

ANALIZA MATEMATYCZNA II MS

PAWEŁ ZAPAŁOWSKI

SPIS TREŚCI

Literatura	2
1. Pochodna funkcji wielu zmiennych	3
1.1. Pochodna kierunkowa	3
1.2. Pochodna zupełna i gradient funkcji	4
1.3. Wielomiany jednorodne	5
1.4. Pochodne wyższych rzędów	7
1.5. Ekstrema lokalne	9
1.6. Funkcje uwikłane	11
1.7. Podrozmaitości	14
1.8. Ekstrema warunkowe	15
2. Całka Riemanna	17
2.1. Całka Riemanna na kostce	17
2.2. Całka Riemanna na zbiorze mierzalnym w sensie Jordana	18
2.3. Całki krzywoliniowe	22

LITERATURA

- [1] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. I–III, PWN, Warszawa.
- [2] W. Kryszicki, L. Włodarski, *Analiza Matematyczna w zadaniach*, t. I–II, PWN, Warszawa.
- [3] F. Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa.
- [4] W. Rudin, *Podstawy analizy matematycznej*, PWN, Warszawa.

Zaliczanie ćwiczeń

W semestrze jest 45 godzin ćwiczeń. Limit nieobecności to 18 godzin, w tym limit nieobecności nie-usprawiedliwionych to 9 godzin. W przypadku przekroczenia któregoś z tych limitów student otrzymuje ocenę NZAL i nie jest dopuszczony do egzaminów w żadnym z dwóch terminów.

Pozostałe kryteria zaliczenia ćwiczeń ustala prowadzący ćwiczenia.

Egzamin

Warunkiem dopuszczenia do egzaminu jest zaliczenie ćwiczeń na ocenę 3,0 lub wyższą.

Terminy egzaminów

I termin 2023-06-19 (poniedziałek), godz. 9.00–11.30, s. A-1-03,

II termin 2023-09-04 (poniedziałek), godz. 9.00–11.30, s. A-1-03.

Egzamin będzie składał się z czterech lub pięciu zadań i będzie oceniany w skali 0–50 punktów. Student otrzymuje ocenę końcową wg następującej tabeli

Punkty	Ocena
0–25	2,0
26–30	3,0
31–35	3,5
36–40	4,0
41–45	4,5
46–50	5,0

II termin egzaminu przeznaczony jest dla studentów dopuszczonych do egzaminu, którzy nie zdali egzaminu w I terminie lub z jakiegoś powodu do niego nie przystąpili w I terminie.

Wykład

Plik pdf z materiałem wyłożonym na wykładzie, aktualizowany po każdym wykładzie, będzie dostępny (w dniu wykładu lub na następny dzień) na stronie

<http://www2.im.uj.edu.pl/PawelZapalowski/>

1. POCHODNA FUNKCJI WIELU ZMIENNYCH

1.1. Pochodna kierunkowa.

Definicja 1.1.1. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \Omega$, $h \in \mathbb{R}^n$. Granicę

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = \lim_{\mathbb{R} \ni t \rightarrow 0} \frac{f(a + ht) - f(a)}{t}$$

(jeśli istnieje) nazywamy *pochodną kierunkową funkcji f w punkcie a w kierunku wektora h* . W szczególności, jeśli e_1, \dots, e_n jest bazą kanoniczną w \mathbb{R}^n , to

$$f'_{x_j}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) := \frac{\partial f}{\partial e_j}(a)$$

nazywamy *pochodną cząstkową funkcji f względem zmiennej x_j w punkcie a albo j -tą pochodną cząstkową*. Obliczanie pochodnej f'_{x_j} nazywamy *różniczkowaniem funkcji f względem x_j* .

Obserwacja 1.1.2. (a) Pochodna kierunkowa jest pochodną pewnej funkcji pomocniczej jednej zmiennej rzeczywistej. Istotnie,

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = g'(0), \quad \text{gdzie } g(t) := f(a + th), \quad |t| < \delta,$$

dla pewnego $\delta < 0$. Stąd wiele reguł różniczkowania kierunkowego wynika natychmiast z odpowiednich własności różniczkowania funkcji jednej zmiennej rzeczywistej

(b) Podobnie, j -ta pochodna cząstkowa jest pochodną funkcji jednej zmiennej rzeczywistej. Istotnie, jeśli $a = (a_1, \dots, a_n)$, to

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = g'(a_j), \quad \text{gdzie } g(x) := f(a_1, \dots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \dots, a_n), \quad |x| < \delta,$$

dla pewnego $\delta > 0$. Dlatego różniczkując funkcję f względem x_j , obliczamy pochodną funkcji f jednej zmiennej x_j traktując pozostałe zmienne $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$ jako stałe, np. jeśli $f(x, y) = \arctg \frac{y}{x}$, to

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(-\frac{y}{x^2} \right) = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$f'_y(x, y) = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Przykład 1.1.3. (a) Istnienie pochodnych kierunkowych w każdym kierunku w danym punkcie nie gwarantuje ciągłości w tym punkcie. Istotnie, niech

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, & \text{gd } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{gd } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Wtedy dla $h = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial h}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\alpha t, \beta t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha \beta^2}{\alpha^2 + \beta^4 t^2} = \begin{cases} 0, & \text{gd } \alpha = 0 \\ \frac{\beta^2}{\alpha}, & \text{gd } \alpha \neq 0 \end{cases}.$$

Z drugiej strony, $f(t^2, t) = \frac{1}{2}$, $t \neq 0$, więc funkcja f nie jest ciągła w punkcie $(0, 0)$.

(b) Istnienie pochodnych cząstkowych nie gwarantuje istnienia pochodnej w innych kierunkach. Istotnie, niech

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{gd } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{gd } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Wtedy $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$, ale

$$\frac{\partial f}{\partial (1, 1)}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2t}$$

nie istnieje.

Twierdzenie 1.1.4 (Pochodne cząstkowe funkcji złożonej). Niech $U \subset \mathbb{R}^k$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będą zbiorami otwartymi, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $b \in U$, $a \in \Omega$, $\varphi(b) = a$, $\varphi(U) \subset \Omega$. Jeśli istnieją pochodne cząstkowe $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}(b)$ dla $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, k$, oraz $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{C}(V; a)$, $i = 1, \dots, n$, gdzie $V \subset \Omega$ jest pewnym otoczeniem punktu a , to

$$\frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial t_j}(b) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_j}(b) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_j}(b) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_j}(b), \quad j = 1, \dots, k.$$

Dowód. Ustalmy $j \in \{1, \dots, k\}$ i oznaczmy

$$\Delta \varphi_i = \varphi_i(b_1, \dots, b_{j-1}, b_j + s, b_{j+1}, \dots, b_k) - \varphi_i(b), \quad i = 1, \dots, n,$$

oraz

$$\Delta(f \circ \varphi) = (f \circ \varphi)(b_1, \dots, b_{j-1}, b_j + s, b_{j+1}, \dots, b_k) - (f \circ \varphi)(b)$$

dla dostatecznie małych s . Ponadto,

$$\begin{aligned} \Delta(f \circ \varphi) &= f(a_1 + \Delta \varphi_1, \dots, a_n + \Delta \varphi_n) - f(a) \\ &= f(a_1 + \Delta \varphi_1, \dots, a_n + \Delta \varphi_n) - f(a_1, a_2 + \Delta \varphi_2, \dots, a_n + \Delta \varphi_n) \\ &\quad + f(a_1, a_2 + \Delta \varphi_2, \dots, a_n + \Delta \varphi_n) - f(a_1, a_2, a_3 + \Delta \varphi_3, \dots, a_n + \Delta \varphi_n) + \dots \\ &\quad + f(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + \Delta \varphi_n) - f(a_1, \dots, a_n). \end{aligned}$$

Stosując do n powyższych różnic twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej otrzymujemy

$$\begin{aligned} \Delta(f \circ \varphi) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + \theta_1 \Delta \varphi_1, a_2 + \Delta \varphi_2, \dots, a_n + \Delta \varphi_n) \Delta \varphi_1 \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2 + \theta_2 \Delta \varphi_2, a_3 + \Delta \varphi_3, \dots, a_n + \Delta \varphi_n) \Delta \varphi_2 + \dots \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + \theta_n \Delta \varphi_n) \Delta \varphi_n, \end{aligned}$$

gdzie $0 < \theta_i < 1$ dla $i = 1, \dots, n$, skąd

$$\frac{\Delta(f \circ \varphi)}{s} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + \theta_1 \Delta \varphi_1, \dots, a_n + \Delta \varphi_n) \frac{\Delta \varphi_1}{s} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + \theta_n \Delta \varphi_n) \frac{\Delta \varphi_n}{s}.$$

Przechodząc do granicy $s \rightarrow 0$ otrzymujemy wzór z tezy (wykorzystujemy tu fakt, że $\Delta \varphi_i \rightarrow 0$ gdy $s \rightarrow 0$, oraz ciągłość pochodnej $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ w punkcie a , $i = 1, \dots, n$). \square

1.2. Pochodna zupełna i gradient funkcji.

Twierdzenie 1.2.1. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \Omega$. Jeśli $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathcal{C}(V; a)$, $j = 1, \dots, n$, gdzie $V \subset \Omega$ jest pewnym otoczeniem punktu a , to

$$(1.1) \quad \lim_{\mathbb{R}^n \ni h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0, \quad \text{gdzie } L(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n,$$

lub, równoważnie

$$f(a+h) - f(a) = L(h) + o(\|h\|).$$

Dowód. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= f(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n) - f(a_1, a_2 + h_2, \dots, a_n + h_n) \\ &\quad + f(a_1, a_2 + h_2, \dots, a_n + h_n) - f(a_1, a_2, a_3 + h_3, \dots, a_n + h_n) + \dots \\ &\quad + f(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + h_n) - f(a_1, \dots, a_n). \end{aligned}$$

Stosując do każdej z n różnic twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej otrzymujemy

$$f(a+h) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + \theta_1 h_1, \dots, a_n + h_n)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + \theta_n h_n)h_n,$$

gdzie $0 < \theta_i < 1$, dla $i = 1, \dots, n$, więc

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) - L(h) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + \theta_1 h_1, \dots, a_n + h_n) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \dots, a_n) \right) h_1 + \dots \\ &\quad + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + \theta_n h_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \dots, a_n) \right) h_n. \end{aligned}$$

Wobec ciągłości pochodnych $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ w punkcie a różnice w nawiasach dążą do zera, gdy $h \rightarrow 0$, więc wzór (1.1) jest wykazany, ponieważ

$$\left| \frac{h_j}{\|h\|} \right| \leq 1, \quad j = 1, \dots, n.$$

□

Definicja 1.2.2. Jeśli funkcja f ma pochodne cząstkowe w punkcie a , to wektor

$$\text{grad } f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

nazywamy *gradientem* funkcji f w punkcie a .

Jeśli pochodne cząstkowe spełniają dodatkowo warunek (1.1), to mówimy, że funkcja f ma w punkcie a *pochodną zupełną* albo krócej *pochodną*, którą oznaczamy $f'(a)$, przy czym

$$f'(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right),$$

zatem $f'(a) = \text{grad } f(a)$ (o ile $f'(a)$ istnieje). Funkcję f mającą pochodną w pewnym punkcie (zbiorsze) nazywamy *różniczkowalną* w tym punkcie (zbiorsze).

Wyrażenie $L(h)$ oznaczamy

$$f'(a)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n, \quad h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n,$$

i nazywamy *różniczką funkcji* f w punkcie a .

Twierdzenie 1.2.3. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \Omega$. Jeśli $f'(a)$ istnieje, to $\frac{\partial f}{\partial h}(a)$ istnieje i $\frac{\partial f}{\partial h}(a) = f'(a)(h)$, $h \in \mathbb{R}^n$, oraz $f \in \mathcal{C}(\Omega; a)$.

Dowód. Na mocy Twierdzenia 1.2.1

$$f(a + th) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)th_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)th_n + o(|t|\|h\|),$$

skąd, przy $t \rightarrow 0$, wnioskujemy, że $f \in \mathcal{C}(\Omega; a)$. Dalej,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial h}(a) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n + \lim_{t \rightarrow 0} \alpha(|t|\|h\|) \frac{|t|}{t} \|h\| \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n = f'(a)(h). \end{aligned}$$

□

1.3. Wielomiany jednorodne.

Definicja 1.3.1. Niech $k \in \mathbb{N}_0$. Funkcję

$$Q_k(x) = \sum_{\substack{(k_1, \dots, k_n) \in \{0, 1, \dots, k\}^n \\ k_1 + \dots + k_n = k}} a_{k_1 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

gdzie $a_{k_1 \dots k_n} \in \mathbb{R}$, $k_j \in \{0, 1, \dots, k\}$ dla $j = 1, 2, \dots, n$, nazywamy *wielomianem jednorodnym stopnia k zmiennych x_1, \dots, x_n* o współczynnikach $a_{k_1 \dots k_n}$. Piszemy wówczas $Q_k \in \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^n)$. Wielomian $Q_2 \in \mathcal{H}^2(\mathbb{R}^n)$ nazywamy *formą kwadratową*.

Obserwacja 1.3.2. (a) Jeśli $Q_0 \in \mathcal{H}^0(\mathbb{R}^n)$, to $Q_0(x) = a$, $x \in \mathbb{R}^n$, gdzie $a \in \mathbb{R}$. W tym przypadku wielomian Q_0 możemy utożsamić z liczbą a .

(b) Jeśli $Q_1 \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$, to $Q_1(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$, $x \in \mathbb{R}^n$, gdzie $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. W tym przypadku wielomian Q_1 możemy utożsamić z wektorem (a_1, \dots, a_n) . W szczególności, jeśli $\Omega \in \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym, $a \in \Omega$ oraz $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w a , to $f'(a) \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$.

(c) Dowolną formę kwadratową $Q_2 \in \mathcal{H}^2(\mathbb{R}^n)$ można zapisać w postaci

$$Q_2(x) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} x_j x_k, \quad \text{gdzie } a_{jk} = a_{kj}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

W tym przypadku formę kwadratową Q_2 możemy utożsamić z macierzą symetryczną stopnia n

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie } a_{jk} = a_{kj}.$$

Przykład 1.3.3. Formę kwadratową $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ utożsamiamy z macierzą

$$\begin{bmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{bmatrix}.$$

Definicja 1.3.4. Forma kwadratowa $Q \in \mathcal{H}^2(\mathbb{R}^n)$ jest

- (a) *oznaczona dodatnio (ujemnie)*, jeśli $Q(x) > 0$ ($Q(x) < 0$) dla $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,
- (b) *nieoznaczona*, jeśli istnieją $x, y \in \mathbb{R}^n$ takie, że $Q(x) < 0 < Q(y)$,
- (c) *półoznaczona dodatnio (ujemnie)*, jeśli $Q \geq 0$ w \mathbb{R}^n ($Q \leq 0$ w \mathbb{R}^n) i nie jest oznaczona dodatnio (ujemnie).

Przykład 1.3.5. (a) Z form kwadratowych

$$Q(x, y) = x^2 + (x - y)^2, \quad R(x, y) = -x^2 - 2y^2, \quad S(x, y) = x^2 - 3xy, \quad T(x, y) = (2x - y)^2$$

Q jest oznaczona dodatnio, R — ujemnie, S jest nieoznaczona, a T — półoznaczona dodatnio.

- (b) Forma kwadratowa $Q(x, y, z) = 2x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 2xy - 4xz - 6yz$ jest oznaczona dodatnio, bo można jej nadać postać

$$Q(x, y, z) = (x - 2y)^2 + (x + y - 2z)^2 + (y - z)^2,$$

przy czym suma kwadratów równa się zero tylko dla $x = y = z = 0$.

Twierdzenie 1.3.6. Forma kwadratowa $Q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, gdzie $a \neq 0$ jest

- (a) *oznaczona*, gdy $w := ac - b^2 > 0$ i to dodatnio, gdy $a > 0$, ujemnie, gdy $a < 0$,
- (b) *nieoznaczona*, gdy $w < 0$,
- (c) *półoznaczona*, gdy $w = 0$ i to dodatnio, gdy $a > 0$, ujemnie, gdy $a < 0$.

Dowód. Istotnie, formie Q można nadać postać

$$Q(x, y) = \frac{1}{a} ((ax + by)^2 + wy^2),$$

gdzie $w = ac - b^2$. □

Twierdzenie 1.3.7 (Twierdzenie Sylwestra¹). Forma kwadratowa

$$Q(x) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} x_j x_k, \quad \text{gdzie } a_{jk} = a_{kj}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

jest oznaczona

- (a) *dodatnio wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$(1.2) \quad w_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

- (b) *ujemnie wtedy i tylko wtedy, gdy $(-1)^k w_k > 0$ dla $k = 1, 2, \dots, n$.*

Dowód. (a) Dowód, wykraczający poza materiał wykładu, pomijamy. Można go znaleźć w monografii A. Mostowski, M. Stark *Elementy algebry wyższej*, PWN, 1975.

- (b) wynika z (a), bo gdy w formie oznaczonej dodatnio znaki wszystkich współczynników a_{jk} zmienimy na przeciwne, forma stanie się oznaczona ujemnie, a wyznaczniki w_k o wskaźnikach nieparzystych zmienią znak na przeciwny. □

¹James Joseph Sylvester (1814–1897).

1.4. Pochodne wyższych rzędów.

Definicja 1.4.1. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \Omega$. Jeśli $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ istnieje dla x z pewnego otoczenia punktu a , to

$$f''_{x_k x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) =: \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) (a)$$

(o ile istnieje) nazywamy *pochodną cząstkową drugiego rzędu*. W ten sposób definiujemy n^2 pochodnych cząstkowych drugiego rzędu. Pochodne $f''_{x_j x_k}$ i $f''_{x_k x_j}$, gdzie $j \neq k$, nazywamy *pochodnymi mieszanymi*.

Przykład 1.4.2. (a) Niech $f(x, y) = x^2 y - 3xy^2 - 2x^2$, wówczas $f'_x(x, y) = 2xy - 3y^2 - 4x$, $f'_y(x, y) = x^2 - 6xy$, skąd

$$f''_{xx}(x, y) = 2y - 4, \quad f''_{xy}(x, y) = 2x - 6y, \quad f''_{yx}(x, y) = 2x - 6y, \quad f''_{yy}(x, y) = -6x.$$

(b) Niech $f(x, y) = (x^2 - y^2) \ln y$, wówczas $f'_x(x, y) = 2x \ln y$, $f'_y(x, y) = (x^2 - y^2)y^{-1} - 2y \ln y$, skąd

$$f''_{xx}(x, y) = 2 \ln y, \quad f''_{xy}(x, y) = \frac{2x}{y}, \quad f''_{yx}(x, y) = \frac{2x}{y}, \quad f''_{yy}(x, y) = -\frac{x^2}{y^2} - 3 - 2 \ln y.$$

Twierdzenie 1.4.3. Jeśli $f''_{x_j x_k}, f''_{x_k x_j} \in \mathcal{C}(\Omega; a)$, to $f''_{x_j x_k}(a) = f''_{x_k x_j}(a)$.

Dowód. Bez straty ogólności możemy założyć, że $j = 1, k = 2, n = 2$. Zauważmy, że istnieje $\delta > 0$ takie, że

$$\Phi(h_1, h_2) := f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2 + h_2) - f(a_1 + h_1, a_2) + f(a_1, a_2), \quad |h_j| < \delta, \quad j = 1, 2,$$

oraz

$$\varphi(x_1, x_2) := f(x_1 + h_1, x_2) - f(x_1, x_2), \quad \psi(x_1, x_2) := f(x_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2), \quad |x_j - a_j| < \delta, \quad j = 1, 2,$$

są dobrze określone. Wówczas na mocy twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej

$$\Phi(h_1, h_2) = \varphi(a_1, a_2 + h_2) - \varphi(a_1, a_2) = h_2 \varphi'_{x_2}(a_1, a_2 + \theta_2 h_2), \quad \text{gdzie } 0 < \theta_2 < 1.$$

Lecz $\varphi'_{x_2}(x_1, x_2) = f'_{x_2}(x_1 + h_1, x_2) - f'_{x_2}(x_1, x_2)$, więc

$$\Phi(h_1, h_2) = h_2 (f'_{x_2}(a_1 + h_1, a_2 + \theta_2 h_2) - f'_{x_2}(a_1, a_2 + \theta_2 h_2)).$$

Stosując znowu twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej otrzymujemy

$$\Phi(h_1, h_2) = h_1 h_2 f''_{x_2 x_1}(a_1 + \theta_1 h_1, a_2 + \theta_2 h_2), \quad \text{gdzie } 0 < \theta_1 < 1, \quad 0 < \theta_2 < 1.$$

Zauważmy teraz, że $\Phi(h_1, h_2) = \psi(a_1 + h_1, a_2) - \psi(a_1, a_2)$. Postępując z tą różnicą tak jak z poprzednią, otrzymujemy

$$\Phi(h_1, h_2) = h_2 h_1 f''_{x_1 x_2}(a_1 + \vartheta_1 h_1, a_2 + \vartheta_2 h_2), \quad \text{gdzie } 0 < \vartheta_1 < 1, \quad 0 < \vartheta_2 < 1,$$

skąd $f''_{x_2 x_1}(a_1 + \theta_1 h_1, a_2 + \theta_2 h_2) = f''_{x_1 x_2}(a_1 + \vartheta_1 h_1, a_2 + \vartheta_2 h_2)$. Jeśli $h_1 \rightarrow 0$ i $h_2 \rightarrow 0$, to z ciągłości pochodnych mieszanych w punkcie a otrzymujemy $f''_{x_1 x_2}(a) = f''_{x_2 x_1}(a)$. \square

Przykład 1.4.4. Pochodne mieszane nie muszą być równe w punkcie, w którym nie są ciągłe. Na przykład, funkcja

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{gdy } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{gdy } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

jest ciągła w punkcie $(0, 0)$, ponieważ

$$0 \leq \left| xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{1}{2} |x^2 - y^2| \rightarrow 0, \quad \text{gdy } (x, y) \rightarrow (0, 0),$$

oraz

$$f'_x(0, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(0, y)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = -y, \quad y \in \mathbb{R},$$

$$f'_y(x, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(x, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Wynika stąd, że

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f'_x(0,y) - f'_x(0,0)}{y-0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y}{y} = -1,$$

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'_y(x,0) - f'_y(0,0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1.$$

Można sprawdzić, że $f''_{xy} = f''_{yx}$ w $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Definicja 1.4.5. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \Omega$, $k \geq 2$. Jeśli pochodna $(k-1)$ -go rzędu $\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{j_{k-1}} \dots \partial x_{j_1}}(x)$ istnieje dla x z pewnego otoczenia punktu a , to

$$f^{(k)}_{x_{j_1} \dots x_{j_k}}(a) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \dots \partial x_{j_1}}(a) =: \frac{\partial}{\partial x_{j_k}} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{j_{k-1}} \dots \partial x_{j_1}} \right) (a)$$

(o ile istnieje) nazywamy *pochodną cząstkową rzędu k* . W ten sposób definiujemy n^k pochodnych cząstkowych rzędu k .

Obserwacja 1.4.6. Jeśli wszystkie pochodne rzędu k są ciągłe, wynik różniczkowania nie zależy, jak w przypadku $k=2$, od porządku różniczkowań względem x_j ; zależy tylko od ilości różniczkowań względem x_j . Np. ilość drugich pochodnych cząstkowych redukuje się do $\binom{n+1}{2}$. Pochodną cząstkową rzędu k otrzymaną przez k_j -krotne różniczkowanie względem x_j , $j=1,2,\dots,n$, gdzie $k_1+k_2+\dots+k_n=k$, oznaczamy

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}} \quad \text{lub} \quad f^{(k)}_{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}}.$$

Definicja 1.4.7. Funkcję $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mającą wszystkie pochodne cząstkowe rzędu k ciągłe nazywamy *funkcją klasy \mathcal{C}^k* i piszemy $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$.

Przykład 1.4.8. Niech $f(x,y) = x^4 - 3x^2y^2 + 2xy^2$. Obliczmy

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}.$$

Ponieważ (dla skrócenia zapisu pomijamy poniżej argumenty (x,y))

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 6xy^2 + 2y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -6x^2y + 4xy, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -12xy + 4y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 6y^2,$$

zatem

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = -12y.$$

Obserwacja 1.4.9. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym, $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$, $a \in \Omega$, $h \in \mathbb{R}^n$. Wtedy istnieje $\delta > 0$ takie, że

$$\Phi(t) = f(a+th), \quad |t| < \delta,$$

jest klasy \mathcal{C}^k . Stosując k -krotnie wzór na pochodną cząstkową funkcji złożonej otrzymamy

$$\Phi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a+th)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a+th)h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a+th)h_n,$$

ogólnie, dla $\ell = 2, \dots, k$,

$$\Phi^{(\ell)}(t) = \sum_{\substack{(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n) \in \mathbb{N}_0^n \\ \ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_n = \ell}} \frac{\ell!}{\ell_1! \dots \ell_n!} \cdot \frac{\partial^\ell f}{\partial x_1^{\ell_1} \dots \partial x_n^{\ell_n}}(a+th)h_1^{\ell_1} \dots h_n^{\ell_n},$$

Zauważmy, że $\Phi'(0) = f'(a)(h)$. Ogólnie, wzór

$$f^{(\ell)}(a)(h) := \Phi^{(\ell)}(0) = \sum_{\substack{(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n) \in \mathbb{N}_0^n \\ \ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_n = \ell}} \frac{\ell!}{\ell_1! \dots \ell_n!} \cdot \frac{\partial^\ell f}{\partial x_1^{\ell_1} \dots \partial x_n^{\ell_n}}(a)h_1^{\ell_1} \dots h_n^{\ell_n},$$

można traktować jako definicję *różniczki rzędu ℓ funkcji f w punkcie a* w przypadku, gdy funkcja f ma pochodne cząstkowe rzędu ℓ ciągłe, $\ell = 2, \dots, k$.

Zauważmy, że $f^{(\ell)}(a) \in \mathcal{H}^\ell(\mathbb{R}^n)$. W szczególności, $f''(a)$ jest formą kwadratową, którą możemy zapisać w postaci

$$f''(a)(h) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) h_j h_k, \quad \text{gdzie } \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a),$$

a przez to utożsamić z macierzą symetryczną

$$H(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(a) \end{bmatrix},$$

zwaną macierzą Hessego² lub hesjanem funkcji f w punkcie a .

Twierdzenie 1.4.10 (Wzór Taylora). Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym, $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$, $a \in \Omega$, $h \in \mathbb{R}^n$, przy czym $\{a + th : 0 \leq t \leq 1\} \subset \Omega$. Wówczas istnieje $0 < \theta < 1$ takie, że

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)(h) + \frac{1}{2!} f''(a)(h) + \cdots + \frac{1}{(k-1)!} f^{(k-1)}(a)(h) + \frac{1}{k!} f^{(k)}(a+\theta h)(h).$$

Dowód. Funkcja złożona $\Phi(t) = f(a+th)$, $0 \leq t \leq 1$, ma wszystkie pochodne aż do rzędu k . Stosując do niej znany wzór Taylora otrzymujemy rozwinięcie

$$\Phi(t) = \Phi(0) + \frac{\Phi'(0)}{1!} t + \frac{\Phi''(0)}{2!} t^2 + \cdots + \frac{\Phi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} t^{k-1} + \frac{\Phi^{(k)}(\theta t)}{k!} t^k \quad \text{dla pewnego } 0 < \theta < 1.$$

Podstawiając w tym rozwinięciu $t = 1$ otrzymamy tezę. □

1.5. Ekstrema lokalne.

Definicja 1.5.1. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym. Mówimy, że funkcja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ma w punkcie $a \in \Omega$ *minimum lokalne* (odp. *silne minimum lokalne*), jeśli istnieje otoczenie $U \subset \Omega$ punktu a takie, że $f(x) \geq f(a)$ dla $x \in U$ (odp. $f(x) > f(a)$ dla $x \in U \setminus \{a\}$).

Zmieniając kierunki nierówności definiujemy *maksimum lokalne* (odp. *silne maksimum lokalne*). Maksimum i minimum nazywamy krótko *ekstremum*. Zmieniając kierunki nierówności definiujemy maksimum lokalne i silne maksimum lokalne. Zamieniając f na $-f$ możemy zawsze ograniczyć nasze rozważania do minimów lokalnych.

Twierdzenie 1.5.2 (Warunek konieczny na ekstremum lokalne). Jeśli funkcja f ma w punkcie a ekstremum i $f'(a)$ istnieje, to $f'(a) = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, czyli a jest punktem krytycznym f .

Dowód. Dla dowolnego $j = 1, 2, \dots, n$ istnieje $\delta > 0$ takie, że funkcja

$$g(x) := f(a_1, \dots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \dots, a_n), \quad |x - a_j| < \delta,$$

ma w punkcie a_j ekstremum, więc $0 = g'(a_j) = f'_{x_j}(a)$. W szczególności, $f'(a) = \text{grad } f(a) = 0$. □

Obserwacja 1.5.3. Warunek konieczny nie jest wystarczający, bo dla funkcji $f(x, y) = xy$ mamy $f'(0, 0) = 0$, gdyż

$$f'_x(0, 0) = 0, \quad f'_y(0, 0) = 0,$$

ale f nie ma w $(0, 0)$ ekstremum, ponieważ $f > 0$ w ćwiartkach I i III płaszczyzny i $f < 0$ w ćwiartkach II i IV.

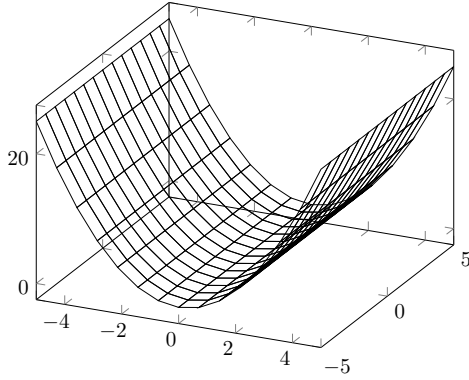
Twierdzenie 1.5.4 (Warunek dostateczny na ekstremum lokalne). Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Funkcja $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ ma w punkcie krytycznym $a \in \Omega$

(a) *silne minimum lokalne*, gdy

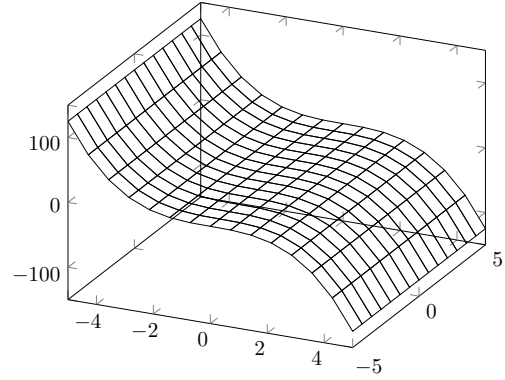
$$\det H_k(a) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_k}(a) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_k}(a) \end{vmatrix} > 0, \quad k = 1, \dots, n;$$

(b) *silne maksimum lokalne*, gdy $(-1)^k \det H_k(a) > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$.

²Ludwig Otto Hesse (1811–1874).



RYSUNEK 1. $f(x, y) = x^2$.



RYSUNEK 2. $g(x, y) = -x^3$.

Dowód. Niech $x = a + h$, gdzie $h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ jest tak dobrane, aby odcinek $[a, x] \subset \Omega$. Na mocy wzoru Taylora dla $k = 2$ i warunku $f'(a) = 0$ istnieje $0 < \theta < 1$ takie, że

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} (a + \theta h) h_j h_k.$$

Rozważmy najpierw przypadek $\det H_k(a) > 0$ dla $k = 1, 2, \dots, n$. Wobec ciągłości pochodnych cząstkowych drugiego rzędu istnieje $r > 0$ takie, że $\det H_k(y) > 0$, $k = 1, \dots, n$ dla $y \in U := B(a, r)$. Biorąc odpowiednio małe h ($\|h\| < r$), wnioskujemy, że $\det H_k(a + \theta h) > 0$ dla $k = 1, 2, \dots, n$. Na mocy twierdzenia Sylwestra forma kwadratowa n zmiennych z prawej strony powyższego wzoru jest dodatnio określona, z czego wynika, że $f(x) > f(a)$ dla $x \in U \setminus \{a\}$, czyli f ma minimum lokalne w punkcie a .

W przypadku $(-1)^k \det H_k(a) > 0$ dla $k = 1, 2, \dots, n$ rozumujemy analogicznie. \square

W przypadku $n = 2$ powyższe twierdzenie można wyrazić następująco

Twierdzenie 1.5.5. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $a \in \Omega$, $f \in C^2(\Omega)$, $f'(a) = 0$.

- (a) Jeśli $\det H(a) > 0$, to funkcja f ma w punkcie a silne ekstremum lokalne, i to
- (i) minimum, gdy $f''_{xx}(a) > 0$,
 - (ii) maksimum, gdy $f''_{xx}(a) < 0$.
- (b) Jeśli $\det H(a) < 0$, to funkcja f nie ma w punkcie a ekstremum.
- (c) Jeśli $\det H(a) = 0$, to nic nie wiadomo.

Dowód. (a) wynika z poprzedniego twierdzenia.

(b) Rozumując tak jak w dowodzie poprzedniego twierdzenia wnioskujemy, że

$$f(b) - f(a) = \frac{1}{2} (f''_{xx}(c)h^2 + 2f''_{xy}(c)hk + f''_{yy}(c)k^2),$$

gdzie $a = (x, y)$, $b = (x + h, y + k)$ i $c = (x + \theta h, y + \theta k)$. Podstawmy $k = ht$ po prawej stronie powyższego wzoru. Po opuszczeniu czynnika $h^2/2$ prawa strona otrzyma postać

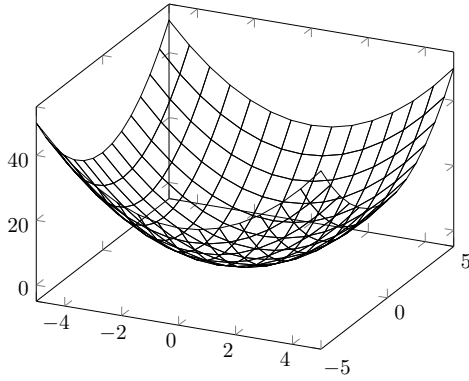
$$f''_{xx}(c) + 2f''_{xy}(c)t + f''_{yy}(c)t^2.$$

Ponieważ $\det H(a) < 0$, trójmian ten, gdy $h = 0$, ma wyróżnik dodatni, przyjmuje więc wartości dodatnie dla pewnych t , np. dla $t = \alpha$, i wartości ujemne dla innych t , np. dla $t = \beta$. Wobec ciągłości drugich pochodnych trójmian ten ma wartości dodatnie i ujemne przy dowolnie małych wartościach h , wobec czego forma po prawej stronie przedostatniego wzoru jest nieoznaczona, co dowodzi braku ekstremum funkcji f w punkcie a .

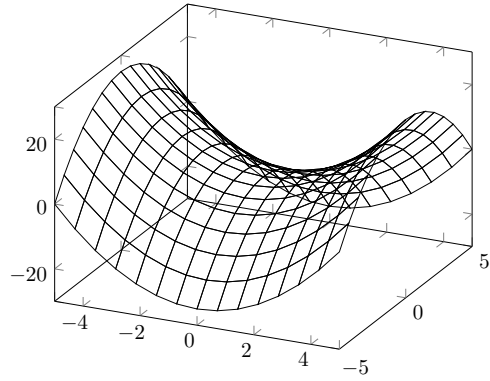
- (c) Wystarczy zauważyć, że dla $f(x, y) = x^2$, $g(x, y) = -x^3$ mamy $\det H_f(0, 0) = 0$, $\det H_g(0, 0) = 0$, ale f ma w punkcie $(0, 0)$ minimum lokalne (nie silne) (Rysunek 1), zaś g nie ma w punkcie $(0, 0)$ ekstremum (Rysunek 2). \square

Przykład 1.5.6. (a) Wyznaczymy ekstrema funkcji $f(x, y) = x^2 + \lambda y^2$, gdzie λ jest stałą. Pochodne

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2\lambda y$$



RYSUNEK 3. $f(x, y) = x^2 + y^2$.



RYSUNEK 4. $f(x, y) = x^2 - y^2$.

zerują się w punkcie $(0, 0)$ (i w punktach $(0, y)$ dla $\lambda = 0$). Ponieważ

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{bmatrix},$$

skąd $\det H(0, y) = 4\lambda$ oraz $f''_{xx}(0, y) = 2$, więc

- (i) jeśli $\lambda > 0$, to funkcja f ma w punkcie $(0, 0)$ silne minimum lokalne (Rysunek 3),
 - (ii) jeśli $\lambda < 0$, to funkcja f nie ma w punkcie $(0, 0)$ ekstremum (Rysunek 4).
 - (iii) jeśli $\lambda = 0$, to twierdzenie nie rozstrzyga istnienia ekstremum w punktach $(0, y)$. Jednak dla $\lambda = 0$ funkcja f przyjmuje postać $f(x, y) = x^2$, skąd wnioskujemy, że f ma w punktach $(0, y)$ minimum lokalne (nie silne!), ponieważ $f(0, y) = 0$ oraz $f \geq 0$ (Rysunek 1).
- (b) Wyznamy największą wartość iloczynu xyz trzech liczb dodatnich, których suma $x + y + z = c$ ma stałą wartość. Niech $f(x, y) = xy(c - x - y)$, $x, y > 0$, $x + y < c$. Wówczas

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = y(c - 2x - y) = 0 \\ f'_y(x, y) = x(c - x - 2y) = 0 \end{cases} \iff x = y = \frac{c}{3}.$$

Ponieważ $c > 0$ oraz

$$\det H(x, y) = \begin{vmatrix} -2y & c - 2x - 2y \\ c - 2x - 2y & -2x \end{vmatrix} = 4xy - (c - 2x - 2y)^2,$$

więc

$$\det H\left(\frac{c}{3}, \frac{c}{3}\right) = \frac{c^2}{3} > 0, \quad f''_{xx}\left(\frac{c}{3}, \frac{c}{3}\right) = -\frac{2}{3}c < 0,$$

czyli f ma maksimum lokalne $f\left(\frac{c}{3}, \frac{c}{3}\right) = \frac{c^3}{27} > 0$. Ponieważ funkcja nie ma innych ekstremów, a na brzegach trójkąta będącego dziedziną funkcji f wielomian $xy(c - x - y)$ się zeruje, znalezione maksimum lokalne jest maksimum globalnym, zatem iloczyn xyz jest największy i równy $\frac{c^3}{27}$, gdy $x = y = z = \frac{c}{3}$.

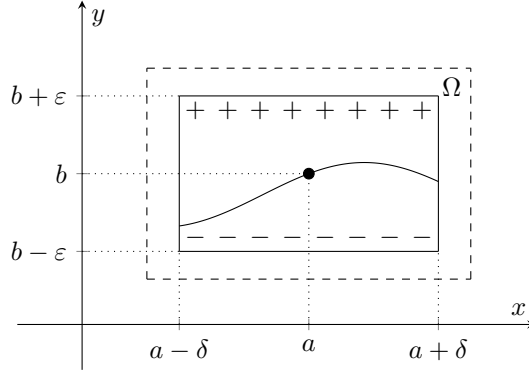
1.6. Funkcje uwikłane.

Twierdzenie 1.6.1 (Twierdzenie o funkcji uwikłanej). Niech $n, k \in \mathbb{N}$, $(a, b) \in \Omega \in \text{top}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$. Wtedy istnieją otoczenie otwarte $U \subset \mathbb{R}^n$ punktu a , otoczenie otwarte $V \subset \mathbb{R}$ punktu b oraz funkcja $\varphi \in \mathcal{C}^k(U, V)$ taka, że $U \times V \subset \Omega$, $\{(x, y) \in U \times V : f(x, y) = f(a, b)\} = \{(t, \varphi(t)) : t \in U\}$.

Dowód. Dla prostoty zapisu rozważmy przypadek $n = 1$. Możemy założyć, że $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) > 0$ dla dowolnego $(x, y) \in \Omega$ oraz że Ω jest prostokątem (linia przerywana na Rysunku 5). Ustalmy $\varepsilon > 0$ takie, że $(a, b \pm \varepsilon) \in \Omega$. Oczywiście

$$f(a, b - \varepsilon) < f(a, b) < f(a, b + \varepsilon).$$

Niech $\delta > 0$ będzie takie, że $f(x, b - \varepsilon) < f(a, b) < f(x, b + \varepsilon)$, $x \in (a - \delta, a + \delta) =: U$. Wynika stąd, że dla dowolnego $x \in (a - \delta, a + \delta)$ istnieje dokładnie jeden punkt $y = \varphi(x) \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon) =: V$ taki, że $f(x, \varphi(x)) = f(a, b)$.



RYSUNEK 5.

Pozostaje sprawdzić, że $\varphi : (a - \delta, a + \delta) \rightarrow (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ jest klasy \mathcal{C}^k . Na wstępie zauważmy, że powtarzając powyższe rozumowanie dla dowolnego punktu $(x_0, y_0) \in P := (a - \delta, a + \delta) \times (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ i dowolnego $0 < \varepsilon^* \ll 1$ wnioskujemy, że istnieje $\delta^* > 0$ oraz funkcja

$$\varphi^* : (a - \delta^*, a + \delta^*) \rightarrow (b - \varepsilon^*, b + \varepsilon^*)$$

takie, że $P^* := (x_0 - \delta^*, x_0 + \delta^*) \times (y_0 - \varepsilon^*, y_0 + \varepsilon^*) \subset P$ oraz $y = \varphi^*(x)$ jest jedynym rozwiązaniem równania $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ w prostokącie P^* . Jeśli $y_0 = \varphi(x_0)$, to oczywiście $\varphi^* = \varphi$ na $(x_0 - \delta^*, x_0 + \delta^*)$, co w szczególności, wobec dowolności ε^* , oznacza, że φ jest funkcją ciągłą.

Zauważmy, że cały problem leży w różniczkowalności φ . Jeśli bowiem φ jest różniczkowalna, to równość $f(x, \varphi(x)) = f(a, b)$ implikuje, że

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0,$$

a stąd

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}, \quad x \in (a - \delta, a + \delta),$$

co z kolei pokazuje, że φ' jest funkcją ciągłą, a więc φ jest klasy \mathcal{C}^1 . Jeżeli już wiemy, że φ jest klasy \mathcal{C}^ℓ dla pewnego $\ell \in \{1, \dots, k-1\}$, to powyższa równość pokazuje, że φ jest klasy $\mathcal{C}^{\ell+1}$.

Przechodzimy do różniczkowalności. Ustalmy $x_0 \in (a - \delta, a + \delta)$. Dla małych $h \in \mathbb{R}$ mamy

$$0 = f(x_0 + h, \varphi(x_0 + h)) - f(x_0, \varphi(x_0)) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(h), \varphi(x_0 + h))h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta(h))(\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)),$$

gdzie $\xi(h) \in [x_0, x_0 + h]$ i $\eta(h) \in [\varphi(x_0), \varphi(x_0 + h)]$. Wynika stąd, że

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(h), \varphi(x_0 + h)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta(h)) \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h}.$$

Teraz, przechodząc $h \rightarrow 0$ (i korzystając z ciągłości φ) otrzymujemy różniczkowalność funkcji φ w punkcie x_0 . \square

Przykład 1.6.2. (a) Twierdzenie to należy do najważniejszych i znajduje liczne zastosowania, np. rozstrzyga niełatwe zagadnienie, czy równanie

$$x2^y - x^2y^2 + (1 - x^2) \sin y = 0$$

ma rozwiązanie postaci $y = \varphi(x)$ przechodzące przez punkt $(0, 0)$. Odpowiedź jest twierdząca, bo jeśli

$$f(x, y) := x2^y - x^2y^2 + (1 - x^2) \sin y,$$

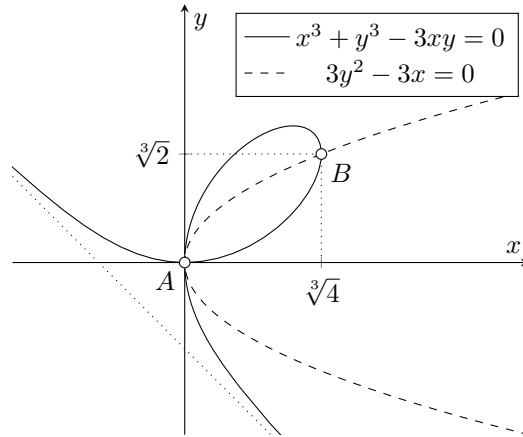
to

$$f(0, 0) = 0, \quad f'_y(x, y) = x2^y \ln 2 - 2x^2y + (1 - x^2) \cos y, \quad f'_y(0, 0) = 1 \neq 0.$$

Chociaż φ nie wyraża się przez funkcje elementarne, to np. wiadomo, że jest różniczkowalna oraz

$$\varphi'(x) = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} = -\frac{2^y - 2xy^2 - 2x \sin y}{x2^y \ln 2 - 2x^2y + (1 - x^2) \cos y}, \quad \varphi'(0) = -1,$$

czyli φ jest malejąca w otoczeniu 0.



RYSUNEK 6. Liść Kartezjusza.

(b) Równanie

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

ma, w myśl poprzedniego twierdzenia, rozwiązanie postaci $y = \varphi(x)$ w otoczeniu każdego punktu (x, y) , który spełnia warunki

$$f(x, y) = 0, \quad f'_y(x, y) = 3y^2 - 3x \neq 0.$$

Krzywa o równaniu $f(x, y) = 0$, zwana *liściem Kartezjusza* (Rysunek 6), przecina parabolę $x = y^2$ w dwóch punktach $A = (0, 0)$ i $B = (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$.

Rozwiązanie $y = \varphi(x)$ istnieje więc w otoczeniu każdego punktu krzywej $f(x, y) = 0$ różnego od A i B . Każdemu argumentowi $x \in (0, \sqrt[3]{4})$ odpowiadają na krzywej trzy różne punkty mające pierwszą współrzędną równą x , a każdemu argumentowi $x \in (-\infty, 0) \cup (\sqrt[3]{4}, +\infty)$ odpowiada na krzywej tylko jeden punkt (x, y) .

Niech (a, b) będzie jednym z wymienionych punktów, a $y = \varphi(x)$ — rozwiązaniem równania $f(x, y) = 0$ w otoczeniu (a, b) . Wówczas $b = \varphi(a)$ i $f'_y(a, b) \neq 0$. Funkcja φ ma w pewnym przedziale $(a - \delta, a + \delta)$ wszystkie pochodne, bo funkcja f ma wszystkie pochodne cząstkowe. Znając $b = \varphi(a)$ łatwo obliczyć $\varphi'(a), \varphi''(a), \dots, \varphi^{(k)}(a), \dots$ przez różniczkowanie równania $f(x, \varphi(x)) = 0$.

Twierdzenie 1.6.3 (Warunek dostateczny na ekstrema lokalne funkcji uwikłanej). *Niech $(a, b) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, $f \in C^2(\Omega)$, $f(a, b) = 0$, $f'_y(a, b) \neq 0$, $f'_{x_j}(a, b) = 0$, $j = 1, \dots, n$. Wtedy równanie $f(x, y) = 0$ da się w otoczeniu punktu (a, b) rozwikłać oraz funkcja uwikłana $y = \varphi(x)$, $\varphi(a) = b$ ma w punkcie a*

(a) *silne maksimum lokalne, jeśli*

$$\det D_k(a, b) := \begin{vmatrix} \frac{f''_{x_1 x_1}(a, b)}{f'_y(a, b)} & \frac{f''_{x_1 x_2}(a, b)}{f'_y(a, b)} & \cdots & \frac{f''_{x_1 x_k}(a, b)}{f'_y(a, b)} \\ \frac{f''_{x_2 x_1}(a, b)}{f'_y(a, b)} & \frac{f''_{x_2 x_2}(a, b)}{f'_y(a, b)} & \cdots & \frac{f''_{x_2 x_k}(a, b)}{f'_y(a, b)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{f''_{x_k x_1}(a, b)}{f'_y(a, b)} & \frac{f''_{x_k x_2}(a, b)}{f'_y(a, b)} & \cdots & \frac{f''_{x_k x_k}(a, b)}{f'_y(a, b)} \end{vmatrix} > 0, \quad k = 1, \dots, n;$$

(b) *silne minimum lokalne, jeśli $(-1)^k \det D_k(a, b) > 0$, $k = 1, \dots, n$.*

Dowód. Niech $x = (x_1, \dots, x_n)$ oraz $a = (a_1, \dots, a_n)$. Na mocy twierdzenia o odwzorowaniu uwikłanym wiemy, że funkcja φ istnieje i jest klasy C^2 . Różniczkując równość $f(x, \varphi(x)) = 0$ względem x_j otrzymujemy (dla uproszczenia zapisu pomijamy argument funkcji φ)

$$(1.3) \quad f'_{x_j}(x, \varphi) + f'_y(x, \varphi)\varphi'_{x_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

skąd, po uwzględnieniu założeń,

$$(1.4) \quad \varphi'_{x_j}(a) = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Różniczkując (1.3) względem x_k otrzymujemy

$$f''_{x_j x_k}(x, \varphi) + f''_{x_j y}(x, \varphi)\varphi'_{x_k} + (f''_{y x_k}(x, \varphi) + f''_{y y}(x, \varphi)\varphi'_{x_k})\varphi'_{x_j} + f'_y(x, \varphi)\varphi''_{x_j x_k} = 0,$$

skąd, po uwzględnieniu założeń oraz (1.4),

$$\varphi''_{x_j x_k}(a) = -\frac{f''_{x_j x_k}(a, b)}{f'_y(a, b)}, \quad j, k = 1, \dots, n.$$

Teza wynika z twierdzenia o warunkach dostatecznych na ekstrema lokalne. \square

Przykład 1.6.4. Znajdźmy ekstrema funkcji $y = \varphi(x)$ określonej równaniem

$$f(x, y) = x^2 - 2xy - 3y^2 + 4 = 0.$$

Ekstremum może istnieć w punktach, w których $f(x, y) = 0$, $f'_y(x, y) = -2x - 6y \neq 0$ i $f'_x(x, y) = 2x - 2y = 0$, tj. w punktach $A = (1, 1)$ i $B = (-1, -1)$. Ponieważ $f''_{xx}(x, y) = 2$, więc w punktach A i B mamy

$$\varphi''(1) = -\frac{f''_{xx}(A)}{f'_y(A)} = -\frac{2}{-8} = \frac{1}{4} > 0, \quad \varphi''(-1) = -\frac{f''_{xx}(B)}{f'_y(B)} = -\frac{2}{-8} = -\frac{1}{4} < 0,$$

zatem w punkcie A funkcja φ ma minimum $\varphi(1) = 1$, a w punkcie B — maksimum $\varphi(-1) = -1$.

1.7. Podrozmaitości.

Definicja 1.7.1. Niech $n, k, d \in \mathbb{N}$, $d \leq n$. Mówimy, że zbiór $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$ jest d -wymiarową podrozmaitością klasy \mathcal{C}^k w \mathbb{R}^n ($M \in \mathcal{M}_d^k(\mathbb{R}^n)$), jeśli dla dowolnego $a \in M$ istnieją $P \in \text{top } \mathbb{R}^d$, $U \in \text{top } M$, $a \in U$ oraz homeomorfizm $p \in \mathcal{C}^k(P, U)$ taki, że $\text{rank } p'(t) = d$, $t \in P$, gdzie

$$p'(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial t_1}(t) & \frac{\partial p_1}{\partial t_2}(t) & \dots & \frac{\partial p_1}{\partial t_d}(t) \\ \frac{\partial p_2}{\partial t_1}(t) & \frac{\partial p_2}{\partial t_2}(t) & \dots & \frac{\partial p_2}{\partial t_d}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial p_n}{\partial t_1}(t) & \frac{\partial p_n}{\partial t_2}(t) & \dots & \frac{\partial p_n}{\partial t_d}(t) \end{bmatrix}, \quad p = (p_1, \dots, p_n), \quad t = (t_1, \dots, t_d) \in P.$$

Homeomorfizm $p : P \rightarrow U$ nazywamy parametryzacją (dla U).

Obserwacja 1.7.2. (a) $M \in \mathcal{M}_n^k(\mathbb{R}^n) \iff \emptyset \neq M \in \text{top } \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$.

(b) Jeśli $M := \{(t, \varphi(t)) : t \in P\}$, gdzie $P \in \text{top } \mathbb{R}^d$, $d \leq n - 1$ i $\varphi \in \mathcal{C}^k(P, \mathbb{R}^{n-d})$, to $M \in \mathcal{M}_d^k(\mathbb{R}^n)$. Istotnie, łatwo sprawdzić, że $p : P \rightarrow M$, $p(t) = (t, \varphi(t))$, $t \in P$ jest (globalną) parametryzacją.

(c) Jeśli $M \subset \mathbb{R}^n$ jest d -wymiarową płaszczyzną afiniczną, $d \leq n - 1$, to $M \in \mathcal{M}_d^k(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$. Istotnie, jeśli $M = x_0 + V$ gdzie V jest d -wymiarową podprzestrzenią wektorową w \mathbb{R}^n , to dla dowolnej bazy v_1, \dots, v_d przestrzeni V odwzorowanie $p : \mathbb{R}^d \rightarrow M$, $p(t) = x_0 + t_1 v_1 + \dots + t_d v_d$, $t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d$ jest (globalną) parametryzacją M klasy \mathcal{C}^k , $k \in \mathbb{N}$.

(d) $\mathbb{S}_{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\} \in \mathcal{M}_{n-1}^k(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$. Istotnie, jeśli $U_n^+ := \{x \in \mathbb{S}_{n-1} : x_n > 0\}$, to odwzorowanie $p : \mathbb{B}_{n-1} \rightarrow U_n^+$, $p(x') := (x', \sqrt{1 - \|x'\|^2})$, $x' \in \mathbb{B}_{n-1} := \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : \|x'\| < 1\}$, jest lokalną parametryzacją U_n^+ . Podobnie możemy sparametryzować każdy z $2n$ zbiorów $U_j^\pm := \{x \in \mathbb{S}_{n-1} : \pm x_j > 0\}$.

(e) Można pokazać, że $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 = y^2\} \notin \mathcal{M}_1^1(\mathbb{R}^2)$, chociaż odwzorowanie $p : \mathbb{R} \rightarrow M$, $p(t) = (t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$, jest homeomorfizmem klasy \mathcal{C}^1 . Zbiór M nazywamy *parabolą Neila*.

Twierdzenie 1.7.3. Niech $n, d, k \in \mathbb{N}$, $d \leq n - 1$. Wtedy $M \in \mathcal{M}_d^k(\mathbb{R}^n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $a \in M$ istnieją $\Omega \in \text{top } \mathbb{R}^n$, $a \in \Omega$ oraz $f \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^{n-d})$, $M \cap \Omega = f^{-1}(0)$, $\text{rank } f'(x) = n - d$, $x \in \Omega$.

Definicja 1.7.4. Niech $M \in \mathcal{M}_d^k(\mathbb{R}^n)$. Odwzorowanie $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ jest klasy \mathcal{C}^k ($f \in \mathcal{C}^k(M)$), jeśli $f \circ p \in \mathcal{C}^k(P, \mathbb{R})$ dla dowolnej parametryzacji lokalnej $p : P \rightarrow U$.

Twierdzenie 1.7.5. Niech $M \in \mathcal{M}_d^k(\mathbb{R}^n)$, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Wtedy $f \in \mathcal{C}^k(M)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $a \in M$ istnieje otoczenie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ punktu a oraz $\tilde{f} \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ takie, że $\tilde{f} = f$ na $M \cap \Omega$.

Definicja 1.7.6. Niech $M \in \mathcal{M}_d^k(\mathbb{R}^n)$, $a \in M$ i niech $p : P \rightarrow U$ będzie dowolną lokalną parametryzacją taką, że $p(t_0) = a \in U$. Zbiór $T_a M := p'(t_0)(\mathbb{R}^d)$ nazywamy *przestrzenią styczną do M w punkcie a* .

Obserwacja 1.7.7. (a) Powyższa definicja jest poprawna, tzn. przestrzeń $T_a M$ nie zależy od wyboru parametryzacji p .

(b) $T_a M$ jest podprzestrzenią wektorową w \mathbb{R}^n , $\dim T_a M = d$. W szczególności, jeśli $d = n$, to $T_a M = \mathbb{R}^n$.

Twierdzenie 1.7.8. Niech $M \in \mathcal{M}_d^1(\mathbb{R}^n)$, $d \leq n - 1$, $a \in M$, $a \in \Omega \in \text{top } \mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^{n-d})$, $M \cap \Omega = f^{-1}(0)$, $\text{rank } f'(x) = n - d$, $x \in \Omega$. Wtedy $T_a M = \{X \in \mathbb{R}^n : f'(a)(X) = 0\}$.

Definicja 1.7.9. Niech $M \in \mathcal{M}_d^1(\mathbb{R}^n)$, $a \in M$, $f \in \mathcal{C}^1(M)$. Odwzorowanie $f'(a) := \tilde{f}'(a)|_{T_a M}$ nazywamy różniczką odwzorowania f w punkcie a .

Obserwacja 1.7.10. Powyższa definicja jest poprawna, tzn. odwzorowanie $\tilde{f}'(a)|_{T_a M}$ nie zależy od wyboru rozszerzenia \tilde{f} .

Przykład 1.7.11. Niech $M := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + \dots + x_n = c, x_1, \dots, x_n > 0\}$, gdzie $n \geq 2$, $c > 0$.

(a) $M \in \mathcal{M}_{n-1}^k(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$. Istotnie, odwzorowanie $p : P \rightarrow M$, gdzie

$$p(x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{n-1}, c - x_1 - \dots - x_{n-1}), \quad (x_1, \dots, x_{n-1}) \in P,$$

gdzie $P = \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_{>0})^{n-1} : x_1 + \dots + x_n < c\}$, jest (globalną) parametryzacją M .

(b) $M = f^{-1}(0)$, gdzie $f : (\mathbb{R}_{>0})^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n - c, \quad (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_{>0})^n.$$

(c) Niech $a \in M$. Jeśli $t_0 \in P$ jest takie, że $p(t_0) = a$, to

$$p'(t_0)(h) = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ -1 & \dots & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_{n-1} \\ -h_1 - \dots - h_{n-1} \end{bmatrix}, \quad h = (h_1, \dots, h_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1},$$

skąd $T_a M = p'(t_0)(\mathbb{R}^{n-1}) = \{X \in \mathbb{R}^n : X_1 + X_2 + \dots + X_n = 0\}$.

(d) $f'(x_1, \dots, x_n) = (1, \dots, 1)$, skąd $f'(a)(X) = X_1 + \dots + X_n$, $X = (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$. W konsekwencji, $T_a M = \{X \in \mathbb{R}^n : f'(a)(X) = 0\} = \{X \in \mathbb{R}^n : X_1 + \dots + X_n = 0\}$.

1.8. Ekstrema warunkowe. Rozważmy następujący problem. Dane są $M \in \mathcal{M}_d^2(\mathbb{R}^n)$, $d \leq n - 1$, $a \in M$, $f \in \mathcal{C}^2(M)$. Znaleźć (różniczkowe) warunki konieczne i dostateczne na to, by f miała w punkcie a ekstremum lokalne, zwane *ekstremum warunkowym*. Nazwa bierze się stąd, że ponieważ problem ma charakter lokalny, to możemy założyć (zmniejszając ewentualnie M), że $f = \tilde{f}|_M$, gdzie $\tilde{f} \in \mathcal{C}^k(\Omega)$, $M \subset \Omega \in \text{top } \mathbb{R}^n$, zatem szukamy ekstremów lokalnych funkcji \tilde{f} przy warunku „punkt leży na M ”.

Twierdzenie 1.8.1 (Warunek konieczny na ekstremum warunkowe). *Jeśli f ma w punkcie a ekstremum warunkowe, to $f'(a) = 0$.*

Twierdzenie 1.8.2 (Warunek dostateczny na ekstremum warunkowe). *Niech $\tilde{f}'(a) = 0$ na \mathbb{R}^n , $\tilde{f}''(a) \neq 0$ na $T_a M$. Wtedy*

(a) *jeśli $\tilde{f}''(a)(X) > 0$ dla $X \in (T_a M)_*$, to f ma w punkcie a silne minimum warunkowe,*

(b) *jeśli $\tilde{f}''(a)(X) < 0$ dla $X \in (T_a M)_*$, to f ma w punkcie a silne maksimum warunkowe,*

(c) *jeśli $\tilde{f}''(a)$ przyjmuje na $T_a M$ wartości różnych znaków, to f nie ma w punkcie a ekstremum warunkowego.*

Obserwacja 1.8.3. (a) Można wykazać, że odwzorowanie $\tilde{f}''(a)|_{T_a M}$ nie zależy od wyboru rozszerzenia \tilde{f} . Tak więc wystarczy zbadać określoność $\tilde{f}''(a)$ na $T_a M$ dla jednego ustalonego rozszerzenia \tilde{f} funkcji f takiego, że $\tilde{f}'(a) = 0$.

(b) Warunek $\tilde{f}'(a) = 0$ nie może zostać zastąpiony warunkiem $f'(a) = 0$ (tzn. warunkiem $\tilde{f}'(a) = 0$ na $T_a M$). Niech np. $n = 2$, $M := \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$, $a = (0, 0)$, $f(x, x^2) := x^3$ (oczywiście f nie ma ekstremum warunkowego w punkcie a). Niech $\tilde{f}(x, y) := x^2 - y + x^3$. Widać, że $\tilde{f} = f$ na M . Ponadto, $f'(a) = 0$ na $T_a M = \mathbb{R} \times \{0\}$ i $\tilde{f}''(a)(h, 0) = 2h^2$, $h \in \mathbb{R}$ (a więc spełniony jest warunek (a) z Twierdzenia 1.8.2).

(c) Patrząc na Twierdzenie 1.8.2 (i pamiętając o (a)) widzimy, że przeszkodą w stosowaniu Twierdzenia 1.8.2 będzie następująca sytuacja. Znaleźliśmy rozszerzenie \tilde{f} takie, że $\tilde{f}'(a) \neq 0$, ale $\tilde{f}'(a) = 0$ na $T_a M$. Rozszerzenie takie na nic się nam nie przyda. Pytamy więc, czy możemy znaleźć inne rozszerzenie takie, że $\tilde{f}'(a) = 0$. Jeżeli tak, to będziemy mieli pewną szansę, że Twierdzenie 1.8.2 rozstrzygnie o ekstremum.

Możemy zawsze założyć, że $M \cap \Omega = g^{-1}(0)$, gdzie $g \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^{n-d})$, $\text{rank } g'(x) = n - d$, $x \in \Omega$. Zauważmy, że dla dowolnego $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-d}) \in \mathbb{R}^{n-d}$ odwzorowanie

$$\tilde{f}_\lambda := \tilde{f} - \lambda_1 g_1 - \dots - \lambda_{n-d} g_{n-d}$$

jest przedłużeniem \tilde{f} oraz jest ono k -krotnie różniczkowalne w punkcie a .

Twierdzenie 1.8.4 (Metoda mnożników Lagrange'a). *Jeśli $f'(a) = 0$ na $T_a M$, to istnieje wektor $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-d}) \in \mathbb{R}^{n-d}$ taki, że dla funkcji*

$$\tilde{f}_\lambda := \tilde{f} - \lambda_1 g_1 - \dots - \lambda_{n-d} g_{n-d}$$

spełniony jest związek $\tilde{f}'_\lambda(a) = 0$ na \mathbb{R}^n . Liczby $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-d}$ noszą nazwę mnożników Lagrange'a.

Przykład 1.8.5. Niech $M := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + \dots + x_n = c, x_1, \dots, x_n > 0\}$, gdzie $n \geq 2, c > 0$ ($M \in \mathcal{M}_{n-1}^2 \mathbb{R}^n$). Niech dalej $\tilde{f}(x_1, \dots, x_n) := x_1 \dots x_n$. Szukamy ekstremów warunkowych \tilde{f} na M .

Stosujemy metodę mnożników Lagrange'a. Niech $\tilde{f}_\lambda(x) := \tilde{f}(x) - \lambda(x_1 + \dots + x_n - c)$. Punkt podejrzany o ekstremum warunkowe, to punkt $a \in M$ taki, że

$$\frac{\partial \tilde{f}_\lambda}{\partial x_j}(a) = \prod_{k \neq j} a_k - \lambda = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Dostajemy stąd łatwo $a = (c/n, \dots, c/n)$ i $\lambda = (c/n)^{n-1}$. Teraz przechodzimy do badania formy $\tilde{f}_\lambda''(a)$ na $T_a M = \{X = (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n : X_1 + \dots + X_n = 0\}$, gdzie

$$\tilde{f}_\lambda''(a)(X) = \sum_{j \neq k} \left(\frac{c}{n}\right)^{n-2} X_j X_k, \quad X \in \mathbb{R}^n.$$

Wynika stąd, że

$$\tilde{f}_\lambda''(a)(X) = -\left(\frac{c}{n}\right)^{n-2} \|X\|^2 < 0, \quad X \in (T_a M)_*,$$

a więc \tilde{f} ma w punkcie a maksimum warunkowe, czyli

$$x_1 \dots x_n \leq \left(\frac{c}{n}\right)^n = \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right)^n, \quad x_1, \dots, x_n \geq 0.$$

2. CAŁKA RIEMANNA

2.1. Całka Riemanna na kostce. Zasadniczym celem podrozdziałów 2.1 i 2.2 jest przeniesienie wyników dla całki funkcji jednej zmiennej na przypadek wielowymiarowy. Te dowody, które są prostym uogólnieniem przypadku jednowymiarowego pozostawiamy jako ćwiczenie.

Definicja 2.1.1. *Kostką* (domkniętą) nazywamy dowolny zbiór postaci $P := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$, gdzie $a_j < b_j$, $j = 1, \dots, n$ (rozważamy tylko kostki niezdegenerowane).

Objętością kostki P nazywamy liczbę $|P| := (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n)$; zauważmy, że $|P| > 0$ oraz że $|x_0 + P| = |P|$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Średnicą kostki P nazywamy liczbę $\text{diam } P := \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2}$.

Podziałem kostki P nazywamy dowolną skończoną rodzinę kostek $\pi = \{P_1, \dots, P_m\}$ taką, że $P = P_1 \cup \dots \cup P_m$ oraz $\text{int } P_j \cap \text{int } P_k = \emptyset$ dla $j \neq k$; zauważmy, że $|P| = |P_1| + \dots + |P_m|$; dla $n = 1$ podział kostki $P = [a, b]$ możemy utożsamiać z ciągiem $\pi = (x_0, \dots, x_m)$, gdzie $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$.

Średnicą podziału $\pi = \{P_1, \dots, P_m\}$ nazywamy liczbę $\text{diam } \pi := \max\{\text{diam } P_j : j = 1, \dots, m\}$.

Ciąg $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ podziałów kostki P nazywamy *normalnym* ($(\pi_k)_{k=1}^\infty \in \mathcal{NCP}(P)$), jeśli $\text{diam } \pi_k \rightarrow 0$.

Definicja 2.1.2. Niech $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną. Dla dowolnej kostki $Q \subset P$ zdefiniujmy $m(f, Q) := \inf f(Q)$, $M(f, Q) := \sup f(Q)$. Dla dowolnego podziału $\pi = \{P_1, \dots, P_m\}$ kostki P niech

$$L(f, \pi) := \sum_{j=1}^m m(f, P_j) |P_j|, \quad U(f, \pi) := \sum_{j=1}^m M(f, P_j) |P_j|.$$

Liczbę $L(f, \pi)$ nazywamy *sumą aproksymacyjną dolną dla funkcji f przy podziale π* . Analogicznie, $U(f, \pi)$ nazywamy *sumą aproksymacyjną górną*. Czasami mówi się o *sumach Darboux* lub *sumach Riemanna*. Niech

$$\int_{*P} f := \sup_{\pi} L(f, \pi), \quad \int_P^* f := \inf_{\pi} U(f, \pi),$$

gdzie supremum i infimum bierzemy po wszystkich podziałach P . Liczbę $\int_{*P} f$ nazywamy *całką dolną z funkcji f po kostce P* . Analogicznie, liczbę $\int_P^* f$ nazywamy *całką górną*.

Powiemy, że funkcja f jest *całkowalna w sensie Riemanna na kostce P* ($f \in \mathcal{R}(P)$), jeśli $\int_{*P} f = \int_P^* f$. Wtedy wspólną wartość tych całek oznaczamy przez $\int_P f$ i nazywamy *całką Riemanna z funkcji f po kostce P* .

Przykład 2.1.3. (a) Każda funkcja stała $c \in \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna i $\int_P c = c|P|$.
(b) Niech $f := \chi_{P \cap \mathbb{Q}^n, P}$ będzie *funkcją Dirichleta w kostce P* . Wtedy $L(f, \pi) = 0$ oraz $U(f, \pi) = |P|$ dla dowolnego podziału π . Tak więc $\int_{*P} f = 0$ oraz $\int_P^* f = |P|$, czyli $f \notin \mathcal{R}(P)$.

Obserwacja 2.1.4. Niech $f, g : P \rightarrow \mathbb{R}$ będą ograniczone.

- (a) Jeśli $c \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{R}(P)$, to $cf \in \mathcal{R}(P)$ oraz $\int_P cf = c \int_P f$.
- (b) Jeśli $f, g \in \mathcal{R}(P)$, to $f + g \in \mathcal{R}(P)$ oraz $\int_P (f + g) = \int_P f + \int_P g$.
- (c) Jeśli $f, g \in \mathcal{R}(P)$, $f \leq g$, to $\int_P f \leq \int_P g$ (monotoniczność całki).
- (d) $f \in \mathcal{R}(P) \iff \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\pi} : U(f, \pi) - L(f, \pi) \leq \varepsilon$.
- (e) Jeśli $(\pi_k)_{k=1}^\infty \in \mathcal{NCP}(P)$, to $L(f, \pi_k) \rightarrow \int_{*P} f$, $U(f, \pi_k) \rightarrow \int_P^* f$.

Definicja 2.1.5. Niech $\pi = \{P_1, \dots, P_m\}$ będzie podziałem kostki P i niech $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$, $\xi_j \in P_j$, $j = 1, \dots, m$. Dla funkcji $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ sumę

$$M(f, \pi, \xi) := \sum_{j=1}^m f(\xi_j) |P_j|$$

nazywamy *sumą aproksymacyjną pośrednią dla funkcji f przy podziale π i punktach pośrednich ξ* . Czasami mówimy o *sumie Cauchy'ego-Riemanna*.

Obserwacja 2.1.6. Niech $f, g : P \rightarrow \mathbb{R}$ będą ograniczone.

- (a) $L(f, \pi) \leq M(f, \pi, \xi) \leq U(f, \pi)$.
- (b) $f \in \mathcal{R}(P) \iff \exists_{c \in \mathbb{R}} \forall_{(\pi_k)_{k=1}^\infty \in \mathcal{NCP}(P)} \forall_{(\xi_k)_{k=1}^\infty} : M(f, \pi_k, \xi_k) \rightarrow c$.
- (c) Jeśli $f \in \mathcal{R}(P)$, to $|f| \in \mathcal{R}(P)$ oraz $|\int_P f| \leq \int_P |f|$.
- (d) Jeśli $f, g \in \mathcal{R}(P)$, to $fg \in \mathcal{R}(P)$.
- (e) $\mathcal{C}(P) \subset \mathcal{R}(P)$.
- (f) Jeśli $f \in \mathcal{C}(P, \mathbb{R}_+)$ i $\int_P f = 0$, to $f \equiv 0$.

- (g) (Twierdzenie o wartości średniej). Jeśli $f \in \mathcal{C}(P)$, to istnieje $\xi \in P$ taki, że $f(\xi) = \frac{1}{|P|} \int_P f$.
- (h) Niech $\pi = \{P_1, \dots, P_m\}$ będzie ustalonym podziałem. Wtedy $f \in \mathcal{R}(P) \iff f|_{P_j} \in \mathcal{R}(P_j)$, $j = 1, \dots, m$. Ponadto, $\int_P f = \int_{P_1} f + \dots + \int_{P_m} f$.
- (i) Jeśli $f \in \mathcal{R}(P)$, to $f|_Q \in \mathcal{R}(Q)$ dla dowolnej kostki $Q \subset P$ oraz $\int_Q f = \int_P f_0$, gdzie $f_0 = \chi_{Q,P} f$.

Definicja 2.1.7. Mówimy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ ma *miarę Jordana (objętość) zero* ($|A| = 0$), jeśli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje skończona rodzina kostek P_1, \dots, P_m , taka, że $A \subset P_1 \cup \dots \cup P_m$ i $|P_1| + \dots + |P_m| \leq \varepsilon$.

Obserwacja 2.1.8. (a) Jeśli $|A| = 0$, to A jest ograniczony.

- (b) Jeśli A jest skończony, to $|A| = 0$.
- (c) Jeśli $|A| = 0$, to $|\bar{A}| = 0$.
- (d) Jeśli $|A| = 0$ i $B \subset A$, to $|B| = 0$.
- (e) Jeśli $|A_1| = \dots = |A_m| = 0$, to $|A_1 \cup \dots \cup A_m| = 0$.
- (f) Jeśli $\mathbb{R}^n \ni a_\nu \rightarrow a_0 \in \mathbb{R}^n$, to $|\{a_\nu : \nu \in \mathbb{N}_0\}| = 0$.
- (g) Jeśli $A \subset \mathbb{R}^n$, $|A| = 0$, oraz $B \subset \mathbb{R}^m$ jest ograniczony, to $|A \times B| = 0$.
- (h) Jeśli $Q \subset \mathbb{R}^d$ jest kostką, $f \in \mathcal{C}(Q, \mathbb{R}^{n-d})$, $1 \leq d \leq n$, to $|A| = 0$, gdzie $A := \{(t, f(t)) : t \in Q\}$. W szczególności, $|\partial R| = 0$ dla dowolnej „kostki ograniczonej” $R \subset \mathbb{R}^n$ (tzn. zbioru R takiego, że istnieje kostka P , dla której $\text{int } P \subset R \subset P$).

Istotnie, ustalmy $\varepsilon > 0$. Wobec jednostajnej ciągłości odwzorowania f istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$\|f(t') - f(t'')\| \leq \varepsilon \text{ o ile } \|t' - t''\| \leq \delta.$$

Niech $\pi = \{Q_1, \dots, Q_m\}$ będzie podziałem kostki Q takim, że $\text{diam } \pi \leq \delta$. Ustalmy $t_j \in Q_j$ i niech

$$P_j := Q_j \times (f(t_j) + [-\varepsilon, \varepsilon]^{n-d}).$$

Oczywiście $A \subset P_1 \cup \dots \cup P_m$ oraz $|P_1| + \dots + |P_m| = |Q_1|(2\varepsilon)^{n-d} + \dots + |Q_m|(2\varepsilon)^{n-d} = |Q|(2\varepsilon)^{n-d}$.

- (i) Jeśli $M \in \mathcal{M}_d^1(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq d \leq n-1$, to każdy zwarty podzbiór $A \subset M$ ma miarę Jordana zero. Dla przykładu, $|\partial \mathbb{B}(a, r)| = 0$.
- (j) Jeśli $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ jest ograniczona i $|N_P(f)| = 0$, gdzie $N_P(f) := \{a \in P : f \text{ nie jest ciągła w } a\}$, to $f \in \mathcal{R}(P)$.
- (k) Jeśli $f, g : P \rightarrow \mathbb{R}$ są ograniczone i $|D_P(f, g)| = 0$, gdzie $D_P(f, g) := \{a \in P : f(a) \neq g(a)\}$, to $f \in \mathcal{R}(P) \iff g \in \mathcal{R}(P)$. Ponadto, $\int_P f = \int_P g$.

Definicja 2.1.9. Mówimy, że zbiór ograniczony $A \subset \mathbb{R}^n$ jest *mierzalny w sensie Jordana (regularny dla całki Riemanna)* (krótko: $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$), jeśli $\chi_A \in \mathcal{R}(P)$ dla pewnej kostki $P \supset A$. Liczbę $|A| := \int_P \chi_A$ nazywamy *miarą Jordana (objętością) zbioru A* .

Obserwacja 2.1.10. (a) Jeśli $\chi_A \in \mathcal{R}(P)$ dla pewnej kostki $P \supset A$, to $\chi_A \in \mathcal{R}(Q)$ dla dowolnej kostki $Q \supset A$. Ponadto, $\int_P \chi_A = \int_Q \chi_A$.

- (b) Jeśli $|A| = 0$ w sensie Definicji 2.1.7, to $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ oraz $|A| = 0$ w sensie Definicji 2.1.9.
- (c) Dla zbioru ograniczonego $A \subset \mathbb{R}^n$ mamy $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \iff |\partial A| = 0$.
Istotnie, niech P będzie dowolną kostką taką, że $A \subset \subset P$.
(\Leftarrow) wynika z Obserwacji 2.1.8 (j), ponieważ $N_P(\chi_A) \subset \partial A$.
(\Rightarrow). Ustalmy $\varepsilon > 0$. Z całkowalności funkcji χ_A wynika, że istnieje podział $\pi = \{P_1, \dots, P_m\}$ kostki P taki, że $U(\chi_A, \pi) - L(\chi_A, \pi) \leq \varepsilon/2$. Warunek ten oznacza, że $\sum_{i \in I} |P_i| \leq \varepsilon/2$, gdzie $I := \{i \in \{1, \dots, m\} : P_i \cap A \neq \emptyset, P_i \not\subset A\}$. Niech $B := \bigcup_{j=1}^m \partial P_j$. Wiemy, że $|B| = 0$. W szczególności, istnieje skończone pokrycie zbioru B kostkami Q_1, \dots, Q_r takie, że $|Q_1| + \dots + |Q_r| \leq \varepsilon/2$. Wystarczy jeszcze pokazać, że $(\partial A) \setminus B \subset \bigcup_{i \in I} P_i$. Niech $a \in (\partial A) \setminus B$. Wtedy istnieje i_0 takie, że $a \in \text{int } P_{i_0}$. Stąd $P_{i_0} \cap A \neq \emptyset$. Gdyby $P_{i_0} \subset A$, to mielibyśmy $a \in \text{int } A$. Tak więc $i_0 \in I$, co kończy dowód.

- (d) $\mathbb{B}(a, r) \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ (por. Obserwacja 2.1.8 (i)).
- (e) Każda kostka jest regularna.
- (f) Jeśli $A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, to $A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$.
Istotnie, $\partial(A \cup B), \partial(A \cap B), \partial(A \setminus B) \subset (\partial A) \cup (\partial B)$.
- (g) Jeśli $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ i $B \subset \partial A$, to $A \setminus B, A \cup B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$. W szczególności, $\text{int } A, \bar{A} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$.
- (h) Jeśli $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^m)$, to $A \times B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{n+m})$. Istotnie, $\partial(A \times B) \subset ((\partial A) \times \bar{B}) \cup (\bar{A} \times (\partial B))$ i możemy skorzystać z Obserwacji 2.1.8 (g) i (c).

2.2. Całka Riemanna na zbiorze mierzalnym w sensie Jordana. Naszym najbliższym celem jest zbudowanie teorii całki Riemanna na zbiorach regularnych.

Definicja 2.2.1. Niech $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $A \subset P$, gdzie P jest kostką. Dla funkcji ograniczonej $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ niech

$$f_0 = \begin{cases} f & \text{na } A \\ 0 & \text{na } P \setminus A \end{cases}.$$

Mówimy, że f jest *całkowalna w sensie Riemanna na A* (krótko $f \in \mathcal{R}(A)$), jeśli $f_0 \in \mathcal{R}(P)$. Określamy wtedy $\int_A f := \int_P f_0$. Bez trudu widać, że taka definicja jest poprawna, tzn. nie zależy od wyboru kostki $P \supset A$.

Poniżej przedstawimy listę podstawowych własności tak zdefiniowanej całki Riemanna. Dowody poszczególnych własności polegają na wykorzystaniu znanych własności całki Riemanna na kostce.

Obserwacja 2.2.2. Niech $A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$.

- (a) Jeśli $|A| = 0$, to każda funkcja ograniczona $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna oraz $\int_A f = 0$.
- (b) Jeśli $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ jest ograniczona i $|N_A(f)| = 0$, gdzie $N_A(f) := \{a \in A : f \text{ nie jest ciągła w } a\}$, to $f \in \mathcal{R}(A)$. W szczególności, $\mathcal{C}_b(A) \subset \mathcal{R}(A)$, gdzie $\mathcal{C}_b(A)$ oznacza klasę funkcji $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ciągłych i ograniczonych.
- (c) $1 \in \mathcal{R}(A)$ oraz $\int_A 1 = |A|$.
- (d) Jeśli $f, g \in \mathcal{R}(A)$, $a, b \in \mathbb{R}$, to $af + bg \in \mathcal{R}(A)$ oraz $\int_A (af + bg) = a \int_A f + b \int_A g$. Ponadto, jeśli $f \leq g$, to $\int_A f \leq \int_A g$.
- (e) Jeśli $f \in \mathcal{R}(A)$, to $|f| \in \mathcal{R}(A)$ oraz $|\int_A f| \leq \int_A |f|$.
- (f) Jeśli $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ są ograniczone i $|D_A(f, g)| = 0$, gdzie $D_A(f, g) := \{a \in A : f(a) \neq g(a)\}$, to $f \in \mathcal{R}(A) \iff g \in \mathcal{R}(A)$. Ponadto, $\int_A f = \int_A g$.
- (g) Jeśli $B \subset A$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, to $f|_B \in \mathcal{R}(B) \iff f\chi_B \in \mathcal{R}(A)$.
- (h) Jeśli $A = A_1 \cup A_2$, gdzie $A_1, A_2 \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $|A_1 \cap A_2| = 0$, to $f \in \mathcal{R}(A) \iff f|_{A_j} \in \mathcal{R}(A_j)$, $j = 1, 2$. Ponadto, $\int_A f = \int_{A_1} f + \int_{A_2} f$. W szczególności,
 - (i) miara Jordana jest *skończenie addytywna*, tzn. $|A \cup B| = |A| + |B|$ o ile $A \cap B = \emptyset$;
 - (ii) jeśli $B \subset A$, $f \in \mathcal{R}(A)$, to $f|_B \in \mathcal{R}(B)$;
 - (iii) jeśli $f : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ograniczona, to $f \in \mathcal{R}(A) \iff f \in \mathcal{R}(\bar{A})$ oraz $\int_A f = \int_{\bar{A}} f$;
 - (iv) jeśli $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ jest ograniczona, to $f \in \mathcal{R}(A) \iff f \in \mathcal{R}(\text{int } A)$ oraz $\int_A f = \int_{\text{int } A} f$.

Twierdzenie 2.2.3. Jeśli $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{n-1})$, $f \in \mathcal{R}(A)$, $B := \{(x, f(x)) : x \in A\}$, to $|B| = 0$.

Dowód. Niech $A \subset P$, gdzie P jest kostką, niech f_0 oznacza standardowe przedłużenie funkcji f i niech $B_0 := \{(x, f_0(x)) : x \in P\}$. Zauważmy, że $|B| = 0 \iff |B_0| = 0$ (ćwiczenie). Wynika stąd w szczególności, że możemy założyć, że $A = P$ jest kostką.

Dla $\varepsilon > 0$ niech $\pi = \{P_1, \dots, P_m\}$ będzie podziałem kostki P takim, że $U(f, \pi) - L(f, \pi) \leq \varepsilon$. Niech $Q_j := P_j \times [m(f, P_j), M(f, P_j)]$, $j = 1, \dots, m$. Wtedy $B \subset Q_1 \cup \dots \cup Q_m$ oraz

$$|Q_1| + \dots + |Q_m| = \sum_{j=1}^m |P_j| (M(f, P_j) - m(f, P_j)) \leq \varepsilon.$$

□

Twierdzenie 2.2.4 (O całkach iterowanych). Niech $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^m)$, $f \in \mathcal{R}(A \times B)$ (por. Obserwacja 2.1.10 (h)). Załóżmy, że $f(x, \cdot) \in \mathcal{R}(B)$, $x \in A^3$. Wtedy $(A \ni x \mapsto \int_B f(x, y) dy) \in \mathcal{R}(A)$ oraz

$$\int_{A \times B} f(x, y) dx dy = \int_A \left(\int_B f(x, y) dy \right) dx.$$

W szczególności, powyższy wzór stosuje się dla funkcji klasy $\mathcal{C}_b(A \times B)$.

Dowód. W oczywisty sposób dowód sprowadza się do przypadku, gdy $A = P$ i $B = Q$ są kostkami. Ustalmy dowolne podziały $\pi_1 = \{P_1, \dots, P_r\}$ kostki P i $\pi_2 = \{Q_1, \dots, Q_s\}$ kostki Q . Wtedy rodzina $\pi := \{P_j \times Q_k : j = 1, \dots, r, k = 1, \dots, s\}$ jest podziałem kostki $P \times Q$. Wybierzmy dowolne punkty pośrednie ξ dla podziału π_1 . Wtedy

$$m(f, P_j \times Q_k) |Q_k| \leq \int_{Q_k} f(\xi_j, y) dy \leq M(f, P_j \times Q_k) |Q_k|^5,$$

³Odnajdujemy, że nie wynika to z całkowalności f na $A \times B$. Dla przykładu, $A = B = [0, 1]$, $f(0, \cdot) := \chi_{Q \cap [0, 1]}$, $f(x, \cdot) := 0$ dla $x \in (0, 1]$

⁴Stosujemy tu wygodny tradycyjny zapis całki Riemanna z uwidocznieniem zmiennych.

⁵Z całkowalności funkcji $f(\xi_j, \cdot)$ na Q wynika jej całkowalność na Q_k .

skąd po pomnożeniu przez $|P_j|$, zsumowaniu najpierw względem k , a potem względem j , mamy

$$L(f, \pi) \leq \sum_{j=1}^r \int_Q f(\xi_j, y) dy |P_j| \leq U(f, \pi).$$

Pozostaje rozważyć normalne ciągi podziałów i zastosować Obserwację 2.1.6 (b). \square

Przykład 2.2.5. Niech $P = [-2, 3] \times [0, 1]$. Wówczas

$$\int_P (1 - xy^2) dx dy = \int_{-2}^3 dx \int_0^1 (1 - xy^2) dy = \int_{-2}^3 \left(1 - \frac{1}{3}x\right) dx = x - \frac{1}{6}x^2 \Big|_{-2}^3 = \frac{25}{6}.$$

Zauważmy, że także

$$\int_P (1 - xy^2) dx dy = \int_0^1 dy \int_{-2}^3 (1 - xy^2) dx = \int_0^1 \left(5 - \frac{5}{2}y^2\right) dy = 5y - \frac{5}{6}y^3 \Big|_0^1 = \frac{25}{6}.$$

Wniosek 2.2.6. Jeśli $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^m)$, $f \in \mathcal{R}(A)$, $g \in \mathcal{R}(B)$, to $f \otimes g \in \mathcal{R}(A \times B)$ ⁶ oraz

$$\int_{A \times B} f(x)g(y) dx dy = \left(\int_A f(x) dx\right) \left(\int_B g(y) dy\right).$$

Dowód. Jedynym problemem jest całkowalność $f \otimes g$ na $A \times B$. Możemy założyć, że $A = P$, $B = Q$ są kostkami (ćwiczenie). Ustalmy dowolne podziały $\pi_1 = \{P_1, \dots, P_r\}$ kostki P i $\pi_2 = \{Q_1, \dots, Q_s\}$ kostki Q i niech π będzie jak w dowodzie Twierdzenia 2.2.4. Załóżmy, że $|f|, |g| \leq c$. Wtedy

$$U(f \otimes g, \pi) - L(f \otimes g, \pi) \leq c((U(f, \pi_1) - L(f, \pi_1))|Q| + (U(g, \pi_2) - L(g, \pi_2))|P|)$$

i dalej możemy rozumować standardowo. \square

Twierdzenie 2.2.7 (Całka jako miara objętości). Niech $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{n-1})$, $\alpha, \beta \in \mathcal{C}_b(A)$, $\alpha \leq \beta$, i niech $B := \{(x, y) \in A \times \mathbb{R} : \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$. Wtedy $B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ oraz dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{R}(B)$ takiej, że $f(x, \cdot) \in \mathcal{R}([\alpha(x), \beta(x)])$, $x \in A$ ⁷, funkcja $A \ni x \mapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \in \mathbb{R}$ jest całkowalna oraz

$$\int_B f(x, y) dx dy = \int_A \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy\right) dx.$$

W szczególności, $|B| = \int_A (\beta - \alpha)$.

Dowód. Niech $|\alpha|, |\beta| \leq c$. Zauważmy, że

$$\partial B \subset ((\partial A) \times [-c - c]) \cup \{(x, \alpha(x)) : x \in A\} \cup \{(x, \beta(x)) : x \in A\} =: Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3.$$

Istotnie, niech $B \ni (x_s, y_x) \rightarrow (x_0, y_0) \in \partial B$. Jeśli $x_0 \in \partial A$, to oczywiście $(x_0, y_0) \in Z_1$. Jeśli $x_0 \in \text{int } A$, to, wobec ciągłości funkcji α i β , mamy $\alpha(x_0) \leq y_0 \leq \beta(x_0)$. Ponownie korzystając z ciągłości tych funkcji wnioskujemy, że wykluczone jest, aby $\alpha(x_0) < y_0 < \beta(x_0)$.

Teraz regularność zbioru wynika z Obserwacji 2.1.8 (g) oraz Twierdzenia 2.2.3.

Niech $f_0 : A \times [-c, c] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie standardowym rozszerzeniem funkcji f (poprzez wartości zerowe). Wtedy na podstawie twierdzenia o całkach iterowanych (Twierdzenie 2.2.4) mamy

$$\int_B f(x, y) dx dy = \int_{A \times [-c, c]} f_0(x, y) dy dx = \int_A \left(\int_{[-c, c]} f_0(x, y) dy\right) dx = \int_A \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy\right) dx.$$

\square

Przykład 2.2.8. (a) Obliczmy całkę

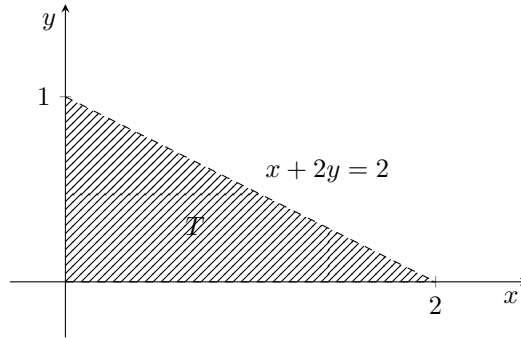
$$I = \int_T (5x^2 - 2xy) dx dy$$

w trójkącie T ograniczonym prostą $x + 2y = 2$ i osiami współrzędnych (Rysunek 7). $T = \{0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1 - x/2\} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$, zatem

$$I = \int_0^2 dx \int_0^{1 - \frac{x}{2}} (5x^2 - 2xy) dy = \int_0^2 dx (5x^2 y - xy^2) \Big|_0^{1 - \frac{x}{2}} = \int_0^2 \left(6x^2 - x - \frac{11}{4}x^3\right) dx = 3.$$

⁶ $(f \otimes g)(x, y) := f(x)g(y)$.

⁷Np. dla $f \in \mathcal{C}_b(B)$.



RYSUNEK 7. Trójkąt T .

Równocześnie $T = \{0 \leq x \leq 2 - 2y, 0 \leq y \leq 1\}$, więc

$$I = \int_0^1 dy \int_0^{2-2y} (5x^2 - 2xy) dx = \int_0^1 dy \left(\frac{5}{3}x^3 - x^2y \right) \Big|_0^{2-2y} = \int_0^1 \frac{4}{3} (10 - 33y + 36y^2 - 13y^3) dy = 3.$$

(b) Obliczymy

$$I = \int_V (x + y)z dx dy dz,$$

gdzie V jest ósemką kuli, tj. $V = \mathbb{B}_3 \cap (\mathbb{R}_+)^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$. Zauważmy, że

$$V = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^3),$$

więc

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x+y)z dz = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{2}(x+y)(1-x^2-y^2) dy = \frac{2}{15}.$$

Twierdzenie 2.2.9 (O zmianie zmiennych w całce Riemanna). Niech $\Phi : U \rightarrow V$ będzie dyfeomorfizmem klasy \mathcal{C}^1 zbiorów otwartych $U, V \subset \mathbb{R}^n$ i niech $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $A \subset\subset U$. Wtedy $\Phi(A) \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{R}(\Phi(A))$ funkcja $(f \circ \Phi) \cdot |\Phi'|$ jest całkowna na A , gdzie $|\Phi'| = |\det[\frac{\partial \Phi_j}{\partial x_k}]_{j,k=1,\dots,n}|$ oznacza moduł wyznacznika macierzy Jacobiego odwzorowania Φ oraz

$$\int_{\Phi(A)} f = \int_A (f \circ \Phi) \cdot |\Phi'|, \quad f \in \mathcal{R}(\Phi(A)).$$

Przykład 2.2.10. Niech $r_1, \dots, r_n > 0$, $\mathbb{E} := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2/r_1^2 + \dots + x_n^2/r_n^2 < 1\}$. Wtedy $|\mathbb{E}| = |\mathbb{B}_n| r_1 \dots r_n$. W szczególności, $|\mathbb{B}(a, r)| = |\mathbb{B}_n| r^n$.

Istotnie, niech $\Phi(x_1, \dots, x_n) := (r_1 x_1, \dots, r_n x_n)$. Wtedy $|\Phi'(x)| = r_1 \dots r_n$, a stąd

$$|\mathbb{E}| = \int_{\mathbb{E}} 1 = \int_{\Phi(\mathbb{B}_n)} 1 = \int_{\mathbb{B}_n} |\Phi'| = \int_{\mathbb{B}_n} r_1 \dots r_n = |\mathbb{B}_n| r_1 \dots r_n.$$

Obserwacja 2.2.11. Można sprawdzić, że $\Phi|_U$ jest dyfeomorfizmem klasy \mathcal{C}^1 na obraz dla następujących transformacji i obszarów ($a, b, c > 0$ oznaczają stałe).

- (a) $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\Phi(r, \varphi) := (ar \cos \varphi, br \sin \varphi)$, $U := \mathbb{R}_{>0} \times (0, 2\pi)$, $|\Phi'(r, \varphi)| = abr$; dla $a = b = 1$ są to tzw. *współrzędne biegunowe*.
- (b) $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\Phi(r, \varphi, z) := (ar \cos \varphi, br \sin \varphi, cz)$, $U := \mathbb{R}_{>0} \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$, $|\Phi'(r, \varphi, z)| = abc r$; dla $a = b = c = 1$ są to tzw. *współrzędne walcowe*.
- (c) $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\Phi(r, \varphi, \theta) := (ar \cos \varphi \cos \theta, br \sin \varphi \cos \theta, cr \sin \theta)$, $U := \mathbb{R}_{>0} \times (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $|\Phi'(r, \varphi, \theta)| = abc r^2 \cos \theta$; dla $a = b = c = 1$ są to tzw. *współrzędne sferyczne*.

Przykład 2.2.12. Objętość kuli \mathbb{B}_3 wyraża się całką

$$|\mathbb{B}_3| = 2 \int_{\mathbb{B}_2} \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy$$

⁸Tzn. Φ jest bijekcją klasy \mathcal{C}^1 taką, że Φ^{-1} też jest klasy \mathcal{C}^1 .

Stosując współrzędne biegunowe otrzymamy

$$\begin{aligned} |\mathbb{B}_3| &= 2 \int_{(0,1) \times (0,2\pi)} r \sqrt{1-r^2} dr d\varphi = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r \sqrt{1-r^2} dr \\ &= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \left(-\frac{1}{3}(1-r^2)^{3/2} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4}{3}\pi. \end{aligned}$$

W szczególności, $|\mathbb{B}_3(r)| = \frac{4}{3}\pi r^3$.

2.3. Całki krzywoliniowe. Będziemy kontynuować rozważania z podrozdziału traktującego o długości krzywych. Na wstępie przypomnijmy twierdzenie wyrażające długość krzywej za pomocą całki Riemanna.

Twierdzenie 2.3.1. *Dowolna droga $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest prostowalna⁹ oraz*

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt^{10}.$$

Definicja 2.3.2. Niech $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie krzywą i niech $f : \gamma^* \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją ograniczoną¹¹ Dla podziału $\pi = (t_0, \dots, t_m)$ przedziału $[a, b]$ i dla punktów pośrednich $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ niech

$$M(f, \gamma, \pi, \xi) := \sum_{j=1}^m f(\gamma(\xi_j)) \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|.$$

Mówimy, że funkcja f jest *całkowalna wzdłuż krzywej γ* ($f \in \mathcal{R}(\gamma)$), jeśli istnieje $c \in \mathbb{R}$ takie, że dowolnego normalnego ciągu podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ przedziału $[a, b]$ oraz dla dowolnego wyboru punktów pośrednich $(\xi_k)_{k=1}^\infty$ mamy $M(f, \gamma, \pi_k, \xi_k) \rightarrow c$. Liczbę c nazywamy *całką krzywoliniową niezorientowaną z funkcji f po krzywej γ* i oznaczamy $c =: \int_\gamma f dl$.

Obserwacja 2.3.3. (a) Całkowalność i całka są niezależne od parametryzacji krzywej.

Istotnie, wystarczy tylko zauważyć, że jeśli $\tau : [c, d] \rightarrow [a, b]$ jest ściśle rosnącą bijekcją, to jest odwzorowanie jednostajnie ciągłe, a w szczególności obraz normalnego ciągu podziałów jest normalnym ciągiem podziałów.

(b) γ jest prostowalna wtedy i tylko wtedy, gdy $1 \in \mathcal{R}(\gamma)$. Ponadto, $L(\gamma) = \int_\gamma 1 dl$.

(c) $f \in \mathcal{R}(\gamma) \iff f \in \mathcal{R}(\ominus\gamma)$ ¹². Ponadto, $\int_{\ominus\gamma} f dl = \int_\gamma f dl$ ¹³.

(d) Jeśli $\gamma_j : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2$, są krzywymi takimi, że $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ oraz $f : \gamma_1^* \cup \gamma_2^* \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją taką, że $f|_{\gamma_j^*} \in \mathcal{R}(\gamma_j)$, $j = 1, 2$, to $f \in \mathcal{R}(\gamma_1 \oplus \gamma_2)$ ¹⁴ oraz

$$\int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} f dl = \int_{\gamma_1} f dl + \int_{\gamma_2} f dl.$$

Istotnie, wystarczy rozważyć normalny ciąg podziałów będący „sumą” normalnych ciągów podziałów dla poszczególnych krzywych i udowodnić, że w definicji całki krzywoliniowej niezorientowanej możemy brać tylko takie normalne ciągi podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$, dla których $\tilde{t} \in \pi_k$, $k \geq 1$, gdzie \tilde{t} jest ustalonym punktem z $(0, 1)$.

Rozważmy bowiem dowolny podział $\pi = (t_0, \dots, t_m)$ i ciąg punktów pośrednich $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$. Przypuśćmy, że $\tilde{t} \in (t_{s-1}, t_s)$. Niech $\pi' := (t_1, \dots, t_{s-1}, \tilde{t}, t_s, \dots, t_m)$ i niech ξ' będzie uzupełnionym ciągiem punktów pośrednich (zachowujemy wszystkie dotychczasowe punkty pośrednie). Wtedy (por. dowód lematu z podrozdziału o długości krzywych) mamy

$$\begin{aligned} |M(f, \gamma, \pi, \xi) - M(f, \gamma, \pi', \xi')| &= |f(\xi_s) \|\gamma(t_s) - \gamma(t_{s-1})\| - f(\xi'_s) \|\gamma(\tilde{t}) - \gamma(t_{s-1})\| - f(\xi'_{s+1}) \|\gamma(t_s) - \gamma(\tilde{t})\|| \\ &\leq 3(\sup_{\gamma^*} |f|) \omega_\gamma(\text{diam } \pi); \end{aligned}$$

dalej rozumujemy standardowo.

(e) Jeśli $f, g \in \mathcal{R}(\gamma)$, $a, b \in \mathbb{R}$, to $af + bg \in \mathcal{R}(\gamma)$ oraz $\int_\gamma (af + bg) dl = a \int_\gamma f dl + b \int_\gamma g dl$.

⁹Względem odległości euklidesowej.

¹⁰Tu i dalej $\|\cdot\|$ oznacza normę euklidesową w \mathbb{R}^n .

¹¹Przypomnijmy, że $\gamma^* := \gamma([a, b])$ jest obrazem geometrycznym krzywej γ .

¹²Przypomnijmy, że dla krzywej $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ definiujemy $(\ominus\gamma)(t) := \gamma(1-t)$.

¹³Uzasadnia to nazwę „całka niezorientowana”.

¹⁴Przypomnijmy, że $(\gamma_1 \oplus \gamma_2)(t) := \gamma_1(2t)$ dla $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ i $(\gamma_1 \oplus \gamma_2)(t) := \gamma_2(2t-1)$ dla $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$.

Twierdzenie 2.3.4. Niech $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie drogą. Wtedy $\mathcal{C}(\gamma^*) \subset \mathcal{R}(\gamma)$ oraz

$$\int_{\gamma} f \, dl = \int_0^1 f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt, \quad f \in \mathcal{C}(\gamma^*)^{15}.$$

Dowód. Możemy założyć, że γ jest klasy \mathcal{C}^1 . Ustalmy podział $\pi = (t_0, \dots, t_m)$ oraz punkty pośrednie $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$. Wtedy na podstawie twierdzenia Lagrange'a o wartościach średnich

$$\begin{aligned} |M(f, \gamma, \pi, \xi) - M((f \circ \gamma)\|\gamma'\|, \pi, \xi)| &\leq \sum_{j=1}^m |f(\gamma(\xi_j))| \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) - \gamma'(\xi_j)(t_j - t_{j-1})\| \\ &\leq (\max_{\gamma^*} |f|) \sum_{j=1}^m \sup\{\|\gamma'(\eta) - \gamma'(\xi_j)\| : \eta \in [t_{j-1}, t_j]\} (t_j - t_{j-1}) \leq (\max_{\gamma^*} |f|) \omega_{\gamma'}(\text{diam } \pi); \end{aligned}$$

dalej standardowo. □

Definicja 2.3.5. Niech $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie krzywą i niech $V = (V_1, \dots, V_n) : \gamma^* \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie dowolnym odwzorowaniem (*pojem wktorowym*) ograniczonym. Dla podziału $\pi = (t_0, \dots, t_m)$ przedziału $[a, b]$ i dla punktów pośrednich $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ niech

$$M(V, \gamma, \pi, \xi) := \sum_{j=1}^m \langle V(\gamma(\xi_j)), \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) \rangle^{16}.$$

Mówimy, że pole V jest *całkowalne wzdłuż krzywej* γ , jeśli istnieje $c \in \mathbb{R}$ takie, że dowolnego normalnego ciągu podziałów $(\pi_k)_{k=1}^{\infty}$ przedziału $[a, b]$ oraz dla dowolnego wyboru punktów pośrednich $(\xi_k)_{k=1}^{\infty}$ mamy $M(V, \gamma, \pi_k, \xi_k) \rightarrow c$. Liczbę c nazywamy *całką krzywoliniową zorientowaną z pola V po krzywej γ* i oznaczamy $c =: \int_{\gamma} V \, dx = \int_{\gamma} V_1 \, dx_1 + \dots + V_n \, dx_n$.

Obserwacja 2.3.6. (a) Całkowalność i całka są niezależne od parametryzacji krzywej.

(b) Pole V jest całkowalne na γ wtedy i tylko wtedy gdy jest całkowalne na $\ominus\gamma$. Ponadto,

$$\int_{\ominus\gamma} V \, dx = - \int_{\gamma} V \, dx^{17}.$$

(c) Jeśli $\gamma_j : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2$, są krzywymi takimi, że $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ oraz $V : \gamma_1^* \cup \gamma_2^* \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest odwzorowaniem takim, że V jest całkowalne osobno na γ_1 i γ_2 , to V jest całkowalne na $\gamma_1 \oplus \gamma_2$ oraz

$$\int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} V \, dx = \int_{\gamma_1} V \, dx + \int_{\gamma_2} V \, dx.$$

(d) Jeśli V, W są polami całkowalnymi na γ , $a, b \in \mathbb{R}$, to $aV + bW$ jest polem całkowalnym na γ oraz $\int_{\gamma} (aV + bW) \, dx = a \int_{\gamma} V \, dx + b \int_{\gamma} W \, dx$.

Twierdzenie 2.3.7. Niech $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie drogą. Wtedy każde pole ciągłe V jest całkowalne na γ oraz

$$\int_{\gamma} V \, dx = \int_0^1 \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt^{18}.$$

Dowód. Możemy założyć, że γ jest klasy \mathcal{C}^1 . Ustalmy podział $\pi = (t_0, \dots, t_m)$ oraz punkty pośrednie $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$. Wtedy wobec nierówności Schwarz'a¹⁹

$$\begin{aligned} |M(V, \gamma, \pi, \xi) - M(\langle V \circ \gamma, \gamma' \rangle, \pi, \xi)| &\leq \sum_{j=1}^m |\langle V(\gamma(\xi_j)), \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) - \gamma'(\xi_j)(t_j - t_{j-1}) \rangle| \\ &\leq \sum_{j=1}^m \|V(\gamma(\xi_j))\| \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) - \gamma'(\xi_j)(t_j - t_{j-1})\| \leq (\max_{\gamma^*} \|V\|) \omega_{\gamma'}(\text{diam } \pi); \end{aligned}$$

¹⁵Zauważmy, że całka po prawej stronie istnieje. Twierdzenie daje praktyczny sposób obliczania całek niezorientowanych.

¹⁶ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ oznacza standardowy iloczyn skalarny w \mathbb{R}^n , $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j$.

¹⁷Uzasadnia to nazwę „całka zorientowana”.

¹⁸Zauważmy, że całka po prawej stronie istnieje. Twierdzenie daje praktyczny sposób obliczania całek zorientowanych.

¹⁹Przypomnijmy *nierówność Schwarz'a*: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$, tj.

$$\left(\sum_{j=1}^n x_j y_j \right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n y_j^2 \right), \quad x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

dalej standardowo. □

Twierdzenie 2.3.8 (Niezależność całki krzywoliniowej od drogi całkowania). *Niech $D \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem, $V \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}^n)$. Wtedy następujące warunki są równoważne*

- (i) dla dowolnej drogi $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$ całka $\int_{\gamma} V dx$ zależy jedynie od końców tej drogi;
- (ii) pole V jest potencjalne, tzn. istnieje funkcja $\Phi \in \mathcal{C}^1(D)$ (zwana potencjałem) taka, że

$$V_j = \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Uwaga 2.3.9. Warunek (i) pozwala zdefiniować dla $A, B \in D$ całkę $\int_A^B V dx$ rozumianą jako całka po dowolnej drodze łączącej A i B wewnątrz obszaru D . W szczególności, całka po dowolnej drodze zamkniętej jest równa zero. Zauważmy, że potencjał pola jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do stałej.

Dowód. (ii) \implies (i). Na podstawie Twierdzenia 2.3.7 dostajemy

$$\int_{\gamma} V dx = \int_0^1 \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_0^1 (\Phi \circ \gamma)'(t) dt = \Phi(\gamma(1)) - \Phi(\gamma(0)).$$

(i) \implies (ii). Ustalmy $A \in D$ i niech

$$\Phi(x) := \int_A^x V dx, \quad x \in D.$$

Wtedy dla $a \in D$ i dla $j \in \{1, \dots, n\}$, korzystając z niezależności całki od drogi, mamy

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Phi(a + he_j) - \Phi(a)}{h} - V_j(a) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_{[a, a+he_j]} V dx - V_j(a) \right| = \left| \int_0^1 V_j(a + the_j) dt - V_j(a) \right| \\ &\leq \max\{|V_j(a + the_j) - V_j(a)| : 0 \leq t \leq 1\} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

□