MATEMATYKA DLA I ROKU BIOCHEMII I BIOTECHNOLOGII

PAWEŁ ZAPAŁOWSKI

Spis treści

Literatura 2
1. Pojęcia wstępne 3
1.1. Kwantyfikatory 3
1.2. Zbiory. Działania na zbiorach 3
2. Elementy algebry liniowej 5
2.1. Macierze. Działania na macierzach 5
2.2. Wyznaczniki. Macierze odwrotne 6
2.3. Układy równań liniowych 10
3. Funkcje rzeczywiste zmiennej rzeczywistej 15
3.1. Funkcje. Pojęcia wstępne 15
3.2. Wielomiany. Funkcje wymierne 18
3.3. Funkcje trygonometryczne 21
3.4. Funkcja potęgowa. Funkcja wykładnicza 24
3.5. Funkcja logarytmiczna 26
3.6. Złożenie funkcji i funkcje i odwrotne 28
3.7. Funkcje cyklometryczne 30
3.8. Ciągi. Granica ciągu 31
3.9. Liczba e 35
4. Elementy rachunku różniczkowego funkcji jednej zmiennej 37
4.1. Granica funkcji. Ciągłość funkcji 37
4.2. Granice niewłaściwe. Granice w nieskończoności. Asymptoty funkcji 39
4.3. Pochodna funkcji 44
4.4. Przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji 47
4.5. Przedziały wklęsłości, wypukłości i punkty przegięcia funkcji 50
4.6. Reguła de l'Hospitala 52
4.7. Badanie przebiegu zmienności funkcji 54
5. Elementy teorii całki Riemanna funkcji jednej zmiennej 57
5.1. Miara Jordana 57
5.2. Całka Riemanna funkcji jednej zmiennej 58
5.3. Metody obliczania całki Riemanna funkcji jednej zmiennej 60
5.4. Zastosowania całki Riemanna funkcji jednej zmiennej 65
6. Funkcje dwóch zmiennych 68
6.1. Zbiory na płaszczyźnie i w przestrzeni 68
6.2. Pochodne cząstkowe 69
6.3. Ekstrema lokalne i globalne funkcji dwóch zmiennych 70
7. Elementy teorii całki Riemanna funkcji dwóch zmiennych 75
7.1. Całka Riemanna funkcji dwóch zmiennych 75
7.2. Metody obliczania całki Riemanna funkcji dwóch zmiennych 76
7.3. Zastosowanie całek Riemanna funkcji dwóch zmiennych 79

Date: 15 stycznia 2025.

Literatura

[1] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa, 1995.
[2] W. Krysicki, L. Włodarski, *Analiza Matematyczna w zadaniach*, PWN, Warszawa, 1996.
[3] F. Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa, 1978.
[4] A. Mostowski, M. Stark, *Elementy algebry wyższej*, PWN, Warszawa, 1965.

Zaliczanie ćwiczeń

W semestrze jest 30 godzin ćwiczeń. Limit nieobecności to 12 godzin. W przypadku przekroczenia tego limitu student otrzymuje ocenę NZAL i nie jest dopuszczony do egzaminów.

Pozostałe kryteria zaliczenia ćwiczeń ustala prowadzący ćwiczenia.

Egzamin

Warunkiem dopuszczenia do egzaminu jest zaliczenie ćwiczeń na ocenę 3,0 lub wyższą.

Terminy egzaminów

I termin 29-01-2025 (środa), godz. 9–11, s. P0.1 + P0.2 + P0.3,
II termin 19-02-2025 (środa), godz. 9–11, s. P0.1 + P0.2 + P0.3.

Egzamin będzie składał się z pięciu zadań i będzie oceniany w skali 0–50 punktów. Student otrzymuje ocenę końcową wg następującej tabeli

Punkty	Ocena
0–25	2,0
26–30	3,0
31–35	3,5
36–40	4,0
41–45	4,5
46–50	5,0

II termin egzaminu przeznaczony jest dla studentów dopuszczonych do egzaminu, którzy nie zdali egzaminu w I terminie lub z jakiegoś powodu do niego nie przystąpili w I terminie.

Wykład

Plik pdf z materiałem wyłożonym na wykładzie, aktualizowany po każdym wykładzie, będzie dostępny (w dniu wykładu lub dzień po wykładzie) na stronie

`http://www2.im.uj.edu.pl/PawelZapalowski/`

1. Pojęcia wstępne

1.1. **Kwantyfikatory.** Zwrot „dla każdego x" nazywamy *kwantyfikatorem dużym* i oznaczamy $\forall_x$ (łac. *affirmo*=potwierdzać). Zwrot „istnieje takie x, że" nazywamy *kwantyfikatorem małym* i oznaczamy $\exists_x$ (łac. *existo*=istnieć).

1.2. **Zbiory. Działania na zbiorach.** Zbiory oznaczamy najczęściej dużymi literami, np. A, B, C, zaś elementy zbioru — małymi literami. Jeśli a jest elementem zbioru A, piszemy

$$a \in A.$$

Jeśli a nie jest elementem zbioru A, piszemy

$$a \notin A.$$

Zbiór nie posiadający żadnego elementu nazywamy *zbiorem pustym* i oznaczamy $\varnothing$. Mówimy, że zbiór A *jest podzbiorem* zbioru B (lub zbiór B *zawiera* zbiór A), co zapisujemy

$$A \subset B,$$

jeśli każdy element zbioru A jest elementem zbioru B. Relacja zawierania $\subset$ nazywana jest też *inkluzją*. Zauważmy, że $A = B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \subset B$ i $B \subset A$. Zapis $A \subsetneq B$ oznacza, że $A \subset B$ i $A \neq B$.

Definicja 1.2.1. Dla dowolnych zbiorów A, B definiujemy ich *sumę mnogościową*

$$A \cup B := \{x : x \in A \text{ lub } x \in B\},$$

iloczyn mnogościowy lub *część wspólną*

$$A \cap B := \{x : x \in A \text{ i } x \in B\}$$

oraz *różnicę mnogościową*

$$A \setminus B := \{x : x \in A \text{ i } x \notin B\}.$$

Będziemy stosować następujące oznaczenia

- $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ — zbiór liczb naturalnych;
- $\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ — zbiór liczb całkowitych;
- $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$ — zbiór liczb wymiernych;
- $\mathbb{R}$ — zbiór liczb rzeczywistych. Formalna definicja wykracza poza materiał tego kursu. Pierwsze aksjomatyczne definicje $\mathbb{R}$ pojawiły się w XIX wieku (Méray[1] (1869), Cantor[2] (1871), Dedekind[3] (1872)).

Dla dowolnego zbioru $A \subset \mathbb{R}$ niech $A_+ := \{x \in A : x \geqslant 0\}$ oraz $A_* := \{x \in A : x \neq 0\}$.

Uwaga 1.2.2. Pomiędzy powyższymi zbiorami zachodzą naturalne inkluzje

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}.$$

Ponadto, np. $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Definicja 1.2.3. Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, definiujemy *przedziały*

- *domknięty* $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$,
- *otwarty* $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$,
- *jednostronnie otwarte* $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$, $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$,
- *nieograniczone* $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$, $(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$ i $(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$.

Przykład 1.2.4. Niech $A = (0, 2]$, $B = [-1, 2)$. Wtedy $A \cup B = [-1, 2]$, $A \cap B = (0, 2)$, $A \setminus B = \{2\}$ i $B \setminus A = [-1, 0]$.

Zadanie 1.2.5. Wyznaczyć $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$, jeśli

(1) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$,
(2) $A = \mathbb{Q}$, $B = \varnothing$,
(3) $A = \mathbb{Z}$, $B = [0, 1]$,
(4) $A = (-1, 1)$, $B = \{-1, 1\}$,

---

[1] Hugues Charles Robert Méray (ur. 12 listopada 1835 w Chalon-sur-Saône, Saône-et-Loire, zm. 2 lutego 1911 w Dijon) — matematyk francuski.

[2] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (ur. 3 marca 1845 w Sankt Petersburgu, zm. 6 stycznia 1918 w sanatorium w Halle) — matematyk niemiecki.

[3] Julius Wilhelm Richard Dedekind (ur. 6 października 1831 w Brunszwiku, zm. 12 lutego 1916) — matematyk niemiecki.

(5) $A = \{0\}$, $B = (0, \infty)$.
(6) $A = [1, 4)$, $B = (2, 6]$.

2. Elementy algebry liniowej

2.1. **Macierze. Działania na macierzach.** Jednym z podstawowych pojęć algebry są macierze.

Definicja 2.1.1. *Macierzą wymiaru* $m \times n$ nazywamy prostokątną tablicę liczb $a_{j,k} \in \mathbb{R}$ ułożonych w m wierszy i n kolumn.

$$A = [a_{j,k}] = [a_{j,k}]_{\substack{j=1,\dots,m \\ k=1,\dots,n}} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Zbiór macierzy wymiaru $m \times n$ oznaczamy przez $\mathbb{R}^{m\times n}$. Liczbę $a_{j,k}$ nazywamy *elementem macierzy A* stojącym w wierszu j i kolumnie k. Jeśli $m = 1$ (odp. $n = 1$) to macierz A nazywamy *wierszową* (odp. *kolumnową*). Jeśli $m = n$, to macierz nazywamy *kwadratową*, a n — jej *stopniem*. Macierz złożoną z samych zer oznaczamy przez 0 i nazywamy macierzą *zerową*. Macierz kwadratową złożoną z jedynek na głównej przekątnej i samych zer poza nią

$$\mathbb{I}_n := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

nazywamy *macierzą jednostkową stopnia n*. Mówimy, że macierze $A = [a_{j,k}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ i $B = [b_{j,k}] \in \mathbb{R}^{p\times q}$ są *równe* (co zapisujemy $A = B$), jeśli $m = p$, $n = q$ i $a_{j,k} = b_{j,k}$ dla $j = 1,\dots,m$, $k = 1,\dots,n$.

Definicja 2.1.2. Jeśli $t \in \mathbb{R}$, $A = [a_{j,k}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$, to określamy *iloczyn tA liczby t przez macierz A* wzorem

$$tA := [ta_{j,k}] \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

Przykład 2.1.3.

$$-2\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2)\cdot 1 & (-2)\cdot(-2) & (-2)\cdot(-1) \\ (-2)\cdot 3 & (-2)\cdot(-6) & (-2)\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -6 & 12 & -4 \end{bmatrix}.$$

Definicja 2.1.4. Jeśli $A = [a_{j,k}], B = [b_{j,k}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$, to określamy *sumę* $A+B$ *macierzy A i B* wzorem

$$A + B := [a_{j,k} + b_{j,k}] \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

zaś *różnicę* $A - B$ *macierzy A i B* wzorem $A - B := A + (-1)B$.

Przykład 2.1.5.

$$3\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 0 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -8 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & -4 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}.$$

Uwaga 2.1.6. Jeśli $A, 0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, to $A + 0 = 0 + A = A$ (macierz zerowa jest elementem neutralnym dodawania macierzy).

Zadanie 2.1.7. Obliczyć

$$-2\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right), \quad -\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Definicja 2.1.8. Jeśli $A = [a_{j,k}] \in \mathbb{R}^{m\times \ell}$, $B = [b_{j,k}] \in \mathbb{R}^{\ell\times n}$, to określamy *iloczyn AB macierzy A i B* wzorem

$$AB = [c_{j,k}] \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad \text{gdzie} \quad c_{j,k} := \sum_{i=1}^{\ell} a_{j,i}b_{i,k} := a_{j,1}b_{1,k} + a_{j,2}b_{2,k} + \dots + a_{j,\ell}b_{\ell,k}.$$

Przykład 2.1.9.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 2 & 1\cdot 3 + 2\cdot 0 & 1\cdot 4 + 2\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 0\cdot 2 & 0\cdot 3 + 0\cdot 0 & 0\cdot 4 + 0\cdot 1 \\ 2\cdot 1 + 1\cdot 2 & 2\cdot 3 + 1\cdot 0 & 2\cdot 4 + 1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

Czasem wygodniej jest zapisywać mnożenie macierzy następująco

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix}1&3&4\\2&0&1\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}1&2\\0&0\\2&1\end{bmatrix} & \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{cc} & \begin{bmatrix}1&3&4\\2&0&1\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}1&2\\0&0\\2&1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}5&3&6\\0&0&0\\4&6&9\end{bmatrix} \end{array}.$$

Dzięki temu od razu wiadomo, jakiego wymiaru będzie iloczyn obu macierzy, a wyraz iloczynu jest „sumą iloczynów po współrzędnych" wiersza i kolumny, na przecięciu których stoi dany wyraz. Np. wyraz $c_{1,1} = 5$, stojący w pierwszym wierszu i pierwszej kolumnie iloczynu, który stoi na przecięciu pierwszego wiersza pierwszej macierzy i pierwszej kolumny drugiej macierzy, obliczamy wg powyższego wzoru

$$c_{1,1} = a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 1 + 4 = 5.$$

Uwaga 2.1.10. Jeśli $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, to $A\mathbb{I}_n = \mathbb{I}_m A = A$ (macierz jednostkowa jest elementem neutralnym mnożenia macierzy).

Zadanie 2.1.11. (1) Obliczyć

$$\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&0&2\\2&-1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&1&-3\\0&-4&2\\2&0&1\end{bmatrix}, \quad \left(\begin{bmatrix}1&-2&1\\2&-1&4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}6&1&-3\\0&-4&2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3&4\end{bmatrix}, \quad -\begin{bmatrix}1&2&3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\6\\7\\8\end{bmatrix}.$$

(2) Znaleźć dwie macierze $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ takie, że $AB \neq BA$.
(3) Znaleźć niezerowe macierze $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ takie, że $AB = 0$. Czy możliwe jest znalezienie niezerowej macierzy $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ takiej, że $A^2 = 0$?

Definicja 2.1.12. Jeśli $A = [a_{j,k}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$, to określamy *macierz transponowaną* A^T *macierzy* A wzorem

$$A^T := [b_{j,k}] \in \mathbb{R}^{n\times m}, \quad \text{gdzie} \quad b_{j,k} := a_{k,j},\ j = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, m.$$

Uwaga 2.1.13. Zauważmy, że operacja transponowania polega na zamianie wierszy na kolumny, zaś kolumn na wiersze, przy czym kolejność wierszy i kolumn jest zachowana.

Przykład 2.1.14.

$$\begin{bmatrix}1&-2\\0&0\\2&-1\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}1&0&2\\-2&0&-1\end{bmatrix}.$$

Zadanie 2.1.15. (1) Obliczyć

$$-2\left(\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&0&2\\2&-1&4\end{bmatrix}^T + 4\begin{bmatrix}6&1&-3\\0&-4&2\\2&0&1\end{bmatrix}^T\right), \quad \left(-\begin{bmatrix}1&-2\\-1&4\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}1&-3\\04&2\end{bmatrix}\right)^T.$$

(2) Niech $A = \begin{bmatrix}1&2&3&4&5\end{bmatrix}$. Obliczyć AA^T, A^TA i $(A^TA)^T$.
(3) Wyznaczyć wszystkie macierze $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ takie, że $A = A^T$.
(4) Wyznaczyć wszystkie macierze $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ takie, że $A = -A^T$.

2.2. **Wyznaczniki. Macierze odwrotne.** Każdej macierzy kwadratowej A przyporządkowujemy liczbę zwaną *wyznacznikiem*, oznaczaną $\det A$ lub $|A|$. Poniżej przedstawimy indukcyjną definicję tego pojęcia.

Definicja 2.2.1. Niech $A = [a_{j,k}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$, gdzie $n \geqslant 2$. *Podmacierzą odpowiadającą elementowi* $a_{j,k}$ nazywamy macierz powstałą z A przez usunięcie wiersza j i kolumny k. Oznaczamy ją symbolem $A_{j,k}$. Zauważmy, że $A_{j,k} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$.

Definicja 2.2.2 (Indukcyjna definicja wyznacznika)**.** Niech $A = [a_{j,k}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Jeśli $A = [a] \in \mathbb{R}^{1\times 1}$, to przyjmujemy $\det A := a$. Następnie, począwszy od $n = 2$, dla kolejnych liczb naturalnych powtarzamy następujące kroki

(I) definiujemy *dopełnienie algebraiczne* $d_{j,k}$ *elementu* $a_{j,k}$ jako

$$d_{j,k} := (-1)^{j+k} \det A_{j,k};$$

(II) dowodzimy, że suma

$$a_{j,1}d_{j,1} + a_{j,2}d_{j,2} + \cdots + a_{j,n}d_{j,n}$$

nie zależy od wyboru $j = 1, \ldots, n$;

(III) definiujemy *wyznacznik* macierzy A jako

$$\det A := a_{j,1}d_{j,1} + a_{j,2}d_{j,2} + \cdots + a_{j,n}d_{j,n},$$

gdzie $j \in \mathbb{N}$ jest dowolną liczbą, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Uwaga 2.2.3. (a) W praktyce, dla $n = 2$ powyższa definicja sprowadza się do następującego wzoru

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb,$$

a dla $n = 3$ otrzymujemy wzór

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + dhc + gbf - gec - ahf - dbi,$$

zwany *regułą Sarrusa*[4]. Wzór ten łatwo zapamiętać dzięki poniższemu schematowi (dopisujemy pod macierzą jej dwa piersze wiersze i bierzemy trzy iloczyny "głównych" przekątnych z plusem oraz trzy iloczyny "pozostałych" przekątnych z minusem)

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{array}$$

(b) Wyznacznik macierzy kwadratowej zawierającej wiersz lub kolumnę złożoną z samych zer równy jest zero.

(c) Wyznacznik macierzy kwadratowej zawierającej dwa identyczne wiersze lub dwie identyczne kolumny równy jest zero.

Przykład 2.2.4. Stosując powyższe wzory otrzymujemy

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 2 + 3 = 5,$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} &= (-1) \cdot (-4) \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 0 \cdot (-2) \\ &\quad - 3 \cdot (-4) \cdot 3 - 1 \cdot (-2) \cdot (-1) - (-2) \cdot 2 \cdot 0 \\ &= -8 + 6 + 0 + 36 - 2 - 0 = 32. \end{aligned}$$

Zadanie 2.2.5. Obliczyć

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \sin x & \cos \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Definicja 2.2.6. *Minorem stopnia* k macierzy $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, gdzie $k \leqslant \min\{m, n\}$, nazywamy wyznacznik macierzy kwadratowej stopnia k otrzymanej z macierzy A przez wykreślenie $m-k$ wierszy i $n-k$ kolumn.

Definicja 2.2.7. Największy stopień niezerowego minora niezerowej macierzy $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ nazywamy *rzędem* macierzy A i oznaczamy $R(A)$. Ponadto, przyjmujemy $R(0) := 0$.

[4]Pierre Frédéric Sarrus (ur. 10 marca 1798 w Saint-Affrique, zm. 20 XI 1861) — matematyk francuski.

Przykład 2.2.8. Obliczymy rzędy macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -6 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ macierze A i B nie są zerowe, więc ich rzędy są dodatnie. Z uwagi na wymiar macierzy A wiemy, że $R(A) \leqslant 2$. Zaczynamy zatem od obliczania minorów stopnia 2 macierzy A (takich minorów jest trzy). Wprawdzie

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0,$$

ale dla minora podmacierzy powstałej z macierzy A poprzez usunięcie środkowej kolumny mamy

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 \neq 0,$$

zatem $R(A) = 2$.

W przypadku macierzy B wiemy, że $R(B) \leqslant 3$, zatem musimy zacząć od minora stopnia trzy (jest tylko jeden taki minor — $\det B$). Ponieważ

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 8 + 0 + 4 - 0 + 4 = 0,$$

zatem wiemy już, że $R(B) \neq 3$, czyli $R(B) \leqslant 2$. Przystępujemy do obliczania minorów stopnia 2 macierzy B (takich minorów jest dziewięć). Już dla pierwszego minora, powstałego z macierzy B poprzez usunięcie trzeciego wiersza i trzeciej kolumny, mamy

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 4 = 4 \neq 0,$$

zatem $R(B) = 2$.

Zadanie 2.2.9. (1) Niech $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $B \in \mathbb{R}^{3\times 4}$, $C \in \mathbb{R}^{5\times 5}$. Ile minorów stopnia $n \in \{1, 2, \dots, 5\}$ mają macierze A, B i C?

(2) Wyznaczyć rzędy macierzy

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definicja 2.2.10. Niech $A = [a_{j,k}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$, gdzie $n \geqslant 2$. Macierz $A^D := [d_{j,k}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$, gdzie $d_{j,k}$ jest dopełnieniem algebraicznym elementu $a_{j,k}$ nazywamy *macierzą dopełnień algebraicznych* macierzy A.

Przykład 2.2.11. W przypadku $n = 2$ mamy

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^D = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}|4| & (-1)^{1+2}|3| \\ (-1)^{2+1}|2| & (-1)^{2+2}|1| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(w powyższym wzorze $|\,|$ oznacza wyznacznik, a nie wartość bezwzględną; warto zauważyć, że czynniki $(-1)^{j+k}$ występujące w macierzy dopełnień algebraicznych tworzą szachownicę znaków $+$ i $-$, przy czym znakiem w lewym górnym rogu jest $+$), zaś dla $n = 3$ otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}^D = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -14 \\ 4 & -3 & 6 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 2.2.12. (1) Obliczyć
$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}^D, \quad \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 4\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}^D.$$
(2) Wyznaczyć wszystkie macierze $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ takie, że $A = A^D$.

Definicja 2.2.13. Niech $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Jeśli istnieje macierz $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ taka, że
$$BA = AB = \mathbb{I}_n,$$
to macierz A nazywamy *odwracalną*, zaś macierz B nazywamy *macierzą odwrotną* do A i oznaczamy $A^{-1} := B$.

Uwaga 2.2.14. (a) Nie każda macierz kwadratowa jest odwracalna (np. $A = 0$ nie jest odwracalna).
(b) Jeśli macierz odwrotna istnieje, to jest jedyna.

Twierdzenie 2.2.15. *Niech $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Macierz A jest odwracalna wtedy i tylko wtedy gdy* $\det A \neq 0$. *Ponadto, jeśli A^{-1} istnieje, to*
$$A^{-1} = \begin{cases} \frac{1}{\det A}\mathbb{I}_1, & gdy\ n = 1\\ \frac{1}{\det A}(A^D)^T & gdy\ n \geq 2\end{cases}.$$

Przykład 2.2.16. Sprawdzić, czy macierze
$$A = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ -2 & 2 & 0\\ 3 & 4 & 0\end{bmatrix}$$
są odwracalne, a jeśli tak, to wyznaczyć macierze do nich odwrotne.

Ponieważ
$$\det A = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = -2 \neq 0,$$
więc macierz A jest odwracalna. Ponadto, dzięki Przykładowi 2.2.11 mamy
$$(A^D)^T = \begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix},$$
skąd
$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

Ponieważ
$$\det B = 0 - 8 + 0 - 6 - 0 - 0 = -14 \neq 0,$$
więc także macierz B jest odwracalna. Ponadto, dzięki Przykładowi 2.2.11 mamy
$$(B^D)^T = \begin{bmatrix}0 & 4 & -2\\ 0 & -3 & -2\\ -14 & 6 & 4\end{bmatrix},$$
skąd
$$B^{-1} = -\frac{1}{14}\begin{bmatrix}0 & 4 & -2\\ 0 & -3 & -2\\ -14 & 6 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7}\\ 0 & \frac{3}{14} & \frac{1}{7}\\ 1 & -\frac{3}{7} & -\frac{2}{7}\end{bmatrix}.$$

Zadanie 2.2.17. (1) Czy macierze
$$\begin{bmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}\cos x & 0 & \sin x\\ -\sin x & 0 & \cos x\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}$$
są odwracalne? Jeśli tak, wyznaczyć ich macierze odwrotne.
(2) Wyznaczyć
$$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 4\end{bmatrix}^{-1}, \quad \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 4\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}^{-1}.$$
(3) Wyznaczyć wszystkie odwracalne macierze $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ takie, że $A = A^D$.

2.3. **Układy równań liniowych.** Pokażemy teraz, jak pojęcia macierzy, wyznacznika i rzędu wykorzystać do rozwiązywania układów równań liniowych.

Definicja 2.3.1. *Układem m równań liniowych* o n niewiadomych $x_1, \ldots, x_n$ nazywamy

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}. \tag{2.1}$$

Dla powyższego układu definiujemy

$$A := \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} \end{bmatrix}, \quad U := \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} & b_m \end{bmatrix}.$$

Macierz A nazywamy *macierzą główną*, zaś U nazywamy *macierzą uzupełnioną* układu (2.1).

Rozwiązaniem układu (2.1) nazywamy każdy układ n liczb $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ spełniających równania (2.1).

Układ równań (2.1) nazywamy

(a) *sprzecznym*, jeśli nie ma on rozwiązań,
(b) *oznaczonym*, jeśli ma on dokładnie jedno rozwiązanie,
(c) *nieoznaczonym*, jeśli ma on nieskończenie wiele rozwiązań.

Uwaga 2.3.2. Każdy układ postaci (2.1) jest sprzeczny, oznaczony lub nieoznaczony. Ponadto,

$$R(A) \leqslant \min\{R(U), n\} \leqslant \min\{m, n+1\}.$$

Twierdzenie 2.3.3 (Kronecker[5]–Capelli[6])**.** *Układ (2.1) jest*

(a) sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy $R(A) < R(U)$;
(b) oznaczony wtedy i tylko wtedy, gdy $R(A) = R(U) = n$;
(c) nieoznaczony wtedy i tylko wtedy, gdy $R(A) = R(U) < n$.

Uwaga 2.3.4. Jeśli układ (2.1) nie jest sprzeczny, to istnieje liczba $k \in \mathbb{Z}_+$ taka, że $k = R(A) = R(U)$. Ponieważ $k \leqslant \min\{m, n\}$, więc

(i) pomijając równania, których współczynniki nie były wykorzystane w obliczaniu rzędów macierzy A i U,
(ii) traktując zmienne, których współczynniki nie były wykorzystane w obliczaniu rzędów macierzy A i U jako parametry

otrzymujemy, na mocy Twierdzenia Kroneckera–Capellego, oznaczony układ k równań liniowych z k zmiennymi.

Twierdzenie 2.3.5 (Wzory Cramera[7])**.** *Jeśli $R(A) = R(U) = n = m$, to jedynym rozwiązaniem układu (2.1) są liczby*

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

gdzie A_j oznacza macierz powstałą z macierzy A przez zastąpienie w niej kolumny j przez kolumnę wyrazów wolnych (tj. przez kolumnę $n+1$ macierzy U).

Przykład 2.3.6. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - z = -3 \\ x - y + z = 0 \end{cases}. \tag{2.2}$$

W tym wypadku mamy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

[5]Leopold Kronecker (ur. 7 XII 1823 w Legnicy, zm. 29 XII 1891 w Berlinie) — niemiecki matematyk.
[6]Alfredo Capelli (ur. 5 VIII 1855 w Mediolanie, zm. 28 I 1910 w Neapolu) — włoski matematyk.
[7]Gabriel Cramer (ur. 31 VII 1704 w Genewie, zm. 4 I 1752 w Bagnols-sur-Cèze) — szwajcarski matematyk i fizyk.

Ponieważ

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$$

więc $R(A) = R(U) = 3$. Ponieważ jest to układ oznaczony i „kwadratowy" (tzn. liczba równań równa jest liczbie zmiennych), możemy stosować wzory Cramera. Łatwo sprawdzamy, że

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6, \ |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \ |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -6,$$

skąd wynika, że $x = -1$, $y = 0$, $z = 1$ jest jedynym rozwiązaniem układu (2.2).

Przykład 2.3.7. Rozstrzygnąć, dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ układ równań

$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ ax - y - 2z = 3 \\ 4ay + 2z = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

jest oznaczony, nieoznaczony, sprzeczny, a następnie rozwiązać układ (2.3) dla $a = 2$ oraz dla $a = 1$.

Zauważmy, że dla macierzy głównej układu A mamy

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a & -1 & -2 \\ 0 & 4a & 2 \end{vmatrix} = -2 - 4a^2 + 8a - 2a = -4a^2 + 6a - 2 = -2(2a-1)(a-1),$$

skąd $R(A) = 3$ dla $a \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}, 1\}$ oraz $R(A) = 2$ dla $a \in \{\frac{1}{2}, 1\}$, ponieważ lewy górny minor jest równy

$$|A'| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & -1 \end{vmatrix} = -1 - a \neq 0 \quad \text{dla } a \in \{\tfrac{1}{2}, 1\}.$$

W szczególności, dla macierzy uzupełnionej U mamy $R(U) = 3$ dla $a \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}, 1\}$. Dla $a = 1$ mamy $R(U) = 2$, ponieważ każdy z pozostałych trzech minorów stopnia 3 macierzy

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

jest zerowy

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dla $a = \frac{1}{2}$ mamy $R(U) = 3$, ponieważ usuwając z U pierwszą kolumnę otrzymamy minor

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -6 - 6 + 12 - 6 = -6.$$

Na mocy twierdzenia Kroneckera–Capellego układ (2.3) jest

(i) oznaczony dla $a \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}, 1\}$,
(ii) nieoznaczony dla $a = 1$,
(iii) sprzeczny dla $a = \frac{1}{2}$.

Dla $a = 2$ układ (2.3) jest oznaczony i ma postać

$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x - y - 2z = 3 \\ 8y + 2z = 0 \end{cases} , \tag{2.4}$$

którego macierz główna A ma wyznacznik równy $|A| = -6$ oraz

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 0 & 8 & 2 \end{vmatrix} = -6 - 24 + 48 - 6 = 12,$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 12 = -6,$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 48 - 24 = 24,$$

skąd jedynym rozwiązaniem układu (2.4) jest

$$\begin{cases} x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{12}{-6} = -2 \\ y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-6}{-6} = 1 \\ z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{24}{-6} = -4 \end{cases} .$$

Dla $a = 1$ układ (2.3) jest nieoznaczony i ma postać

$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ x - y - 2z = 3 \\ 4y + 2z = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Sprowadzamy go do układu oznaczonego usuwając ostatnie równanie i traktując zmienną z jako parametr (wynika to ze sposobu obliczenia powyżej rzędu macierzy A dla $a = 1$), tj.

$$\begin{cases} x + y = 3 + z \\ x - y = 3 + 2z. \end{cases} \tag{2.6}$$

Rozwiążemy układ (3.4) wzorami Cramera. Ponieważ

$$|A'| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2,$$

$$|A'_x| = \begin{vmatrix} 3+z & 1 \\ 3+2z & -1 \end{vmatrix} = -3 - z - 3 - 2z = -6 - 3z,$$

$$|A'_y| = \begin{vmatrix} 1 & 3+z \\ 1 & 3+2z \end{vmatrix} = 3 + 2z - 3 - z = z,$$

skąd rozwiązanie układu (3.4) ma postać

$$\begin{cases} x = \frac{|A'_x|}{|A'|} = \frac{-6-3z}{-2} = 3 + \frac{3}{2}z, \\ y = \frac{|A'_y|}{|A'|} = \frac{z}{-2} = -\frac{1}{2}z \end{cases} .$$

W konsekwencji, rozwiązaniem układu (4.1) jest każda trójka liczb postaci

$$\begin{cases} x == 3 + \frac{3}{2}z, \\ y = -\frac{1}{2}z, \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} .$$

Zadanie 2.3.8. (1) Rozwiązać układy równań

(a) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -x + 2y + 3z = 2 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$,

(b) $\begin{cases} x + 3y - 4z = 4 \\ 3x + 2y - z = 1 \\ x - 4y + 7z = 5 \end{cases}$,

(c) $\begin{cases} 4x + 5y - 6z = 3 \\ y - 2z = -1 \\ 2x + 3y - 3z = 2 \end{cases}$,

(d) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ -2x+3y-3z=0 \\ -x+4y-2z=0 \end{cases}$,

(e) $\begin{cases} 4x-y=7 \\ 3x+y=14 \\ 2x+3y=0 \end{cases}$,

(f) $\begin{cases} x+2y+5z=4 \\ 3x-y+z=5 \end{cases}$,

(g) $\begin{cases} x+y+z+u=1 \\ 2x-y-z-u=1 \end{cases}$,

(h) $\begin{cases} x+y+z+u=0 \\ 3x+4y-2z+u=0 \\ 4x+5y-z+2u=0 \end{cases}$.

(2) Rozstrzygnąć, dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ układ równań

$$\begin{cases} x+2y-z=9 \\ 2x+ay-z=9 \\ 3x-4y+2z=-5 \end{cases} \tag{2.7}$$

jest oznaczony, nieoznaczony, sprzeczny, a następnie rozwiązać układ (2.7) dla $a=0$.

Definicja 2.3.9. Jeśli dla układu (2.1) zdefiniujemy dodatkowo macierze kolumnowe

$$X := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \quad B := \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times 1},$$

zwane, odpowiednio, *macierzą zmiennych* oraz *macierzą wyrazów wolnych* układu (2.1), to równanie

$$AX = B \tag{2.8}$$

nazywamy *równaniem macierzowym* układu (2.1).

Uwaga 2.3.10. Istotnie, zauważmy, że

$$AX = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n \\ \dots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n \end{bmatrix},$$

więc równanie (2.8) ma postać

$$\begin{bmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n \\ \dots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix},$$

jest zatem równoważne układowi równań (2.1).

Twierdzenie 2.3.11. *Jeśli dla układu (2.1)* $m=n$ *oraz* $\det A \neq 0$, *to*

$$X = A^{-1}B.$$

Przykład 2.3.12. Rozwiązać równanie macierzowe

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Łatwo wyliczamy, że

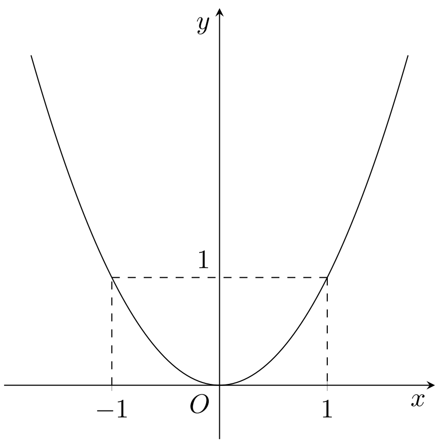
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

skąd

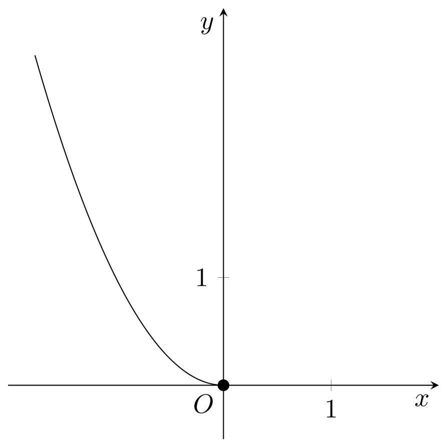
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 2.3.13. Rozwiązać równania macierzowe

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$



RYSUNEK 1. $y = f(x)$.



RYSUNEK 2. $y = g(x)$.

3. Funkcje rzeczywiste zmiennej rzeczywistej

3.1. **Funkcje. Pojęcia wstępne.**

Definicja 3.1.1. Niech $X \subset \mathbb{R}$ będzie dowolnym zbiorem niepustym. *Funkcją f określoną w zbiorze X o wartościach rzeczywistych*, którą oznaczamy

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

nazywamy przyporządkowanie, które każdej liczbie $x \in X$ przypisuje dokładnie jedną liczbę $y \in \mathbb{R}$ (piszemy $f(x) = y$ lub $x \stackrel{f}{\longmapsto} y$). Zbiór X nazywamy *dziedziną funkcji f*, a elementy dziedziny nazywamy *argumentami* funkcji f. Dla dowolnego zbioru $A \subset X$ zbiór

$$f(A) := \{y \in \mathbb{R} : \exists_{x \in A} : f(x) = y\}$$

nazywamy *obrazem* zbioru A przez funkcję f. Zbiór $f(X)$ nazywamy *obrazem funkcji f* (lub *zbiorem wartości funkcji f*), a jego elementy nazywamy *wartościami funkcji f*. *Wykresem* funkcji (3.1) nazywamy zbiór

$$\Gamma(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in X,\ y = f(x)\}.$$

Przykład 3.1.2. (a) Obrazem funkcji $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, jest zbiór $\mathbb{R}_+$. Jej wykresem jest parabola (Rysunek 1).
(b) Obrazem funkcji $g(x) = x^2$, $x \leq 0$, jest zbiór $\mathbb{R}_+$. Jej wykresem jest lewe ramię paraboli (Rysunek 2).

Definicja 3.1.3. Funkcję $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy różnowartościową, jeśli $f(x_1) \neq f(x_2)$ dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$.

Uwaga 3.1.4. Funkcja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ zachodzi implikacja

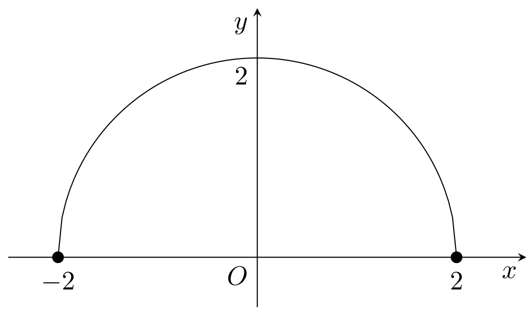
$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

Przykład 3.1.5. (a) Funkcja $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, nie jest różnowartościowa, bo $f(-1) = f(1)$ (Rysunek 1).
(b) Funkcja $g(x) = x^2$, $x \leq 0$, jest różnowartościowa, bo dla dowolnych $x_1, x_2 \leq 0$, jeśli $g(x_1) = x_1^2 = x_2^2 = g(x_2)$, to $|x_1| = |x_2|$, a ponieważ obie liczby są niedodatnie, to mają ten sam znak, zatem $x_1 = x_2$ (Rysunek 2).

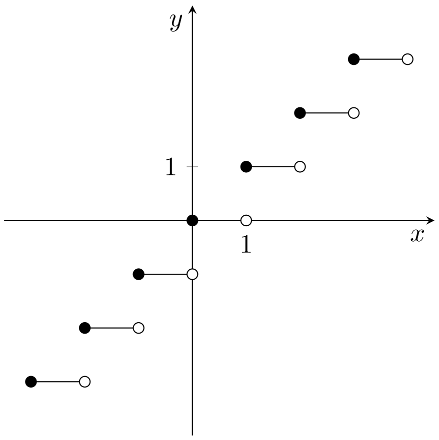
Uwaga 3.1.6. Jeśli funkcję określamy wzorem nie podając jej dziedziny, to zakładamy, że dziedziną jest zbiór tych argumentów, dla których wzór ma sens.

Przykład 3.1.7. Dziedziną funkcji $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ jest przedział $[-2, 2]$. Jej wykresem jest górny półokrąg o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu 2 (Rysunek 3).

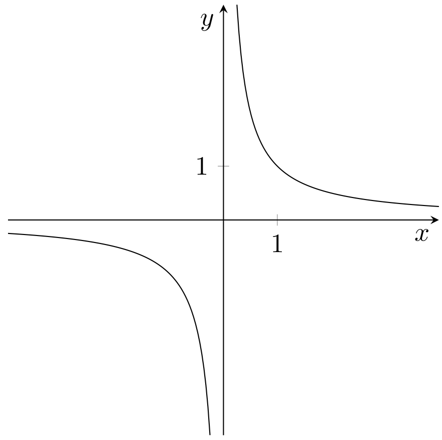
Uwaga 3.1.8. Niech $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją.
(a) Funkcja f jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy, gdy każda prosta pozioma przecina jej wykres $\Gamma(f)$ w co najwyżej jednym punkcie.



RYSUNEK 3. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.



RYSUNEK 4. $g(x) = \lfloor x \rfloor$.



RYSUNEK 5. $h(x) = \frac{1}{x}$.

(b) Obrazem funkcji f jest zbiór tych punktów $c \in \mathbb{R}$, dla których prosta pozioma o równaniu $y = c$ przecina wykres $\Gamma(f)$ w co najmniej jednym punkcie.

Przykład 3.1.9. (a) Funkcja $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ nie jest różnowartościowa, bo prosta o równaniu $y = 1$ przecina wykres funkcji w punktach $(-\sqrt{3}, 1)$ i $(\sqrt{3}, 1)$, a jej zbiorem wartości jest przedział $[0, 2]$, bo prosta $y = c$ przecina wykres $\Gamma(f)$ w co najmniej jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy $0 \leq c \leq 2$ (Rysunek 3).

(b) Funkcja $g(x) = \lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$, zwana *cechą*, nie jest różnowartościowa, bo np. prosta o równaniu $y = 1$ przecina wykres $\Gamma(g)$ w punktach $(a, 1)$ dla $0 \leq a < 1$, a zbiorem jej wartości jest $\mathbb{Z}$, bo tylko proste o równaniach $y = k$, $k \in \mathbb{Z}$, przecinają wykres $\Gamma(g)$ (Rysunek 4).

(c) Dziedziną funkcji $h(x) = 1/x$ jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, jest to także jej zbiór wartości, a funkcja ta jest różnowartościowa, bo każda prosta $y = c$, $c \neq 0$, przecina wykres $\Gamma(h)$ w dokładnie jednym punkcie, zaś prosta $y = 0$ nie przecina wykresu $\Gamma(h)$ (Rysunek 5).

Zadanie 3.1.10. (1) Dla poniższych funkcji wyznaczyć dziedzinę, zbiór wartości, narysować ich wykres oraz sprawdzić, czy są różnowartościowe.

(a) $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$,

(b) $g(x) = |x|$,

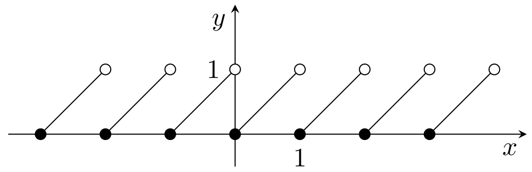
(c) $h(x) = \dfrac{|x|}{x}$.

(2) Sprawdzić, czy poniższe funkcje są różnowartościowe

(a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x+1}$,

(b) $g(x) = \sqrt{x}$,

(c) $h(x) = \dfrac{1}{x^2}$,



Rysunek 6. $f(x) = \{x\}$.

(d) $i(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{gdy } x \neq 0 \\ 1, & \text{gdy } x = 0 \end{cases}$,

(e) $j(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{gdy } x \neq 0 \\ 0, & \text{gdy } x = 0 \end{cases}$.

Definicja 3.1.11 (Funkcja monotoniczna)**.** Funkcję $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy
(a) *rosnącą*, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1 < x_2$ mamy $f(x_1) \leq f(x_2)$,
(b) *malejącą*, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1 < x_2$ mamy $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Funkcję rosnącą lub malejącą nazywamy *funkcją monotoniczną*. Jeśli w powyższej definicji nierówności słabe zastąpimy silnymi, to mówimy o funkcji, odpowiednio, *silnie rosnącej*, *silnie malejącej* i *silnie monotonicznej*. Jeśli zbiór X daje się podzielić na pewną ilość przedziałów, w których funkcja jest monotoniczna, to daną funkcję nazywamy *przedziałami monotoniczną*.

Przykład 3.1.12. (a) Funkcja stała jest rosnąca i malejąca, ale nie jest silnie rosnąca ani silnie malejąca.
(b) Funkcja $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ jest silnie rosnąca w przedziale $[-2, 0]$, silnie malejąca w przedziale $[0, 2]$, a więc jest przedziałami silnie monotoniczna, natomiast w przedziale $[-2, 2]$ nie jest monotoniczna (Rysunek 3).
(c) Funkcja $g(x) = \lfloor x \rfloor$ jest rosnąca, ale nie jest silnie rosnąca (Rysunek 4).
(d) Funkcja $h(x) = 1/x$ jest przedziałami silnie malejąca (jest silnie malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$), ale nie jest silnie malejąca (Rysunek 5).

Zadanie 3.1.13. Sprawdzić monotoniczność funkcji z Zadania 3.1.10 (1).

Definicja 3.1.14. Funkcję $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, określoną w takim zbiorze X, że $-x \in X$ dla dowolnej liczby $x \in X$, nazywamy
(a) *parzystą*, jeśli $f(-x) = f(x)$ dla dowolnego $x \in X$;
(b) *nieparzystą*, jeśli $f(-x) = -f(x)$ dla dowolnego $x \in X$.

Przykład 3.1.15. (a) Funkcja $f(x) = x^2$ jest parzysta, bo $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, ale nie jest nieparzysta, bo $f(-1) = 1 \neq -1 = -f(1)$.
(b) Funkcja $g(x) = x^3$ jest nieparzysta, bo $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, ale nie jest parzysta, bo $g(-1) = -1 \neq 1 = g(1)$.
(c) Funkcja $h(x) = x + 1$ nie jest parzysta, bo $h(-1) = 0 \neq 2 = h(1)$, ani nieparzysta, bo $h(-1) = 0 \neq -2 = -h(1)$.

Zadanie 3.1.16. (1) Sprawdzić parzystość i nieparzystość funkcji z Zadania 3.1.10.
(2) Wykazać, że każdą funkcję $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ można zapisać jako sumę funkcji parzystej i nieparzystej.
(3) Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, które są jednocześnie parzyste i nieparzyste.

Definicja 3.1.17. Funkcję $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *okresową*, jeśli istnieje stała $c > 0$ taka, że $x + c \in X$ oraz $f(x+c) = f(x)$ dla dowolnego $x \in X$. Liczbę c nazywamy *okresem* danej funkcji. Najmniejszy okres (jeśli istnieje) nazywamy *okresem podstawowym* danej funkcji.

Przykład 3.1.18. (a) Funkcja stała $f(x) = c$ jest funkcją okresową, która nie ma okresu podstawowego. Istotnie, każda liczba dodatnia jest okresem funkcji stałej, a nie istnieje najmniejsza liczba dodatnia.
(b) Funkcja $f(x) = \{x\} := x - \lfloor x \rfloor$, zwana *mantysą*, jest funkcją okresową o okresie podstawowym 1 (Rysunek 6).

Zadanie 3.1.19. Czy istnieje różna od stałej funkcja okresowa bez okresu podstawowego?

Definicja 3.1.20. Dla danych funkcji $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ określamy ich

(a) *sumę* $f+g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$,
(b) *różnicę* $f-g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $(f-g)(x) := f(x)-g(x)$,
(c) *iloczyn* $fg : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $(fg)(x) := f(x)g(x)$,
(d) *iloraz* $f/g : X' \longrightarrow \mathbb{R}$, $(f/g)(x) := f(x)/g(x)$, gdzie $X' = \{x \in X : g(x) \neq 0\}$.

3.2. **Wielomiany. Funkcje wymierne.**

Definicja 3.2.1. Funkcję postaci

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.2}$$

gdzie $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, nazywamy *wielomianem stopnia* n lub krótko *wielomianem*. Jeśli $a_n \neq 0$, to liczbę n nazywamy *stopniem wielomianu* (3.2). Miejsce zerowe wielomianu, czy liczbę p taką, że $f(p) = 0$, nazywamy *pierwiastkiem*.

Uwaga 3.2.2. (a) Wielomian stopnia zero $f(x) = a_0$ jest funkcją stałą. Wtedy nie żądamy, aby $a_0 \neq 0$.
(b) Wielomian stopnia pierwszego $f(x) = a_1 x + a_0$ nosi nazwę *funkcji liniowej*. Jego wykres jest linią prostą.
(c) Wielomian stopnia drugiego $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ nosi nazwę *funkcji kwadratowej* lub *trójmianu kwadratowego*. Jego wykres jest parabolą o wierzchołku

$$\left(-\frac{a_1}{2a_2}, -\frac{\Delta}{4a_2}\right),$$

gdzie wyrażenie $\Delta := a_1^2 - 4a_2a_0$ nazywane jest *wyróżnikiem* wielomianu f. Liczba jego pierwiastków zależy od Δ.
   (i) Jeśli $\Delta < 0$, to wielomian f nie ma pierwiastków. Mówimy wtedy, że wielomian f jest *nierozkładalny*.
   (ii) Jeśli $\Delta = 0$, to wielomian f ma jeden pierwiastek

$$x_0 := -\frac{a_1}{2a_2}.$$

   Mamy wtedy rozkład $f(x) = a_2(x-x_0)^2$ i mówimy, że pierwiastek x_0 jest *krotności 2* albo *dwukrotny*.
   (iii) Jeśli $\Delta > 0$, to wielomian f ma dwa pierwiastki

$$x_1 := \frac{-a_1 - \sqrt{\Delta}}{2a_2}, \quad x_2 := \frac{-a_1 + \sqrt{\Delta}}{2a_2}.$$

   Mamy wtedy rozkład $f(x) = a_2(x-x_1)(x-x_2)$.
(d) Każdy wielomian rozkłada się na skończoną ilość czynników będących wielomianami pierwszego stopnia bądź nierozkładalnymi wielomianami drugiego stopnia, np.

$$f(x) = x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1), \quad g(x) = x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1).$$

Przykład 3.2.3. (a) Rozwiązać nierówność $x^2 - 7x > 8$. Równoważnie,

$$x^2 - 7x - 8 > 0,$$

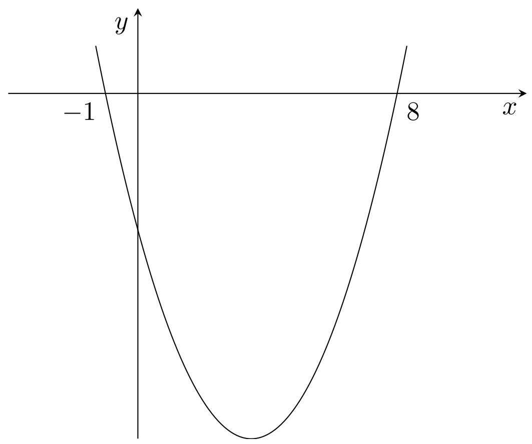
czyli (używając wyróżnika, lub wzorów Viete'a) $(x-8)(x+1) > 0$. Rozwiązując graficznie otrzymaną nierówność (Rysunek 7) wnioskujemy, że $x \in (-\infty, -1) \cup (8, \infty)$.
(b) W jakich przedziałach funkcja $f(x) = (x+1)(x-2)(x-3)$ jest
   (i) dodatnia,
   (ii) większa od 6?

Bezpośrednio z wykresu (Rysunek 8) wnioskujemy, że $f(x) > 0$ dla $-1 < x < 2$ lub $x > 3$. Natomiast nierówność $f(x) > 6$ równoważna jest

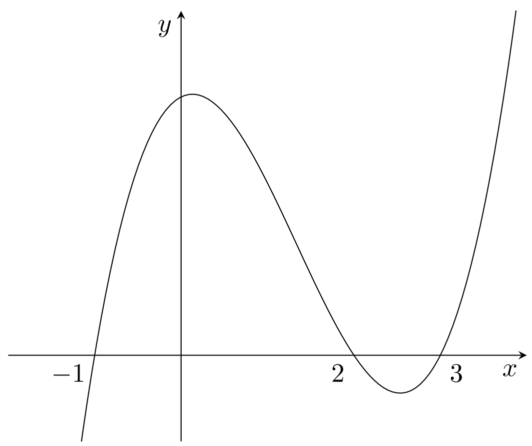
$$x(x - 2 - \sqrt{3})(x - 2 + \sqrt{3}) > 0,$$

skąd $x \in (0, 2-\sqrt{3}) \cup (2+\sqrt{3}, \infty)$ (Rysunek 9).

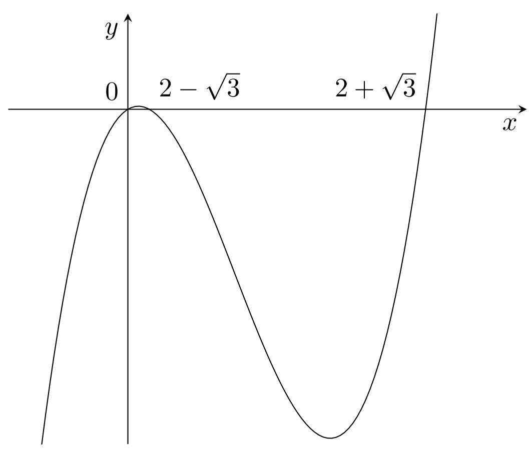
Zadanie 3.2.4. (1) Rozwiązać równania i nierówności
   (a) $x^2 + 1 \gtreqless -x$,
   (b) $|x^4 + 5x^2| - 6 \gtreqless 0$,
   (c) $|x^2 - 5| \gtreqless 1$,
   (d) $x^4 + 4x^3 - 18x^2 - 12x + 9 \gtreqless 0$,



Rysunek 7. $f(x) = (x-8)(x+1)$.



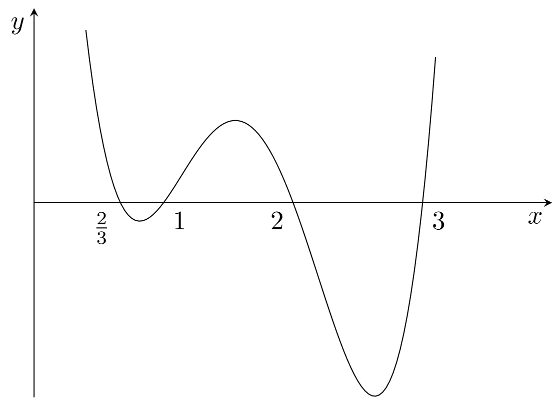
Rysunek 8. $f(x) > 0$.



Rysunek 9. $f(x) > 6$.

(e) $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 \gtreqless 0$.

(2) W jakich przedziałach funkcja $f(x) = (x+4)(x+1)(x-1)$ jest
   (a) ujemna,
   (b) nie mniejsza od -4?



Rysunek 10.

Definicja 3.2.5. Funkcję

$$f(x) = \frac{w_1(x)}{w_2(x)}, \quad x \in \{x \in \mathbb{R} : w_2(x) \neq 0\},$$

gdzie w_1, w_2 są wielomianami, nazywamy *funkcją wymierną*.

Uwaga 3.2.6. Funkcjami wymiernymi są np.

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad g(x) = \frac{x+1}{x^2-4}.$$

Wykresem funkcji f jest hiperbola o asymptotach leżących na osiach współrzędnych (Rysunek 5).

Przykład 3.2.7. (a) Rozwiązać równanie

$$\frac{1}{x} = \frac{x+1}{x^2-4}.$$

Zauważmy, że $x \neq 0$ i $x \neq \pm 2$. Równoważnie,

$$\frac{x+4}{x^3-4x} = 0,$$

skąd $x = -4$.

(b) Rozwiązać nierówność

$$\frac{14}{x^2-5x+6} \leq \frac{10}{2-x} - 3.$$

Zauważmy, że $x \neq 2$ i $x \neq 3$. Równoważnie,

$$\frac{3(x-2/3)(x-1)}{(x-2)(x-3)} \leq 0.$$

Ponieważ $\operatorname{sgn}(a/b) = \operatorname{sgn}(ab)$, więc równoważnie mamy

$$3(x-2/3)(x-1)(x-2)(x-3) \leq 0, \quad x \neq 2,\ x \neq 3,$$

skąd (Rysunek 10), po uwzględnieniu założeń, $x \in [2/3, 1] \cup (2, 3)$.

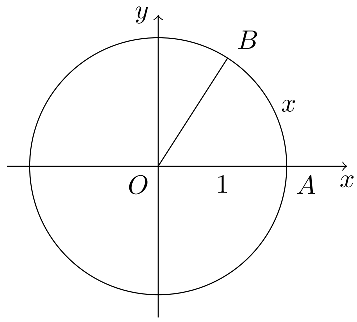
Zadanie 3.2.8. Rozwiązać równania i nierówności

(1) $x^3 + \dfrac{1}{x^3} \gtreqless 6\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$,

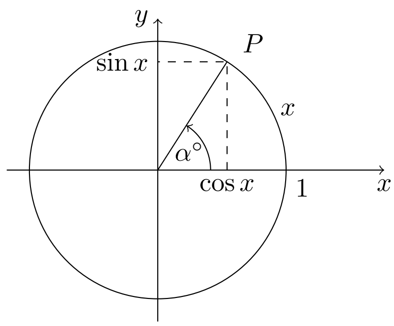
(2) $\dfrac{1}{x-1} \gtreqless \dfrac{x}{2-x}$,

(3) $\dfrac{x-1}{x+1} \gtreqless \dfrac{1}{x+2}$,

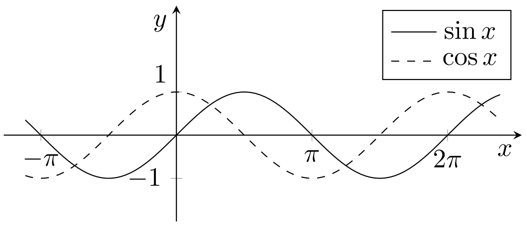
(4) $\left|\dfrac{1}{x+2}\right| \gtreqless \left|\dfrac{2}{x-1}\right|$.



Rysunek 11. $\angle AOB = x$ (rad).



Rysunek 12.



Rysunek 13. $y = \sin x$, $y = \cos x$.

3.3. **Funkcje trygonometryczne.**

Definicja 3.3.1. *Miara łukowa kąta* jest to miara kąta wyrażona przez długość łuku okręgu jednostkowego (tzn. okręgu o promieniu długości 1) opartego na tym kącie. Jednostką tak zapisanego kąta jest *radian* (rad). (Rysunek 11).

Uwaga 3.3.2. Miara łukowa x kąta mającego α stopni wyraża się wzorem

$$x = \frac{\pi}{180}\alpha.$$

W szczególności,

α°	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

Definicja 3.3.3. Niech P będzie punktem okręgu jednostkowego środku w punkcie $(0,0)$. Jeśli x jest miarą łukową kąta skierowanego pomiędzy dodatnią półosią OX a promieniem przechodzącym przez punkt P, to $\sin x$ jest odciętą, a $\cos x$ — rzędną punktu P (Rysunek 12). Funkcję sin (odp. cos) nazywamy *sinusem* (odp. *cosinusem*).

Uwaga 3.3.4. (a) Dziedziną funkcji sin i cos jest zbiór $\mathbb{R}$, zaś ich zbiorem wartości przedział $[-1,1]$.

(b) Funkcje sin i cos są okresowe, ich okresem podstawowym jest liczba 2π, czyli

$$\sin(x+2\pi) = \sin x, \qquad \cos(x+2\pi) = \cos x.$$

(c) Funkcja sin jest nieparzysta, tj. $\sin(-x) = -\sin x$, natomiast funkcja cos jest parzysta, tj. $\cos(-x) = \cos x$.

(d) Funkcje sin i cos rozpatrywane w dowolnym przedziale ograniczonym są przedziałami monotoniczne.

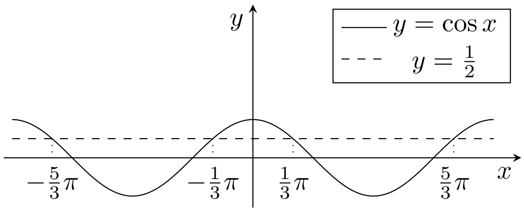
(e) Wykresy funkcji sin i cos przedstawiono na Rysunku 13.

(f) Zachodzą wzory

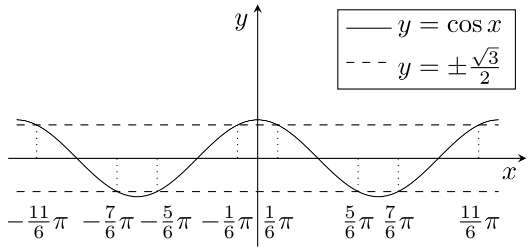
 (i) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,

 (ii) $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$ (w szczególności, $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$),

 (iii) $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$ (w szczególności, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$).



RYSUNEK 14. $\cos x = \frac{1}{2}$.



RYSUNEK 15. $|\cos x| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(g) Kwadrat, trójkąt równoboczny i symetria wykresów sinusa i kosinusa generują następującą tabelę

x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

.

Przykład 3.3.5. (a) Rozwiązać równanie $\sin 2x = \sin x$. Równoważnie,

$$\sin x(2\cos x - 1) = 0,$$

czyli

$$\sin x = 0 \quad \text{lub} \quad \cos x = \frac{1}{2},$$

skąd (Rysunek 14)

$$x = k\pi, \quad \text{lub} \quad x = \frac{1}{3}\pi + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = -\frac{1}{3}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(b) Rozwiązać nierówność $4\cos^2 x \geq 3$. Równoważnie,

$$\cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{lub} \quad \cos x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

skąd (Rysunek 15)

$$x \in \left[-\frac{1}{6}\pi + k\pi, \frac{1}{6}\pi + k\pi\right], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Zadanie 3.3.6. Rozwiązać równanie i nierówność

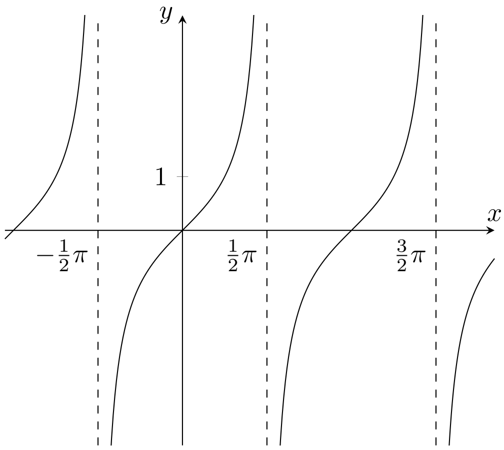
(1) $\cos 2x \gtreqless \cos x$,

(2) $\cos 2x \gtreqless \cos x - 1$,

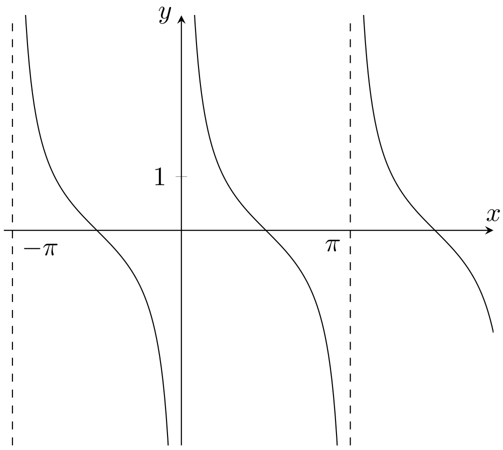
(3) $\sin x \gtreqless \cos x$.

Definicja 3.3.7. Funkcję

$$\operatorname{tg} x := \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \in \{x \in \mathbb{R} : \cos x \neq 0\},$$



Rysunek 16. $y = \operatorname{tg} x$.



Rysunek 17. $y = \operatorname{ctg} x$.

nazywamy *tangensem*, zaś funkcję

$$\operatorname{ctg} x := \frac{\cos x}{\sin x}, \quad x \in \{x \in \mathbb{R} : \sin x \neq 0\},$$

nazywamy *cotangensem*.

Uwaga 3.3.8. (a) Funkcja tg określona jest w przedziałach

$$\left(-\frac{1}{2}\pi + k\pi, \frac{1}{2}\pi + k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z},$$

zaś funkcja ctg określona jest w przedziałach

$$(k\pi, \pi + k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(b) Wykresy funkcji tg i ctg przedstawiono na Rysunkach 16 i 17.
(c) Ich zbiorem wartości jest zbiór $\mathbb{R}$.
(d) Funkcje tg i ctg są okresowe. Ich okresem podstawowym jest liczba π, tj.

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x, \qquad \operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x.$$

(e) Funkcje tg i ctg są nieparzyste, tj.

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, \qquad \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x.$$

(f) Zachodzi związek

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}, \quad x \neq k\frac{\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

(g) Definicje oraz tabela wartości sinusa i kosinusa generują następującą tabelę

x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
$\operatorname{ctg} x$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

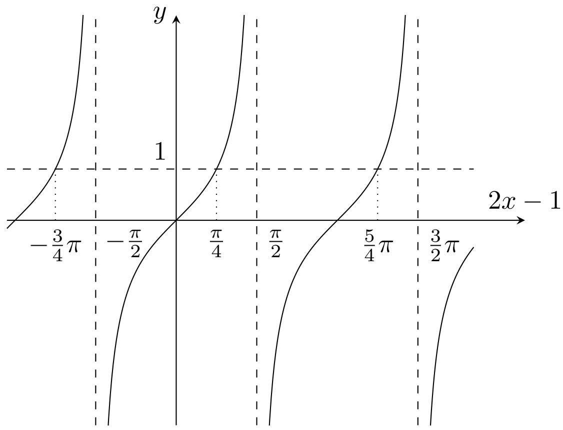
.

Przykład 3.3.9. Rozwiązać nierówność $\operatorname{tg}(2x - 1) \leq 1$. Ponieważ

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < 2x - 1 \leq \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

(Rysunek 18), więc

$$\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z},$$



Rysunek 18. $\operatorname{tg}(2x-1) \leq 1$.

lub, równoważnie,

$$x \in \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\right], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Zadanie 3.3.10. Rozwiązać równania i nierówność

(1) $\operatorname{tg}^2 x \underset{<}{\overset{\geq}{=}} 3$,

(2) $\operatorname{ctg} x \underset{<}{\overset{\geq}{=}} \operatorname{tg} x$,

(3) $\operatorname{tg}(2x+3) \underset{<}{\overset{\geq}{=}} \sqrt{3}$.

Definicja 3.3.11. Funkcje sin, cos, tg i ctg nazywamy *funkcjami trygonometrycznymi.*

3.4. **Funkcja potęgowa. Funkcja wykładnicza.** Dowodzi się, że w obrębie liczb rzeczywistych dobrze zdefiniowane jest potęgowanie

$$a^p, \quad a, p \in \mathbb{R},\ a > 0.$$

Ponadto, dla dowolnych $a, b, p, q \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, zachodzą związki

(a) $a^p > 0,\ a^0 = 1^p = 1$,

(b) $a^p a^q = a^{p+q},\ \dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$,

(c) $(a^p)^q = a^{pq},\ a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}$,

(d) $(ab)^p = a^p b^p,\ \left(\dfrac{a}{b}\right)^p = \dfrac{a^p}{b^p}$.

Definicja 3.4.1. Niech $p \in \mathbb{R}$. Funkcję

$$x \longmapsto x^p, \quad x > 0, \tag{3.3}$$

nazywamy *funkcją potęgową.*

Uwaga 3.4.2. (a) Jeśli $p \in \mathbb{N}$, to funkcję (3.3) określamy dla $x \in \mathbb{R}$ wzorem $x^p := \underbrace{x \cdot \dots \cdot x}_{p \text{ razy}}$.

(b) Jeśli $p \in \mathbb{Z}$, $p < 0$, to funkcję (3.3) określamy dla $x \neq 0$ wzorem $x^p := \frac{1}{x^{-p}}$.

(c) Zwyczajowo dla $n \in \mathbb{N}$ piszemy $\sqrt[n]{x} := x^{1/n}$ oraz $\sqrt{x} := \sqrt[2]{x}$. Dodatkowo określamy $\sqrt[n]{0} := 0$.

(d) $x^p > 0$ dla $x > 0$.

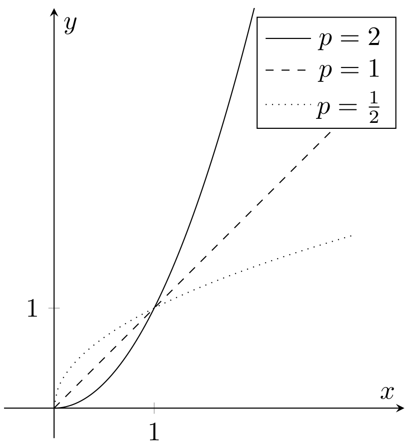
(e) Dla $p \neq 0$ funkcja (3.3) jest różnowartościowa (tj. $x_2^p = x_1^p$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_2 = x_1$).

(f) Gdy $p > 0$, funkcja (3.3) jest silnie rosnąca (tj. $x_2^p > x_1^p$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_2 > x_1$) (por. Rysunek 19).

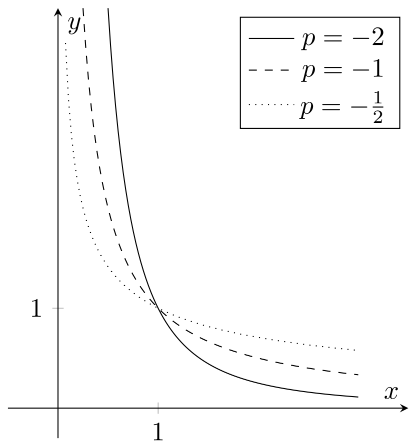
(g) Gdy $p < 0$, funkcja (3.3) jest silnie malejąca (tj. $x_2^p < x_1^p$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_2 > x_1$) (por. Rysunek 20).

(h) Jeśli $p \in \mathbb{Z}$ jest liczbą parzystą, to funkcja (3.3) z dziedziną rozszerzoną jak w uwagach (a) lub (b) jest parzysta.

(i) Jeśli $p \in \mathbb{Z}$ jest liczbą nieparzystą, to funkcja (3.3) z dziedziną rozszerzoną jak w uwagach (a) lub (b) jest nieparzysta.



RYSUNEK 19. $x \longmapsto x^p$, $p \in \{2, 1, \frac{1}{2}\}$.



RYSUNEK 20. $x \longmapsto x^p$, $p \in \{-2, -1, -\frac{1}{2}\}$.

Przykład 3.4.3. Rozwiązać nierówność

$$\sqrt{x} \leq x.$$

Zauważmy, że aby pierwiastek miał sens, musi być $x \geq 0$. Wtedy, podnosząc stronami nierówność do kwadratu (możemy to zrobić, ponieważ obie strony nierówności są dodatnie), otrzymamy

$$x \leq x^2.$$

Równoważnie,

$$x(x-1) \geq 0,$$

skąd $x \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$, a po uwzględnieniu założenia, $x \in \{0\} \cup [1, \infty)$.

Zadanie 3.4.4. Rozwiązać równania i nierówności

(1) $x \gtreqless \sqrt{x} + 1$.

(2) $\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1} \gtreqless 0$.

Definicja 3.4.5. Niech $a > 0$, $a \neq 1$. Funkcję

$$x \longmapsto a^x, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.4}$$

nazywamy *funkcją wykładniczą*.

Uwaga 3.4.6. (a) Funkcja (3.4) jest różnowartościowa (tj. $a^{x_2} = a^{x_1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_2 = x_1$).

(b) Gdy $a > 1$, funkcja (3.4) jest silnie rosnąca (tj. $a^{x_2} > a^{x_1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_2 > x_1$) (por. Rysunek 21).

(c) Gdy $a < 1$, funkcja (3.4) jest silnie malejąca (tj. $a^{x_2} < a^{x_1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_2 > x_1$) (por. Rysunek 22).

Przykład 3.4.7. (a) Rozwiązać równanie

$$4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}.$$

Zauważmy, że liczba pod pierwiastkiem musi być nieujemna, tzn. $x - 2 \geq 0$, skąd $x \geq 2$. Ponieważ $4^{\sqrt{x-2}} = (2^2)^{\sqrt{x-2}} = (2^{\sqrt{x-2}})^2$, więc podstawiając $t = 2^{\sqrt{x-2}}$ otrzymamy

$$t^2 + 16 = 10t,$$

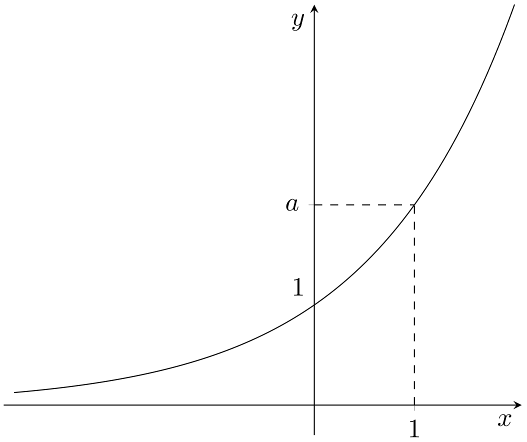
czyli

$$t^2 - 10t + 16 = 0,$$

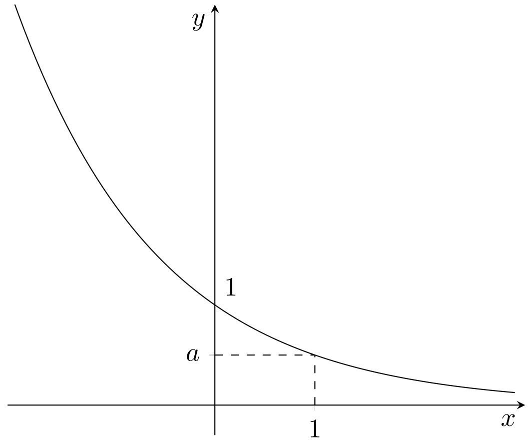
skąd $t = 2$ lub $t = 8$, czyli, podstawiając z powrotem za t wyrażenie $2^{\sqrt{x-2}}$ otrzymamy

$$2^{\sqrt{x-2}} = 2 = 2^1 \quad \text{lub} \quad 2^{\sqrt{x-2}} = 8 = 2^3.$$

W konsekwencji, $\sqrt{x-2} = 1$ lub $\sqrt{x-2} = 3$, skąd $x = 3$ lub $x = 11$ (uwzględniamy oba rozwiązania, bo oba leżą w dziedzinie równania, tj. $x \geq 2$).



Rysunek 21. $y = a^x$, $a > 1$.



Rysunek 22. $y = a^x$, $a < 1$.

(b) Rozwiązać nierówność
$$2^{3x+5} - 4^{x-1} > 0.$$
Zauważmy, że można ją równoważnie zapisać jako
$$2^{3x+5} > 2^{2x-2}.$$
Dzieląc powyższą nierówność stronami przez dodatnią liczbę 2^{2x+5} otrzymamy
$$2^{3x+5-2x-5} > 2^{2x-2-2x-5}$$
lub, równoważnie, $2^x > 2^{-7}$, skąd $x > -7$.

Zadanie 3.4.8. Rozwiązać równania i nierówności

(1) $3^{\frac{1}{x}} \gtreqless \left(\frac{1}{3}\right)^{-2x}$,

(2) $\left(\frac{4}{9}\right)^x \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} \gtreqless \frac{2}{3}$,

(3) $(x^2 - 6x + 9)^{x+3} \gtreqless 1$,

(4) $8^x + 18^x - 2 \cdot 27^x \gtreqless 0$,

(5) $\dfrac{1}{2^x - 1} \gtreqless \dfrac{1}{1 - 2^{x-1}}$.

3.5. **Funkcja logarytmiczna.** Dowodzi się, że równanie $a^x = b$ dla dowolnych $a, b > 0$, $a \neq 1$, ma dokładnie jedno rozwiązanie względem x, które oznaczamy przez
$$\log_a b$$
i nazywamy *logarytmem liczby b o podstawie a*. Zwyczajowo piszemy $\log b := \log_{10} b$ i nazywamy *logarytmem dziesiętnym.* Zauważmy, że
$$a^x = b \Longleftrightarrow x = \log_a b, \quad a, b > 0, \ a \neq 1.$$
W szczególności, dla dowolnych $a, b, c > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$, zachodzą związki

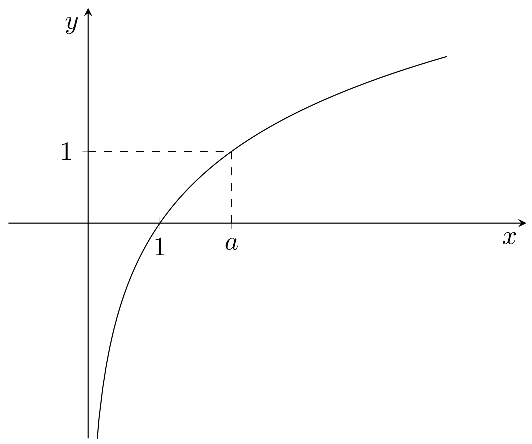
(a) $\log_a 1 = 0, \ \log_a a = 1$,

(b) $\log_a a^x = x, \ a^{\log_a b} = b$,

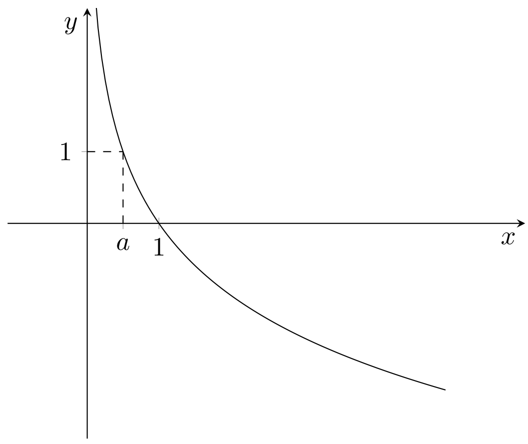
(c) $\log_a bc = \log_a b + \log_a c, \ \log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$,

(d) $\log_a b^x = x \log_a b, \ \log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}, \ c \neq 1$.

Definicja 3.5.1. Niech $a > 0$ i $a \neq 1$. Funkcję
$$x \longmapsto \log_a x, \quad x > 0, \tag{3.5}$$
nazywamy *funkcją logarytmiczną.*



Rysunek 23. $y = \log_a x$, $a > 1$.



Rysunek 24. $y = \log_a x$, $a < 1$.

Uwaga 3.5.2. (a) Funkcja (3.5) jest różnowartościowa (tj. $\log_a x_2 = \log_a x_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_2 = x_1$).

(b) Gdy $a > 1$, funkcja (3.5) jest silnie rosnąca (tj. $\log_a x_2 > \log_a x_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_2 > x_1$) (por. Rysunek 23).

(c) Gdy $a < 1$, funkcja (3.5) jest silnie malejąca (tj. $\log_a x_2 < \log_a x_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_2 > x_1$) (por. Rysunek 24).

Przykład 3.5.3. (a) Rozwiązać równanie

$$\log(\log x) + \log(\log x^2 - 1) = 1. \tag{3.6}$$

Zauważmy, że powyższe wyrażenia mają sens, jeśli
(i) $x > 0$,
(ii) $\log x > 0$,
(iii) $\log x^2 - 1 > 0$.
Zauważmy, że (ii) jest równoważne $\log x > \log 1$, skąd $x > 1$, zaś (iii) możemy zapisać jako

$$\log x^2 > 1 = \log 10,$$

skąd $x^2 > 10$, czyli $x > \sqrt{10}$ lub $x < -\sqrt{10}$. Biorąc koniunkcję warunków (i)–(iii) otrzymamy $x > \sqrt{10}$.

Podstawiając $t = \log x$ i uwzględniając równość $\log x^2 = 2\log x$ otrzymamy równanie (3.6) w postaci

$$\log t + \log(2t - 1) = 1$$

lub, równoważnie,

$$\log(t(2t - 1)) = 1 = \log 10,$$

skąd

$$2t^2 - t - 10 = 0.$$

Stąd $t = 5/2$ lub $t = -2$, czyli

$$\log x = \frac{5}{2} = \log 10^{5/2} \quad \text{lub} \quad \log x = -2 = \log 10^{-2}.$$

W konsekwencji,

$$x = 10^{5/2} = 100\sqrt{10} \quad \text{lub} \quad x = 10^{-2} = \frac{1}{100}.$$

Po uwzględnieniu założeń, $x = 100\sqrt{10}$ jest jedynym rozwiązaniem równania (3.6).

(b) Rozwiązać nierówność

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\log^2 x + 1} > \left(\frac{25}{4}\right)^{2 - \log x^3}. \tag{3.7}$$

Zauważmy, że $x > 0$. Równoważnie nierówność (3.7) możemy zapisać jako

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\log^2 x+1} > \left(\frac{2}{5}\right)^{-2(2-3\log x)}.$$

Podstawiając $t = \log x$ otrzymamy

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{t^2+1} > \left(\frac{2}{5}\right)^{6t-4}.$$

Równoważnie,

$$t^2 + 1 < 6t - 4,$$

skąd $t^2 - 6t + 5 < 0$, czyli $1 < t < 5$. W konsekwencji,

$$\log 10 = \log 10^1 = 1 < \log x < 5 = \log 10^5 = \log 100\,000,$$

czyli $10 < x < 100\,000$. Założenia w tym przypadku nie wpływają na ostateczne rozwiązanie.

Zadanie 3.5.4. Rozwiązać równania i nierówności

(1) $\log_2 \dfrac{x+3}{x-1} - \log_2 5 \gtreqless 0$,

(2) $\log_{\frac{1}{2}} \left(\log_8 \dfrac{x^2-2x}{x-3}\right) \gtreqless 0$,

(3) $\log_x \dfrac{x+3}{x-1} \gtreqless 1$,

(4) $\log_x 5\sqrt{5} - \dfrac{5}{4} \gtreqless \log_x^2 \sqrt{5}$,

(5) $\log_2(x+14) + \log_2(x+2) \gtreqless 6$.

3.6. **Złożenie funkcji i funkcje i odwrotne.**

Definicja 3.6.1 (Złożenie funkcji)**.** Niech $X, Y \subset \mathbb{R}$ będą dowolnymi niepustymi zbiorami. Niech będą dane funkcje

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad g : Y \longrightarrow \mathbb{R}, \tag{3.8}$$

takie, że $f(X) \subset Y$. Funkcję $g \circ f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)), \quad x \in X, \tag{3.9}$$

nazywamy *funkcją złożoną* lub *złożeniem* funkcji (3.8). Funkcję f nazywamy funkcją *wewnętrzną*, a g — funkcją *zewnętrzną* złożenia (3.9).

Przykład 3.6.2. (a) $h(x) = \sqrt{4-x^2}$ jest złożeniem funkcji $g(y) = \sqrt{y}$ i $f(x) = 4 - x^2$, tzn. $h = g \circ f$.
(b) $h(x) = a^{2x-3}$ jest złożeniem funkcji $g(y) = a^y$ i $f(x) = 2x - 3$, tzn. $h = g \circ f$.
(c) Wyznaczyć $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$ i $g \circ g$ oraz dziedziny tych funkcji (tj. maksymalny (ze względu na inkluzję) podzbiór liczb, dla których dany wzór ma sens), jeśli

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \frac{1}{x}.$$

Zauważmy, że dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbb{R}$, zaś funkcji g — zbiór $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(i) $(f \circ f)(x) = f(\sin x) = \sin\sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

(ii) $(f \circ g)(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \sin\dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$.

(iii) $(g \circ f)(x) = g(\sin x) = \dfrac{1}{\sin x}$, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(iv) $(g \circ g)(x) = g\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{\frac{1}{x}} = x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Zadanie 3.6.3. (1) Wyznaczyć $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$ i $g \circ g$ oraz dziedziny tych funkcji, jeśli

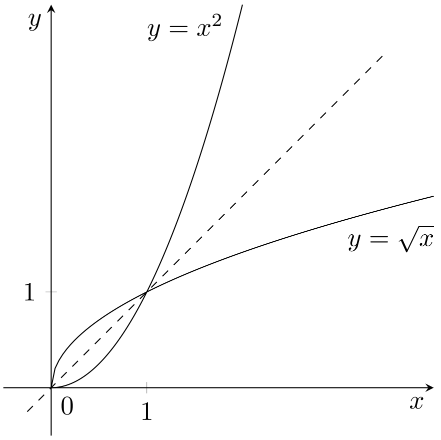
(a) $f(x) = 2^x$, $g(x) = \sqrt{x}$,

(b) $f(x) = \log_3 x$, $g(x) = \operatorname{tg} x$,

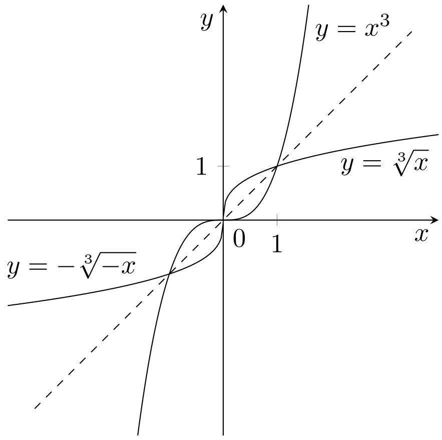
(c) $f(x) = 3x^2$, $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.

(2) Zapisać, jako złożenie dwóch lub więcej funkcji, następujące funkcje złożone

(a) $f(x) = \log\sqrt{x+1}$,



Rysunek 25. $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.



Rysunek 26. $y = x^3$, $y = \pm\sqrt[3]{\pm x}$.

(b) $f(x) = \dfrac{\sin x + 1}{2 - \sin x}$,
(c) $f(x) = \sin^2(2x^2 - 1)$,
(d) $f(x) = 2^{3x^3+2}$,
(e) $f(x) = \log_3 \cos(2x - 3)$.

Definicja 3.6.4 (Funkcja odwrotna)**.** Niech funkcja

$$f : X \longrightarrow f(X) \subset \mathbb{R} \tag{3.10}$$

będzie funkcją różnowartościową. Wtedy każdemu elementowi $y \in f(X)$ odpowiada dokładnie jeden element $x \in X$ taki, że $f(x) = y$. To odwzorowanie zbioru $f(X)$ na zbiór X nazywamy *funkcją odwrotną* względem funkcji (3.10) i zapisujemy

$$f^{-1} : f(X) \longrightarrow X \quad \text{lub} \quad x = f^{-1}(y), \quad y \in f(X). \tag{3.11}$$

Uwaga 3.6.5. Funkcją odwrotną względem funkcji (3.11) jest funkcja (3.10).

Twierdzenie 3.6.6. *Każda funkcja f silnie rosnąca (lub silnie malejąca) w zbiorze X jest różnowartościowa. W szczególności, ma funkcję odwrotną określoną w zbiorze $f(X)$.*

Przykład 3.6.7. (a) Funkcja $f(x) = x^n$ dla $n \in \mathbb{N}$ jest silnie rosnąca w przedziale $[0, \infty)$ i przybiera wszystkie wartości nieujemne; funkcją względem niej odwrotną jest $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ dla $x \geq 0$. Istotnie, jeśli $x \geq 0$, to $y = f(x) = x^n \geq 0$, skąd

$$x = \sqrt[n]{y},$$

zatem $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$, $y \geq 0$, lub, równoważnie, $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$, $x \geq 0$ (do oznaczenia zmiennej możemy użyć dowolnego symbolu (np. a, b, c, itd.), który nie prowadzi do kolizji oznaczeń — w tym przypadku niedozwolone są symbole f i n). Na Rysunku 25 przedstawiono sytuację dla $n = 2$.

(b) Gdy n jest nieparzyste, funkcja $f(x) = x^n$ jest silnie rosnąca w przedziale $(-\infty, \infty)$ i przybiera wszystkie wartości rzeczywiste; funkcja do niej odwrotna to

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[n]{x}, & \text{gdy } x \geq 0 \\ -\sqrt[n]{-x}, & \text{gdy } x < 0 \end{cases}.$$

Istotnie, dla $x \geq 0$ rozumujemy jak w poprzednim przykładzie. Jeśli $x < 0$, to $y = f(x) = x^n < 0$ (bo n jest nieparzyste), skąd $-y = -x^n = (-x)^n > 0$ oraz $-x > 0$, czyli

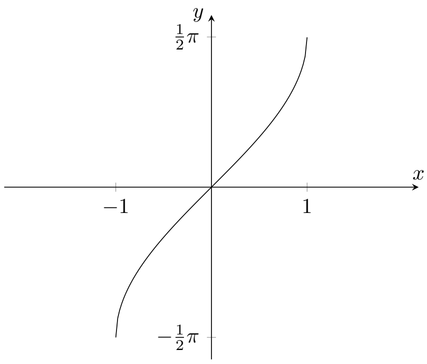
$$-x = \sqrt[n]{-y},$$

skąd $f^{-1}(y) = x = -\sqrt[n]{-y}$ dla $y < 0$. Na Rysunku 26 przedstawiono sytuację dla $n = 3$.

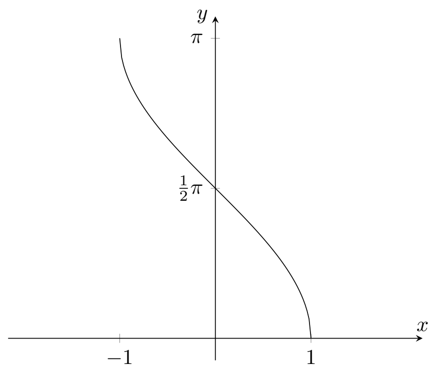
(c) Funkcja $f(x) = a^x$, gdzie $a > 1$, jest silnie rosnąca i dodatnia w $\mathbb{R}$ i przybiera wszystkie wartości dodatnie; funkcją odwrotną jest $f^{-1}(x) = \log_a x$, $x > 0$ (por. Rysunki 23 i 24).

Zadanie 3.6.8. Wyznaczyć funkcje odwrotne fo funkcji

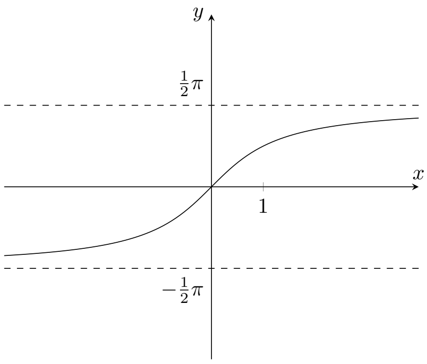
(1) $f(x) = x^2 + 1$, $x < 0$,
(2) $f(x) = \log_3(x - 1) + 3$, $x > 1$,



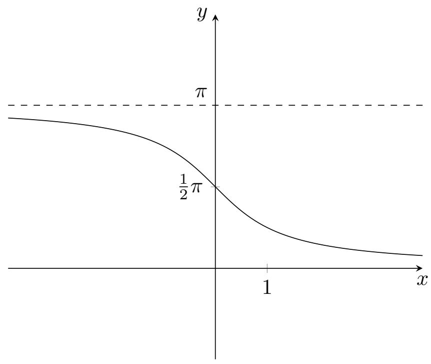
Rysunek 27. $y = \arcsin x$.



Rysunek 28. $y = \arccos x$.



Rysunek 29. $y = \operatorname{arc\,tg} x$.



Rysunek 30. $y = \operatorname{arc\,ctg} x$.

(3) $f(x) = 2^{\sqrt{x}}$, $x > 0$.

Uwaga 3.6.9. Niech f będzie funkcją posiadającą funkcję odwrotną. Jeśli dziedziny obu tych funkcji umieścimy w prostokątnym układzie współrzędnych na jednej osi (np. osi x), to wykresy $\Gamma(f)$ i $\Gamma(f^{-1})$ będą wzajemnie symetryczne w symetrii względem prostej $y = x$ (por. Rysunki 25 i 26).

3.7. **Funkcje cyklometryczne.** Funkcje trygonometryczne

$$\sin, \qquad \cos, \qquad \operatorname{tg}, \qquad \operatorname{ctg} \tag{3.12}$$

są silnie monotoniczne odpowiednio w przedziałach

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \qquad [0, \pi], \qquad \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \qquad (0, \pi), \tag{3.13}$$

przy czym funkcje sin i tg są silnie rosnące, a cos i ctg — silnie malejące. Wobec tego istnieją funkcje względem nich odwrotne.

Definicja 3.7.1. Funkcje odwrotne względem funkcji (3.12) zawężonych odpowiednio do przedziałów (3.13) nazywamy *funkcjami cyklometrycznymi* lub (*kołowymi*) i oznaczamy je odpowiednio

$$\arcsin, \qquad \arccos, \qquad \operatorname{arc\,tg}, \qquad \operatorname{arc\,ctg}. \tag{3.14}$$

Uwaga 3.7.2. (a) Wartości dwóch pierwszych funkcji (3.12) wypełniają przedział $[-1, 1]$, a dwóch ostatnich — przedział $(-\infty, +\infty)$, zatem funkcje cyklometryczne (3.14) są określone odpowiednio na przedziałach

$$[-1, 1], \qquad [-1, 1], \qquad (-\infty, +\infty), \qquad (-\infty, +\infty).$$

(b) Wykresy funkcji cyklometrycznych przedstawiają Rysunki 27–30. Można je otrzymać z odpowiednich wykresów na Rysunkach 13, 16, 17 przez ich obrót o 180° dokoła dwusiecznej $y = x$.

Uwaga 3.7.3. Zgodnie z definicją,

$$\arcsin x = y \iff \sin y = x \text{ i } y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \tag{3.15}$$

Podobnie można określić pozostałe funckje cyklometryczne.

Przykład 3.7.4. (a) Zauważmy, że, dzięki (3.15),

$$\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6},\quad \text{bo } \sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2} \text{ i } -\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{2}.$$

Podobnie,

$$\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{3}{4}\pi,\quad \text{bo } \cos\frac{3}{4}\pi=-\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ i } 0\le\frac{3}{4}\pi\le\pi.$$

Na tej samej zasadzie

$$\operatorname{arc\,ctg}(-\sqrt{3})=\frac{5}{6}\pi,\quad \text{bo } \operatorname{ctg}\frac{5}{6}\pi=-\sqrt{3} \text{ i } 0<\frac{5}{6}\pi<\pi.$$

(b) Wykażemy, że

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2},\quad x\in[-1,1].$$

Istotnie, ustalmy $x\in[-1,1]$ i oznaczmy $\alpha:=\arcsin x$, $\beta:=\arccos x$. Wtedy

$$-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2},\quad 0\le\beta\le\pi,\quad \text{skąd}\quad -\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{2}-\beta\le\frac{\pi}{2}.$$

Ponadto,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\sin\frac{\pi}{2}\cos\beta-\cos\frac{\pi}{2}\sin\beta=\cos\beta=x=\sin\alpha,$$

skąd, dzięki różnowartościowości funkcji sin w przedziale $[-\pi/2,\pi/2]$, wnioskujemy, że

$$\alpha=\frac{\pi}{2}-\beta,\quad \text{czyli}\quad \alpha+\beta=\frac{\pi}{2},$$

co było do okazania.

Zadanie 3.7.5. (1) Obliczyć

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad \arccos\left(-\frac{1}{2}\right),\quad \operatorname{arc\,tg}\sqrt{3},\quad \operatorname{arc\,ctg}(-1).$$

(2) Wykazać następujące związki
  (a) $\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,ctg} x=\frac{\pi}{2}$, $x\in[-1,1]$;
  (b) $\operatorname{arc\,ctg} x=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$, $x>0$;
  (c) $\operatorname{arc\,ctg} x=\pi+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$, $x<0$;
  (d) $\operatorname{arc\,tg} 1+\operatorname{arc\,tg} 2+\operatorname{arc\,tg} 3=\pi$.

3.8. **Ciągi. Granica ciągu.**

Definicja 3.8.1. *Ciąg* jest to funkcja $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{R}$. Wartość $f(n)$ dla argumentu n nazywamy *n-tym wyrazem ciągu* i oznaczamy przez a_n, zaś sam ciąg przez (a_n) lub $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ lub $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Liczbę

$$S_n:=a_1+\cdots+a_n$$

nazywamy *sumą n początkowych wyrazów ciągu liczbowego* (a_n).

Przykład 3.8.2. (a) Ciąg $(1/n)$ nazywamy *ciągiem harmonicznym.*
(b) Ciąg (n) nazywamy *ciągiem naturalnym.*
(c) Ciąg $((-1)^n)$ jest przykładem ciągu naprzemiennego.
(d) Ciąg $(a+(n-1)d)$, $a,d\in\mathbb{R}$, nazywamy *ciągiem arytmetycznym o różnicy d.*
(e) Ciąg (aq^{n-1}), $a,q\in\mathbb{R}$, nazywamy *ciągiem geometrycznym o ilorazie q.*
(f) Ciąg (a_n) określony rekurencyjnie

$$a_0=0,\qquad a_1=1,\qquad a_n=a_{n-1}+a_{n-2},\quad n\ge 2,$$

nazywamy *ciągiem Fibonacciego*[8]. Ciąg ten pojawia się w wielu modelach przyrodniczych, np. w „drzewie pszczół”. Rozważmy rodowód samca pszczoły. Każdy samiec (znany także jako truteń) jest spłodzony bezpłciowo z samicy (znanej również jako królowa). Jednak każda samica ma dwoje rodziców, samca i samicę. Truteń ma jednego dziadka i jedną babkę, jednego pradziadka i dwie prababki.

[8]Fibonacci (Leonardo z Pizy; ur. około 1175 r., zm. 1250 r.) — włoski matematyk. Znany jako: Leonardo Fibonacci, Filius Bonacci (syn Bonacciego), Leonardo Pisano (z Pizy).

Ma dwóch prapradziadków i trzy praprababki. W ogólności, łatwo sprawdzić przez indukcję, że w n-tym pokoleniu (pierwsze pokolenie to pokolenie rodziców, drugie pokolenie to pokolenie dziadków, itd.) ma dokładnie a_{n-1} przodków będących samcami i a_n przodków będących samicami, czyli a_{n+1} przodków łącznie. Dla porównania, człowiek w n-tym pokoleniu ma 2^n przodków łącznie.

Twierdzenie 3.8.3. *Niech (a_n) będzie ciągiem arytmetycznym o różnicy d. Wtedy*

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Twierdzenie 3.8.4. *Niech (a_n) będzie ciągiem geometrycznym o ilorazie q. Wtedy*

$$S_n = \begin{cases} na_1, & \text{gdy } q = 1 \\ a_1 \frac{1-q^n}{1-q}, & \text{gdy } q \neq 1 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Definicja 3.8.5 (Granica ciągu)**.** Mówimy, że ciąg (a_n) ma granicę $g \in \mathbb{R}$, jeśli

$$\forall_{\varepsilon>0} \, \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \, \forall_{n>n_0} \, |a_n - g| < \varepsilon$$

(wyrazy a_n ze wzrostem wskaźnika n zbliżają się do liczby g, tj. w każdym otoczeniu $(g-\varepsilon, g+\varepsilon)$ leżą *prawie wszystkie* (czyli wszystkie poza skończoną ilością) wyrazy ciągu), co zapisujemy

$$a_n \longrightarrow g \text{ gdy } n \longrightarrow \infty \qquad \text{lub} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = g.$$

Czasem dla wygody piszemy $a_n \longrightarrow g$ lub $\lim a_n = g$. Ciąg, który ma granicę, nazywamy *rozbieżnym.* Ciąg, który nie jest zbieżny, nazywamy *rozbieżnym.*

Przykład 3.8.6. (a) $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$. Podobnie, $-\frac{1}{n} \longrightarrow 0$
(b) $3 + \frac{1}{n} \longrightarrow 3$, bo w każdym przedziale $(3-\varepsilon, 3+\varepsilon)$ leżą prawie wszystkie wyrazy ciągu.
(c) $c \longrightarrow c$, bo w każdym przedziale $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ leżą wszystkie (bez wyjątku) wyrazy ciągu stałego (c).
(d) Ciąg $((-1)^n)$ jest rozbieżny, bo w żadnym przedziale długości mniejszej niż 2 nie mogą leżeć prawie wszystkie wyrazy ciągu.

Twierdzenie 3.8.7. *Jeśli $a_n \longrightarrow a$ i $b_n \longrightarrow b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, to*
(a) $a_n \pm b_n \longrightarrow a \pm b$,
(b) $a_n b_n \longrightarrow ab$,
(c) jeśli dodatkowo $b_n \neq 0 \neq b$, $n \in \mathbb{N}$, to $a_n/b_n \longrightarrow a/b$.

Przykład 3.8.8. (a) Ponieważ $c \longrightarrow c$ i $\dfrac{1}{n} \longrightarrow 0$, więc $\dfrac{c}{n} \longrightarrow c \cdot 0 = 0$. Podobnie, $\dfrac{1}{n^2} \longrightarrow 0$, bo $\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1}{n} \longrightarrow 0 \cdot 0 = 0$. Ogólnie, $\dfrac{1}{n^k} \longrightarrow 0$ dla $k \in \mathbb{N}$.
(b) $5 + \dfrac{3}{n} - \dfrac{1}{n^2} \longrightarrow 5 + 0 - 0 = 5$.
(c) $\dfrac{2n-7}{3n+1} \longrightarrow \dfrac{2}{3}$, bo $\dfrac{2n-7}{3n+1} = \dfrac{2-7/n}{3+1/n}$ oraz $2 - \dfrac{7}{n} \longrightarrow 2$ i $3 + \dfrac{1}{n} \longrightarrow 3$.
(d) $\dfrac{3n^3 - n + 4}{5n^3 - 2n} = \dfrac{3 - 1/n^2 + 4/n^3}{5 - 2/n^2} \longrightarrow \dfrac{3}{5}$.

Definicja 3.8.9 (Granica niewłaściwa ciągu)**.** Mówimy, że ciąg (a_n) ma *granicę niewłaściwą* ∞ (odp. $-\infty$), jeśli

$$\forall_{M\in\mathbb{R}} \, \exists_{n_0\in\mathbb{N}} \, \forall_{n>n_0} \, a_n > M$$
$$(\text{odp. } \forall_{M\in\mathbb{R}} \, \exists_{n_0\in\mathbb{N}} \, \forall_{n>n_0} \, a_n < -M)$$

(wyrazy a_n ze wzrostem wskaźnika n zbliżają się do ∞ (odp. $-\infty$)), co zapisujemy

$$a_n \longrightarrow \infty \text{ gdy } n \longrightarrow \infty \qquad \text{lub} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$
$$(\text{odp. } a_n \longrightarrow -\infty \text{ gdy } n \longrightarrow \infty \qquad \text{lub} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty).$$

Czasem dla wygody piszemy $a_n \longrightarrow \pm\infty$ lub $\lim a_n = \pm\infty$.

Przykład 3.8.10. (a) $n \longrightarrow +\infty$, $2^n \longrightarrow +\infty$, $n^2 - n \longrightarrow +\infty$.
(b) $-n \longrightarrow -\infty$, $n - n^2 \longrightarrow +\infty$.
(c) Ciągi mające granicę $-\infty$ lub $+\infty$ zaliczamy do rozbieżnych. Ciąg rozbieżny, który nie ma granicy niewłaściwej $-\infty$ ani $+\infty$, nazywamy *oscylującym.* Ciągami takimi są np. $((-1)^n)$, $((-2)^n)$.

Twierdzenie 3.8.11. *(a) Jeśli $k \in \mathbb{N}$, to $\sqrt[k]{n} \longrightarrow \infty$, gdy $n \longrightarrow \infty$.*
(b) Jeśli $a > 0$, to $n^a \longrightarrow \infty$, jeśli $a < 0$, to $n^a \longrightarrow 0$, gdy $n \longrightarrow \infty$.
(c) Jeśli $a > 1$, to $a^n \longrightarrow \infty$, jeśli $-1 < a < 1$, to $a^n \longrightarrow 0$, gdy $n \longrightarrow \infty$.

Definicja 3.8.12. *Rozszerzonym systemem liczb rzeczywistych* nazywamy zbiór $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Zachowując naturalny porządek w zbiorze $\mathbb{R}$ przyjmujemy

$$-\infty < x < \infty, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Uwaga 3.8.13. (a) Przyjmujemy następującą konwencję
(i) jeśli $x \in \mathbb{R}$, to $x + \infty = \infty + x = \infty$, $x - \infty = -\infty + x = -\infty$, $x/\infty = x/(-\infty) = 0$;
(ii) jeśli $x > 0$, to $x \cdot \infty = \infty \cdot x = \infty$, $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty$;
(iii) jeśli $x < 0$, to $x \cdot \infty = \infty \cdot x = -\infty$, $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = \infty$;
(iv) $\infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$; $\infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty$.
(b) Operacje $\infty - \infty$, $-\infty + \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $(\pm\infty) \cdot 0$, $\pm\infty/\infty$ oraz $0/0$ nie są określone.

Przykład 3.8.14. (a) $n^2 \longrightarrow \infty$.
(b) $2^n \longrightarrow \infty$.
(c) $\sqrt{n} \longrightarrow \infty$.

Twierdzenie 3.8.15. *Jeśli $a_n \longrightarrow a$ i $b_n \longrightarrow b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, to*
(a) $a_n \pm b_n \longrightarrow a \pm b$,
(b) $a_n b_n \longrightarrow ab$,
(c) jeśli dodatkowo $b_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, to $a_n/b_n \longrightarrow a/b$,
o ile tylko działania $a \pm b$, ab i a/b są określone. Ponadto, jeśli $b_n \longrightarrow 0$ i $b_n > 0$, to $1/b_n \longrightarrow +\infty$.

Przykład 3.8.16. (a) $n^3 - n^2 + 10n - 1 = n^3 \left(1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{10}{n^2} - \dfrac{1}{n^3}\right) = \infty \cdot (1 - 0 + 0 - 0) = \infty$.
(b) Ogólnie, jeśli $a_p \neq 0$, to $a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \cdots + a_1 n + a_0 \longrightarrow \operatorname{sgn}(a_p)\infty$.
(c) $\dfrac{2n^2 - 1}{1 - n} = \dfrac{2n - 1/n}{1/n - 1} \longrightarrow -\infty$.
(d) $\dfrac{1}{n^2 - 3n^5} = \dfrac{1}{n^5(1/n^3 - 3)} = \dfrac{1}{n^5} \dfrac{1}{1/n^3 - 3} \longrightarrow 0$.
(e) Ogólnie, jeśli $a_p \neq 0 \neq b_q$, to $\dfrac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \cdots + b_1 n + b_0} \longrightarrow \begin{cases} 0, & \text{gdy } p < q \\ \dfrac{a_p}{b_q}, & \text{gdy } p = q \\ \operatorname{sgn}\left(\dfrac{a_p}{b_q}\right)\infty, & \text{gdy } p > q \end{cases}$.
(f) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \dfrac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \longrightarrow 0$.
(g) $\dfrac{4^n + 5^n}{3^n + 2^n} = \dfrac{(4/3)^n + (5/3)^n}{1 + (2/3)^n} \longrightarrow \infty$.
(h) $\dfrac{4^n - 5^n}{3^n + 2^n} = \dfrac{(4/3)^n - (5/3)^n}{1 + (2/3)^n} = \dfrac{(5/3)^n((4/5)^n - 1)}{1 + (2/3)^n} \longrightarrow -\infty$.

Zadanie 3.8.17. Obliczyć granice ciągów
(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{n} - \dfrac{10}{\sqrt{n}}$,
(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n - 10}{3}$,
(3) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^3 - 3n^2 + 10n - 120)$,
(4) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 - n + 2n^2 - 3n^3 + 4n^4 - 5n^5)$,
(5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n - 3}{6 - 5n}$,
(6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3 - 4n - 1}{6n + 3n^2 - n^3}$,
(7) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n - 1)^2}{(4n - 1)(3n + 2)}$,
(8) $\lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{2n - 3}{3n + 1})^2$,

(9) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2-5n-10n^2}{3n+15}$,

(10) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1-n^3}{(1-n)^2}$,

(11) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1-n^3}{(1-n^2)^2}$,

(12) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2+5n-6}{n^4+5n^2-6}$,

(13) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(\sqrt{n}+3)^2}{n+1}$,

(14) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}}$,

(15) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}{(\sqrt{n}-1)^2}$,

(16) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1})$,

(17) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$,

(18) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2^n-3^n}{5^n+2^n}$,

(19) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2^n-5^n}{3^n+2^n}$,

(20) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2^{3n+1}-5}{8^n+3}$,

(21) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2^{3n+1}-5}{8^n+3}$,

(22) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2\cdot 3^{n+1}-8}{4\cdot 9^{n-1}+1}$,

(23) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3^{n-1}-2^{n-2}}{3^n}$.

Twierdzenie 3.8.18. *Niech (a_n) będzie ciągiem geometrycznym o ilorazie q i $a_1 \neq 0$. Wtedy ciąg (S_n) ma granicę S wtedy i tylko wtedy gdy $|q| < 1$. W takim przypadku*

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

nazywamy sumą nieskończoną ciągu (a_n).

Przykład 3.8.19. Obliczyć sumę

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots.$$

Jest to suma nieskończona S ciągu geometrycznego o wyrazie pierwszym $a_1 = 1$ i ilorazie $q = \frac{1}{2}$. Zatem

$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Zadanie 3.8.20. (1) Obliczyć sumę

(a) $-2 + \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{9} + \dfrac{2}{27} - \dots$,

(b) $4 - 3 + \dfrac{9}{4} - \dfrac{27}{16} + \dots$.

(2) W trójkąt równoboczny o boku długości 1 wpisujemy okrąg, kolejne okręgi wpisujemy w trzech wierzchołkach trójkąta w ten sposób, że są one styczne do dwóch boków trójkąta i okręgu. Procedurę kontynuujemy w nieskończoność. Obliczyć sumę pól powstałych kół.

(3) Odcinek długości d podzielono na n równych części. Na każdej z nich zbudowano trójkąty równoboczne. Obliczyć granicę pól S_n i obwodów P_n otrzymanej figury przy $n \longrightarrow \infty$.

(4) Obliczyć sumę n początkowych wyrazów ciągu $1, 11, 111, 1111, \dots$.

Uwaga 3.8.21. (a) Przyjmujemy następującą konwencję ($x \in \mathbb{R}$)

(i) jeśli $x \neq 0$, to $0^x = 0^{-\infty} = 0^{\infty} = 0$,

(ii) jeśli $0 < x < 1$, to $x^{-\infty} = \infty$, $x^{\infty} = 0$,

(iii) jeśli $x > 1$, to $x^{-\infty} = 0$, $x^{\infty} = \infty$,

(iv) jeśli $x < 0$, to $\infty^x = \infty^{-\infty} = 0$,
(v) jeśli $x > 0$, to $\infty^x = \infty^{\infty} = \infty$.

(b) Operacje 0^0, $1^{\pm\infty}$, ∞^0 nie są określone.

Twierdzenie 3.8.22. *(a) Jeśli $a > 0$, to $\sqrt[n]{a} \longrightarrow 1$, gdy $n \longrightarrow \infty$.*
(b) $\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$, gdy $n \longrightarrow \infty$.

Twierdzenie 3.8.23 (Twierdzenie o trzech ciągach)**.** *Jeśli wszystkie (poza co najwyżej skończoną liczbą) wyrazy ciągów (a_n), (b_n), (c_n) spełniają nierówności*

$$a_n \le b_n \le c_n \tag{3.16}$$

oraz $a_n \longrightarrow g$ i $c_n \longrightarrow g$, to $b_n \longrightarrow g$.

Przykład 3.8.24. Obliczymy granicę ciągu o wyrazie ogólnym $\sqrt[n]{2^n + 3^n}$. Ponieważ

$$3 = \sqrt[n]{3^n} < \sqrt[n]{2^n + 3^n} < \sqrt[n]{3^n + 3^n} = \sqrt[n]{2 \cdot 3^n} = \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{3^n} = 3\sqrt[n]{2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

i skrajne ciągi dążą do 3, więc $\sqrt[n]{2^n + 3^n} \longrightarrow 3$.

Zadanie 3.8.25. Obliczyć granice ciągów

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n}$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{(2/3)^n + (3/4)^n}$,

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n \sin n!}{n^2 + 1}$.

Twierdzenie 3.8.26. *Niech $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, i niech*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow g.$$

(a) Jeśli $g < 1$, to $a_n \longrightarrow 0$.
(b) Jeśli $g > 1$, to $a_n \longrightarrow +\infty$.

Przykład 3.8.27. $\dfrac{n^3}{3^n} \longrightarrow 0$, ponieważ

$$\frac{\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\frac{n^3}{3^n}} = \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \frac{3^n}{n^3} = \frac{3^n}{3^{n+1}} \frac{(n+1)^3}{n^3} = \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \longrightarrow \frac{1}{3} < 1.$$

Zadanie 3.8.28. Obliczyć granice

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{10}}{2^n}$, (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n^n}$, (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n}$, (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n 3^{2n}}{n!}$, (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n}$.

3.9. Liczba e.

Twierdzenie 3.9.1. *Ciąg $((1 + 1/n)^n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny.*

Definicja 3.9.2.

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Liczba e nazywana jest także *liczbą Napiera*[9], oznaczenie „e” wprowadził w 1736 roku Euler[10], który wykazał, że e jest liczbą niewymierną. W 1873 roku Hermite[11] pokazał, że e jest przestępna. W przybliżeniu, $e \approx 2{,}718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\ldots$.

Dowodzi się, że

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \ldots$$

Im większe weźmiemy n, tym dokładniejsze przybliżenie otrzymamy. Wzór ten bardzo szybko daje dobre przybliżenia, dla $n = 10$ otrzymujemy dokładną wartość liczby e do piątej cyfry po przecinku.

[9] John Napier Lord of Merchiston (ur. 1550, zm. 4 kwietnia 1617) — szkocki właściciel ziemski, antypapista, matematyk, odkrywca logarytmów.

[10] Leonhard Euler (ur. 15 kwietnia 1707 w Bazylei, zm. 18 września 1783 w Petersburgu) — szwajcarski matematyk i fizyk.

[11] Charles Hermite (ur. 24 grudnia 1822, zm. 14 stycznia 1901) — matematyk francuski.

Definicja 3.9.3. $\ln x := \log_e x$ nazywamy *logarytmem naturalnym.*

Twierdzenie 3.9.4. *(a) Jeśli* $a_n \longrightarrow 0$ *i* $a_n \neq 0$, *to* $(1+a_n)^{1/a_n} \longrightarrow e$.
(b) Jeśli $a_n \longrightarrow a$, *gdzie* $a > 0$ *i* $b_n \longrightarrow b$, *to* $a_n^{b_n} \longrightarrow a^b$, *o ile* a^b *ma sens.*

Przykład 3.9.5. Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} (1-3/n)^{n+1}$. Zauważmy, że

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{-3}{n}\right)^{-n/3}\right)^{-3(n+1)/n} = e^{-3},$$

ponieważ, na podstawie powyższego twierdzenia dla $a_n = -3/n$, mamy

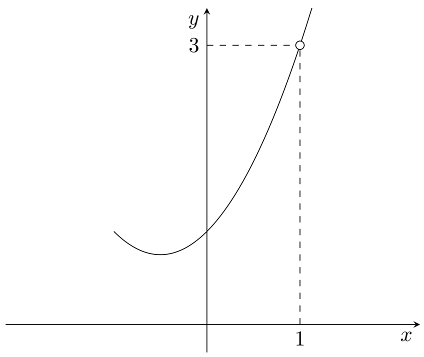
$$\left(1 + \frac{-3}{n}\right)^{-n/3} \longrightarrow e > 0 \quad \text{i} \quad \frac{-3(n+1)}{n} \longrightarrow -3.$$

Zadanie 3.9.6. Obliczyć granice

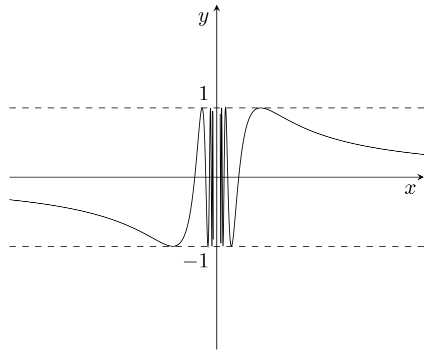
(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+5}{n}\right)^{2n}$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2+n^2}{n^2}\right)^{n^2}$,

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{5}{n}\right)^{-n-1}$.



RYSUNEK 31. $y = \frac{x^3-1}{x-1}$.



RYSUNEK 32. $y = \sin \frac{1}{x}$.

4. ELEMENTY RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO FUNKCJI JEDNEJ ZMIENNEJ

4.1. Granica funkcji. Ciągłość funkcji.

Definicja 4.1.1. Niech $X \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. Mówimy, że a jest *punktem skupienia* zbioru X (piszemy $a \in X'$), jeśli istnieje ciąg $(x_n) \subset X \setminus \{a\}$ taki, że $x_n \longrightarrow a$. Zbiór X' punktów skupienia zbioru X nazywany jest czasem *pochodną* zbioru X.

Przykład 4.1.2. (a) Niech $X = (0,1] \cup \{2\}$. Wtedy $X' = [0,1]$.
(b) Nie każdy element zbioru X jest jego punktem skupienia, np. w powyższym przykładzie $2 \in X$, ale $2 \notin X'$. Punkty zbioru $X \setminus X'$ nazywamy *punktami izolowanymi* zbioru X. W powyższym przykładzie 2 jest jedynym punktem izolowanym zbioru X.
(c) Punkt skupienia zbioru X może nie być elementem zbioru X, np. w powyższym przykładzie $0 \notin X$, ale $0 \in X'$.

Definicja 4.1.3. Niech $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in X'$, $g \in \mathbb{R}$. Mówimy, że funkcja f *ma w punkcie a granicę g*, co zapisujemy

$$\lim_{x \to a} f(x) = g \quad \text{lub} \quad f(x) \longrightarrow g, \text{ gdy } x \longrightarrow a,$$

jeśli dla dowolnego ciągu $(x_n) \subset X \setminus \{a\}$ zbieżnego do a ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do g.

Przykład 4.1.4. (a) Funkcja $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, ma w punkcie 1 granicę 3 (choć nie jest w tym punkcie określona). Istotnie, zauważmy najpierw, że $1 \in (\mathbb{R} \setminus \{1\})'$. Jeśli $(x_n) \subset \mathbb{R} \setminus \{1\}$ jest ciągiem takim, że $x_n \longrightarrow 1$, to, na podstawie twierdzeń o granicy ciągów,

$$f(x_n) = \frac{x_n^3 - 1}{x_n - 1} = \frac{(x_n - 1)(x_n^2 + x_n + 1)}{x_n - 1} = x_n^2 + x_n + 1 \longrightarrow 1^2 + 1 + 1 = 3.$$

Ciąg (x_n) był dowolny, zatem $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-1}{x-1} = 3$ (Rysunek 31).
(b) $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 3x^2 - 1) = -5$, bo jeśli $x_n \longrightarrow 2$, to $x_n^3 - 3x_n^2 - 1 \longrightarrow 8 - 12 - 1 = -5$.
(c) Granica $\lim\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{1}{x}$ nie istnieje (Rysunek 32), bo

$$x_n' = \frac{1}{n\pi} \longrightarrow 0, \quad x_n'' = \frac{2}{\pi(1+4n)} \longrightarrow 0,$$

ale

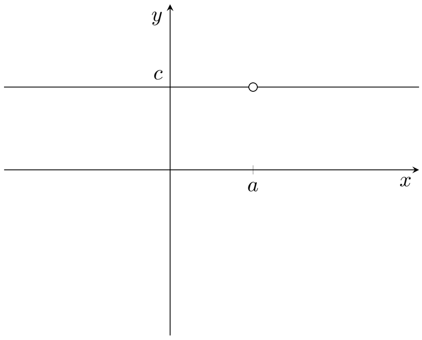
$$\sin \frac{1}{x_n'} = \sin(n\pi) = 0 \longrightarrow 0, \quad \sin \frac{1}{x_n''} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1 \longrightarrow 1.$$

Definicja 4.1.5. Niech $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in X'$, $g \in \mathbb{R}$. Mówimy, że funkcja f *ma w punkcie a granicę prawostronną* (odp. *lewostronną*) g, co zapisujemy

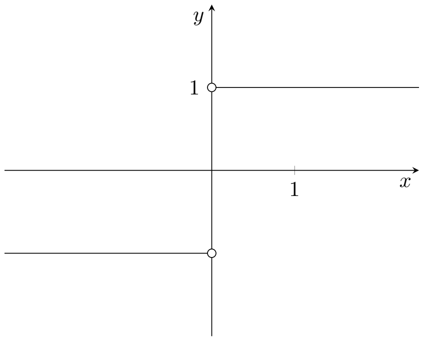
$$\lim_{x \to a+} f(x) = g \text{ (odp. } \lim_{x \to a-} f(x) = g) \quad \text{lub} \quad f(x) \longrightarrow g, \text{ gdy } x \longrightarrow a+ \ (\text{odp.} x \longrightarrow a-,$$

jeśli dla dowolnego ciągu $(x_n) \subset X \setminus \{a\}$, $x_n > a$, (odp. $x_n < a$) zbieżnego do a ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do g.

Granice prawostronna i lewostronna noszą wspólną nazwę *granic jednostronnych*.



Rysunek 33. $f(x) = c$.



Rysunek 34. $f(x) = \frac{|x|}{x}$.

Przykład 4.1.6. (a) Jeśli $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$, to $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} f(x) = c$ dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ (Rysunek 33).

(b) $\lim\limits_{x\to 0-} |x|/x = -1$, $\lim\limits_{x\to 0+} |x|/x = 1$ (Rysunek 34).

(c) Jeśli $p > 0$, to $\lim\limits_{x\to 0+} x^p = 0$ (Rysunek 19).

(d) Jeśli $p < 0$, to $\lim\limits_{x\to 0+} x^p$ nie istnieje, bo gdy x zbliża się do zera z prawej strony, wartość x^p rośnie nieograniczenie (Rysunek 20).

(e) Granice $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin(1/x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \sin(1/x)$ nie istnieją (Rysunek 32).

Zadanie 4.1.7. Wyznaczyć granice jednostronne funkcji

(1) $f(x) = \lfloor x \rfloor$ w punktach $x \in \mathbb{Z}$,

(2) $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ w punktach $x \in \mathbb{Z}$.

Obserwacja 4.1.8. Jeśli $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \{x \in X : x < a\}'$, $a \in \{x \in X : x > a\}'$, to

$$\lim_{x\to a} f(x) \text{ istnieje } \iff \lim_{x\to a+} f(x),\ \lim_{x\to a-} f(x) \text{ istnieją oraz } \lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x).$$

Przykład 4.1.9. Funkcja z Przykładu 4.1.6 (a) ma granicę w punkcie a, zaś funkcja z Przykładu 4.1.6 (b) nie ma granicy w punkcie 0.

Twierdzenie 4.1.10. *Jeśli* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ *oraz* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, *to*

(a) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$,

(b) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = ab$,

(c) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$, *o ile* $b \neq 0$,

(d) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \operatorname{sgn}(a)\infty$, *o ile* $a \neq 0 = b$ *oraz* $g(x) > 0$ *dla* $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap X$ *dla pewnego* $\varepsilon > 0$, *gdzie* X *jest wspólną dziedziną funkcji* f *i* g.

Definicja 4.1.11. Niech $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in X$. Mówimy, że funkcja f jest *ciągła w punkcie* a, jeśli

$$\lim_{x\to a} f(x) \text{ istnieje oraz } \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

(jeśli $a \in X \setminus X'$, to f jest zawsze ciągła w a). Funkcję nazywamy *ciągłą*, jeśli jest ona ciągła w każdym punkcie dziedziny. Funkcję ciągłą określoną w przedziale domkniętym i ograniczonym nazywamy *krzywą*.

Przykład 4.1.12. (a) Funkcja $f(x) = |x|/x$, $x \in \mathbb{R}_*$, jest ciągła.

(b) Funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{gdy } x \neq 0 \\ 1, & \text{gdy } x = 0 \end{cases}$$

nie jest ciągła, ponieważ nie jest ciągła w punkcie $x = 0$. Istotnie, funkcja f nie ma granicy w punkcie $x = 0$ (granice lewo- i prawostronne są różne).

(c) Funkcja
$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{gdy } x \neq 1 \\ 0, & \text{gdy } x = 1 \end{cases}$$
nie jest ciągła, ponieważ nie jest ciągła w punkcie $x = 1$. Istotnie, funkcja f ma granicę w punkcie $x = 1$, ale jest ona różna od wartości funkcji w tym punkcie.

Twierdzenie 4.1.13. *(a) Funkcje wielomianowe, wykładnicze potęgowe i trygonometryczne są ciągłe.*
(b) Funkcja odwrotna do funkcji ciągłej jest funkcją ciągłą. W szczególności, funkcje logarytmiczne i cyklometryczne są ciągłe.
(c) Suma, różnica, iloczyn, iloraz oraz złożenie funkcji ciągłych są ciągłe. W szczególności, funkcje wymierne są ciągłe.

Uwaga 4.1.14. Sklejenie funkcji ciągłych nie musi być funkcją ciągłą. Jeśli $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \cap B = \varnothing$, to *sklejeniem* funkcji f i g nazywamy funkcję $f \cup g : A \cup B \longrightarrow \mathbb{R}$ daną wzorem
$$(f \cup g)(x) := \begin{cases} f(x), & \text{gdy } x \in A \\ g(x), & \text{gdy } x \in B \end{cases}.$$
Istotnie, np. funkcja
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x < 0 \\ 2, & \text{gdy } x \geq 0 \end{cases}$$
jest ciągła w każdym punkcie $x \neq 0$, ale nie jest ciągła w punkcie $x = 0$.

Zadanie 4.1.15. (1) Obliczyć granice
- (a) $\displaystyle\lim_{x\to -4} \frac{16x - x^3}{x^2 + 5x + 4}$,
- (b) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{2 - 3x + x^2}{2 + x - x^2}$,
- (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 + 3x^2 + x}$,
- (d) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$,
- (e) $\displaystyle\lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x + 1}$,
- (f) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{27 - x^3}{x - 3}$,
- (g) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$,
- (h) $\displaystyle\lim_{x\to -5} \frac{x^3 + 125}{2x^2 - 50}$.

(2) Zbadać ciągłość funkcji
- (a) $f(x) = \lfloor x \rfloor$,
- (b) $f(x) = \lfloor x \rfloor$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,
- (c) $f(x) = 1/x$,
- (d) $f(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{gdy } x \neq 0 \\ 0, & \text{gdy } x = 0 \end{cases}$.

4.2. **Granice niewłaściwe. Granice w nieskończoności. Asymptoty funkcji.**

Definicja 4.2.1. Niech $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in X'$. Mówimy, że funkcja f *ma w punkcie a granicę niewłaściwą* $+\infty$ (odp. $-\infty$), co zapisujemy
$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \quad \text{lub} \quad f(x) \longrightarrow +\infty, \text{ gdy } x \longrightarrow a$$
$$\text{odp. } \lim_{x\to a} f(x) = -\infty \quad \text{lub} \quad f(x) \longrightarrow -\infty, \text{ gdy } x \longrightarrow a),$$
jeśli dla dowolnego ciągu $(x_n) \subset X \setminus \{a\}$ zbieżnego do a ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do $+\infty$ (odp. $-\infty$).

Jak przy granicach zwykłych, można mówić o granicy niewłaściwej prawostronnej $\lim_{x\to a+} f(x)$ i lewostronnej $\lim_{x\to a-} f(x)$.

Jeśli funkcja f ma w punkcie a granicę niewłaściwą (odp. prawostronną lub lewostronną), to prostą o równaniu $x = a$ nazywamy *asymptotą pionową* (odp. *prawostronną* lub *lewostronną*) funkcji f.

Przykład 4.2.2. (a) Jeśli $a < 0$, to

$$\lim_{x \to 0+} x^a = \infty.$$

W szczególności, prosta o równaniu $x = 0$ jest asymptotą pionową prawostronną funkcji $x \longmapsto x^a$.

(b) Jeśli $k \in \mathbb{Z}$, to

$$\lim_{x \to (\pi/2+k\pi)-} \operatorname{tg} x = \infty, \qquad \lim_{x \to (\pi/2+k\pi)+} \operatorname{tg} x = -\infty.$$

W szczególności, dla dowolnego $k \in \mathbb{Z}$, prosta o równaniu $x = \pi/2 + k\pi$ jest asymptotą pionową funkcji tg (Rysunek 16).

(c) Jeśli $a > 0$ i $a \neq 1$, to

$$\lim_{x \to 0+} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & \text{gdy } a > 1 \\ +\infty, & \text{gdy } 0 < a < 1 \end{cases}.$$

W szczególności, prosta o równaniu $x = 0$ jest asymptotą pionową prawostronną funkcji $x \longmapsto \log_a x$ (Rysunek 24).

Twierdzenie 4.2.3. *Jeśli* $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ *oraz* $\lim_{x \to x_0} g(x) = b$, $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *to, o ile tylko poniższe działania są określone,*

(a) $\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$,

(b) $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = ab$,

(c) $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$,

(d) $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \operatorname{sgn}(a)\infty$, *o ile* $a \neq 0 = b$ *oraz* $g(x) > 0$ *dla* $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap X$ *dla pewnego* $\varepsilon > 0$, *gdzie* X *jest wspólną dziedziną funkcji* f *i* g.

Uwaga 4.2.4. Aby obliczyć granicę funkcji wymiernej gdy $x \longrightarrow a$, wstawiamy do licznika i mianownika wartość $x = a$ i, jeśli działanie ma sens, wynik jest szukaną granicą. Jeśli punkt a jest miejscem zerowym licznika i mianownika, rozkładamy licznik i mianownik na czynniki i skracamy w ułamku czynnik $(x - a)$. Jeśli punkt a jest miejscem zerowym tylko mianownika, to wynik jest nieskończonością ze znakiem zdeterminowanym znakami licznika i mianownika.

Przykład 4.2.5. (a) $\lim_{x \to -1} \dfrac{2x^2 + 2x}{1 + x^3} = \lim_{x \to -1} \dfrac{2x(x+1)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = \lim_{x \to -1} \dfrac{2x}{x^2 - x + 1} = -\dfrac{2}{3}$.

(b) $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \to -2} \dfrac{(x+2)^2(x-2)}{(x+2)(x+1)} = \lim_{x \to -2} \dfrac{(x+2)(x-2)}{x+1} = 0$.

(c) $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 + x - 12}{x^3 - 6x^2 + 9x}$ nie istnieje, bo

(i) $\lim_{x \to 3-} \dfrac{x^2 + x - 12}{x^3 - 6x^2 + 9x} = \lim_{x \to 3-} \dfrac{(x-3)(x+4)}{x(x-3)^2} = \lim_{x \to 3-} \dfrac{x+4}{x(x-3)} \overset{\frac{7}{0-}}{=} -\infty$,

(ii) $\lim_{x \to 3+} \dfrac{x^2 + x - 12}{x^3 - 6x^2 + 9x} = \lim_{x \to 3+} \dfrac{(x-3)(x+4)}{x(x-3)^2} = \lim_{x \to 3+} \dfrac{x+4}{x(x-3)} \overset{\frac{7}{0+}}{=} +\infty$.

(d) Wyznaczyć asymptoty pionowe funkcji

$$f(x) = \frac{1 - x}{1 + x - 2x^2}.$$

Zauważmy, że $1 + x - 2x^2 = 0$ dla $x = 1$ lub $x = -1/2$. Ponieważ f, będąc funkcją wymierną, jest funkcją ciągłą, zatem funkcja f może posiadać granice niewłaściwe tylko w punktach leżących poza dziedziną, tj. w punktach $x = 1$ i $x = -1/2$. Bez trudu sprawdzamy, że

(i) $\lim_{x \to 1} \dfrac{1 - x}{1 + x - 2x^2} = \lim_{x \to 1} \dfrac{1 - x}{(1-x)(2x+1)} = \lim_{x \to 1} \dfrac{1}{2x+1} = \dfrac{1}{3}$,

(ii) $\lim_{x \to -1/2-} \dfrac{1 - x}{(1-x)(2x+1)} = \lim_{x \to -1/2-} \dfrac{1}{2x+1} \overset{\frac{1}{0-}}{=} -\infty$,

(iii) $\lim_{x \to -1/2+} \dfrac{1 - x}{(1-x)(2x+1)} = \lim_{x \to -1/2+} \dfrac{1}{2x+1} \overset{\frac{1}{0+}}{=} \infty$.

Stąd prosta o równaniu $x = -1/2$ jest jedyną asymptotą pionową funkcji f.

Zadanie 4.2.6. (1) Wyznaczyć granice jednostronne

(a) $\lim\limits_{x\to 1\pm} \dfrac{1}{1-x^2}$,

(b) $\lim\limits_{x\to 2\pm} \dfrac{x^2-4}{(x-2)^2}$,

(c) $\lim\limits_{x\to -1/2\pm} \dfrac{4x^2-1}{4x^2+4x+1}$,

(d) $\lim\limits_{x\to 3\pm} \dfrac{27-x^3}{x^3-9x^2+27x^2-27}$,

(e) $\lim\limits_{x\to -1\pm} \dfrac{x^2-1}{(1+x)^3}$,

(f) $\lim\limits_{x\to -5\pm} \dfrac{x^3-125}{2x^2-50}$.

(2) Wyznaczyć granice jednostronne

(a) $\lim\limits_{x\to 0\pm} 2^{1/x}$,

(b) $\lim\limits_{x\to 1\pm} e^{1/(1-x^2)}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0\pm} \dfrac{\lfloor x\rfloor}{x}$,

(d) $\lim\limits_{x\to 0\pm} \dfrac{1}{x^2+2^{2^{1/x}}}$.

(3) Wyznaczyć asymptoty pionowe funkcji

(a) $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$,

(b) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$,

(c) $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$,

(d) $f(x) = \dfrac{4}{x^2+x+1}$.

Definicja 4.2.7. Niech $X \subset \mathbb{R}$. Mówimy, że $+\infty$ (odp. $-\infty$) jest *punktem skupienia* zbioru X (piszemy $+\infty \in X'$ (odp. $-\infty \in X'$)), jeśli istnieje ciąg $(x_n) \subset X$ taki, że $x_n \longrightarrow +\infty$ (odp. $x_n \longrightarrow -\infty$).

Przykład 4.2.8. (a) Niech $X = (0, +\infty)$. Wtedy $-\infty \notin X'$, $+\infty \in X'$.
(b) Niech $X = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Wtedy $\pm\infty \in X'$.

Definicja 4.2.9. Niech $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $+\infty \in X'$ (odp. $-\infty \in X$), $g \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Mówimy, że funkcja f *ma w* $+\infty$ (odp. $-\infty$) *granicę* g, co zapisujemy

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = g \quad \text{lub} \quad f(x) \longrightarrow g,\ \text{gdy } x \longrightarrow +\infty$$
$$\text{odp.} \ \lim_{x\to-\infty} f(x) = g \quad \text{lub} \quad f(x) \longrightarrow g,\ \text{gdy } x \longrightarrow -\infty),$$

jeśli dla dowolnego ciągu $(x_n) \subset X$ zbieżnego do $+\infty$ (odp. $-\infty$) ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do g.

Jeśli granica g jest właściwa (tzn. $g \in \mathbb{R}$), to mówimy, że prosta o równaniu $y = g$ jest *asymptotą poziomą prawostronną* (odp. *lewostronną*) funkcji f. Asymptotę poziomą lewo- i prawostronną nazywamy *asymptotą poziomą*.

Przykład 4.2.10. (a) Jeśli $a > 0$, to

$$\lim_{x\to\infty} x^a = +\infty.$$

W szczególności, dla $a > 0$ funkcja $x \longmapsto x^a$ nie ma asymptoty poziomej prawostronnej.

(b) Jeśli $a < 0$, to

$$\lim_{x\to\infty} x^a = 0.$$

W szczególności, prosta o równaniu $y = 0$ jest asymptotą poziomą prawostronną funkcji $x \longmapsto x^a$, $a < 0$. Jeśli dodatkowo $a \in \mathbb{Z}$, to także

$$\lim_{x\to-\infty} x^a = 0.$$

W szczególności, dla $a \in \mathbb{Z}$, $a < 0$, prosta o równaniu $y = 0$ jest asymptotą poziomą (obustronną) funkcji $x \longmapsto x^a$.

(c) Zauważmy, że
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-2x}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{x} - 2\right) = -2.$$
W szczególności, prosta o równaniu $y = -2$ jest asymptotą poziomą funkcji $x \longmapsto \dfrac{1-2x}{x}$.

(d) Jeśli $a > 1$, to
$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x\to\infty} a^x = \infty.$$
W szczególności, dla $a > 1$, prosta o równaniu $y = 0$ jest asymptotą poziomą lewostronną funkcji $x \longmapsto a^x$. Funkcja ta nie ma asymptoty poziomej prawostronnej (Rysunek 23).

(e) Jeśli $0 < a < 1$, to
$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} a^x = 0.$$
W szczególności, dla $0 < a < 1$, prosta o równaniu $y = 0$ jest asymptotą poziomą prawostronną funkcji $x \longmapsto a^x$. Funkcja ta nie ma asymptoty poziomej lewostronnej.

(f) Zauważmy, że
$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arc\,tg} x = -\frac{\pi}{2}.$$
W szczególności, prosta o równaniu $y = -\pi/2$ jest asymptotą poziomą lewostronną funkcji $\operatorname{arc\,tg}$ (Rysunek 29).

(g) Zauważmy, że
$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2}.$$
W szczególności, prosta o równaniu $y = \pi/2$ jest asymptotą poziomą prawostronną funkcji $\operatorname{arc\,tg}$ (Rysunek 29).

(h) Zauważmy, że
$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arc\,ctg} x = \pi.$$
W szczególności, prosta o równaniu $y = \pi$ jest asymptotą poziomą lewostronną funkcji $\operatorname{arc\,ctg}$ (Rysunek 30).

(i) Zauważmy, że
$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{arc\,ctg} x = 0.$$
W szczególności, prosta o równaniu $y = 0$ jest asymptotą poziomą prawostronną funkcji $\operatorname{arc\,ctg}$ (Rysunek 30).

(j) Zauważmy na koniec, że granica
$$\lim_{x\to\infty} \sin x$$
nie istnieje, bo np. $n\pi/2 \longrightarrow \infty$, natomiast $\sin(n\pi/2) = 0$ dla n parzystych i $|\sin(n\pi/2)| = 1$ dla n nieparzystych.

Twierdzenie 4.2.11. *Jeśli* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = a$, $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = b$, *gdzie* $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, *to, jeśli tylko poniższe działnia są określone,*

(a) $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$,

(b) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)g(x) = ab$,

(c) $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$,

(d) $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \operatorname{sgn}(a)\infty$, *o ile* $a \neq 0 = b$ *oraz* $g(x) > 0$ *dla* $|x| \in (M, +\infty) \cap X$ *dla pewnego* $M > 0$, *gdzie* X *jest wspólną dziedziną funkcji* f *i* g.

Uwaga 4.2.12. Aby obliczyć granicę funkcji wymiernej gdy $x \longrightarrow \pm\infty$, dzielimy licznik i mianownik przez x w najwyższej potędze mianownika.

Przykład 4.2.13. (a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2 - x - 4x^3}{5 + 6x - 7x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2/x^2 - 1/x - 4x}{5/x^2 + 6/x - 7} = -\infty.$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1 - 2x + 7x^2}{4x^2 - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x^2 - 2/x + 7}{4 - 1/x^2} = \frac{7}{4}.$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1 + x + 2x^2}{x(x^3 + 1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x^4 + 1/x^3 + 2/x^2}{1 + 1/x^3} = 0.$

Zadanie 4.2.14. Wyznaczyć granice

(1) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(2x^3-10x^3+15x-3)$,

(2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^4}{x^3-x}$,

(3) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1-2x-3x^3}{(x-1)(x+1)}$,

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[4]{3x^8-4}}{\sqrt[3]{3x^6-10x^3+x+11}}$,

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$.

Definicja 4.2.15. Niech $f: X\longrightarrow\mathbb{R}$, $+\infty\in X'$ (odp. $-\infty\in X'$). Jeśli

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax-b)=0\quad(\text{odp. }\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax-b)=0),$$

to prostą o równaniu $y=ax+b$ nazywamy *asymptotą ukośną prawostronną* (odp. *lewostronną*) funkcji f.

Uwaga 4.2.16. Asymptota pozioma jest szczególnym przypadkiem asymptoty ukośnej ($a=0$).

Twierdzenie 4.2.17. *Prosta o równaniu $y=ax+b$ jest asymptotą ukośną prawostronną (odp. lewostronną) funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax),$$

$$(\text{odp. }a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)).$$

W szczególności, funkcja nie ma asymptoty ukośnej prawostronnej (odp. lewostronnej), jeśli choć jedna z tych granic nie istnieje (w sensie właściwym).

Przykład 4.2.18. (a) Funkcja

$$f(x)=\frac{x^3-2x^2+3}{2x^2}$$

ma asymptotę ukośną o równaniu

$$y=\frac{1}{2}x-1$$

(Rysunek 35), ponieważ

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-2x^2+3}{2x^3}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x}+\frac{3}{2x^3}\right)=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-2x^2+3}{2x^2}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+3}{2x^2}=-1.$$

(b) Funkcja $f(x)=x^3$ nie ma asymptoty ukośnej, ponieważ

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}x^2=\infty.$$

(c) Wykres funkcji $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ jest jedną z dwóch gałęzi hiperboli $y^2-x^2=1$ i ma dwie asymptoty ukośne: prawostronną $y=x$ i lewostronną $y=-x$ (Rysunek 36). Istotnie,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1,$$

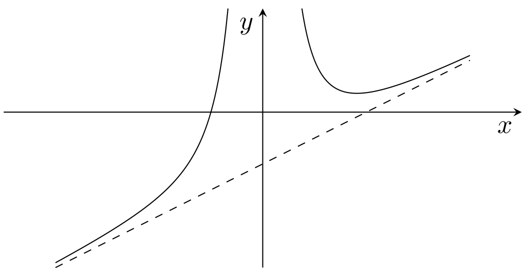
$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=0,$$

skąd wnioskujemy, że $y=x$ jest asymptotą ukośną prawostronną oraz

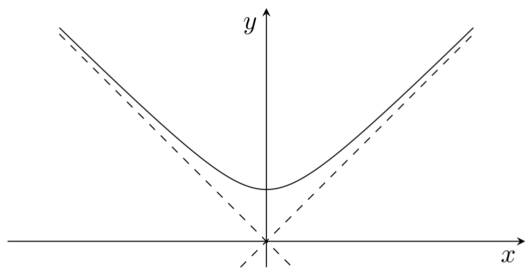
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{-\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=-1,$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}=0,$$

skąd wnosimy, że $y=-x$ jest asymptotą ukośną lewostronną.



Rysunek 35. $f(x) = \frac{x^3-2x^2+3}{2x^2}$.



Rysunek 36. $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

(d) Funkcja $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ nie ma asymptot ukośnych, ponieważ $\pm\infty \notin X'$, gdzie $X = [-1,1]$ jest maksymalną możliwą dziedziną funkcji f.

Zadanie 4.2.19. Wyznaczyć asymptoty funkcji

(1) $f(x) = \dfrac{2x-2}{x-2}$,

(2) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{1-x}$,

(3) $f(x) = \arccos \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$,

(4) $f(x) = \sqrt{x+x^2}$,

(5) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$,

(6) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4-4x^2+10}}{x+2}$.

4.3. **Pochodna funkcji.**

Definicja 4.3.1. Niech P będzie przedziałem, $a \in P$, $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$. *Pochodną funkcji f w punkcie a* nazywamy granicę ilorazu różnicowego

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \tag{4.1}$$

i oznaczamy $f'(a)$ lub $\frac{df}{dx}(a)$. Funkcja nie ma pochodnej w punkcie a, jeśli granica (4.1) nie istnieje. Funkcję mającą pochodną w każdym punkcie dziedziny nazywamy *różniczkowalną*. Wówczas funkcję $f' : P \ni x \longmapsto f'(x) \in \mathbb{R}$ nazywamy *pochodną* funkcji f.

Twierdzenie 4.3.2. *Funkcja różniczkowalna jest ciągła.*

Przykład 4.3.3. (a) $f(x) = c$. Wówczas

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0,$$

zatem $f'(x) = 0$.

(b) $f(x) = x$. Mamy

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1,$$

zatem funkcja f ma w każdym punkcie x pochodną równą $f'(x) = 1$.

(c) $f(x) = x^2$. Mamy

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x,$$

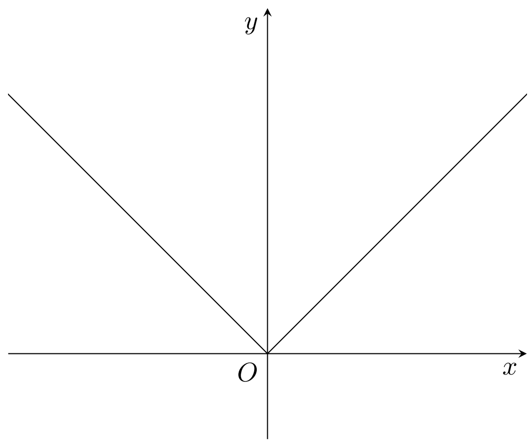
zatem funkcja f ma w każdym punkcie x pochodną $f'(x) = 2x$.

(d) Funkcja $f(x) = |x|$ (Rysunek 37) nie ma pochodnej w punkcie 0, bo granica

$$\lim_{h\to 0} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

nie istnieje. Istotnie,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1, \quad \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1.$$



RYSUNEK 37. $y = |x|$.

Jest to przykład funkcji ciągłej, która nie jest różniczkowalna (por. Twierdzenie 4.3.2). Zauważmy, że w każdym punkcie $x \neq 0$ funkcja ta ma pochodną. Istotnie, dla $x > 0$ mamy także $x + h > 0$ dla dostatecznie małych h, skąd

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1,$$

natomiast dla $x < 0$ mamy także $x + h < 0$ dla dostatecznie małych h, skąd

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-x-h+x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h} = -1.$$

Uwaga 4.3.4 (Interpretacja geometryczna pochodnej)**.** Równanie siecznej AB przecinającej wykres funkcji f (Rysunek 38) w punktach $A = (a, f(a))$ i $B = (a+h, f(a+h))$ ma postać

$$y - f(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}(x - a),$$

zatem iloraz różnicowy

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

jest *tangensem kąta nachylenia siecznej* AB do osi x ($\angle CAB$ na Rysunku 38). Gdy $h \longrightarrow 0$, punkt B zbliża się do A, a sieczna obraca się dookoła punktu A. Jej współczynnik nachylenia dąży do granicy $f'(a)$, zatem sieczna AB zbliża się do prostej przechodzącej przez punkt A o równaniu

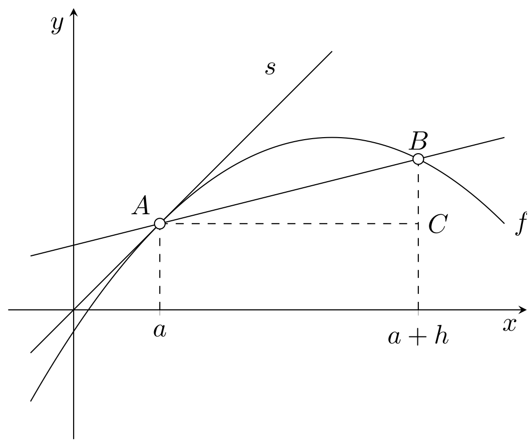
$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \tag{4.2}$$

Prostą tę nazywamy *styczną* do wykresu funkcji f w punkcie A (prosta s na Rysunku 38). Oznaczając przez α jej kąt nachylenia do osi x mamy $f'(a) = \operatorname{tg} \alpha$ (pochodna funkcji w punkcie równa się tangensowi kąta, jaki styczna do wykresu funkcji w danym punkcie tworzy z dodatnim kierunkiem osi x).

Przykład 4.3.5. Wyznaczyć styczną do paraboli $y = x^2$ w punkcie o współrzędnej $x = 1$. Zauważmy, że dla $f(x) = x^2$ mamy $f'(x) = 2x$, skąd $f'(1) = 2$. Ponadto, $f(1) = 1$, skąd równanie szukanej stycznej ma postać

$$y = 2(x - 1) + 1,$$

czyli $y = 2x - 1$.



RYSUNEK 38.

Twierdzenie 4.3.6 (Pochodne funkcji elementarnych). *Funkcje elementarne są różniczkowalne oraz*

$$(x^a)' = ax^{a-1}, \quad a \in \mathbb{R},$$

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad a > 0, \ a \neq 1,$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x},$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{x^2+1}, \quad (\operatorname{arc\,ctg} x)' = \frac{-1}{x^2+1}.$$

Wniosek 4.3.7. W szczególności,

$$(1)' = 0, \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad (e^x)' = e^x, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Twierdzenie 4.3.8 (Pochodne sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu). *Suma, różnica, iloczyn i iloraz funkcji różniczkowalnych f i g są różniczkowalne oraz*

$$(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

W przypadku ilorazu zakładamy, że $v(x) \neq 0$.

Przykład 4.3.9. (a) Jeśli $c \in \mathbb{R}$, to $(cf(x))' = cf'(x)$. Istotnie, $(cf)' = c'f + cf' = 0 \cdot f + cf' = cf'$.
(b) $(x^3 + 2x)' = (x^3)' + 2(x)' = 3x^2 + 2$.
(c) $(x^5 - 3x^2 + 7x - 4)' = (x^5)' - 3(x^2)' + 7(x)' - (4)' = 5x^4 - 6x + 7$.
(d) $(\sin x \cos x)' = (\sin x)' \cos x + \sin x (\cos x)' = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$.
(e) $\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)' = \dfrac{(x^2)'(x-1) - x^2(x-1)'}{(x-1)^2} = \dfrac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$.
(f) $\left(\dfrac{2^x}{\arcsin x}\right)' = \dfrac{2^x \ln 2 \arcsin x - 2^x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin^2 x} = \dfrac{2^x(\sqrt{1-x^2} \ln 2 \arcsin x - 1)}{\sqrt{1-x^2} \arcsin^2 x}$.

Twierdzenie 4.3.10 (Pochodna funkcji złożonej). *Niech funkcja f ma pochodną w punkcie x, a funkcja g ma pochodną w punkcie $f(x)$. Wtedy funkcja złożona $g \circ f$ ma pochodną w punkcie x wyrażoną wzorem*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x). \tag{4.3}$$

Przykład 4.3.11. (a) $h(x) = (x^2 - 1)^5$. Oznaczając $f(x) = x^2 - 1$ otrzymujemy $h(x) = (f(x))^5$, skąd, na mocy wzoru (4.3),

$$h'(x) = 5(f(x))^4 2x = 10x(x^2 - 1)^4.$$

(b) $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. Oznaczając $f(x) = x^2 + 1$ otrzymujemy $h(x) = \sqrt{f(x)}$, skąd

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

(c) Dla $h(x) = \ln \sin x$ mamy
$$h'(x) = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{ctg} x.$$

Wniosek 4.3.12. Pochodna złożenia dowolnej skończonej liczby funkcji różniczkowalnych równa jest iloczynowi pochodnych poszczególnych funkcji.

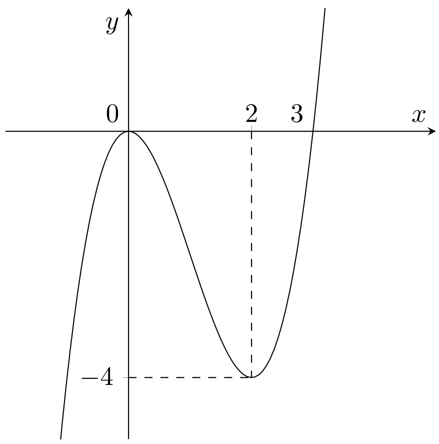
Przykład 4.3.13. Niech $f(x) = \operatorname{arc\,tg}^2 \sqrt{x^2+1}$. Funkcja f jest złożeniem czterech funkcji
$$x \overset{g}{\longmapsto} x^2+1 \overset{h}{\longmapsto} \sqrt{x^2+1} \overset{i}{\longmapsto} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x^2+1} \overset{j}{\longmapsto} \operatorname{arc\,tg}^2 \sqrt{x^2+1},$$
tzn. $f = j \circ i \circ h \circ g$, gdzie
$$g(x) = x^2+1, \quad h(x) = \sqrt{x}, \quad i(x) = \operatorname{arc\,tg} x, \quad j(x) = x^2.$$
W konsekwencji, $f'(x) = j'(i(h(g(x)))) \cdot i'(h(g(x))) \cdot h'(g(x)) \cdot g'(x)$, czyli
$$f'(x) = 2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x^2+1} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{x^2+1}^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{2x \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x^2+1}}{(x^2+2)\sqrt{x^2+1}}.$$

Zadanie 4.3.14. Obliczyć pochodne funkcji
(1) $f(x) = 2x^3 - 6x + 5$,
(2) $f(x) = x^2 e^x$,
(3) $f(x) = \sin(5x-3)$,
(4) $f(x) = x(x^3-1)$,
(5) $f(x) = e^{x^4-2x^2}$,
(6) $f(x) = x - \sin x \cos x$,
(7) $f(x) = (x^2-2x)^3$,
(8) $f(x) = \ln(x^2-4)$,
(9) $f(x) = \ln(\sin x)$,
(10) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$,
(11) $f(x) = x^{1/2} + x^{2/3}$,
(12) $f(x) = x^2(\ln x - \frac{1}{2})$,
(13) $f(x) = \sqrt{x^2-4x+3}$,
(14) $f(x) = \ln x + \sqrt{x^2-a^2}$,
(15) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$,
(16) $f(x) = \ln(\ln x)$.

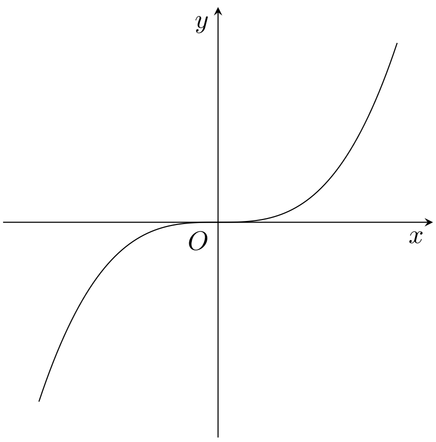
4.4. **Przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji.** Jednym z zastosowań pochodnej jest badanie przebiegu zmienności funkcji.

Twierdzenie 4.4.1 (Monotoniczność funkcji)**.** *Funkcja, której pochodna w danym przedziale jest*
(a) równa zero, jest w tym przedziale stała;
(b) dodatnia, jest w tym przedziale silnie rosnąca;
(c) ujemna, jest w tym przedziale silnie malejąca.

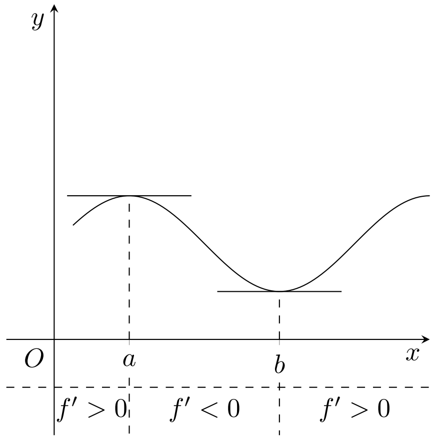
Przykład 4.4.2. Wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji
(a) $f(x) = x^3 - 3x^2$. Zauważmy, że
$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2).$$
Mamy tu $f'(x) > 0$, gdy $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, natomiast $f'(x) < 0$, gdy $x \in (0, 2)$. Funkcja $f(x) = x^3 - 3x^2$ jest więc silnie rosnąca w przedziałach $(-\infty, 0)$ i $(2, \infty)$, silnie malejąca w przedziale $(0, 2)$ (Rysunek 39).
(b) $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$. Zauważmy, że dziedziną funkcji jest zbiór liczb x spełniających nierówność $2-x^2 > 0$, czyli przedział $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Ponadto,
$$f'(x) = \sqrt{2-x^2} + x\frac{-x}{\sqrt{2-x^2}} = \frac{2-x^2-x^2}{\sqrt{2-x^2}} = \frac{2(1-x^2)}{\sqrt{2-x^2}} = \frac{2(1-x)(1+x)}{\sqrt{2-x^2}},$$
skąd $f'(x) > 0$ dla $x \in (-1, 1)$, zaś $f'(x) < 0$ dla $x \in (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$. Funkcja f jest więc silnie rosnąca w przedziale $(-1, 1)$, a silnie malejąca w przedziałach $(-\sqrt{2}, -1)$ i $(1, \sqrt{2})$.



Rysunek 39. $y = x^3 - 3x^2$.



Rysunek 40.



Rysunek 41. $f'(a) = f'(b) = 0$.

Zadanie 4.4.3. Wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji
(1) $f(x) = x(3-x)^2$,
(2) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$,
(3) $f(x) = x^2 e^{-x}$.

Definicja 4.4.4 (Ekstrema)**.** Niech P będzie przedziałem, $a \in P$, $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$. Mówimy, że funkcja f ma w punkcie a *maksimum lokalne* lub krócej *maksimum*, jeśli istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że

$$f(a) \geq f(x), \quad x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap P.$$

Maksimum nazywamy *właściwym* (*silnym*), jeśli

$$f(a) > f(x), \quad x \in ((a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap P) \setminus \{a\}.$$

Odwracając powyższy nierówności określamy *minimum lokalne* lub krócej *minimum* oraz minimum *właściwe* (*silne*). Maksimum i minimum, właściwe lub nie, nazywamy krótko *ekstremum.*

Twierdzenie 4.4.5 (Warunek konieczny istnienia ekstremum)**.** *Jeśli funkcja różniczkowalna f ma ekstremum lokalne w punkcie a, to*

$$f'(a) = 0. \tag{4.4}$$

Uwaga 4.4.6. Warunek (4.4) nie jest wystarczający. Istotnie, funkcja $f(x) = x^3$ jest różniczkowalna, bo $f'(x) = 3x^2$. Ponadto, $f'(0) = 0$, ale funkcja f nie ma ekstremum lokalnego w punkcie 0 (Rysunek 40).

Twierdzenie 4.4.7 (Warunek wystarczający istnienia ekstremum)**.** *Warunek (4.4) jest wystarczający do istnienia ekstremum, jeśli pochodna f' jest dodatnia z jednej i ujemna z drugiej strony punktu a (Rysunek 41).*

Uwaga 4.4.8. Na Rysunku 41 przedstawiono wykres funkcji f. Zauważmy, że punkty a i b są miejscami zerowymi pochodnej f' (styczne do wykresu funkcji w tych punktach są poziome). W punkcie a pochodna f' zmienia znak z dodatniego na ujemny (patrzymy zgodnie z kierunkiem osi x) i w konsekwencji funkcja f ma w punkcie a maksimum lokalne, zaś w punkcie b pochodna f' zmienia znak z ujemnego na dodatni i w konsekwencji funkcja f ma w punkcie b minimum lokalne.

Przykład 4.4.9. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji

(a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 1$. Zauważmy, że $f'(x) = x^3 - 3x^2 = x^2(x-3)$ (wykres pochodnej przedstawia Rysunek 39). Wynika stąd, że ekstrema lokalne mogą być w punktach $x = 0$ lub $x = 3$ (są to miejsca zerowe pochodnej). Ponieważ z obu stron punktu $x = 0$ pochodna f' jest ujemna, zatem funkcja f nie ma w tym punkcie ekstremum lokalnego. Z kolei w punkcie $x = 3$ pochodna f' z lewej strony jest ujemna a z prawej — dodatnia, z czego wynika, że funkcja f ma w punkcie $x = 3$ minimum lokalne.

(b) $f(x) = \dfrac{5-3x}{x^2-1}$. Ponieważ

$$f'(x) = \frac{-3(x^2-1)-(5-3x)2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-3x^2+3-10x+6x^2}{(x+1)^2(x-1)^2} = \frac{(3x-1)(x-3)}{(x+1)^2(x-1)^2},$$

więc ekstrema lokalne mogą być w punktach $x = 1/3$ i $x = 3$. Ze znaku pochodnej wnioskujemy, że w punkcie $x = 1/3$ funkcja f ma maksimum lokalne, a w punkcie $x = 3$ — minimum lokalne.

Zadanie 4.4.10. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji

(1) $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{1}{3}x^3 - x^2$,

(2) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 1$,

(3) $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$,

(4) $f(x) = x - \dfrac{2}{x} - 3\ln x$,

(5) $f(x) = xe^{-x^2}$,

(6) $f(x) = x^2e^{-4x^2}$,

(7) $f(x) = (x-2)^2e^{x+x^2/2}$.

Uwaga 4.4.11. (a) Maksimum lokalne nie musi być największą wartością funkcji w danym przedziale. Podobnie, minimum lokalne nie musi być najmniejszą wartością. Co więcej, funkcja może nie posiadać wartości największej czy najmniejszej. Istotnie, wystarczy rozpatrzyć funkcję $f(x) = x^3 - 3x^2$ w przedziale (a, b) dla $a < -1$ i $b > 3$ (Rysunek 39).

(b) Dowodzi się, że funkcja ciągła przyjmuje w przedziale domkniętym wartość największą i najmniejszą.

(c) Aby znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji różniczkowalnej (a więc ciągłej) f w domkniętym przedziale $[a, b]$, stosujemy następujący algorytm.

  (i) Notujemy rozwiązania równania $f'(x) = 0$ leżące w przedziale otwartym (a, b).

  (ii) Obliczamy wartość funkcji f w punktach a, b i wszystkich wynotowanych wcześniej punktach.

  (iii) Wybieramy te punkty, w których wartość funkcji f jest największa i najmniejsza.

Przykład 4.4.12. (a) Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x) = e^{2x+7}(x^2 + 2x - 1)$ w przedziale $[-4, 1]$. Ponieważ

$$f'(x) = e^{2x+7}2(x^2+2x-1) + e^{2x+7}(2x+2) = 2e^{2x+7}(x^3+3x) = 2e^{2x+7}x(x+3),$$

więc ekstrema lokalne funkcja może mieć tylko w punktach -3 i 0. Ponieważ $f(-3) = 2e$, $f(0) = -e^7$ zaś $f(-4) = 7e^{-1}$ i $f(1) = 2e^9$, zatem funkcja f przyjmuje wartość nawiększą równą $2e^9$ w punkcie $x = 1$ i wartość najmniejszą równą $-e^7$ w punkcie $x = 0$.

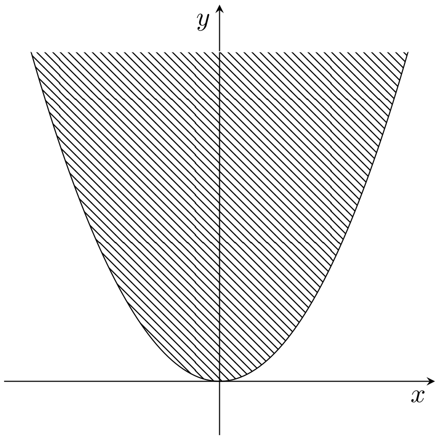
(b) Na rogach kwadratowego arkusza blachy o boku 36 cm wyciąć takie kwadraty, aby po zgięciu blachy otrzymać pudełko o największej objętości. Jeśli przez x oznaczymy długość boku wycinanych kwadratów wyrażoną w cm, to objętość V pudełka wyraża się wzorem

$$V(x) = x(36-2x)^2 = 4x(x-18)^2, \quad x \in [0, 18].$$

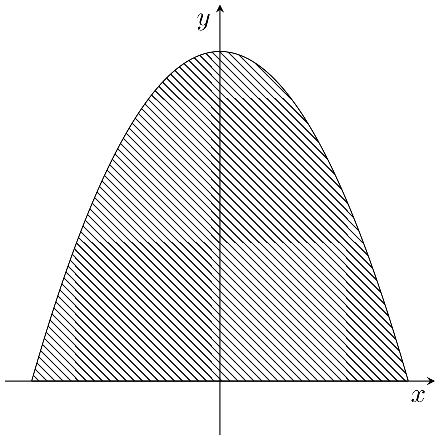
Ponieważ $V(0) = V(18) = 0$ oraz $V > 0$ w przedziale $(0, 18)$, więc funkcja V przyjmuje wartość największą w przedziale otwartym $(0, 18)$. Zauważmy, że

$$V'(x) = 4(x-18)^2 + 8x(x-18) = 4(x-18)(x-18+2x) = 12(x-18)(x-6),$$

skąd wnioskujemy, że funkcja V ma maksimum globalne w punkcie $x = 6$ ($x = 6$ jest jedynym punktem wewnątrz przedziału $(0, 18)$, w którym funkcja V może mieć ekstremum lokalne; z drugiej



RYSUNEK 42. Funkcja wypukła.



RYSUNEK 43. Funkcja wklęsła.

strony wiemy, że V ma maksimum wewnątrz przedziału $(0, 18)$, więc $x = 6$ musi być punktem, w którym maksimum jest realizowane), czyli należy wyciąć kwadraty o bokach długości 6 cm.

Zadanie 4.4.13. (1) Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji
(a) $f(x) = x^3 - 3x - 1$ w przedziale $[-2, 3]$,
(b) $f(x) = \sqrt{100 - x^2}$ w przedziale $[6, 8]$,
(c) $f(x) = x^2 e^x$ w przedziale $[-3, 1]$,
(d) $f(x) = \sin 2x - x$ w przedziale $[-\pi/2, \pi/2]$,
(e) $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ w przedziale $[1, e^{8/3}]$,
(f) $f(x) = e^{2x - x^2}$ w przedziale $[1 - \sqrt{2}/2, 2]$.

(2) Zaprojektować namiot w kształcie stożka o powierzchni bocznej równej 10 m^2 tak, aby miał największą objetość.
(3) Jakie wymiary powinna mieć puszka w kształcie walca o maksymalnej objętości, jeśli chcemy do jej produkcji zużyć 50 cm^2 blachy?
(4) Należy sporządzić skrzynkę prostopadłościenną z pokrywką. Objętość skrzynki ma wynosić 72 cm^3, długości krawędzi podstawy mają być w stosunku 2 : 1. Jakiej długości powinny być krawędzie, aby powierzchnia całkowita skrzynki była najmniejsza?
(5) Na kuli o promieniu R opisano stożek. Jaka będzie wysokość stożka o najmniejszej objętości?
(6) Który z punktów paraboli $y^2 = 6x$ leży najbliżej prostej $x - y + 5 = 0$?

4.5. **Przedziały wklęsłości, wypukłości i punkty przegięcia funkcji.**

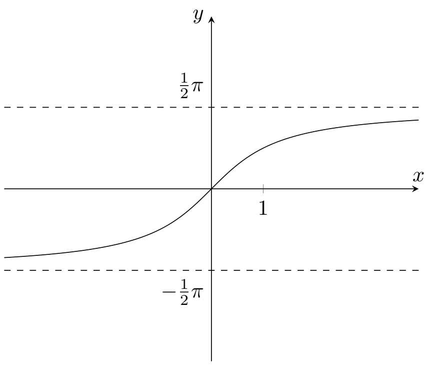
Definicja 4.5.1. Niech $P \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem. Mówimy, że funkcja $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ jest
- *wypukła*, jeśli jej nadwykres $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (a, b),\ y > f(x)\}$ jest figurą wypukłą (Rysunek 42);
- *wklęsła*, jeśli jej podwykres $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (a, b),\ y < f(x)\}$ jest figurą wypukłą (Rysunek 43).

Niech $a \in P$. Mówimy, że a jest *punktem przegięcia* funkcji f, jeśli funkcja zmienia w x charakter wypukłości, tzn. jest wypukła w przedziale $(a - \varepsilon, a)$ oraz wklęsła w przedziale $(a, a + \varepsilon)$ (lub odwrotnie) dla pewnego $\varepsilon > 0$.

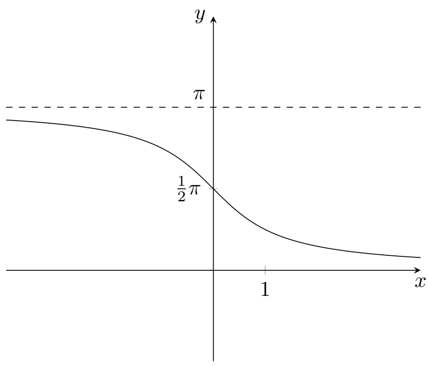
Przykład 4.5.2. (a) Funkcja $\operatorname{arc\,tg}$ jest wypukła w przedziale $(-\infty, 0)$ oraz wklęsła w przedziale $(0, +\infty)$. Punktem przegięcia jest $x = 0$ (Rysunek 44).
(b) Funkcja $\operatorname{arc\,ctg}$ jest wklęsła w przedziale $(-\infty, 0)$ oraz wypukła w przedziale $(0, +\infty)$. Punktem przegięcia jest $x = 0$ (Rysunek 45).

Definicja 4.5.3. Niech f będzie taką funkcją różniczkowalną, że f' też jest różniczkowalna. Wtedy $f'' := (f')'$ nazywamy *drugą pochodną* funkcji f, a funkcję f nazywamy *dwukrotnie różniczkowalną*.

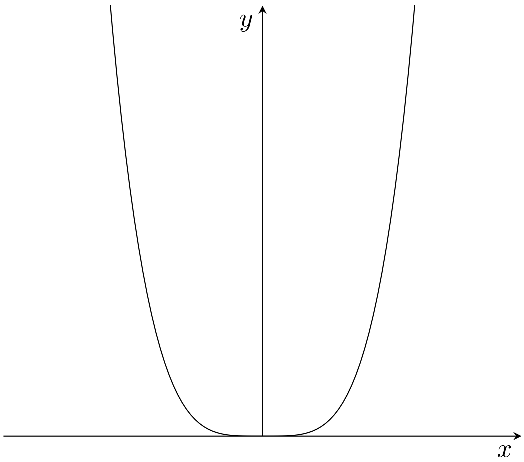
Twierdzenie 4.5.4 (Wypukłość funkcji)**.** *Dwukrotnie różniczkowalna funkcja f mająca w danym przedziale drugą pochodną*
- *nieujemną jest w tym przedziale wypukła;*



Rysunek 44. $y = \operatorname{arc\,tg} x$.



Rysunek 45. $y = \operatorname{arc\,ctg} x$.



Rysunek 46. $f(x) = x^4$.

- *niedodatnią jest w tym przedziale wklęsła.*

Przykład 4.5.5. Niech $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$. Wówczas

$$f''(x) = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2},$$

skąd wynika, że $f'' > 0$ w $(-\infty, 0)$ oraz $f'' < 0$ w $(0, +\infty)$, czyli f jest wypukła w przedziale $(-\infty, 0)$ oraz f jest wklęsła w przedziale $(0, +\infty)$.

Twierdzenie 4.5.6 (Warunek konieczny istnienia punktu przegięcia)**.** *Jeśli funkcja dwukrotnie różniczkowalna f ma punkt przegięcia w punkcie x_0, to*

$$f''(x_0) = 0. \tag{4.5}$$

Uwaga 4.5.7. Warunek (4.5) nie jest wystarczający. Istotnie, $f(x) = x^4$ jest dwukrotnie różniczkowalna, $f''(x) = 12x^2$. Ponadto, $f''(0) = 0$, ale 0 nie jest jej punktem przegięcia (Rysunek 46).

Twierdzenie 4.5.8 (Warunek dostateczny istnienia punktu przegięcia)**.** *Jeśli funkcja dwukrotnie różniczkowalna f spełnia warunek (4.5) oraz druga pochodna f'' jest dodatnia z jednej strony i ujemna z drugiej strony punktu x_0, to punkt x_0 jest punktem przegięcia funkcji f.*

Przykład 4.5.9. Wyznaczyć przedziały wypukłości oraz punkty przegięcia funkcji $f(x) = x^3 - 3x^2$. Ponieważ $f''(x) = 6x - 6$, zatem funkcja jest wypukła w przedziale $(-\infty, 1)$, wklęsła w przedziale $(1, \infty)$, a $x = 1$ jest punktem przegięcia.

Zadanie 4.5.10. Wyznaczyć przedziały wypukłości oraz punkty przegięcia funkcji

(1) $f(x) = x^4 - 24x^2 + 6x + 5$,
(2) $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$,

(3) $f(x) = x(a-x)^2$, $a > 0$,
(4) $f(x) = \frac{5-3x}{x^2-1}$,
(5) $f(x) = x - \frac{2}{x} - 3\ln x$,
(6) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 1$,
(7) $f(x) = (x-2)^2 e^{x+x^2/2}$.

4.6. **Reguła de l'Hospitala.** Niech u i v będą funkcjami rzeczywistymi określonymi w otoczeniu punktu a, z wyjątkiem co najwyżej samego punktu a.

Definicja 4.6.1. Mówimy, że iloraz

$$\frac{u}{v}, \quad \text{gdzie} \quad v(x) \neq 0 \text{ dla } x \neq a, \tag{4.6}$$

jest w punkcie a *symbolem nieoznaczonym typu* $\frac{0}{0}$, jeśli $u(x) \longrightarrow 0$ i $v(x) \longrightarrow 0$, gdy $x \longrightarrow a$ (z obu stron, lub tylko z jednej).

Przykład 4.6.2. Iloraz $\frac{\sin x}{x}$ jest symbolem typu $\frac{0}{0}$ w punkcie $a = 0$.

Definicja 4.6.3. Mówimy, że iloraz (4.6) jest w punkcie a *symbolem nieoznaczonym typu* $\frac{\infty}{\infty}$, gdy $u(x) \longrightarrow \pm\infty$ i $v(x) \longrightarrow \pm\infty$, gdy $x \longrightarrow a$ (z obu stron, lub tylko z jednej).

Przykład 4.6.4. Iloraz $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}$ jest symbolem typu $\frac{\infty}{\infty}$ w punkcie $a = \pi/2$, iloraz $\frac{\ln x}{x}$ jest symbolem typu $\frac{\infty}{\infty}$ w punkcie $a = +\infty$.

Twierdzenie 4.6.5 (Reguła de l'Hospitala[12]). *Niech u i v będą funkcjami różniczkowalnymi w otoczeniu punktu a, z wyjątkiem co najwyżej samego punktu a i niech $v(x) \neq 0$ i $v'(x) \neq 0$ dla $x \neq a$. Jeśli iloraz (4.6) jest w punkcie a symbolem nieoznaczonym typu $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$ i istnieje granica ilorazu pochodnych $\frac{u'}{v'}$ w punkcie a, to istnieje granica ilorazu (4.6) w a oraz*

$$\lim_{x\to a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x\to a} \frac{u'(x)}{v'(x)}. \tag{4.7}$$

Uwaga 4.6.6. Gdyby iloraz $\frac{u'}{v'}$ był znowu typu $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$, można stosować regułę de l'Hospitala ponownie i badać granicę ilorazu $\frac{(u')'}{(v')'}$.

Przykład 4.6.7. (A) Symbole typu $\frac{0}{0}$. Stosując wzór (4.7) otrzymujemy

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$

(B) Symbole typu $\frac{\infty}{\infty}$.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to \pi/2} \frac{1/\cos^2 x}{3/\cos^2 3x} = \lim_{x\to \pi/2} \frac{1}{3}\left(\frac{\cos 3x}{\cos x}\right)^2 = 3$, bo $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2} \frac{\cos 3x}{\cos x} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to \pi/2} \frac{3\sin 3x}{\sin x} = -3.$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{1/x}{1/2\sqrt{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0.$

(C) Granica po lewej stronie wzoru (4.7) może istnieć, choć nie istnieje granica po prawej, np.

$$\lim_{x\to 0} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0,$$

natomiast

$$\lim_{x\to 0} \frac{u'(x)}{v'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\sin(1/x) - \cos(1/x)}{1}$$

nie istnieje.

Definicja 4.6.8. Iloczyn dwóch funkcji rzeczywistych uv nazywamy *symbolem nieoznaczonym typu* $0\cdot\infty$ w punkcie a, jeśli $u(x) \longrightarrow 0$ i $v(x) \longrightarrow \pm\infty$, gdy $x \longrightarrow a$.

Uwaga 4.6.9. Symbol $0\cdot\infty$ sprowadzamy do postaci $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$ stosując tożsamość

$$uv = \frac{u}{1/v} \quad \text{lub} \quad uv = \frac{v}{1/u}.$$

[12] Guillaume de l'Hospital (1661–1704).

Przykład 4.6.10. (a) $\lim_{x\to 0} x \operatorname{ctg} x = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ctg} x}{1/x} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-1/\sin^2 x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 = 1.$

(b) $\lim_{x\to 0+} x \ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{1/x} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0+} (-x) = 0.$

Definicja 4.6.11. Różnicę $u - v$ nazywamy *symbolem nieoznaczonym typu* $\infty - \infty$ w punkcie a, jeśli $\lim_{x\to a} u(x) = \lim_{x\to a} v(x) = \pm\infty$.

Uwaga 4.6.12. Symbol $\infty - \infty$ sprowadzamy do postaci $\frac{0}{0}$ stosując tożsamość

$$u - v = \frac{1/v - 1/u}{1/uv}.$$

Przykład 4.6.13. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{x - 1 - \ln x}{(x-1)\ln x} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{1 - 1/x}{\ln x + 1 - 1/x} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{1/x^2}{1/x + 1/x^2} = \frac{1}{2}.$

Uwaga 4.6.14. Analogicznie potęga u^v może być w pewnym punkcie *symbolem nieoznaczonym typu* 0^0, 1^∞ lub ∞^0. Symbole te sprowadzamy do postaci $0 \cdot \infty$ stosując tożsamość

$$u^v = e^{v \ln u}.$$

Przykład 4.6.15. (a) $\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{x \ln x} = e^0 = 1$, bo $\lim_{x\to 0+} x \ln x = 0$ (Przykład 4.6.10 (b)).

(b) $\lim_{x\to 1} x^{1/(1-x)} = \lim_{x\to 1} e^{\ln x/(1-x)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$, bo $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{-1} = -1.$

Zadanie 4.6.16. (1) Obliczyć granice przy pomocy reguły de l'Hospitala

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$,

(b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$, $m, n \in \mathbb{N}$,

(c) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - 2x^2 + x}$,

(d) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$,

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$,

(f) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$,

(g) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$,

(h) $\lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1} - e^{1-x} - 2x + 2}{x - \sin(x-1) - 1}$,

(i) $\lim_{x\to\infty} \frac{5^x}{x^7}$,

(j) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$,

(k) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{2020}}{10^x}$,

(l) $\lim_{x\to 0+} x^\alpha \ln x$ dla $\alpha > 0$,

(m) $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$,

(n) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$,

(o) $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$,

(p) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\operatorname{tg} x}$,

(q) $\lim_{x\to 0} (\cos 2x)^{3/x^2}$,

(r) $\lim_{x\to 0^+} x^{3/(4+\ln x)}$.

(2) (zadanie nieobowiązkowe) Obliczyć granicę
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x^x - 1)}{x \ln x}.$$

4.7. **Badanie przebiegu zmienności funkcji.**

Uwaga 4.7.1. Celem zbadania przebiegu zmienności funkcji należy

(i) podać dziedzinę i ewentualne miejsca zerowe i punkt przecięcia z osią y,
(ii) obliczyć granice na końcach przedziałów określoności,
(iii) wyznaczyć ewentualne asymptoty,
(iv) obliczyć pochodną, wyznaczyć ekstrema lokalne i przedziały monotoniczności,
(v) obliczyć drugą pochodną, wyznaczyć punkty przegięcia i przedziały wypukłości,
(vi) wykonać wykres (ewentualnie uprzednio zebrać wyniki z poprzednich punktów w tabelę).

Przykład 4.7.2. Zbadać przebieg zmienności funkcji

(a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

(i) Dziedziną jest zbiór $\mathbb{R}$, miejsca zerowe (tzn. punkty x spełniające równanie $f(x) = 0$) to $x = 0$, zaś punkt przecięcia z osią y (tzn. punkt $(0, f(0))$, o ile 0 należy do dziedziny funkcji) to $(0, 0)$.

(ii) Granice na końcach przedziałów określoności wynoszą, odpowiednio,
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x+1/x} = 0,$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+1/x} = 0.$$

(iii) Z powyższych granic wynika, że prosta o równaniu $y = 0$ jest asymptotą poziomą. Funkcja nie ma asymptot pionowych, ponieważ jest ciągła i określona na $\mathbb{R}$ (funkcja ciągła nie ma granic niewłaściwych w żadnym punkcie dziedziny).

(iv) Zauważmy, że
$$f'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}.$$
W konsekwencji,
$$f'(x) = 0 \iff x = -1 \text{ lub } x = 1,$$
$$f'(x) > 0 \iff x \in (-1, 1),$$
$$f'(x) < 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty),$$
skąd wnioskujemy, że funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-1, 1)$, zaś malejąca w przedziałach $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$.
Ponadto, funkcja f ma w punkcie $x = -1$ minimum lokalne równe $f(-1) = -\frac{1}{2}$, zaś w punkcie $x = 1$ ma ona maksimum lokalne równe $f(1) = \frac{1}{2}$.

(v) Zauważmy, że
$$f''(x) = \frac{2x(x^2+1)^2 - 4x(x^2+1)(1-x^2)}{(x^2+1)^4} = \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3} = \frac{2x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}.$$
W konsekwencji,
$$f''(x) = 0 \iff x = -\sqrt{3} \text{ lub } x = 1 \text{ lub } x = \sqrt{3},$$
$$f'(x) > 0 \iff x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty),$$
$$f'(x) < 0 \iff x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3}),$$
skąd wnioskujemy, że funkcja f jest wypukła w przedziałach $(-\sqrt{3}, 0)$, $(\sqrt{3}, +\infty)$, zaś wklęsła w przedziałach $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(0, \sqrt{3})$.
Ponadto, funkcja f ma punkty przegięcia $f(-\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$, $f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4}$ oraz $f(0) = 0$.

(vi) Wykres funkcji przedstawia Rysunek 47.

(b) $f(x) = \dfrac{3x^2-7x+2}{x+1}$.

(i) Dziedziną jest zbiór $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, miejsca zerowe (tzn. punkty x spełniające równanie $f(x)=0$) to $x=1/3$ i $x=2$, zaś punkt przecięcia z osią y (tzn. punkt $(0,f(0))$, o ile 0 należy do dziedziny funkcji) to $(0,2)$.

(ii) Granice na końcach przedziałów określoności wynoszą, odpowiednio,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-7x+2}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x-7+2/x}{1+1/x} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-7x+2}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x-7+2/x}{1+1/x} = \infty,$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} \frac{3x^2-7x+2}{x+1} \overset{\frac{12}{0^-}}{=} -\infty,$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} \frac{3x^2-7x+2}{x+1} \overset{\frac{12}{0^+}}{=} \infty.$$

(iii) Z powyższych granic wynika, że prosta o równaniu $x=-1$ jest asymptotą pionową, funkcja nie ma asymptot poziomych ale może mieć ukośne. Liczymy więc

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2-7x+2}{x^2+x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3-7/x+2/x^2}{1+1/x} = 3,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-3x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x^2-7x+2}{x+1}-3x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-10x+2}{x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-10+2/x}{1+1/x} = -10,$$

skąd wynika, że prosta o równaniu $y=3x-10$ jest asymptotą ukośną obustronną.

(iv) Zauważmy, że

$$f'(x) = \frac{(6x-7)(x+1)-(3x^2-7x+2)}{(x+1)^2} = \frac{6x^2-x-7-3x^2+7x-2}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{3x^2+6x-9}{(x+1)^2} = \frac{3(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}.$$

W konsekwencji,

$$f'(x)=0 \iff x=-3 \text{ lub } x=1,$$
$$f'(x)>0 \iff x\in(-\infty,-3)\cup(1,\infty),$$
$$f'(x)<0 \iff x\in(-3,-1)\cup(-1,1),$$

skąd wnioskujemy, że funkcja f jest rosnąca w przedziałach $(-\infty,-3)$, $(1,\infty)$, zaś malejąca w przedziałach $(-3,-1)$ i $(-1,1)$.
Ponadto, funkcja f ma w punkcie $x=-3$ maksimum lokalne równe $f(-3)=-25$, zaś w punkcie $x=1$ ma ona minimum lokalne równe $f(1)=-1$.

(v) Zauważmy, że

$$f''(x) = \frac{(6x+6)(x+1)^2-2(3x^2+6x-9)(x+1)}{(x+1)^4}$$
$$= \frac{6(x+1)(x^2+2x+1-x^2-2x+3)}{(x+1)^4} = \frac{24(x+1)}{(x+1)^4}.$$

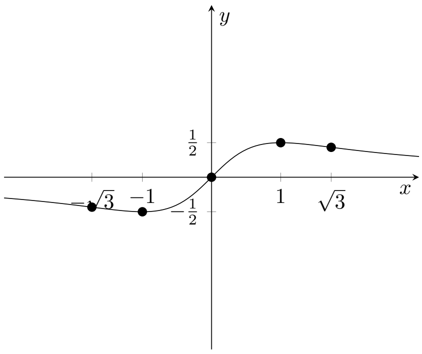
W konsekwencji,

$$f''(x)\neq 0 \iff x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$$
$$f''(x)>0 \iff x\in(-1,\infty),$$
$$f''(x)<0 \iff x\in(-\infty,-1),$$

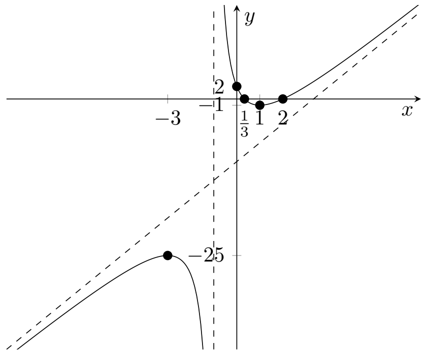
skąd wnioskujemy, że funkcja f jest wypukła w przedziale $(-1,\infty)$, zaś wklęsła w przedziale $(-\infty,-1)$.
Ponadto, funkcja f nie ma punktów przegięcia.

(vi) Wykres funkcji przedstawia Rysunek 48.

Zadanie 4.7.3. (1) Zbadać przebieg zmienności funkcji
(a) $f(x)=x^3+x^2-16x$,
(b) $f(x)=x^2(x^2-4)^3$,



RYSUNEK 47. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.



RYSUNEK 48. $f(x) = \frac{3x^2-7x+2}{x+1}$.

(c) $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x+1}$,
(d) $f(x) = \dfrac{x^2+4x-5}{x-3}$,
(e) $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{x^2}$,
(f) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-1}$,
(g) $f(x) = \dfrac{2x^2}{(2+x)^2}$,
(h) $f(x) = \dfrac{x^2-x+1}{x-1}$,
(i) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-3}$.

(2) (zadanie nieobowiązkowe) Zbadać przebieg zmienności funkcji
(a) $f(x) = \dfrac{1}{2}x + \arccos\dfrac{2x}{x^2+1}$,
(b) $f(x) = \ln|1-\ln|x||$,
(c) $f(x) = \operatorname{sgn}(x-1)\sqrt[3]{|x^3-x^2-x+1|}$,
(d) $f(x) = (x-5)e^{2/(1-x)}$.

5.1. **Miara Jordana.** [13]Zaczniemy od sformalizowania pojęć takich jak długość i pole. Na początku wprowadzimy pewne pomocnicze pojęcia.

Definicja 5.1.1 (Kresy dolny i górny)**.** Niech $E \subset \mathbb{R}$ będzie dowolnym zbiorem. Liczbę p nazywamy
(a) *ograniczeniem dolnym* zbioru E, jeśli $p \leqslant x$ dla każdej liczby $x \in E$,
(b) *ograniczeniem górnym* zbioru E, jeśli $p \geqslant x$ dla każdej liczby $x \in E$.

Zbiór E nazywamy
(a) *ograniczonym z dołu*, gdy istnieje ograniczenie dolne zbioru E,
(b) *ograniczonym z góry*, gdy istnieje ograniczenie górne zbioru E.

Niech E będzie zbiorem ograniczonym z dołu. Dowodzi się, że zbiór ograniczeń dolnych zbioru E ma liczbę największą; liczbę tę nazywamy *kresem dolnym* (lub *infimum*) zbioru E i oznaczamy $\inf E$.

Podobnie, zbiór wszystkich ograniczeń górnych ograniczonego z góry zbioru E ma liczbę najmniejszą; liczbę tę nazywamy *kresem górnym* (lub *supremum*) zbioru E i oznaczamy $\sup E$.

Jeśli zbiór E nie jest ograniczony z dołu, mówimy, że ma on *kres dolny niewłaściwy* $\inf E = -\infty$, a jeśli nie jest ograniczony z góry, mówimy, że ma on *kres górny niewłaściwy* $\sup E = \infty$.

Przykład 5.1.2. (a) Zbiór $E = (2, 4]$ jest ograniczony z dołu i z góry. Ponadto, $\inf E = 2$, $\sup E = 4$.
(b) Zbiór $\mathbb{N}$ jest ograniczony z dołu, np. -2 jest jego ograniczeniem dolnym, ale nie jest ograniczony z góry. Ponadto, $\inf \mathbb{N} = 1$, $\sup \mathbb{N} = \infty$.

Zadanie 5.1.3. Zbadać ograniczoność zbiorów i wyznaczyć ich kresy
(1) $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$,
(2) $B = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$,
(3) $C = \{q \in \mathbb{Q}_+ : 2 < q^2 < 3\}$.

Do końca tego podrozdziału zakładamy, że $n \in \{1, 2, 3\}$.

Definicja 5.1.4. *n-wymiarową kostką* lub krótko *kostką* (domkniętą) nazywamy dowolny zbiór postaci

$$P := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n, \quad a_j < b_j,\ k = 1, \ldots, n.$$

1-wymiarową kostkę $P = [a_1, b_1]$ nazywamy *przedziałem*, zaś 2-wymiarową kostkę $P := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ nazywamy *prostokątem.*

Wnętrzem kostki P nazywamy zbiór

$$\operatorname{int} P := (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n).$$

Objętością kostki P nazywamy liczbę

$$|P| := (b_1 - a_1) \ldots (b_n - a_n).$$

W przypadku $n = 1$ objętość kostki $|P| = b_1 - a_1$ nazywamy *długością* przedziału P, a w przypadku $n = 2$ objętość kostki $|P| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$ nazywamy *polem* prostokąta P.

Średnicą kostki P nazywamy liczbę

$$\operatorname{diam} P := \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}.$$

W przypadku $n = 1$ średnicą kostki $\operatorname{diam} P = b_1 - a_1$ jest długość przedziału P, a w przypadku $n = 2$ średnicą kostki $\operatorname{diam} P = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$ jest długość przekątnej prostokąta P.

Podziałem kostki P nazywamy dowolną skończoną rodzinę kostek

$$\pi = \{P_1, \ldots, P_m\}$$

taką, że $P = P_1 \cup \cdots \cup P_m$ oraz wnętrza kostek $\operatorname{int} P_j$, $j = 1, \ldots, m$, są zbiorami parami rozłącznymi.

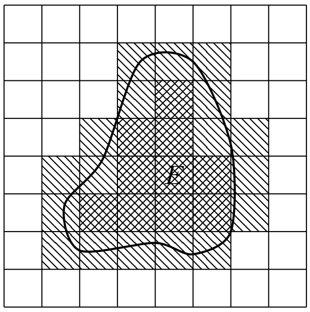
Średnicą podziału $\pi = \{P_1, \ldots, P_m\}$ nazywamy liczbę

$$\operatorname{diam} \pi := \max\{\operatorname{diam} P_1, \ldots, \operatorname{diam} P_m\}.$$

Niech $(\pi_k)_{k=1}^{\infty}$ będzie ciągiem podziałów kostki P. Powiemy, że jest to *normalny ciąg podziałów*, jeśli $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{diam} \pi_k = 0$.

Definicja 5.1.5. Zbiór $E \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy *ograniczonym*, jeśli istnieje kostka P taka, że $E \subset P$.

[13]Marie Ennemond Camille Jordan (ur. 5 I 1838 w Lyonie, zm. 22 I 1922 w Paryżu) — matematyk francuski.



RYSUNEK 49.

Definicja 5.1.6 (Miara Jordana)**.** Niech $E \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem ograniczonym. Rozważmy kostkę P taką, że $E \subset P$. Dla podziału $\pi = \{P_1, \ldots, P_m\}$ kostki P definiujemy

$$s_\pi := \sum_{j : P_j \subset E} |P_j|, \qquad S_\pi := \sum_{j : P_j \cap E \neq \varnothing} |P_j|,$$

gdzie przyjmujemy $s_\pi := 0$, jeśli w podziale π nie ma kostek P_j zawartych w zbiorze E (Rysunek 49).

Liczbę

$$s_E := \sup\{s_{\pi_k} : (\pi_k)_{k=1}^{\infty} \text{dowolny normalny ciąg podziałów kostki } P\}$$

nazywamy *miarą wewnętrzną* zbioru E, zaś liczbę

$$S_E := \inf\{S_{\pi_k} : (\pi_k)_{k=1}^{\infty} \text{dowolny normalny ciąg podziałów kostki } P\}$$

nazywamy *miarą zewnętrzną* zbioru E. Oczywiście $s_E \leqslant S_E$. Jeśli $s_E = S_E$, to zbiór E nazywamy *n-mierzalnym w sensie Jordana*, a liczbę

$$|E| := s_E = S_E$$

nazywamy *n-wymiarową miarą Jordana.*

1-wymiarową miarę Jordana nazywamy *liniową miarą Jordana* lub *długością*, 2-wymiarową miarę Jordana nazywamy *powierzchniową miarą Jordana* lub *polem*, zaś 3-wymiarową miarę Jordana nazywamy *objętościową miarą Jordana* lub *objętością*.

Uwaga 5.1.7. (a) Dowodzi się, że tak określona miara nie zależy od wyboru kostki P.

(b) Dla figur takich jak trójkąt, wielobok, koło, itd. powierzchniowa miara Jordana pokrywa się z intuicyjnym pojęciem pola, np. dla koła K_2 o promieniu $r > 0$ mamy

$$|K_2| = \pi r^2.$$

(c) Dla brył takich jak graniastosłup, ostrosłup, stożek, kula, itd. objętościowa miara Jordana pokrywa się z intuicyjnym pojęciem objętości, np. dla kuli K_3 o promieniu $r > 0$ mamy

$$|K_3| = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

(d) Istnieją zbiory niemierzalne w sensie Jordana, np. dla $E = [0,1]^n \cap \mathbb{Q}^n$ mamy $s_E = 0 < 1 = S_E$.

(e) Miara Jordana zbioru równa się zeru wtedy i tylko wtedy, gdy jego miara zewnętrzna równa się zeru, tj. gdy dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ dany zbiór można pokryć skończoną liczbą kostek o łącznej objętości mniejszej niż ε. W szczególności,
   (a) każdy skończony zbiór na prostej jest 1-mierzalny w sensie Jordana i ma liniową miarę Jordana równą zero,
   (b) każdy ograniczony podzbiór prostej na płaszczyźnie jest 2-mierzalny w sensie Jordana i ma powierzchniową miarę Jordana równą zero.
   (c) każdy ograniczony podzbiór płaszczyzny w przestrzeni jest 3-mierzalny w sensie Jordana i ma objętościową miarę Jordana równą zero.

5.2. **Całka Riemanna funkcji jednej zmiennej.**

Definicja 5.2.1. Niech $P = [a, b] \subset \mathbb{R}$ będzie dowolnym przedziałem domkniętym i ograniczonym i niech $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną. Dla dowolnego podziału $\pi = \{P_1, \ldots, P_m\}$ przedziału P wybierzmy dowolny zbiór punktów $x_j \in P_j$, $j = 1, \ldots, m$, i utwórzmy sumę pośrednią

$$\sigma_\pi := f(x_1)|P_1| + f(x_2)|P_2| + \cdots + f(x_m)|P_m|. \tag{5.1}$$

Jeśli ciąg sum pośrednich $(\sigma_{\pi_k})_{k=1}^{\infty}$, odpowiadający dowolnemu normalnemu ciągowi podziałów $(\pi_k)_{k=1}^{\infty}$ i dowolnemu wyborowi punktów pośrednich x_j, jest zbieżny, i to zawsze do tej samej granicy bez względu na dobór ciągu $(\pi_k)_{k=1}^{\infty}$ i punktów x_j, to granicę tę nazywamy *całką Riemanna*[14] funkcji f w przedziale P i oznaczamy

$$\int_P f \quad \text{lub} \quad \int_a^b f(x)\,dx. \tag{5.2}$$

Jeśli całka (5.2) istnieje, to funkcję f nazywamy *całkowalną w sensie Riemanna* lub krótko *całkowalną* i piszemy $f \in \mathcal{R}(P)$.

Przykład 5.2.2. (a) Niech $f(x) = c$ dla $x \in [a,b]$, gdzie c jest stałą. W myśl (5.1) jest

$$\sigma_\pi = c|P_1| + c|P_2| + \cdots + c|P_m| = c(|P_1| + |P_2| + \cdots + |P_m|) = c(b-a)$$

dla każdego podziału $\pi = \{P_1, \ldots, P_m\}$ przedziału $[a,b]$, więc całka (5.2) istnieje i

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a).$$

(b) Niech

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{gdy } x \in \mathbb{Q} \cap [a,b] \\ 0 & \text{gdy } x \in [a,b] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Dla dowolnego podziału $\pi = \{P_1, \ldots, P_m\}$ przedziału $[a,b]$ oraz $x_j \in \mathbb{Q}$, w myśl (5.1) mamy

$$\sigma_\pi = |P_1| + |P_2| \cdots + |P_m| = b - a,$$

jeśli natomiast dla dowolnego podziału $\pi = \{P_1, \ldots, P_m\}$ przedziału $[a,b]$ weźmiemy $x_j \notin \mathbb{Q}$, to w myśl (5.1)

$$\sigma_\pi = 0 \cdot |P_1| + 0 \cdot |P_2| \cdots + 0 \cdot |P_m| = 0,$$

czyli $f \notin \mathcal{R}([a,b])$.

Twierdzenie 5.2.3. *Funkcja ciągła jest całkowalna. W szczególności, funkcje elementarne, ich suma, różnica, iloczyn, iloraz i złożenie są całkowalne.*

Twierdzenie 5.2.4. *Jeśli $f, g \in \mathcal{R}(P)$, to $f \pm g \in \mathcal{R}(P)$ i $fg \in \mathcal{R}(P)$, przy czym*

$$\int_P f \pm g = \int_P f \pm \int_P g$$

i gdy A jest dowolną stałą, to funkcja $Af \in \mathcal{R}(P)$ oraz

$$\int_P Af = A \int_P f.$$

Twierdzenie 5.2.5 (Interpretacja geometryczna całki Riemanna)**.** *Jeżeli $f \in \mathcal{R}([a,b])$ oraz*

(a) $f(x) \geqslant 0$, $x \in [a,b]$, to zbiór

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

(Rysunek 50) jest mierzalny powierzchniowo w sensie Jordana i

$$|D| = \int_a^b f(x)\,dx.$$

(b) $f(x) \leqslant 0$, $x \in [a,b]$, to zbiór

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b,\ f(x) \leqslant y \leqslant 0\}$$

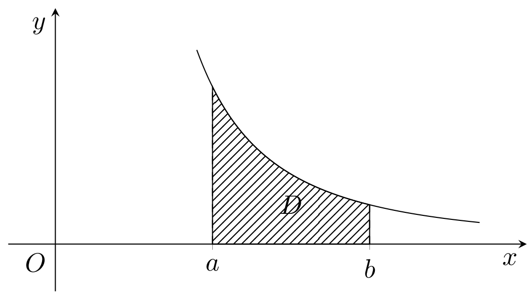
jest mierzalny powierzchniowo w sensie Jordana i

$$|D| = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

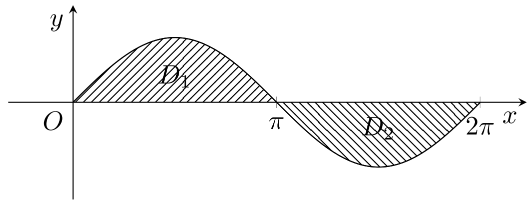
Twierdzenie 5.2.6. *Jeżeli $f \in \mathcal{R}([a,b])$ i jeżeli $a < c < b$, to*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

[14] Georg Friedrich Bernhard Riemann (ur. 17 IX 1826, zm. 20 VII 1866) — matematyk niemiecki.



RYSUNEK 50.



RYSUNEK 51.

Przykład 5.2.7. Stosując powyższe twierdzenia oraz symetrię wykresu funkcji sinus można obliczyć następującą całkę

$$\int_0^{2\pi} \sin x\, dx = \int_0^{\pi} \sin x\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\, dx = |D_1| - |D_2| = 0,$$

gdzie $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant \sin x\}$ i $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \pi \leqslant x \leqslant 2\pi,\ \sin x \leqslant y \leqslant 0\}$ (Rysunek 51). Pole obszaru D_1 (a przez to także obszaru D_2) obliczymy w Przykładzie 5.3.20 (b).

5.3. **Metody obliczania całki Riemanna funkcji jednej zmiennej.** W praktyce obliczanie całki Riemanna wprost z definicji jest dość niewygodne. Najczęściej korzysta się z jednowymiarowej wersji twierdzenia Stokesa[15], zwanej *podstawowym twierdzeniem rachunku całkowego*. Aby je poznać, wprowadzimy pewne nowe pojęcia.

Definicja 5.3.1 (Funkcja pierwotna)**.** Niech P będzie dowolnym przedziałem i niech $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją. Każdą różniczkowalną funkcję $F : P \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniającą równość

$$F'(x) = f(x), \quad x \in P, \tag{5.3}$$

nazywamy *funkcją pierwotną* (lub *całką nieoznaczoną* albo krótko *całką*) funkcji f i oznaczamy

$$\int f(x)\, dx = F(x). \tag{5.4}$$

Operację wyznaczania całki nazywamy *całkowaniem*.

Przykład 5.3.2. (a) $\displaystyle\int \cos x\, dx = \sin x$,

(b) $\displaystyle\int x^2\, dx = \frac{1}{3}x^3$,

(c) $\displaystyle\int 1\, dx = x$.

Uwaga 5.3.3. (a) Jeśli F jest funkcją pierwotną dla f, to jest też nią $F + C$, gdzie $C \in \mathbb{R}$ jest dowolną stałą. Całkowanie nie jest więc działaniem jednoznacznym. Znając jednak jedną całkę F otrzymamy wszystkie inne przez dodanie do niej dowolnej stałej C, zwanej *stałą całkowania*

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C.$$

[15]Sir George Gabriel Stokes, 1st Baronet (ur. 13 VIII 1819 w Skreen, zm. 1 II 1903 w Cambridge) — irlandzki matematyk i fizyk.

Funkcje F, $F+3$, $F-\sqrt{2}$, itp. nazywamy *całkami szczególnymi*, a całkę $F+C$ — *całką ogólną* funkcji f.

(b) Wprost z definicji wynika, że

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C, \qquad \left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x),$$

dlatego całkowanie może być postrzegane jako działanie odwrotne do różniczkowania (z niejednoznacznością spowodowaną pojawieniem się stałej całkowania).

Twierdzenie 5.3.4 (Całki niektórych funkcji elementarnych)**.** *Zachodzą wzory*

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad \text{dla } a \neq -1, \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + C,$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C,$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg} x + C = -\operatorname{arc\,ctg} x + C', \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C'.$$

Całkowanie odnosi się do tych przedziałów, w których funkcja całkowane (funkcje podacałkowe*) są określone; C i C' oznaczają stałe.*

W dalszym ciągu często będziemy opuszczać stałą całkowania.

Twierdzenie 5.3.5. *Niech A będzie dowolną stałą. Wtedy*

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx, \qquad \int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx.$$

Przykład 5.3.6. (a) $\displaystyle\int 3\cos x\,dx = 3\int \cos x\,dx = 3\sin x$,

(b) $\displaystyle\int (x^3 - 5x + 2)\,dx = \int x^3\,dx - 5\int x\,dx + 2\int 1\,dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + 2x$,

(c) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - x\right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{x} - 2\sqrt{x} + x^2\right) dx = \int \frac{1}{x}\,dx - 2\int x^{1/2}\,dx + \int x^2\,dx = \ln|x| - \frac{4}{3}x^{3/2} + \frac{1}{3}x^3 = \ln|x| - \frac{4}{3}\sqrt{x}^3 + \frac{1}{3}x^3$,

(d) $\displaystyle\int \frac{1 + x\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx + \int x^{-1/2}\,dx + \int x^{-5/3}\,dx = -x^{-1} + 2x^{1/2} - \frac{3}{2}x^{-2/3} = -\frac{1}{x} + 2\sqrt{x} - \frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}}$.

Zadanie 5.3.7. Obliczyć całki nieoznaczone

(1) $\displaystyle\int x^2\,dx$,

(2) $\displaystyle\int \left(2 - 6x + 3x^2 - x^3\right) dx$,

(3) $\displaystyle\int \left(x^2 - 6x^2 + 25x^4\right) dx$,

(4) $\displaystyle\int \left(2x - \frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^4}\right) dx$,

(5) $\displaystyle\int \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 dx$,

(6) $\displaystyle\int \frac{x^4 - 2x^3 + x - 3}{x^2}\,dx$,

(7) $\displaystyle\int 2\sqrt{x}\,dx$,

(8) $\displaystyle\int (3 - 5x)\sqrt{x}\,dx$,

(9) $\int \sqrt[n]{x}\, dx$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$,

(10) $\int \frac{5x-1}{\sqrt[3]{x}}\, dx$.

Twierdzenie 5.3.8 (Całkowanie przez części)**.** *Jeśli u i v są funkcjami mającymi w pewnym przedziale ciągłe pochodne, to w przedziale tym zachodzi równość*

$$\int u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\, dx.$$

Przykład 5.3.9. (a) $\int \ln x\, dx$. Podstawmy $u(x) = \ln x$, $v'(x) = 1$, skąd $u'(x) = \frac{1}{x}$, $v(x) = x$. Otrzymujemy

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x}\, dx = x \ln x - x + C.$$

(b) $\int x \cos x\, dx$. Podstawmy $u(x) = x$, $v'(x) = \cos x$, skąd $u'(x) = 1$, $v(x) = \sin x$. W konsekwencji,

$$\int x \cos x\, dx = x \sin x - \int \sin x\, dx = x \sin x + \cos x + C.$$

(c) $\int xe^x\, dx$. Podstawmy $u(x) = x$, $v'(x) = e^x$, skąd $u'(x) = 1$, $v(x) = e^x$. W konsekwencji,

$$\int xe^x\, dx = xe^x - \int e^x\, dx = xe^x - e^x + C.$$

(d) $\int x \ln x\, dx$. Podstawmy $u(x) = \ln x$, $v'(x) = x$, skąd $u'(x) = \frac{1}{x}$, $v(x) = \frac{1}{2}x^2$. W konsekwencji,

$$\int x \ln x\, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x\, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$$

Uwaga 5.3.10. Stosując całkowanie przez części kilkakrotnie można obliczyć całki

$$\int p(x) \sin x\, dx, \quad \int p(x) \cos x\, dx, \quad \int p(x) e^x\, dx, \quad \int p(x) \ln x\, dx,$$

gdzie p jest dowolnym wielomianem. W pierwszych trzech całkach jako funkcję przyjmujemy wielomian p i stosujemy wzór na całkowanie przez części tyle razy, ile wynosi stopień wielomianu p. W czwartej całce jako funkcję przyjmujemy logarytm naturalny.

Na przykład, aby obliczyć całkę

$$\int x^2 \sin x\, dx,$$

podstawmy $u(x) = x^2$, $v'(x) = \sin x$, skąd $v(x) = -\cos x$. Otrzymujemy

$$\int x^2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x\, dx.$$

Ostatnią całkę z prawej strony powyższej równości policzyliśmy w Przykładzie 5.3.9 (b). W konsekwencji,

$$\int x^2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x\, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

Zadanie 5.3.11. Stosując całkowanie przez części obliczyć całki nieoznaczone

(1) $\int x^n \ln x\, dx$, $n \in \mathbb{N}$,

(2) $\int x \sin x\, dx$,

(3) $\int (x^2 - 1) \cos x\, dx$,

(4) $\int (x^2 + x) \sin x\, dx$,

(5) $\int x^2 e^x\, dx$,

(6) $\int x^3 \cos x\, dx$.

Twierdzenie 5.3.12 (Całkowanie przez podstawienie). *Niech f będzie funkcją ciągłą, zaś g niech będzie funkcją różniczkowalną, mającą ciągłą pochodną g'. Jeśli złożenie $f \circ g$ jest dobrze określone w pewnym przedziale, to w tym przedziale zachodzi równość*

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt\Big|_{t=g(x)}. \tag{5.5}$$

W szczególności, wzór (5.5) zastosowany do funkcji $f(t) = \frac{1}{t}$ daje

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln|g(x)| + C. \tag{5.6}$$

Przykład 5.3.13. (a) Chcąc obliczyć

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

przyjmujemy $1 + x^2 = t$, skąd otrzymujemy $2x\,dx = dt$, a stąd

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int \sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3}\sqrt{t}^3 + C = \frac{2}{3}\sqrt{1+x^2}^3 + C.$$

(b) Aby obliczyć

$$\int \frac{dx}{ax+b}, \quad a \neq 0,$$

przyjmijmy $ax + b = t$, czyli $x = \frac{t-b}{a}$, skąd $dx = \frac{dt}{a}$; zatem, w myśl (5.5),

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \int \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{a}\,dt = \frac{1}{a}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{a}\ln|t| + C = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$$

(c) Aby obliczyć

$$\int \frac{x}{x^2+4}\,dx$$

stosujemy wzór (5.6)

$$\int \frac{x}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + C.$$

Zadanie 5.3.14. Obliczyć całki przez podstawienie (podane obok)

(1) $\displaystyle\int \frac{2x-3}{x^2-3x+4}\,dx$, $x^2 - 3x + 4 = t$,

(2) $\displaystyle\int \frac{2x^3+x-1}{x^4+x^2-2x+1}\,dx$, $x^4 + x^2 - 2x + 1 = t$,

(3) $\displaystyle\int x\sqrt{ax^2+b}\,dx$, $a \neq 0$, $ax^2 + b = t$,

(4) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+b}}\,dx$, $a \neq 0$, $ax^2 + b = t$,

(5) $\displaystyle\int \sin(ax+b)\,dx$, $a \neq 0$, $ax + b = t$,

(6) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx$, $\cos x = t$,

(7) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx$, $1 + \sin x = t$,

(8) $\displaystyle\int x^2 \sin x^3\,dx$, $x^3 = t$,

(9) $\displaystyle\int e^{ax+b}\,dx$, $a \neq 0$, $ax + b = t$,

(10) $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2+9}\,dx$, $\frac{2}{3}x = t$,

(11) $\displaystyle\int x\sqrt{x-3}\,dx$, $\sqrt{x-3} = t$,

(12) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{x}}\,dx$, $\sqrt{\frac{1-x}{x}} = t$,

(13) $\displaystyle\int x^3\left(1-x^2\right)^{-3/2}\,dx$, $1 - x^2 = t^2$,

(14) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx$, $\cos x = t$,

(15) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{5+4x-x^2}}\,dx$, $x = 2+3t$,

(16) $\displaystyle\int \ln(2x-4)\,dx$, $\ln(2x-4) = t$.

Twierdzenie 5.3.15. *Zachodzą następujące wzory ($a \neq 0$)*

$$\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C, \tag{5.7}$$

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx = x\operatorname{arc\,tg} x - \ln\sqrt{1+x^2} + C, \tag{5.8}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right| + C, \tag{5.9}$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a} + C, \tag{5.10}$$

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2} + \frac{1}{2}a^2\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right| + C. \tag{5.11}$$

Uwaga 5.3.16. (a) Do całki (5.7) stosujemy najpierw metodę całkowania przez części, a potem podstawienie $1-x^2 = t$;
(b) Do całki (5.8) stosujemy najpierw metodę całkowania przez części, a potem podstawienie $1+x^2 = t$;
(c) Do pierwszej z całek (5.9) stosujemy podstawienie $x = at$;
(d) Do drugiej z całek (5.9) stosujemy podstawienie $x+\sqrt{a^2+x^2} = t$;
(e) Do całki (5.10) stosujemy pierwszy wzór z (5.9) i metodę całkowania przez części;
(f) Do całki (5.11) stosujemy drugi wzór z (5.9) i metodę całkowania przez części.

Zadanie 5.3.17. Stosując wskazówki z Uwagi 5.3.16 wykazać równości (5.7)–(5.11).

Twierdzenie 5.3.18 (Podstawowe twierdzenie rachunku całkowego)**.** *Jeżeli F jest dowolną całką nieoznaczoną funkcji f ciągłej w przedziale $[a,b]$, to*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a). \tag{5.12}$$

Uwaga 5.3.19. Wzór (5.12) jest jednym z najważniejszych wzorów rachunku całkowego. Pozwala on obliczyć całkę Riemanna danej funkcji, gdy znamy jej funkcję pierwotną.

Przykład 5.3.20. (a) $\displaystyle\int_1^2 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_1^2 = \frac{8}{3}-\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$.

(b) $\displaystyle\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1)-(-1) = 1+1 = 2$. W szczególności, pole obszaru D_1 (a dzięki symetrii także pole obszaru D_2) z Przykładu 5.2.7 równe jest 2 (Rysunek 51).

Zadanie 5.3.21. Obliczyć całki

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$,

(2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$,

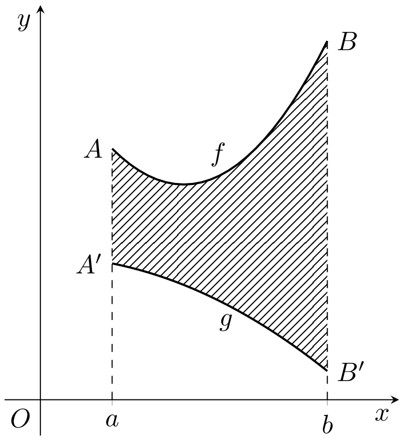
(3) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$,

(4) $\displaystyle\int_0^a x\sqrt{a-x^2}\,dx$,

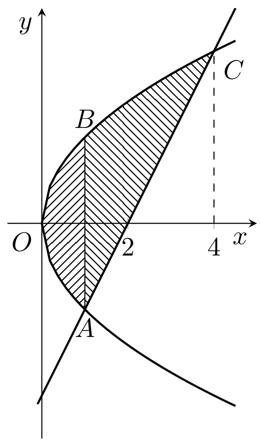
(5) $\displaystyle\int_0^\pi x\sin x\,dx$,

(6) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx$,

(7) $\displaystyle\int_{-1}^1 (4x^2-2x)e^{2x}\,dx$,



Rysunek 52.



Rysunek 53.

(8) $\displaystyle\int_0^1 \left(1-\sqrt{x}\right)^2\,dx,$

(9) $\displaystyle\int_0^a \frac{x^2}{x^3+a^3}\,dx.$

5.4. **Zastosowania całki Riemanna funkcji jednej zmiennej.** Całkę Riemanna można wykorzystać do obliczania pól powierzchni zbiorów płaskich i długości łuków, zarówno na płaszczyźnie jak i w przestrzeni.

Twierdzenie 5.4.1 (Obliczanie pól)**.** *Niech $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ i niech $f(x) \geqslant g(x)$ dla $x \in [a,b]$. Wtedy zbiór*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b,\ g(x) \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

(Rysunek 52) jest mierzalny powierzchniowo w sensie Jordana i

$$|D| = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

Przykład 5.4.2. (a) Obliczymy pole obszaru D zawartego między parabolą $y^2 = 4x$ i prostą $y = 2x-4$ (Rysunek 53). Linie te przecinają się w punktach $A = (1,-2)$ i $C = (4,4)$ (aby je wyznaczyć, wystarczy rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = 2x-4 \end{cases} .)$$

Prosta $x = 1$ rozdziela obszar na dwa obszary

$$D_1 := AOB = \{0 \leqslant x \leqslant 1,\ -2\sqrt{x} \leqslant y \leqslant 2\sqrt{x}\},\quad D_2 = ABC = \{1 \leqslant x \leqslant 4,\ 2x-4 \leqslant y \leqslant 2\sqrt{x}\},$$

zatem

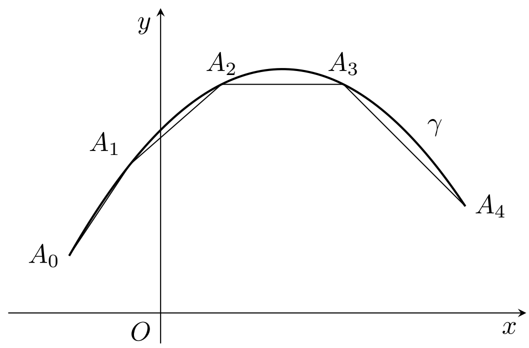
$$\begin{aligned} |D| = |D_1| + |D_2| &= \int_0^1 (2\sqrt{x} - (-2\sqrt{x}))\,dx + \int_1^4 (2\sqrt{x} - 2x + 4)\,dx \\ &= \frac{8}{3}\sqrt{x}^3\Big|_0^1 + \frac{4}{3}\sqrt{x}^3 - x^2 + 4x\Big|_1^4 \\ &= \frac{8}{3} + \frac{32}{3} - 16 + 16 - \frac{4}{3} + 1 - 4 = 12 + 1 - 4 = 9. \end{aligned}$$

(b) Obliczymy pole wnętrza elipsy D danego nierównością $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$. Wnętrze elipsy jest ograniczone krzywymi

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad \text{i} \quad y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

gdzie $-a < x < a$, więc

$$|D| = \int_{-a}^a 2\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{2b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right]_{-a}^a = \frac{2b}{a}\left(\frac{a^2\pi}{4} - \left(-\frac{a^2\pi}{4}\right)\right) = \pi ab.$$



RYSUNEK 54.

W szczególności, pole koła K zadanego nierównością $x^2 + y^2 < r^2$ wynosi $|K| = \pi r^2$ (stosujemy powyższe rachunki dla $a = b = r$).

Zadanie 5.4.3. Obliczyć pole obszaru zawartego między
(1) parabolą $y = x^2 - 2x$ i prostą $y = -x + 2$,
(2) parabolą $y = x^2/(2p)$ i prostą $y = 3x/4 + p/2$,
(3) krzywą $y = 6x\sqrt{1-x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, i osią x,
(4) parabolami $y = 2(x+1)^2$, $y = (x+1)^2 + 4$,
(5) prostą $x + y = 9$ i hiperbolą $xy = 14$,
(6) prostą $y = x + 8$ i hiperbolą $xy + 15 = 0$,
(7) krzywą $y = \ln x$, osią x i prostą $x = e^{-2}$.

Definicja 5.4.4. Niech $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a,b]$, będą funkcjami ciągłymi. Funkcję $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ daną wzorem $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a,b]$, nazywamy *krzywą płaską*. Zbiór

$$\gamma^* := \gamma([a,b]) = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : t \in [a,b]\} \tag{5.13}$$

nazywamy *obrazem geometrycznym krzywej* γ.

Przykład 5.4.5. (a) Równania $x(t) = t$, $y(t) = t^2$, $t \in [0,1]$, opisują łuk paraboli przebiegane punktu $(0,0)$ do $(1,1)$.
(b) Dla $r > 0$ równania $x(t) = r\cos t$, $y(t) = r\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, opisują okrąg o środku w punkcie $(0,0)$ i promieniu r przebiegany przeciwnie do ruchu wskazówek zegara od punktu $(r,0)$ do tego samego punktu. Obrazem geometrycznym krzywej jest okrąg.
(c) Dla $r > 0$ równania $x(t) = r\cos t$, $y(t) = r\sin t$, $t \in [0, 4\pi]$, opisują okrąg o środku w punkcie $(0,0)$ i promieniu r przebiegany dwukrotnie przeciwnie do ruchu wskazówek zegara od punktu $(r,0)$ do tego samego punktu. Obrazem geometrycznym krzywej jest okrąg.
(d) Wykres funkcji ciągłej $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest obrazem geometrycznym pewnej krzywej. Istotnie, ponieważ

$$\Gamma_f = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x \in [a,b],\ y = f(x)\},$$

wystarczy wziąć $x(t) = t$, $y(t) = f(t)$, $t \in [a,b]$.

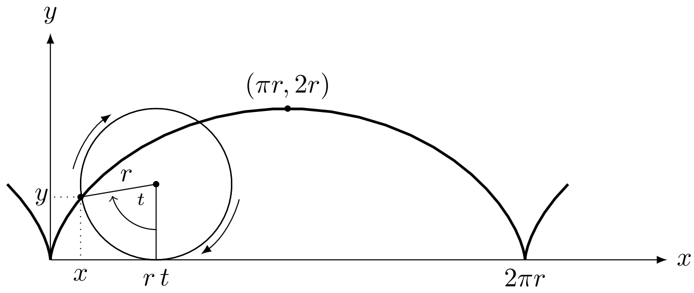
Definicja 5.4.6 (Długość krzywej)**.** Niech będzie dana na płaszczyźnie krzywa γ o równaniach (5.13). Podzielmy przedział $[a,b]$ punktami $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ na n dowolnych części, oznaczmy przez δ_n *średnicę podziału*, tj. największą z różnic $t_j - t_{j-1}$ dla $j = 1, \ldots, n$, i niech punktom podziału t_j odpowiadają na krzywej punkty $A_j := (x(t_j), y(t_j))$. Linię łamaną $A_0A_1 \ldots A_{n-1}A_n$ nazywamy *łamaną wpisaną w krzywą* γ (Rysunek 54). Oznaczmy przez

$$d_n = |A_0A_1| + |A_1A_2| + \cdots + |A_{n-1}A_n| \tag{5.14}$$

długość łamanej, gdzie $|A_{j-1}A_j|$ oznacza długość odcinka o końcach w punktach A_{j-1} i A_j. Jeśli istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} d_n$, gdy $\delta_n \longrightarrow 0$, przy czym granica ta nie zależy od doboru punktów podziału t_j, to krzywą γ nazywamy *prostowalną*, a granicę $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = d$ nazywamy *długością krzywej* γ i oznaczamy przez $|\gamma|$.

Uwaga 5.4.7. Nie każda krzywa jest prostowalna. Np. *krzywa Peano*[16], przechodząca przez wszystkie punkty kwadratu, nie jest prostowalna.

[16]Giuseppe Peano (ur. 27 VIII 1858 w Spinetta, zm. 20 IV 1932 w Turynie) — włoski matematyk i logik.



RYSUNEK 55. Cykloida $x = r(t - \sin t)$, $y = r(1 - \cos t)$.

Twierdzenie 5.4.8 (Obliczanie długości). *(a) Jeśli krzywa (5.13) zadana jest funkcjami mającymi ciągłe pochodne, to jest prostowalna i ma długość*

$$d = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

(b) Krzywa $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, gdzie funkcja f ma w przedziale $[a, b]$ ciągłą pochodną, jest prostowalna i ma długość

$$d = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Przykład 5.4.9. (a) Długość okręgu tj, długość krzywej γ określonej równaniami parametrycznymi $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, wyraża się wzorem

$$|\gamma| = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} r\, dt = 2\pi t \Big|_0^{2\pi} = 2\pi r.$$

Wzór na obwód elipsy nie będącej okręgiem nie daje się wyrazić prostym wzorem.

(b) Długość d cykloidy, tj. krzywej jaką opisuje punkt stały okręgu o promieniu r toczącego się po prostej $y = 0$ (Rysunek 55), opisanej równaniami $x = r(t - \sin t)$, $y = r(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, równa jest

$$\begin{aligned} d &= r\int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}\, dt = r\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)}\, dt = r\int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 \frac{t}{2}}\, dt \\ &= 2r\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt = -4r\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = -4r(\cos\pi - \cos 0) = -4r(-2) = 8r. \end{aligned}$$

(c) Długość d części paraboli $y = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, równa jest

$$d = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx = \frac{1}{2}x\sqrt{1 + 4x^2} + \frac{1}{4}\ln\left|2x + \sqrt{1 + 4x^2}\right| \Big|_0^1 = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\ln(2 + \sqrt{5}).$$

Zadanie 5.4.10. Obliczyć długość łuku

(1) części paraboli $2y = x^2$ w przedziale $0 \leqslant x \leqslant 2$,
(2) części linii łańcuchowej $y = \frac{1}{2}a(e^{x/a} + e^{-x/a})$, $0 \leqslant x \leqslant c$,
(3) asteroidy $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, gdzie $a > 0$,
(4) $y^2 = 4x^3$, gdzie $y > 0$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{8}{9}$,
(5) $y^2 = 2x - x^2$, gdzie $0 \leqslant x \leqslant 1$,
(6) $y = \ln(1 - x^2)$, gdzie $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$,
(7) $x = t^2$, $y = t - t^3/3$ gdzie $0 \leqslant t \leqslant \sqrt{3}$.

6. Funkcje dwóch zmiennych

6.1. **Zbiory na płaszczyźnie i w przestrzeni.** Dziedziną funkcji dwóch zmiennych są podzbiory płaszczyzny.

Przykład 6.1.1. (a) Zbiór

$$K((x_0, y_0), r) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\},$$

gdzie $r > 0$, jest kołem otwartym (tj. bez brzegu) o środku w punkcie (x_0, y_0) i promieniu r.

(b) Zbiór

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\},$$

gdzie $r > 0$, jest okręgiem o środku w punkcie (x_0, y_0) i promieniu r.

(c) Zbiór

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$$

jest prostokątem domkniętym (tj. wraz z brzegiem) o bokach równoległych do osi x i y.

Zadanie 6.1.2. Narysować zbiory

(1) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2x\}$,
(2) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geqslant y\}$,
(3) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < y\}$,
(4) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\}$,
(5) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < y^2\}$,
(6) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} < 1\}$,
(7) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 2\}$.

Definicja 6.1.3. Zbiór $D \subset \mathbb{R}^2$ nazywamy *obszarem*, jeśli dla każdego punktu $(x, y) \in D$ istnieje liczba $r > 0$ taka, że $K((x, y), r) \subset D$ i jeśli każde dwa punkty zbioru D można połączyć linią łamaną zawartą w D.

Przykład 6.1.4. Wnętrze prostokąta lub elipsy jest obszarem, okrąg lub koło domknięte nie są obszarami. Suma dwóch rozłącznych kół otwartych też nie jest obszarem.

Definicja 6.1.5. Niech $A \subset \mathbb{R}^2$. Funkcję

$$A \ni (x, y) \overset{f}{\longmapsto} f(x, y) \in \mathbb{R} \tag{6.1}$$

nazywamy *funkcją dwóch zmiennych* x i y.

Uwaga 6.1.6. Jeśli funkcję $(x, y) \longmapsto f(x, y)$ określamy wzorem nie podając jej dziedziny to przyjmujemy, że dziedziną jest zbiór tych par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dla których wzór ma sens.

Przykład 6.1.7. Wzór $f(x, y) = \frac{1}{x-y}$ określa funkcję na całej płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ poza prostą $y = x$, a wzór $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ określa funkcję na kole domkniętym $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

Zadanie 6.1.8. Podać dziedzinę funkcji

(1) $f(x, y) = \ln(xy)$,
(2) $f(x, y) = 1/\sqrt{4 - x^2 - y^2}$,
(3) $f(x, y) = 1/(1 - e^{x+y})$,
(4) $f(x, y) = \ln(2^x - 3^y)$.

Uwaga 6.1.9. Przypomnijmy, że

$$\Gamma(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A,\ z = f(x, y)\}.$$

Wynika stąd, że wykres funkcji (6.1) jest podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Przykład 6.1.10. Wykresem funkcji

$$f(x, y) = 1 - x + 2y, \quad g(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad h(x, y) = x^2 + 2y^2$$

są kolejno, *płaszczyzna* (Rysunek 56), *górna półsfera o promieniu 2 i środku* $(0, 0, 0)$ (Rysunek 57) i *paraboloida eliptyczna* (Rysunek 58). Przekroje paraboloidy płaszczyznami $y = 0$ i $x = 0$ są parabolami $z = x^2$ i $z = 2y^2$, a przekroje poziomicami $z = z_0 > 0$ są elipsami $x^2 + 2y^2 = z_0$.

Zadanie 6.1.11. Narysować wykresy funkcji

(1) $f(x, y) = 2x^2 + 1$,

(2) $g(x,y) = 1 - x^2 - y^2$,
(3) $h(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$,
(4) $i(x,y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$,
(5) $j(x,y) = 1 - x - y$,
(6) $k(x,y) = xy$.

6.2. **Pochodne cząstkowe.** Niech funkcja f będzie określona w otoczeniu punktu (x_0, y_0).

Definicja 6.2.1. Jeśli zmiennej y nadamy stałą wartość y_0, to

$$x \longmapsto f(x, y_0) \tag{6.2}$$

jest funkcją jednej zmiennej (zmiennej x). Pochodną funkcji (6.2) w punkcie x_0 nazywamy *pochodną cząstkową* funkcji dwóch zmiennych f *względem* x w punkcie (x_0, y_0) i oznaczamy przez $f'_x(x_0, y_0)$ lub $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, więc

$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Podobnie określamy *pochodną cząstkową* funkcji f *względem* y w punkcie (x_0, y_0) ustalając $x = x_0$ i obliczając pochodną funkcji

$$y \longmapsto f(x_0, y)$$

jednej zmiennej y w punkcie y_0. Pochodną tę oznaczamy przez $f'_y(x_0, y_0)$ lub $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, więc

$$f'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Uwaga 6.2.2. Jeśli funkcja f zmiennych (x, y) ma pochodne cząstkowe f'_x i f'_y w każdym pukcie dziedziny, to pochodne te są znowu funkcjami dwóch zmiennych.

Przykład 6.2.3. (a) Niech $f(x,y) = x^2 - xy + 3y^2$. Obliczymy wartości pochodnych cząstkowych funkcji f w punkcie $(1, 2)$, tzn. $f'_x(1, 2)$ $f'_y(1, 2)$. Najpierw obliczamy pochodne cząstkowe. Uważajmy x za zmienną, a y za stałą. Wtedy

$$f'_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - y.$$

Uważając z kolei y za zmienną, a x za stałą, otrzymamy

$$f'_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x + 6y.$$

W szczególności, $f'_x(1, 2) = 0$, $f'_y(1, 2) = 11$.

(b) Niech $f(x, y) = \frac{1}{2} \ln \frac{x-y}{x+y}$. Wtedy

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{x + y - (x - y)}{(x+y)^2} = \frac{2y}{2(x-y)(x+y)} = \frac{y}{x^2 - y^2},$$

oraz

$$f'_y(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{-(x + y) - (x - y)}{(x+y)^2} = \frac{-2x}{2(x-y)(x+y)} = \frac{-x}{x^2 - y^2}.$$

Zadanie 6.2.4. Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji

(1) $f(x,y) = x^2y + 4xy^3$,
(2) $f(x,y) = x^3 - 2x^2y + 3y^2 - 5x$,
(3) $f(x,y) = \dfrac{xy}{y-1}$,
(4) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$,
(5) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$,
(6) $f(x,y) = x \sin y + \cos(xy)$,
(7) $f(x,y) = (3x - y)\ln(x^2 + y^2)$,
(8) $f(x,y) = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{x-y}{x+y}$,
(9) $f(x,y) = \ln \dfrac{x}{y}$.

Definicja 6.2.5. Pochodne cząstkowe pochodnych cząstkowych f'_x i f'_y nazywamy *pochodnymi cząstkowymi rzędu drugiego*. Jest ich cztery, oznaczamy je

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) =: \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) =: \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx},$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big) =: \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big) =: \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}.$$

Pochodne f''_{xy} i f''_{yx} nazywamy *pochodnymi mieszanymi*.

Przykład 6.2.6. Jeśli $f(x, y) = x^2y - 3xy^2 - 2x^2$, to

$$f'_x(x, y) = 2xy - 3y^2 - 4x, \quad f'_y(x, y) = x^2 - 6xy$$

oraz

$$f''_{xx}(x, y) = 2y - 4, \qquad f''_{yx}(x, y) = 2x - 6y,$$
$$f''_{xy}(x, y) = 2x - 6y, \qquad f''_{yy}(x, y) = -6x.$$

Zadanie 6.2.7. Obliczyć pochodne cząstkowe drugiego rzędu dla funkcji
(1) $f(x, y) = x^4 - 3x^2y^2 + 2xy^2$,
(2) $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$,
(3) $f(x, y) = xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$,
(4) $f(x, y) = e^{xy}$,
(5) $f(x, y) = (x^2 - y^2) \ln y$,
(6) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$,
(7) $f(x, y) = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{y}{x}$.

Uwaga 6.2.8. Dla funkcji „porządnych" (np. mających drugie pochodne cząstkowe ciągłe), a tylko takimi będziemy się zajmować, pochodne mieszane są równe, tj.

$$f''_{xy} = f''_{yx}.$$

6.3. **Ekstrema lokalne i globalne funkcji dwóch zmiennych.** Podobnie jak w przypadku funkcji jednej zmiennej, pojęcie pochodnych cząstkowych można zastosować do wyznaczania największych i najmniejszych wartości funkcji dwóch zmiennych.

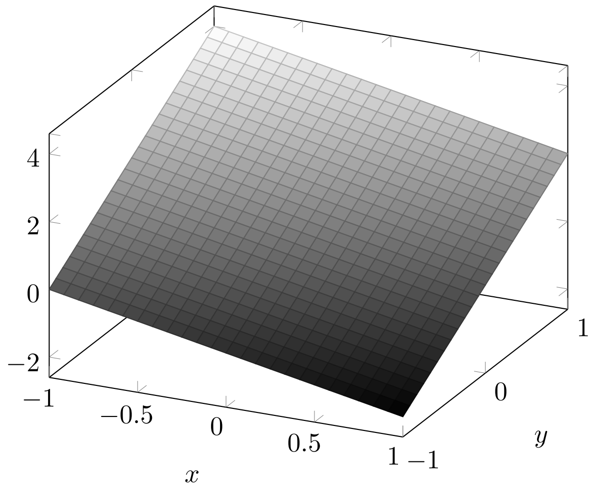
Definicja 6.3.1 (Ekstrema lokalne)**.** Mówimy, że funkcja f określona w otoczeniu punktu (x_0, y_0) ma w punkcie (x_0, y_0)
- *maksimum lokalne*, jeśli istnieje takie koło K o środku w punkcie (x_0, y_0), że $f(x_0, y_0) \geqslant f(x, y)$ dla dowolnego punktu $(x, y) \in K$;
- *właściwe* (*silne*) *maksimum lokalne*, jeśli istnieje takie koło K o środku w punkcie (x_0, y_0), że $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ dla dowolnego punktu $(x, y) \in K \setminus \{(x_0, y_0)\}$;
- *minimum lokalne*, jeśli istnieje takie koło K o środku w punkcie (x_0, y_0), że $f(x_0, y_0) \leqslant f(x, y)$ dla dowolnego punktu $(x, y) \in K$;
- *właściwe* (*silne*) *minimum lokalne*, jeśli istnieje takie koło K o środku w punkcie (x_0, y_0), że $f(x_0, y_0) < f(x, y)$ dla dowolnego punktu $(x, y) \in K \setminus \{(x_0, y_0)\}$.

Maksimum i minimum lokalne, właściwe lub nie, nazywamy krótko *ekstremum lokalnym*.

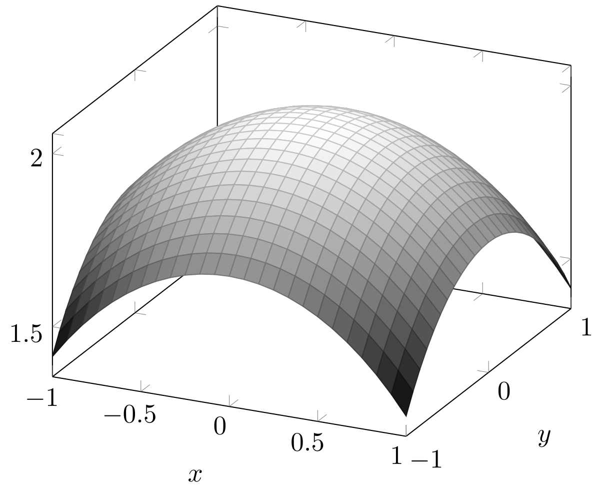
Przykład 6.3.2. (a) Funkcja $f(x, y) = 1 - x + 2y$ nie ma ekstremów lokalnych (Rysunek 56),
(b) Funkcja $g(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ ma w punkcie $(0, 0)$ właściwe maksimum lokalne równe $g(0, 0) = 2$ (Rysunek 57),
(c) Funkcja $h(x, y) = x^2 + 2y^2$ ma w punkcie $(0, 0)$ właściwe minimum lokalne równe $h(0, 0) = 0$ (Rysunek 58),
(d) Funkcja $i(x, y) = 1 - y^2$ ma w punktach $(x, 0)$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, maksima lokalne (ale nie są to maksima właściwe!) równe $i(x, 0) = 1$ (Rysunek 59).

Twierdzenie 6.3.3 (Warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego)**.** *Jeśli funkcja f ma ekstremum lokalne w punkcie (x_0, y_0) oraz ma w tym punkcie pochodne cząstkowe rzędu pierwszego, to*

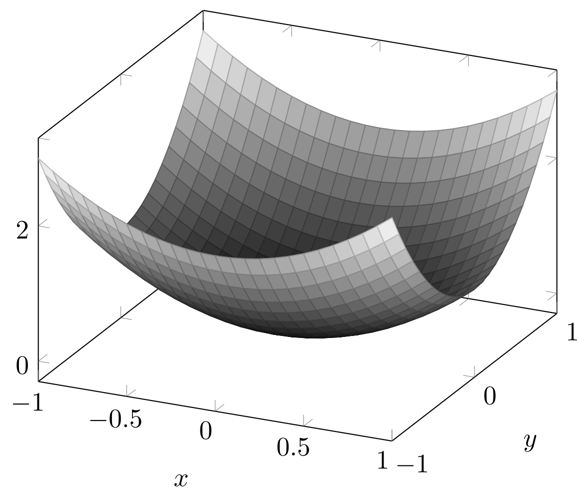
$$f'_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{i} \quad f'_y(x_0, y_0) = 0. \tag{6.3}$$



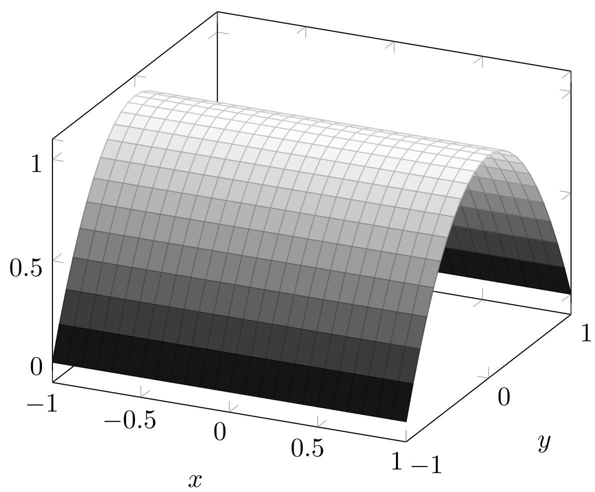
RYSUNEK 56. $f(x, y) = 1 - x + 2y$.



RYSUNEK 57. $g(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.



RYSUNEK 58. $h(x, y) = x^2 + 2y^2$.



RYSUNEK 59. $f(x, y) = 1 - y^2$.

Uwaga 6.3.4. Warunek (6.3) nie jest wystarczający. Istotnie, $f(x, y) = xy$ ma pochodne cząstkowe rzędu pierwszego, bo $f'_x(x, y) = y$ i $f'_y(x, y) = x$. Ponadto, $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$, ale funkcja $f(x, y)$ nie ma ekstremum lokalnego w punkcie $(0, 0)$, gdyż jest dodatnia w I i III ćwiartce płaszczyzny i ujemna w II i IV.

Definicja 6.3.5. Niech funkcja f ma pochodne cząstkowe rzędu drugiego. Wyrażenie

$$w = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = f''_{xx} f''_{yy} - f''_{xy} f''_{yx}$$

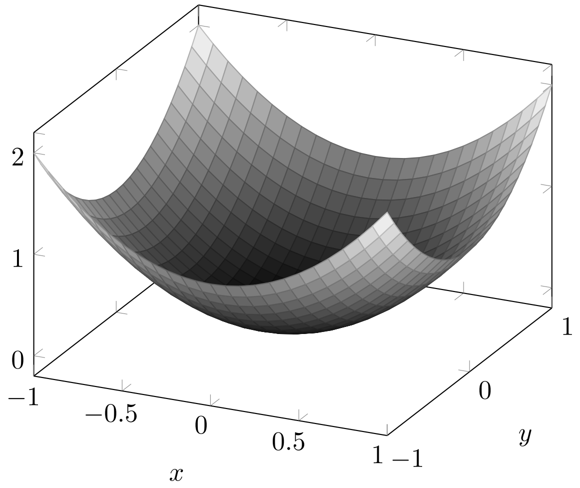
nazywamy *wyróżnikiem* funkcji f.

Twierdzenie 6.3.6 (Warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego)**.** *Jeśli funkcja f, mająca w otoczeniu punktu (x_0, y_0) ciągłe pochodne cząstkowe rzędu drugiego, spełnia warunek (6.3), to funkcja f w punkcie (x_0, y_0)*

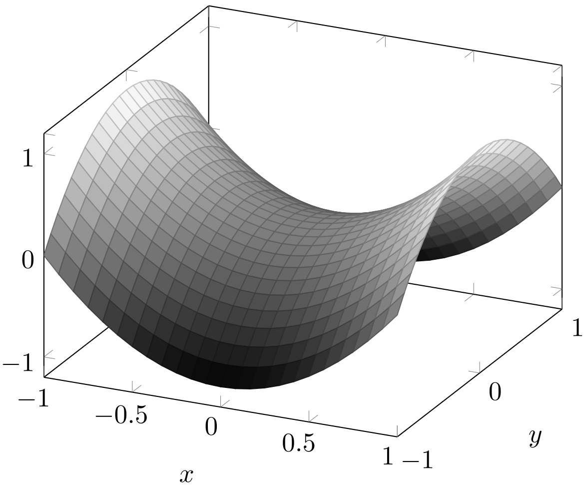
(a) ma ekstremum lokalne, jeśli $w(x_0, y_0) > 0$, i to maksimum, jeśli $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ a minimum, jeśli $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$,

(b) nie ma ekstremum lokalnego, jeśli $w(x_0, y_0) < 0$.

Uwaga 6.3.7. Twierdzenie to nie rozstrzyga czy ekstremum istnieje, jeżeli $w(x_0, y_0) = 0$.



Rysunek 60. $f(x,y) = x^2 + \lambda y^2$, $\lambda > 0$.



Rysunek 61. $f(x,y) = x^2 + \lambda y^2$, $\lambda < 0$.

Przykład 6.3.8. (a) Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = x^2 + \lambda y^2$, gdzie $\lambda \neq 0$ jest stałą. Pochodne

$$f'_x(x,y) = 2x, \quad f'_y(x,y) = 2\lambda y$$

zerują się w punkcie $(0,0)$. Ponieważ $w(0,0) = 4\lambda$ oraz $f''_{xx}(0,0) = 2$, więc gdy $\lambda > 0$, to funkcja f ma w punkcie $(0,0)$ minimum (Rysunek 60), a gdy $\lambda < 0$, to funkcja f nie ma w punkcie $(0,0)$ ekstremum (Rysunek 61).

(b) Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 6xy$. Pochodne

$$f'_x(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 6y, \quad f'_y(x,y) = 6xy - 6x$$

są równe zeru wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y = 0 \\ x(y-1) = 0 \end{cases},$$

skąd z drugiego równania wynika, że $x = 0$ lub $y = 1$. Jeśli $x = 0$, to pierwsze równanie redukuje się do postaci $y(y-2) = 0$, skąd $y = 0$ lub $y = 2$. Jeśli $y = 1$, to pierwsze równanie redukuje się do postaci $x^2 - 1 = 0$, skąd $x = -1$ lub $x = 1$. Ostatecznie, obie pochodne cząstkowe zerują się w czterech punktach

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Ponieważ

$$w(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & 6y-6 \\ 6y-6 & 6x \end{vmatrix} = 36x^2 - 36(y-1)^2 = 36(x^2 - (y-1)^2),$$

skąd wnioskujemy, że
(i) $w(0,0) = -36 < 0$, więc w punkcie $(0,0)$ funkcja f nie ma ekstremum,
(ii) $w(0,2) = -36 < 0$, więc w punkcie $(0,2)$ funkcja f nie ma ekstremum,
(iii) $w(-1,1) = 36 > 0$ oraz $f''_{xx}(-1,1) = -6 < 0$, więc w punkcie $(-1,1)$ funkcja f ma właściwe maksimum lokalne,
(iv) $w(1,1) = 36 > 0$ oraz $f''_{xx}(1,1) = 6 > 0$, więc w punkcie $(1,1)$ funkcja f ma właściwe minimum lokalne.

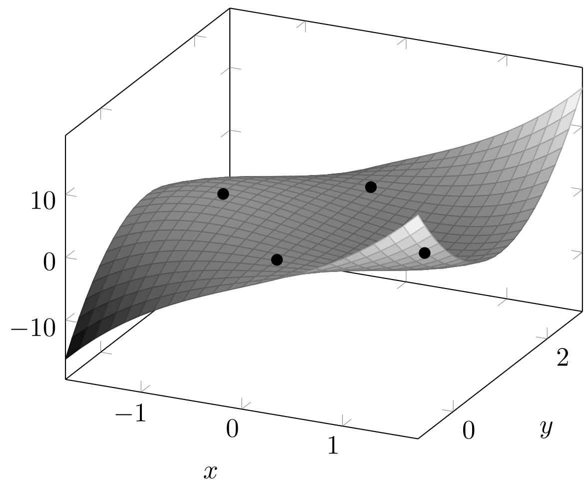
Wykres funkcji f przedstawia Rysunek 62.

(c) Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = x^3 + y^3$. Pochodne

$$f'_x(x,y) = 3x^2, \quad f'_y(x,y) = 3y^2$$

są równe zero tylko w punkcie $(x,y) = (0,0)$. Ponieważ

$$w(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix} = 36xy,$$



RYSUNEK 62. $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 6xy$.

więc $w(0,0) = 0$. Twierdzenie nie rozstrzyga istnienia ekstremum. Zauważmy jednak, że $f(0,0) = 0$. Ponadto,

$$f(x,0) = -f(-x,0) = x^3 > 0, \quad x > 0,$$

czyli funkcja f na dodatniej półosi x przyjmuje wartości dodatnie a na ujemnej półosi x — wartości ujemne. W konsekwencji, w punkcie $(0,0)$ funkcja f nie ma ekstremum lokalnego.

(d) Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = 2x^4 + 3y^6$. Pochodne

$$f'_x(x,y) = 8x^3, \quad f'_y(x,y) = 18y^5$$

są równe zero tylko w punkcie $(x,y) = (0,0)$. Ponieważ

$$w(x,y) = \begin{vmatrix} 24x^2 & 0 \\ 0 & 90y^4 \end{vmatrix} = 2160x^2y^4,$$

więc $w(0,0) = 0$. Twierdzenie nie rozstrzyga istnienia ekstremum. Zauważmy jednak, że

$$f(x,y) = 2x^4 + 3y^6 > 0 = f(0,0), \quad (x,y) \neq (0,0),$$

czyli, na mocy definicji, funkcja f ma w punkcie $(0,0)$ silne minimum lokalne (nawet globalne).

Zadanie 6.3.9. (1) Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 6y$,
(b) $f(x,y) = x^2y(4 - x + y)$,
(c) $f(x,y) = 6xy - x^3 - y^3$,
(d) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4a^2xy + 2a^2$,
(e) $f(x,y) = \dfrac{4}{x} - \dfrac{12}{y} + x - 4y^3$,
(f) $f(x,y) = x^4 + y^6$.

(2) Który z trójkątów o obwodzie $2p$ i bokach a, b, c ma największe pole P?
(3) Wyznaczyć prostopadłościan o największej objętości, jeśli pole powierzchni jest równe 54.
(4) Na okręgu opisać trójkąt o najmniejszym polu.

Twierdzenie 6.3.10. *Funkcja ciągła f dwóch zmiennych w domkniętym i ograniczonym zbiorze płaskim osiąga wartość największą i najmniejszą.*

Uwaga 6.3.11. Nie musi to być maksimum i minimum lokalne. Jeśli dodatkowo funkcja f jest różniczkowalna i zbiór D jest „porządny" (co to oznacza, wyjaśni się za chwilę), to w celu wyznaczenia tych wartości możemy postąpić według poniższego algorytmu.

(1) Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

i notujemy wszystkie jego rozwiązania (x,y) będące punktami wewnętrzymi naszego zbioru.

(2) Dzielimy brzeg zbioru na skończoną liczbę fragmentów, z których każdy da się opisać wzorem typu $y = \tilde{p}(x)$, $x \in [a, b]$ lub $x = \tilde{q}(y)$, $y \in [c, d]$, gdzie $\tilde{p}$ i $\tilde{q}$ są funkcjami różniczkowalnymi („porządność” zbioru D oznacza, że jego brzeg da się zapisać jako skończona suma mnogościowa wykresów funkcji różniczkowalnych jednej zmiennej). Wykorzystując te podstawienia otrzymujemy ciągłe funkcje

$$[a, b] \ni x \xmapsto{p} f(x, \tilde{p}(x)) \in \mathbb{R}$$

jednej zmiennej x lub ciągłe funkcje

$$[c, d] \ni y \xmapsto{q} f(\tilde{q}(y), y) \in \mathbb{R}$$

jednej zmiennej y i znajdujemy miejsca zerowe pochodnych p' lub q' funkcji p lub q jednej zmiennej leżące wewnątrz przedziałów (a, b) lub (c, d). Notujemy odpowiadające im punkty $(x, \tilde{p}(x))$ i $(\tilde{q}(y), y)$ brzegu zbioru oraz punkty brzegowe przedziałów funkcji jednej zmiennej, tj. $(a, \tilde{p}(a))$, $(b, \tilde{p}(b))$ (odp. $(\tilde{q}(c), c)$, $(\tilde{q}(d), d)$).

(3) Obliczamy wartości funkcji $f(x, y)$ we wszystkich punktach zanotowanych powyżej i wyszukujemy te, w których funkcja $f(x, y)$ osiąga wartości ekstremalne.

Przykład 6.3.12. Wyznaczyć największą i najmniejszą wartość funkcji

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$$

w trójkącie domkniętym T ograniczonym przez proste

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x + y + 3 = 0.$$

Jedynym rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 2x - y + 1 = 0 \\ f'_y(x, y) = 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$$

jest punkt $A = (-1, -1)$ leżący wewnątrz trójkąta T (Rysunek 66).

Brzeg trójkąta dzielimy na trzy boki:

(i) $x = 0$, $-3 \leqslant y \leqslant 0$. Wtedy $g(y) := f(0, y) = y^2 + y$, $y \in [-3, 0]$, oraz $g'(y) = 2y + 1$, skąd funkcja g ma ekstremum w punkcie $y = -1/2$. Oznacza to, że będziemy sprawdzać wartość funkcji f w pukcie $B = (0, -1/2)$.

(ii) $y = 0$, $-3 \leqslant x \leqslant 0$. Wtedy $h(x) := f(x, 0) = x^2 + x$, $x \in [-3, 0]$, oraz $h'(x) = 2x + 1$, skąd funkcja h ma ekstremum w punkcie $x = -1/2$. Oznacza to, że będziemy sprawdzać wartość funkcji f w pukcie $C = (-1/2, 0)$.

(iii) $y = -x-3$, $-3 \leqslant x \leqslant 0$. Wtedy $i(x) := f(x, -x-3) = 3x^2+9x+9$, $x \in [-3, 0]$, oraz $i'(x) = 6x+9$, skąd funkcja i ma ekstremum w punkcie $x = -3/2$. Oznacza to, że będziemy sprawdzać wartość funkcji f w pukcie $D = (-3/2, -3/2)$.

Należy sprawdzić jeszcze wartości funkcji g, h i i na końcach przedziałów, co sprowadza się do zbadania wartości funkcji f w punktach będących wierzchołkami trójkąta T, a więc w punktach $E = (0, -3)$, $F = (-3, 0)$ i $G = (0, 0)$.

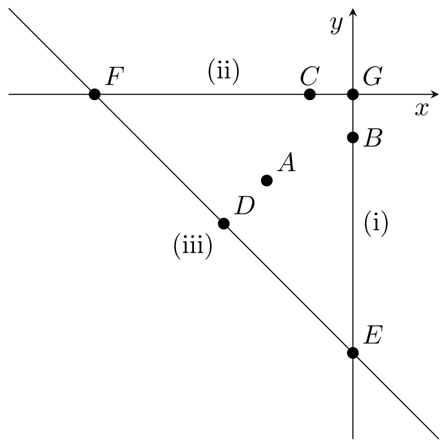
Ostatecznie liczymy

(A) $f(-1, -1) = f(A) = -1$,
(B) $g(-1/2) = f(0, -1/2) = f(B) = -1/4$,
(C) $h(-1/2) = f(-1/2, 0) = f(C) = -1/4$,
(D) $i(-3/2) = f(-3/2, -3/2) = f(D) = -3/4$,
(E) $f(0, -3) = f(E) = 6$,
(F) $f(-3, 0) = f(F) = 6$,
(G) $f(0, 0) = f(G) = 0$.

Wynika stąd, że funkcja f na domkniętym trójkącie T przyjmuje wartość największą równą 6 (w punktach $E = (-3, 0)$ i $F = (0, -3)$) i wartość najmniejszą równą -1 (w punkcie $A = (-1, -1)$) (Rysunek 66).

Zadanie 6.3.13. Wyznaczyć największą i najmniejszą wartość funkcji

(1) $f(x, y) = 2xy$ na zbiorze $x^2 + y^2 \leqslant 1$,
(2) $f(x, y) = x^2 - 2y^2 + 3x - 6$ na zbiorze $x^2 + y^2 \leqslant 9$,
(3) $f(x, y) = x^3 + 3y^2 - x + 2$ na zbiorze $2x^2 + y^2 \leqslant 20$,
(4) $f(x, y) = x^2 + y^2$ na zbiorze $|x| + |y| \leqslant 1$.



Rysunek 63. Trójkąt T.

7. Elementy teorii całki Riemanna funkcji dwóch zmiennych

7.1. Całka Riemanna funkcji dwóch zmiennych.

Definicja 7.1.1. Niech

$$P = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \tag{7.1}$$

będzie dowolnym prostokątem i niech $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną dwóch zmiennych. Dla dowolnego podziału $\pi = \{P_1, \ldots, P_m\}$ prostokąta P wybierzmy dowolny zbiór punktów $(x_j, y_j) \in P_j$, $j = 1, \ldots, m$, oznaczmy go przez $x = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_m, y_m)\}$ i utwórzmy sumę pośrednią (zależną od poddziału π i punktów pośrednich x)

$$\sigma = \sigma(f) := f(x_1, y_1)|P_1| + f(x_2, y_2)|P_2| + \cdots + f(x_m, y_m)|P_m|. \tag{7.2}$$

Jeśli ciąg sum pośrednich $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ odpowiadający dowolnemu normalnemu ciągowi podziałów $(\pi_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny, i to zawsze do tej samej granicy bez względu na dobór podziałów i punktów pośrednich, to granicę tę nazywamy *podwójną całką Riemanna* (krótko *całką Riemanna*) funkcji f w prostokącie P i oznaczamy

$$\int_P f \quad \text{lub} \quad \int_P f(x, y)\, dx\, dy. \tag{7.3}$$

Jeśli całka (7.3) istnieje, to funkcję f nazywamy *całkowalną w sensie Riemanna* lub krótko *całkowalną* w prostokącie P i piszemy $f \in \mathcal{R}(P)$.

Przykład 7.1.2. (a) Niech $f(x) = C$ dla $x \in P$, gdzie C jest stałą. W myśl (7.2) jest

$$\sigma = C|P_1| + C|P_2| + \cdots + C|P_m| = C(|P_1| + |P_2| + \cdots + |P_m|) = C|P| = C(b-a)(d-c)$$

dla każdego podziału $\pi = \{P_1, \ldots, P_m\}$ prostokąta $P = [a, b] \times [c, d]$ i punktów pośrednich x, więc całka (7.3) istnieje i

$$\int_P C\, dx\, dy = C(b-a)(d-c).$$

(b) Niech

$$f(x, y) := \begin{cases} 1, & \text{gdy } (x, y) \in \mathbb{Q}^2 \cap P \\ 0 & \text{gdy } (x, y) \in P \setminus \mathbb{Q}^2 \end{cases}.$$

Dla dowolnego podziału $\pi = \{P_1, \ldots, P_m\}$ prostokąta P oraz $(x_j, x_j) \in \mathbb{Q}^2$, w myśl (7.2) mamy

$$\sigma_{\pi,x} = |P_1| + |P_2| \cdots + |P_m| = |P| = (b-a)(d-c),$$

jeśli natomiast dla dowolnego podziału $\pi = \{P_1, \ldots, P_m\}$ prostokąta P weźmiemy $(x_j, y_j) \notin \mathbb{Q}^2$, to w myśl (7.2)

$$\sigma_{\pi,x} = 0 \cdot |P_1| + 0 \cdot |P_2| \cdots + 0 \cdot |P_m| = 0,$$

czyli $f \notin \mathcal{R}(P)$.

Definicja 7.1.3. Niech teraz $E \subset \mathbb{R}^2$ będzie dowolnym zbiorem ograniczonym i niech $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją ograniczoną. Rozważmy prostokąt P taki, że $E \subset P$ i niech

$$f_P(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{gdy } (x, y) \in E \\ 0, & \text{gdy } (x, y) \in P \setminus E \end{cases}.$$

Funkcję f nazywamy *całkowalną w sensie Riemanna* w zbiorze E, jeśli istnieje całka $\int_P f_P$ i piszemy $f \in \mathcal{R}(E)$. *Całkę funkcji f na zbiorze E* oznaczamy symbolem

$$\int_E f \tag{7.4}$$

i określamy wzorem

$$\int_E f = \int_P f_P. \tag{7.5}$$

Twierdzenie 7.1.4 (Interpretacja geometryczna podwójnej całki Riemanna)**.** *Jeśli $E \subset \mathbb{R}^2$ i $f \in \mathcal{R}(E)$ oraz $f(x, y) \geq 0$, $(x, y) \in E$, to zbiór*

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in E,\ 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

jest mierzalny w sensie Jordana i jego objętość

$$|V| = \int_E f(x, y)\, dx\, dy.$$

Twierdzenie 7.1.5. *(a) Jeśli $E \subset \mathbb{R}^2$ i $f, g \in \mathcal{R}(E)$, to $f \pm g, fg \in \mathcal{R}(E)$, przy czym*

$$\int_E (f \pm g) = \int_E f \pm \int_E g$$

i gdy A jest dowolną stałą, to

$$\int_E Af = A \int_E f.$$

(b) Jeśli $f \in \mathcal{R}(E)$ oraz $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, to, o ile całki po prawej stronie istnieją,

$$\int_E f = \int_{E_1} f + \int_{E_2} f.$$

7.2. **Metody obliczania całki Riemanna funkcji dwóch zmiennych.** Podobnie jak w przypadku pojedynczej całki Riemanna, obliczanie całek podwójnych wprost z definicji bywa dość kłopotliwe. Dlatego problem obliczenia całki podwójnej najczęściej redukuje się do problemu obliczenia całki pojedynczej wykorzystując pojęcie całek iterowanych.

Zajmijmy się najpierw funkcją określoną na prostokącie.

Definicja 7.2.1 (Całki iterowane)**.** Niech $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną i ograniczoną w prostokącie (7.1) i niech przy każdym ustalonym punkcie $x \in [a, b]$ istnieje całka pojedyncza

$$\int_c^d f(x, y)\, dy.$$

Jeśli funkcja

$$[a, b] \ni x \longmapsto \int_c^d f(x, y)\, dy$$

jest całkowalna w przedziale $[a, b]$, to całkę

$$\int_a^b \Big(\int_c^d f(x, y)\, dy \Big)\, dx, \quad \text{czyli} \quad \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy, \tag{7.6}$$

nazywamy *całką iterowaną* funkcji f. Analogicznie określamy całkę iterowaną

$$\int_c^d \Big(\int_a^b f(x, y)\, dx \Big)\, dy, \quad \text{czyli} \quad \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx. \tag{7.7}$$

Przykład 7.2.2. Obliczmy całki iterowane

$$\int_{-2}^{3} dx \int_{0}^{1} (1 - xy^2)\, dy, \qquad \int_{0}^{1} dy \int_{-2}^{3} (1 - xy^2)\, dx.$$

Dla pierwszej z całek mamy

$$\int_{-2}^{3} dx \int_{0}^{1} (1 - xy^2)\, dy = \int_{-2}^{3} \left(y - \frac{1}{3}xy^3 \right)\Big|_{y=0}^{1} dx = \int_{-2}^{3} \left(1 - \frac{1}{3}x \right) dx$$
$$= \left(x - \frac{1}{6}x^2 \right)\Big|_{x=-2}^{3} = 3 - \frac{9}{6} + 2 + \frac{4}{6} = \frac{25}{6}.$$

Drugą całkę liczymy podobnie

$$\int_{0}^{1} dy \int_{-2}^{3} (1 - xy^2)\, dx = \int_{0}^{1} \left(x - \frac{1}{2}x^2y^2 \right)\Big|_{x=-2}^{3} dy = \int_{0}^{1} \left(3 - \frac{9}{2}y^2 + 2 + 2y^2 \right) dy$$
$$= \int_{0}^{1} \left(5 - \frac{5}{2}y^2 \right) dy = \left(5y - \frac{5}{6}y^3 \right)\Big|_{y=0}^{1} = 5 - \frac{5}{6} = \frac{25}{6}.$$

Zadanie 7.2.3. Obliczyć całki iterowane

(1) $\displaystyle\int_{0}^{4} dx \int_{4}^{12} xy\, dy$,

(2) $\displaystyle\int_{0}^{a} dx \int_{0}^{b} xy(x - y)\, dy$,

(3) $\displaystyle\int_{1}^{3} dx \int_{1}^{\sqrt{x}} \frac{y}{x}\, dy$,

(4) $\displaystyle\int_{0}^{b} dt \int_{t}^{10t} (st - t^2)\, ds$.

Twierdzenie 7.2.4. *Jeśli funkcja f jest ciągła w prostokącie (7.1), to obie całki iterowane (7.6) i (7.7) istnieją i są równe podwójnej całce Riemanna, tj.*

$$\int_{P} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{a}^{b} dx \int_{c}^{d} f(x, y)\, dy = \int_{c}^{d} dy \int_{a}^{b} f(x, y)\, dx. \tag{7.8}$$

Teraz zajmiemy się przypadkiem ogólnym.

Definicja 7.2.5. Ograniczony obszar $D \subset \mathbb{R}^2$ nazywamy *obszarem regularnym*, jeśli jego brzeg daje się podzielić na skończoną ilość krzywych, z których każda daje się przedstawić bądź równaniem $y = y(x)$, gdzie $a \le x \le b$, bądź równaniem $x = x(y)$, gdzie $c \le y \le d$, przy czym nie wykluczamy przypadku $a = b$ lub $c = d$.

Przykład 7.2.6. Obszarami regularnymi są wnętrze elipsy, wnętrze koła bez środka lub bez jednego promienia, wnętrze pierścienia kołowego, wnętrze prostokąta, itp.

Twierdzenie 7.2.7. *Funkcja f ograniczona i ciągła w obszarze regularnym D jest w nim całkowalna. Ponadto, jeśli podzielimy obszar D na dwa obszary regularne D_1, D_2 zaliczając punkty krzywej podziału do jednego bądź drugiego zbioru, to*

$$\int_{D} f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f. \tag{7.9}$$

Definicja 7.2.8. Obszar regularny

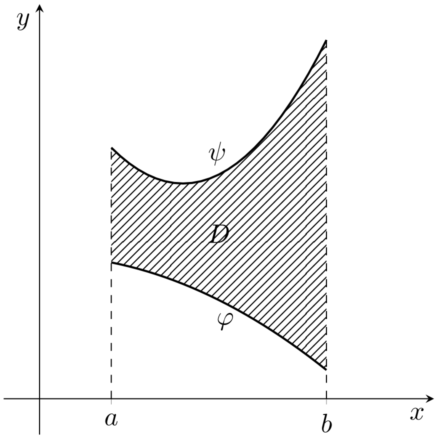
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}, \tag{7.10}$$

gdzie φ i ψ są funkcjami ciągłymi w przedziale $[a, b]$ i $\varphi(x) < \psi(x)$ dla $x \in (a, b)$, nazywamy *obszarem normalnym względem osi x* (Rysunek 64).

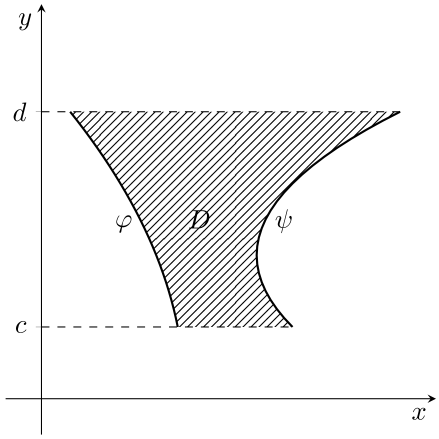
Obszar regularny

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d,\ \varphi(y) \le x \le \psi(y)\}, \tag{7.11}$$

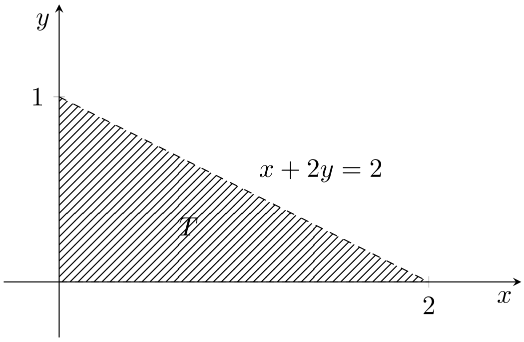
gdzie φ i ψ są funkcjami ciągłymi w przedziale $[c, d]$ i $\varphi(y) < \psi(y)$ dla $y \in (c, d)$, nazywamy *obszarem normalnym względem osi y* (Rysunek 65).



RYSUNEK 64. Obszar D normalny względem osi x.



RYSUNEK 65. Obszar D normalny względem osi y.



RYSUNEK 66. Trójkąt T.

Uwaga 7.2.9. Zauważmy, że obszar normalny względem osi x nie musi być obszarem normalnym względem osi y (np. obszar D na Rysunku 64) i, odwrotnie, obszar normalny względem osi y nie musi być obszarem normalnym względem osi x (np. obszar D na Rysunku 65).

Twierdzenie 7.2.10. *Całkę (7.4) funkcji f ograniczonej i ciągłej w obszarze normalnym (7.10) można zamienić na całkę iterowaną*

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy, \tag{7.12}$$

a w obszarze normalnym (7.11) można zamienić na całkę iterowaną

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx. \tag{7.13}$$

Przykład 7.2.11. Obliczmy całkę

$$I = \int_T (5x^2 - 2xy)\,dx\,dy$$

w trójkącie T ograniczonym prostą $x + 2y = 2$ i osiami współrzędnych (Rysunek 66).

Zauważmy, że obszar T można opisać nierównościami

$$T = \left\{0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1 - \frac{x}{2}\right\},$$

zatem T jest obszarem normalnym względem osi x, więc w myśl wzoru (7.12) mamy

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^2 dx \int_0^{1-\frac{x}{2}} (5x^2 - 2xy)\, dy = \int_0^2 (5x^2y - xy^2)\Big|_{y=0}^{1-\frac{x}{2}} dx \\
&= \int_0^2 \left(5x^2 - \frac{5}{2}x^3 - x + x^2 - \frac{1}{4}x^3\right) dx \\
&= \int_0^2 \left(6x^2 - x - \frac{11}{4}x^3\right) dx = \left(2x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{11}{16}x^4\right)\Big|_{x=0}^{2} = 16 - 2 - 11 = 3.
\end{aligned}$$

Równocześnie $T = \{0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le 2 - 2y\}$, czyli T jest obszarem normalnym względem osi y, więc w myśl wzoru (7.13) mamy

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 dy \int_0^{2-2y} (5x^2 - 2xy)\, dx = \int_0^1 \left(\frac{5}{3}x^3 - x^2y\right)\Big|_{x=0}^{2(1-y)} dy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{40}{3}(1 - 3y + 3y^2 - y^3) - 4y(1 - 2y + y^2)\right) dy \\
&= \int_0^1 \frac{4}{3}(10 - 33y + 36y^2 - 13y^3)\, dy = \frac{4}{3}\left(10y - \frac{33}{2}y^2 + 12y^3 - \frac{13}{4}y^4\right)\Big|_{y=0}^{1} \\
&= \frac{4}{3}\left(10 - \frac{33}{2} + 12 - \frac{13}{4}\right) = \frac{4}{3}\left(22 - \frac{79}{4}\right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{4} = 3.
\end{aligned}$$

Zadanie 7.2.12. Obliczyć całki

(1) $\displaystyle\int_T (4 - x - y)\, dx\, dy$, gdzie T jest trójkątem o wierzchołkach $(0,0)$, $(2,2)$ i $(1,3)$,

(2) $\displaystyle\int_D xy\, dx\, dy$, gdzie D jest ćwiartką elipsy $\left\{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}$,

(3) $\displaystyle\int_D \frac{x}{y}\, dx\, dy$, gdzie D jest obszarem $\{2 \le x \le 4,\ 1 \le y \le x^2\}$.

Uwaga 7.2.13. Jeśli obszar regularny D daje się podzielić na skończoną ilość obszarów normalnych $D_1, D_2, \ldots, D_n$, to całka w obszarze D równa się sumie całek w poszczególnych obszarach D_j, na mocy wzoru (7.9).

7.3. **Zastosowanie całek Riemanna funkcji dwóch zmiennych.** Całkę podwójną można wykorzystać do obliczania pól powierzchni zbiorów płaskich i objętości zbiorów przestrzennych. Ilustrują to dwa poniższe twierdzenia, z których pierwsze jest wnioskiem z Twierdzenia 7.1.4, a drugie jest analogonem Twierdzenia 5.4.1.

Twierdzenie 7.3.1 (Obliczanie pola za pomocą całki podwójnej). *Jeśli $f = 1$, to całka (7.4) istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $E \subset \mathbb{R}^2$ jest mierzalny powierzchniowo w sensie Jordana. Jego pole wyraża się wzorem*

$$|E| = \int_E 1.$$

Twierdzenie 7.3.2 (Obliczanie objętości). *Niech $D \subset \mathbb{R}^2$ będzie obszarem regularnym i niech φ i ψ będą funkcjami ciągłymi w D, przy czym $\varphi \le \psi$. Wtedy zbiór*

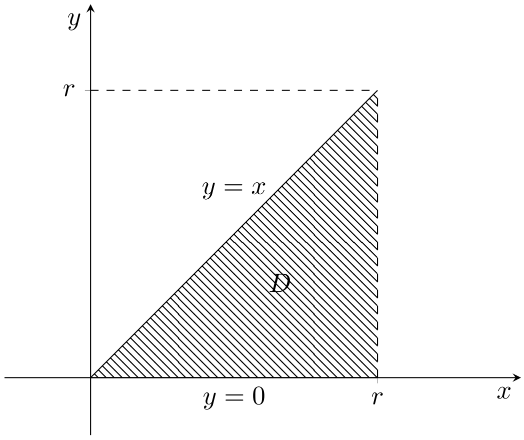
$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D,\ \varphi(x, y) \le z \le \psi(x, y)\}$$

jest mierzalny objętościowo w sensie Jordana i

$$|V| = \int_D (\psi(x, y) - \varphi(x, y))\, dxdy.$$

Przykład 7.3.3. (a) Obliczyć objętość kuli o promieniu r. Możemy założyć, że kula K ma środek w punkcie $(0,0,0)$, czyli opisana jest nierównością $x^2 + y^2 + z^2 < r^2$. Zauważmy, że

$$K = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D,\ -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} < z < \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\right\},$$



RYSUNEK 67. $D = \{0 \le x \le r,\ 0 \le y \le x\}$.

gdzie $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < r^2\}$ jest kołem. W konsekwencji,

$$|K| = \int_D 2\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\,dxdy = \int_{-r}^{r} \left(\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} 2\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\,dy \right) dx$$
$$= \int_{-r}^{r} \left((r^2 - x^2) \arcsin \frac{y}{\sqrt{r^2 - x^2}} + y\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \Big|_{y=-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \right) dx$$
$$= \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)\,dx = \pi \left(r^2 x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_{x=-r}^{r} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

(b) Dany jest walec obrotowy o promieniu $r > 0$ i osi obrotu y. Obliczyć objętość części walca V wznoszącej się nad trójkątem leżącym w płaszczyźnie $z = 0$ o wierzchołkach $(0,0,0)$, $(r,0,0)$ i $(r,r,0)$.

Ograniczeniem górnym bryły V jest funkcja $z = \sqrt{r^2 - x^2}$, ograniczeniem dolnym jest funkcja $z = 0$, przy czym obszarem całkowania jest trójkąt

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le r,\ 0 \le y \le x\}$$

(Rysunek 67), skąd

$$|V| = \int_D \sqrt{r^2 - x^2}\,dx\,dy = \int_0^r dx \int_0^x \sqrt{r^2 - x^2}\,dy$$
$$= \int_0^r x\sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \left(-\frac{1}{3} \left(\sqrt{r^2 - x^2} \right)^3 \right) \Big|_{x=0}^{r} = \frac{1}{3} r^3.$$

Zadanie 7.3.4. Obliczyć objętości brył ograniczonych powierzchniami

(1) $x = 1$, $x = -1$, $y = 2$, $y = -2$, $z = 0$, $z = 6 - x^2 - y^2$,
(2) $x = y$, $x = 2y - 1$, $x = 5$, $z = 0$, $z = 2x + y - 1$,
(3) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 1$, $z = 1 + x + y$,
(4) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 3$, $z = 4x^2 + 2y^2$,
(5) $z = 4 - x^2$, $y = 2x$, $x + y = 2$, $z = 0$, $y = 0$.