

Informacje

Zadania, które zostały już rozwiązane, mają kółka obok swych numerów zamalowane na czarno.

Jeśli w zadaniu występują podpunkty (a), (b), itd. (a nie (i), (ii), itd.), każdy podpunkt tego zadania to osobne zadanie.

W rozwiązaniu Zadania X można korzystać z Zadania Y (nawet, jeśli Zadanie Y nie zostało jeszcze rozwiązane!), jeśli Zadanie Y występuje w tym zbiorze zadań wcześniej niż Zadanie X oraz Zadanie Y nie ma gwiazdki (chyba, że Zadanie X też ma gwiazdkę).

Notacja i terminologia

Dla dowolnej rodziny $\mathcal{A}$ podzbiorów zbioru X , $\sigma(\mathcal{A})$ oznacza najmniejszą σ -algebrę podzbiorów zbioru X , która zawiera wszystkie zbiory z $\mathcal{A}$ (jest to σ -algebra *generowana* przez $\mathcal{A}$). O σ -algebrze zbiorów powiemy, że jest *ośrodkowa*, jeśli jest generowana przez rodzinę (co najwyżej) przeliczalną.

Miarę μ na σ -algebrze $\mathfrak{M}$ podzbiorów zbioru X nazywamy:

- *σ -skończoną*, jeśli zbiór X można przedstawić jako sumę $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ gdzie zbiory A_n należą do $\mathfrak{M}$ oraz mają skończoną miarę μ (czyli $\mu(A_n) < \infty$);
- *atomem*, jeśli zbiór wartości miary μ jest dwuelementowy;
- *bezatomową*, jeśli spełniony jest następujący warunek: dla dowolnego zbioru $A \in \mathfrak{M}$ o dodatniej mierze μ istnieje zbiór $B \in \mathfrak{M}$, taki że $B \subset A$ oraz $0 < \mu(B) < \mu(A)$;
- *punktowo skończoną*, jeśli zbiory mierzalne o skończonej mierze μ pokrywają zbiór X .

Jeśli X jest przestrzenią topologiczną, to $\mathfrak{B}(X)$ oznacza σ -algebrę generowaną przez wszystkie zbiory otwarte w X . Elementy tej σ -algebry to zbiory *borelowskie*, a funkcje z X w $\mathbb{R}$ mierzalne względem $\mathfrak{B}(X)$ nazywamy funkcjami *borelowskimi*. Ogólniej, jeśli $(Z, \mathfrak{M})$ oraz (Ω, Σ) to przestrzenie mierzalne, wtedy funkcję $f: Z \rightarrow \Omega$ nazywamy *$\mathfrak{M}$ - Σ -mierzalną* (lub krótko *mierzalną*), jeśli $f^{-1}(B) \in \mathfrak{M}$ dla dowolnego zbioru $B \in \Sigma$. Jeśli f jest bijekcją $\mathfrak{M}$ - Σ -mierzalną, a jej funkcja odwrotna f^{-1} jest Σ - $\mathfrak{M}$ -mierzalna, wtedy f nazywamy *izomorfizmem* przestrzeni mierzalnych.

Dla rodziny zbiorów $\mathcal{A}$ oraz zbioru C określamy $\mathcal{A} \upharpoonright C$ jako rodzinę zbiorów $\{A \cap C: A \in \mathcal{A}\}$.

Przestrzeń *polska* to ośrodkowa przestrzeń topologiczna, która jest metryzowalna w sposób zupełny.

Uwaga: W zadaniach można używać następującego twierdzenia Aleksandrowa-Hausdorffa: podprzestrzeń przestrzeni metryzowalnej w sposób zupełny jest metryzowalna w sposób zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy jest to podzbiór typu $\mathcal{G}_\delta$.

Zestaw 1

1.1.● (3) Podać przykład niezerowej miary $\mu: \mathfrak{M} \rightarrow [0, 1]$ (określonej na σ -algebrze podzbiorów zbioru X), o następujących własnościach:

- dla dowolnego punktu $x \in X$ istnieje zbiór $A \in \mathfrak{M}$, taki że $x \in A$ oraz $\mu(A) = 0$;
- $\mu(B) \in \{0, 1\}$ dla dowolnego zbioru $B \in \mathfrak{M}$.

1.2.● (4) Wykazać, że jeśli μ jest punktowo skończoną miarą bezatomową na zbiorze X , to dla każdego punktu x zbioru X istnieje zbiór mierzalny A , taki że $x \in A$ oraz $\mu(A) = 0$.

1.3.● (5) Wykazać, że jeśli μ jest miarą σ -skończoną określoną na ośrodkowej σ -algebrze $\mathfrak{M}$, to μ jest bezatomowa wtedy i tylko wtedy, gdy każdy punkt zbioru X należy do zbioru mierzalnego o mierze zero.

1.4.● (5) Wykazać, że jeśli $\mu: \mathfrak{M} \rightarrow [0, \infty]$ jest miarą bezatomową, to dla dowolnego zbioru $A \in \mathfrak{M}$ oraz liczby t spełniającej $0 < t < \mu(A)$ istnieje zbiór mierzalny $B \subset A$, taki że $\mu(B) = t$.

1.5.● (5) Niech X będzie zwartą przestrzenią metryzowalną. Oznaczmy przez $\mathcal{A}$ najmniejszą rodzinę funkcji $u: X \rightarrow \mathbb{R}$, która ma następujące własności:

- $\mathcal{A}$ zawiera wszystkie funkcje ciągłe z X w $\mathbb{R}$;
- jeśli funkcje $u_1, u_2, \dots \in \mathcal{A}$ są wspólnie ograniczone i zbiegają punktowo do funkcji $u: X \rightarrow \mathbb{R}$, to funkcja u także należy do $\mathcal{A}$.

Wykazać, że $\mathcal{A}$ pokrywa się z rodziną wszystkich ograniczonych funkcji borelowskich z X w $\mathbb{R}$.

Czy w powyższym zadaniu możemy metryzowalność przestrzeni pominąć lub zastąpić jakimś innym warunkiem (topologicznym)?

1.6.● (4) Dla skończonej niezerowej miary μ na zbiorze X wykazać równoważność następujących warunków:

- całka względem μ jest funkcjonałem multiplikatywnym, tj. $\int_X fg \, d\mu = \int_X f \, d\mu \cdot \int_X g \, d\mu$ dla dowolnych ograniczonych funkcji mierzalnych $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$;
- $\mu(A) \in \{0, 1\}$ dla dowolnego zbioru mierzalnego $A \subset X$.

1.7.● (5) Wykazać, że istnieje rodzina $\mathcal{J}$ podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$, która spełnia następujące warunki:

- $\mathbb{N} \notin \mathcal{J}$ oraz $\{n\} \in \mathcal{J}$ dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$;
- $A \cup B \in \mathcal{J}$ dla wszelkich $A, B \in \mathcal{J}$;
- jeśli $B \in \mathcal{J}$ oraz $A \subset B$, wtedy $A \in \mathcal{J}$;
- dla dowolnego zbioru $A \subset \mathbb{N}$: $A \in \mathcal{J}$ lub $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{J}$.

1.8.● (3) Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną wszystkich podzbiorów A zbioru $\mathbb{N}$, dla których ciąg $(\frac{|A \cap I_n|}{n})_{n=1}^\infty$ jest zbieżny (gdzie $|B|$ oznacza moc zbioru oraz $I_n \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, n\}$). Niech $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ będzie funkcją zbioru daną wzorem $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A \cap I_n|}{n}$. Wykazać, że:

- $\mathcal{F}$ nie jest σ -algebrą;
- $A \cup B \in \mathcal{F}$ oraz $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ dla dowolnych rozłącznych zbiorów $A, B \in \mathcal{F}$;
- istnieje ciąg $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ parami rozłącznych zbiorów, takich że zbiór $A \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ należy do $\mathcal{F}$, ale $\mu(A) \neq \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)$.

1.9.● (5) Czy rodzina $\mathcal{F}$ z poprzedniego zadania jest algebrą zbiorów?

1.10.● (4) Niech K będzie zwartą przestrzenią metryzowalną, a $\mu: \mathfrak{B}(K) \rightarrow \{0, 1\}$ dowolną miarą, taką że $\mu(K) = 1$. Wykazać, że wtedy $\mu = \delta_a$ dla pewnego punktu $a \in K$ (gdzie $\delta_a(A) = 1$, gdy $a \in A$ oraz $\delta_a(A) = 0$ w przeciwnym przypadku; δ_a to tzw. *delta Diraca* [lub *miara Diraca*] w punkcie a).

1.11.● (3) Niech $\mathcal{R}$ będzie σ -pierścieniem podzbiorów zbioru X , tzn. taką rodziną zbiorów, że:

- $\emptyset \in \mathcal{R}$;
- $A \setminus B \in \mathcal{R}$ dla wszelkich $A, B \in \mathcal{R}$;
- ilekroć $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{R}$, tylekroć $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{R}$.

Wykazać, że:

$$\sigma(\mathcal{R}) = \{A \subset X: A \in \mathcal{R} \vee X \setminus A \in \mathcal{R}\}.$$

Zestaw 2

- 2.1.○ (3) Niech $f_1, f_2, \dots: X \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągiem funkcji $\mathfrak{M}$ -mierzalnych (gdzie $\mathfrak{M}$ to σ -algebra podzbiorów zbioru X). Wykazać, że wtedy zbiór złożony z wszystkich $x \in X$, takich że ciąg $f_1(x), f_2(x), \dots$ jest zbieżny (w $\mathbb{R}$), należy do $\mathfrak{M}$.
- 2.2.● (5) Niech X i Y będą ośrodkowymi przestrzeniami metryzowalnymi, a $f: X \rightarrow Y$ dowolną funkcją borelowską. Wykazać, że wtedy wykres funkcji f jest zbiorem borelowskim w $X \times Y$.
- 2.3**.○ (5) Niech Z będzie przestrzenią metryzowalną mocy nie większej niż $2^{\aleph_0}$, a $(X, \mathfrak{M})$ dowolną przestrzenią mierzalną. Wykazać, że jeśli funkcje $f, g: X \rightarrow Z$ są mierzalne (tzn. są $\mathfrak{M}$ - $\mathfrak{B}(Z)$ -mierzalne), to zbiór $\{x \in X: f(x) = g(x)\}$ należy do $\mathfrak{M}$.
- 2.4.● (4) Niech $(X, \mathfrak{M})$ oraz (Ω, Σ) będą dwiema przestrzeniami mierzalnymi. Wykazać, że jeśli istnieją zbiory $X' \in \mathfrak{M}$ oraz $\Omega' \in \Sigma$, takie że przestrzenie mierzalne $(X, \mathfrak{M})$ oraz $(\Omega', \Sigma \upharpoonright \Omega')$ są izomorficzne i podobnie $(X', \mathfrak{M} \upharpoonright X')$ i (Ω, Σ) są izomorficzne, to również $(X, \mathfrak{M})$ oraz (Ω, Σ) są izomorficzne.
- 2.5.● (4) Niech X będzie ośrodkową przestrzenią metryzowalną. Wykazać, że zbiór $A \subset X$ jest borelowski wtedy i tylko wtedy, gdy dowolny punkt zbioru A ma otoczenie U (w X), takie że $A \cap U \in \mathfrak{B}(X)$.
- 2.6.○ (5) Podać przykład przestrzeni metryzowalnej X i jej podzbioru A o tej własności, że każdy punkt przestrzeni X ma otoczenie otwarte U , takie że $U \cap A \in \mathfrak{B}(X)$, ale $A \notin \mathfrak{B}(X)$.
- 2.7**.● (5) Wykazać, że jeśli podzbiór A przestrzeni metryzowalnej X ma tę własność, że każdy punkt zbioru A ma otoczenie U (w X), takie że $A \cap U$ jest zbiorem typu $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$ w X , to zbiór A jest tegoż typu w X .
- 2.8.○ (3) Niech X i Y będą dwoma σ -zwartymi lokalnie zwartymi przestrzeniami T_2 , a F zbiorem domkniętym w $X \times Y$. Wykazać, że rzut zbioru F na przestrzeń X (czyli zbiór $\{x: (x, y) \in F\}$) jest zbiorem borelowskim w X .
- 2.9**.○ (5) Czy rzut na pierwszą współrzędną każdego zbioru borelowskiego w $[0, 1]^2$ jest zbiorem borelowskim?
- 2.10.○ (3) Niech X będzie przestrzenią topologiczną, a Y jej dowolną podprzestrzenią. Wykazać, że $\mathfrak{B}(Y) = \mathfrak{B}(X) \upharpoonright Y$. Wywnioskować stąd, że jeśli $Y \in \mathfrak{B}(X)$, to $Z \subset Y$ należy do $\mathfrak{B}(Y)$ wtedy i tylko wtedy, gdy należy do $\mathfrak{B}(X)$.
- 2.11.● (3) Niech μ będzie σ -skończoną miarą określoną na σ -algebrze $\mathfrak{M}$. Wykazać, że istnieje miara $\lambda: \mathfrak{M} \rightarrow [0, 1]$, taka że dla dowolnego zbioru $A \in \mathfrak{M}$ zachodzi równoważność:

$$\mu(A) = 0 \iff \lambda(A) = 0.$$

- 2.12.● (4) Niech $\mu: \mathfrak{M} \rightarrow [0, \infty]$ będzie dowolną miarą na zbiorze X . Określamy $\mu^*: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ formułą $\mu^*(A) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{\mu(B): A \subset B \in \mathfrak{M}\}$. Wykazać, że μ^* to miara zewnętrzna przedłużająca miarę μ , taka że

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(A_n)$$

dla dowolnego wstępującego ciągu zbiorów $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset X$.

- 2.13.○ (3) Podać przykład miary zewnętrznej określonej na zbiorze potęgowym pewnego zbioru, która nie ma własności wyrażonej w wystawionym wzorze w poprzednim zadaniu.

Zestaw 3

3.1.● (3) Wykazać, że dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór U otwarty w $\mathbb{R}$, taki że $\bar{U} = [0, 1]$ oraz $|U| < \varepsilon$, gdzie $|U|$ oznacza jednowymiarową miarę Lebesgue’a zbioru U .

3.2.● (4) Niech $\mathfrak{M}$ będzie σ -algebrą na zbiorze X , a $T \subset X$ zbiorem nienależącym do $\mathfrak{M}$. Podać „zgrabny” wzór na $\sigma(\mathfrak{M} \cup \{T\})$. (Odpowiedź uzasadnić).

3.3.● (4) Wykazać, że niezerowa miara skończona μ jest atomem wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzeń $L^1(\mu)$ jest jednowymiarowa.

3.4.● (5) Dla rodziny $\mathcal{A}$ podzbiorów zbioru X oznaczmy przez $\text{mon}(\mathcal{A})$ najmniejszą rodzinę $\mathcal{D}$ podzbiorów zbioru X o własnościach:

- $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$;
- jeśli $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ i $A_n \in \mathcal{D}$ ($n > 0$), wtedy $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$;
- jeśli $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ i $A_n \in \mathcal{D}$ ($n > 0$), wtedy $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$.

Wykazać, że jeśli $\mathcal{A}$ jest algebrą zbiorów, to $\text{mon}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$.

3.5.○ (4) Wywnioskować z poprzednich zadań, że jeśli μ i λ to dwie skończone miary borelowskie na $\mathbb{R}$, takie że $\mu((-\infty, a)) = \lambda((-\infty, a))$ dla dowolnej liczby $a \in \mathbb{R}$, to $\mu = \lambda$.

3.6.● (5) Wykazać, że jeśli μ jest miarą σ -skończoną określoną na ośrodkowej σ -algebrze, to przestrzeń Banacha $L^1(\mu)$ jest ośrodkowa.

3.7.● (4) Niech μ będzie borelowską miarą probabilistyczną na $[0, 1]$, taką że $\mu(\{a\}) = 0$ dla wszelkich $a \in [0, 1]$ oraz $\mu(U) > 0$ dla dowolnego niepustego zbioru U otwartego w $[0, 1]$. Wykazać, że wtedy istnieje homeomorfizm $h: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, taki że $\mu(A) = |h(A)|$ dla dowolnego zbioru borelowskiego $A \subset [0, 1]$ (gdzie $|\cdot|$ oznacza jednowymiarową miarę Lebesgue’a). Ile jest takich homeomorfizmów?

3.8.● (3) Niech $A_1, A_2, \dots$ będzie ciągiem zbiorów z σ -algebry $\mathfrak{M}$, a μ taką miarą na $\mathfrak{M}$, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty.$$

Wykazać, że wtedy zbiór $Z \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ należy do $\mathfrak{M}$ oraz $\mu(Z) = 0$.

3.9.● (5) Podać przykład miary bezatomowej, która nie jest punktowo skończona.

3.10.● (4) Wykazać, że jeśli $f_n: Z \rightarrow X_n$ (dla $n > 0$) jest funkcją $\mathfrak{M}$ -mierzalną (gdzie $\mathfrak{M}$ jest σ -algebrą na Z), a X_n jest ośrodkową przestrzenią metryzowalną, to zestawienie $(f_n)_{n=1}^{\infty}: Z \ni z \mapsto (f_n(z))_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ jest odwzorowaniem $\mathfrak{M}$ -mierzalnym (przy czym na zbiorze $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ rozważamy topologię produktową).

3.11.● (4) Niech μ będzie σ -skończoną miarą borelowską na przestrzeni polskiej X . Wykazać, że istnieje ciąg $K_1, K_2, \dots$ zbiorów zwartych w X , taki że $\mu(X \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n)) = 0$.

3.12.● (5) Niech μ będzie σ -skończoną miarą borelowską na przestrzeni polskiej X . Wykazać, że dla dowolnego zbioru borelowskiego $B \in \mathfrak{B}(X)$ istnieje ciąg $K_1, K_2, \dots$ zwartych podzbiorów zbioru B , taki że $\mu(B \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n)) = 0$.

Zestaw 4

Na potrzeby tego zestawu zadań, wprowadźmy kilka klasycznych pojęć. *Ciągły obraz* (odp. *ciągły różnowartościowy obraz*) jakiejś przestrzeni topologicznej to obraz tej przestrzeni przez odwzorowanie ciągłe (odp. przez ciągłe odwzorowanie różnowartościowe). *Przestrzeń Suslina* (odp. *zbiór Łuzina*) to przestrzeń metryzowalna, która jest ciągłym (odp. ciągłym różnowartościowym) obrazem pewnej przestrzeni polskiej. Przestrzeń polska jest *zerowymiarowa*, gdy zbiory otwarto-domknięte tworzą bazę jej topologii. Dla uproszczenia sformułowań zadań, przez $\mathcal{N}$ oznaczmy przestrzeń $\prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{N}_1$ z topologią produktową.

Zasadniczy cel tego zestawu to udowodnienie twierdzeń sformułowanych w Zadaniach 4.17, 4.19, 4.21, 4.25, 4.27.

Uwaga: Nierzadko w definicji przestrzeni Suslina warunek metryzowalności zastępuje się aksjomatem oddzielania T_2 . Na potrzeby tego zestawu zadań, ograniczamy się wyłącznie do przestrzeni metryzowalnych.

- 4.1.○ (5) Wykazać, że istnieje różnowartościowa funkcja borelowska $u: [0, 1]^{\omega} \rightarrow [0, 1]$, której zbiór wartości jest podzbiorem klasycznego zbioru Cantora.
- 4.2.● (5) Wykazać, że dowolny zbiór borelowski w przestrzeni polskiej jest zbiorem Łuzina.
- 4.3.○ (5) Wywnioskować z poprzednich zadań, że nieprzeliczalny podzbiór borelowski przestrzeni polskiej zawiera zbiór zwarty homeomorficzny z klasycznym zbiorem Cantora.
- 4.4.○ (4) Udowodnić, że odcinek $[0, 1]$ jest ciągłym różnowartościowym obrazem polskiej przestrzeni zerowymiarowej. Wywnioskować stąd, że kostka Hilberta $[0, 1]^{\omega}$ także jest ciągłym różnowartościowym obrazem polskiej przestrzeni zerowymiarowej.
- 4.5.● (5) Wykazać, że każda przestrzeń polska jest ciągłym różnowartościowym obrazem domkniętego podzbioru przestrzeni $\mathcal{N}$.
- 4.6.○ (3) Wykazać, że co najwyżej przeliczalny produkt kartezjański (z topologią produktową) przestrzeni Suslina oraz suma co najwyżej przeliczalnie wielu przestrzeni Suslina (położonych we wspólnej przestrzeni metryzowalnej) są przestrzeniami Suslina.
- 4.7.○ (4) Wykazać, że część wspólna co najwyżej przeliczalnie wielu przestrzeni Suslina (położonych we wspólnej przestrzeni metryzowalnej) jest przestrzenią Suslina.
- 4.8.● (4) Udowodnić, że niepusta przestrzeń Suslina jest ciągłym obrazem przestrzeni $\mathcal{N}$.
- 4.9.● (5) Wykazać, że podzbiór borelowski przestrzeni Suslina jest przestrzenią Suslina.
- 4.10.○ (3) Udowodnić, że jeśli $\mathcal{E}$ oraz $\mathcal{F}$ to dwie co najwyżej przeliczalne rodziny podzbiorów przestrzeni metryzowalnej X , takie że:

$$\forall E \in \mathcal{E} \forall F \in \mathcal{F} \exists B \in \mathfrak{B}(X): E \subset B, B \cap F = \emptyset,$$

wtedy istnieje zbiór borelowski $C \subset X$, taki że $\bigcup \mathcal{E} \subset C$ oraz $C \cap (\bigcup \mathcal{F}) = \emptyset$.

- 4.11.○ (5) Niech X i Y będą dwoma rozłącznymi przestrzeniami Suslina położonymi we wspólnej przestrzeni metryzowalnej Z . Wykazać, że istnieje zbiór borelowski $B \subset Z$, taki że $X \subset B$ oraz $B \cap Y = \emptyset$.

Do zadania może zostać podana wskazówka, ale wtedy jego wartość spadnie do oceny 4.

- 4.12.○ (4) Korzystając z poprzednich zadań, udowodnić, że jeśli $A_1, A_2, \dots$ to parami rozłączne przestrzenie Suslina położone w przestrzeni metryzowalnej Z , to istnieją parami rozłączne zbiory borelowskie $B_1, B_2, \dots \subset Z$, takie że $A_n \subset B_n$ dla wszelkich $n > 0$.

4.13.○ (3) Wywnioskować z poprzednich zadań, że podzbiór A przestrzeni Suslina S jest zbiorem borelowskim w S wtedy i tylko wtedy, gdy A i $S \setminus A$ są przestrzeniami Suslina.

4.14.○ (4) Wywnioskować z poprzednich zadań, że jeśli S jest przestrzenią Suslina, X ośrodkową przestrzenią metryzowalną, a $u: S \rightarrow X$ funkcją borelowską, to $u(S)$ jest przestrzenią Suslina.

4.15.○ (5) Korzystając z poprzednich zadań, wykazać, że jeśli S jest przestrzenią Suslina, X ośrodkową przestrzenią metryzowalną, $u: S \rightarrow X$ funkcją borelowską, a T przestrzenią Suslina w X , to zbiór $u^{-1}(T)$ jest przestrzenią Suslina.

4.16*.○ (5) Wykazać, że zbiór Łuzina położony w przestrzeni metryzowalnej jest w niej zbiorem borelowskim. Wywnioskować stąd, że zbiory Łuzina to dokładnie zbiory borelowskie w przestrzeniach polskich.

Do zadania może zostać podana wskazówka, ale wtedy straci ono gwiazdkę.

4.17.○ (4) Wywnioskować z poprzednich zadań, że jeśli B jest zbiorem borelowskim w przestrzeni polskiej, Y jest przestrzenią polską, a $u: B \rightarrow Y$ jest różnowartościową funkcją borelowską, to zbiór $C \stackrel{\text{def}}{=} u(B)$ jest borelowski w Y , a u jest izomorfizmem przestrzeni mierzalnych $(B, \mathfrak{B}(B))$ i $(C, \mathfrak{B}(C))$.

Komentarz. Powyższa własność jest znana jako twierdzenie Suslina.

4.18.○ (4) Wywnioskować z poprzedniego zadania, że jeśli B jest zbiorem borelowskim w przestrzeni polskiej, a zbiory $C_1, C_2, \dots \subset B$ są borelowskie i takie, że dla dowolnych dwóch różnych punktów $a, b \in B$ istnieje indeks $k > 0$, dla którego zbiór $\{a, b\} \cap C_k$ jest jednoelementowy, wtedy σ -algebra generowana przez ten ciąg zbiorów pokrywa się z $\mathfrak{B}(B)$.

4.19.○ (4) Korzystając z poprzednich zadań, wykazać, że każdy nieprzeliczalny zbiór borelowski w przestrzeni polskiej jest borelowsko izomorficzny z odcinkiem $[0, 1]$.

Komentarz. W niektórych źródłach powyższa własność nazywana jest twierdzeniem Kuratowskiego.

4.20.○ (5) Korzystając z poprzednich zadań, wykazać, że dla dowolnej probabilistycznej miary borelowskiej μ na $[0, 1]$, która znika na singletonach, istnieje izomorfizm borelowski $u: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, taki że $\mu(A) = |u(A)|$ ($A \in \mathfrak{B}([0, 1])$), gdzie $|\cdot|$ to jednowymiarowa miara Lebesgue'a.

4.21.○ (4) Korzystając z poprzednich zadań, udowodnić, że jeśli B jest zbiorem borelowskim w przestrzeni polskiej, μ jest niezerową σ -skończoną miarą borelowską na B , która znika na singletonach, to dla $I \stackrel{\text{def}}{=} [0, \mu(B)] \cap \mathbb{R}$ istnieje izomorfizm borelowski $f: I \rightarrow B$, taki że $\mu(A) = |f^{-1}(A)|$ ($A \in \mathfrak{B}(B)$), gdzie $|\cdot|$ to jednowymiarowa miara Lebesgue'a.

4.22.○ (3) Korzystając z poprzedniego zadania, wykazać, że jeśli μ jest niezerową σ -skończoną miarą borelowską na zbiorze borelowskim B w przestrzeni polskiej, to dla $I \stackrel{\text{def}}{=} [0, \mu(B)] \cap \mathbb{R}$ istnieje suriekcja borelowska $u: I \rightarrow B$, taka że $\mu(A) = |u^{-1}(A)|$ ($A \in \mathfrak{B}(B)$), gdzie $|\cdot|$ to jednowymiarowa miara Lebesgue'a.

4.23*.● (5) Udowodnić, że nieprzeliczalna przestrzeń Suslina ma moc $2^{\aleph_0}$.

4.24.○ (3) Korzystając z poprzedniego zadania, udowodnić, że dla dowolnej nieprzeliczalnej liczby kardynalnej $\alpha \leq 2^{\aleph_0}$ istnieje podzbiór odcinka $[0, 1]$, który ma moc α i nie jest przestrzenią Suslina.

4.25.○ (5) Wywnioskować z poprzednich zadań, że jeśli S jest przestrzenią Suslina, X przestrzenią metryzowalną, a $f: S \rightarrow X$ funkcją borelowską, to zbiór $f(S)$ jest przestrzenią ośrodkową.

4.26**.○ (5) Udowodnić, że istnieje przestrzeń Suslina zawarta w $[0, 1]$, która nie jest zbiorem borelowskim.

4.27*.○ (5) Niech μ będzie σ -skończoną miarą borelowską na przestrzeni metryzowalnej X , a $S \subset X$ przestrzenią Suslina. Wykazać, że wtedy istnieją zbiory borelowskie $A, B \subset X$, takie że $A \subset S \subset B$ oraz $\mu(B \setminus A) = 0$ (oznacza to, że S jest zbiorem mierzalnym względem uzupełnienia miary μ).

Do zadania może zostać podana wskazówka, ale wtedy straci ono gwiazdkę.

Zestaw 5

Na potrzeby dwóch najbliższych zestawów zadań, wprowadzamy następujące oznaczenia i terminologię. Przez $\mathbb{R}_+$ oznaczamy przedział $[0, \infty)$. Dla przestrzeni topologicznej X przez $\mathcal{G}(X)$, $\mathcal{F}(X)$ oraz $\mathcal{K}(X)$ oznaczamy rodziny, odpowiednio, wszystkich otwartych, wszystkich domkniętych oraz wszystkich zwartych podzbiorów tej przestrzeni. Funkcję zbioru $m: \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathbb{R}_+$ nazywamy $\mathcal{K}$ -miarą (ang. *content*), jeśli dla dowolnych zbiorów $K, L \in \mathcal{K}(X)$ zachodzą własności:

- $m(K) \leq m(L)$ ilekroć $K \subset L$;
- $m(K \cup L) \leq m(K) + m(L)$;
- $m(K \cup L) = m(K) + m(L)$ ilekroć $K \cap L = \emptyset$.

$\mathcal{K}$ -miara m jest *regularna*, gdy:

$$m(K) = \inf\{m(L) : L \in \mathcal{K}(X), K \subset \text{int } L\} \quad (K \in \mathcal{K}(X)).$$

Grupą topologiczną nazywamy dowolną grupę $(G, \cdot)$ wyposażoną w taką topologię T_2 , że odwzorowanie $G \times G \ni (x, y) \mapsto x^{-1}y \in G$ jest ciągle (w topologii produktowej dziedziny).

Jeśli X jest lokalnie zwartą przestrzenią T_2 , $\mathfrak{M}$ jest σ -algebrą podzbiorów przestrzeni X zawierającą wszystkie zbiory otwarte, a $\mu: \mathfrak{M} \rightarrow [0, \infty]$ jest dowolną miarą, o zbiorze $A \in \mathfrak{M}$ powiemy, że jest:

- *wewnętrznie $[\mu]$ -regularny*, gdy $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \in \mathcal{K}(A)\}$;
- *zewewnętrznie $[\mu]$ -regularny*, gdy $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \in \mathcal{G}(X), A \subset U\}$;
- *$[\mu]$ -regularny*, gdy jest zarówno zewnętrze, jak i wewnętrznie regularny;
- *σ -skończony*, gdy A można przedstawić jako $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, gdzie $A_n \in \mathfrak{M}$ oraz $\mu(A_n) < \infty$;
- *σ -zwarty*, gdy A można przedstawić jako sumę mnogościową ciągu zbiorów zwartych (tj. $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ dla pewnych $K_1, K_2, \dots \in \mathcal{K}(X)$).
- *prezwarty*, gdy jego domknięcie jest zwarte w X ;
- *otoczeniem*, gdy ma niepuste wnętrze w X .

Powyższą miarę μ nazywamy:

- *właściwą*, gdy $\mu(K) < \infty$ dla wszelkich zbiorów $K \in \mathcal{K}(X)$;
- *wewnętrznie regularną* (odp. *zewewnętrznie regularną*; *regularną*), gdy każdy zbiór $A \in \mathfrak{M}$ jest takież;
- *miarą Radona*, gdy jest miarą właściwą, zewnętrze regularną i każdy zbiór otwarty w X jest wewnętrznie regularny.

Przez $C_c(X)$ oznaczamy zbiór wszystkich funkcji ciągłych $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ o *nośniku zwartym*, tj. takich, że zbiór $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ ma domknięcie zwarte w X . Powiemy, że funkcja zbioru $m: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ (gdzie $\mathcal{A}$ to rodzina podzbiorów zbioru Z) jest *niezmiennicza* względem odwzorowania $p: Z \rightarrow Z$, gdy $p^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ oraz $m(p^{-1}(A)) = m(A)$ dla dowolnego zbioru $A \in \mathcal{A}$. W tej sytuacji mówimy także, że odwzorowanie p *zachowuje* funkcję zbioru m .

Dla dwóch miar μ i λ określonych na wspólnej σ -algebrze $\mathfrak{M}$ podzbiorów zbioru Z , powiemy, że μ jest *absolutnie ciągła względem* λ , co zapisujemy symbolicznie „ $\mu \ll \lambda$ ”, gdy:

$$\forall A \in \mathfrak{M}: (\lambda(A) = 0 \implies \mu(A) = 0).$$

Z kolei powiemy, że te dwie miary są *wzajemnie singularne*, co zapisujemy symbolicznie „ $\mu \perp \lambda$ ”, gdy istnieją rozłączne zbiory mierzalne A i B , takie że $\mu(Z \setminus A) = 0 = \lambda(Z \setminus B)$. Ogólniej, powiemy, że miary $\nu_s: \mathfrak{M} \rightarrow [0, \infty]$ (gdzie s jest indeksem ze zbioru S o dowolnej mocy) są:

- *oddzielnie wzajemnie singularne*, gdy $\nu_s \perp \nu_t$ dla dowolnych dwóch różnych indeksów $s, t \in S$;
- *łącznie wzajemnie singularne*, gdy istnieje rodzina $\{A_s\}_{s \in S}$ parami rozłącznych zbiorów mierzalnych, taka że $\nu_s(X \setminus A_s) = 0$ dla dowolnego indeksu $s \in S$.

5.1.○ (3) Podać przykład rodziny mocy $2^{\aleph_0}$ złożonej z łącznie wzajemnie singularnych borelowskich miar probabilistycznych na $[0, 1]$. Uzasadnić, że każda rodzina miar łącznie wzajemnie singularnych jest rodziną miar oddzielnie wzajemnie singularnych.

5.2.○ (4) Podać przykład rodziny borelowskich miar probabilistycznych na $[0, 1]$, które są oddzielnie wzajemnie singularne, ale nie łącznie wzajemnie singularne.

5.3.○ (4) Uzasadnić, że każda (co najwyżej) przeliczalna rodzina miar oddzielnie wzajemnie singularnych jest rodziną miar łącznie wzajemnie singularnych.

5.4.○ (3) Pokazać, że jeśli μ_0, μ_1, μ_2 to takie miary, że $\mu_0 \perp \mu_1$ oraz $\mu_0 \perp \mu_2$, to $\mu_0 \perp a\mu_1 + b\mu_2$ dla dowolnych liczb $a, b > 0$.

5.5.○ (3) Niech λ, μ oraz $\mu_1, \mu_2, \dots$ będą miarami określonymi na wspólnej σ -algebrze $\mathfrak{M}$, przy czym:

$$\forall A \in \mathfrak{M}: \mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A).$$

Pokazać, że jeśli $\lambda \perp \mu_n$ dla dowolnego indeksu n , to także $\lambda \perp \mu$.

5.6.○ (3) Wykazać, że nieujemna kombinacja liniowa skończonych miar dyskretnych (zob. dwa poprzednie zadania) jest miarą dyskretną, a nieujemna kombinacja liniowa skończonych miar bezatomowych jest miarą bezatomową.

5.7.○ (3) Wykazać, że jeśli dwie miary określone na tej samej σ -algebrze są atomami, to albo są one wzajemnie singularne, albo są identyczne.

5.8.○ (4) Wykazać, że każda skończona miara bezatomowa jest wzajemnie singularna z każdą miarą (określoną na tej samej σ -algebrze), która jest atomem.

5.9.○ (5) Niech $\mu: \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ będzie skończoną miarą na zbiorze Z . Wykazać, że istnieje dokładnie jedna para (μ_d, μ_c) miar na $\mathfrak{M}$, taka że:

- $\mu = \mu_c + \mu_d$;
- μ_c jest miarą bezatomową;
- μ_d jest miarą *dyskretną*, tzn. dla każdego zbioru $A \in \mathfrak{M}$, takiego że $\mu_d(A) > 0$ istnieje zbiór $B \in \mathfrak{M}$ zawarty w A , który jest atomem dla μ_d , tzn. $\mu_d(B) > 0$ oraz $\{\mu_d(C): C \in \mathfrak{M}, C \subset B\} = \{0, \mu_d(B)\}$.

5.10.○ (5) Wykazać, że każda niezerowa skończona miara dyskretna $\mu: \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ (zob. poprzednie zadanie) jest postaci $\mu(A) = \sum_{n=1}^N \mu_n(A)$, gdzie $N \in \mathbb{N}_1 \cup \{\infty\}$ oraz μ_n (o ile $\mathbb{N}_1 \ni n \leq N$) to skończona miara na $\mathfrak{M}$, która jest atomem.

- 5.11.○ (3) Wykazać, że jeśli $\mu: \mathfrak{B}(X) \rightarrow [0, \infty]$ jest miarą Radona na lokalnie zwartej T_2 -przestrzeni X , to $\mu \upharpoonright \mathcal{K}(X)$ jest regularną $\mathcal{K}$ -miarą.
- 5.12.○ (3) Wykazać, że jeśli $\mu, \lambda: \mathfrak{M} \rightarrow [0, \infty]$ to dwie miary Radona na lokalnie zwartej T_2 -przestrzeni X , takie że $\mu \upharpoonright \mathcal{K}(X) = \lambda \upharpoonright \mathcal{K}(X)$, to $\mu = \lambda$.
- 5.13.○ (5) Niech $\mu: \mathfrak{B}(X) \rightarrow [0, \infty]$ będzie miarą Radona na lokalnie zwartej T_2 -przestrzeni X . Pokazać, że każdy zbiór $A \in \mathfrak{B}(X)$, taki że $\mu(A) < \infty$, jest regularny. Wywnioskować stąd, że skończona miara borelowska jest regularna wtedy i tylko wtedy, gdy jest miarą Radona.
- 5.14.○ (5) Niech μ i λ będą dwoma borelowskimi miarami skończonymi na lokalnie zwartej przestrzeni T_2 , takimi że $\mu \ll \lambda$. Wykazać, że jeśli λ jest miarą regularną, to μ też.
- 5.15.○ (5) Niech μ i λ będą dwoma borelowskimi właściwymi miarami na σ -zwartej lokalnie zwartej przestrzeni T_2 , takimi że $\mu \ll \lambda$. Wykazać, że jeśli λ jest miarą Radona, to μ też.
- 5.16.○ (4) Wykazać, że suma dwóch borelowskich miar regularnych (odp. Radona) na lokalnie zwartej przestrzeni T_2 jest również miarą regularną (odp. Radona).
- 5.17.○ (3) Podać przykład metryzowalnej przestrzeni lokalnie zwartej X , dla której $\mathfrak{B}(X) \neq \sigma(\mathcal{K}(X))$.
- 5.18.○ (4) Niech m będzie $\mathcal{K}$ -miarą na lokalnie zwartej T_2 -przestrzeni X i niech $m_{reg}: \mathcal{K}(X) \rightarrow [0, \infty]$ będzie funkcją zbioru określoną wzorem:

$$m_{reg}(K) = \inf\{m(L): L \in \mathcal{K}(X), K \subset \text{int } L\}.$$

Wykazać, że m_{reg} jest regularną $\mathcal{K}$ -miarą oraz że jest to najmniejsza regularna $\mathcal{K}$ -miara, taka że $m \leq m_{reg}$. Uzasadnić także, że jeśli $h: X \rightarrow X$ jest homeomorfizmem, który zachowuje $\mathcal{K}$ -miarę m , to także zachowuje $\mathcal{K}$ -miarę m_{reg} .

- 5.19.○ (5) Niech m będzie $\mathcal{K}$ -miarą na lokalnie zwartej T_2 -przestrzeni X i niech $m': \mathcal{G}(X) \rightarrow [0, \infty]$ będzie funkcją zbioru określoną wzorem:

$$m'(U) = \sup\{m(K): K \in \mathcal{K}(U)\}.$$

Pokazać, że dla dowolnych zbiorów $U, V, W_1, W_2, \dots$ otwartych w X zachodzą własności:

- $m'(U) \leq m'(V)$ ilekroć $U \subset V$;
- $m'(U) \leq m(\bar{U})$ ilekroć U jest zbiorem prezwartym;
- $m'(\bigcup_{n=1}^{\infty} W_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m'(W_n)$;
- $m'(\bigcup_{n=1}^{\infty} W_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m'(W_n)$ ilekroć zbiory $W_1, W_2, \dots$ są parami rozłączne.

Uzasadnić, że jeśli homeomorfizm $h: X \rightarrow X$ zachowuje $\mathcal{K}$ -miarę m , to także zachowuje funkcję zbioru m' ; oraz że funkcje zbioru m' oraz $(m_{reg})'$ pokrywają się.

- 5.20.○ (4) Niech m będzie $\mathcal{K}$ -miarą na lokalnie zwartej T_2 -przestrzeni X i niech $m': \mathcal{G}(X) \rightarrow [0, \infty]$ będzie funkcją z poprzedniego zadania. Określamy funkcję $m^*: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ wzorem:

$$m^*(A) = \inf\{m'(U): U \in \mathcal{G}(X), A \subset U\}.$$

Wykazać, że m^* to miara zewnętrzna, która przedłuża funkcję m' .

- 5.21.○ (4) Niech m oraz m^* będą takie, jak w poprzednim zadaniu. Pokazać, że m^* przedłuża m_{reg} ; oraz że m^* przedłuża m wtedy i tylko wtedy, gdy m jest regularną $\mathcal{K}$ -miarą.

5.22.○ (5) Niech m^* będzie funkcją zbioru z Zadania 5.20 oraz $\mathfrak{M} \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{M}(m^*)$ będzie σ -algebrą zbiorów mierzalnych w sensie Carathéodory’ego. Wykazać, że $\mathcal{K}(X) \subset \mathfrak{M}$.

5.23.○ (5) Niech m^* oraz $\mathfrak{M}$ będą takie, jak w poprzednim zadaniu. Wykazać, że $\mathcal{G}(X) \subset \mathfrak{M}$ i uzasadnić, że $\mu \stackrel{\text{def}}{=} m^* \upharpoonright \mathfrak{B}(X)$ jest miarą Radona na X . Wywnioskować stąd i z poprzednich zadań, że każda regularna $\mathcal{K}$ -miara jednoznacznie przedłuża się do borelowskiej miary Radona.

5.24.○ (4) Niech μ oraz λ będą dwoma borelowskimi miarami Radona na lokalnie zwartej T_2 -przestrzeni X , takimi że

$$\forall f \in C_c(X): \int_X f \, d\mu = \int_X f \, d\lambda.$$

Pokazać, że wtedy $\mu = \lambda$.

5.25.○ (5) Niech X będzie lokalnie zwartą przestrzenią T_2 , a $L: C_c(X) \rightarrow \mathbb{R}$ nieujemnym funkcjonałem liniowym (tj. $L(f) \geq 0$ dla wszelkich funkcji $f: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ z $C_c(X)$). Dla $K \in \mathcal{K}(X)$ niech $\mathcal{F}(K)$ oznacza rodzinę wszystkich funkcji $f: X \rightarrow [0, 1]$ z $C_c(X)$, które są stałe równe 1 na zbiorze K . Niech $\rho: \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zbioru daną wzorem:

$$\rho(K) = \inf\{L(f): f \in \mathcal{F}(K)\}.$$

Pokazać, że ρ to regularna $\mathcal{K}$ -miara.

5.26.○ (5) Niech X , L oraz ρ będą takie jak w poprzednim zadaniu. Niech μ oznacza jedyną borelowską miarę Radona na X , która przedłuża funkcję ρ (zob. Zadanie 5.23). Wykazać, że

$$\forall f \in C_c(X), f: X \rightarrow \mathbb{R}_+: \int_X f \, d\mu \leq L(f).$$

5.27.○ (5) [Twierdzenie Riesz o postaci funkcjonału] Niech X , L oraz μ będą takie jak w poprzednim zadaniu. Wykazać, że wtedy $L(f) = \int_X f \, d\mu$ dla wszelkich $f \in C_c(X)$. Wywnioskować stąd, że powyższy wzór ustala wzajemnie jednoznaczność między nieujemnymi funkcjonałami liniowymi L na $C_c(X)$ a borelowskimi miarami Radona μ na X .

5.28.○ (4) Przy oznaczeniach z poprzedniego zadania, podać warunek (w języku samego funkcjonału L) na to, by miara odpowiadająca funkcjonałowi L była skończona.

5.29.○ (5) Niech X będzie lokalnie zwartą T_2 -przestrzenią. Oznaczmy przez $\mathcal{B}(X)$ najmniejszą σ -algebrę, względem której mierzalne są wszystkie funkcje z $C_c(X)$. (Niektórzy autorzy zbiory z $\mathcal{B}(X)$ nazywają mierzalnymi *w sensie Baire’a*). Korzystając z poprzednich zadań, pokazać, że każda miara skończona $m: \mathcal{B}(X) \rightarrow \mathbb{R}_+$ przedłuża się jednoznacznie do skończonej borelowskiej miary regularnej na X .

5.30.○ (5) Wykazać, że borelowska miara Radona na σ -zwartej przestrzeni lokalnie zwartej T_2 jest σ -skończona i regularna.

Zestaw 6

W tym zestawie G oznacza ustaloną lokalnie zwartą grupę topologiczną. Dla prezwartego zbioru $K \subset G$ oraz otoczenia $V \subset G$ określamy liczbę $[K : V]$ jako najmniejszą liczbę całkowitą $k > 0$, taką że istnieje zbiór skończony $F \subset G$, dla którego $|F| = k$ (tutaj $|F|$ oznacza moc zbioru F) oraz $K \subset FV$, gdzie FV to zbiór wszystkich elementów grupy G , które można przedstawić w postaci $f \cdot v$ dla pewnych elementów $f \in F$ oraz $v \in V$.

Podzbiory grupy G zawierające w swym wnętrzu element neutralny tej grupy będziemy nazywać *e-otoczeniami*. Zbiór $V \subset G$ nazywamy *symetrycznym*, gdy $V = V^{-1}$, gdzie $V^{-1} = \{v^{-1} : v \in V\}$.

Miarę Haara na grupie G nazywamy (dowolną) borelowską niezerową miarę Radona μ na G , taką że $\mu(aB) = \mu(B)$ dla dowolnego elementu $a \in G$ oraz zbioru $B \in \mathfrak{B}(G)$ (gdzie $aB = \{ab : b \in B\}$). Borelowską niezerową miarę Radona μ na G nazywamy *prawostronną miarą Haara*, gdy $\mu(Ba) = \mu(B)$ dla dowolnych $a \in G$ oraz $B \in \mathfrak{B}(G)$.

6.1.○ (4) Niech K, L będą prezwartymi podzbiorami grupy G , $V \subset G$ otoczeniem, a W prezwartym otoczeniem w G . Pokazać, że:

- liczba $[K : V]$ jest dobrze zdefiniowana (tzn. przy powyższych założeniach zawsze istnieje skończony zbiór F , taki że $K \subset FV$);
- $[K : V] \leq [K : W] \cdot [W : V]$;
- $[aK : V] = [K : V] = [K : aV]$ dla dowolnego elementu $a \in G$;
- $[K : V] \leq [L : V]$, gdy $K \subset L$;
- $[K \cup L : V] \leq [K : V] + [L : V]$.

6.2.○ (5) Wykazać, że jeśli K i L to rozłączne zwarte podzbiory grupy G , to istnieje symetryczne *e-otoczenie* W w G , takie że $(KW) \cap (LW) = \emptyset$. Ponadto, udowodnić, że jeśli zachodzi powyższy warunek, to dla dowolnego otoczenia $V \subset W$ zachodzi równość:

$$[K \cup L : V] = [K : V] + [L : V].$$

6.3.○ (5) Niech E będzie dowolnie ustalonym zwartym *e-otoczeniem* w G . Niech $\mathcal{V}$ oznacza rodzinę wszystkich otwartych *e-otoczeń* zawartych w E . Dla $V \in \mathcal{V}$ niech $\rho_V : \mathcal{K}(G) \rightarrow \mathbb{R}_+$ będzie funkcją zbioru daną wzorem:

$$\rho_V(K) = \frac{[K : V]}{[E : V]}.$$

Wykazać, że:

- dla dowolnego zbioru $K \in \mathcal{K}(G)$ istnieje stała $M_K > 0$, taka że $\rho_V(K) \in [0, M_K]$ dla dowolnego zbioru $V \in \mathcal{V}$;
- dla dowolnego zbioru $K \in \mathcal{K}(G)$ o niepustym wnętrzu istnieje stała $m_K > 0$, taka że $\rho_V(K) \in [m_K, M_K]$ dla wszelkich $V \in \mathcal{V}$;
- rodzinę $\{\rho_V\}_{V \in \mathcal{V}}$ można w naturalny sposób zinterpretować jako ciąg uogólniony w pewnej zwartej T_2 -przestrzeni $\mathfrak{X}$;
- dowolny punkt skupienia tego ciągu uogólnionego w przestrzeni $\mathfrak{X}$ jest funkcją zbioru z $\mathcal{K}(G)$ w $\mathbb{R}$, która jest regularną $\mathcal{K}$ -miarą, która na zwartych otoczeniach przyjmuje wartości dodatnie i jest niezmiennicza względem funkcji $G \ni x \mapsto ax \in G$ dla wszelkich $a \in G$.

Wynioskować stąd oraz z zadań z poprzedniego zestawu, że na grupie G istnieje miara Haara, która jest dodatnia na niepustych zbiorach otwartych.

- 6.4.○ (3) Wykazać, że borelowska miara μ jest miarą Haara wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja zbioru $\mu^\dagger: \mathfrak{B}(G) \ni A \mapsto \mu(A^{-1}) \in [0, \infty]$ jest prawostronną miarą Haara.
- 6.5.○ (4) Wykazać, że na grupie G istnieje skończona miara Haara wtedy i tylko wtedy, gdy G jest grupą zwartą.
- 6.6.○ (3) Wykazać, że jeśli G jest grupą σ -zwartą, to każda miara Haara na G jest σ -skończona, regularna i dodatnia na niepustych zbiorach otwartych.
- 6.7*.○ (5) Załóżmy, że grupa G jest σ -skończona i niech μ oraz λ będzie miarą Haara na G . Wykazać, że dla zwartego otoczenia $K \subset G$ funkcja $G \ni x \mapsto \mu(Kx) \in \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą i przyjmuje tylko wartości dodatnie.
- 6.8*.○ (5) Załóżmy, że grupa G jest σ -skończona i niech μ oraz λ będą miarami Haara na G . Niech ponadto K będzie zwartym otoczeniem w G . Wykazać, że dla dowolnej funkcji borelowskiej $f: G \rightarrow \mathbb{R}_+$ zachodzi wzór:

$$\int_G f(x) d\mu(x) = \mu(K) \int_G \frac{f(x^{-1})}{\lambda(Kx)} d\lambda(x).$$

- 6.9.○ (4) Wywnioskować z poprzedniego zadania, że jeśli grupa G jest σ -zwarta, μ i λ to miary Haara na G , a K to zwarte otoczenie w G , to:

$$\mu(L)\lambda(K) = \lambda(L)\mu(K)$$

dla dowolnego zbioru borelowskiego $L \subset G$. Wywnioskować stąd, że $\mu = c\lambda$ dla pewnej stałej $c > 0$.

- 6.10.○ (5) Pokazać, że każda grupa lokalnie zwarta zawiera podgrupę otwarcie domkniętą, która jest σ -zwarta i wywnioskować z poprzedniego zadania, że dowolne dwie miary Haara na G różnią się jedynie dodatnim czynnikiem.
- 6.11.○ (4) Wywnioskować z poprzednich zadań, że istnieje ciągły homomorfizm $\Lambda_G: (G, \cdot) \rightarrow ((0, \infty), \cdot)$, taki że jeśli μ to miara Haara na G , to $\mu(Ax) = \Lambda_G(x)\mu(A)$ dla dowolnych $x \in G$ oraz $A \in \mathfrak{B}(G)$.
Komentarz. Grupę lokalnie zwartą G , dla której $\Lambda_G \equiv 1$, nazywa się *unimodularną*.
- 6.12.○ (4) Niech μ będzie miarą Haara na G , a $\Lambda_G: G \rightarrow (0, \infty)$ homomorfizmem z poprzedniego zadania. Wykazać, że funkcja zbioru

$$\lambda: \mathfrak{B}(G) \ni A \mapsto \int_A \Lambda_G d\mu \in [0, \infty]$$

jest prawostronną miarą Haara na G . Wywnioskować stąd, że dla zbioru $A \in \mathfrak{B}(G)$ zachodzi równoważność: $\mu(A) > 0 \iff \mu(A^{-1}) > 0$.

- 6.13.○ (3) Wywnioskować z poprzednich zadań, że (każda) miara Haara na grupie G jest zarazem prawostronną miarą Haara (mówimy wtedy, że miara Haara jest obustronnie niezmiennicza) wtedy i tylko wtedy, gdy grupa G jest unimodularna (zob. komentarz pod Zadaniem 6.11). Wywnioskować stąd, że na to, aby miara Haara na grupie G była obustronnie niezmiennicza, wystarczy, aby zachodził chociaż jeden z poniższych warunków:

- na grupie G nie ma ciągłych niezerowych homomorfizmów w $(\mathbb{R}, +)$;
- grupa G jest zwarta;
- grupa generowana przez elementy postaci $aba^{-1}b^{-1}$ (gdzie $a, b \in G$) jest gęsta w G .

Zauważyć, że miara Haara na przemiennej grupie G jest obustronnie niezmiennicza.

- 6.14.○ (3) Wywnioskować z wcześniejszych zadań, że prawostronne miary Haara na grupie G różnią się jedynie dodatnim czynnikiem oraz że jeśli miara Haara μ na grupie G jest obustronnie niezmiennicza, to $\mu(A^{-1}) = \mu(A)$ dla dowolnego zbioru $A \in \mathfrak{B}(G)$.
- 6.15.○ (5) Podać przykład metryzowalnej ośrodkowej grupy lokalnie zwartej, która nie jest unimodularna (zob. komentarz pod Zadaniem 6.11).
- 6.16.○ (5) Podać przykład lokalnie zwartej grupy, na której (żadna) miara Haara nie jest miarą regularną.
- 6.17*.○ (5) Wykazać, że jeśli μ jest miarą Haara na G oraz $A, B \subset G$ są zbiorami zwartymi, to funkcja $G \ni x \mapsto \mu((xA) \triangle B) \in \mathbb{R}_+$ jest ciągła. (Tutaj „ $\triangle$ ” oznacza różnicę symetryczną zbiorów).
- 6.18.○ (4) Wywnioskować z poprzednich zadań, że jeśli $A \subset G$ jest zbiorem borelowskim o dodatniej mierze Haara, to zbiory $A \cdot A^{-1}$ oraz $A^{-1} \cdot A$ są e -otoczeniami.
- 6.19.○ (4) Wywnioskować z poprzedniego zadania, że jeśli $\phi: G \rightarrow H$ jest borelowskim homomorfizmem z grupy lokalnie zwartej G w grupę lokalnie zwartą H , która jest σ -zwarta, to ϕ jest odwzorowaniem ciągłym.
- 6.20.○ (4) Niech $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą. Zbiór $\mathfrak{M}$ traktujemy jak grupę abelową z działaniem różnicy symetrycznej „ $\triangle$ ”. Niech $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{M}$ składa się ze wszystkich zbiorów mierzalnych A , takich że $\mu(A) = 0$. Pokazać, że $\mathfrak{Z}$ to podgrupa grupy $\mathfrak{M}$. Niech $\mathfrak{G}$ oznacza grupę ilorazową $\mathfrak{M}/\mathfrak{Z}$. Niech $\pi: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{Z}$ oznacza epimorfizm kanoniczny. Uzasadnić, że reguła „ $\rho(\pi(X)) = \mu(X)$ ” poprawnie określa funkcję $\rho: \mathfrak{G} \rightarrow [0, \infty]$. Wykazać, że:
- $\mathfrak{G}$ jest grupą *boolowską*, tzn. jest grupą abelową, w której każdy element (poza elementem neutralnym $e_{\mathfrak{G}}$) ma rząd 2 [działanie w tej grupie poniżej oznaczamy przez „+”];
 - $\rho(X) = 0 \iff X = e_{\mathfrak{G}}$;
 - $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$;
 - zbiór $\mathfrak{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{X \in \mathfrak{G} : \rho(X) < \infty\}$ jest podgrupą grupy $\mathfrak{G}$, a funkcja $d: \mathfrak{F} \times \mathfrak{F} \ni (X, Y) \mapsto \rho(X + Y) \in \mathbb{R}_+$ jest poprawnie określoną metryką na grupie $\mathfrak{F}$.

Udowodnić, że metryka d jest zupełna na $\mathfrak{F}$, a $\mathfrak{F}$ jest grupą topologiczną w topologii wyznaczonej przez d .

- 6.21.○ (4) Przy oznaczeniach poprzedniego zadania, pokazać, że jeśli miara μ jest skończona, to $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}$, a jeśli ponadto $\mathfrak{M}$ jest ośrodkową σ -algebrą, to $(\mathfrak{G}, d)$ jest przestrzenią polską.
- 6.22.○ (5) Przy oznaczeniach Zadania 6.20 i założeniu, że ponadto μ jest miarą skończoną (wtedy $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}$), udowodnić równoważność poniższych warunków:
- (i) przestrzeń metryczna $(\mathfrak{G}, d)$ jest spójna;
 - (ii) dla dowolnych dwóch różnych elementów X i Y grupy $\mathfrak{G}$ istnieje odwzorowanie izometryczne $u: [0, r] \rightarrow \mathfrak{G}$, takie że $r = d(X, Y)$, $X = u(0)$ oraz $Y = u(r)$;
 - (iii) miara μ jest bezatomowa.

Czy w sytuacji, gdy μ jest niezerową skończoną miarą bezatomową, grupa $(\mathfrak{G}, d)$ może być lokalnie zwarta?