**} na F. Zatem PA i PB są dodatnimi operatorami z E^{**} w F i $T = PA - PB$ na E, co oznacza regularność T. □

WNIOSEK 6.8. *Załóżmy, że F jest porządkowo zupełną M-przestrzenią z jedynką lub E jest L-przestrzenią i F jest KB-przestrzenią oraz, że $T : E \to F$ jest liniowym, ciągłym operatorem. wtedy $\|T\| = \|T\|_r$ oraz $\mathcal{L}(E, F)$ jest porządkowo zupełną kratą Banacha.*

DOWÓD. Załóżmy najpierw, że F jest porządkowo zupełną M-przestrzenią z jedynką, a zatem korzystając z twierdzenia 3.12 możemy przyjąć $F = C(\Omega)$ dla pewnej zwartej przestrzeni Ω. Z twierdzenia 6.7 wynika istnienie modułu operatora T, a więc

$$\|T\|_r = \|\,|T|\,\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|\,|T|x\,\|_\infty.$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$ i weźmy wektor jednostkowy $x \in E^+$ taki, że $\|\,|T|x\,\|_\infty > \|T\|_r - \varepsilon$. Ponieważ

$$\|\,|T|x\,\|_\infty = \sup_{\omega \in \Omega} (|T|x)(\omega),$$

więc możemy znaleźć niepusty otwarty podzbiór $V \in \Omega$ taki, że

$$(|T|x)(\omega) > \|T\|_r - \varepsilon \quad \forall\, \omega \in V.$$

Stąd i ze wzoru Riesza-Kantorowicza

$$|T|x = \sup\{Tu : -x \leqslant u \leqslant x\}$$

wynika istnienie $u \in [-x, x]$ oraz punktu $\omega_0 \in V$ takiego, że

$$(Tu)(\omega) > \|T\|_r - \varepsilon.$$

Zatem $\|T\| \geqslant \|Tu\|_\infty > \|T\|_r - \varepsilon$. Ponieważ ε było dowolne, więc $\|T\| \geqslant \|T\|_r$, a stąd $\|T\| = \|T\|_r$, gdyż nierówność odwrotna jest zawsze prawdziwa.

Załóżmy teraz, że E jest L-przestrzenią i F jest KB-przestrzenią. Z twierdzenia 6.7 wynika istnienie modułu operatora T, a na mocy twierdzenia 2.5 mamy równość $|T|^* = |T^*|$. Ponieważ E^* jest porządkowo zupełną M-przestrzenią z jedynką, więc poprzednio rozważany przypadek implikuje równość $\|\,|T^*|\,\| = \|T^*\|$, a stąd

$$\|T\|_r = \|\,|T|\,\| = \|\,|T|^*\,\| = \|\,|T^*|\,\| = \|T^*\| = \|T\|,$$

co kończy dowód. □

Zestawiając powyższy wniosek oraz twierdzenie 2.5, otrzymujemy:

WNIOSEK 6.9. *Jeżeli E jest L-przestrzenią i F jest KB-przestrzenią, to odwzorowanie*

$$\mathcal{L}(E, F) \ni T \to T^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$$

jest izometrią kratową.

Uwaga 6.10. Tak naprawdę dwa ostatnie wnioski są prawdziwe z dokładnością do normy równoważnej w E lub F, albo z inną definicją M- i L-przestrzeni. Czy są prawdziwe bez tej uwagi? (Ćwiczenie)

Definicja 6.11. Jeżeli E i F są M-przestrzeniami z jedynkami u i v, a $T : E \to F$ operatorem dodatnim takim, że $T(u) = v$, to T nazywamy **operatorem Markowa**.

Jeżeli E i F są L-przestrzeniami, a $T : E \to F$ operatorem dodatnim takim, że $\|Tx\| = \|x\| \ \forall\ x \in E^+$, to T nazywamy **operatorem stochastycznym**.

Twierdzenie 6.12. *Operator dodatni między dwiema M-przestrzeniami z jedynkami jest operatorem Markowa wtedy i tylko wtedy, gdy sprzężony do niego jest operatorem stochastycznym.*

Operator dodatni między dwiema L-przestrzeniami jest operatorem stochastycznym wtedy i tylko wtedy, gdy sprzężony do niego jest operatorem Markowa.

Dowód. Załóżmy najpierw, że $T : E \to F$ jest operatorem Markowa między dwiema M-przestrzeniami z jedynkami u i v. Jeżeli $0 \leqslant y^* \in F^*$, to z lematu 3.4 otrzymujemy

$$\|T^*y^*\| = \|(T^*y^*)(u)\| = \|y^*(Tu)\| = \|y^*(v)\| = \|y^*\|,$$

co oznacza, że T^* jest operatorem stochastycznym.

Załóżmy teraz, że $T : E \to F$ jest operatorem stochastycznym między dwiema L-przestrzeniami. Z twierdzenia 3.5 wynika, że E^* i F^* są M-przestrzeniami z jedynkami u^* i v^* zadanymi równościami

$$u^*(x) = \|x^+\| - \|x^-\| \ \forall\ x \in E, \quad v^*(y) = \|y^+\| - \|y^-\| \ \forall\ y \in F.$$

Stąd dla $x \in E^+$

$$(T^*v^*)(x) = v^*(Tx) = \|Tx\| = \|x\| = u^*(x).$$

Zatem $T^*v^* = u^*$, co oznacza, że T^* jest operatorem Markowa.

Niech teraz $T : E \to F$ będzie operatorem dodatnim między dwiema M-przestrzeniami z jedynkami u i v i załóżmy, że $T^* : F^* \to E^*$ jest stochastyczny. Wtedy $T^{**} : E^{**} \to F^{**}$ jest operatorem Markowa. Ponieważ E^{**} jest M-przestrzenią z jedynką u, a F^{**} jest M-przestrzenią z jedynką v (tw. 3.5), więc $Tu = T^{**}u = v$, co oznacza, że T jest operatorem Markowa.

Załóżmy teraz, że $T : E \to F$ jest operatorem dodatnim między dwiema L-przestrzeniami, a T^* jest operatorem Markowa. Wtedy $T^{**} : E^{**} \to F^{**}$ jest operatorem stochastycznym. Zatem dla $x \in E^+$ mamy $\|x\| = \|T^{**}x\| = \|Tx\|$, co oznacza, że T jest operatorem stochastycznym. $\square$

ROZDZIAŁ 3

Homomorfizmy kratowe i algebraiczne

1. Charakteryzacja homomorfizmów

TWIERDZENIE 1.1. *Niech E będzie kratą Banacha, $\mathcal{F}$ conajwyżej przeliczalnym podzbiorem E, a $\mathcal{C}$ conajwyżej przeliczalną rodziną operatorów regularnych na E. Wtedy istnieje $0 < u \in E$ takie, że*

(1) $\mathcal{F} \subset E_u$
(2) $\forall\ T \in \mathcal{C} : T(E_u) \subset E_u$

DOWÓD. Krok I: *Jeżeli $\mathcal{F}$ jest conajwyżej przeliczalny, to jest zawarty w ideale głównym.*

Niech $\mathcal{F} = \{x_1, x_2, ...\}$. Możemy założyć, że $x_i \neq 0\ \forall\ i$. Jeżeli $u := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n|}{\|x_n\|}$, to $\mathcal{F} \subset E_u$.

Krok II: *Jeżeli $\mathcal{F}$ jest conajwyżej przeliczalny, a $T \in \mathcal{L}_r(E)$, to istnieje $u > 0$ takie, że $\mathcal{F} \subset E_u$ i $T(E_u) \subset E_u$.*

Istnieją operatory dodatnie T_1, T_2 takie, że $T = T_1 - T_2$. Niech $S := T_1 + T_2$. Z kroku I wynika istnienie $w > 0$ takiego, że $\mathcal{F} \subset E_w$. Zdefiniujmy $u := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{S^n w}{\|S\|^n}$. Ponieważ $w \leqslant u$, więc $\mathcal{F} \subset E_u$. Ponieważ $Tu \leqslant Su \leqslant \|S\| u$, więc $T(E_u) \subset E_u$.

Krok III: *Przypadek ogólny.*

Niech $\mathcal{C} = \{T_1, T_2, ...\}$, gdzie $T_i \neq 0\ \forall\ i$. Wtedy $T_i = T_{i1} - T_{i2}$ dla pewnych operatorów dodatnich T_{i1}, T_{i2}. Niech $S_i := T_{i1} + T_{12}$.
Rozważmy operator dodatni $S := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{S_n}{\|S_n\|}$. Na mocy kroku II istnieje $u > 0$ takie, że $\mathcal{F} \subset E_u$ i $S(E_u) \subset E_u$. Ustalmy $x \in E_u$ i weźmy $\lambda > 0$ takie, że $|x| \leqslant \lambda u$. Wtedy dla każdego k mamy

$$|T_k x| \leqslant (T_{k1} + T_{k2})|x| = S_k|x| \leqslant \lambda S_k u = \lambda 2^k \|S_k\| \cdot \frac{S_k u}{2^k \|S_k\|} \leqslant \lambda 2^k \|S_k\| S u \in E_u.$$

Zatem $T_k x \in E_u$, co oznacza, że dla każdego k mamy inkluzję $T_k(E_u) \subset E_u$. $\square$

DEFINICJA 1.2. Operator $T : C(\Omega) \to C(Q)$ jest **algebraicznym homomorfizmem** (inaczej **operatorem multyplikatywnym**) jeżeli $T(fg) = T(f)T(g)$ dla $f, g \in C(\Omega)$.

LEMAT 1.3. *Niezerowy funkcjonał $\phi : C(\Omega) \to \mathbb{R}$ jest homomorfizmem kratowym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $c > 0$ i $\omega_0 \in \Omega$ takie, że $\phi = c\delta_{\omega_0}$. Stała c i punkt ω_0 są przy tym jednoznacznie określone. (δ_ω oznacza miarę Diraca skoncentrowaną w punkcie ω.)*

DOWÓD. Jeżeli $\phi = c\delta_{\omega_0}$ dla pewnego $c \geqslant 0$, to ϕ jest homomorfizmem kratowym, gdyż $\phi(f \wedge g) = \min\{cf(\omega_0), cg(\omega_0)\} = \min\{\phi(f), \phi(g)\}$ dla $f, g \in C(\Omega)$.

Załóżmy teraz, że ϕ jest homomorfizmem kratowym. Zatem w szczególności jest funkcjonałem dodatnim. Z twierdzenia Riesza wynika więc istnienie jedynej regularnej miary borelowskiej μ na Ω spełniającej równość $\phi(f) = \int f\, d\mu$ dla $f \in C(\Omega)$. Wykażemy, że nośnik μ jest jednopunktowy. Załóżmy nie wprost, że istnieją dwa różne punkty s i t należące do nośnika μ. Wtedy znajdziemy dwie funkcje $f, g \in C(\Omega)$ spełniające warunki $f \wedge g = 0$ i $f(s) = g(t) = 1$. Stąd

$$0 = \phi(f \wedge g) = \min\{\phi(f), \phi(g)\} = \min\{\int f\, d\mu, \int g\, d\mu\} > 0,$$

co prowadzi do sprzeczności. Zatem nośnik μ składa się tylko z pewnego pojedynczego punktu ω_0. Stąd dla $f \in C(\Omega)$ otrzymujemy

$$\phi(f) = \int f\, d\mu = \int_{\{\omega_0\}} f\, d\mu = f(\omega_0)\mu(\{\omega_0\}) = (\mu(\{\omega_0\})\delta_{\omega_0})(f).$$

$\square$

Lemat 1.4. *(Gelfand) Niezerowy liniowy funkcjonał $\phi : C_{\mathbb{C}}(\Omega) \to \mathbb{C}$ jest multyplikatywny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje (jedyny) punkt $\omega_0 \in \Omega$ takie, że $\phi = \delta_{\omega_0}$. (δ_ω oznacza miarę Diraca skoncentrowaną w punkcie ω.)*

Dowód. Jeżeli $\phi = \delta_{\omega_0}$, to $\phi(fg) = (fg)(\omega_0) = f(\omega_0)g(\omega_0) =$ zachodzi dla $f, g \in C_{\mathbb{C}}(\Omega)$, co oznacza multyplikatywność ϕ.

Załóżmy teraz, że ϕ jest niezerowym funkcjonałem liniowo-multyplikatywnym na $C_{\mathbb{C}}(\Omega)$. Ponieważ $\phi(\mathbf{1}) = \phi(\mathbf{1}^2) = (\phi(\mathbf{1}))^2$ i $\phi \neq 0$, więc $\phi(\mathbf{1}) = 1$ ($\mathbf{1}$ oznacza funkcję identycznie równą 1 na Ω). Wykażemy, że istnieje $\omega_0 \in \Omega$ taki, że $\ker \phi \subset \{x \in C_{\mathbb{C}}(\Omega) : x(\omega_0) = 0\}$.

Jeżeli nie ma takiego punktu, to dla każdego $\omega \in \Omega$ istnieje funkcja $x_\omega \in \ker \phi$ taka, że $x_\omega(\omega) \neq 0$. Ponieważ x_ω jest ciągła, więc istnieje otoczenie V_ω punktu ω takie, że $x_\omega(t) \neq 0$ $\forall\, t \in V_\omega$. Ze zwartości Ω wynika istnienie skończonego pokrycia otwartego $V_{\omega_1}, ..., V_{\omega_n}$ zbioru Ω. Rozważmy funkcję $x := \sum_{n=1}^{n} x_{\omega_i} \cdot \bar{x}_{\omega_i}$. Z jej definicji mamy natychmiast $x(\omega) > 0$ $\forall\, \omega \in \Omega$, a stąd $y := \frac{1}{x} \in C_{\mathbb{C}}(\Omega)$. Równość $xy = \mathbf{1}$ i multyplikatywność ϕ implikuje równość $\phi(x)\phi(y) = 1$, skąd $\phi(x) \neq 0$. Z drugiej strony, ponieważ $\phi(x_\omega) = 0\ \forall\, \omega$, więc $\phi(x) = 0$, co prowadzi do sprzeczności. Zatem istnieje $\omega_0 \in \Omega$ taki, że $\ker \phi \subset \{x \in C_{\mathbb{C}}(\Omega) : x(\omega_0) = 0\}$.

Wykażemy teraz inkluzję $\{x \in C_{\mathbb{C}}(\Omega) : x(\omega_0) = 0\} \subset \ker \phi$. Niech $x \in C_{\mathbb{C}}(\Omega)$ i $x(\omega_0) = 0$. Jeżeli $u := \phi(x)\mathbf{1} - x$, to $u(\omega_0) = \phi(x)$ oraz $u \in \ker \phi$, a zatem z poprzedniej inkluzji $u(\omega_0) = 0$, skąd $\phi(x) = 0$, czyli $x \in \ker \phi$. A więc ostatecznie $\ker \phi = \{x \in C_{\mathbb{C}}(\Omega) : x(\omega_0) = 0\}$.

Gdy $x \in C_{\mathbb{C}}(\Omega)$, to $x - \phi(x)\mathbf{1} \in \ker \phi$, skąd $x(\omega_0) - \phi(x) = 0$, czyli $\phi(x) = x(\omega_0)$. Jedyność ω_0 wynika z faktu, że $C_{\mathbb{C}}(\Omega)$ rozdziela punkty Ω. $\square$

Twierdzenie 1.5. *Operator dodatni $T : C(\Omega) \to C(Q)$ jest homomorfizmem kratowym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje odwzorowanie $\tau : Q \to \Omega$ i pewna funkcja $w \in C(\Omega)$ taka, że $\forall\ f \in C(\Omega)$ i $\forall\ q \in Q$ mamy*

$$(Tf)(q) = w(q)f(\tau(q)).$$

Ponadto $w = T\mathbf{1}_\Omega$ oraz odwzorowanie τ jest jednoznacznie określone i ciągłe na zbiorze $\{q \in Q : w(q) > 0\}$.

Dowód. Gdy T jest postaci jak powyżej, to T jest homomorfizmem kratowym. Załóżmy teraz, że T jest homomorfizmem kratowym. Wtedy dla każdego $q \in Q$ mamy

$$(\delta_q \circ T)(f) = \delta_q(Tf) = (Tf)(q).$$

Ponieważ T jest homomorfizmem kratowym, więc funkcjonał liniowy $\delta_q \circ T : C(\Omega) \to \mathbb{R}$ jest również homomorfizmem kratowym. Zatem, na mocy lematu 1.3, istnieje jedyna stała $w(q) \geqslant 0$ i pewien punkt $\tau(q) \in \Omega$ taki, że

$$(Tf)(q) = (\delta_q \circ T)(f) = w(q) f(\tau(q)).$$

Podstawiając $f = \mathbf{1}_\Omega$, otrzymujemy $w = T\mathbf{1}_\Omega \in C(Q)$. Ponadto, jeżeli $w(q) > 0$, to $\tau(q)$ jest jednoznacznie określone, bo $C(Q)$ rozdziela punkty Q.

Wykażemy teraz, że τ jest ciągłe na zbiorze $Q_w := \{q \in Q : w(q) > 0\}$. Niech $\{q_\alpha\} \subset Q_w$ będzie ciągiem uogólnionym takim, że $q_\alpha \to q$. Ze zwartości zbioru Ω wynika, że zbiór $\tau(\{q_\alpha\})$ ma punkt skupienia $\omega \in \Omega$. Zatem, przechodząc do podciągu uogólnionego mamy $\tau(q_\alpha) \to \omega$. Stąd dla każdego $f \in C(\Omega)$ przechodząc do granicy otrzymujemy

$$\lim_\alpha w(q_\alpha) = \frac{(Tf)(q)}{f(\omega)}$$

dla $f(\omega) \neq 0$. W szczególności dla $f = \mathbf{1}$ mamy $\lim w(q_\alpha) = w(q)$. Zatem

$$f(\omega) = \frac{(Tf)(q)}{w(q)} = f(\tau(q)) \quad \forall\, f \in C(\Omega),$$

a ponieważ $C(\Omega)$ rozdziela punkty Ω, więc $\omega = \tau(q)$. □

Twierdzenie 1.6. *każdy algebraiczny homomorfizm pomiędzy rzeczywistymi przestrzeniami $C(K)$ jest homomorfizmem kratowym. Odwrotna implikacja jest fałszywa.*

Dowód. Niech $T : C(\Omega) \to C(Q)$ będzie algebraicznym homomorfizmem. Dla $f \geqslant 0$ mamy $Tf = T((\sqrt{f})^2) = (T(\sqrt{f}))^2 \geqslant 0$. Zatem T jest operatorem dodatnim. Niech $f \in C(\Omega)$. Wtedy

$$|T(f)|^2 = (T(f))^2 = T(f^2) = T(|f|^2) = (T(|f|))^2,$$

skąd $|T(f)| = T(|f|)$. □

Twierdzenie 1.7. *Załóżmy, że $C(\Omega)$ i $C(Q)$ są rzeczywistymi lub zespolonymi przestrzeniami. Operator $T : C(\Omega) \to C(Q)$ jest algebraicznym homomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje jedyny domknięto-otwarty podzbiór $V \subset Q$ oraz odwzorowanie $\tau : Q \to \Omega$ ciągłe na V i takie, że*

$$Tf = \chi_V \cdot (f \circ \tau) \quad \forall\, f \in C(\Omega).$$

Odwzorowanie τ jest jednoznacznie określone na V.

Dowód. Jeżeli T jest powyższej postaci, to T jest w oczywisty sposób algebraicznym homomorfizmem. Załóżmy teraz, że T jest algebraicznym homomorfizmem. Osobno rozważymy przypadek rzeczywisty i zespolony.

Przypadek I: $T : C(\Omega) \to C(Q)$ *jest algebraicznym homomorfizmem pomiędzy przestrzeniami rzeczywistymi.*

Na mocy twierdzenia 1.6, T jest homomorfizmem kratowym. Zatem z twierdzenia 1.5 wynika istnienie odwzorowania $\tau : Q \to \Omega$ oraz $w \in C(Q)$ takich, że

$$(Tf)(q) = w(q)f(\tau(q)) \quad \forall\ f \in C(\Omega),\ q \in Q.$$

Ponadto wiemy, że $w = T\mathbf{1}_\Omega$ oraz, że odwzorowanie τ jest jednoznacznie określone na zbiorze $\{q \in Q : w(q) > 0\}$. Korzystając z faktu, że T jest algebraicznym homomorfizmem otrzymujemy równość

$$w^2 = (T\mathbf{1}_\Omega)^2 = T((\mathbf{1}_\Omega)^2) = T(\mathbf{1}_\Omega) = w,$$

skąd wynika, że $w = \chi_V$ dla pewnego jednoznacznie określonego domknięto-otwartego zbioru $V \subset Q$.

Przypadek II: $T : C(\Omega) \to C(Q)$ *jest algebraicznym homomorfizmem pomiędzy przestrzeniami zespolonymi.*

Dla każdego $q \in Q$ mamy

$$(\delta_q \circ T)(f) = \delta_q(Tf) = (Tf)(q).$$

Ponieważ T jest algebraicznym homomorfizmem, więc funkcjonał $\delta_q \circ T : C_\mathbb{C}(\Omega) \to \mathbb{C}$ jest też algebraicznym homomorfizmem. A zatem, na mocy lematu 1.4, istnieje punkt $\tau(q) \in \Omega$ taki, że

$$(Tf)(q) = (\delta_q \circ T)(f) = f(\tau(q)) \quad \forall\ f \in C_\mathbb{C}(\Omega).$$

Z równości $(T\mathbf{1}_\Omega)^2 = T((\mathbf{1}_\Omega)^2) = T(\mathbf{1}_\Omega)$ wynika, że $T(\mathbf{1}_\Omega) = \chi_V$ dla pewnego jednoznacznie określonego domknięto-otwartego zbioru $V \subset Q$. Aby zakończyć dowód zauważmy, że $Tf = T(\mathbf{1}_\Omega f) = T(\mathbf{1}_\Omega)Tf = \chi_V(f \circ \tau)$. □

Z poprzednich twierdzeń wynika natychmiast

TWIERDZENIE 1.8. *Dla operatora Markowa $T : C(\Omega) \to C(Q)$ następujące warunki są równoważne:*

(1) *T jest algebraicznym homomorfizmem.*
(2) *T jest homomorfizmem kratowym.*

TWIERDZENIE 1.9. *Dodatni operator $T : E \to F$ między dwiema kratami Banacha jest homomorfizmem kratowym wtedy i tylko wtedy, gdy operator $T_\mathbb{C} : E_\mathbb{C} \to F_\mathbb{C}$ spełnia równość $|T_\mathbb{C} z| = T|z|$ dla $z \in E_\mathbb{C}$.*

DOWÓD. Niech $z = x + iy \in E_\mathbb{C}$. Definiujemy $u := |x| + |y| \in E$ oraz $v := Tu \in F$. Bezpośrednio z definicji wynika inkluzja $T(E_u) \subset F_v$, a zatem $T : E_u \to F_v$ jest operatorem Markowa. Aby wykazać tezę twierdzenia wystarczy rozważyć zawężenie T do E_u.

Na mocy twierdzeń 3.8 (str. 29) oraz 3.12 (str. 30) ideał E_u możemy identyfikować z pewną przestrzenią $C(\Omega)$, a ideał E_u z pewną przestrzenią $C(Q)$. Zatem z twierdzeń 1.8 i 1.7 wynika istnienie ciągłego odwzorowania $\tau : Q \to \Omega$ takiego, że $Tf = f \circ \tau$ dla

$f \in C(\Omega)$. (Równość $Tu = v$ oraz fakt, że v jest jedynką w $C(Q)$ implikuje warunek $V = Q$, gdzie V jest zbiorem, o którym mówi teza twierdzenia 1.7) Stąd dla $q \in Q$ mamy

$$\begin{aligned}|T_{\mathbb{C}}z|(q) &= |Tx + iTy|(q) = \left(\sqrt{(Tx)^2 + (Ty)^2}\right)(q) = \sqrt{((Tx)(q))^2 + ((Ty)(q))^2} \\ &= \sqrt{(x(\tau(q)))^2 + (y(\tau(q)))^2} = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)(\tau(q)) = |x + iy|(\tau(q)) = (T|z|)(q).\end{aligned}$$

A więc $|T_{\mathbb{C}}z| = T|z|$. □

Z powyższymi zagadnieniami związany jest pewna ogólna własność algebr Banacha:

Twierdzenie 1.10. *Każdy liniowo-multyplikatywny funkcjonał określony na algebrze Banacha jest ciągły i ma normę mniejszą lub równą 1.*

Dowód. Niech ϕ będzie funkcjonałem liniowo-multyplikatywnym na algebrze Banacha $\mathcal{A}$. Jeżeli ϕ nie jest ciągły lub ma normę większą od 1, to istnieje $a \in \mathcal{A}$ takie, że $\|a\| < 1$ i $\phi(a) = 1$. Niech $b := \sum_{n=1}^{\infty} a^n$. Wtedy $ab = b - a$ i korzystając z multyplikatywności ϕ otrzymujemy równość $\phi(a)\phi(b) = \phi(a) - \phi(b)$. Stąd $\phi(b) = \phi(b) - 1$, co jest niemożliwe. □

2. Rozszerzenia operatorów i homomorfizmów

Definicja 2.1. Odwzorowanie $p : X \to Z$ pomiędzy dwiema rzeczywistymi przestrzeniami wektorowymi jest **subliniowe**, gdy

(a) $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$ dla $x, y \in X$.
(b) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ dla $\lambda \geqslant 0$, $x \in X$.

Twierdzenie 2.2. *(Hahn-Banach-Kantorowicz) Niech X będzie przestrzenią wektorową, Y jej podprzestrzenią, F porządkowo zupełną kratą wektorową, a $p : X \to F$ odwzorowaniem subliniowym. Jeżeli operator $T : Y \to F$ spełnia nierówność $Ty \leqslant p(y)$ dla $y \in Y$, to istnieje operator $S : X \to F$ będący rozszerzeniem T i spełniający nierówność $Sx \leqslant p(x)$ dla $x \in X$.*

Dowód. Ćwiczenie w oparciu o dowód klasycznego twiedzenia Hahna-Banacha. □

Definicja 2.3. Mówimy, że podprzestrzeń wektorowa $Y \subset X$ **majoryzuje** przestrzeń liniową częściowo uporządkowaną X, jeżeli $\forall\ x \in X\ \exists\ y \in Y$ takie, że $x \leqslant y$.

Twierdzenie 2.4. *Niech Y będzie majoryzującą podprzestrzenią wektorową przestrzeni liniowej częściowo uporządkowanej X. Wtedy każdy dodatni operator liniowy określony w Y o wartościach w porządkowo zupełnej kracie wektorowej F ma dodatnie liniowe rozszerzenie do całej przestrzeni X.*

Dowód. Niech $T : Y \to F$ będzie operatorem dodatnim. Określamy odwzorowanie $p : X \to F$ jak następuje:

$$p(x) := \inf\{Ty : y \in Y,\ y \geqslant x\}.$$

Aby wykazać istnienie powyższego infimum, weźmy dowolny $x \in X$. Ponieważ Y majoryzuje X, więc istnieje $z \in Y$ takie, że $z \geqslant -x$ czyli $-z \leqslant x$. Podobnie istnieje $y \in Y$ takie, że $y \geqslant x$. Z dodatniości T wynika nierówność $-Tz = T(-z) \leqslant Ty$. Zatem zbiór

$\{Ty : y \in Y,\ y \geqslant x\}$ jest niepusty i ograniczony z dołu. Na mocy porządkowej zupełności F posiada więc infimum.

Jak łatwo stwierdzić, p jest odwzorowaniem subliniowym spełniającym dla $y \in Y$ równość $Ty = p(y)$. Z twierdzenia 2.2 wynika więc istnienie operatora liniowego $S : X \to F$ będącego rozszerzeniem T i spełniającego nierówność $Sx \leqslant p(x)$ dla $x \in X$. Jeżeli $x \in X^+$, to $-x \leqslant 0$, skąd $-Sx = S(-x) \leqslant p(-x) \leqslant T(0) = 0$ (ostatnia nierówność wynika z definicji p). Zatem $Sx \geqslant 0$, a więc S jest dodatnim rozszerzeniem T. □

Niech X będzie przestrzenią l.c.u., Y jej wektorową podprzestrzenią, F kratą wektorową, a $T : Y \to F$ operatorem dodatnim. Oznaczamy przez $\Theta(T)$ rodzinę wszystkich dodatnich rozszerzeń T do całej przestrzeni X. Zbiór $\Theta(T)$ jest wypukłym podzbiorem $\mathcal{L}_R(X, F)$ (może on być zbiorem pustym).

TWIERDZENIE 2.5. *(Lipecki, Plachky, Thomsen) Niech Y będzie podprzestrzenią wektorową kraty wektorowej E, niech F będzie porządkowo zupełną kratą wektorową, a $T : Y \to F$ operatorem dodatnim. W takim przypadku operator $S \in \Theta(T)$ jest punktem ekstremalnym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in E$ mamy*

$$\inf\{S|x - y| : y \in Y\} = 0.$$

DOWÓD. Niech $S \in \Theta(T)$. Załóżmy najpierw, że T jest punktem ekstremalnym $\Theta(T)$. Definiujemy odwzorowanie $p : E \to F$ następująco:

$$p(x) := \inf\{S|x - y| : y \in Y\}.$$

Odwzorowanie p jest subliniowe i spełnia nierówność $0 \leqslant p(x) = p(-x) \leqslant S|x|$ dla każdego $x \in E$ oraz $p(z) = 0$ dla każdego $z \in Y$.

Aby wykazać, że $p(x) = 0$ dla każdego $x \in E$, załóżmy dla dowodu nie wprost, że $p(u) > 0$ dla pewnego $u \in E$. Niech $Z := \{\lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Zdefiniujmy operator $R : Z \to F$ kładąc $R(\lambda u) := \lambda p(u)$. Ponieważ $R(u) = p(u) > 0$, więc $R \neq 0$. Również $R(\lambda u) \leqslant p(\lambda u)$ dla $\lambda \in \mathbb{R}$, a więc na mocy twierdzenia 2.2, istnieje liniowe, dodatnie rozszerzenie $\tilde{R}$ operatora R spełniające dla $x \in E$ nierówność $\tilde{R}x \leqslant p(x)$. Zatem dla $y \in Y$ otrzymujemy $\pm\tilde{R}y = \tilde{R}(\pm y) \leqslant p(\pm y) = p(y)$, skąd $|\tilde{R}y| \leqslant p(y) = 0$, a więc $\tilde{R}y = 0$ dla $y \in Y$. Zaobserwujmy, że dla $x \in E^+$ mamy

$$\tilde{R}x \leqslant p(x) \leqslant Sx, \quad -\tilde{R}x = \tilde{R}(-x) \leqslant p(-x) \leqslant S|-x| = Sx,$$

skąd $S - \tilde{R} \geqslant 0$ i $S + \tilde{R} \geqslant 0$. Ponieważ $\tilde{R}y = 0$ dla $y \in Y$, więc $S - \tilde{R},\ S + \tilde{R} \in \Theta(T)$. Zauważmy teraz, że $S + \tilde{R} \neq S$, $S - \tilde{R} \neq S$, gdyż $\tilde{R}(u) > 0$ oraz $S = \frac{1}{2}(S + \tilde{R}) + \frac{1}{2}(S - \tilde{R})$, co zaprzecza założeniu, że S jest punktem ekstremalnym $\Theta(T)$. Zatem $p(x) = 0$ dla $x \in E$.

Dla dowodu przeciwnej implikacji załóżmy, że S spełnia warunek $\inf\{S|x - y| : y \in Y\} = 0$ dla każdego $x \in E$ oraz, że istnieją dwa operatory $A, B \in \Theta(T)$ i pewne $0 < \alpha < 1$ spełniające równość $S = \alpha A + (1 - \alpha)B$. Wtedy dla $x, y \in E$ mamy

$$|Ax - Ay| \leqslant A|x - y| = (\frac{1}{\alpha}S - \frac{1 - \alpha}{\alpha}B)|x - y| \leqslant \frac{1}{\alpha}S|x - y|.$$

W szczególności, gdy $y \in Y$, to $Ay = Ty = Sy$, skąd dla $x \in E$ otrzymujemy

$$|Sx - Ax| \leqslant |Sx - Sy| + |Ay - Ax| \leqslant (1 + \frac{1}{\alpha})S|x - y|.$$

Po przejściu do infimum po $y \in Y$ w ostatniej nierówności dostajemy równość $Ax = Sx$ dla $x \in E$, skąd $A = B = S$, a zatem S jest punktem ekstremalnym $\Theta(T)$. □

WNIOSEK 2.6. *Niech G będzie podkratą kraty wektorowej E, niech F będzie porządkowo zupełną kratą wektorową, a $T : G \to F$ homomorfizmam kratowym. Wtedy każdy punkt ekstremalny $\Theta(T)$ jest także homomorfizmem kratowym.*

DOWÓD. Z twierdzenia 2.5 mamy

$$\inf\{S|x-y| : y \in G\} = 0. \tag{2.1}$$

Ponieważ T jest homomorfizmem kratowym, więc $|Sy| = |Ty| = T|y| = S|y|$ dla $y \in G$. Zatem dla $x \in E$ i $y \in G$ otrzymujemy

$$||Sx| - S|x|| \leqslant ||Sx| - |Sy|| + ||Sy| - S|x|| \leqslant |Sx - Sy| + |S|y| - S|x|| \leqslant 2S|x-y|.$$

Stąd, na mocy (2.1), $|Sx| = S|x|$ dla $x \in E$, co oznacza, że S jest homomorfizmem kratowym. □

TWIERDZENIE 2.7. *(Lipecki) Jeżeli E jest kratą Banacha, Y jej majoryzującą podprzestrzenią wektorową, F porządkowo zupełną kratą wektorową, a $T : Y \to F$ operatorem dodatnim, to zbiór $\Theta(T)$ jest niepusty i posiada punkt ekstremalny.*

DOWÓD. Niepustość zbioru $\Theta(T)$ wynika z twierdzenia 2.4. Aby wykazać istnienie punktu ekstremalnego musimy, zgodnie z twierdzeniem 2.5 dowieść, że istnieje operator $S \in \Theta(T)$ spełniający dla każdego $x \in E$ równość

$$\inf\{S|x-y| : y \in Y\} = 0. \tag{2.2}$$

Rozważmy zbiór par postaci (Z, A), gdzie Z jest podprzestrzenią wektorową majoryzującą E, a $A : Z \to F$ operatorem dodatnim. Dla każdej takiej pary definiujemy odwzorowanie $p_{Z,A} : Z \to F$ następująco:

$$p_{Z,A}(x) := \inf\{Az : z \in Z,\ z \geqslant x\}.$$

Natychmiast z definicji wynika, że $p_{Z,A}$ jest odwzorowaniem subliniowym spełniającym dla $z \in Z$ równość $p_{Z,A}(z) = Az$. Ponadto, jeżeli dwie pary (Z_1, A_1) i (Z_2, A_2) spełniają warunek $Z_1 \subset Z_2$ i $A_2 = A_1$ na Z_1, to $p_{Z_1,A_1}(x) \leqslant p_{Z_2,A_2}(x)$ dla $x \in E$.

Niech $\mathcal{C}$ będzie rodziną par (Z, A) spełniających warunki:

(a) $Y \subset Z$
(b) $A|_Y = T$
(c) $\forall\ z \in Z\ \inf\{p_{Z,A}(|z-y|) : y \in Y\} = 0$

Ponieważ $(Y, T) \in \mathcal{C}$, więc zbiór $\mathcal{C}$ jest niepusty. Definiujemy częściowy porządek na $\mathcal{C}$ jak następuje:

$$(Z_1, A_1) \preccurlyeq (Z_2, A_2) \overset{\text{df}}{\iff} Z_1 \subset Z_2,\ A_1 = A_2 \text{ na } Z_1.$$

Ponieważ każdy łańcuch w $(\mathcal{C}, \preccurlyeq)$ ma majorantę, więc na mocy lematu Kuratowskiego-Zorna, istnieje w $(\mathcal{C}, \preccurlyeq)$ element maksymalny (V, S). Dla dokończenia dowodu musimy wykazać, że $V = E$, gdyż wtedy będziemy mieli $S = p_{V,S}$ i z warunku (c) otrzymamy (2.2).

Jeżeli $V \neq E$, to istnieje $x \in E$ taki,że $x \notin V$. Rozważmy podprzestrzeń wektorową $W := \{v + \lambda x : v \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ i zdefiniujmy operator $B : W \to F$ przyjmując $B(v+\lambda x) :=$

$Sv + \lambda p_{V,S}(x)$. W oczywisty sposób V jest właściwą podprzestrzenią W oraz $B = S$ na V. Wykażemy, że B jest operatorem dodatnim. Weźmy $0 \leqslant v + \lambda x \in V$. Gdy $\lambda > 0$, to to $x \geqslant -\frac{v}{\lambda}$ i stąd $p_{V,S}(x) \geqslant -S(\frac{v}{\lambda})$ bo $Sw \geqslant S(-\frac{v}{\lambda})$ $\forall$ $w \geqslant x$, $w \in V$. Zatem $B(v+\lambda x) = Sv+\lambda p_{V,S}(x) \geqslant 0$. Dowód w przypadku $\lambda < 0$ wynika bezpośrednio z definicji $p_{V,S}(x)$, a w przypadku $\lambda = 0$ jest oczywisty. Aby dojść do sprzeczności powinniśmy wykazać jeszcze, że (W, B) spełnia warunek (c).

Z sublinearności $p_{W,B}$ wynika, że zbiór

$$V_1 := \{z \in E : \inf\{p_{W,B}(|z - v|) : v \in V\} = 0\}$$

jest podprzestrzenią wektorową E spełniającą inkluzję $V \subset V_1$. Wykażemy, że $x \in V_1$. Ponieważ $v \in V$, więc $v - x \in W$ i w konsekwencji $p_{W,B}(v-x) = B(v-x) = Sv - p_{V,S}(x)$. Zatem

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \inf\{p_{W,B}(|x - v|) : v \in V\} \leqslant \inf\{p_{W,B}(v - x) : v \in V,\ v \geqslant x\} \\ &= \inf\{Sv - p_{V,S}(x) : v \in V,\ v \geqslant x\} = \inf\{Sv : v \in V,\ v \geqslant x\} - p_{V,S}(x) = 0. \end{aligned}$$

A więc $x \in V_1$ i w konsekwencji $W \subset V_1$. Wstalmy teraz $w \in W$ i przyjmijmy $a := \{p_{W,B}(|w - y|) : y \in Y\}$. Zauważmy, że dla $y \in Y$ i $v \in V$ mamy

$$0 \leqslant a \leqslant p_{W,B}(|w - y|) \leqslant p_{W,B}(|w - v|) + p_{W,B}(|v - y|) \leqslant p_{W,B}(|w - v|) + p_{V,S}(|v - y|).$$

Ponieważ $(V, S) \in \mathcal{C}$, więc $\inf\{p_{V,S}(|v - y|) : y \in Y\} = 0$, skąd $0 \leqslant a \leqslant p_{W,B}(|w - v|)$ dla każdego $v \in V$. Zatem z faktu, że $w \in V_1$ otrzymujemy $a = \inf\{p_{W,B}(|w-v|) : v \in V\} = 0$ dla każdego $w \in W$, co oznacza, że $(W, B) \in \mathcal{C}$. Ale $(V, S) \preccurlyeq (W, B)$ i $(V, S) \neq (W, B)$, co zaprzecza maksymalności (V, S) i kończy dowód. $\square$

Wniosek 2.8. *(Lipecki-Luxemburg-Schep). Jeżeli G jest majoryzującą podkratą kraty wektorowej E, to każdy homomorfizm kratowy z G do porządkowo zupełnej kraty wektorowej posiada rozszerzenie do homomorfizmu kratowego określonego na całej kracie E.*

Dowód. Na mocy twierdzenia 2.7, $\Theta(T)$ jest niepusty i posiada punkt ekstremalny S. Z wniosku 2.6 wynika więc, że S jest również homomorfizmem kratowym. $\square$

3. Widmo homomorfizmu kratowego

Oznaczenie:

$$\Gamma := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}.$$

Definicja 3.1. Niech $A \subset \mathbb{C}$. Liczba zespolona $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$ jest **punktem cyklicznym** zbioru A, jeżeli $|\alpha|e^{ik\theta} \in A$ $\forall$ $k \in \mathbb{Z}$. Zbiór A jest **cykliczny** jeżeli każdy jego punkt jest cykliczny.

Obserwacja 3.2. Każda podgrupa Γ jest zbiorem cyklicznym.

Twierdzenie 3.3. *(Schaefer) Niech E będzie M-przestrzenią z jedynką e, a $T : E \to E$ operatorem Markowa. Wtedy zbiór wartości własnych*

$$\Lambda := \{\lambda \in \Gamma : \exists\ z \in E_{\mathbb{C}} : |z| = e,\ T_{\mathbb{C}}z = \lambda z\}$$

jest podgrupą Γ (a więc zbiorem cyklicznym).

Dowód. Ponieważ $Te = e$, więc $1 \in \Lambda$. Na mocy twierdzenia 3.12 (str. 30), możemy założyć, że $E = C(\Omega)$ i $E_{\mathbb{C}} = C_{\mathbb{C}}(\Omega)$ dla pewnej zwartej przestrzeni Ω, przy czym jedynka w E jest identyfikowana z funkcją identycznie równą jeden na Ω. Ponadto uzyskujemy identyfikację $E^* = M(\Omega)$ i $E^*_{\mathbb{C}} = M(\Omega) + iM(\Omega)$, gdzie $M(\Omega)$ oznacza L-przestrzeń wszystkich regularnych, skończonych, rzeczywistych miar na Ω. Ponieważ T jest operatorem Markowa, więc T^* odwzorowuje regularne, borelowskie miary probabilistyczne w regularne, borelowskie miary probabilistyczne.

Ustalmy $\omega \in \Omega$ i niech $\mu_\omega = T^*\delta_\omega$. Załóżmy istnienie $z \in C_{\mathbb{C}}(\Omega)$ i $\lambda \in \Gamma$ takich, że $|z| = \mathbf{1}$ i $T_{\mathbb{C}}z = \lambda z$. Wtedy

$$\lambda z(\omega) = (T_{\mathbb{C}}z)(\omega) = \delta_\omega(T_{\mathbb{C}}z) = (T^*\delta_\omega)(z) = \mu_\omega(z) = \int_\Omega z\, d\mu,$$

skąd $\int_\Omega \lambda^{-1}(z(\omega))^{-1} z\, d\mu = 1$. Ponieważ $|\lambda^{-1}(z(\omega))^{-1}z(t)| = 1$ dla $t \in \Omega$, więc $\lambda^{-1}(z(\omega))^{-1}z(t) = 1\ \forall t \in \operatorname{supp}\mu_\omega$, czyli $z(t) = \lambda z(\omega)\ \forall t \in \operatorname{supp}\mu_\omega$.

Analogicznie, jeżeli $\lambda_1 \in \Gamma$ spełnia równanie $T_{\mathbb{C}}z_1 = \lambda_1 z_1$ dla pewnego $z_1 \in C_{\mathbb{C}}(\Omega)$ takiego, że $|z_1| = \mathbf{1}$, to $z_1(t) = \lambda_1 z_1(\omega)\ \forall t \in \operatorname{supp}\mu_\omega$, skąd $z(t)z_1(t) = \lambda\lambda_1 z(\omega)z_1(\omega)$ $\forall t \in \operatorname{supp}\mu_\omega$. Zatem

$$\lambda\lambda_1 z(\omega)z_1(\omega) = \int_\Omega zz_1\, d\mu_\omega = \mu_\omega(zz_1) = (T^*\delta_\omega)(zz_1) = \delta_\omega(T_{\mathbb{C}}(zz_1)) = (T_{\mathbb{C}}(zz_1))(\omega).$$

Stąd $T_{\mathbb{C}}(zz_1) = \lambda\lambda_1 zz_1$, czyli $\lambda\lambda_1 \in \Lambda$. Podobnie $\bar{\lambda}\bar{z}(\omega) = \int_\Omega \bar{z}\, d\mu_\omega = (T_{\mathbb{C}}\bar{z})(\omega)$, co oznacza, że $\bar{\lambda} \in \Omega$, gdy $\lambda \in \Omega$. A więc Λ jest podgrupą Γ. □

Wniosek 3.4. *Niech E będzie kratą wektorową, a $T : E \to E$ operatorem dodatnim posiadającym dodatni wektor własny u odpowiadający wartości własnej $r > 0$ tzn. $Tu = ru$. Jeżeli T posiada inną wartość własną postaci $\lambda = re^{i\theta}$ odpowiadającą wektorowi własnemu $z \in E_{\mathbb{C}}$ i spełniającemu równość $|z| = u$, to λ jest punktem cyklicznym widma punktowego $\sigma_p(T)$ operatora T.*

Dowód. Niech $S = \frac{1}{r}T$, wtedy $Su = u$. Zatem $S : E_u \to E_u$ jest operatorem Markowa i $z \in (E_u)_{\mathbb{C}}$. Ponieważ $Sz = e^{i\theta}z$ i $|z| = u$, więc z twierdzenia 3.3 wynika, że $e^{ik\theta}$ jest wartością własną S dla $k \in \mathbb{Z}$. Zatem $\lambda = re^{i\theta}$ jest punktem cyklicznym widma punktowego operatora T. □

Wniosek 3.5. *Widmo punktowe homomorfizmu kratowego jest cykliczne.*

Dowód. Niech $T : E \to E$ będzie homomorfizmem kratowym kraty Banacha E i niech $Tz = \lambda z$ dla pewnego niezerowego $z \in E_{\mathbb{C}}$ i pewnej niezerowej $\lambda = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$. Wtedy z twierdzenia 1.9 otrzymujemy

$$T|z| = |Tz| = |\lambda z| = |\lambda|\,|z| = r|z|.$$

Zatem, na mocy poprzedniego wniosku, $re^{ik\theta} \in \sigma_p(T)\ \forall\ k \in \mathbb{Z}$. □

Twierdzenie 3.6. *Niech X będzie przestrzenią Banacha, $T : X \to X$ operatorem ograniczonym, a $\hat{X} := l_\infty(X)/c_0(X)$. wtedy $\hat{T} : \hat{X} \to \hat{X}$ zdefiniowany następująco*

$$\hat{T}([(x_1, x_2, ...)]) := [(Tx_1, Tx_2, ...)]$$

jest operatorem ograniczony oraz $\|T\| = \|\hat{T}\|$ oraz $\sigma_a(T) = \sigma_a(\hat{T}) = \sigma_p(\hat{T})$. Gdy X jest kratą Banacha to $\hat{X}$ również, gdy T jest homomorfizmem kratowym, to $\hat{T}$ również.

Dowód. - Ćwiczenie. $\square$

Twierdzenie 3.7. *(Scheffold) Widmo homomorfizmu kratowego $T : E \to E$, gdzie E jest kratą Banacha, jest cykliczne.*

Dowód. Na mocy twierdzenia 3.6 mamy równość $\sigma_a(T) = \sigma_a(\hat{T})$, a cykliczność $\sigma_a(\hat{T})$ wynika z wniosku 3.5. Zatem wystarczy dowieść, że gdy $\lambda = |\lambda|e^{i\theta} \in \sigma_r(T)$, to $|\lambda|e^{ik\theta} \in \sigma(T)$ dla $k \in \mathbb{Z}$.

Niech $\lambda = |\lambda|e^{i\theta} \in \sigma_r(T)$. Wtedy $\lambda \in \sigma_p(T^*)$ (ćwiczenie). Istnieje więc wektor $z^* \in E^*_{\mathbb{C}} = E^* + iE^*$ spełniający równość $T^*z^* = \lambda z^*$. Stąd

$$|\lambda|\,|z^*| = |\lambda z^*| = |T^*z^*| \leqslant T^*|z^*|.$$

Jeżeli ustalimy $\lambda_0 > r(T)$, to znajdziemy $\phi \in E^*$, $\phi > 0$ takie, że Ideał główny E^*_ϕ generowany przez ϕ w E^* jest niezmienniczy względem T^* oraz $|z^*| \in E^*_\phi$ i $|\lambda|\phi \leqslant T^*\phi \leqslant \lambda_0\phi$ (ćwiczenie). Z twierdzenia 5.2 (str. 35) wynika istnienie homomorfizmu $T_\phi : E(\phi) \to E(\phi)$ takiego, że następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{array}{ccc} E^*_\phi & \xrightarrow{\Phi} & E(\phi)^* \\ {\scriptstyle T^*}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle T^*_\phi} \\ E^*_\phi & \xrightarrow{\Phi} & E(\phi)^* \end{array} \tag{3.1}$$

Z konstrukcji przestrzeni $E(\phi)$ i z faktu, że T jest homomorfizmem kratowym otrzymujemy dla każdego $x \in E$:

$$|\lambda| \cdot \|[x]\|_\phi = |\lambda|\phi(|x|) \leqslant T^*\phi(|x|) = \phi(T|x|) = \phi(|Tx|) = \|[Tx]\|_\phi = \|T_\phi([x])\|_\phi.$$

Stąd dla każdego $z \in E(\phi)$ mamy nierówność

$$|\lambda| \cdot \|z\| \leqslant \|T_\phi(z)\|_\phi, \tag{3.2}$$

co oznacza, że T_ϕ jest operatorem ograniczonym z dołu.

Zauważmy, że jeżeli $0 \notin \sigma(T_\phi)$, to T_ϕ jest suriektywnym izomorfizmem kratowym i ponieważ Φ jest izometrią kratową, to $T^* : E^*_\phi \to E^*_\phi$ jest również izomorfizmem kratowym. Ponieważ $\lambda \in \sigma_p(T^*|_{E^*_\phi})$, więc z wniosku 3.5 dla $k \in \mathbb{Z}$ otrzymujemy

$$|\lambda|e^{ik\theta} \in \sigma_p(T^*|_{E^*_\phi}) \subset \sigma_p(T^*) \subset \sigma(T^*) = \sigma(T),$$

co oznacza, że λ jest punktem cyklicznym $\sigma(T)$.

Załóżmy teraz, że $0 \in \sigma(T_\phi)$. Z nierówności (3.2) otrzymujemy inkluzję (ćwiczenie)

$$\{\eta \in \mathbb{C} : |\eta| < |\lambda|\} \subset \sigma_r(T_\phi),$$

a z (3.1) równość $\sigma_p(T^*) = \sigma_p(T^*|_{E^*_\phi})$, skąd

$$\{\eta \in \mathbb{C} : |\eta| < |\lambda|\} \subset \sigma_r(T_\phi) \subset \sigma_p(T^*) = \sigma_p(T^*|_{E^*_\phi}) \subset \sigma_p(T^*) \subset \sigma(T^*) = \sigma(T).$$

A zatem koło o środku w zerze i promieniu $|\lambda|$ jest zawarte w $\sigma(T)$, co oznacza, że λ jest automatycznie punktem cyklicznym $\sigma(T)$, co kończy dowód twierdzenia. $\square$

Wniosek 3.8. *Widmo zachowującego przedziały operatora dodatniego jest cykliczne.*

Dowód. Jeżeli $T : E \to E$ jest operatorem zachowującym przedziały, to $T^* : E^* \to E^*$ jest homomorfizmem kratowym. Zatem, na mocy twierdzenia 3.7, zbiór $\sigma(T) = \sigma(T^*)$ jest cykliczny. $\square$

Bibliografia

[1] Y. A. Abramovich, C. D. Aliprantis, *An Invitation to Operator Theory*, American Mathematical Society – Providence, Rhode Island, 2002.

[2] ——, *Problems in Operator Theory*, American Mathematical Society – Providence, Rhode Island, 2002.

[3] H. H. Schaefer, *Banach Lattices and Positive Operators*, Springer Verlag, Berlin and New York, 1974.