Egzamin z Analizy Matematycznej II MS

18 czerwca 2019
termin I
czas trwania: 120 minut

Zadanie 1 (12 punktów)**.** Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji

$$f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}, \quad x > 0,\ y > 0,\ z > 0.$$

Zadanie 2 (13 punktów)**.** Wyznaczyć ekstrema warunkowe funkcji

$$f(x,y,z) = \ln(xy^2z^3), \quad x > 0,\ y > 0,\ z > 0,$$

przy warunku $x + 2y + 3z = 12$.

Zadanie 3 (12 punktów)**.** Obliczyć całkę

$$\int_D \left| \frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 \right| dxdy,$$

gdzie $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$.

Zadanie 4 (13 punktów)**.** Obliczyć pole powierzchni części sfery

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\right\}$$

zawartej wewnątrz walca eliptycznego

$$W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ z \in \mathbb{R}\right\}, \quad a \ge b > 0.$$

Zachodzą następujące równości

$$(x^a)' = ax^{a-1} \quad \text{dla } a \in \mathbb{R}, \qquad \int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad \text{dla } a \neq -1,$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C,$$

$$(e^x)' = e^x, \quad (e \approx 2,718), \qquad \int e^x\,dx = e^x + C,$$

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C,$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + C,$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$(\arcsin x)' = (-\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$$

$$(\operatorname{arc\,tg} x)' = (-\operatorname{arc\,ctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C.$$

Egzamin z Analizy Matematycznej II MS

3 września 2019
termin II
czas trwania: 120 minut

Zadanie 1. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji

$$f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z.$$

Zadanie 2. Wyznaczyć ekstrema warunkowe funkcji

$$f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$$

przy warunku $x + y + z = 3$.

Zadanie 3. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami o równaniach

$$z = x^2 + y^2, \quad y = x^2, \quad y = 1, \quad z = 0.$$

Zadanie 4. Obliczyć całkę krzywoliniową niezorientowaną

$$\int_\gamma \left(x^{4/3} + y^{4/3}\right) dl,$$

gdzie γ jest krzywą opisaną równaniami $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \le t \le 2\pi$ ($a > 0$ jest ustalone).

Zachodzą następujące równości

$$(x^a)' = ax^{a-1} \quad \text{dla } a \in \mathbb{R}, \qquad \int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad \text{dla } a \neq -1,$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C,$$

$$(e^x)' = e^x, \quad (e \approx 2,718), \qquad \int e^x\,dx = e^x + C,$$

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C,$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + C,$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$(\arcsin x)' = (-\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$$

$$(\operatorname{arc\,tg} x)' = (-\operatorname{arc\,ctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C.$$

Egzamin z Analizy Matematycznej II MS

23 czerwca 2021
termin I
czas trwania: 120 minut

Zadanie 1 (12 punktów)**.** Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji
$$f(x,y,z)=x^3+xy+y^2-2zx+2z^2+3y-1.$$

Zadanie 2 (13 punktów)**.** Wyznaczyć ekstrema warunkowe funkcji
$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$
przy warunku $x+y+z=1$.

Zadanie 3 (12 punktów)**.** Obliczyć objętość bryły V ograniczonej przez powierzchnię stożka
$$z=\sqrt{x^2+y^2},$$
przez powierzchnię walca
$$(x-1)^2+y^2=1$$
oraz przez płaszczyznę Oxy.

Zadanie 4 (13 punktów)**.** Obliczyć pole płata powierzchniowego wyciętego sferą
$$x^2+y^2+z^2=a^2$$
$(a>0)$ z powierzchni bocznej walca
$$x^2+y^2=ax$$
(powierzchnia boczna bryły Vivianiego).

Zachodzą następujące równości

$$(x^a)'=ax^{a-1} \quad \text{dla } a\in\mathbb{R},$$
$$(\ln x)'=\frac{1}{x},$$
$$(e^x)'=e^x, \quad (e\approx 2{,}718),$$
$$(\sin x)'=\cos x,$$
$$(\cos x)'=-\sin x,$$
$$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x},$$
$$(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x},$$
$$(\arcsin x)'=(-\arccos x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$(\operatorname{arc\,tg} x)'=(-\operatorname{arc\,ctg} x)'=\frac{1}{1+x^2},$$

$$\int x^a\,dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}+C \quad \text{dla } a\neq -1,$$
$$\int \frac{1}{x}\,dx=\ln|x|+C,$$
$$\int e^x\,dx=e^x+C,$$
$$\int \cos x\,dx=\sin x+C,$$
$$\int \sin x\,dx=-\cos x+C,$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx=\operatorname{tg} x+C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx=-\operatorname{ctg} x+C,$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C,$$
$$\int \frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg} x+C.$$

Egzamin z Analizy Matematycznej II MS

20 czerwca 2022
termin I
czas trwania: 120 minut

Zadanie 1 (10 punktów). Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji

$$f(x,y) = 3x^3 + 3x^2y - y^3 - 15x.$$

Zadanie 2 (10 punktów). Wyznaczyć ekstrema warunkowe funkcji

$$f(x,y,z) = x + y + z$$

przy warunku

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0.$$

Zadanie 3 (10 punktów). Obliczyć całkę

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy,$$

gdzie D jest obszarem ograniczonym prostymi $x = 2$, $y = x$ i hiperbolą $xy = 1$.

Zadanie 4 (10 punktów). Obliczyć całkę krzywoliniową

$$I = \int_\gamma e^x(1-\cos y)\,dx - e^x(y - \sin y)\,dy,$$

gdzie γ jest zorientowanym dodatnio brzegiem obszaru

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \pi,\ 0 < y < \sin x\}.$$

Wskazówka: zastosować twierdzenie Greena i wykorzystać wzór

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}\left(a\cos bx + b\sin bx\right), \quad a \neq 0,\ b \neq 0.$$

Zadanie 5 (10 punktów). Rozwiązać równanie różniczkowe

$$x\frac{dy}{dx} + y = x\sin x.$$

Zachodzą następujące równości

$$(x^a)' = ax^{a-1} \quad \text{dla } a \in \mathbb{R},$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x},$$

$$(e^x)' = e^x, \quad (e \approx 2,718),$$

$$(\sin x)' = \cos x,$$

$$(\cos x)' = -\sin x,$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$(\arcsin x)' = (-\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\operatorname{arc\,tg} x)' = (-\operatorname{arc\,ctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad \text{dla } a \neq -1,$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C,$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C,$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C,$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C,$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C.$$

Egzamin z Analizy Matematycznej II MS

5 września 2022
termin II
czas trwania: 120 minut

Zadanie 1 (10 punktów). Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{27}y^3 - 16x + \frac{1}{2}y^2.$$

Zadanie 2 (10 punktów). Wyznaczyć ekstrema warunkowe funkcji

$$f(x,y,z) = x - 2y + 2z$$

przy warunku $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Zadanie 3 (10 punktów). Obliczyć całkę

$$\iint_D (x^2 + y)\,dx\,dy,$$

gdzie D jest obszarem ograniczonym parabolami $y = x^2$ i $y^2 = x$.

Zadanie 4 (10 punktów). Obliczyć całkę krzywoliniową

$$I = \int_{AmO} (e^x \sin y - by)\,dx + (e^x \cos y - b)\,dy,$$

gdzie $b \in \mathbb{R}$ jest stałą, zaś AmO jest górnym półokręgiem zadanym równaniem $x^2 + y^2 = ax$, $a > 0$, przebieganym od punktu $A = (a, 0)$ do punktu $O = (0, 0)$. *Wskazówka: wykorzystać fakt, że na odcinku $[O, A]$ wyrażenie pod całką równe jest zero i zastosować twierdzenie Greena.*

Zadanie 5 (10 punktów). Rozwiązać równanie różniczkowe

$$(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + y = \operatorname{arc\,tg} x.$$

Zachodzą następujące równości

$$(x^a)' = ax^{a-1} \quad \text{dla } a \in \mathbb{R}, \qquad \int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad \text{dla } a \neq -1,$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C,$$

$$(e^x)' = e^x, \quad (e \approx 2{,}718), \qquad \int e^x\,dx = e^x + C,$$

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C,$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + C,$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$(\arcsin x)' = (-\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$$

$$(\operatorname{arc\,tg} x)' = (-\operatorname{arc\,ctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C.$$

Egzamin z Analizy Matematycznej II MS

19 czerwca 2023
termin I
czas trwania: 120 minut

Zadanie 1 (12 punktów). Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji

$$f(x,y) = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2).$$

Zadanie 2 (5+5+4=14 punktów). (a) Wyznaczyć punkty krytyczne funkcji $z = z(x,y)$ zadanej równaniem ($a > 0$)

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2),$$

tj. punkty (x_0, y_0) takie, że $z'(x_0, y_0) = 0$.

(b) Obliczyć hesjan funkcji z w tych punktach, tj.

$$w(x_0, y_0) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{bmatrix}.$$

(c) Przechodząc do współrzędnych sferycznych wykazać, że funkcja $z = z(x,y)$ osiąga w punktach krytycznych ekstrema lokalne (słabe).

Zadanie 3 (12 punktów). Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami ($0 < a < b$)

$$|z| = xy, \quad x + y = a, \quad x + y = b.$$

Zadanie 4 (12 punktów). Rozwiązać równanie różniczkowe

$$\frac{dy}{dx} + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}.$$

Zachodzą następujące równości

$$(x^a)' = ax^{a-1} \quad \text{dla } a \in \mathbb{R}, \qquad \int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad \text{dla } a \neq -1,$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \qquad \int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + C,$$

$$(e^x)' = e^x, \quad (e \approx 2,718), \qquad \int e^x \, dx = e^x + C,$$

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad \int \cos x \, dx = \sin x + C,$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \qquad \int \sin x \, dx = -\cos x + C,$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$(\arcsin x)' = (-\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$$

$$(\operatorname{arc\,tg} x)' = (-\operatorname{arc\,ctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C.$$

Egzamin z Analizy Matematycznej II MS

4 września 2023
termin II
czas trwania: 120 minut

Zadanie 1 (12 punktów)**.** Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - (x+y)^2, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Zadanie 2 (13 punktów)**.** Wyznaczyć największą z objętości prostopadłościanów, których wszystkie boki sa równoległe do osi układu współrzędnych, wpisanych w elipsoidę o równaniu

$$4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36.$$

Zadanie 3 (13 punktów)**.** Obliczyć objętość bryły opisanej nierównościami

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0, \quad y^2 + z^2 \leq 1, \quad 2x + y + z \leq 2.$$

Zadanie 4 (12 punktów)**.** Rozwiązać równanie różniczkowe

$$(2x+1)\frac{dy}{dx} = 4x + 2y.$$

Zachodzą następujące równości

$$(x^a)' = ax^{a-1} \quad \text{dla } a \in \mathbb{R}, \qquad \int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad \text{dla } a \neq -1,$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C,$$

$$(e^x)' = e^x, \quad (e \approx 2,718), \qquad \int e^x\,dx = e^x + C,$$

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C,$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + C,$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$(\arcsin x)' = (-\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$$

$$(\operatorname{arc\,tg} x)' = (-\operatorname{arc\,ctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C.$$

Egzamin z Analizy Matematycznej II MS

18 czerwca 2024
termin I
czas trwania: 120 minut

Zadanie 1 (12 punktów)**.** Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji

$$f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{1}{x} + y, \quad x \neq 0, y \neq 0.$$

Zadanie 2 (14 punktów)**.** Wyznaczyć prostopadłościan o największej objętości, jeśli jego pole powierzchni jest równe $6a^2$.

Zadanie 3 (12 punktów)**.** Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami

$$z = x^2 + y^2, \quad y = x^2, \quad y = 1, \quad z = 0.$$

Zadanie 4 (12 punktów)**.** Rozwiązać równanie różniczkowe

$$x\frac{dy}{dx} - xy - e^x = 0.$$

Zachodzą następujące równości

$$(x^a)' = ax^{a-1} \quad \text{dla } a \in \mathbb{R}, \qquad \int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad \text{dla } a \neq -1,$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C,$$

$$(e^x)' = e^x, \quad (e \approx 2,718), \qquad \int e^x\,dx = e^x + C,$$

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C,$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + C,$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$(\arcsin x)' = (-\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$$

$$(\operatorname{arc\,tg} x)' = (-\operatorname{arc\,ctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C.$$

Egzamin z Analizy Matematycznej II MS

3 września 2024
termin II
czas trwania: 120 minut

Zadanie 1 (12 punktów). Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji

$$f(x, y) = y^3 - 4y^2 + xy - x^2 - 6.$$

Zadanie 2 (13 punktów). Wyznaczyć ekstrema warunkowe funkcji f przy warunku $g = 0$, jeśli

$$f(x, y) = x + y, \quad g(x, y) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - 1.$$

Zadanie 3 (13 punktów). Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami

$$z = x^2 + y^2, \quad z = 1 - 2|xy|.$$

Zadanie 4 (12 punktów). Rozwiązać równanie różniczkowe

$$\frac{dy}{dx} + 2y \operatorname{tg} x = 2 \operatorname{tg} x.$$

Zachodzą następujące równości

$$(x^a)' = ax^{a-1} \quad \text{dla } a \in \mathbb{R}, \qquad \int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad \text{dla } a \neq -1,$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \qquad \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C,$$

$$(e^x)' = e^x, \quad (e \approx 2,718), \qquad \int e^x \, dx = e^x + C,$$

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad \int \cos x \, dx = \sin x + C,$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \qquad \int \sin x \, dx = -\cos x + C,$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$(\arcsin x)' = (-\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$$

$$(\operatorname{arc\,tg} x)' = (-\operatorname{arc\,ctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C.$$