Informacje

Zadania, które zostały już rozwiązane, mają kółka obok swych numerów zamalowane na czarno.

Jeśli w zadaniu występują podpunkty (a), (b), itd. (a nie (i), (ii), itd.), każdy podpunkt tego zadania to osobne zadanie.

Zestaw 1

1.1.○ (3) Zbadać ciągłość poniższych odwzorowań liniowych i obliczyć normę tych, które okażą się ciągłe:

- (a)○ $C([0,1]) \ni f \mapsto \{\frac{1}{n} f(\frac{1}{n})\}_{n=1}^{\infty} \in c_0$, gdy w dziedzinie rozważamy normę $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$, a ciało jest rzeczywiste;
- (b)○ $C([0,1]) \ni f \mapsto \int_0^{1/3} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{2/3}^1 f(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$;
- (c)○ $C([0,1]) \ni f \mapsto \int_0^{1/5} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{2/5}^{3/5} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{4/5}^1 f(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$;
- (d)○ $\ell^2_{\mathbb{C}} \ni \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{(3i)^n} \in \mathbb{C}$;
- (e)○ $\ell^2_{\mathbb{C}} \ni (x_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ix_{2n}}{2^n} \in \mathbb{C}$;
- (f)○ $\ell^2_{\mathbb{C}} \ni (x_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ix_{2n}}{3^n} \in \mathbb{C}$;
- (g)○ $c_0 \ni (x_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{(-3i)^n} \in \mathbb{C}$, gdy przestrzeń c_0 rozważamy nad $\mathbb{C}$;
- (h)○ $C_b(\mathbb{R}) \ni f \mapsto (f(n)/2^n)_{n=0}^{\infty} \in \ell_1$, gdzie $C_b(\mathbb{R})$ to przestrzeń wszystkich rzeczywistych ograniczonych funkcji ciągłych na $\mathbb{R}$ wyposażona w normę supremum;
- (i)○ $\ell_\infty \ni (x_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto (\frac{x_{n+1}}{2^n})_{n=0}^{\infty} \in c_0$;
- (j)○ $\ell^5_{\mathbb{C}} \ni (x_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ix_{2n}}{3^n} \in \mathbb{C}$.

1.2.● (3) Niech x i y będą wektorami w zespolonej przestrzeni Hilberta. Wiedząc, że $\|x+iy\| = \|x\| = \|x-2iy\| = 2$, wyznaczyć $\|y\|$.

1.3.○ (3) Niech x i y będą wektorami w zespolonej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ o normie równej 1. Wykazać, że $\langle 2x+y, 2x-y\rangle = 3+4i$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y = ix$.

1.4.○ (3) O dwóch wektorach x i y w rzeczywistej przestrzeni unitarnej wiadomo, że $\|x+2y\| = 10\sqrt{2}$, $\|2x-y\| = 10$ oraz $\|x-y\| = 2\sqrt{5}$. Obliczyć $\|x\|$ oraz $\|y\|$.

1.5.● (3) Niech x i y będą wektorami w zespolonej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ o normie równej 1. Wykazać, że $\langle 3x+iy, 3x-iy\rangle = 8-6i$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y = -x$.

1.6.○ (3) O liczbie rzeczywistej α oraz dwóch wektorach x i y w rzeczywistej przestrzeni unitarnej wiadomo, że $\|x+\alpha y\| = 5\sqrt{2}$, $\|2x-y\| = 5$, $\|x-y\| = \sqrt{5}$ oraz $\|x\| = \sqrt{10}$. Obliczyć α.

1.7.○ (4) Zbadać ciągłość poniższych odwzorowań liniowych i obliczyć normę tych, które okażą się ciągłe:

- (a)● $C([0,1],\mathbb{R}) \ni f \mapsto \int_0^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t}} \in \mathbb{R}$, gdy przestrzeń $C([0,1],\mathbb{R})$ wyposażona jest w normę $\|f\| = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$ $(f \in C([0,1],\mathbb{R})$;
- (b)○ $\mathbb{R}[X] \ni p \mapsto p'(0)\cdot \sin \in C([0,1])$, gdzie obie przestrzenie są wyposażone w standardową normę przestrzeni $C([0,1])$;

(c)● $C^1([0,1]) \ni f \mapsto f' \in C([0,1])$, gdzie obie przestrzenie są wyposażone w standardową normę przestrzeni $C([0,1])$;

(d)● $c_{00} \ni (x_n)_{n=1}^\infty \mapsto \sum_{n=1}^\infty \frac{x_n}{\sqrt[3]{n^2}} \in \mathbb{R}$ względem normy $\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_3 = (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^3)^{1/3}$;

(e)● $c_{00} \ni (x_n)_{n=1}^\infty \mapsto \sum_{n=1}^\infty \frac{x_n}{\sqrt[4]{n^3}} \in \mathbb{R}$ względem normy $\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_4 = (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^4)^{1/4}$.

1.8.● (4) Niech funkcja $p_k\colon\ \ell_1 \to [0,\infty)$, $k \in \mathbb{N}_0$, będzie dana wzorem $p_k((x_n)_{n=0}^\infty) = \Big||x_0| + (-1)^k|x_k|\Big|$. Rozstrzygnąć, dla jakich indeksów $k \in \mathbb{N}_0$ odwzorowanie p_k jest seminormą. Czy rodzina wszystkich tych funkcji p_k, które są seminormami, jest rozdzielająca na ℓ_1?

1.9.○ (4) Która z poniższych norm pochodzi od iloczynu skalarnego na ℓ_2? (Poniżej $\|\cdot\|_2$ oznacza standardową normę na ℓ_2).

(a)● $\|(x_n)_{n=1}^\infty\| = (\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_2^4 + |2x_2 - 3x_5|^4)^{1/4}$;

(b)○ $\|(x_n)_{n=1}^\infty\| = (\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_2^2 + |7x_4 - 3x_8|^2)^{1/2}$;

(c)○ $\|(x_n)_{n=1}^\infty\| = (\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_2^6 + |2x_{20} - 5x_{15}|^6)^{1/6}$;

(d)● $\|(x_n)_{n=1}^\infty\| = (\|(x_n + x_{n+1})_{n=1}^\infty\|_2^2 + |4x_7 - 5x_4|^2)^{1/2}$.

W przypadku, gdy norma pochodzi od iloczynu skalarnego, podać „zgrabny” wzór na ów iloczyn skalarny.

1.10.● (4) Podać wzór (w najprostszej postaci) na iloczyn skalarny, od którego pochodzi norma

(i) $\|f\| = \sqrt{\int_0^1 e^{-3t}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t + |f(1/3)|^2}$;

(ii) $\|f\| = \sqrt{\int_0^1 e^{3t}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t + |f(1/2)|^2}$;

(iii) $\|f\| = \sqrt{\int_0^1 e^{-4t}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t + \sum_{n=0}^\infty 2^{-n}|f(2^{-n})|^2}$

na zespolonej przestrzeni wektorowej $C([0,1])$.

1.11.● (5) Na rzeczywistej przestrzeni ℓ_2 określona jest norma $\|\cdot\|_a$ dana wzorem:

$$\|(x_n)_{n=0}^\infty\|_a = \left(\sum_{n=0}^\infty x_{2n}^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{n=0}^\infty x_{2n+1}^2\right)^{1/2}.$$

Uzasadnić, że ta norma nie jest zadana przez żaden iloczyn skalarny. Czy podprzestrzeń E generowana przez wektory e_{4k}, $k = 0, 1, \ldots, 2024$, jest przestrzenią unitarną względem tej normy? Jeśli tak, podać wzór na iloczyn skalarny, który generuje normę $\|\cdot\|_a$ na E. (Ciąg e_n ma na n-tym miejscu 1, a w pozostałych miejscach 0. Miejsca numerowane są od zera).

1.12.● (5) Na rzeczywistej przestrzeni $C([-1,1])$ rozważamy normę $\|\cdot\|_0$, taką że

$$\|f\|_0^2 = \max\left(\int_{-1}^0 |f(t)|^2\,\mathrm{d}t, \int_0^1 |f(t)|^2\,\mathrm{d}t\right).$$

Uzasadnić, że ta norma nie jest zadana przez żaden iloczyn skalarny. Podać „zgrabny” wzór na iloczyn skalarny $\langle\cdot,-\rangle_*$ na $C([-1,1])$, dla którego $\|f\|_0^2 = \langle f,f\rangle_*$ dla każdej funkcji $f \in C([-1,1])$, która jest stale równa 0 na zbiorze $[-1,0]$ lub $[0,1]$.

1.13.● (5) Niech X będzie przestrzenią unormowaną nad ciałem $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$. Wykazać, że wszystkie układy

$$(u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{2024})$$

wektorów liniowo niezależnych w X tworzą zbiór otwarty w X^{2024}.

Zestaw 2

2.1.● (4) Niech przestrzeń $X = C([0,1])$ będzie wyposażona w normę $\|\cdot\|_1$, czyli:

$$\|f\| = \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Sprawdzić ciągłość funkcjonału liniowego (i obliczyć jego normę, gdy okaże się ciągły) $\phi\colon X \ni f \mapsto f(\frac{1}{2}) \in \mathbb{R}$.

2.2.● (4) Niech przestrzeń X wszystkich wielomianów jednej zmiennej będzie wyposażona w normę:

$$\|p\| = \sup_{x\in[0,1]} |p(x)|.$$

Sprawdzić ciągłość funkcjonału liniowego (i obliczyć jego normę, gdy okaże się ciągły) $\psi_t\colon X \ni p \mapsto p(t) \in \mathbb{R}$ w zależności od parametru $t \in \mathbb{R}$.

2.3.● (5) Niech przestrzeń $X = C^1([0,1])$ będzie wyposażona w normę:

$$\|f\| = \|f\|_1 + \|f'\|_1 = \int_0^1 (|f(t)| + |f'(t)|)\,\mathrm{d}t.$$

Sprawdzić ciągłość funkcjonału liniowego (i obliczyć jego normę, gdy okaże się ciągły) $\phi\colon X \ni f \mapsto f(\frac{1}{2}) \in \mathbb{R}$.

2.4.○ (5) Niech K będzie nieskończonym podzbiorem zwartym prostej $\mathbb{R}$. Przestrzeń X wszystkich wielomianów jednej zmiennej wyposażamy w normę:

$$\|p\| = \sup_{x\in K} |p(x)|.$$

Sprawdzić ciągłość funkcjonału liniowego (i obliczyć jego normę, gdy okaże się ciągły) $\psi_t\colon X \ni p \mapsto p(t) \in \mathbb{R}$ w zależności od parametru $t \in \mathbb{R}$.

2.5.○ (4) Niech p będzie dowolną wielkością z $[1,\infty]$ i niech $(a_n)_{n=1}^\infty$ będzie dowolnym ciągiem o wyrazach w $\mathbb{K}$. Sprawdzić ciągłość funkcjonału liniowego (i obliczyć jego normę, gdy okaże się ciągły)

$$\gamma\colon c_{00} \ni (x_n)_{n=1}^\infty \mapsto \sum_{n=1}^\infty a_n x_n \in \mathbb{K},$$

gdy w przestrzeni c_{00} rozważamy normę $\|\cdot\|_p$.

2.6.○** (5) Niech A, B, C będą liczbami rzeczywistymi, takimi że $A \leqslant C \leqslant B$ oraz $A < B$. Niech przestrzeń $X = C^1([A,B])$ będzie wyposażona w normę:

$$\|f\| = \|f\|_1 + \|f'\|_1 = \int_A^B (|f(t)| + |f'(t)|)\,\mathrm{d}t.$$

Wyznaczyć normę funkcjonału liniowego $X \ni f \mapsto f(C) \in \mathbb{K}$. (Wynik przedstawić w postaci $\frac{1}{|p(A,B,C)|+|q(A,B,C)|+|r(A,B,C)|}$, gdzie p, q i r to wielomiany trzech zmiennych o współczynnikach wymiernych, stopnia 1).

2.7.○ (5) Niech K będzie nieskończonym podzbiorem zwartym prostej $\mathbb{R}$. Przestrzeń X wszystkich wielomianów jednej zmiennej wyposażamy w normę:

$$\|p\| = \sup_{x\in K} |p(x)|.$$

Pokazać, że odwzorowanie liniowe $\alpha\colon X \ni p \mapsto \int_0^1 p(t)\,\mathrm{d}t$ jest nieciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy $[0,1] \not\subset K$.

2.8.○ (5) Niech $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych. Na przestrzeni $\mathcal{P} = \mathbb{R}[x]$ wszystkich rzeczywistych wielomianów jednej zmiennej wprowadzamy rodzinę seminorm:

$$q_n(p) = |p^{(n)}(x_n)| \qquad (n \geqslant 0).$$

Sprawdzić, że $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ to rozdzielająca rodzina seminorm na $\mathcal{P}$ oraz że jest minimalną rodziną o tej własności.

2.9.○ (5) Niech u i v będą wektorami przestrzeni Hilberta H nad ciałem $\mathbb{K}$. Załóżmy, że $\|u - 2v\| = \|v + 2u\| = 5$. Dla jakich skalarów $p \in \mathbb{K}$ możemy na podstawie powyższych danych jednoznacznie wyznaczyć $\|u + pv\|$?

2.10*.● (5) Niech X będzie przestrzenią Banacha, a E i F dwoma jej domkniętymi podprzestrzeniami wektorowymi, takimi że $E \cap F = \{0\}$ i $X = E + F$. Niech $P\colon X \to X$ będzie rzutem na przestrzeń F w kierunku przestrzeni E, tzn. $P(e + f) = f$ dla dowolnych $e \in E$ i $f \in F$. Wykazać, że wtedy P jest odwzorowaniem ciągłym.

2.11*.○ (5) ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) Niech $T\colon C([0,1]) \to C([0,1])$ będzie ciągłym odzworowaniem liniowym, takim że $T(f)$ jest funkcją klasy C^1 dla dowolnej funkcji $f \in C([0,1])$. Wykazać, że wtedy także odwzorowanie $C([0,1]) \ni f \mapsto (T(f))' \in C([0,1])$ jest ciągłe. (Tutaj $(T(f))'$ to funkcja pochodna funkcji $T(f)$).

2.12*.○ (5) Niech X będzie przestrzenią Banacha, której elementami są (pewne) funkcje ciągłe o wartościach w ciele, określone na wspólnym niepustym zbiorze $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (przy czym w X działania algebraiczne są naturalne). Wykazać, że jeśli zbiór Ω_c wszystkich punktów $\omega \in \Omega$, dla których funkcjonał $e_\omega\colon X \ni f \mapsto f(\omega) \in \mathbb{K}$ jest ciągły, jest gęstym podzbiorem przestrzeni Ω, to:

(i) $\Omega = \Omega_c$;

(ii) dla dowolnego niepustego zbioru zwartego $K \subset \Omega$ istnieje stała $M_K > 0$, taka że $\|f\big|_K\|_{\sup} \leqslant M_K\|f\|$ dla wszelkich $f \in X$.

2.13**.○ (5) Załóżmy, że $u, u_1, u_2, \ldots : X \to \mathbb{K}$ to funkcjonały liniowe na przestrzeni Banacha X (nad ciałem $\mathbb{K}$), takie że:

- odwzorowania $u_1, u_2, \ldots$ są ciągłe;
- $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|^2 < \infty$ dla dowolnego wektora $x \in X$;
- $|u(x)|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|^2$ dla wszelkich $x \in X$.

Wykazać, że wtedy odwzorowanie u jest ciągłe oraz istnieją liczby $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \in \mathbb{K}$, takie że $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \leqslant 1$ oraz $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n(x)$ dla dowolnego wektora $x \in X$.

2.14*.○ (5) Niech H będzie przestrzenią Hilberta, a $u, v\colon H \to H$ dowolnymi funkcjami (niekoniecznie liniowymi), które spełniają następującą tożsamość:

$$\langle u(x), y\rangle_H = \langle x, v(y)\rangle_H \qquad (x, y \in H).$$

Wykazać, że wtedy obie funkcje u i v są liniowe i ciągłe.

2.15.○ (5) Niech $T\colon X \to Y$ będzie ciągłą suriekcją liniową między przestrzeniami Banacha X i Y. Wykazać, że dla dowolnego ciągu $y_1, y_2, \ldots \in Y$ zbieżnego do zera istnieje ciąg $x_1, x_2, \ldots \in X$ zbieżny do zera, taki że $u(x_n) = y_n$ dla wszelkich $n > 0$.

Zestaw 3

3.1.○ (4) Wykazać, że w przestrzeni Hilberta $H = L^2([0,1])$ istnieje dokładnie jeden układ ortonormalny $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$, w którym p_n jest wielomianem stopnia co najwyżej n o dodatnim współczynniku wiodącym. Wykazać ponadto, że stopień wielomianu p_n to dokładnie n.

3.2.● (3) Wykazać, że jeśli $A, B\colon H \to H$ to odwzorowania liniowe określone na zespolonej przestrzeni unitarnej H, takie że $\langle Ax, x\rangle_H = \langle Bx, x\rangle_H$ dla wszelkich wektorów $x \in H$, to $B = A$.

3.3.● (3) Podać przykład niezerowego odzworowania liniowego $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, takiego że $\langle Ax, x\rangle_{\mathbb{R}^2} = 0$ dla wszelkich wektorów $x \in \mathbb{R}^2$.

3.4.○ (3) Wykazać, że (niekoniecznie ciągłe) odzworowanie liniowe $P\colon H \to H$ (gdzie H to przestrzeń Hilberta) jest projekcją ortogonalną wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{R}(P) \perp \mathcal{N}(P)$ oraz $P^2 = P$. (Tutaj $\mathcal{N}(P)$ i $\mathcal{R}(P)$ to, odpowiednio, jądro i zbiór wartości odwzorowania P).

3.5.○ (4) Niech P i Q będą dwiema projekcjami ortogonalnymi na przestrzeni Hilberta H (nad ciałem $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$). Wykazać, że:

- **(a)●** $\langle Px, y\rangle_H = \langle x, Py\rangle_H$ oraz $\langle Px, x\rangle_H \geqslant 0$ dla wszelkich $x, y \in H$.
- **(b)●** $PQ = 0 \iff QP = 0$.
- **(c)○** Jeśli $PQ = 0$, to operator $P + Q$ jest projekcją ortogonalną.

3.6.○ (4) Niech $T\colon V \to E$ będzie ciągłym operatorem liniowym określonym na podprzestrzeni liniowej V przestrzeni unormowanej X o wartościach w przestrzeni Banacha E. Wykazać, że T przedłuża się jednoznacznie do ciągłego operatora liniowego $\bar{T}\colon \overline{V} \to E$. Ponadto, $\|\bar{T}\| = \|T\|$.

3.7.○ (4) Wykazać, że każdy ciągły operator liniowy $T\colon V \to E$ określony na podprzestrzeni liniowej V przestrzeni Hilberta H i o wartościach w przestrzeni Banacha E przedłuża się do ciągłego operatora liniowego $S\colon H \to E$, takiego że $\|S\| = \|T\|$.

3.8.○ (4) Niech V będzie domkniętą podprzestrzenią liniową pewnej przestrzeni Hilberta H. Wykazać, że dla dowolnego ciągłego funkcjonału liniowego $\phi\colon V \to \mathbb{K}$ istnieje dokładnie jeden ciągły funkcjonał liniowy $\xi\colon H \to \mathbb{K}$, taki że $\xi\big|_V = \phi$ oraz $\|\xi\| = \|\phi\|$.

3.9.○ (5) Niech V będzie domkniętą właściwą podprzestrzenią liniową pewnej przestrzeni Hilberta H. Wykazać, że dla dowolnego ciągłego funkcjonału liniowego $\phi\colon V \to \mathbb{K}$ i dowolnej liczby $c > \|\phi\|$ istnieją co najmniej dwa ciągłe funkcjonały liniowe $\xi\colon H \to \mathbb{K}$, takie że $\xi\big|_V = \phi$ oraz $\|\xi\| = c$.

3.10.● (4) Podać przykład funkcjonału liniowego $\phi\colon V \to \mathbb{R}$ (gdzie $V \subset \mathbb{R}^2$) oraz dwóch różnych jego przedłużeń $\alpha, \beta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ do funkcjonałów liniowych, takich że $\|\alpha\| = \|\beta\| = \|\phi\|$ względem normy $\|\cdot\|_\infty$ na $\mathbb{R}^2$.

3.11.○ (5) Wykazać, że w każdej nieskończenie wymiarowej ośrodkowej przestrzeni unormowanej istnieje przeliczalny zbiór gęsty i zarazem liniowo niezależny.

3.12*.○ (5) Wykazać, że na każdej nieskończenie wymiarowej przestrzeni unormowanej istnieje nieciągły funkcjonał liniowy.

3.13.○ (5) W zespolonej przestrzeni Hilberta $H = L^2([0,1])$ rozważamy następujący operator liniowy $V\colon H \to H$:

$$(Vf)(x) \overset{\text{def}}{=} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (f \in H,\ x \in [0,1]).$$

Wykazać, że V jest operatorem ograniczonym bez zespolonych wartości własnych.

Zestaw 4

4.1.○ (4) Niech X będzie przestrzenią Banacha. Wykazać, że każdy $*$-słabo zbieżny ciąg w X' jest ograniczony (w normie).

4.2.○ (5) Niech X będzie przestrzenią Banacha. Wykazać, że każdy $*$-słabo zwarty zbiór w X' jest ograniczony (w normie).

4.3.○ (5) Podać przykład przestrzeni unormowanej X oraz zbioru $*$-słabo zwartego w X', który nie jest ograniczony (w normie).

4.4*.○ (5) Udowodnić, że każdy ciąg słabo zbieżny w ℓ_1 jest zbieżny w normie.

4.5.○ (3) Podać przykład ciągu słabo zbieżnego w ℓ_2, który nie jest zbieżny w normie.

4.6.○ (5) Udowodnić, że zbiór punktów ekstremalnych dowolnego zwartego wypukłego podzbioru płaszczyzny jest zwarty.

4.7.○ (4) Uzasadnić, że słaba topologia na skończenie wymiarowej przestrzeni unormowanej pokrywa się z topologią normy.

4.8*.○ (5) Wykazać, że na dowolnej skończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej (nad $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$) istnieje tylko jedna topologia, która czyni tę przestrzeń PLT.

4.9.○ (5) Niech p będzie liczbą rzeczywistą, taką że $0 < p < 1$. Dla ciągu liczbowego $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$ niech $d_p(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \in [0, \infty]$. Rozważamy zbiór

$$\ell_p \stackrel{\text{def}}{=} \{x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{K} \colon\ d_p(x) < \infty\}.$$

Wykazać, że:

(i) ℓ_p to przestrzeń wektorowa (z naturalnymi działaniami),

(ii) funkcja $D_p \colon \ell_p \times \ell_p \ni (x, y) \mapsto d_p(x - y) \in \mathbb{R}_+$ to metryka na ℓ_p,

(iii) (ℓ_p, D_p) to PLM,

(iv) ciągłe funkcjonały liniowe na (ℓ_p, D_p) rozdzielają punkty w ℓ_p,

(v) przestrzeń (ℓ_p, D_p) **NIE jest** lokalnie wypukła.

4.10*.○ (5) Niech L oznacza przestrzeń wektorową wszystkich funkcji borelowskich $u \colon [0, 1] \to \mathbb{K}$, rozpatrywanych z dokładnością do równości prawie wszędzie (względem miary Lebesgue'a na $[0, 1]$), tzn. funkcje równe prawie wszędzie są uznawane za równe w L. Na przestrzeni L określamy funkcję

$$\rho(u) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 \frac{|u(t)|}{1 + |u(t)|}\, \mathrm{d}t \qquad (u \in L).$$

Wykazać, że:

(i) Funkcja $\varrho \colon L \times L \ni (u, v) \mapsto \rho(u - v) \in \mathbb{R}_+$ jest metryką na L.

(ii) (L, ϱ) to PLM.

(iii) Jedynym ciągłym funkcjonałem liniowym na (L, ϱ) jest funkcja stale równa zero.

4.11.○ (4) Niech X będzie przestrzenią unormowaną. Uzasadnić, że każdy $*$-słabo ciągły funkcjonał liniowy na X' jest postaci $\phi \mapsto \phi(a)$, gdzie $a \in X$.

4.12.○ (4) Wykazać, że dla podprzestrzeni liniowej E przestrzeni X' dualnej do przestrzeni unormowanej X następujące warunki są równoważne:

(i) zbiór E jest gęsty w X' w $*$-słabej topologii,

(ii) zbiór E rozdziela punkty przestrzeni X, tzn. dla dowolnego niezerowego wektora $x \in X$ istnieje funkcjonał $\phi \in E$, taki że $\phi(x) \neq 0$.

4.13.○ (4) Scharakteryzować (w możliwie najprostszy sposób) ciągi słabo zbieżne w przestrzeni ℓ_p dla $1 < p < \infty$.
Wskazówka: Ciągi słabo zbieżne są ograniczone.

4.14.○ (4) Niech $\mathfrak{M}$ będzie σ-algebrą na pewnym zbiorze Ω. Oznaczmy przez P zbiór wszystkich probabilistycznych miar $m\colon \mathfrak{M} \to [0,1]$. Wykazać, że P jest zbiorem wypukłym (w przestrzeni wektorowej wszystkich funkcji $\mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ z naturalnymi działaniami) oraz że miara $m \in P$ jest punktem ekstremalnym zbioru P wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu(A) \in \{0,1\}$ dla dowolnego zbioru $A \in \mathfrak{M}$.

4.15.○ (4) Niech W będzie dowolnym domkniętym zbiorem wypukłym w rzeczywistej nietrywialnej przestrzeni unormowanej X. Wykazać, że wtedy istnieje niepusta rodzina $\mathcal{H}$ domkniętych półprzestrzeni w X, taka że $W = \bigcap_{H \in \mathcal{H}} H$.
Uwaga. Domknięta półprzestrzeń to zbiór postaci $\{x \in X\colon \ \alpha(x) \geqslant c\}$, gdzie $c \in \mathbb{R}$ oraz $\alpha \in X' \setminus \{0\}$.

4.16*.○ (5) Niech W będzie dowolnym domkniętym ograniczonym zbiorem wypukłym w rzeczywistej nietrywialnej przestrzeni Hilberta H. Wykazać, że wtedy istnieje niepusta rodzina $\mathcal{B}$ kul domkniętych w H, taka że $W = \bigcap_{B \in \mathcal{B}} B$.

4.17.○ (5) Niech H będzie nieskończenie wymiarową przestrzenią Hilberta. Niech τ_s oraz τ_w oznaczają, odpowiednio, topologię normy oraz słabą na H. Zbadać ciągłość iloczynu skalarnego na H (jako funkcji dwóch zmiennych) w zależności od tego, jaką topologię produktową rozważamy na $H \times H$: $\tau_n \times \tau_n$, $\tau_s \times \tau_n$ lub $\tau_s \times \tau_s$.

4.18.○ (5) Niech X będzie przestrzenią Banacha, a $A_1, A_2, \ldots$ oraz $B_1, B_2, \ldots$ dwoma ciągami ograniczonych operatorów liniowych $X \to X$. Załóżmy, że (w topologii normy) $\lim_{n\to\infty} A_n x = Ax$ oraz $\lim_{n\to\infty} B_n x = Bx$ dla dowolnego wektora $x \in X$. Pokazać, że wtedy operatory A i B są ograniczone oraz $\lim_{n\to\infty} A_n B_n x = ABx$ dla wszelkich $x \in X$.

4.19.○ (4) Niech K będzie niepustym wypukłym zbiorem zwartym w rzeczywistej PLW X, a $\phi\colon X \to \mathbb{R}$ ciągłym funkcjonałem liniowym. Wykazać, że wtedy istnieje punkt ekstremalny v zbioru K, taki że $\phi(v) = \max \phi(K)$.

4.20.○ (5) W tym zadaniu rzeczywistą przestrzeń ℓ_1 utożsamiamy (w naturalny/kanoniczny sposób) z przestrzenią dualną do c_0. Przy takim podejściu na ℓ_1 jest określona topologia $*$-słaba, którą oznaczymy przez τ_{w*}. Przestrzeń ta ma także topologię słabą, którą oznaczymy przez τ_w. Niech $\Delta \subset \ell_1$ składa się z wszystkich ciągów $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ o wyrazach nieujemnych, takich że $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = 1$. Dla każdej z topologii τ_w oraz τ_{w*} rozstrzygnąć, czy zbiór Δ jest w tej topologii zwarty lub domknięty.

4.21*.○ (5) Niech X będzie przestrzenią Banacha, a $u_0, u_1, \ldots \colon X \to \mathbb{K}$ ciągiem ograniczonych funkcjonałów liniowych na X, takim że

$$\forall x \in X\colon \ |u_0(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)| < \infty.$$

Wykazać, że wtedy istnieje ciąg skalarów $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$, taki że $|\alpha_n| \leqslant 1$ dla wszelkich $n > 0$ oraz $u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n(x)$ dla każdego wektora $x \in X$.