Analiza funkcjonalna
egzamin pisemny, 7 II 2005 r.

$\boxed{1}$ Sprawdzić ciągłość następujących funkcjonałów liniowych, wyznaczyć normę tych, które okażą się ciągłe.

(a) $\mathcal{C}([0,1]) \ni f \mapsto \frac{1}{5}f(\frac{1}{5}) - \frac{1}{2}f(\frac{1}{2}) \in \mathbb{K}$ względem normy supremowej w $\mathcal{C}([0,1])$.

(b) $\ell^2 \ni \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{\sqrt{2^n}} \in \mathbb{K}$.

$\boxed{2}$ Niech X będzie przestrzenią unormowaną, a A — jej podzbiorem. Wykazać, że A jest ograniczony w sensie przestrzeni liniowo-topologicznej wtedy i tylko wtedy, gdy A zawiera się w pewnej kuli w X.

$\boxed{3}$ Niech X będzie przestrzenią Banacha, a A — jej słabo gęstym podzbiorem. Wykazać, że każdy podzbiór przestrzeni X zawierający $\operatorname{lin} A$ jest gęsty w X względem topologii normy.

$\boxed{4}$ Niech X będzie przestrzenią Banacha i niech $A : X \to X$ będzie odwzorowaniem liniowym takim, że dla każdego $\varphi \in X'$ funkcjonał liniowy $\varphi \circ A$ jest ciągły. Uzasadnić, że A jest odwzorowaniem ciągłym. Czy pozostanie to prawdą, jeżeli X będzie lokalnie wypukłą F-przestrzenią?

$\boxed{5}$ Podać następujące twierdzenia i definicje.

(a) Twierdzenie o metryzowalności przestrzeni liniowo-topologicznych, twierdzenie o metryzowalności przestrzeni lokalnie wypukłych; definicja przestrzeni liniowo-topologicznej, przestrzeni lokalnie wypukłej i zbioru zbalansowanego.

(b) Twierdzenie Banacha o odwzorowaniu otwartym; definicja odwzorowania otwartego i F-przestrzeni.

(c) Twierdzenie Riesza o postaci funkcjonału; definicja iloczynu skalarnego, normy zadanej przez iloczyn skalarny, przestrzeni Hilberta i normy funkcjonału liniowego i ciągłego.

Analiza funkcjonalna
egzamin pisemny, 6 III 2005 r.

$\boxed{1}$ Sprawdzić ciągłość następujących odwzorowań liniowych, wyznaczyć normę tych, które okażą się ciągłe.

(a) $c_{00} \ni \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} x_n \in \mathbb{K}$, gdzie przestrzeń

$$c_{00} = \left\{ \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \exists_{N\in\mathbb{N}} \forall_{n\geqslant N}\ x_n = 0 \right\}$$

jest wyposażona w normę $\|\{x_n\}_{n=0}^{\infty}\| = \sup_{n\geqslant 0} |x_n|$.

(b) $\ell^{\infty} \ni \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \mapsto \{\frac{1}{n+1} x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^2$.

$\boxed{2}$ Uzasadnić, że w przestrzeni liniowo-topologicznej suma algebraiczna zbioru otwartego i dowolnego jest zbiorem otwartym.

$\boxed{3}$ Niech $\mathcal{B}([0,1])$ będzie przestrzenią wszystkich funkcji rzeczywistych i ograniczonych na odcinku $[0,1]$ z normą supremową. Wykazać, że istnieje funkcjonał $\varphi : \mathcal{B}([0,1]) \to \mathbb{R}$ liniowy i ciągły o normie $\frac{1}{6}$ taki, że

$$\varphi(f) = \int_{1/3}^{1/2} f(t)\,\mathrm{d}t$$

dla wszystkich funkcji f ciągłych na $[0,1]$.

$\boxed{4}$ (*Dla osób, które mają prawo do zdawania w pierwszym terminie.*) Niech X i Y będą przestrzeniami Banacha, a $f : X \to Y$ — liniową i ciągłą surjekcją. Pokazać, że dla każdego ciągu $\{y_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq Y$ zbieżnego do zera istnieje ciąg $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq X$ zbieżny do zera taki, że $f(x_n) = y_n$ dla wszystkich $n \geqslant 0$.

$\boxed{5}$ Podać następujące twierdzenia i definicje.

(a) Twierdzenie o podwójnym dopełnieniu ortogonalnym; definicja iloczynu skalarnego, normy zadanej przez iloczyn skalarny, przestrzeni Hilberta i dopełnienia ortogonalnego zbioru.

(b) Twierdzenie Banacha o wykresie domkniętym; definicja wykresu odwzorowania oraz przestrzeni występującej w tym twierdzeniu. W jakiej topologii domykamy wykres?

(c) Twierdzenie o analitycznym oddzielaniu zbiorów wypukłych; definicja przestrzeni liniowo-tologicznej, jej dualnej (topologicznej) oraz przestrzeni lokalnie wypukłej.

Analiza funkcjonalna
egzamin pisemny, 28 I 2006 r.

$\boxed{1}$ Niech $p \in [1, \infty]$. Wykazać, że ℓ^p (ze standardową normą) jest przestrzenią unitarną wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 2$.

$\boxed{2}$ Niech X będzie przestrzenią liniowo-topologiczną T_2, a U – jej podzbiorem o niepustym wnętrzu. Uzasadnić, że przestrzeń liniowa rozpięta przez U jest równa X.

$\boxed{3}$ Przestrzeń $c_{00} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \exists_{N \in \mathbb{N}} \forall_{n \geqslant N}\ x_n = 0\right\}$ jest wyposażona w normę $\|\{x_n\}_{n=0}^{\infty}\| = \sup_{n \geqslant 0} |x_n|$. Pokazać, że odwzorowanie liniowe

$$A\colon c_{00} \ni \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \mapsto \left\{\tfrac{x_n}{n+1}\right\}_{n=0}^{\infty} \in c_{00}$$

jest bijekcją ciągłą, i wyznaczyć $\|A\|$. Czy A^{-1} jest odwzorowaniem ciągłym?

$\boxed{4}$ W przestrzeni $X = \mathcal{C}([0,1])$ rozważamy topologię lokalnie wypukłą τ_1 zadaną przez układ seminorm $\{p_x\}_{x \in [0,1]}$:

$$p_x(f) \stackrel{\text{def}}{=} |f(x)| \text{ dla } f \in X,$$

oraz topologię τ_2 normy supremowej. Pokazać, że jeżeli odwzorowanie liniowe $A : X \to X$ jest $(\tau_1\text{-}\tau_1)$-ciągłe, to jest także $(\tau_2\text{-}\tau_2)$-ciągłe.

$\boxed{5}$ Podać następujące twierdzenia i definicje.

(a) Tożsamość Parsevala; definicja iloczynu skalarnego, normy zadanej przez iloczyn skalarny, przestrzeni Hilberta i bazy ortonormalnej.

(b) Twierdzenie Banacha o wykresie domkniętym; definicja wykresu odwzorowania i F-przestrzeni. W jakiej topologii domykamy wykres?

(c) Twierdzenie Banacha–Alaoglu; definicja przestrzeni dualnej topologicznej i $*$-słabej topologii.

Analiza funkcjonalna
egzamin pisemny, 26 II 2006 r.

$\boxed{1}$ Sprawdzić ciągłość następujących odwzorowań liniowych, wyznaczyć normę tych, które okażą się ciągłe.

(a) $\mathbb{R}[X] \ni w \mapsto w(2) \in \mathbb{R}$, gdzie przestrzeń wielomianów $\mathbb{R}[X]$ jest wyposażona w normę $\|w\| = \sup_{t\in[0,1]} |w(t)|$.

(b) $c \ni \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \mapsto \{\frac{1}{3^n} x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^2$, gdzie c jest przestrzenią rzeczywistych ciągów zbieżnych z normą supremową.

$\boxed{2}$ Niech p_1 i p_2 będą normami na przestrzeni liniowej X, a B_1 i B_2 – otwartymi kulami jednostkowymi względem p_1 i p_2 (odpowiednio) o środku o zerze. Wykazać, że $B_2 \subseteq B_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p_1(x) \leqslant p_2(x)$ dla wszystkich $x \in X$.

$\boxed{3}$ Niech X będzie przestrzenią liniowo-topologiczną T_2, a Y – jej podprzestrzenią liniową. Uzasadnić, że jeżeli Y jest ograniczonym podzbiorem X, to $Y = \{0\}$.

$\boxed{4}$ (*Dla osób, które mają prawo do zdawania w pierwszym terminie.*) Niech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie słabo zbieżnym ciągiem elementów przestrzeni unormowanej X. Pokazać, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|x_1 + \cdots + x_n\|}{n^\alpha} = 0$$

dla każdego $\alpha > 1$.

$\boxed{5}$ Podać następujące twierdzenia i definicje.

(a) Twierdzenie Riesza o postaci funkcjonału; definicja iloczynu skalarnego, normy zadanej przez iloczyn skalarny, przestrzeni Hilberta i normy funkcjonału liniowego.

(b) Twierdzenie Banacha–Steinhausa; definicja F-przestrzeni, równociągłości i jednostajnej ograniczoności rodziny operatorów

(c) Twierdzenie Kreina-Milmana; definicja przestrzeni lokalnie wypukłej i punktu ekstremalnego.

Analiza funkcjonalna
egzamin pisemny, 2 II 2007 r.

$\boxed{1}$ Sprawdzić ciągłość odwzorowań liniowych i wyznaczyć normę tych, które okażą się ciągłe.

(a) $\ell^{\frac{4}{3}} \ni \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mapsto \{(1+\frac{1}{n})^n x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^{\frac{4}{3}}$.

(b) $\mathcal{P} \ni p \mapsto \int_{-2}^{0} p(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$, gdzie w przestrzeni $\mathcal{P}$ wielomianów rzeczywistych jednej zmiennej rozważamy normę

$$\|p\| = \sup\{|p(t)| \colon t \in [-1,1]\}.$$

$\boxed{2}$ Niech F i G będą podzbiorami przestrzeni liniowo-topologicznej takimi, że $F \subset G$. Pokazać, że jeśli F jest gęsty w G, to również $\operatorname{lin} F$ jest gęsty w $\operatorname{lin} G$.

$\boxed{3}$ Niech $\mathcal{H}$ będzie rzeczywistą przestrzenią Hilberta, $\mathcal{H}_0$ – jej domkniętą podprzestrzenią liniową, a $\varphi_0 \colon \mathcal{H}_0 \to \mathbb{R}$ – funkcjonałem liniowym i ciągłym. Pokazać, że istnieje funkcjonał liniowy i ciągły $\varphi : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ taki, że $\varphi|_{\mathcal{H}_0} = \varphi_0$ oraz $\|\varphi_0\| = \|\varphi\|$. Rozstrzygnąć, czy taki funkcjonał φ jest jedyny (podać uzasadnienie).

$\boxed{4}$ Rozważmy ciąg $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ wektorów w zespolonej przestrzeni Banacha X. Załóżmy, że dla każdego $z \in \mathbb{C}$ takiego, że $|z| < 1$, szereg $\sum_{n=0}^{\infty} z^n x_n$ jest zbieżny w słabej topologii. Pokazać, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} z^n x_n$ jest zbieżny w normie dla każdego $z \in \mathbb{C}$ takiego, że $|z| < 1$.

$\boxed{5}$ Podać następujące twierdzenia i definicje.

(a) Tożsamość Parsevala; definicja iloczynu skalarnego, normy zadanej przez iloczyn skalarny, przestrzeni Hilberta.

(b) Twierdzenie Banacha o wykresie domkniętym; definicja wykresu odwzorowania oraz przestrzeni występującej w tym twierdzeniu. W jakiej topologii domykamy wykres?

(c) Twierdzenie o analitycznym oddzielaniu rozłącznych zbiorów wypukłych; definicja przestrzeni liniowo-topologicznej, jej dualnej (topologicznej) oraz przestrzeni lokalnie wypukłej.

ANALIZA FUNKCJONALNA
EGZAMIN PISEMNY, 20 II 2007 R.

$\boxed{1}$ Sprawdzić ciągłość odwzorowań liniowych i wyznaczyć normę tych, które okażą się ciągłe.

(a) $\mathbf{c} \ni \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mapsto \{x_n - \lim_{k\to\infty} x_k\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbf{c}_0$; w przestrzeni $\mathbf{c}$ ciągów zbieżnych i przestrzeni $\mathbf{c}_0$ ciągów zbieżnych do zera rozważamy normę supremową.

(b) $\mathcal{C}([0,1]) \ni f \mapsto \int_0^1 f(\frac{x+1}{3})\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}$ względem normy

$$\|f\| = \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x, \quad f \in \mathcal{C}([0,1]).$$

$\boxed{2}$ Niech F i G będą niepustymi podzbiorami przestrzeni liniowo-topologicznej. Pokazać, że F i G są ograniczone wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $2007\cdot F - 2006\cdot G$ jest ograniczony.

$\boxed{3}$ Niech H będzie k-wymiarową przestrzenią Hilberta ($k \geqslant 1$ jest liczbą naturalną). Pokazać, że dla dowolnego odwzorowania $A\colon \ell^2 \to H$ liniowego i ciągłego istnieje ciąg $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ taki, że $\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\|^2 < \infty$ oraz

$$A(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n v_n \quad \text{dla dowolnego ciągu } \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2.$$

$\boxed{4}$ Niech $A\colon H \to H$ będzie odwzorowaniem liniowym na przestrzeni Hilberta H, a $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ będzie ciągiem zbieżnym do liczby niezerowej. Wykazać równoważność następujących warunków:

(i) A jest ograniczony;

(ii) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \langle Ax_n, y\rangle$ jest zbieżny dla każdego $y \in H$ i dla każdego ciągu $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ takiego, że $\|x_n\| \leqslant n^{-2}$ dla $n \geqslant 1$.

$\boxed{5}$ Podać następujące twierdzenia i definicje.

(a) Twierdzenie o realizacji odległości punktu od zbioru w przestrzeni Hilberta; definicja iloczynu skalarnego, przestrzeni Hilberta i odległości punktu od zbioru.

(b) Warunki konieczne i wystarczające na metryzowalność przestrzeni liniowo-topologicznej i lokalnie wypukłej; definicja przestrzeni liniowo-topologicznej, zbioru zbalansowanego, zbioru wypukłego i przestrzeni topologicznej metryzowalnej.

(c) Twierdzenie Banacha-Steinhausa; definicja F-przestrzeni, rodziny równociągłej i jednostajnie ograniczonej.

Analiza funkcjonalna
egzamin pisemny, 1 II 2008 r.
czas pisania: 2,5 godziny, na zadanie 5 – pierwsze 45 minut

$\boxed{1}$ Czy poniższe odwzorowania są dobrze określone? Liniowe? Obliczyć normy tych, które są liniowe i ciągłe.

(a) $\mathcal{C}([0,1]) \ni f \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n}) \in \mathbb{R}$.

(b) $\ell^2 \ni \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mapsto \{x_n^2\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^1$.

(c) $\mathcal{C}([0,1]) \ni f \mapsto h{\cdot}f \in \mathcal{C}([0,1])$, gdzie $h(x) = 3x - 1$, $x \in [0,1]$.

(d) $\mathbf{c}_{00} \ni \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x_{n+1} \in \mathbb{R}$ względem normy supremowej w $\mathbf{c}_{00}$.

$\boxed{2}$ Niech U będzie otwartym i niepustym podzbiorem przestrzeni liniowo-topologicznej Hausdorffa X takim, że $\operatorname{conv} U$ jest zbiorem ograniczonym w X. Pokazać, że jeśli $0 \in U$, to topologia X zadana jest przez pewną normę. Czy pozostanie to prawdą, jeśli $0 \notin U$?

$\boxed{3}$ Niech $\mathcal{H}$ będzie zespoloną przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, - \rangle$. Ustalamy $x_0 \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ i określamy normę:

$$\|x\|_0 = \sqrt{\langle x, x\rangle + |\langle x, x_0\rangle|^2}, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Czy $\mathcal{H}$ jest zupełna względem tej normy? Czy norma ta pochodzi od jakiegokolwiek iloczynu skalarnego? Jeśli tak, to wyznaczyć ten iloczyn.

$\boxed{4}$ Niech $A : \ell^{2008} \to \ell^{2008}$ będzie odwzorowaniem liniowym, ciągłym i takim, że $A(x) \in \ell^{2007}$ dla wszystkich $x \in \ell^{2008}$. Pokazać, że odwzorowanie

$$\ell^{2007} \ni x \mapsto A(x) \in \ell^{2007}$$

jest również ciągłe. (W przestrzeniach ℓ^{2007} i ℓ^{2008} rozważamy standardowe normy.)

$\boxed{5}$ Podać następujące twierdzenia i definicje.

(a) Twierdzenie Riesza o postaci funkcjonału; definicja iloczynu skalarnego, normy zadanej przez iloczyn skalarny, przestrzeni Hilberta i normy funkcjonału liniowego.

(b) Twierdzenie Banacha–Alaoglu; definicja przestrzeni dualnej topologicznej, $*$-słabej topologii i polary zbioru.

(c) Twierdzenie Banacha–Steinhausa; definicja F-przestrzeni, równociągłości i jednostajnej ograniczoności rodziny operatorów.

Analiza funkcjonalna
egzamin pisemny, 18 II 2008 r.
czas pisania: 2,5 godziny, na zadanie 5 – pierwsze 45 minut

$\boxed{1}$ Czy poniższe odwzorowania są dobrze określone? Liniowe? Obliczyć normy tych, które są liniowe i ciągłe.

(a) $\ell^1 \ni \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mapsto \{x_n + x_{n+1}\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^1$.

(b) $\ell^2 \ni \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mapsto \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^1$.

(c) $\mathcal{C}([0,1]) \ni f \mapsto \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + f(0) \in \mathbb{R}$ względem normy supremowej w $\mathcal{C}([0,1])$.

(d) $\mathbb{R}[X] \ni p \mapsto p(0)p \in \mathbb{R}[X]$ względem normy $\|p\| = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}|p(\frac{1}{n})|$ w przestrzeni wielomianów $\mathbb{R}[X]$.

$\boxed{2}$ Niech $A = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2 \colon x_{2007} \geqslant 2,\ x_{2008} \leqslant -3\}$. Pokazać, że dla każdego ciągu $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$ istnieje dokładnie jeden ciąg $y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in A$ taki, że $\|x - y\|_{\ell^2} = \operatorname{dist}(x, A)$. Obliczyć $\operatorname{dist}(0, A)$.

$\boxed{3}$ Uzasadnić, że istnieje semi-iloczyn skalarny $q(\cdot, -)$ na rzeczywistej przestrzeni ℓ^∞ taki, że

$$\left|q\big(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}\big)\right| \leqslant \left\|\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\right\|_{\ell^\infty} \left\|\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\right\|_{\ell^\infty}$$

dla dowolnych $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^\infty$ oraz

$$q\big(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}\big) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n,$$

dla dowolnych ciągów zbieżnych $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ i $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ o wyrazach rzeczywistych. Czy jest możliwe, aby był to iloczyn skalarny?

$\boxed{4}$ Niech Ω będzie niepustym, zbalansowanym podzbiorem przestrzeni liniowej X oraz niech $a \in X$. Pokazać, że jeżeli $a + \Omega$ jest zbiorem zbalansowanym, to $ta \in \Omega$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$.

$\boxed{5}$ Podać następujące twierdzenia i definicje.

(a) Charakteryzacja ośrodkowych przestrzeni Hilberta za pomocą wymiaru; definicja iloczynu skalarnego, przestrzeni Hilberta, bazy ortonormalnej i wymiaru ortogonalnego.

(b) Twierdzenie Banacha o odwzorowaniu otwartym i odwrotnym; definicja F-przestrzeni i odwzorowania otwartego.

(c) Twierdzenie Hahna-Banacha dla przestrzeni unormowanych; definicja seminormy.

Analiza funkcjonalna
egzamin pisemny, 31 I 2009 r.
czas pisania: 2,5 godziny, na zadanie 5 – pierwsze 45 minut

$\boxed{1}$ Sprawdzić, czy następujące odwzorowania liniowe są dobrze określone i ciągłe, i wyznaczyć normę tych, które okażą się ciągłe.

(a) $\mathcal{C}([0,1]) \ni f \mapsto \left\{ \int_0^{1/n} f(t)\mathrm{d}t \right\}_{n=1}^{\infty} \in c_0$.

(b) $\ell^2 \ni \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mapsto (\cos\frac{\pi}{7})x_3 - (\sin\frac{\pi}{7})x_{19} \in \mathbb{R}$.

$\boxed{2}$ W przestrzeni $\mathcal{C}^1([0,1])$ zadajemy następujące normy

$$\|f\|_1 = \Big(|f(0)|^2 + \int_0^1 |f'(t)|^2 \mathrm{d}t\Big)^{1/2}, \ \|f\|_2 = |f(0)| + \Big(\int_0^1 |f'(t)|^2 \mathrm{d}t\Big)^{1/2}, \ f \in \mathcal{C}^1([0,1]).$$

Rozstrzygnąć, czy pochodzą one od jakiegokolwiek iloczynu skalarnego. Jeśli tak, wskazać ten iloczyn. (Nie trzeba wykazywać, że są to normy.)

$\boxed{3}$ Niech A będzie podzbiorem ograniczonym przestrzeni liniowo-topologicznej. Uzasadnić, że obwiednia zbalansowana zbioru A też jest zbiorem ograniczonym.

$\boxed{4}$ Niech X_0 będzie domkniętą liniową podprzestrzenią rzeczywistej przestrzeni unormowanej X różną od X. Pokazać, że dla każdego funkcjonału liniowego i ciągłego $\varphi_0 : X_0 \to \mathbb{R}$ o normie 2008 istnieje funkcjonał liniowy i ciągły $\varphi : X \to \mathbb{R}$ o normie 2009 taki, że $\varphi|_{X_0} = \varphi_0$.

$\boxed{5}$ Podać następujące twierdzenia i definicje.

(a) Twierdzenie Banacha o wykresie domkniętym; definicja wykresu odwzorowania i F-przestrzeni. W jakiej topologii domykamy wykres?

(b) Twierdzenie o podwójnym dopełnieniu ortogonalnym; definicja iloczynu skalarnego, normy zadanej przez iloczyn skalarny, przestrzeni Hilberta i dopełnienia ortogonalnego zbioru.

(c) Twierdzenie o bipolarze; definicja przestrzeni liniowo-topologicznej, jej dualnej topologicznej, definicja polary.

$\boxed{}$ ← *Proszę zapamiętać ten kod i wpisać go obok nazwiska na kartkach z rozwiązaniami!*

Analiza funkcjonalna
egzamin pisemny, 21 II 2009 r.
czas pisania: 2,5 godziny, na zadanie 5 – pierwsze 45 minut

$\boxed{1}$ Sprawdzić, czy następujące odwzorowania liniowe są dobrze określone i ciągłe, i wyznaczyć normę tych, które okażą się ciągłe.

(a) $(c_{00}, \|\cdot\|_1) \ni \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in (\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$, gdzie $c_{00} = \big\{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \exists_{N\in\mathbb{N}} \forall_{n\geqslant N}\ x_n = 0\big\}$ oraz $\|p\| = \sup\{|p(x)| \colon x \in [-1,1]\}$, $p \in \mathbb{R}[X]$.

(b) $\mathcal{C}([0,1]) \ni f \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f(3^{-n}) \in \mathbb{R}$.

$\boxed{2}$ Niech $A : \ell^2 \to \ell^2$ będzie odwzorowaniem liniowym danym wzorem

$$A(x) = (x_1 + x_2, x_2, x_3, \ldots), \quad x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in \ell^2.$$

Określamy iloczyn skalarny

$$\langle x, y\rangle_A = \langle x, y\rangle_2 + \langle Ax, Ay\rangle_2, \quad x, y \in \ell^2,$$

względem którego ℓ^2 jest przestrzenią Hilberta, gdzie $\langle\cdot,\text{-}\rangle_2$ oznacza standardowy iloczyn skalarny w ℓ^2. Pokazać, że istnieje dokładnie jedno $u \in \ell^2$ takie, że $\langle x, u\rangle_A = x_1$ dla wszystkich $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in \ell^2$. Obliczyć $\langle u, u\rangle_A$.

$\boxed{3}$ Niech A i B będą podzbiorami przestrzeni liniowej. Pokazać, że jeśli są one zbiorami pochłaniającymi, to zbiór $2009\,A - 2008\,B$ jest także pochłaniający. Czy tę implikację można odwrócić?

$\boxed{4}$ Załóżmy, że ℓ^1 z pewną normą $\|\cdot\|$ taką, że $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|$ dla wszystkich $x \in \ell^1$, jest przestrzenią Banacha. Wykazać, że istnieje stała $M > 0$ taka, że $M\|x\|_1 \leqslant \|x\|$ dla wszystkich $x \in \ell^1$.

$\boxed{5}$ Podać następujące twierdzenia i definicje.

(a) Twierdzenie o operatorze rzutu ortogonalnego; definicja rzutu ortogonalnego, iloczynu skalarnego, normy zadanej przez iloczyn skalarny i przestrzeni Hlberta.

(b) Twierdzenie Kołmogorowa; definicja pojęć występujących w tym twierdzeniu (w tym przestrzeni liniowo-topologicznej).

(c) Twierdzenie o analitycznym oddzielaniu rozłącznych zbiorów wypukłych; definicja przestrzeni dualnej (topologicznej) oraz przestrzeni lokalnie wypukłej.

$\square$ ← *Proszę zapamiętać ten kod i wpisać go obok nazwiska na wszystkich kartkach z rozwiązaniami!*

Analiza funkcjonalna - sekcja ogólna
egzamin pisemny, 4 II 2010 r.
czas pisania: 2,5 godziny, na zadanie 5 – pierwsze 45 minut

$\boxed{1}$ Sprawdzić, czy następujące odwzorowania liniowe są dobrze określone i ciągłe, i wyznaczyć normę tych, które okażą się ciągłe.

(a) $\mathbb{R}[X] \ni p \mapsto Xp'(X) \in \mathbb{R}[X]$ względem normy $\|p\|_1 = \int_0^1 |p(t)|\,\mathrm{d}t$.

(b) $\mathcal{C}([-1,1]) \ni f \mapsto Pf \in \mathcal{C}([-1,1])$, gdzie $(Pf)(t) = \frac{1}{2}(f(-t)+f(t))$, $t \in [-1,1]$ (względem normy supremowej).

$\boxed{2}$ W przestrzeni $\mathcal{C}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ jest ciągła}\}$ rozważamy dwie rodziny seminorm:
(a) $p_x(f) = |f(x)|$, $x \in \mathbb{Q}$; (b) $q_x(f) = |f(\mathrm{e}^x)|$, $x \in \mathbb{R}$.
Sprawdzić, czy zadają one topologie przestrzeni lokalnie wypukłej w $\mathcal{C}(\mathbb{R})$. Zbadać ciągłość funkcjonału $\mathcal{C}(\mathbb{R}) \ni f \mapsto f(\sqrt{2}) \in \mathbb{R}$ w którejkolwiek z tych topologii lokalnie wypukłych.

$\boxed{3}$ Niech $(X, \|\cdot\|_X)$ oraz $(Y, \|\cdot\|_Y)$ będą przestrzeniami unormowanymi nad ciałem $\mathbb{K}$. Dowieść, że norma $\|\cdot\|$ na przestrzeni $X \times Y$ dana wzorem

$$\|(x,y)\| = (\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2)^{1/2}, \quad x \in X,\ y \in Y,$$

pochodzi od pewnego iloczynu skalarnego nad $\mathbb{K}$ wtedy i tylko, gdy każda z norm $\|\cdot\|_X$ oraz $\|\cdot\|_Y$ zadana jest przez pewien iloczyn skalarny nad $\mathbb{K}$. ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$.)

$\boxed{4}$ W przestrzeni wektorowej H dane są dwa iloczyny skalarne $\langle \cdot, \text{-} \rangle_1$ oraz $\langle \cdot, \text{-} \rangle_2$ oraz odwzorowanie liniowe $R : H \to H$ takie, że
(1) $(H, \langle \cdot, \text{-} \rangle_1)$ oraz $(H, \langle \cdot, \text{-} \rangle_2)$ są przestrzeniami Hilberta,
(2) R jest ciągłe względem normy $\|\cdot\|_1$ zadanej przez $\langle \cdot, \text{-} \rangle_1$,
(3) $\langle R(x), y \rangle_1 = \langle x, y \rangle_2$, $x, y \in H$.
Wykazać równoważność norm $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$, gdzie $\|\cdot\|_2$ jest zadana przez $\langle \cdot, \text{-} \rangle_2$.

$\boxed{5}$ Pytania dotyczące wykładu.

(a) Lemat o realizacji infimum dla wypukłego podzbioru przestrzeni Hilberta – wypowiedź i dowód.

(b) Twierdzenie o odwzorowaniu otwartym (tylko wypowiedź) i definicja przestrzeni w nim występującej.

(c) Definicja $*$-słabej topologii i twierdzenie Banacha-Alaoglu (tylko wypowiedź).

$\square$ ← *Proszę zapamiętać ten kod i wpisać go obok nazwiska na wszystkich kartkach z rozwiązaniami!*

Analiza funkcjonalna - sekcja ogólna
egzamin pisemny, 18 II 2010 r.
czas pisania: 2,5 godziny, na zadanie 5 – pierwsze 45 minut

$\boxed{1}$ Sprawdzić, czy następujące odwzorowania liniowe są dobrze określone i ciągłe, i wyznaczyć normę tych, które okażą się ciągłe.

(a) $c_{00} \ni \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} x_{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} n x_{2n} \in \mathbb{R}$ (względem normy $\|\{x_n\}_{n=0}^{\infty}\| = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ w c_{00}).

(b) $\mathcal{C}([0,1]) \ni f \mapsto \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\mathrm{d}t - f(1) \in \mathbb{R}$ (względem normy supremowej w $\mathcal{C}([0,1])$).

$\boxed{2}$ Dla $n \in \mathbb{N}$ określamy $e_n = \{\delta_{n,k}\}_{k=0}^{\infty}$, gdzie $\delta_{n,k} = 0$ dla $n \neq k$ oraz $\delta_{n,n} = 1$. Uzasadnić, że następujące ciągi są słabo zbieżne w ℓ^2 do zera:

(a) $f_n = 2009 e_n + e_{2010n}$, (b) $g_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k e_k$.

Czy któryś z tych ciągów jest zbieżny w sensie normy ℓ^2?

$\boxed{3}$ W przestrzeni $\mathcal{C}([-1,1])$ określamy

$$\varphi_a(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t + (2a+1) f(a)\overline{g(a)}, \quad f,g \in \mathcal{C}([-1,1]),\ a \in [-1,1].$$

Wykazać, że φ_a jest iloczynem skalarnym wtedy i tylko wtedy, gdy $a \in [-\frac{1}{2}, 1]$. Czy φ_0 i φ_1 zadają normy równoważne?

$\boxed{4}$ Niech X będzie przestrzenią Banacha, Y – przestrzenią unormowaną, a $A : X \to Y$ – odwzorowaniem liniowym. Pokazać, że A jest ograniczone wtedy i tylko wtedy, gdy norma $\|\cdot\|_A$ dana wzorem $\|x\|_A = \|x\| + \|A(x)\|$, $x \in X$, jest zupełna (nie trzeba dowodzić, że $\|\cdot\|_A$ jest normą).

$\boxed{5}$ Pytania dotyczące wykładu.

(a) Twierdzenie Hahna–Banacha (wersja analityczna nad $\mathbb{R}$) – wypowiedź i krok I dowodu.

(b) Twierdzenie o charakteryzacji baz ortonormalnych (w tym tożsamość Parsevala) – tylko wypowiedź; definicja bazy ortonormalnej.

(c) Definicja $*$-słabej topologii i twierdzenie Banacha-Alaoglu (tylko wypowiedź).

$\boxed{}$ ← *Proszę zapamiętać ten kod i wpisać go obok nazwiska na wszystkich kartkach z rozwiązaniami!*

Analiza funkcjonalna - sekcja ogólna
egzamin pisemny, 31 I 2011 r.
czas pisania: 2,5 godziny, na zadanie 5 – pierwsze 45 minut

$\boxed{1}$ Sprawdzić, czy następujące odwzorowania liniowe są dobrze określone i ciągłe, i wyznaczyć normę tych, które okażą się ciągłe.

(a) $\ell^2 \ni \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}} x_n \in \mathbb{K}$.

(b) $\mathbb{R}[X] \ni p \mapsto p'(2011) \in \mathbb{R}$ względem normy $\|p\| = \sup\{|p(t)|\colon t \in [0,1]\}$.

$\boxed{2}$ Wykazać, że jeśli x i y są elementami rzeczywistej przestrzeni unitarnej, to $\|x+y\| = \|x\|$ wtedy i tylko wtedy, gdy $2x + y$ jest wektorem prostopadłym do y. Czy ta sama równoważność zachodzi w zespolonych przestrzeniach unitarnych?

$\boxed{3}$ W przestrzeni $\mathcal{C}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ – ciągła}\}$ rozważamy rodziny seminorm:
(1) $\{p_t\}_{t\in\mathbb{Q}}$, $p_t(f) = |f(t)|$, $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$,
(2) $\{q_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $q_n(f) = \sup_{x\in[n,n+1]} |f(x)|$, $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$.
Czy są to rozdzielające rodziny seminorm? Czy własność rozdzielania zachowa się, jeśli usuniemy z tych rodzin skończoną liczbę seminorm?

$\boxed{4}$ Niech X będzie przestrzenią Banacha, a $\{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ – rodziną odwzorowań liniowych i ciągłych $X \to X$ taką, że funkcja $\mathbb{R} \ni t \mapsto \|A_t x\| \in \mathbb{R}$ jest ciągła dla każdego $x \in X$. Uzasadnić, że $\sup\{\|A_t\|\colon t \in K\}$ jest skończone dla każdego zwartego zbioru $K \subset \mathbb{R}$.

$\boxed{5}$ Pytania dotyczące wykładu.

(a) Twierdzenie Banacha-Steinhausa – wersja dla rodzin odwzorowań i jej dowód.

(b) Nierówność Bessela; definicja iloczynu skalarnego i przestrzeni Hilberta (bez dowodu).

(c) Warunki równoważne ciągłości funkcjonału na przestrzeni liniowo-topologicznej; definicja przestrzeni liniowo-topologicznej (bez dowodu).

Analiza funkcjonalna - sekcja ogólna
egzamin pisemny, 21 II 2011 r.
czas pisania: 2,5 godziny, na zadanie 5 – pierwsze 45 minut

$\boxed{1}$ Sprawdzić, czy następujące odwzorowania liniowe są dobrze określone i ciągłe, i wyznaczyć normę tych, które okażą się ciągłe.

(a) $\ell^4 \ni \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \mapsto \{x_{n+2011}\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^4$ (względem standardowej normy w ℓ^4).

(b) $\mathcal{C}([0,1]) \ni f \mapsto f(0) - f(1) \in \mathbb{R}$ (względem normy supremowej w $\mathcal{C}([0,1])$).

$\boxed{2}$ Dla $n \in \mathbb{N}$ określamy ciąg $e_n \in \ell^2$ mający wyraz 1 na pozycji n-tej, a na pozostałych zera. Określamy

$$f_n = \sum_{k=n}^{n+2011} e_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Czy ciąg $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest zbieżny słabo w ℓ^2? Czy jest zbieżny w sensie normy ℓ^2?

$\boxed{3}$ W przestrzeni $\mathbb{R}^2$ rozpatrujemy normę $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Określamy podprzestrzeń wektorową $X_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ oraz funkcjonał liniowy $f_0 : X_0 \to \mathbb{R}$ dany wzorem $f_0(x,y) = 2x$. Wykazać, że $\|f_0\| = 1$, i rozstrzygnąć, czy istnieje funkcjonał liniowy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ taki, że $f|_{X_0} = f_0$ oraz $\|f\| = 1$. Czy f o takich własnościach jest jedyne?

$\boxed{4}$ Niech X i Y będą przestrzeniami Banacha, a $A : Y \to X$ oraz $B : X \to Y$ – odwzorowaniami liniowymi. Wykazać, że jeśli A i B mają wykres domknięty oraz A jest bijekcją, to odwzorowanie $A^{-1} + B$ jest ciągłe.

$\boxed{5}$ Pytania dotyczące wykładu.

(a) Twierdzenie Hahna–Banacha dla seminorm i jego dowód.

(b) Twierdzenie o charakteryzacji baz ortonormalnych (w tym tożsamość Parsevala) i definicja bazy ortonormalnej (bez dowodu).

(c) Twierdzenie o odwzorowaniu otwartym i definicja F-przestrzeni (bez dowodu).

Analiza funkcjonalna - sekcje nieteoretyczne
egzamin pisemny, 6 II 2012 r.
czas pisania: 2,5 godziny, na zadanie 5 – pierwsze 45 minut

$\boxed{1}$ Sprawdzić, czy następujące odwzorowania liniowe są dobrze określone i ciągłe, i wyznaczyć normę tych, które okażą się ciągłe.

(a) $\mathsf{C}^1([0,1]) \ni f \mapsto \int_0^{1/2} f(t)\mathrm{d}t + f'(\frac{2}{3}) \in \mathbb{R}$ z normą $\|f\| = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)| + \sup\limits_{t\in[0,1]} |f'(t)|$ w przestrzeni $\mathsf{C}^1([0,1])$;

(b) $\ell_2 \ni \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \mapsto \sum_{n=2011}^{\infty} 2^{-n} x_{3n} - \sum_{n=2012}^{\infty} 3^{-n} x_{3n+1} \in \mathbb{R}$.

$\boxed{2}$ Dla ustalonego $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ na przestrzeni $\mathsf{C}([0,1])$ definiujemy rodzinę funkcji

$$p_k(f) = \left| \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x \right|, \quad f \in \mathsf{C}([0,1]),\ k = 0, \ldots, n-1.$$

Czy $\{p_k\}_{k=0}^{n-1}$ jest rodziną seminorm? Jeśli tak, to czy jest ona rozdzielająca dla jakiegokolwiek n?

$\boxed{3}$ W przestrzeni ℓ_2 zadajemy normę

$$\|\{x_n\}_{n=0}^{\infty}\| = \|\{x_n\}_{n=0}^{\infty}\|_2 + 2|x_{2012}|, \quad \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \ell_2,$$

gdzie norma $\|\cdot\|_2$ oznacza standardową normę ℓ^2.

(a) Sprawdzić, czy pochodzi ona od jakiegokolwiek iloczynu skalarnego.

(b) Czy przestrzeń $(\ell_2, \|\cdot\|)$ jest zupełna?

$\boxed{4}$ W przestrzeni $\mathsf{C}([0,1])$ rozważamy pewną normę $\|\cdot\|$ zupełną i taką, że dla dowolnej liczby $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ istnieje stała $M_q \geqslant 0$ taka, że $|f(q)| \leqslant M_q \|f\|$ dla dowolnej funkcji $f \in \mathsf{C}([0,1])$. Pokazać, że istnieje stała $M \geqslant 0$ taka, że $\|\cdot\|_{\sup} \leqslant M\|\cdot\|$, gdzie $\|\cdot\|_{\sup}$ oznacza zwykłą normę supremową.

$\boxed{5}$ Pytania dotyczące wykładu.

(b) Nierówność Bessela i twierdzenie o rzucie ortogonalnym na przestrzeń generowaną przez skończony układ ortonormalny wraz z dowodem tego ostatniego.

(a) Twierdzenie Banacha-Steinhausa – wersja dla rodzin odwzorowań (bez dowodu).

(c) Twierdzenie Hahna-Banacha – wersja analityczna nad $\mathbb{R}$ i wersja dla seminorm (bez dowodu).

ANALIZA FUNKCJONALNA - SEKCJE NIETEORETYCZNE
EGZAMIN PISEMNY, 16 II 2012 R.
CZAS PISANIA: 2,5 GODZINY, NA ZADANIE 5 – PIERWSZE 45 MINUT

$\boxed{1}$ Sprawdzić, czy następujące odwzorowania liniowe są ciągłe, i wyznaczyć normę tych, które okażą się ciągłe.

(a) $c_{00} \ni \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x_n \in \mathbb{R}$ z normą $\|\{x_n\}_{n=0}^{\infty}\| = \sup_{n \geqslant 0} |x_n|$ w c_{00};

(b) $\mathsf{C}^1([0,1]) \ni f \mapsto f(\frac{1}{3}) - f'(\frac{2}{3}) \in \mathbb{R}$ z normą $\|f\| = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)| + \sup\limits_{t\in[0,1]} |f'(t)|$ w przestrzeni $\mathsf{C}^1([0,1])$.

$\boxed{2}$ Określamy funkcjonał liniowy $\varphi : \ell^2 \to \mathbb{R}$, $\varphi(\{x_n\}_{n=0}^{\infty}) = 2011x_1 - 2012x_0$. Uzasadnić, że norma $\|\cdot\|$ na ℓ^2, spełniająca warunek

$$\|x\|^2 = \|x\|_2^2 + |\varphi(x)|^2, \quad x \in \ell^2,$$

gdzie $\|\cdot\|_2$ oznacza zwykłą normę w ℓ^2, pochodzi od pewnego rzeczywistego iloczynu skalarnego $\langle \cdot, - \rangle$. Obliczyć $\langle e_1, e_0 \rangle$ (tutaj e_n oznacza ciąg, który ma wszystkie wyrazy zerowe z wyjątkiem n-tego równego 1).

$\boxed{3}$ W przestrzeni ℓ_1 rozważamy następujące rodziny seminorm

$$(a)\ p_k : \ell_1 \ni \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \mapsto |x_k| + |x_{k+2}| \in [0,\infty), \quad k \in \mathbb{N};$$
$$(b)\ q_k : \ell_1 \ni \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \mapsto k|x_{2k}| \in [0,\infty), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Czy są to rodziny rozdzielające? Jeśli tak, to wskazać jakiekolwiek otoczenie zera, do którego należy e_0, a nie należy e_1 (tutaj e_n oznacza ciąg, który ma wszystkie wyrazy zerowe z wyjątkiem n-tego równego 1). Uwaga: przyjmujemy, że $0 \in \mathbb{N}$.

$\boxed{4}$ Wyznaczyć odległość w przestrzeni $\mathsf{C}([0,1])$ (ze standardową normą supremową) funkcji $f_0(x) = x$ od podprzestrzeni liniowej

$$V = \left\{ f \in \mathsf{C}([0,1]) : \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\mathrm{d}x = f(0) \right\}.$$

$\boxed{5}$ Pytania dotyczące wykładu.

(a) Nierówność Cauchy'ego-Schwarza z dowodem; definicja iloczynu skalarnego i normy zadanej przez iloczyn skalarny.

(b) Twierdzenie o wykresie domkniętym wraz z definicją przestrzeni występującej w założeniach tego twierdzenia (bez dowodu).

(c) Twierdzenie Mazura; definicja słabej topologii (bez dowodu).

ZESTAW A

ANALIZA FUNKCJONALNA - SEKCJE NIETEORETYCZNE
EGZAMIN PISEMNY, 29 I 2013 R.
CZAS PISANIA: 2,5 GODZINY, NA ZADANIE 5 – PIERWSZE 45 MINUT

$\boxed{1}$ Sprawdzić, czy następujące odwzorowania liniowe są ciągłe, i wyznaczyć normę tych, które okażą się ciągłe.

(a) $\ell^1 \ni \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty}(2013x_{2n} - 2012x_{2n+1}) \in \mathbb{R}$.

(b) $\mathsf{C}([0,1]) \ni f \mapsto \{a_n f(a_n)\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^\infty$, gdzie $a_n = \frac{1}{n+2012}$;

$\boxed{2}$ Niech x i y będą elementami przestrzeni unitarnej takimi, że $\|x+3y\|^2 = 5$ oraz $\|3x+y\|^2 = 3$. Uzasadnić, że $4\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 4$.

$\boxed{3}$ Na przestrzeni $\mathsf{C}^1([-1,1])$ definiujemy rodziny funkcji $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ oraz $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ za pomocą wzorów:

(a) $p_n(f) = \sup\{|f(t)| : t \in (\frac{1}{n}, 1]\}$ $(n \geqslant 2)$, $p_1(f) = \int_{-1}^{1} |f'(t)| \mathrm{d}t$, $f \in \mathsf{C}^1([-1,1])$;

(b) $q_n(f) = \int_{-1}^{1-1/n} |2f(t) - f'(t)| \mathrm{d}t$, $n \geqslant 1$, $f \in \mathsf{C}^1([-1,1])$.

Czy są to rodziny seminorm (dowód wymagany tylko w przypadku (b))? Jeśli tak, to czy są one rozdzielające?

$\boxed{4}$ Dany jest ciąg funkcjonałów liniowych $\varphi_n : X \to \mathbb{R}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ na przestrzeni Banacha X, dla którego odwzorowanie

$$\Phi : X \ni x \mapsto \{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^2$$

jest dobrze określone. Uzasadnić, że Φ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy φ_n jest ciągłe dla każdego $n \geqslant 0$.

$\boxed{5}$ Pytania dotyczące wykładu.

(a) Definicja operatora rzutu ortogonalnego i twierdzenie o rzucie ortogonalnym wraz dowodem punktu (2).

(b) Definicja $*$-słabej topologii i twierdzenie Banacha-Alaoglu (bez dowodu).

(c) Twierdzenie Hahna–Banacha dla seminorm i o rozszerzaniu funkcjonału z zachowaniem normy (bez dowodu); definicja normy funkcjonału liniowego.

ZESTAW B

Analiza funkcjonalna - sekcje nieteoretyczne,
egzamin pisemny, 29 I 2013 r.
czas pisania: 2,5 godziny, na zadanie 5 – pierwsze 45 minut

$\boxed{1}$ Sprawdzić, czy następujące odwzorowania liniowe są ciągłe, i wyznaczyć normę tych, które okażą się ciągłe. Jeśli nie są dobrze określone - uzasadnić.

(a) $\mathsf{C}([0,1]) \ni f \mapsto \{a_n f(a_n)\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^{\infty}$, gdzie $a_n = \frac{2012}{n+2}$;

(b) $\ell^1 \ni \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty}(2012x_{2n} - 2013x_{2n+1}) \in \mathbb{R}$.

$\boxed{2}$ Na przestrzeni $\mathsf{C}^1([0,1])$ definiujemy rodziny funkcji $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ oraz $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ za pomocą wzorów:

(a) $p_n(f) = \sup\{|f(t)| : t \in (\frac{1}{n}, 1]\}$ $(n \geqslant 2)$, $p_1(f) = \int_0^1 |f'(t)|\mathrm{d}t$, $f \in \mathsf{C}^1([0,1])$;

(b) $q_n(f) = \int_{1/n}^1 |f(t) - 2f'(t)|\mathrm{d}t$, $n \geqslant 1$, $f \in \mathsf{C}^1(0,1])$.

Czy są to rodziny seminorm (dowód wymagany tylko w przypadku (b))? Jeśli tak, to czy są one rozdzielające?

$\boxed{3}$ Niech x i y będą elementami przestrzeni unitarnej takimi, że $\|x+2y\|^2 = 5$ oraz $\|2x+y\|^2 = 4$. Uzasadnić, że $9\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 18$.

$\boxed{4}$ Dany jest ciąg funkcjonałów liniowych $\varphi_n : X \to \mathbb{R}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ na przestrzeni Banacha X, dla którego odwzorowanie

$$\varPhi : X \ni x \mapsto \{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^1$$

jest dobrze określone. Uzasadnić, że $\varPhi$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy φ_n jest ciągłe dla każdego $n \geqslant 0$.

$\boxed{5}$ Pytania dotyczące wykładu.

(a) Definicja $*$-słabej topologii i twierdzenie Banacha-Alaoglu (bez dowodu).

(b) Twierdzenie Hahna–Banacha dla seminorm i o rozszerzaniu funkcjonału z zachowaniem normy (bez dowodu); definicja normy funkcjonału liniowego.

(c) Definicja operatora rzutu ortogonalnego i twierdzenie o rzucie ortogonalnym wraz dowodem punktu (2).

ZESTAW A

Analiza funkcjonalna - sekcje nieteoretyczne,

egzamin pisemny, 16 II 2013 r.

czas pisania: 2,5 godziny, na zadanie 5 – pierwsze 45 minut

$\boxed{1}$ Sprawdzić, czy następujące odwzorowania liniowe są ciągłe, i wyznaczyć normę tych, które okażą się ciągłe.

(a) $\mathsf{C}([-1,1]) \ni f \mapsto \left\{\frac{n}{n^2+1} f((-1)^n)\right\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^\infty$ względem normy $\|f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(t)| \mathrm{d}t$ w $\mathsf{C}([0,1])$;

(b) $\ell^2 \ni \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \mapsto 2x_{16} + 28x_2 + 35x_{2013} \in \mathbb{R}$.

$\boxed{2}$ Przypuśćmy, że układ seminorm $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ na przestrzeni wektorowej X jest taki, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} p_n(x)$ jest zbieżny dla każdego $x \in X$. Uzasadnić, że funkcja

$$X \ni x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x) \in [0,\infty)$$

jest normą wtedy i tylko wtedy, gdy rodzina seminorm $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest rozdzielająca.

$\boxed{3}$ Na rzeczywistej przestrzeni ℓ^2 określona jest norma $\|\cdot\|_1$ taka, że

$$\|\{x_n\}_{n=0}^{\infty}\|_1^2 = \max\left\{\sum_{n=0}^{\infty} x_{2n}^2, \sum_{n=0}^{\infty} x_{2n+1}^2\right\}, \quad \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^2.$$

Uzasadnić, że ta norma nie jest zadana przez żaden iloczyn skalarny. Czy podprzestrzeń domknięta generowana przez wektory e_{4k+1}, $k = 0,\ldots,2013$, jest przestrzenią unitarną względem tej normy? (Element $e_k \in \ell^2$ jest ciągiem, którego k-tym wyrazem jest 1, a pozostałe są zerowe.)

$\boxed{4}$ Niech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie słabo zbieżnym, ale nie zbieżnym w sensie normy, ciągiem elementów z przestrzeni Banacha. Uzasadnić, że $\limsup_{n\to\infty} \|x_n\|^{1/n} = 1$.

$\boxed{5}$ Pytania dotyczące wykładu.

(a) Twierdzenie o realizacji odległości w przestrzeni Hilberta z dowodem; definicja iloczynu i semi-iloczynu skalarnego.

(b) Twierdzenie o odwzorowaniu odwrotnym i definicja przestrzeni w nim występującej.

(c) Twierdzenie Mazura; definicja słabej topologii.

ZESTAW B

Analiza funkcjonalna - sekcje nieteoretyczne,
egzamin pisemny, 16 II 2013 r.
czas pisania: 2,5 godziny, na zadanie 5 – pierwsze 45 minut

$\boxed{1}$ Sprawdzić, czy następujące odwzorowania liniowe są ciągłe, i wyznaczyć normę tych, które okażą się ciągłe.

(a) $\mathsf{C}([0,2]) \ni f \mapsto \left\{\frac{n}{n+1} f(1+(-1)^n)\right\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^\infty$ względem normy $\|f\|_1 = \int_0^2 |f(t)| \mathrm{d}t$ w $\mathsf{C}([0,1])$;

(b) $\ell^2 \ni \{x_n\}_{n=0}^\infty \mapsto 8x_{2013} + 10x_2 + 43x_{16} \in \mathbb{R}$.

$\boxed{2}$ Niech $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ będzie rodziną seminorm na przestrzeni wektorowej X. Załóżmy, że szereg $\sum_{n=1}^\infty p_n(x)$ jest zbieżny dla każdego $x \in X$, a sumę tego szeregu oznaczmy przez $q(x)$. Uzasadnić, że $q : X \ni x \mapsto q(x) \in [0, \infty)$ jest normą wtedy i tylko wtedy, gdy rodzina seminorm $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ jest rozdzielająca.

$\boxed{3}$ Na rzeczywistej przestrzeni ℓ^2 określona jest norma $\|\cdot\|_1$ dana wzorem

$$\|\{x_n\}_{n=0}^\infty\|_1 = \Big(\sum_{n=0}^\infty x_{2n}^2\Big)^{1/2} + \Big(\sum_{n=0}^\infty x_{2n+1}^2\Big)^{1/2}, \quad \{x_n\}_{n=0}^\infty \in \ell^2.$$

Uzasadnić, że ta norma nie jest zadana przez żaden iloczyn skalarny. Czy podprzestrzeń domknięta generowana przez wektory e_{4k}, $k = 0, \ldots, 2013$, jest przestrzenią unitarną względem tej normy? (Element $e_k \in \ell^2$ jest ciągiem, którego k-tym wyrazem jest 1, a pozostałe są zerowe.)

$\boxed{4}$ Niech $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ będzie słabo zbieżnym, ale nie zbieżnym w sensie normy, ciągiem elementów z przestrzeni Banacha. Uzasadnić, że $\limsup_{n\to\infty} \|x_n\|^{1/n} = 1$.

$\boxed{5}$ Pytania dotyczące wykładu.

(a) Twierdzenie Riesza o postaci funkcjonału z dowodem; definicja iloczynu i semi-iloczynu skalarnego.

(b) Twierdzenie Mazura; definicja słabej topologii.

(c) Twierdzenie o odwzorowaniu odwrotnym i definicja przestrzeni w nim występującej.

Analiza funkcjonalna - sekcje nieteoretyczne, czas pisania: 2,5 godziny, na zadanie 5 – pierwsze 45 minut

$\boxed{1}$ Sprawdzić, czy następujące odwzorowania liniowe są ciągłe, i wyznaczyć normę tych, które okażą się ciągłe.

(a) $\mathsf{C}([0,2]) \ni f \mapsto \{2^{-n} f(1+(-1)^n)\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^1$ względem normy $\|f\|_1 = \int_0^2 |f(t)| \mathrm{d}t$ w $\mathsf{C}([0,1])$;

(b) $\ell^2 \ni \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \mapsto 13x_{2013} + 20x_3 + 38x_{13} \in \mathbb{R}$.

$\boxed{2}$ Na przestrzeni wielomianów $\mathbb{R}[x]$ wprowadzamy normę

$$\|p\| = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} |p^{(k)}(0)|^2 \Big)^{1/2}, \quad p \in \mathbb{R}[x].$$

Uzasadnić, że pochodzi ona od iloczynu skalarnego i wyznaczyć wartość tego iloczynu skalarnego dla elementów $(2x+1)^3$ oraz $3x^2 - 1$. (Uwaga: $p^{(k)}$ oznacza k-tą pochodną p, a $p^{(0)}$ oznacza p.)

$\boxed{3}$ Niech $p_k : \ell^1 \to [0, \infty)$, $k \in \mathbb{N}$, będzie dane wzorem $p_k(\{x_n\}_{n=0}^{\infty}) = \big| |x_0| + (-1)^k |x_k| \big|$. Rozstrzygnąć, dla jakich $k \in \mathbb{N}$ funkcja p_k jest seminormą. Czy rodzina wszystkich tych p_k, które są seminormami, jest rozdzielająca na ℓ^1?

$\boxed{4}$ Niech $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem funkcjonałów $X \to \mathbb{R}$ liniowych i ciągłych na przestrzeni Banacha X takim, że $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem zbieżnym dla każdego $x \in X$. Uzasadnić, że jeśli ciąg $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny w normie X, to ciąg $\{\varphi_n(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny.

$\boxed{5}$ Pytania dotyczące wykładu.

(a) Twierdzenie Banacha-Steinhausa – wersja dla rodzin odwzorowań i jej dowód.

(b) Nierówność Bessela; definicja semi-iloczynu i iloczynu skalarnego oraz przestrzeni Hilberta (bez dowodu).

(c) Warunki równoważne ciągłości funkcjonału na przestrzeni liniowo-topologicznej; definicja przestrzeni lokalnie wypukłej (bez dowodu).

Analiza Funkcjonalna — sekcje nieteoretyczne
I termin, 17 czerwca 2014

Część zadaniowa

1. W rzeczywistej przestrzeni ℓ^1 niech dane będą liniowo niezależne wektory $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $b = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Wykaż, że istnieje takie odwzorowanie liniowe i ograniczone $T : \ell^1 \to \ell^1$, że $T(a) = \{|a_n|^{2014}\}_{n=1}^{\infty}$ i $T(b) = b$.
Uwaga: nie trzeba pokazywać, że $\{|a_n|^{2014}\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^1$, natomiast należy dokładnie zacytować twierdzenie lub wniosek użyte w rozwiązaniu.

2. Zbadaj ciągłość następujących odwzorowań liniowych. Oblicz normę, jeśli odwzorowanie jest ciągłe. Wszystkie przestrzenie w tym zadaniu są nad ciałem liczb rzeczywistych, przez $\|\cdot\|_p$ oznaczamy standardową normę w ℓ^p.

(a) $\phi_1 : \ell^2 \ni \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mapsto -x_1 \in \mathbb{R}$, gdzie w ℓ^2 rozważamy normę $\|\cdot\|_2$;

(b) $\phi_2 : C[0,1] \ni f \mapsto f(0) \in \mathbb{R}$, gdzie na przestrzeni funkcji ciągłych $C[0,1]$ rozważamy normę $\|f\| = \int_0^1 |f(t)|dt$;

(c) $\ell^1 \times \ell^2 \ni (x, y) \mapsto x + y \in \ell^{\infty}$, gdzie w $\ell^1 \times \ell^2$ rozważamy normę $\|(x, y)\| = \|x\|_1 + \|y\|_2$, a w ℓ^{∞} normę $\|\cdot\|_{\infty}$;

(d) $C[0,1] \ni f \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n f(\frac{1}{n}) \in \mathbb{R}$, gdzie na $C[0,1]$ rozważamy normę supremum.

3. Niech $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ będzie zespoloną przestrzenią Hilberta z normą $\|\cdot\|$ i niech $f_0 \in \mathcal{H}$. Rozważmy odwzorowanie

$$t(g) = \|g\| + |\langle g, f_0\rangle|, \quad g \in \mathcal{H}.$$

Pokaż, że

(a) t jest normą na $\mathcal{H}$,

(b) t jest zupełna,

(c) jeśli $f_0 \neq 0$ i $\dim \mathcal{H} > 1$, to t nie pochodzi od żadnego iloczynu skalarnego.
Wskazówka: sprawdzić regułę równoległoboku dla f_0 i $f_1 \perp f_0$.

Część teoretyczna

1. Definicja: norma, przestrzeń unormowana (nie definiować przestrzeni wektorowej), przestrzeń Banacha.

2. Nierówność Cauchy'ego-Schwarza.

3. Twierdzenie Riesza o postaci funkcjonału.

4. Dowód.

5. Podaj warunek konieczny i wystarczający dla zbiorów E_1 i E_2 na unitarną równoważność przestrzeni $\ell^2(E_1)$ i $\ell^2(E_2)$ (bez uzasadnienia).

6. Definicja X'.

7. Twierdzenie o wykresie domkniętym.

8. Dowód.

9. Twierdzenie Banacha-Alaoglu.

10. Definicja: widmo operatora, widmo punktowe, relacja pomiędzy widmem a widmem punktowym.

Analiza Funkcjonalna — sekcje nieteoretyczne
II termin, 8 września 2014

Część zadaniowa

1. W ℓ^1 rozważamy rodziny seminorm

$$p_n(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = \Big|\sum_{j=1}^{n} x_j\Big|, \ n \geqslant 1, \quad \text{oraz} \quad q_n(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = \Big|\sum_{j=n}^{\infty} x_j\Big|, \ n \geqslant 1.$$

(a) Czy $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest rodziną rozdzielającą?
(b) Czy $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest rodziną rozdzielającą?
(c) Czy $\{p_n\}_{n=2}^{\infty}$ jest rodziną rozdzielającą?

2. Niech $\mathcal{H}$ będzie zespoloną przestrzenią Hilberta. Sprawdzić, czy dla dowolnego $h \in \mathcal{H}$ zachodzi

$$\|h\| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} |\langle f, h\rangle|.$$

3. Sprawdź ciągłość następujących odwzorowań i oblicz normę tych, które okażą się ciągłe. Wszystkie przestrzenie są rzeczywiste, w przestrzeni ℓ^p rozważamy standardową normę.
(a) $\phi_1 : \ell^2 \ni \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mapsto x_1 + x_2 \in \mathbb{R}$,
(b) $\phi_2 : \ell^{\infty} \ni \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mapsto x_1 + x_2 \in \mathbb{R}$,
(c) $\phi_3 : C^2([0,1]) \ni f \mapsto f''(0) \in \mathbb{R}$ względem normy

$$\|f\| = |f(0)| + \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)|$$

w przestrzeni $C^2([0,1])$ funkcji klasy C^2 na odcinku $[0,1]$,
(d) $\phi_4 : \ell^4 \ni \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{(n+1)^{1/2014}}$.

Część teoretyczna

1. Definicja: równoważność norm.
2. Wzory polaryzacyjne w przypadku zespolonym.
3. Twierdzenie Riesza o postaci funkcjonału.
4. Dla jakich podzbiorów A przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ zachodzi równość $A = A^{\perp\perp}$? (tylko odpowiedź, bez uzasadnienia).
5. Nierówność Bessela.
6. Podaj bazę ortonormalną w przestrzeni $L^2(T)$.
7. Twierdzenie o przestrzeni dualnej do ℓ^p $(1 < p < +\infty)$.
8. Szkic dowodu (wypisz poszczególne kroki).
9. Twierdzenie Hahna-Banacha, wersja zespolona dla seminorm.
10. Dowód wersji zespolonej (należy wykorzystać wersję rzeczywistą).

EGZAMIN Z ANALIZY FUNKCJONALNEJ 2014/2015

16 czerwca 2015

Każde zadanie proszę rozwiązywać na osobnej kartce.

Zadanie 1. Niech $C_b(\mathbb{R})$ oznacza przestrzeń rzeczywistych funkcji ciągłych i ograniczonych na $\mathbb{R}$ z normą supremum. Wykazać ciągłość następujących odwzorowań liniowych oraz wyliczyć ich normy:

(1) $T : C_b(\mathbb{R}) \ni f \to \left\{\dfrac{f(n)}{2^n}\right\}_{n=0}^{\infty} \in l_1$

(2) $S : C_b(\mathbb{R}) \ni f \to \{f(n)\}_{n=0}^{\infty} \in l_\infty$

Zadanie 2. Wskazać dwa przykłady pokazujące, że w twierdzeniu o realizacji odległości od zbioru wypukłego w przestrzeni Hilberta opuszczenie tylko warunku domkniętości oraz opuszczenie tylko warunku wypukłości nie wiedzie do tezy. Odpowiedzi uzasadnić.

Zadanie 3. Czy istnieje przestrzeń unormowana X oraz odwzorowanie liniowe i ciągłe $T\colon X \to X$ takie, że $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T^n x\| < \infty$ dla dowolnego $x \in X$ oraz $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\| = \infty$.

Zadanie 4. Niech $A : X \to Y$ będzie odwzorowaniem liniowym między przestrzeniami unormowanymi, a $B : Y' \to X'$ będzie odwzorowaniem liniowym danym wzorem $(B\varphi)(x) = \varphi(Ax)$, $\varphi \in Y'$, $x \in X$. Wykazać, że jeśli B jest poprawnie określone i ciągłe, to A jest również ciągłe i ma normę równą $\|B\|$.

Zadanie 5. Podać następujące twierdzenia, definicje i fakty.

(a) Podaj definicję przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ i funkcjonału liniowego. Wypowiedz twierdzenie Riesza o postaci ciągłego funkcjonału liniowego na przestrzeni Hilberta. Gdzie w dowodzie korzystamy z zupełności przestrzeni $\mathcal{H}$?

(b) Wypowiedz wersję analityczną nad $\mathbb{R}$ Twierdzenia Hahna-Banacha. Ponadto podaj:
-definicję jednowymiarowego rozszerzenia funkcjonału wyjściowego z dowodu tego twierdzenia,
-przykładowe zastosowanie tego twierdzenia (nie do innych wersji Twierdzania Hahna-Banacha) do innych twierdzeń które były na wykładzie.

(c) Podaj definicję przestrzeni liniowo topologicznej oraz funkcjonału Minkowskiego. Wypowiedz twierdzenie o oddzielaniu zbiorów wypukłych. Podaj definicję zbioru, którego funkcjonał Minkowskiego jest używany w dowodzie tego twierdzenia.

EGZAMIN Z ANALIZY FUNKCJONALNEJ 2014/2015

2 września 2015

Każde zadanie proszę rozwiązywać na osobnej kartce.

Zadanie 1. Niech $c_{00} = \{\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R} \colon \exists k \in \mathbb{Z}_+$ takie, że $x_n = 0$ dla $n \geqslant k\}$ oraz niech $c_0 = \{\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R} \colon \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$ (w obu przestrzeniach rozważamy normy $\|\{x_n\}_{n=0}^{\infty}\| = \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} |x_n|$). Sprawdzić ciągłość następujących odwzorowań liniowych oraz wyliczyć normy tych odwzorowań, które są ciągłe:

(1) $T_1 \colon c_{00} \ni \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \to \{\frac{1-(-1)^n}{2} x_{n+1}\}_{n=0}^{\infty} \in c_{00}$,

(2) $T_2 \colon \ell^{\infty} \ni \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \to \{\frac{1}{2^n} x_{n+1}\}_{n=0}^{\infty} \in c_0$.

Zadanie 2. Wskazać dwa przykłady pokazujące, że w twierdzeniu Banacha o wykresie domkniętym opuszczenie tylko warunku liniowości odwzorowania oraz opuszczenie tylko warunku zupełności przestrzeni nie wiedzie do tezy. Odpowiedzi uzasadnić.

Zadanie 3. Wyznaczyć odległość w ℓ^2 elementu $\{\frac{1}{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ od zbioru

$$\Big\{\{x_n\}_{n=0}^{\infty} : 3x_{2014} = 4x_{2015}\Big\}.$$

Zadanie 4. Wskazać przykład odwzorowania liniowego $T : X \to Y$ między przestrzeniami unormowanymi takiego, że T^2 jest ciągłe zaś T nie jest ciągłe.

Zadanie 5. Podać następujące twierdzenia, definicje i fakty.

(a) Podaj definicję układu ortonormalnego oraz bazy ortonormalnej w przestrzeni Hilberta. Wypisz nierówność Bessela oraz twierdzenie o tożsamości Parsevala. Udowodnij nierówność Bessela w przypadku, gdy układ ortonormalny jest co najwyżej przeliczalny.

(b) Podaj definicję F-przestrzeni oraz odwzorowania otwartego. Wypowiedz twierdzenia Banacha o odwzorowaniu otwartym oraz wykresie domkniętym. Do jakiego odwzorowania stosujemy twierdzenie o odwzorowaniu odwrotnym przy dowodzeniu twierdzenia Banacha o wykresie domkniętym?

(c) Jak zadaje się topologię słabą na przestrzeni liniowo-topologicznej. Wypowiedz twierdzenie o słabym domknięciu oraz twierdzenie Mazura wynikające z tego twierdzenia. Z jakiego twierdzenia korzystamy przy dowodzeniu twierdzenia o słabym domknięciu?

EGZAMIN Z ANALIZY FUNKCJONALNEJ 2015/2016

17 czerwca 2016

Każde zadanie proszę rozwiązywać na osobnej kartce.

Zadanie 1. Dla $A \subseteq \mathbb{R}$ oznaczmy przez $\chi_A \colon \mathbb{R} \to \{0,1\}$ funkcję charakterystyczną zbioru A. Zbadać ciągłość następujących odwzorowań liniowych oraz wyliczyć normy tych odwzorowań, które okażą się ciągłe:

(1) $\varphi_1 \colon l^\infty \ni \{a_n\}_{n=1}^\infty \mapsto \sum_{n=1}^\infty a_n \chi_{(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]} \in L^1[0,1]$,

(2) $\varphi_2 \colon c_{00} \ni \{a_n\}_{n=1}^\infty \mapsto \sum_{n=1}^\infty a_n \chi_{(n,n+1]} \in L^1(\mathbb{R})$, gdzie w c_{00} rozważamy normę indukowaną z l^∞.

Zadanie 2. Niech X i Y będą przestrzeniami Banacha oraz niech $j : X \to Y$ będzie izometrycznym odwzorowaniem liniowym. Czy istnieje izometryczne odwzorowanie liniowe z Y' do X'?

Zadanie 3. Wyznaczyć odległość w ℓ^3 elementu $\{\frac{1}{n+1}\}_{n=0}^\infty$ od zbioru

$$\Big\{\{x_n\}_{n=0}^\infty \in \ell^3 : x_{2015} = 4x_{2016}\Big\}.$$

Zadanie 4. Niech $\|\cdot\|_a$ oraz $\|\cdot\|_b$ będą dwiema normami na przestrzeni wektorowej X, takimi że (dowolny) funkcjonał liniowy $f \colon X \to \mathbb{K}$ jest ciągły względem normy $\|\cdot\|_a$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągły względem $\|\cdot\|_b$. Udowodnić, że wtedy obie normy są równoważne.

Zadanie 5. Podać następujące twierdzenia, definicje i fakty.

(a) Podać definicję dopełnienia ortogonalnego w przestrzeni unitarnej. Podać wzór uzasadniający, że $A^\perp$ jest domkniętą podprzestrzenią wektorową. Podać twierdzenie o podwójnym dopełnieniu ortogonalnym oraz wnioski z tego twierdzenia.

(b) Wypowiedzieć twierdzenie Banacha o odwzorowaniu otwartym. Ponadto podać:
-definicję odwzorowania otwartego oraz F-przestrzeni,
-przykładowe zastosowanie tego twierdzenia do innych twierdzeń które były na wykładzie.
Do jakich zbiorów w dowodzie tego twierdzenia dla przestrzeni Banacha korzysta się z twierdzenia Baire'a?

(c) Podać definicję funkcjonału Minkowskiego μ_A (wraz z definicjami własności, które ma spełniać zbiór A). Wypisać podstawowe własności tego funkcjonału. Uzasadnić, że:

$$\mu_A(x+y) \leqslant \mu_A(x) + \mu_A(y), \quad x, y \in X.$$

EGZAMIN Z ANALIZY FUNKCJONALNEJ 2015/2016

1 września 2016

Każde zadanie proszę rozwiązywać na osobnej kartce.

Zadanie 1. Sprawdzić ciągłość poniższych odwzorowań liniowych. Wyznaczyć normy tych, które okażą się ciągłe:

(i) $C([0,1]) \ni f \mapsto \int_0^1 \frac{f(t^2)}{\sqrt{t}}\, dt \in \mathbb{K}$;

(ii) $\ell_1 \ni \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_n \in \mathbb{K}$, gdy w ℓ_1 rozważamy normę $\|\cdot\|_\infty$.

Zadanie 2. Wykazać, że zbiór $A = \{(x_1, x_2, \dots) \in l^2 : x_1 = x_2\}$ jest domknięty w l^2.

Zadanie 3. Niech x i y będą elementami zespolonej przestrzeni unitarnej takimi, że $\|x+y\| = 2$, $\|x + \mathrm{i}y\| = 1$ oraz $\|x - \mathrm{i}y\| = 3$. Obliczyć $\|x-y\|$ (tzn. podać dokładną wartość liczbową). Czy na podstawie tych danych można wyznaczyć wartość $\|x\|$?

Zadanie 4. Niech $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ będzie układem ortonormalnym w zespolonej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Dla ciągu $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ liczb zespolonych wykazać równoważność następujących warunków:

(i) $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest elementem zespolonej przestrzeni ℓ_2,

(ii) istnieje ciągły funkcjonał liniowy $\varphi\colon \mathcal{H} \to \mathbb{C}$, taki że $\varphi(e_n) = a_n$ dla wszelkich $n \geqslant 0$.

Zadanie 5. Podać następujące twierdzenia, definicje i fakty.

(a) Podaj definicję operatora rzutu ortogonalnego na podprzestrzeń domkniętą w przestrzeni Hilberta. Wypisz podstawowe własności i uzasadnij liniowość i ciągłość tego operatora.

(b) Podaj definicję ciągu Cauchy'ego w przestrzeni unormowanej. Wypowiedz twierdzenia Banacha-Steinhausa. W jaki sposób korzystamy w dowodzie tego twierdzenia z twierdzenia Baire'a (do jakich zbiorów stosujemy i co dzięki twierdzeniu Baire'a uzyskujemy)?

(c) Podaj definicję zbioru słabo pochłaniającego, zbalansowanego, wypukłego oraz przestrzeni lokalnie-wypukłej. Wypowiedz twierdzenie o oddzielaniu zbiorów wypukłych. Do jakiego funkcjonału oraz jakiej seminormy w dowodzie tego twierdzenia stosujemy twierdzenie Hahna-Banacha?

Analiza funkcjonalna
egzamin pisemny, 20 VI 2017 r.

Czas pisania: 2,5 godziny, na zadanie 5 – pierwsze 45 minut.
Każde zadanie na osobnej kartce!

$\boxed{1}$ Rozstrzygnąć, czy następujące odwzorowania liniowe są ciągłe, i wyznaczyć normę tych, które okażą się ciągłe.

(a) $\ell^1 \ni \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \mapsto 2016x_{2017} - 2017x_{2016} \in \mathbb{K}$;

(b) $\mathsf{C}([0,1]) \ni f \mapsto \left\{\int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} f(t)\,\mathrm{d}t\right\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^2$.

$\boxed{2}$ Niech X będzie rzeczywistą przestrzenią unitarną oraz niech $x, y \in X$. Wykazać równoważność następujących warunków:

(1) istnieje $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ takie, że $(1+a^2)\|x+y\|^2 = \|ax+y\|^2 + \|x+ay\|^2$,
(2) x jest prostopadłe do y.

$\boxed{3}$ Na przestrzeni c ciągów zbieżnych rozpatrujemy rodzinę seminorm $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ określoną wzorami:

$$p_0(\{x_n\}_{n=0}^{\infty}) = \lim_{n\to\infty} x_n, \quad p_k(\{x_n\}_{n=0}^{\infty}) = |x_{k-1} + x_k - 2x_{k+1}| \text{ dla } k \geqslant 1.$$

Pokazać, że

(1) jeżeli $x = \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathsf{c}$ spełnia $p_n(x) = 0$ dla $n \geqslant 0$, to $x_0 + 2x_1 = 0$,
(2) rodzina seminorm $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ nie jest rozdzielająca,
(3) jeżeli do rodziny $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dołożymy seminormę $q(\{x_n\}_{n=0}^{\infty}) = |x_0 - x_1|$, to otrzymamy rozdzielającą rodzinę seminorm.

$\boxed{4}$ Niech X i Y będą przestrzeniami Banacha, a $T : X \to Y$ – injektywnym ograniczonym odwzorowaniem liniowym. Niech $\mathcal{R}(T) = \{Tx \colon x \in X\}$. Wykazać, że $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \to X$ jest ograniczone wtedy i tylko wtedy, gdy podprzestrzeń $\mathcal{R}(T)$ jest domknięta w Y.

$\boxed{5}$ Pytania dotyczące wykładu.

(a) Nierówność Bessela i twierdzenie o rzucie ortogonalnym na przestrzeń generowaną przez skończony układ ortonormalny wraz z <u>dowodem</u> tego ostatniego.

(b) Twierdzenie Banacha-Steinhausa – wersja dla rodzin odwzorowań (bez dowodu).

(c) Twierdzenie Hahna-Banacha – wersja analityczna nad $\mathbb{R}$ i wersja dla seminorm (bez dowodu).

Analiza funkcjonalna
egzamin pisemny, 15 IX 2017 r.

Czas pisania: 2,5 godziny, na zadanie 5 – pierwsze 45 minut.
Każde zadanie na osobnej kartce!

$\boxed{1}$ Rozstrzygnąć, czy następujące odwzorowania liniowe są ciągłe, i wyznaczyć normę tych, które okażą się ciągłe.

(a) $\ell^{3/2} \ni \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \mapsto 12x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 2x_4 + x_5 \in \mathbb{K}$;

(b) $\mathsf{C}([0,1]) \ni f \mapsto f - f(0) \in \mathsf{C}([0,1])$.

$\boxed{2}$ W przestrzeni wielomianów $\mathbb{R}[x]$ określamy układ seminorm:

$$p_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |f(\tfrac{k}{n})|, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Czy układ seminorm $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest rozdzielający? Jeśli tak, to czy funkcjonał $\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ dany wzorem $\varphi(f) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$, $f \in \mathbb{R}[x]$, jest ciągły względem topologii zadanej przez ten układ seminorm?

$\boxed{3}$ Niech X i Y będą przestrzeniami unormowanymi z normami $\|\cdot\|_X$ i $\|\cdot\|_Y$ (odpowiednio), a $T : X \to Y$ – odwzorowaniem liniowym. Określamy normę $\|x\|_T = \|x\|_X + \|Tx\|_Y$, $x \in X$, na przestrzeni X. Uzasadnić, że normy $\|\cdot\|_X$ i $\|\cdot\|_T$ są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy T jest odwzorowaniem ciągłym.

$\boxed{4}$ Niech $\mathcal{H}$ będzie rzeczywistą niezerową przestrzenią Hilberta, a E – jej bazą ortonormalną. Niech V oznacza zbiór wszystkich $h \in \mathcal{H}$ równo odległych od wszystkich elementów E, czyli

$$V = \{h \in \mathcal{H} \colon \|h - e\| = \|h - \tilde{e}\| \text{ dla wszystkich } e, \tilde{e} \in E\}.$$

Pokazać, że $V = \{0\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim \mathcal{H} = \infty$.

$\boxed{5}$ Pytania dotyczące wykładu.

(a) Definicja semi-iloczynu skalarnego, iloczynu skalarnego i normy przez niego zadanej; twierdzenie Jordana–von Neumanna (bez dowodu).

(b) Twierdzenie o odwzorowaniu otwartym, definicja F-przestrzeni; krok II dowodu tego twierdzenia.

(c) Twierdzenie Banacha-Alaoglu, definicja topologii słabej i $*$-słabej (bez dowodu).

EGZAMIN Z ANALIZY FUNKCJONALNEJ 2017/2018

20 czerwca 2018

Każde zadanie proszę rozwiązywać na osobnej kartce.

Zadanie 1. Zbadać ciągłość następujących odwzorowań liniowych oraz wyliczyć normy tych odwzorowań, które okażą się ciągłe:

(1) $\ell^2 \ni \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mapsto \left\{\frac{x_n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$,

(2) $C([0,1]) \ni f \mapsto f - f(1)g \in C([0,1])$, gdzie $g(x) = x$.

Zadanie 2. Na przestrzeni ℓ^∞ określamy seminormy:

$$p_n(x) = |2018x_n - x_{n+1}|, \quad x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^\infty,\ n \geqslant 1.$$

Sprawdzić, czy rodziny seminorm $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ oraz $\{p_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ są rozdzielające.

Zadanie 3. Niech X i Y będą takimi przestrzeniami unormowanymi, dla których istnieje liniowa bijekcja ograniczona $A : X \to Y$ taka, że odwzorowanie A^{-1} jest również ograniczone. Pokazać, że przestrzeń X jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzeń Y jest zupełna.

Zadanie 4. Niech $\ell^2 = \left\{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}\colon\ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\right\}$ będzie przestrzenią nad $\mathbb{R}$ ze standardowym iloczynem skalarnym oraz niech $A_n : \ell^2 \to \ell^2$, $n \geqslant 1$, będą odwzorowaniami liniowymi i ciągłymi. Załóżmy, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle A_n x, y\rangle| < \infty, \quad x, y \in \ell^2.$$

Uzasadnić, że $\sup_{n\geqslant 1} \|A_n\| < \infty$, ale niekoniecznie $\sum_{n=1}^{\infty} \|A_n\| < \infty$.

Zadanie 5. Podać następujące twierdzenia, definicje i fakty.

(a) Podaj definicję przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Wypowiedz twierdzenie Riesza o postaci ciągłego funkcjonału liniowego na przestrzeni Hilberta. Czy zupełność przestrzeni $\mathcal{H}$ jest tu istotna (podać dowód lub kontrprzykład)?

(b) Podaj definicję F-przestrzeni oraz odwzorowania otwartego. Wypowiedz twierdzenia Banacha o odwzorowaniu otwartym oraz wykresie domkniętym. Udowodnij twierdzenie Banacha o wykresie domkniętym.

(c) Podać definicję funkcjonału Minkowskiego μ_A (wraz z definicjami własności, które ma spełniać zbiór A). Wypisać podstawowe własności tego funkcjonału. W dowodzie jakiego twierdzenia został użyty funkcjonał Minkowskiego.

EGZAMIN Z ANALIZY FUNKCJONALNEJ 2017/2018

3 września 2018

Każde zadanie proszę rozwiązywać na osobnej kartce.

Zadanie 1. Zbadać ciągłość następujących odwzorowań liniowych oraz wyliczyć normy tych odwzorowań, które okażą się ciągłe:

(1) $c_{00} \ni \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to \{x_n + x_{2n}\}_{n=1}^{\infty} \in c_{00}$,

(2) $c_{00} \ni \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mapsto \{\sum_{j=n}^{\infty} x_j\}_{n=1}^{\infty} \in c_{00}$,

gdzie w punktach (1) oraz (2) norma w c_{00} dana jest wzorem

$$\|\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|.$$

Zadanie 2. Niech x, y, z będą elementami rzeczywistej przestrzeni unitarnej. Zakładamy, że $\|x+y+z\|^2 = 14$, $\|x+y-z\|^2 = 2$, $\|x-y+z\|^2 = 6$ oraz $\|x-y-z\|^2 = 10$. Wykazać, że $x \perp y$.

Zadanie 3. Niech $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem wszystkich liczb wymiernych z przedziału $[0,1]$. Na przestrzeni funkcji ciągłych $C[0,1]$ określamy normę $||\cdot||$ wzorem

$$||f|| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |f(q_n)|.$$

Rozstrzygnąć czy norma $||\cdot||$ jest zupełna (*uwaga:* nie trzeba uzasadniać, że $||\cdot||$ jest normą).

Zadanie 4. Niech X będzie przestrzenią unormowaną. Ustalmy $x_0 \in X$ oraz $\varphi_0 \in X'$. Wykazać, że norma odwzorowania $B(X) \ni A \mapsto \varphi_0(Ax_0) \in \mathbb{K}$ jest równa $\|x_0\|\|\varphi_0\|$.

Zadanie 5. Podać następujące twierdzenia, definicje i fakty.

(a) Podaj definicję układu ortonormalnego oraz bazy ortonormalnej w przestrzeni Hilberta. Wypisz nierówność Bessela oraz twierdzenie o tożsamości Parsevala (równoważne warunki).

(b) Wypowiedz wersję analityczną nad $\mathbb{R}$ oraz wersję dla seminorm Twierdzenia Hahna-Banacha. Jak z wersji dla seminorm wywnioskować wersję Twierdzenie Hahna-Banacha dla przestrzeni unormowanych (podaj dowód)?

(c) Podaj definicję zbioru słabo pochłaniającego, zbalansowanego, wypukłego oraz przestrzeni lokalnie-wypukłej. Wypowiedz twierdzenie o oddzielaniu zbiorów wypukłych. Podaj definicję zbioru, którego funkcjonał Minkowskiego jest użyty w dowodzie twierdzenia o oddzielaniu zbiorów wypukłych.

EGZAMIN Z ANALIZY FUNKCJONALNEJ 2018/2019

19 czerwca 2019

Każde zadanie proszę rozwiązywać na osobnej kartce.

Zadanie 1. Zbadać ciągłość następujących odwzorowań liniowych oraz wyliczyć normy tych odwzorowań, które okażą się ciągłe:

(1) $\mathsf{C}([0,1]) \ni f \mapsto f(0) \in \mathbb{R}$ względem normy

$$\|f\| = \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t + \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|, \quad f \in \mathsf{C}([0,1]),$$

(2) $\mathsf{c}_{00} \ni \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \mapsto \sum_{n=2018}^{\infty} x_n$ względem normy

$$\|\{x_n\}_{n=0}^{\infty}\| = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^{2019}\Big)^{1/2019}, \quad \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathsf{c}_{00}.$$

Zadanie 2. Dla ustalonego $\beta \in \mathbb{R}$ określamy rodzinę seminorm $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ na ℓ^1 wzorem

$$p_k(\{x_n\}_{n=0}^{\infty}) = |x_k - \beta x_{k+1}|, \quad \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^1, \ k \geqslant 0.$$

Dla jakich β jest to rozdzielająca rodzina seminorm?

Zadanie 3. Rozstrzygnąć, czy istnieją normy $\|\cdot\|_{1,a}$ i $\|\cdot\|_{2,a}$ oraz $\|\cdot\|_{1,b}$ i $\|\cdot\|_{2,b}$ w $\mathbb{R}^2$, dla których normy $\|\cdot\|_a$ oraz $\|\cdot\|_b$ w $\mathbb{R}^4$ zadane wzorami

(a) $\|(x_1,x_2,x_3,x_4)\|_a = \max\{\|(x_1,x_2)\|_{1,a}, \|(x_3,x_4)\|_{2,a}\}$,

(b) $\|(x_1,x_2,x_3,x_4)\|_b = (\|(x_1,x_2)\|_{1,b}^2 + \|(x_3,x_4)\|_{2,b}^2)^{1/2}$,

pochodzą od pewnego iloczynu skalarnego w $\mathbb{R}^4$.

Zadanie 4. Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią unormowaną taką, że X' jest przestrzenią unitarną. Uzasadnić, że X' jest przestrzenią Hilberta oraz norma $\|\cdot\|$ na X pochodzi od pewnego iloczynu skalarnego.

Zadanie 5. Sformułować następujące twierdzenia, definicje i fakty.

(a) Podaj definicję układu ortonormalnego oraz bazy ortonormalnej w przestrzeni Hilberta. Wypisz nierówność Bessela oraz twierdzenie o tożsamości Parsevala (wraz z warunkami równoważnymi).

(b) Wypisz twierdzenie Hahna-Banacha (wersję analityczną nad $\mathbb{R}$) oraz twierdzenie o istnieniu granicy Banacha. Podaj dowód twierdzenia o istnieniu granicy Banacha.

(c) Podaj definicję zbioru słabo pochłaniającego, zbalansowanego, wypukłego oraz przestrzeni lokalnie wypukłej. Wypisz twierdzenie o oddzielaniu zbiorów wypukłych. Wypisz dowolny wniosek z tego twierdzenia.

EGZAMIN Z ANALIZY FUNKCJONALNEJ 2018/2019

2 września 2019

Każde zadanie proszę rozwiązywać na osobnej kartce.

Zadanie 1. Dane jest odwzorowanie liniowe $\varphi : C[-1,1] \to C[-1,1]$ (przestrzeń $C[-1,1]$ rozważana jest z normą supremum), gdzie

$$\Big(\varphi(f)\Big)(x) = 5f(\sin^5 x) - 3f(\cos^3 x) \text{ dla } x \in [-1,1].$$

Rozstrzygnąć, czy odwzorowanie φ jest ciągłe. Jeśli tak, to wyznaczyć jego normę.

Zadanie 2. Niech $C^1[0,1]$ oznacza przestrzeń funkcji rzeczywistych rożniczkowalnych na przedziale $[0,1]$ z ciągłą pochodną. Dla ustalonej liczby $a \geqslant 0$ zadajemy normę $||\cdot||_a$ w tej przestrzeni jako

$$||f||_a = \left(\int_0^1 f^2(t)\,dt\right)^{\frac{1}{2}} + a|f'(0)|.$$

Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste nieujemne a, dla których norma $||\cdot||_a$ pochodzi od pewnego iloczynu skalarnego (*uwaga:* nie trzeba uzasadniać, że $||\cdot||_a$ jest normą).

Zadanie 3. Niech $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych oraz niech $\{q_k\}_{k=0}^{\infty}$ będzie układem seminorm na przestrzeni wielomianów $\mathbb{R}[x]$ danym wzorem $q_k(p) = |p^{(k)}(x_k)|$ dla $p \in \mathbb{R}[x]$, gdzie $p^{(k)}$ oznacza $k-$tą pochodną funkcji p. Wykazać, że układ $\{q_k\}_{k=0}^{\infty}$ jest rozdzielający. Czy układ $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ jest także rozdzielający?

Zadanie 4. Niech X będzie rzeczywistą przestrzenią Banacha, zaś $T : X \to \ell_1$ odwzorowaniem liniowym o następującej własności: dla dowolnego ciągu $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ o wyrazach w zbiorze $\{-1,1\}$ odwzorowanie liniowe na X dane wzorem

$$X \ni x \to \sum_{k=1}^{\infty} c_k T_k(x) \in \mathbb{R}, \text{ gdzie } T(x) = (T_1(x), T_2(x), \ldots)$$

jest ciągłe. Wykazać, że odwzorowanie T jest ciągłe.

Zadanie 5. Podać następujące twierdzenia, definicje i fakty.

(a) Podać definicję dopełnienia ortogonalnego w przestrzeni unitarnej. Podać wzór uzasadniający, że $A^{\perp}$ jest domkniętą podprzestrzenią wektorową. Podać twierdzenie o podwójnym dopełnieniu ortogonalnym oraz wnioski z tego twierdzenia.

(b) Podaj definicję ciągu Cauchy'ego w przestrzeni unormowanej oraz definicje normy i przestrzeni Banacha. Wypowiedz twierdzenia Banacha-Steinhausa. Podaj dowód tego twierdzenia.

(c) Podać definicję funkcjonału Minkowskiego μ_A (wraz z definicjami własności, które ma spełniać zbiór A). Wypisać podstawowe własności tego funkcjonału. W dowodzie jakiego twierdzenia został użyty funkcjonał Minkowskiego?