1 Oznaczenia i konwencje

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\quad \mathbb{N}_1 = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\quad \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.
- $\mathcal{P}(X)$ to zbiór potęgowy zbioru X, czyli rodzina wszystkich jego podzbiorów.
- Słowa *funkcja*, *odwzorowanie*, *przekształcenie* uznajemy za synonimy.
- Otoczenia nie muszą być zbiorami otwartymi.
- Przestrzenie (w tym metryczne) nie muszą być niepuste.
- Gdy d jest metryką na zbiorze X i $A \subset X$, piszemy dla uproszczenia (A, d) zamiast $(A, d|_{A\times A})$.
- Podzbiory przestrzeni topologicznej są, co do zasady, przestrzeniami topologicznymi wyposażonymi w topologię indukowaną (chyba że w danym kontekście wyraźnie wskazano topologię na podzbiorze).
- Iloczyny kartezjańskie przestrzeni topologicznych są wyposażone, co do zasady, w topologię produkową (chyba że w danym kontekście wyraźnie wskazano topologię na takim iloczynie).
- Przestrzenie ilorazowe przestrzeni topologicznych są wyposażone, co do zasady, w topologię ilorazową (chyba że w danym kontekście wyraźnie wskazano topologię na zbiorze ilorazowym).
- Jeśli A jest podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^n$ (dla pewnej liczby $n \in \mathbb{N}_1$) i z kontekstu nie wynika, jaka jest topologia lub metryka na A, wtedy zbiór A rozważamy z topologią indukowaną z topologii naturalnej na $\mathbb{R}^n$ oraz z metryką euklidesową.
- Metryka euklidesowa w $\mathbb{R}^n$ to d_e.
- Gdy X jest przestrzenią topologiczną, a $A \subset B$ jej podprzestrzeniami, przez $\mathscr{G}(X)$ i $\mathscr{F}(X)$ oznaczamy, odpowiednio, rodzinę wszystkich podzbiorów otwartych w X oraz rodzinę wszystkich podzbiorów domkniętych w X; z kolei $\mathrm{int}_B(A)$ i $\mathrm{cl}_B(A)$ oznaczają wnętrze i domknięcie (odpowiednio) zbioru A w przestrzeni topologicznej B wyposażonej w topologię indukowaną z X.

2 Elementarz

W tej części podajemy wybrane definicje i twierdzenia (bez dowodu), które stanowią klasykę topologii. Zawartość tego rozdziału została przygotowana z myślą o studentach, którzy nie realizowali rozszerzonego kursu z topologii. Chociaż warto zapamiętać wszystkie pojęcia i rezultaty tutaj wymienione, nie znajdą się one na liście zagadnień do egzaminu.

2.1 Definicja.
Przestrzeń topologiczną (X, τ) nazywamy *metryzowalną*, gdy istnieje metryka d na X, taka że $\mathrm{top}(X, d) = \tau$. Każdą metrykę d spełniającą powyższą równość nazywamy *zgodną z topologią* przestrzeni X (lub *z topologią* τ). Mówimy, że przestrzeń topologiczna X jest *metryzowalna w sposób zupełny*, gdy istnieje metryka zupełna d na X, taka że $\mathrm{top}(X) = \mathrm{top}(X, d)$. Równoważnie: przestrzeń jest metryzowalna w sposób zupełny, gdy jest homeomorficzna z zupełną przestrzenią metryczną.

2.2 Definicja.
Ciężar (*topologiczny*) przestrzeni topologicznej (X, τ) to liczba kardynalna $w(X) = w(X, \tau)$ określona następująco:

$$w(X) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\mathrm{card}(\beta)\colon\ \beta \text{ to baza topologii } X\}.$$

Chociaż tak określona wielkość może być skończona, w praktyce często przyjmuje się, że $w(X) \geqslant \aleph_0$ (tzn. zastępuje się $w(X)$ przez $\max(w(X), \aleph_0)$). *Charakter gęstości* przestrzeni topologicznej X to liczba kardynalna

$$d(X) = \mathrm{dens}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\mathrm{card}(A)\colon\ A \subset X,\ \bar{A} = X\}.$$

Przestrzeń X jest *ośrodkowa*, gdy $d(X) \leqslant \aleph_0$ (czyli gdy X zawiera co najwyżej przeliczalny podzbiór gęsty).

2.3 Definicja.
Zbiór *typu* $\mathscr{G}_\delta$ w przestrzeni topologicznej X to dowolny jej podzbiór, który można przedstawić jako przeliczalne przecięcie zbiorów otwartych:

$$A \text{ jest typu } \mathscr{G}_\delta \iff \exists\,(U_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{G}(X)\colon\ A = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n.$$

Podobnie, zbiór typu $\mathscr{F}_\sigma$ w przestrzeni topologicznej X to dowolny jej podzbiór, który można przedstawić jako przeliczalną sumę mnogościową zbiorów domkniętych:

$$B \text{ jest typu } \mathscr{F}_\sigma \iff \exists\,(D_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}(X)\colon\ B = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n.$$

2.4 Definicja.

- Mówimy, że zbiór $A \subset X$ jest *dyskretnym podzbiorem* przestrzeni topologicznej X, gdy:

$$\forall x \in X\ \exists U \text{otoczenie punktu } x\colon\ \ \operatorname{card}(A \cap U) \leqslant 1.$$

- Przestrzeń metryczną (X, d) nazywamy *ε-rozproszoną* (gdzie $\varepsilon > 0$), gdy $d(x, y) \geqslant \varepsilon$ dla dowolnych dwóch różnych punktów $x, y \in X$. Przestrzeń (X, d) jest *metrycznie rozproszona*, gdy jest ε-rozproszona dla pewnej liczby $\varepsilon > 0$.

2.5 Definicja.
Jedną jedyną topologię na zbiorze $\prod_{s\in S} X_s$ (gdzie (X_s, τ_s) $(s \in S)$ to przestrzeń topologiczna), której bazą jest rodzina

$$\beta \overset{\text{def}}{=} \Big\{ \prod_{s\in S} U_s |\ (\forall s \in S\colon\ U_s \in \mathscr{G}(X_s)) \text{ oraz } (\forall! s \in S\colon\ U_s = X_s) \Big\},$$

nazywamy topologią *produktową* lub *Tichonowa* (wyznaczoną przez topologie τ_s) i oznaczamy ją przez $\prod_{s\in S} \tau_s$.
Zbiory z bazy β nazywamy *otwartymi zbiorami cylindrycznymi* lub *otwartymi cylindrami.*
Notacja: zapis $\operatorname{Cyl}(\{V_s\}_{s\in S_0}, \{X_s\}_{s\in S})$

- niesie ze sobą „automatyczne” założenia: że $S_0 \subset S$ jest zbiorem skończonym oraz że $V_s \in \mathscr{G}(X_s)$ dla $s \in S_0$;
- oznacza otwarty cylinder $\prod_{s\in S} U_s$, gdzie $U_s = V_s$ dla $s \in S_0$ oraz $V_s = X_s$ dla $s \in S \setminus S_0$.

Gdy $S = \mathbb{N}$ oraz $X_n = Z$ dla $n \in \mathbb{N}$, przestrzeń $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ oznaczamy przez Z^ω.

2.6 Definicja. (Kostka Hilberta)
Kostka Hilberta to przestrzeń $[0, 1]^\omega$.

2.7 Definicja.
Kontinuum to spójna, zwarta i niepusta przestrzeń T_2. *Kontinuum peanowskie* to przestrzeń T_2, która jest ciągłym obrazem odcinka $[0, 1]$.
Uwaga: Wielu autorów w definicji kontinuum zastępuje warunek T_2 metryzowalnością.

2.8 Definicja.
Dla dwóch rodzin zbiorów $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s\in S}$ oraz $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t\in T}$, mówimy, że rodzina $\mathcal{A}$ jest

- *wpisana* w rodzinę $\mathcal{B}$, gdy każdy element rodziny $\mathcal{A}$ jest zawarty w jakimś elemencie rodziny $\mathcal{B}$:
$$\forall s \in S\ \exists t \in T\colon\ A_s \subset B_t;$$
- *drobniejsza* od rodziny $\mathcal{B}$, gdy $S = T$ oraz $A_s \subset B_s$ dla wszelkich $s \in S$;
- *punktowo skończona*, gdy $\bigcap_{s\in J} A_s = \varnothing$ dla dowolnego nieskończonego zbioru $J \subset S$.

Rodzina $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s\in S}$ podzbiorów przestrzeni topologicznej X jest

- *lokalnie skończona* (*w* X), gdy dowolny punkt przestrzeni X ma otoczenie V (w X), takie że zbiór $\mathrm{meet}(\mathcal{A}, V) \overset{\text{def}}{=} \{s \in S\colon\ A_s \cap V \neq \varnothing\}$ jest skończony;
- *dyskretna* (*w* X), gdy dowolny punkt przestrzeni X ma otoczenie V (w X), takie że $\mathrm{card}(\mathrm{meet}(\mathcal{A}, V)) \leqslant 1$.

2.9 Definicja.
Mówimy, że przestrzeń topologiczna X jest *parazwarta*, gdy X jest przestrzenią T_2 oraz w każde jej pokrycie otwarte można wpisać pokrycie otwarte lokalnie skończone.

2.10 Definicja.
Rozkład jedności na zbiorze X to dowolna rodzina funkcji $\{f_s\}_{s\in S}$, takich że $f_s\colon X \to [0,1]$ oraz
$$\forall x \in X\colon\ \sum_{s\in S} f_s(x) = 1.^{*1)}$$
Rozkład jedności $\{f_s\}_{s\in S}$ jest *punktowo skończony*, gdy także jest rodzina zbiorów $\{f_s^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})\}_{s\in S}$.
Jeśli X jest przestrzenią topologiczną, rozkład jedności $\{f_s\colon X \to [0,1]\}_{s\in S}$ jest, odpowiednio:

- *lokalnie skończony*;
- *wpisany w rodzinę zbiorów* $\{U_t\}_{t\in T}$;
- *drobniejszy od rodziny zbiorów* $\{U_t\}_{t\in T}$,

gdy także jest rodzina zbiorów $\{\mathrm{supp}(f_s)\}_{s\in S}$, gdzie $\mathrm{supp}(f_s) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{cl}(f_s^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}))$ to *nośnik* funkcji f_s. Rozkład ten jest *ciągły*, gdy wszystkie funkcje f_s są ciągłe.

2.11 Twierdzenie. (Twierdzenie o rozkładzie jedności)
Dla dowolnego pokrycia otwartego parazwartej przestrzeni X istnieje ciągły lokalnie skończony rozkład jedności drobniejszy od tego pokrycia.

2.12 Twierdzenie.
Dla przestrzeni metrycznej (X, d) oraz nieskończonej liczby kardynalnej $\mathfrak{m}$, następujące warunki są równoważne:

(i) $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$;

(ii) $d(X) \leqslant \mathfrak{m}$;

(iii) *każda rodzina parami rozłącznych niepustych zbiorów otwartych w X ma moc $\leqslant \mathfrak{m}$;*

*1) Suma $\sum_{t\in T} a_t$ zestawu $(a_t)_{t\in T}$ liczb **nieujemnych** to $\sup_F \sum_{t\in F} a_t$, gdzie F przebiega wszystkie skończone zbiory $F \subset T$ (przy czym $\sum_{\varnothing} = 0$).

(iv) *dla dowolnej rodziny* $\{U_s\}_{s\in S}$ *zbiorów otwartych, takiej że* $\bigcup_{s\in S} U_s = X$*, istnieje zbiór* $T \subset S$*, taki że* $\bigcup_{s\in T} U_s = X$ *oraz* $\operatorname{card}(T) \leqslant \mathfrak{m}$*;*

(v) *każdy zbiór* $A \subset X$*, na którym topologia indukowana jest dyskretna, ma moc* $\leqslant \mathfrak{m}$*;*

(vi) *każdy dyskretny podzbiór przestrzeni* X *ma moc* $\leqslant \mathfrak{m}$*;*

(vii) *każda metrycznie rozproszona podprzestrzeń przestrzeni* X *ma moc* $\leqslant \mathfrak{m}$.

W szczególności, $w(X) = d(X)$ *dla dowolnej przestrzeni metryzowalnej* X*.*

2.13 Wniosek.
Przestrzeń metryzowalna spełnia II A.P. wtedy i tylko wtedy, gdy jest ośrodkowa.

2.14 Twierdzenie. (Twierdzenie Hausdorffa o zwartości)
Niech A *będzie podzbiorem zupełnej przestrzeni metrycznej* (X, d)*. Domknięcie zbioru* A *w* X *jest zwarte wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby* $\varepsilon > 0$ *istnieje skończony zbiór* $F \subset X$*, taki że*

$$A \subset \bigcup_{b\in F} B_d(b, \varepsilon).$$

W szczególności:

- *przestrzeń metryczna jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy jest zupełna i całkowicie ograniczona;*
- *uzupełnienie przestrzeni metrycznej* X *jest przestrzenią zwartą wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzeń* X *jest całkowicie ograniczona.*

2.15 Twierdzenie. (Twierdzenie Cantora o przestrzeniach zupełnych)
Dla przestrzeni metrycznej (X, d) *następujące warunki są równoważne:*

(i) *przestrzeń* (X, d) *jest zupełna;*

(ii) *ilekroć* $F_1, F_2, F_3, \ldots$ *jest zstępującym ciągiem niepustych zbiorów domkniętych w* X*, takim że*

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}_d(F_n) = 0,$$

tylekroć $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing$*;*

(iii) *ilekroć* $\mathcal{F}$ *jest rodziną podzbiorów przestrzeni* X *o własnościach:*

($\mathcal{F}$1) $\forall A \in \mathcal{F}\colon\ A \neq \varnothing$*;*
($\mathcal{F}$2) $\forall A, B \in \mathcal{F}\ \exists C \in \mathcal{F}\colon\ C \subset A \cap B$*;*
($\mathcal{F}$3) $\forall \varepsilon > 0\ \exists A \in \mathcal{F}\colon\ \operatorname{diam}_d(A) \leqslant \varepsilon$*,*

tylekroć $\operatorname{card}(\bigcap_{F\in\mathcal{F}} \bar{F}) = 1$.

2.16 Twierdzenie.
Niech X_n *(dla* $n \in \mathbb{N}_1$*) będzie przestrzenią metryzowalną, której topologia pochodzi od metryki* $d_n \leqslant 1$*. Wtedy przestrzeń* $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ *jest także metryzowalna, a jej topologia pochodzi od metryki:*

$$D((x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}.$$

Ponadto, jeśli wszystkie powyższe metryki d_n są zupełne, to także metryka D jest zupełna.

2.17 Twierdzenie. (Twierdzenie Tichonowa)
Iloczyn kartezjański zwartych przestrzeni T_2 jest zwartą przestrzenią T_2.

Odwrotnie, jeśli przestrzenie topologiczne X_s $(s \in S)$ są niepuste, a przestrzeń $\prod_{s\in S} X_s$ jest zwarta, to każda z przestrzeni X_s także jest zwarta.

2.18 Obserwacja.
*Dla dowolnej rodziny funkcji ciągłych $f_s \colon X \to Y$ $(s \in S)$ **o wartościach w przestrzeni Hausdorffa** zbiór $\{x \in X | \ \forall s,t \in S\colon \ f_s(x) = f_t(x)\}$ jest domknięty.*

3 Metryzowalność w sposób zupełny a zbiory typu $\mathscr{G}_\delta$

3.1 Definicja.
Niech X, (M,d), A oraz $u\colon A \to M$ będą, odpowiednio, przestrzenią topologiczną, przestrzenią metryczną, podzbiorem przestrzeni X oraz funkcją ciągłą. *Oscylacją* funkcji u w punkcie $b \in \bar{A}$ (względem d) nazywamy wielkość:

$$o_u(b) \overset{\text{def}}{=} \inf\{\operatorname{diam}_d u(U \cap A)\colon \ U \text{to otwarte otoczenie punktu } b \text{ w } X\} \ \in [0,\infty].$$

Zbiór oscylacji funkcji u to zbiór $o_u \overset{\text{def}}{=} \{b \in \bar{A}\colon \ o_u(b) = 0\}$.

3.2 Twierdzenie. (Twierdzenie o oscylacji)
Niech $f\colon A \to M$ będzie funkcją ciągłą określoną na podzbiorze A przestrzeni topologicznej X, o wartościach w zupełnej przestrzeni metrycznej (M,d). Wtedy:

- *zbiór o_f jest podzbiorem typu $\mathscr{G}_\delta$ przestrzeni $\bar{A}$ i zawiera zbiór A;*
- *istnieje dokładnie jedna funkcja ciągła $F\colon o_f \to M$, która przedłuża funkcję f.*

Dowód. Jedyność wynika natychmiast z Obs. 2.18. Istotnie, jeśli F i G to ciągłe przedłużenia funkcji f określone na o_f, wtedy zbiór $Z \overset{\text{def}}{=} \{x \in o_f\colon \ F(x) = G(x)\}$ jest domknięty w o_f, ale także gęsty w tym zbiorze, gdyż $A \subset Z \subset o_f \subset \bar{A}$, czyli $Z = o_f$ i tym samym $G = F$.

Przejdźmy do dowodu istnienia funkcji F. Dla $n > 0$ niech

$$V_n \overset{\text{def}}{=} \{x \in \bar{A} | \ \exists U \text{otwarte otoczenie punktu } x\colon \ \operatorname{diam}_d f(A \cap U) < 1/n\}.$$

Zauważmy, że zbiór V_n jest otwarty w $\bar{A}$, gdyż jeśli dla $x \in V_n$ dobierzemy zbiór U jw., to $U \cap \bar{A} \subset V_n$. Zauważmy także, że $A \subset V_n$. Istotnie, jeśli $a \in A$, to z ciągłości funkcji f w tym punkcie wynika istnienie zbioru W otwartego w A, takiego że $a \in W$ oraz $\operatorname{diam}_d f(W) < 2^{-n}$. Wtedy istnieje zbiór U otwarty w X, taki że $U \cap A = W$, co oznacza, że $a \in U \subset V_n$.

Wprost z definicji zbioru oscylacji wynika, że $o_f = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$, co uzasadnia, że o_f zawiera A i jest zbiorem typu $\mathscr{G}_\delta$ w $\bar{A}$.

Ustalmy $b \in o_f$. Niech

$$\mathcal{F}_b \overset{\text{def}}{=} \{f(U \cap A)\colon \ U \text{otwarte otoczenie punktu } b \text{ w } X\}.$$

Zauważmy, że rodzina $\mathcal{F}_b$ spełnia warunki $(\mathcal{F}1)$–$(\mathcal{F}3)$ z Tw. 2.15 (str. 4). Istotnie: składa się ze zbiorów niepustych, gdyż $b \in \bar{A}$, oraz zawiera zbiory o dowolnie małej średnicy, gdyż $b \in V_n$ dla dowolnego indeksu n. Z tegoż twierdzenia wynika, że przecięcie domknięć zbiorów z rodziny $\mathcal{F}_b$ jest jednoelementowe. Określamy funkcję $F\colon o_f \to M$ regułą:

$$\{F(b)\} = \bigcap_{D \in \mathcal{F}_b} \bar{D}.$$

Wykażemy, że F przedłuża f i jest funkcją ciągłą (co zakończy dowód). Jeśli $a \in A$, to $f(a) \in \bigcap \mathscr{F}_a \subset \{F(a)\}$, czyli $F(a) = f(a)$. Pozostaje ciągłość. W tym celu ustalmy punkt $b \in o_f$ oraz liczbę $\varepsilon > 0$. Dobieramy $N > 0$ oraz otwarte (w X) otoczenie U punktu b, takie że $\operatorname{diam}_d f(A \cap U) < 1/N < \varepsilon$. Wtedy dla dowolnego punktu $x \in o_f \cap U$ mamy: $f(A \cap U) \in \mathscr{F}_x$, czyli $F(x) \in \overline{f(A \cap U)}$, a zatem $d(F(x), F(b)) \leqslant \operatorname{diam}_d \overline{f(A \cap U)} < \varepsilon$, czyli funkcja F jest ciągła w punkcie b. □

3.3 Twierdzenie.
Niech X będzie przestrzenią metryzowalną w sposób zupełny, Z przestrzenią Hausdorffa, a $h\colon X \to Z$ zanurzeniem topologicznym. Wtedy zbiór $h(X)$ jest typu $\mathscr{G}_\delta$ w swoim domknięciu.

Dowód. Zastępując Z przez $\mathrm{cl}_Z(h(X))$, możemy założyć, że zbiór $h(X)$ jest gęsty w Z. W tej sytuacji mamy pokazać, że zbiór $h(X)$ jest typu $\mathscr{G}_\delta$. W tym celu ustalmy zupełną metrykę d na X zgodną z topologią tej przestrzeni.

Ustalmy $n > 0$. Dla dowolnego punktu $x \in X$ zbiór $h(B_d(x, 2^{-n}))$ jest otwarty w $h(X)$, więc istnieje zbiór $V_{x,n}$ otwarty w Z i taki, że

$$h(B_d(x, 2^{-n})) = V_{x,n} \cap h(X).$$

Określamy $U_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{x \in X} V_{x,n}$. Ponieważ zbiór U_n jest otwarty w Z, wystarczy pokazać, że $h(X) = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Inkluzja „$\subset$” wynika z tego, że $h(x) \in V_{x,n}$ dla wszelkich $x \in X$ oraz $n > 0$. Pozostaje więc wykazać inkluzję przeciwną. Niech zatem $z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Wtedy dla dowolnej liczby $n > 0$ istnieje punkt $x_n \in X$, taki że $z \in V_{x_n,n}$. Zauważmy, że dla dowolnych całkowitych liczb dodatnich n i m zbiór $V_{x_n,n} \cap V_{x_m,m}$ jest otwarty i niepusty (bo zawiera z), więc z gęstości zbioru $h(X)$ w Z wynika, że $V_{x_n,n} \cap V_{x_m,m} \cap h(X) \neq \varnothing$, czyli

$$h(B_d(x_n, 2^{-n}) \cap B_d(x_m, 2^{-m})) = h(B_d(x_n, 2^{-n})) \cap h(B_d(x_m, 2^{-m})) = V_{x_n,n} \cap h(X) \cap V_{x_m,m} \cap h(X) \neq \varnothing.$$

Powyższa własność implikuje, że zbiór $B_d(x_n, 2^{-n}) \cap B_d(x_m, 2^{-m})$ jest niepusty i tym samym $d(x_n, x_m) < 2^{-n} + 2^{-m}$. Z nierówności tej wnioskujemy, że ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest Cauchy'ego. Tym samym

$$x_n \xrightarrow{X} w \tag{3:1}$$

dla pewnego punktu $w \in X$. Pokażemy, że $z = h(w)$, co zakończy cały dowód. Rozumujemy nie wprost: przypuśćmy, że $h(w) \neq z$. Wtedy, z własności T_2 przestrzeni Z, istnieją rozłączne zbiory W i D otwarte w Z i takie, że $h(w) \in W$ oraz $z \in D$. Zauważmy, że zbiór $D \cap V_{x_n,n} \cap h(X)$ jest niepusty (bo $\mathrm{cl}_Z(h(X)) = Z$). Oznacza to, że istnieje punkt $y_n \in B_d(x_n, 2^{-n})$, taki że $h(y_n) \in D$. Ale wtedy $d(y_n, x_n) < 2^{-n}$, więc z (3:1) wynika, że $y_n \xrightarrow{X} w$ i tym samym $h(y_n) \xrightarrow{Z} h(w)$. Ale to jest sprzeczne z tym, że $h(y_n) \notin W$ (bo $h(y_n) \in D$) — i koniec dowodu. □

3.4 Twierdzenie.
Zbiór A typu $\mathscr{G}_\delta$ w przestrzeni metryzowalnej X jest homeomorficzny z podzbiorem domkniętym przestrzeni $X \times \mathbb{R}_+^\omega$.

Dowód. Możemy założyć, że $A \neq X$. Ustalmy metrykę d na X zgodną z topologią tej przestrzeni i przedstawmy $X \setminus A$ jako $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, gdzie F_n jest niepustym zbiorem domkniętym w X. Dla $n > 0$ niech $u_n\colon A \to \mathbb{R}_+$ będzie funkcją ciągłą daną wzorem:

$$u_n(x) = \frac{1}{\operatorname{dist}_d(x, F_n)}$$

(funkcja u_n jest poprawnie określona, gdyż F_n jest zbiorem domkniętym rozłącznym z A). Określmy $h\colon A \to X \times \mathbb{R}_+^\omega$ formułą

$$h(x) = (x, (u_n(x))_{n=1}^{\infty}).$$

Z tego, że pierwsza składowa funkcji h to identyczność, wynika, że funkcja h jest zanurzeniem topologicznym. Aby zakończyć dowód, wystarczy więc pokazać, że zbiór $B \stackrel{\text{def}}{=} h(A)$ jest domknięty w $X \times \mathbb{R}_+^\omega$. W tym celu załóżmy, że punkty $a_n \in A$ są takie, że $\lim_{k\to\infty} h(a_k) = (z, (b_n)_{n=1}^{\infty}) \in X \times \mathbb{R}_+^\omega$. Chcemy pokazać, że $z \in A$ oraz $h(a_k) \to h(z)$ $(k \to \infty)$. Ponieważ $h(a_k) = (a_k, (u_n(a_k))_{n=1}^{\infty})$, z charakteryzacji zbieżności w topologii produktowej otrzymujemy, że $z = \lim_{k\to\infty} a_k$ oraz $b_n = \lim_{k\to\infty} u_n(a_k)$. A wtedy dla dowolnego indeksu $n > 0$, $\operatorname{dist}_d(z, F_n) = \lim_{k\to\infty} \operatorname{dist}_d(a_k, F_n)$ oraz $\frac{1}{\operatorname{dist}_d(a_k, F_n)} \to b_n \in \mathbb{R}$ $(k \to \infty)$, co implikuje, że $\operatorname{dist}_d(z, F_n) \neq 0$, czyli $z \notin F_n$. Tym samym $z \in \bigcap_{n=1}^{\infty}(X \setminus F_n) = A$. A wtedy automatycznie $h(z) = \lim_{k\to\infty} h(a_k)$ i teza. □

3.5 Wniosek. (Twierdzenie Aleksandrowa-Hausdorffa)
Dla przestrzeni metryzowalnej X następujące warunki są równoważne:

(i) *przestrzeń X jest metryzowalna w sposósb zupełny;*

(ii) *przestrzeń X jest homeomorficzna z podzbiorem typu $\mathscr{G}_\delta$ pewnej metryzowalnej w sposób zupełny przestrzeni topologicznej;*

(iii) przestrzeń X jest absolutnego typu $\mathscr{G}_\delta$ (*w klasie przestrzeni metryzowalnych*), *tzn. dla dowolnego zanurzenia topologicznego $h\colon X \to Z$ w przestrzeń metryzowalną Z, zbiór $h(X)$ jest typu $\mathscr{G}_\delta$ w Z.*

Dowód. Implikacja „(i) $\Longrightarrow$ (iii)” wynika z Tw. 3.3 oraz tego, że przestrzenie metryzowalne są doskonale normalne. Z kolei implikacja „(ii) $\Longrightarrow$ (i)” wynika z Tw. 3.4 oraz tego, że przeliczalny produkt kartezjański przestrzeni metryzowalnych w sposób zupełny (oraz podzbiór domknięty takiej przestrzeni) także jest przestrzenią metryzowalną w sposób zupełny. Wreszcie implikacja „(iii) $\Longrightarrow$ (ii)” wynika natychmiast stąd, że każdą przestrzeń metryczną możemy uzupełnić (tzn. powiększyć do przestrzeni metrycznej zupełnej, w której ta wyjściowa przestrzeń jest zbiorem gęstym). □

3.6 Wniosek.
Jeśli przestrzeń metryzowalna jest sumą skończenie wielu swoich podprzestrzeni metryzowalnych w sposób zupełny, to sama jest metryzowalna w sposób zupełny.

Dowód. Uzupełniamy przestrzeń, stosujemy Twierdzenie Aleksandrowa-Hausdorffa i korzystamy z tego, że suma skończenie wielu zbiorów typu $\mathscr{G}_\delta$ jest także zbiorem typu $\mathscr{G}_\delta$. □

3.7 Twierdzenie. (Twierdzenie Ławrientiewa)
Niech X i Y będą przestrzeniami metryzowalnymi w sposób zupełny, a $h\colon A \to B$ homeomorfizmem między $A \subset X$ oraz $B \subset Y$. Wtedy istnieją zbiory $\tilde{A} \subset X$, $\tilde{B} \subset Y$ typu $\mathscr{G}_\delta$ oraz homeomorfizm $\tilde{h}\colon \tilde{A} \to \tilde{B}$, takie że $A \subset \tilde{A}$, $B \subset \tilde{B}$ oraz $\tilde{h}|_A = h$.

Dowód. Z Tw. 3.2 (str. 5) wynika, że istnieją funkcje ciągłe $F\colon A_0 \to Y$ oraz $G\colon B_0 \to X$, takie że $A_0 \supset A$ jest zbiorem typu $\mathscr{G}_\delta$ w $\bar{A}$ (i tym samym typu $\mathscr{G}_\delta$ w X), $B_0 \supset B$ jest typu $\mathscr{G}_\delta$ w $\bar{B}$ (i tym samym typu $\mathscr{G}_\delta$ w Y) oraz $F|_A = h$ i $G|_B = h^{-1}$. Rozważmy następujące podzbiory produktu $X \times Y$:

$$\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, F(x))\colon\ x \in A_0\}, \qquad \Gamma^* \stackrel{\text{def}}{=} \{(G(y), y)\colon\ y \in B_0\}$$

(Γ to wykres funkcji F, a Γ^* to „odwrócony” wykres funkcji G). Ponieważ A_0 i B_0 to przestrzenie metryzowalne w sposób zupełny (dzięki Twierdzeniu Aleksandrowa-Hausdorffa), a funkcje $\Phi\colon A_0 \ni x \mapsto (x, F(x)) \in \Gamma$ oraz $\Psi\colon B_0 \ni y \mapsto (G(y), y) \in \Gamma^*$ to homeomorfizmy, także przestrzenie Γ i Γ^* są metryzowalne w sposób zupełny. Zatem są to podzbiory typu $\mathscr{G}_\delta$ w $X \times Y$. Stąd także zbiór $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma \cap \Gamma^*$ jest typu $\mathscr{G}_\delta$ w $X \times Y$, czyli Δ to przestrzeń metryzowalna w sposób zupełny. W takim razie przestrzenie $\tilde{A} \stackrel{\text{def}}{=} \Phi^{-1}(\Delta) \subset X$ oraz $\tilde{B} \stackrel{\text{def}}{=} \Psi^{-1}(\Delta) \subset Y$ są metryzowalne w sposób zupełny, czyli są to zbiory typu $\mathscr{G}_\delta$ (ponownie dzięki Tw. 3.4). Dalej, ponieważ $\{(x, h(x))\colon x \in A\} = \{(h^{-1}(y), y)\colon y \in B\} \subset \Delta$, widzimy, że $A \subset \tilde{A}$ oraz $B \subset \tilde{B}$. Na koniec określamy $\tilde{h}\colon \tilde{A} \to Y$ jako $F|_{\tilde{A}}$. Jest jasne, że funkcja $\tilde{h}$ jest ciągła i przedłuża funkcję h. Pozostaje pokazać, że $\tilde{h}(\tilde{A}) = \tilde{B}$ oraz że $\tilde{h}$ to iniekcja o ciągłej funkcji odwrotnej. W tym celu zauważmy, że:

$$\{(x, \tilde{h}(x))\colon\ x \in \tilde{A}\} = \Delta = \{(G(y), y)\colon\ y \in \tilde{B}\}.$$

Istotnie, pierwsza równość wynika z definicji zbioru $\tilde{A}$ oraz tego, że $\Delta \subset \Gamma$[*2)], a druga z analogicznych własności. Tym samym widzimy, że wykres funkcji $\tilde{h}$ jest „odwróconym” wykresem (czyli relacją odwrotną do wykresu) funkcji $G|_{\tilde{B}}$. Stąd automatycznie wynika, że funkcja $\tilde{h}$ jest bijekcją między $\tilde{A}$ a $\tilde{B}$ oraz że $\tilde{h}^{-1} = G|_{\tilde{B}}$, czyli $\tilde{h}\colon \tilde{A} \to \tilde{B}$ to homeomorfizm. □

[*2)] Podzbiór wykresu funkcji (o niekoniecznie pełnej dziedzinie) jest również wykresem (takiej) funkcji.

4 Metryka Hausdorffa

4.1 Definicja.
Odstępem Hausdorffa (względem metryki d) dwóch **niepustych** podzbiorów A i B przestrzeni metrycznej (X,d) nazywamy wielkość:

$$d_H(A,B) \stackrel{\text{def}}{=} \max(\sup_{a\in A} \operatorname{dist}_d(a,B), \sup_{b\in B} \operatorname{dist}_d(b,A)) \ \in [0,\infty],$$

gdzie $\operatorname{dist}_d(c,Z) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{z\in Z} d(c,z)$ dla dowolnego punktu $c\in X$ oraz niepustego zbioru $Z\subset X$.
Notacja:

- $\mathscr{F}_b(X) = \mathscr{F}_b(X,d)$ to rodzina wszystkich niepustych ograniczonych (względem metryki d) domkniętych podzbiorów przestrzeni metrycznej (X,d);
- $\mathscr{K}(X)$ ($\subset \mathscr{F}_b(X)$) to rodzina wszystkich niepustych zwartych podzbiorów przestrzeni metrycznej (X,d).

Funkcję d_H zawężoną do którejkolwiek z rodzin $\mathscr{F}_b(X)$ lub $\mathscr{K}(X)$ nazywamy *metryką Hausdorffa*. Zbiory $\mathscr{F}_b(X)$ oraz $\mathscr{K}(X)$ stanowią najważniejsze przykłady tzw. *hiperprzestrzeni* przestrzeni X.

4.2 Obserwacja.
Niech A,B,C będą trzema dowolnymi niepustymi podzbiorami przestrzeni metrycznej (X,d). Wtedy:

(a) $d_H(A,B) = d_H(\bar{A},\bar{B})$;

(b) $d_H(A,B) = 0 \iff \bar{A} = \bar{B}$;

(c) $d_H(B,A) = d_H(A,B)$;

(d) $d_H(A,C) \leqslant d_H(A,B) + d_H(B,C)$;

(e) *jeśli A i B są zbiorami ograniczonymi (w metryce d), to $d_H(A,B) < \infty$;*

(f) *$(\mathscr{F}_b(X), d_H)$ to przestrzeń metryczna;*

(g) *odzworowanie $(X,d) \ni x \mapsto \{x\} \in (\mathscr{F}_b(X), d_H)$ jest domkniętym zanurzeniem izometrycznym.*

Dowód. Ćwiczenie. □

4.3 Twierdzenie. (Twierdzenie Hahna)
Dla przestrzeni metrycznej (X,d) następujące warunki są równoważne:

(i) *przestrzeń metryczna $(\mathscr{F}_b(X), d_H)$ jest zupełna;*

(ii) *przestrzeń metryczna $(\mathscr{K}(X), d_H)$ jest zupełna;*

(iii) *przestrzeń metryczna (X,d) jest zupełna.*

Dowód. Implikacje (i) $\Longrightarrow$ (iii) oraz (ii) $\Longrightarrow$ (iii) są natychmiastowymi konsekwencjami punktu (g) Obs. 4.2 (oraz tego, że podzbiór domknięty zupełnej przestrzeni metrycznej także jest takąż przestrzenią).

Dowiedziemy teraz, że z (iii) wynikają oba punkty (i) i (ii). W tym celu zakładamy, że d jest metryką zupełną na X, oraz przez Ω oznaczmy jedną z przestrzeni $\mathscr{F}_b(X)$ lub $\mathscr{K}(X)$ (w zależności od tego, czy chcemy dowieść punktu (i), czy (ii)). Aby wykazać, że przestrzeń metryczna (Ω, d_H) jest zupełna, wystarczy pokazać, że każdy ciąg $A_1, A_2, \ldots \in \Omega$ spełniający warunek:

(4:1) $$\forall n > 0\colon\ d_H(A_n, A_{n+1}) < 2^{-n}$$

jest zbieżny w przestrzeni Ω. Ustalmy więc taki ciąg i zdefiniujmy $B \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m}$. Widzimy, że zbiór B jest domknięty. Pokażemy (kolejno), że:

(B1) $B \neq \varnothing$;

(B2) $d_H(A_n, B) \to 0 \quad (n \to \infty)$;

(B3) zbiór B jest ograniczony względem d;

(B4) $B \in \Omega$,

co zakończy cały dowód.

Ustalmy dowolnie $N > 0$ oraz punkt $z \in A_N$. Startując od $x_0 \stackrel{\text{def}}{=} z$ indukcyjnie konstruujemy ciąg $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, taki że

$$\forall n \geqslant 0\colon\ x_n \in A_{n+N} \quad \text{oraz} \quad d(x_n, x_{n+1}) < 2^{-n-N}. \tag{4:2}$$

Konstrukcja przebiega następująco: gdy mamy już $x_n \in A_{n+N}$ (dla pewnego indeksu $n \geqslant 0$), korzystając z definicji odstępu Hausdorffa oraz z (4:1) otrzymujemy: $\operatorname{dist}_d(x_n, A_{n+N+1}) \leqslant d_H(A_{n+N}, A_{n+N+1}) < 2^{-n-N}$, a zatem musi istnieć punkt (który jest właśnie poszukiwanym przez nas punktem) $x_{n+1} \in A_{n+N+1}$, taki że $d(x_n, x_{n+1}) < 2^{-n-N}$, co dowodzi (4:2). Warunek ten implikuje, że $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego (względem d). Zatem, z założenia w (iii), istnieje punkt $w \in X$, taki że

$$d(x_n, w) \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{4:3}$$

Zauważmy, że dla dowolnego indeksu $k > 0$ ciąg $(x_{n+k})_{n=1}^{\infty}$ ma wartości w zbiorze $\bigcup_{m=k}^{\infty} A_m$, więc punkt w, jako granica tego ciągu, należy do domknięcia tego zbioru. Z dowolności $k > 0$ otrzymujemy, że $w \in B$. Gdy teraz do powyższych rozważań podstawimy $N = 1$ i skorzystamy z niepustości zbioru A_1, otrzymujemy, że zbiór B jest niepusty (czyli (B1)). Powróćmy jednak do w pełni ogólnej sytuacji i oszacujmy liczbę $\operatorname{dist}_d(z, B)$. W tym celu zauważmy, że dla dowolnego indeksu $n > 0$, z (4:2) wynika, że:

$$d(z, x_n) = d(x_0, x_n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} d(x_{k-1}, x_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} 2^{1-k-N} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} 2^{1-k-N},$$

czyli $d(z, x_n) \leqslant 2^{1-N}$. Tym samym $d(z, w) \leqslant 2^{1-N}$, dzięki (4:3). Z dowolności $z \in A_N$ oraz tego, że $w \in B$, otrzymujemy:

$$\forall N > 0\colon\ \sup_{z \in A_N} \operatorname{dist}_d(z, B) \leqslant 2^{1-N}. \tag{4:4}$$

Teraz ustalnmy dowolnie punkt $b \in B$, indeks $N > 0$ oraz $\varepsilon > 0$. Z racji, że b należy do domknięcia zbioru $\bigcup_{m=N+1}^{\infty} A_m$, istnieje punkt c w tej sumie zbiorów, taki że $d(b, c) < \varepsilon$. Stąd istnieje indeks $n > N$, taki że $c \in A_n$. Tym razem startując od $x_0 \stackrel{\text{def}}{=} c$ ($\in A_n$), indukcyjnie konstruujemy punkty $x_0, x_1, \ldots, x_{n-N}$, takie że:

$$x_j \in A_{n-j} \quad \text{oraz} \quad d(x_j, x_{j+1}) < 2^{1+j-n} \qquad \text{dla } j = 0, \ldots, n-N-1.$$

(Gdy punkt $x_j \in A_{n-j}$ jest już określony dla pewnego indeksu $j < n - N$, z nierówności $\operatorname{dist}_d(x_j, A_{n-j-1}) \leqslant d_H(A_{n-j}, A_{n-j-1}) < 2^{1+j-n}$ wnioskujemy istnienie punktu $x_{j+1} \in A_{n-(j+1)}$, takiego że $d(x_j, x_{j+1}) < 2^{1+j-n}$). Zauważmy, że ostatni z tak skonstruowanych punktów, x_{n-N}, należy do zbioru A_N, a więc: $\operatorname{dist}_d(b, A_N) \leqslant d(b, x_{n-N}) \leqslant d(b, x_0) + d(x_0, x_{n-N}) \leqslant d(b, c) + \sum_{k=0}^{n-N-1} d(x_k, x_{k+1}) \leqslant \varepsilon + \sum_{k=0}^{n-N-1} 2^{1+k-n} \leqslant \varepsilon + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{1+k-n} = \varepsilon + 2^{2-n}$, ale $n \geqslant N + 1$, co daje $\operatorname{dist}_d(b, A_N) \leqslant \varepsilon + 2^{1-N}$. Zatem, z dowolności $\varepsilon > 0$ oraz $b \in B$, otrzymujemy nierówność:

$$\sup_{b \in B} \operatorname{dist}_d(b, A_N) \leqslant 2^{1-N},$$

która w połączeniu z (4:4) daje $d_H(A_N, B) \leqslant 2^{1-N}$, co dowodzi (B2). Aby wykazać (B3), dla dowolnie obranych punktów $x_1, x_2 \in B$ dobieramy punkty $y_1, y_2 \in A_1$, takie że $d(x_j, y_j) < \operatorname{dist}_d(x_j, A_1) + 1$ i otrzymujemy, że $d(x_1, x_2) \leqslant d(x_1, y_1) + d(y_1, y_2) + d(y_2, x_2) \leqslant 2 \operatorname{dist}_d(x_j, A_1) + 2 + \operatorname{diam}_d(A_1)$. Tym samym $\operatorname{diam}_d(B) \leqslant 2 \operatorname{dist}_d(x_j, A_1) + 2 + \operatorname{diam}_d(A_1) < \infty$, czyli zachodzi (B3). Tak więc w przypadku, gdy $\Omega = \mathscr{F}_b(X)$ dowód jest zakończony. W dalszym ciągu dowodu zakładamy, że $\Omega = \mathscr{K}(X)$. W szczególności, wszystkie zbiory $A_1, A_2, \ldots$ są zwarte. Aby wykazać (B4), musimy pokazać, że w tej sytuacji zbiór B jest zwarty. W tym celu korzystamy z Tw. 2.14 (str. 4). Ponieważ B jest zbiorem domkniętym w zupełnej przestrzeni metrycznej (X, d), wystarczy pokazać, że dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje skończony zbiór $F \subset X$, taki że

$$B \subset \bigcup_{a \in F} B_d(a, \varepsilon). \tag{4:5}$$

W tym celu korzystając z (B2) dobieramy indeks $N > 0$, taki że $d_H(A_N, B) < \varepsilon/2$. Następnie ze zwartości zbioru A_N wynika istnienie skończonego zbioru $F \subset A_N$, takiego że $A_N \subset \bigcup_{a \in F} B_d(a, \varepsilon/2)$. Wtedy dla dowolnego punktu $x \in B$ z nierówności $\operatorname{dist}_d(x, A_N) \leqslant d_H(B, A_N) < \varepsilon/2$ wnioskujemy, że istnieje punkt $z \in A_N$, taki że $d(x, z) < \varepsilon/2$. Z doboru zbioru F wynika istnienie punktu $a \in F$, takiego że $d(z, a) < \varepsilon/2$. Zastosowanie nierówności trójkąta daje $d(x, a) < \varepsilon$, co dowodzi warunku (4:5) i kończy dowód. $\square$

4.4 Twierdzenie. (Twierdzenie o zwartości hiperprzestrzeni)
Dla przestrzeni metrycznej (X, d) następujące warunki są równoważne:

(i) *przestrzeń $(\mathscr{F}_b(X), d_H)$ jest zwarta;*

(ii) *przestrzeń $(\mathscr{K}(X), d_H)$ jest zwarta;*

(iii) *przestrzeń (X, d) jest zwarta.*

Dowód. Implikacje (i) $\implies$ (iii) oraz (ii) $\implies$ (iii) wynikają z punktu (g) Obs. 4.2 (str. 8). Aby wykazać odwrotne implikacje, załóżmy, że przestrzeń (X, d) jest zwarta. Wtedy $\mathscr{K}(X) = \mathscr{F}_b(X)$, więc warunek (i) jest w tej sytuacji identyczny z warunkiem (ii). Z Tw. 4.3 wynika, że przestrzeń metryczna $(\mathscr{K}(X), d_H)$ jest zupełna. Aby udowodnić jej zwartość, wystarczy dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ wskazać skończony zbiór $\mathscr{S} \subset \mathscr{K}(X)$, taki że $\mathscr{K}(X) = \bigcup_{S \in \mathscr{S}} B_{d_H}(S, \varepsilon)$ (dzięki Tw. 2.14, str. 4). W tym celu korzystamy ze zwartości przestrzeni X i dobieramy skończony zbiór $F \subset X$, taki że $X = \bigcup_{a \in F} B_d(a, \varepsilon)$. Określamy poszukiwany zbiór $\mathscr{S}$ jako $\mathcal{P}(F) \setminus \{\varnothing\}$ (czyli rodzinę wszystkich niepustych podzbiorów zbioru F). Sprawdźmy, że ma on żądaną własność. Ustalmy więc dowolny niepusty zwarty zbiór $K \subset X$. Niech $S \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in F\colon\ B_d(a, \varepsilon) \cap K \neq \varnothing\}$ $(\subset F)$. Dla dowolnego punktu $x \in K$ istnieje (z doboru zbioru F) punkt $a \in F$, taki że $d(x, a) < \varepsilon$. Wtedy $x \in B_d(a, \varepsilon) \cap K$, czyli $a \in S$. Tym samym $S \neq \varnothing$ (czyli $S \in \mathscr{S}$), dzięki niepustości zbioru K, oraz $\operatorname{dist}_d(x, S) \leqslant d(x, a) < \varepsilon$. Ze zwartości zbioru K (i ciągłości funkcji odległości od zbioru) wnioskujemy, że w takim razie

$$\max_{x \in K} \operatorname{dist}_d(x, S) < \varepsilon. \tag{4:6}$$

Odwrotnie, jeśli $a \in S$, to (z definicji zbioru S) istnieje punkt $z \in K$, taki że $d(a, z) < \varepsilon$ i tym samym $\operatorname{dist}_d(a, K) < \varepsilon$, a stąd także $\max_{a \in S} \operatorname{dist}_d(a, K) < \varepsilon$ (bo zbiór S jest skończony), co — w połączeniu z (4:6) — daje $d_H(S, K) < \varepsilon$ i kończy dowód twierdzenia. $\square$

5 Krzywe w przestrzeniach metryzowalnych

Głównym celem niniejszego rozdziału będzie wykazanie trzech klasycznych twierdzeń topologii metrycznej — Twierdzenia Hopfa-Rinowa (Tw. 5.19, str. 19) oraz:

5.1 Twierdzenie. (Twierdzenie Mazurkiewicza-Moore'a)
Jeśli D jest spójnym otwartym podzbiorem lokalnie spójnej przestrzeni X metryzowalnej w sposób zupełny, to dowolne dwa różne punkty zbioru D można połączyć łukiem leżącym w D.

5.2 Twierdzenie. (Twierdzenie Hahna-Mazurkiewicza)
Dla T_2-przestrzeni X następujące warunki są równoważne:

(i) *istnieje ciągła suriekcja z $[0, 1]$ na X;*

(ii) *X jest przestrzenią niepustą, zwartą, spójną, lokalnie spójną, spełniającą II A.P.*

Dowód obu twierdzeń sformułowanych powyżej, zwłaszcza pierwszego z nich, wymaga przygotowań. Zanim do nich przejdziemy, odnotujmy, że II A.P. dla zwartej przestrzeni Hausdorffa jest równoważny jej metryzowalności (co łatwo wynika z Tw. 6.6, str. 26 w rozdziale 6). Równoważności tej użyjemy w dowodzie Tw. 5.2.

W dowodzie Tw. 5.1 użyjemy pewnych pojęć, które wprowadzamy i badamy poniżej. Od teraz aż do końca dowodu tego twierdzenia, X, ϱ oraz D oznaczają, odpowiednio, metryzowalną w sposób zupełny przestrzeń lokalnie spójną, metrykę zupełną na X zgodną z topologią tej przestrzeni oraz spójny podzbiór otwarty przestrzeni X. Ponadto, a i b to ustalone dwa różne punkty zbioru D.

5.3 Definicja.
Poniżej $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ to układy zbiorów (odpowiednio) $U_0, \ldots, U_N$ oraz $V_0, \ldots, V_M$ (gdzie N i M to nieujemne liczby całkowite).

- Układ zbiorów $\mathcal{U}$ nazywamy *ścieżką* (w X), gdy zbiory $U_0, \ldots, U_N$ są niepustymi, spójnymi i otwartymi podzbiorami przestrzeni X oraz $U_{j-1} \cap U_j \neq \varnothing$, o ile $0 < j \leqslant N$.
- *Średnica* ścieżki $\mathcal{U}$ (względem metryki ϱ) to wielkość $\operatorname{diam}_\varrho(\mathcal{U}) \overset{\text{def}}{=} \max_{k=0,\ldots,N} \operatorname{diam}_\varrho(U_k) \in [0, \infty]$. Jeśli $\varepsilon > 0$ jest liczbą nie mniejszą niż średnica ścieżki $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ nazywamy *ε-ścieżką*.
- Ścieżka $\mathcal{U}$ jest *ścieżką od x do y*, gdy $x \in U_0$ oraz $y \in U_N$.
- Ścieżka $\mathcal{U}$ od a do b jest *półwłaściwa*, gdy
  - $a \notin U_k$ dla wszelkich $k > 0$;
  - $b \notin U_k$ dla wszelkich $k < N$;
  - $U_j \cap U_k = \varnothing$ ilekroć $|j - k| > 1$.
- Ścieżka $\mathcal{U}$ od a do b jest *właściwa*, gdy
  - $a \notin \bar{U}_k$ dla $k > 0$;
  - $b \notin \bar{U}_k$ dla $k < N$;
  - $\bar{U}_j \cap \bar{U}_k = \varnothing$ ilekroć $|j - k| > 1$.
- Jeśli $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ to dwie ścieżki od a do b, powiemy, że ścieżka $\mathcal{U}$ jest *wpisana* w $\mathcal{V}$ za pomocą funkcji $\kappa\colon \{0, \ldots, N\} \to \{0, \ldots, M\}$, co zapisujemy: $\mathcal{U} \overset{\kappa}{\Subset} \mathcal{V}$, gdy κ jest funkcją **słabo rosnącą** oraz
$$\forall k \in \{0, \ldots, N\}\colon \ \bar{U}_k \subset V_{\kappa(k)}.$$
  Gdy funkcja κ będzie nieistotna, będziemy pisać prościej: $\mathcal{U} \Subset \mathcal{V}$.
  Jeśli w powyższej sytuacji zachodzi dodatkowy warunek:
$$\forall p \in \{0, \ldots, M\}\colon \ \operatorname{card}(\kappa^{-1}(\{p\})) > 1,$$
  powiemy, że ścieżka $\mathcal{U}$ jest *ściśle wpisana* w $\mathcal{V}$ (za pomocą funkcji κ), co będzie odnotowywać, pisząc:
$$\mathcal{U} \overset{\kappa}{\Subset} \mathcal{V} \text{ ściśle.}$$

5.4 Obserwacja.
Niech $\mathcal{U}\colon U_0, \ldots, U_N$ i $\mathcal{V}\colon V_0, \ldots, V_M$ oraz $\mathcal{W}$ będą trzema ścieżkami od a do b. Wtedy:

(0) $\forall A \subset X\colon \ \operatorname{diam}_\varrho(A) = \operatorname{diam}_\varrho(\bar{A})$;

(1) *zbiór* $B \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{k=0}^N U_k$ *jest otwarty i spójny oraz* $\operatorname{diam}_\varrho(B) \leqslant \sum_{k=0}^N \operatorname{diam}_\varrho(U_k)$;

(2) *jeśli* $\mathcal{U} \overset{\kappa}{\Subset} \mathcal{V}$ *i ścieżka* $\mathcal{V}$ *jest półwłaściwa, to* κ *jest suriekcją;*

(3) $\mathcal{U} \overset{\kappa}{\Subset} \mathcal{V} \overset{\lambda}{\Subset} \mathcal{W} \implies \mathcal{U} \overset{\lambda\circ\kappa}{\Subset} \mathcal{W}$.

Dowód. Ćwiczenie. □

5.5 Lemat.
Dla dowolnych dwóch punktów x i y ze spójnego zbioru otwartego $P \subset X$ i dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje ε-ścieżka od x do y wpisana w $\mathcal{I}\colon I_0 = P$.

Dowód. Lematu dowiedziemy klasyczną metodą tzw. „dobrych punktów” związaną ze spójnością zbioru.

Niech S będzie zbiorem tych wszystkich punktów $z \in P$, dla których istnieje ε-ścieżka od x do z wpisana w $\mathcal{I}$. Nasze zadanie to pokazać, że $y \in S$. Zamiast tego pokażemy, że $S = P$. Aby te dwa zbiory się pokrywały, potrzeba i wystarcza, by zbiór S był otwarto-domknięty w P oraz niepusty (gdyż zbiór P jest spójny). Z lokalnej spójności przestrzeni X wynika, że każdy punkt tej przestrzeni ma spójne otoczenia otwarte o dowolnie małej średnicy. W szczególności, dla dowolnego punktu $p \in P$ istnieje spójne otoczenie otwarte W^p punktu p, które ma średnicę mniejszą niż ε i którego domknięcie (w X) zawiera się w P (bo P jest zbiorem otwartym). W szczególności, $W^x \subset S$ (gdyż zbiór W^x tworzy jednowyrazową ε-ścieżkę od x do dowolnego swojego punktu, wpisaną w $\mathcal{I}$). Tym samym zbiór S jest niepusty. Otwartość (globalna) tego zbioru wynika z tego, że ε-ścieżkę $\mathcal{V}\colon V_0, \ldots, V_N$ od x do $z \in S$, wpisaną w $\mathcal{I}$, możemy „powiększyć" do ε-ścieżki od x do dowolnego punktu $w \in W^z$, wpisanej w $\mathcal{I}$, dookreślając $V_{N+1} \overset{\text{def}}{=} W^z$ — co pokazuje, że jeśli $z \in S$, to także $W^z \subset S$. Podobnie, jeśli punkt $v \in P$ należy do domknięcia zbioru S, to $S \cap W^v \neq \varnothing$. Jeśli z jest dowolnym punktem tego przecięcia, to istnieje ε-ścieżka $\mathcal{U}\colon U_0, \ldots, U_M$ od x do z wpisana w $\mathcal{I}$ (gdyż $z \in S$). Tę ścieżkę możemy, analogicznie jak poprzednio, „powiększyć" do ε-ścieżki od x do v wpisanej w $\mathcal{I}$, dookreślając $U_{M+1} \overset{\text{def}}{=} W^v$ — co pokazuje, że $v \in S$ i tym samym zbiór S jest domknięty w P. □

5.6 Lemat.
Jeśli $\mathcal{U}\colon U_0, \ldots, U_N$ jest ścieżką od a do b, to istnieje liczba $M \geqslant 0$ oraz ściśle rosnący układ indeksów $k_0, \ldots, k_M \in \{0, \ldots, N\}$, taki że układ $U_{k_0}, \ldots, U_{k_M}$ jest półwłaściwą ścieżką od a do b.

Dowód. Wystarczy zauważyć, że minimalny ściśle rosnący układ indeksów, który wyznacza ścieżkę od a do b, wyznacza zarazem ścieżkę półwłaściwą, a następnie — tak długo, jak jest to możliwe — usuwać z wyjściowej ścieżki zbiory w taki sposób, by pozostały układ tworzył ścieżkę od a do b. □

5.7 Lemat.
Jeśli $\mathcal{U}\colon U_0, \ldots, U_N$ jest półwłaściwą ścieżką od a do b, to dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje półwłaściwa ε-ścieżka od a do b wpisana w $\mathcal{U}$.

Dowód. Niech $w_0 \overset{\text{def}}{=} a$ oraz $w_{N+1} \overset{\text{def}}{=} b$, a dla indeksu k, takiego że $0 < k \leqslant N$, niech w_k będzie dowolnym punktem należącym do przecięcia zbiorów U_{k-1} i U_k (które jest niepuste, gdyż $\mathcal{U}$ jest ścieżką). Dla ustalonego indeksu $j \in \{0, \ldots, N\}$ zauważmy, że punkty w_j oraz w_{j+1} leżą w spójnym zbiorze otwartym U_j, więc z Lem. 5.5 wynika, że istnieje ε-ścieżka $\mathcal{V}_j$ od w_j do w_{j+1} wpisana w $\mathcal{I}_j : I_0^{(j)} = U_j$. Wypisując po kolei wszystkie zbiory występujące w ścieżkach $\mathcal{V}_0, \ldots, \mathcal{V}_N$, z zachowaniem kolejności ścieżek oraz kolejności zbiorów w tychże ścieżkach, i numerując je od 0 do (pewnej) liczby $K \geqslant 0$, otrzymujemy układ zbiorów $\mathcal{W}\colon W_0, \ldots, W_K$, który jest ε-ścieżką od a do b, gdyż ostatni zbiór ścieżki $\mathcal{V}_j$ i pierwszy w $\mathcal{V}_{j+1}$ (czyli o indeksie 0 w $\mathcal{V}_{j+1}$) zawierają punkt w_{j+1}, a ponadto $a = w_0$ i $b = w_{N+1}$. Dodatkowo określamy funkcję $\mu\colon \{0, \ldots, K\} \to \{0, \ldots, N\}$ regułą: $\mu(s) = k$, gdy W_s jest wyrazem ścieżki $\mathcal{V}_k$. Z uwagi na to, że zbiory były wypisywane w odpowiedniej kolejności, funkcja μ jest słabo rosnąca. Ponadto, $\overline{W}_s \subset U_{\mu(s)}$, gdyż $\mathcal{V}_k \Subset \mathcal{I}_k$. Tak więc $\mathcal{W} \overset{\mu}{\Subset} \mathcal{U}$. Aby zakończyć konstrukcję, stosujemy Lem. 5.6, by otrzymać ściśle rosnący układ $p_0, \ldots, p_M$, taki że zbiory $W_{p_0}, \ldots, W_{p_M}$ tworzą (w podanej kolejności) półwłaściwą ścieżkę od a do b. Teraz wystarczy zdefiniować $\mathcal{Q}\colon Q_0, \ldots, Q_M$ oraz $\kappa\colon \{0, \ldots, M\} \to \{0, \ldots, N\}$ następująco: $Q_j \overset{\text{def}}{=} W_{p_j}$ oraz $\kappa(j) \overset{\text{def}}{=} \mu(p_j)$. Wtedy $\mathcal{Q}$ jest półwłaściwą ε-ścieżką od a do b oraz $\mathcal{Q} \overset{\kappa}{\Subset} \mathcal{U}$. □

5.8 Lemat.
*Jeśli $\mathcal{U}\colon U_0, \ldots, U_N$ jest półwłaściwą ścieżką od a do b, to dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje **właściwa** ε-ścieżka od a do b wpisana w $\mathcal{U}$.*

Dowód. Dwukrotnie stosujemy Lem. 5.7: najpierw dobieramy półwłaściwą ε-ścieżke $\mathcal{Q}\colon Q_0, \ldots, Q_M$ od a do b wpisaną w $\mathcal{U}$ za pomocą μ, a następnie znajdujemy półwłaściwą ε-ścieżke $\mathcal{W}\colon W_0, \ldots, W_K$ od a do b wpisaną w $\mathcal{Q}$ za pomocą ν. Z punktu (2) Obs. 5.4 wiemy, że funkcje μ i ν są suriekcjami. Pogrupujmy wyrazy ścieżki $\mathcal{W}$ wg wartości funkcji ν, tzn. dobierzmy (wyznaczone jednoznacznie) indeksy $q_0 = 0 < q_1 < \ldots < q_M < q_{M+1} \overset{\text{def}}{=} K+1$, takie że dla $k \in \{0, \ldots, M\}$ oraz $j \in \{0, \ldots, K\}$:

$$\nu(j) = k \iff q_k \leqslant j < q_{k+1} \tag{5:1}$$

(pamiętajmy, że *nu* jest słabo rosnącą suriekcją!). Określamy nowy układ zbiorów — $\mathcal{V}\colon V_0, \ldots, V_M$ — regułą:

$$V_k \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{j=q_k}^{q_{k+1}-1} W_j \qquad (k = 0, 1, \ldots, M).$$

Zauważmy, że

$$\bar{V}_k \subset Q_k \tag{5:2}$$

(dzięki (5:1)), więc $\operatorname{diam}_\varrho(V_k) \leqslant \varepsilon$. Ponadto, z punktu (1) Obs. 5.4 wynika, że zbiór V_k jest otwarty i spójny. Co więcej, $V_{k-1} \cap V_k \supset W_{q_k-1} \cap W_{q_k} \neq \varnothing$ $(0 < k \leqslant M)$ oraz $a \in W_0 \subset V_0$ i $b \in W_K \subset V_M$. Tym samym $\mathcal{V}$ to ε-ścieżka od a do b. Na koniec zauważmy, że (5:2) implikuje, że $\mathcal{V} \overset{\mu}{\Subset} \mathcal{U}$ oraz że ścieżka $\mathcal{V}$ jest właściwa (gdyż $\mathcal{Q}$ jest półwłaściwa). □

5.9 Lemat.
Jeśli $\mathcal{U}\colon U_0,\ldots,U_N$ jest właściwą ścieżką od a do b, to dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje właściwa ε-ścieżka od a do b wpisana w $\mathcal{U}$ ***ściśle****.*

Dowód. Bez straty ogólności, możemy założyć (i tak robimy), że

$$\varepsilon < \varrho(a,b). \tag{5:3}$$

Stosując wielokrotnie Lem. 5.8, konstruujemy indukcyjnie ścieżki $\mathcal{V}_0 = \mathcal{U}, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \ldots$ w taki sposób, że dla wszelkich $n > 0$:

(S1) $\mathcal{V}_n$ jest właściwą δ_n-ścieżką od a do b, gdzie $\delta_n = \varepsilon/2^n$;

(S2) $\mathcal{V}_n \overset{\kappa_n}{\Subset} \mathcal{V}_{n-1}$ dla pewnej słabo rosnącej funkcji κ_n.

Z punktów (2) i (3) Obs. 5.4 wiemy, że funkcje κ_n są suriekcjami oraz że $\mathcal{V}_n \overset{\mu_n}{\Subset} \mathcal{U}$ (dla $n > 0$), gdzie $\mu_n \overset{\text{def}}{=} \kappa_1 \circ \ldots \circ \kappa_n$. Twierdzimy, że dla pewnej liczby n wpisanie to jest ścisłe, tzn. że (dla pewnego indeksu n) $\operatorname{card}(\mu_n^{-1}(\{p\})) > 1$ dla wszelkich $p \in \{0,\ldots,N\}$. Aby to uzasadnić, przeprowadzamy dowód nie wprost: załóżmy, że dla dowolnego indeksu $n > 0$ istnieje wartość $q_n \in \{0,\ldots,N\}$, taka że zbiór $\mu_n^{-1}(\{q_n\})$ jest jednoelementowy (jest on niepusty, gdyż funkcja μ_n jest suriekcją, jako złożenie suriekcji). Jako że ciąg $(q_n)_{n=1}^\infty$ przyjmuje tylko skończenie wiele wartości, jedna z nich musi być przyjmowana nieskończenie wiele razy, powiedzmy $p \in \{0,\ldots,N\}$. Twierdzimy, że wtedy zbiór $\mu_n^{-1}(\{p\})$ jest jednoelementowy dla dowolnego indeksu n (wiemy już, że jest zawsze niepusty). Istotnie, dla ustalonej liczby $n > 0$ istnieje taki indeks $m > n$, że $q_m = p$. Wtedy zbiór $\mu_m^{-1}(\{p\}) = (\kappa_{n+1} \circ \ldots \kappa_m)^{-1}(\mu_n^{-1}(\{p\}))$ jest jednoelementowy i zarazem ma moc nie mniejszą niż moc zbioru $\mu_n^{-1}(\{p\})$ (gdyż funkcja $\kappa_{n+1} \circ \ldots \kappa_m$ jest suriekcją), co pokazuje postulowaną własność.

Oznaczmy przez ν_n jeden jedyny element zbioru $\mu_n^{-1}(\{p\})$. Wtedy (dla $n > 1$) $\mu_{n-1}(\kappa_n(\nu_n)) = \mu_n(\nu_n) = p$ i tym samym (z jednoznaczności) $\kappa_n(\nu_n) = \nu_{n-1}$. A nawet więcej:

$$\{\nu_n\} = \kappa_n^{-1}(\{\nu_{n-1}\}) \tag{5:4}$$

(inkluzję „$\subset$” wykazaliśmy powyżej, a odwrotna bierze się stąd, że jeśli $\kappa_n(s) = \nu_{n-1}$, to $\mu_n(s) = \mu_{n-1}(\kappa_n(s)) = \mu_{n-1}(\nu_{n-1}) = p$, czyli $s = \nu_n$).

Niech $E_j^{(n)}$ oznacza zbiór o indeksie j w ścieżce $\mathcal{V}_n$ (tzn. $\mathcal{V}_n\colon E_0^{(n)}, E_1^{(n)}, \ldots, E_{r_n}^{(n)}$). Z (S2) oraz (5:4) wnosimy, że $\overline{E_{\nu_n}^{(n)}} \subset E_{\nu_{n-1}}^{(n-1)}$ (dla $n > 1$), a stąd

$$\bigcap_{n=1}^\infty E_{\nu_n}^{(n)} = \bigcap_{n=1}^\infty \overline{E_{\nu_n}^{(n)}}.$$

Z Tw. 2.15 (str. 4) oraz (S1) wynika, że powyższe przecięcie jest jednoelementowe. Oznaczmy element tego przecięcia przez c. Zauważmy, że:

(C1) Punkt c jest różny od a, gdyż:

Gdyby $c = a$, to rozumowalibyśmy tak: $p = 0$ oraz $c \in E_0^{(1)} \setminus \overline{E_1^{(1)}}$ (układ $\mathcal{V}_1$ zawiera więcej niż jeden zbiór, dzięki (5:3)), więc dla pewnego indeksu $n > 0$ zachodzi inkluzja $B_d(c,\delta_n) \subset E_0^{(1)} \setminus \overline{E_1^{(1)}}$. Wtedy $E_0^{(n+1)} \cup E_1^{(n+1)} \subset B_d(c,\delta_n)$, albowiem $c \in E_0^{(n+1)}$, $E_0^{(n+1)} \cap E_1^{(n+1)} \neq \varnothing$ oraz $\operatorname{diam}_\varrho(E_0^{(n+1)}) + \operatorname{diam}_\varrho(E_1^{(n+1)}) \leqslant \delta_n$. A to implikuje, że $\kappa_{n+1}(1) = 0$ (jako że zbiory $E_j^{(n)}$ dla $j > 1$ są rozłączne z $E_0^{(n)}$) i tym samym $\mu_{n+1}(1) = \mu_{n+1}(0) = p$, co przeczy naszym wcześniejszym ustaleniom.

(C2) Punkty c i b są różne — z analogicznych powodów, jak w (C1) (zamiast dwóch początkowych zbiorów ze ścieżek należy rozważać ich dwa ostatnie zbiory).

(C3) Dla wszelkich n: $0 < \nu_n < r_n$ (gdzie r_n to ostatni indeks w układzie $\mathcal{V}_n$), gdyż:

Gdyby dla pewnego indeksu n zachodziła równość $\nu_n = 0$, to z jednoznaczności ν_{n+1} otrzymalibyśmy $\nu_{n+1} = 0$ i tym samym $\nu_m = 0$ dla $m > n$, a stąd $c = a$ (gdyż przecięcie dowolnej nieskończonej podrodziny rodziny $\left(E_0^{(n)}\right)_{n=1}^\infty$ zawiera jedynie a), a już wiemy z (C1), że tak być nie może. Podobnie, gdyby $\nu_n = r_n$ dla pewnego indeksu n, to $c = b$, a tak również być nie może (z (C2)).

Zauważmy teraz, że $\kappa_n(\nu_n - 1) = \nu_{n-1} - 1$ oraz $\kappa_n(\nu_n + 1) = \nu_{n-1} + 1$ dla $n > 1$, gdyż κ_n jest słabo rosnącą **suriekcją**, a wartość ν_{n-1} jest przyjmowana jedynie w ν_n. Z tych wzorów wynika, że $E^{(n)}_{\nu_n \pm 1} \subset E^{(n-1)}_{\nu_{n-1}\pm 1}$. Ponowne zastosowanie Tw. 2.15 (str. 4) implikuje, że zbiory $\bigcap_{n=1}^{\infty} E^{(n)}_{\nu_n+1}$ oraz $\bigcap_{n=1}^{\infty} E^{(n)}_{\nu_n-1}$ są jednoelementowe. Oznaczmy ich (jedyne) elementy przez c_+ oraz c_-, odpowiednio. Z tego samego twierdzenia Cantora (2.15) wynika, że również zbiór

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (E^{(n)}_{\nu_n-1} \cup E^{(n)}_{\nu_n} \cup E^{(n)}_{\nu_n+1})$$

jest jednoelementowy (zob. punkt (1) Obs. 5.4). Ale w tym przecięciu leżą wszystkie trzy punkty c, c_+ i c_-. Tym samym $c = c_+ = c_-$, co oznacza, że $c \in E^{(1)}_{\nu_1-1} \cap E^{(1)}_{\nu_1+1}$, czyli że ścieżka $\mathcal{V}_1$ nie jest nawet półwłaściwa.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że dla pewnego indeksu $n > 0$ ścieżka $\mathcal{V}_n$ jest ściśle wpisana w $\mathcal{U}$. Obserwacja, że jest to zarazem ε-ścieżka, kończy dowód. ☐

5.10 ***Uwaga****.*
W dowodach Lematów 5.5–5.8 ani nie korzystaliśmy z zupełności metryki, ani nie konstruowaliśmy nieskończenie wielu ścieżek. (Nawet więcej: nie są to dowody nie wprost). Tych cech nie ma ostatni z dowodów (zob. Lem. 5.9). Wydaje się interesującym pytanie, czy można ten ostatni lemat udowodnić również bez korzystania z zupełności metryki, po „skończonej liczbie kroków". Na chwilę obecną ('2022) odpowiedź na nie nie jest znana.

Teraz już jesteśmy gotowi udowodnić Twierdzenie Mazurkiewicza-Moore'a.

Dowód Tw. 5.1. Startując od właściwej ścieżki $\mathcal{U}_0\colon U^{(0)}_0 = D$ od a do b i korzystając z Lem. 5.9, indukcyjnie konstruujemy właściwe ε_n-ścieżki $\mathcal{U}_n\colon U^{(n)}_0, \ldots, U^{(n)}_{r_n}$ od a do b z $\varepsilon_n \overset{\text{def}}{=} 2^{-n}$, takie że $\mathcal{U}_n \overset{\kappa_n}{\Subset} \mathcal{U}_{n-1}$ ściśle dla $n > 0$. Podobnie, startując od „trywialnego" podziału $\mathcal{I}_0\colon I^{(0)}_0 = [0,1]$ odcinka $[0,1]$, indukcyjnie konstruujemy jego podziały $\mathcal{I}_n\colon I^{(n)}_0, \ldots, I^{(n)}_{r_n}$ na niezdegenerowane przedziały domknięte, o parami rozłącznych wnętrzach (i uporządkowane „od lewej do prawej") z zachowaniem reguł:

(I1) $I^{(n)}_j \subset I^{(n-1)}_{\kappa_n(j)}$ dla $n > 1$;

(I2) w podziale $\mathcal{I}_n$ przedział $I^{(n-1)}_p$ jest podzielony na $\mathrm{card}(\kappa_n^{-1}(\{p\}))$ przedziałów **równej długości**.

Ponieważ kolejna ścieżka jest **ściśle** wpisana w ścieżkę poprzednią, przy każdym kolejnym podziale odcinka $[0,1]$ przedziały z podziału poprzedniego dzielone są co najmniej na dwie części (równej długości). Z tego względu łatwo dowodzimy indukcyjnie, że $|I^{(n)}_k| \leqslant 2^{-n}$, gdzie $|J|$ oznacza długość (czyli średnicę) przedziału J.

Dla dowolnej liczby $t \in [0,1]$ oraz $n > 0$ oznaczmy przez $S_n(t)$ zbiór tych indeksów $j \in \{0, \ldots, r_n\}$, dla których $t \in I^{(n)}_j$. Z własności podziałów $\mathcal{I}_n$ wynika, że (przy ustalonym n):

- albo $S_n(t) = \{q\}$ — wtedy określamy $J_n(t) \overset{\text{def}}{=} I^{(n)}_q$ oraz $V_n(t) \overset{\text{def}}{=} U^{(n)}_q$;
- albo $S_n(t) = \{q, q+1\}$ — wtedy określamy $J_n(t) \overset{\text{def}}{=} I^{(n)}_q \cup I^{(n)}_{q+1}$ oraz $V_n(t) \overset{\text{def}}{=} U^{(n)}_q \cup U^{(n)}_{q+1}$.

Zauważmy, że rodzina $\{J_n(t)\colon\ n > 0\}$ stanowi bazę (domkniętych) otoczeń punktu t w przestrzeni $[0,1]$. Ponadto, $J_n(t) \subset J_{n-1}(t)$ i $\overline{V_n(t)} \subset V_{n-1}(t)$ dla $n > 1$ (druga z tych inkluzji wynika z (I1)) oraz $\mathrm{diam}_\varrho(V_n(t)) \to 0$ $(n \to \infty)$. W takim razie $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n(t) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V_n(t)}$ oraz, na podstawie Tw. 2.15 (str. 4), przecięcie to jest jednoelementowe. Pozwala nam to poprawnie określić funkcję $\gamma\colon [0,1] \to D$ reguła: $\gamma(t) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n(t)$. Pokażemy, że γ jest łukiem od a do b. Ze zwartości odcinka $[0,1]$ wynika, że wystarczy pokazać, że:

(A1) $\gamma(0) = a$ i $\gamma(1) = b$;

(A2) γ jest funkcją ciągłą;

(A3) γ jest funkcją różnowartościową.

Ponieważ $0 \in I^{(n)}_0$ i $1 \in I^{(n)}_{r_n}$, przeto $(a \in)\ U^{(n)}_0 \subset V_n(0)$ i $(b \in)\ U^{(n)}_{r_n} \subset V_n(1)$. A stąd $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n(0)$ oraz $b \in \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n(1)$, co dowodzi (A1). Dalej, skoro zbiory $V_n(t)$ są otwarte, zawierają $\gamma(t)$ i ich średnice dążą do zera, zatem zbiory te tworzą bazę otoczeń punktu $\gamma(t)$. Aby więc wykazać ciągłość funkcji γ w punkcie t, wystarczy dla każdego $n > 0$ wskazać otwarte w [0,1] otoczenie Z_n punktu t, dla którego $\gamma(Z_n) \subset V_n(t)$. Jako Z_n określamy wnętrze (w $[0,1]$) zbioru $J_n(t)$. Zauważmy, że dla $s \in Z_n$ zachodzi inkluzja $S_n(s) \subset S_n(t)$ i tym samym $\gamma(s) \in V_n(s) \subset V_n(t)$, co dowodzi (A2). Aby sprawdzić (A3), ustalmy dowolnie $s, t \in [0,1]$, takie że $s < t$. Dobieramy $n > 0$, tak by $t - s > 3/2^n$. Ponieważ zbiory z podziału $\mathcal{I}_n$ mają średnicę nie większą niż 2^{-n}, wnioskujemy, że $\max S_n(s) + 1 < \min S_n(t)$. Oznacza to, że jeśli $j \in S_n(s)$ oraz $k \in S_n(t)$, to $k - j > 1$. Tym samym $U^{(n)}_j \cap U^{(n)}_k = \varnothing$ i dlatego także $V_n(s) \cap V_n(t) = \varnothing$. Ale $\gamma(s) \in V_n(s)$, a $\gamma(t) \in V_n(t)$, więc $\gamma(s) \neq \gamma(t)$. ☐

Najbliższa (aczkolwiek spora) część tego rozdziału poświęcona jest dowodowi Tw. 5.2 (str. 10). Użyjemy w nim 4 poniższych rezultatów, z których pierwszy jest wnioskiem z Tw. 5.1 (str. 10).

5.11 Wniosek.
Niech (X, d) będzie zwartą i lokalnie spójną przestrzenią metryczną. Dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$, taka że dowolne dwa punkty $a, b \in X$ o odległości mniejszej niż δ można połączyć drogą $\gamma\colon [0,1] \to X$, taką że $\operatorname{diam}_d(\gamma([0,1])) \leqslant \varepsilon$.

Dowód. Dowodzimy nie wprost. Przypuśćmy, że istnieje liczba $\varepsilon > 0$ oraz dwa ciągi $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ oraz $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ punktów przestrzeni X, takie że

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = 0, \tag{5:5}$$

ale każda droga od a_n do b_n ma zbiór wartości o średnicy większej niż ε. Korzystając ze zwartości i przechodząc do podciągu, możemy założyć, że ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do pewnego punktu $c \in X$. Nierówność trójkąta oraz (5:5) implikują, że również ciąg $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do c. Z lokalnej spójności przestrzeni X wynika, że istnieje otwarte i spójne otoczenie D punktu c, takie że $\operatorname{diam}_d(D) < \varepsilon$. Ze zbieżności ww. ciągów do c wynika, że istnieje taki indeks k, że $a_k, b_k \in D$. Jeśli $a_k = b_k$, to punkty te możemy połączyć stałą drogą (o średnicy jej zbioru wartości równej zero), a gdy $a_k \neq b_k$, z Tw. 5.1 wynika istnienie łuku $\gamma\colon [0,1] \to D$ od a do b, a wtedy $\operatorname{diam}_d(\gamma([0,1])) \leqslant \operatorname{diam}_d(D) < \varepsilon$ — co w obu przypadkach prowadzi do sprzeczności z przyjętym hipotetycznie założeniem. □

5.12 Lemat. (Twierdzenie o diadyczności)
Każda zwarta niepusta przestrzeń metryzowalna jest ciągłym obrazem zbioru Cantora.

Dowód. Niech $I_0 \stackrel{\text{def}}{=} [0, \frac{1}{3}]$, $I_1 \stackrel{\text{def}}{=} [\frac{2}{3}, 1]$ oraz zakładając, że przedział $I_{\delta_1\ldots\delta_p}$ (gdzie $p > 0$ i $\delta_1, \ldots, \delta_p \in \{0,1\}$) został już określony i ma postać $[a,b]$, definiujemy $I_{\delta_1\ldots\delta_p 0} \stackrel{\text{def}}{=} [a, \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b]$ oraz $I_{\delta_1\ldots\delta_p 1} \stackrel{\text{def}}{=} [\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b, b]$ (te dwa zbiory to, odpowiednio, lewy i prawy przedział, jakie powstają przy podziale odcinka $[a,b]$ na 3 części równej długości — środkową z nich odrzucamy). Z klasycznej konstrukcji zbioru Cantora $\mathcal{C}$ wiemy, że

$$\mathcal{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Big(\bigcup_{\delta_1,\ldots,\delta_n \in \{0,1\}} I_{\delta_1\ldots\delta_n} \Big).$$

Ponadto, gdy $(\delta_1, \ldots, \delta_p) \neq (\eta_1, \ldots, \eta_p)$ (ta sama długość indeksu!), przedziały $I_{\delta_1\ldots\delta_p}$ oraz $I_{\eta_1,\ldots,\eta_p}$ są rozłączne. Oznacza to, w szczególności, że dla dowolnego punktu $x \in \mathcal{C}$ istnieje **dokładnie jeden** ciąg $(\eta_n)_{n=1}^{\infty} = (\eta_n(x))_{n=1}^{\infty} \subset \{0,1\}$, taki że $x \in I_{\eta_1\ldots\eta_n}$ dla dowolnej liczby $n > 0$. Co więcej, funkcja $\Xi\colon \mathcal{C} \ni x \mapsto (\eta_n(x))_{n=1}^{\infty} \in \{0,1\}^{\omega}$ jest bijekcją[*3)] Łatwo sprawdzić, że

($\star$) zbiory $\mathcal{C} \cap I_{\eta_1(x)\ldots\eta_n(x)}$ (gdzie $n > 0$) tworzą bazę otwarto-domkniętych (w $\mathcal{C}$) otoczeń punktu x.

Rozważmy teraz dowolną niepustą zwartą przestrzeń metryzowalną X i ustalmy na niej metrykę d zgodną z topologią. Ze zwartości wynika, że przy dowolnie zadanej liczbie $\varepsilon > 0$, każdy niepusty podzbiór przestrzeni X możemy przedstawić jako sumę mnogościową skończenie wielu niepustych zbiorów, z których każdy ma średnicę nie większą niż ε. Z tej własności łatwo wynika, że istnieje rodzina postaci $\{A_{\delta_1\ldots\delta_p}\colon\ p > 0,\ \delta_1, \ldots, \delta_p \in \{0,1\}\}$ o następujących własnościach:

(D1) $X = A_0 \cup A_1$;

(D2) $A_{\delta_1\ldots\delta_p} = A_{\delta_1\ldots\delta_p 0} \cup A_{\delta_1\ldots\delta_p 1}$;

(D3) wszystkie zbiory $A_{\delta_1\ldots\delta_p} \subset X$ są niepuste i domknięte;

(D4) ciąg (liczbowy) $\Delta_n \stackrel{\text{def}}{=} \max\{\operatorname{diam}_d(A_{\delta_1\ldots\delta_n})\colon\ \delta_1, \ldots, \delta_n \in \{0,1\}\}$ zbiega do zera.

(Istotnie, możemy wystartować np. od $A_1 = A_2 \stackrel{\text{def}}{=} X$, a dalej rozumować indukcyjnie następująco. Jeśli w k-tym kroku indukcyjnym powstały wszystkie zbiory o indeksach długości q_k lub krótszej, gdzie $q_k \geqslant k$, w kolejnym kroku indukcyjnym dookreślimy wszystkie zbiory o indeksach o długości większej niż q_k, ale nie większej niż pewna liczba $q_{k+1} > q_k$, w taki sposób, by wszystkie zbiory o indeksie długości dokładnie q_{k+1} miały średnicę nie większą niż 2^{-k} — w ten sposób zadbamy o warunek (D4), a o (D2)–(D3) dbamy na bieżąco w czasie konstrukcji. Aby osiągnąć nasz cel,

[*3)] Jest nawet homeomorfizmem, ale tutaj tego nie potrzebujemy.

każdy ze zbiorów o indeksie długości dokładnie q_k przedstawiamy jako sumę mnogościową skończenie wielu niepustych zbiorów domkniętych o średnicy nie większej niż 2^{-k}. Możemy przy tym założyć, że każde z tych pokryć ma tę samą moc, która jest potęgą dwójki, powiedzmy 2^m z $m > 0$ — istotnie, wystarczy niektóre zbiory występujące w pokryciach wielokrotnie dorzucić jako „nowe" zbiory w tych pokryciach. W tej sytuacji określamy q_{k+1} jako $q_k + m$ i gdy zbiór $A_{\delta_1\ldots\delta_{q_k}}$ został pokryty zbiorami $C_1, \ldots, C_{2^m}$, możemy te zbiory ponumerować ciągami zero-jedynkowymi długości dokładnie m, czyli możemy ich zestaw przedstawić jako rodzinę $\{E_{\eta_1\ldots\eta_m}\colon\ \eta_1, \ldots, \eta_m \in \{0,1\}\}$. Wtedy wystarczy określić zbiór $A_{\delta_1\ldots\delta_{q_k}\mu_1\ldots\mu_j}$ (gdzie $0 < j \leqslant m$ oraz $\mu_1, \ldots, \mu_j \in \{0,1\}$) jako sumę mnogościową wszystkich zbiorów postaci $E_{\eta_1\ldots\eta_m}$, dla których $\eta_s = \mu_s$ dla $s = 1, \ldots, j$. W ten sposób warunki (D2)–(D4) będą zachowane).

Mając taką rodzinę zbiorów, bez trudu określimy suriekcję $u\colon \mathcal{C} \to X$: dla $x \in \mathcal{C}$ określamy $u(x)$ jako jeden jedyny element przecięcia $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\eta_1(x)\ldots\eta_n(x)}$ (przecięcie to jest jednoelementowe dzięki (D2)–(D4) oraz Tw. 2.15, str. 4). Zauważmy, że

$$u(\mathcal{C} \cap I_{\eta_1\ldots\eta_p}) \subset A_{\eta_1\ldots\eta_p} \tag{5:6}$$

dla wszelkich $p > 0$ oraz $\eta_1, \ldots, \eta_p \in \{0,1\}$ (inkluzja ta wynika wprost z definicji funkcji u oraz suriektywności odwzorowania Ξ). Własności $(\star)$, (D4) oraz (5:6) implikują ciągłość funkcji u. Pozostaje więc wykazać, że u jest suriekcją. W tym celu ustalamy dowolny punkt $b \in X$ i indukcyjnie, korzystając z (D1)–(D2), dobieramy cyfry $\mu_1, \mu_2, \ldots \in \{0,1\}$, tak by w każdym kroku indukcyjnym zachodziła własność $b \in A_{\mu_1\ldots\mu_n}$ (taki ciąg $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ nie musi być jednoznaczny). Z suriektywności funkcji Ξ wynika, że istnieje punkt $x \in \mathcal{C}$, taki że $\mu_n = \eta_n(x)$ dla wszelkich $n > 0$. Wtedy (zgodnie z definicją funkcji u) $u(x) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\mu_1\ldots\mu_n}$ $(\ni b)$, czyli $u(x) = b$, i koniec dowodu. □

5.13 Lemat.
Jeśli T_2-przestrzeń X jest ciągłym obrazem zwartej przestrzeni metryzowalnej, to X jest przestrzenią metryzowalną.

Poniższy dowód, po nieznacznych zmianach, pokazuje, że $w(X) \leqslant w(K)$, jeśli X jest T_2-przestrzenią, która jest ciągłym obrazem zwartej T_2-przestrzeni K.

Dowód Lem. 5.13. Załóżmy, że K jest zwartą przestrzenią metryzowalną, a $u\colon K \to X$ ciągłą suriekcją. Ponieważ przestrzenie X i K są zwarte i T_2, z Tw. 6.6 (str. 26) w rozdziale 6 wynika, że ich metryzowalność jest równoważna II A.P. Tak więc przy założeniu, że K spełnia II A.P., mamy pokazać, że także X spełnia ten aksjomat.

Niech β_K będzie bazą topologii przestrzeni K, taką że

$$\operatorname{card}(\beta_K) \leqslant \aleph_0. \tag{5:7}$$

Dorzucając do β_K skończone sumy jej elementów (co nie wpłynie na prawdziwość (5:7)), możemy założyć (i tak właśnie robimy), że ponadto:

$$U, V \in \beta_K \implies U \cup V \in \beta_K. \tag{5:8}$$

Niech $\beta_X \stackrel{\text{def}}{=} \{X \setminus u(K \setminus U)\colon\ U \in \beta_K\}$. Ponieważ funkcja $\beta_K \ni U \mapsto X \setminus u(K \setminus U) \in \beta_X$ jest suriekcją, przeto $\operatorname{card}(\beta_X) \leqslant \operatorname{card}(\beta_K)$ $(\leqslant \aleph_0)$. Zauważmy także, że β_X składa się ze zbiorów otwartych, co wynika z tego, że przestrzeń X jest T_2. (Istotnie: jeśli $U \in \beta_K$, to zbiór $K \setminus U$ jest domknięty w K, więc zwarty i tym samym także $u(K \setminus U)$ jest zbiorem zwartym, przez co domkniętym w X). Pozostaje pokazać, że dowolny zbiór otwarty w X możemy przedstawić jako sumę mnogościową podrodziny rodziny β_X. W tym celu ustalmy zbiór otwarty W w X oraz dowolny punkt $b \in W$. Wystarczy znaleźć zbiór $V \in \beta_X$, taki że $b \in V \subset W$.

Niech $L \stackrel{\text{def}}{=} u^{-1}(\{b\})$ oraz $\Omega \stackrel{\text{def}}{=} u^{-1}(W)$. Wtedy L jest zbiorem domkniętym (więc zwartym), a Ω zbiorem otwartym w K. Z własności bazy oraz zwartości zbioru L wynika, że istnieje skończenie wiele zbiorów $U_1, \ldots, U_N \in \beta_K$, takich że $L \subset \bigcup_{k=1}^{N} U_k \subset \Omega$. Z (5:8) wynika, że także zbiór $U \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{k=1}^{N} U_k$ należy do rodziny β_K i tym samym zbiór $V \stackrel{\text{def}}{=} X \setminus u(K \setminus U)$ należy do β_X. Odnotujmy, iż

$$u^{-1}(\{b\}) \subset U \subset u^{-1}(W). \tag{5:9}$$

Pokażemy, że $b \in V \subset W$, co zakończy cały dowód.

Warunek $b \in V$ jest równoważny temu, że $b \notin u(K \setminus U)$. Tej ostatniej relacji dowodzimy nie wprost: jeśli $b \in u(K \setminus U)$, to istnieje punkt $a \in K \setminus U$, taki że $u(a) = b$. A wtedy $a \in u^{-1}(\{b\})$, czyli $a \in U$ (dzięki (5:9)), co przeczy temu, że $a \in K \setminus U$.

Na koniec sprawdźmy, że $V \subset W$. Ponieważ u jest suriekcją, ta inkluzja jest równoważna temu, że $u^{-1}(V) \subset u^{-1}(W)$. Ale $u^{-1}(V) = K \setminus u^{-1}(u(K \setminus U))$ oraz $u^{-1}(u(B)) \supset B$ (dla dowolnego zbioru $B \subset K$), zatem $K \setminus u^{-1}(u(B)) \subset K \setminus B$. Podstawiając $B \stackrel{\text{def}}{=} K \setminus U$, otrzymujemy, że $(u^{-1}(V) =)\ K \setminus u^{-1}(u(K \setminus U)) \subset K \setminus (K \setminus U) = U$, co w połączeniu z (5:9) daje żądaną inkluzję $u^{-1}(V) \subset u^{-1}(W)$. □

5.14 Lemat.
Ciągły obraz lokalnie spójnej zwartej przestrzeni metryzowalnej jest przestrzenią lokalnie spójną, o ile jest to przestrzeń T_2.

Dowód. Niech Z będzie T_2-przestrzenią, X lokalnie spójną zwartą przestrzenią metryzowalną, a $u\colon X \to Z$ ciągłą suriekcją. Niech także W będzie otwartym otoczeniem punktu $b \in Z$. Dla dowolnego punktu $a \in A \overset{\text{def}}{=} u^{-1}(\{b\})$ niech V_a będzie składową zbioru $u^{-1}(W)$ w punkcie a. Z lokalnej spójności przestrzeni X wynika, że zbiory V_a są otwarte. Ponadto, $b \in u(V_a)$ dla wszelkich $a \in A$, więc ze spójności zbiorów V_a (i ciągłości funkcji u) wynika, że zbiór $S \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{a\in A} u(V_a)$ jest spójny. Oczywiście $S \subset W$. Pozostaje więc pokazać, że S jest otoczeniem punktu b. Przeprowadzamy dowód nie wprost.

Z Lem. 5.13 wiemy, że Z jest przestrzenią metryzowalną. Jeśli S nie jest otoczeniem punktu b, wtedy istnieje ciąg $(c_n)_{n=1}^{\infty} \subset Z \setminus S$ zbieżny do b. Z suriektywności odwzorowania u wynika istnienie ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$, takiego że $u(a_n) = c_n$ dla wszelkich n. Zwartość przestrzeni X implikuje, że ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ma podciąg zbieżny. Przechodząc do tegoż podciągu, możemy założyć, że $a_n \to a \in X$ $(n \to \infty)$. A wtedy także c_n $(= u(a_n)) \to u(a)$ $(n \to \infty)$. Z jedyności granicy w Z wynika, że $u(a) = b$, czyli $a \in A$. Zbiór V_a jest otoczeniem punktu a, zatem $a_N \in V_a$ dla pewnego $N > 0$. A wtedy $c_N \in u(V_a) \subset S$ i sprzeczność. □

Dowód Tw. 5.2. Implikacja „(i) $\implies$ (ii)" wynika z podstawowych własności związanych z pojęciem zwartości i spójności oraz z Lem. 5.13 i 5.14. Dla dowodu odwrotnej implikacji, ustalmy metrykę d na X zgodną z topologią tej przestrzeni i dobierzmy suriekcję ciągłą $v\colon \mathcal{C} \to X$, której istnieje gwarantuje Lem. 5.12. Zbiór $[0,1] \setminus \mathcal{C}$ jest otwarty w $\mathbb{R}$ i ma przeliczalnie (nieskończenie) wiele składowych, które są ograniczonymi przedziałami otwartymi w $\mathbb{R}$. Zapiszmy więc $[0,1] \setminus \mathcal{C} = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, gdzie zbiory $U_1, U_2, \dots$ są parami rozłączne oraz $U_n = (a_n, b_n)$ $(0 \leqslant a_n < b_n \leqslant 1)$. Odnotujmy, że dla dowolnego indeksu $n > 0$, $a_n, b_n \in \mathcal{C}$, więc określone są wartości $p_n \overset{\text{def}}{=} v(a_n)$ oraz $q_n \overset{\text{def}}{=} v(b_n)$.

Wn. 5.11 (str. 15) implikuje, że dla dowolnego indeksu $n > 0$ istnieje liczba całkowita $k_n > 0$, taka że:

$$\text{(5:10)} \qquad a, b \in X,\ d(a,b) \leqslant \frac{\operatorname{diam}_d(X)}{k_n} \implies \exists\gamma \text{ — droga od } a \text{ do } b\colon \operatorname{diam}_d(\operatorname{im}(\gamma)) \leqslant \frac{\operatorname{diam}_d(X)}{n}.$$

Przyjmujemy przy tym, że $k_1 = 1$.

Dalej, ponieważ $\mathcal{C}$ i X to zwarte przestrzenie metryczne, przeto funkcja v jest jednostajnie ciągła, co oznacza, że dla dowolnej liczby całkowitej $n > 0$ istnieje taka liczba całkowita $m_n > 0$, że:

$$\text{(5:11)} \qquad x, y \in \mathcal{C},\ |x - y| \leqslant \frac{1}{m_n} \implies d(v(x), v(y)) \leqslant \frac{\operatorname{diam}_d(X)}{k_n}.$$

Możemy przy tym tak dobrać powyższy ciąg $(m_n)_{n=1}^{\infty}$, by był ściśle rosnący oraz by $m_1 = 1$ (bo $k_1 = 1$), dlatego ponadto zakładamy, że $m_1 = 1$ oraz $m_n < m_{n+1}$ dla wszelkich $n > 0$.

Na koniec dla dowolnego indeksu $n > 0$ niech ν_n oznacza największy taki indeks $k > 0$, że $|a_n - b_n| \leqslant \frac{1}{m_k}$ (liczba ν_n jest dobrze określona, gdyż $m_1 = 1$ oraz ciąg $\left(\frac{1}{m_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ dąży do zera). Dla wszelkich $n > 0$ otrzymujemy następujący ciąg implikacji:

$$|a_n - b_n| \leqslant \frac{1}{m_{\nu_n}} \overset{(5:11)}{\implies} d(p_n, q_n) \leqslant \frac{\operatorname{diam}_d(X)}{k_{\nu_n}}$$
$$\overset{(5:10)}{\implies} \exists\gamma_n\colon [a_n, b_n] \to X \text{ droga od } p_n \text{ do } q_n\colon \quad \operatorname{diam}_d(\gamma_n([a_n, b_n])) \leqslant \frac{\operatorname{diam}_d(X)}{\nu_n}.$$

Odnotujmy jeszcze jedną ważną własność:

$$\text{(5:12)} \qquad \lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}_d(\gamma_n([a_n, b_n])) = 0.$$

Aby to wykazać, wystarczy zauważyć, że

(Z1) $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ — co wynika łatwo z tego, że przedziały $U_1, U_2, \dots$ są parami rozłączne i zawarte w $[0,1]$, dzięki czemu
$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) \leqslant 1;$$

(Z2) $\lim_{n\to\infty} \nu_n = \infty$ — gdyż $\lim_{n\to\infty} m_{\nu_n} = \infty$, co z kolei wynika z (Z1).

Ostatecznie zdefiniujmy szukaną funkcję $u\colon [0,1] \to X$ formułą:

$$u(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} v(t) & \text{gdy } t \in \mathcal{C} \\ \gamma_n(t) & \text{gdy } t \in U_n \ (n > 0) \end{cases}.$$

Zauważmy, że jest to poprawnie określona suriekcja. Aby więc zakończyć dowód, wystarczy wykazać ciągłość funkcji u. Dowód tej własności rozpocznijmy od prostej obserwacji, że funkcja u jest ciągła w każdym punkcie zbioru $[0,1] \setminus \mathcal{C}$ $(= \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n)$, gdyż $u|_{U_n} = \gamma_n|_{U_n}$. Pozostaje sprawdzić ciągłość w punktach $s \in \mathcal{C}$. W tym celu ustalamy dowolny ciąg $(t_n)_{n=1}^{\infty} \subset [0,1]$ zbieżny do s i rozumując nie wprost (tzn. zakładając, że ciąg $(u(t_n))_{n=1}^{\infty}$ nie zbiega do $u(s)$), możemy założyć, przechodząc do stosownego podciągu (wciąż niezbieżnego do $u(s)$), że zachodzi jeden z trzech warunków:

- $t_n \in \mathcal{C}$ dla wszelkich $n > 0$ — ale wtedy $u(t_n) = v(t_n) \to v(s) = u(s)$ $(n \to \infty)$, co przeczy poczynionemu przez nas hipotetycznemu założeniu;
- $t_n \in U_k$ dla wszelkich $n > 0$ i pewnego ustalonego indeksu $k > 0$ — a wtedy $s \in \{a_k, b_k\}$ oraz (dzięki ciągłości funkcji γ_k) $u(t_n) = \gamma_k(t_n) \to \gamma_k(s) = v(s) = u(s)$, co również prowadzi do sprzeczności;
- $t_n \in U_{r_n}$, gdzie $\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$ — wtedy z (5:12) i (Z1) wynika, że (odpowiednio)

  $$d(\gamma_{r_n}(t_n), \gamma_{r_n}(a_{r_n})) \to 0 \ (n \to \infty)$$

  oraz $|t_n - a_{r_n}| \to 0$ $(n \to \infty)$, a stąd także $|a_{r_n} - s| \to 0$ $(n \to \infty)$ i tym samym $d(v(a_{r_n}), v(s)) \to 0$ $(n \to \infty)$, co, po uwzględnieniu tego, że $\gamma_{r_n}(a_{r_n}) (= p_{r_n}) = v(a_{r_n})$, i zastosowaniu nierówności trójkąta daje

  $$d(u(t_n), u(s)) \leqslant d(\gamma_{r_n}(t_n), \gamma_{r_n}(a_{r_n})) + d(v(a_{r_n}), v(s)) \to 0 \ (n \to \infty)$$

  i znów dochodzimy do sprzeczności.

Tym samym ciąg $(u(t_n))_{n=1}^{\infty}$ dąży do $u(s)$ i funkcja u jest ciągła. □

5.15 Wniosek.
Drogowo spójna przestrzeń T_2 jest łukowo spójna.

Dowód. Niech a i b będą dwoma różnymi punktami drogowo spójnej T_2-przestrzeni X i niech $\gamma\colon [0,1] \to X$ będzie drogą od a do b. Z Tw. 5.2 wynika, że wtedy przestrzeń $W \stackrel{\text{def}}{=} \gamma([0,1])$ jest metryzowalna, zwarta, spójna i lokalnie spójna. W takim razie, dzięki Tw. 5.1, jest ona także łukowo spójna. W szczególności, istnieje łuk od a do b (gdyż oba te punkty leżą w W). □

Aby sformułować kolejne twierdzenie, potrzebujemy następujących dwóch pojęć:

5.16 Definicja.
Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną, a $\gamma\colon [a,b] \to X$ (gdzie $-\infty < a < b < \infty$) dowolną funkcją (niekoniecznie ciągłą). *Długością* „krzywej”[*4)] γ (względem metryki d) nazywamy wielkość:

$$\ell_d(\gamma) = \ell_d(\gamma; a,b) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \left\{ \sum_{k=1}^{p} d(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k))\colon \ p > 0,\ a \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_p \leqslant b \right\} \in [0, \infty].$$

Dla $[p,q] \subset [a,b]$ będziemy pisać $\ell_d(\gamma; p,q)$ zamiast $\ell_d(\gamma|_{[p,q]}; p,q)$.
„Krzywa” γ jest *prostowalna*, gdy $\ell_d(\gamma) < \infty$.

5.17 Definicja.
Punkt $c \in X$ w przestrzeni metrycznej (X,d) nazywamy *środkiem metrycznym* między punktami $a, b \in X$, gdy $d(a,c) = d(b,c) = \frac{1}{2} d(a,b)$.

[*4)] Cudzysłów wokół słowa krzywa ma przypominać, że nie musi to być funkcja ciągła.

Warto w tym miejscu zaznaczyć, że środek metryczny między punktami może nie istnieć, może także być nieskończenie wiele środków metrycznych między dwoma ustalonymi punktami.

5.18 Definicja.
Powiemy, że przestrzeń metryczna (X,d) jest *segmentowo zupełna*, gdy dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$, każde izometryczne odzworowanie $\gamma\colon [0,\varepsilon) \to X$ ma granicę w ε.

5.19 Twierdzenie. (Twierdzenie Hopfa-Rinowa)
Dla przestrzeni metrycznej (X,d) następujące warunki są równoważne:

(HR1) *Przestrzeń (X,d) jest lokalnie zwarta i segmentowo zupełna oraz dla dowolnych dwóch różnych punktów $x,y\in X$ i liczby $\varepsilon>0$ istnieje punkt $z\in X$, taki że $|d(x,y)-2d(x,z)|+|d(x,y)-2d(y,z)|\leqslant\varepsilon$.*[*5)]

(HR2) *Przestrzeń (X,d) jest lokalnie zwarta i segmentowo zupełna oraz dla dowolnych dwóch różnych punktów $x,y\in X$ i liczby $\varepsilon>0$ istnieje skończony układ punktów $w_0,\dots,w_p$ $(p>0)$, taki że $w_0=x$, $w_p=y$, $d(w_{j-1},w_j)\leqslant\varepsilon$ dla $j=1,\dots,p$ oraz $\sum_{k=1}^{p} d(w_{k-1},w_k)\leqslant d(x,y)+\varepsilon$.*

(HR3) *Przestrzeń (X,d) jest lokalnie zwarta i segmentowo zupełna oraz dla dowolnych dwóch różnych punktów $x,y\in X$ i liczby $\varepsilon>0$ istnieje krzywa*[*6)] *γ od x do y, taka że $\ell_d(\gamma)\leqslant d(x,y)+\varepsilon$.*

(HR4) *Wszystkie kule domknięte w przestrzeni (X,d) są zwarte oraz dla dowolnych dwóch różnych punktów $x,y\in X$ istnieje izometryczna krzywa $\gamma\colon[0,d(x,y)]\to X$ od x do y.*

Podobnie, jak to miało miejsce w przypadku Twierdzeń Mazurkiewicza-Moore'a oraz Hahna-Mazurkiewicza, Twierdzenie Hopfa-Rinowa wymaga przygotowań. Rozpocznijmy od:

5.20 Lemat.
Niech $\gamma\colon[a,b]\to(X,d)$ będzie dowolną funkcją.

(a) *Zachodzi nierówność: $d(\gamma(a),\gamma(b))\leqslant\ell_d(\gamma)$.*

(b) *Dla przedziału $[p,q]\subset[a,b]$, takiego że $\ell_d(\gamma;a,p)<\infty$, zachodzi równoważność:*

$$\ell_d(\gamma;a,p)=\ell_d(\gamma;a,q) \iff \forall t\in[p,q]\colon\ \gamma(t)=\gamma(p).$$

(c) *Dla dowolnej liczby $t\in[a,b]$, $\ell_d(\gamma;a,b)=\ell_d(\gamma;a,t)+\ell_d(\gamma;t,b)$ oraz $\ell_d(\gamma;t,t)=0$.*

(d) *Funkcja $[a,b]\ni t\mapsto\ell_d(\gamma;a,t)\in[0,\infty]$ jest słabo rosnąca.*

(e) *Jeśli γ jest krzywą prostowalną, to funkcja $[a,b]\ni t\mapsto\ell_d(\gamma;a,t)\in\mathbb{R}_+$ jest ciągła.*

(f) *Jeśli γ jest odzworowaniem izometrycznym, to $\ell_d(\gamma)=b-a$.*

Dowód. Punkty (a) i (f) pozostawiamy jako proste ćwiczenie. Dla dowodu (b) wystarczy skorzystać z (c): $\ell_d(\gamma;a,q)=\ell_d(\gamma;a,p)+\ell_d(\gamma;p,q)$, oraz zauważyć, że $\ell_d(\gamma;p,q)=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $\gamma|_{[p,q]}$ jest stała.

(c): Jeśli $a\leqslant s_0\leqslant\ldots\leqslant s_p\leqslant b$, do tego układu możemy dorzucić liczby a,t,b, by po uporządkowaniu wszystkich tych liczb otrzymać nowy układ postaci $a=r_0\leqslant r_1\leqslant\ldots\leqslant r_q=b$ z $r_k=t$ dla pewnego indeksu $k\in\{0,\dots,q\}$. Z nierówności trójkąta wynika, że

$$\sum_{j=1}^{p} d(\gamma(s_{j-1}),\gamma(s_j))\leqslant\sum_{j=1}^{q} d(\gamma(r_{j-1}),\gamma(r_j))=\sum_{j=1}^{k} d(\gamma(r_{j-1}),\gamma(r_j))+\sum_{j=k+1}^{q} d(\gamma(r_{j-1}),\gamma(r_j))\leqslant\ell_d(\gamma;a,t)+\ell_d(\gamma;t,b).$$

Przechodząc do supremum z lewej strony tej nierówności otrzymujemy $\ell_d(\gamma;a,b)\leqslant\ell_d(\gamma;a,t)+\ell_d(\gamma;t,b)$. Dla dowodu przeciwnej nierówności wystarczy zauważyć, że jeśli $a\leqslant s_0\leqslant\ldots\leqslant s_p\leqslant t$ oraz $t\leqslant r_0\leqslant\ldots\leqslant r_q\leqslant b$, to $s_p\leqslant r_0$, więc

[*5)] Warunek ten mówi, że punkt z jest, z dokładnością do ε, środkiem metrycznym między x i y.
[*6)] A więc funkcja ciągła.

oznaczając przez $t_0, \ldots, t_{p+q+1}$ liczby (odpowiednio) $s_0, \ldots, s_p, r_0, \ldots, r_q$ otrzymujemy układ $a \leqslant t_0 \leqslant \ldots \leqslant t_{p+q+1} \leqslant b$, taki że:

$$\sum_{k=1}^{p} d(\gamma(s_{k-1}), \gamma(s_k)) + \sum_{k=1}^{q} d(\gamma(r_{k-1}), \gamma(r_k)) \leqslant \sum_{k=1}^{p+q+1} d(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)) \leqslant \ell_d(\gamma; a, b),$$

a następnie wystarczy przejść do supremum po lewej stronie powyższej nierówności. Druga część tego punktu jest natychmiastowa.

(d): Jeśli $a \leqslant s \leqslant t \leqslant b$, to z (c) otrzymujemy, że $\ell_d(\gamma; a, t) = \ell_d(\gamma; a, s) + \ell_d(\gamma; s, t) \geqslant \ell_d(\gamma; a, s)$.

(e): Oznaczmy $\Gamma\colon [a, b] \ni t \mapsto \ell_d(\gamma, a, t) \in \mathbb{R}_+$. Dzięki (d) wiemy, że funkcja Γ ma granice jednostronne w każdym punkcie. Ustalmy $t \in (a, b]$ i $\varepsilon > 0$. Istnieje skończony układ $a \leqslant s_0 \leqslant \ldots \leqslant s_{p-1} < s_p = t$ $(p > 1)$, taki że $\Gamma(t) \leqslant \sum_{k=1}^{p} d(\gamma(s_{k-1}), \gamma(s_k)) + \varepsilon$, a stąd, dla $r \in (s_{p-1}, t)$:

$$\begin{aligned}\Gamma(t) \leqslant \sum_{k=1}^{p} d(\gamma(s_{k-1}), \gamma(s_k)) + \varepsilon = \sum_{k=1}^{p-1} d(\gamma(s_{k-1}), \gamma(s_k)) + d(\gamma(s_{p-1}), \gamma(s_p)) + \varepsilon \\ \leqslant \sum_{k=1}^{p-1} d(\gamma(s_{k-1}), \gamma(s_k)) + d(\gamma(s_{p-1}), \gamma(r)) + d(\gamma(r), \gamma(s_p)) + \varepsilon \\ \leqslant \Gamma(r) + d(\gamma(r), \gamma(t)) + \varepsilon \leqslant \Gamma(t-) + d(\gamma(r), \gamma(t)) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Przechodząc w powyższej nierówności z $r \to t$, z ciągłości funkcji γ otrzymujemy $\Gamma(t) \leqslant \Gamma(t-) + \varepsilon$. Z dowolności ε oraz tego, że $\Gamma(t-) \leqslant \Gamma(t)$, wnioskujemy, że $\Gamma(t) = \Gamma(t-)$. Aby wykazać ciągłość prawostronną, rozważmy ściśle malejący homeomorfizm $\phi\colon [a, b] \ni t \mapsto a + b - t \in [a, b]$ oraz funkcję $\Gamma'\colon [a, b] \ni t \mapsto \ell_d(\gamma \circ \phi; a, t) \in [0, \infty]$. Bez trudu stwierdzamy, że krzywa $\gamma' \stackrel{\text{def}}{=} \gamma \circ \phi$ jest prostowalna (nawet więcej: $\ell_d(\gamma') = \ell_d(\gamma)$). W takim razie z pierwszej części dowodu wnioskujemy, że $\Gamma'(t) = \Gamma'(t-)$ dla wszelkich $t \in (a, b]$. Ale $\Gamma'(t) = \ell_d(\gamma; \phi(t), b)$ (bo funkcja ϕ jest malejąca). W takim razie $\ell_d(\gamma; t, b) = \Gamma'(\phi(t))$. Z (c) otrzymujemy zatem:

$$\Gamma(t) = \ell_d(\gamma) - \ell_d(\gamma; t, b) = \ell_d(\gamma) - \Gamma'(\phi(t)),$$

czyli, dla $t \in [a, b)$, $\Gamma(t+) = \ell_d(\gamma) - \Gamma'(\phi(t+)) = \ell_d(\gamma) - \Gamma'(\phi(t)-) = \ell_d(\gamma) - \Gamma'(\phi(t)) = \Gamma(t)$. □

5.21 Lemat.
Niech I będzie podzbiorem prostej $\mathbb{R}$, a liczby $p, q \in I$ będą takie, że $p < q$ oraz $(p, q) \cap I = \varnothing$. Niech $u\colon I \to (X, d)$ będzie odwzorowaniem izometrycznym, a $z \in X$ takim punktem, że

(5:13) $$d(u(p), u(q)) = d(u(p), z) + d(z, u(q)),$$

przy czym $z \notin \{u(p), u(q)\}$. Wtedy liczba $s \stackrel{\text{def}}{=} p + d(u(p), z)$ nie należy do I oraz funkcja $v\colon I \sqcup \{s\} \to (X, d)$ dana wzorem

$$v(t) = \begin{cases} u(t) & \text{gdy } t \in I \\ z & \text{gdy } t = s \end{cases}$$

jest odzworowaniem izometrycznym.

Dowód. Z izometryczności funkcji u wynika, że

(5:14) $$q - p = d(u(p), u(q)),$$

a stąd $p < s < q$ (dzięki (5:13)), czyli $s \notin I$. Jedyne, co musimy uzasadnić, to równość

(5:15) $$d(z, u(t)) = |s - t|$$

dla wszelkich $t \in I$. W tym celu rozważamy 4 przypadki:

- $t = p$; wtedy (5:15) wynika ze wzoru na s;
- $t = q$; wtedy (5:15) wynika ze wzoru na s oraz z (5:13) i (5:14);
- $t < p$; wtedy $q - t = d(u(q), u(t)) \leqslant d(u(q), z) + d(z, u(t)) = q - s + d(z, u(t))$, czyli $d(z, u(t)) \geqslant s - t$; z drugiej strony $d(z, u(t)) \leqslant d(z, u(p)) + d(u(p), u(t)) = s - p + p - t = s - t$, czyli zachodzi (5:15);
- $t > p$ i $t \neq q$; wtedy $t > q$ (bo $t \in I$ oraz $(p, q) \cap I = \varnothing$) oraz $t - p = d(u(t), u(p)) \leqslant d(u(t), z) + d(z, u(p)) = d(u(t), z) + s - p$, czyli $d(u(t), z) \geqslant t - s$; z drugiej strony $d(u(t), z) \leqslant d(u(t), u(q)) + d(u(q), z) = t - q + q - s = t - s$,

co kończy dowód. □

Poniższy rezultat pokazuje, jaką rolę odgrywa środek metryczny. Chociaż ten wynik nie znajdzie zastosowania w tym skrypcie, idea przedstawiona w jego dowodzie będzie użyta później.

5.22 Lemat.
Dla zupełnej przestrzeni metrycznej (X, d) następujące warunki są równoważne:

(i) *dla dowolnych dwóch różnych punktów a, b przestrzeni X istnieje izometryczna krzywa $\gamma\colon [0, d(a, b)] \to X$ od a do b;*

(ii) *dowolne dwa różne punkty przestrzeni X mają przynajmniej jeden środek metryczny.*

Dowód. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Jeśli a i b to różne punkty przestrzeni X, a $\gamma\colon [0, d(a, b)] \to X$ to izometryczna krzywa od a do b, to punkt $\gamma(\frac{1}{2}d(a, b))$ jest środkiem metrycznym między a i b.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Ustalmy dwa różne punkty a i b przestrzeni X. Dla $n \geqslant 0$ niech $I_n \stackrel{\text{def}}{=} \{\frac{k}{2^n} d(a, b)\colon\ k = 0, \ldots, 2^n\}$. Odnotujmy, iż $I_0 = \{0, d(a, b)\}$, $I_k \subset I_{k+1}$ $(k \geqslant 0)$ oraz zbiór $I_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$ jest gęstym podzbiorem przedziału $[0, d(a, b)]$. Niech funkcja $u_0\colon I_0 \to X$ posyła 0 w a, a $d(a, b)$ w b. Zauważmy, że u_0 jest odwzorowaniem izometrycznym. Wielokrotnie stosując Lem. 5.21, indukcyjnie skonstruujemy odwzorowania izometryczne u_n $(n > 0)$ w taki sposób, że kolejna funkcja jest przedłużeniem poprzedniej.

Załóżmy, że dla pewnego indeksu $n > 0$ funkcja u_{n-1} została już określona. Zauważmy, że jeśli $I_{n-1} = \{w_0, \ldots, w_q\}$, przy czym $q = 2^{n-1}$ oraz $w_{j-1} < w_j$ (dla $j = 1, \ldots, q$), to $I_n = I_{n-1} \sqcup \{\frac{w_{j-1}+w_j}{2}\colon\ j = 1, \ldots, q\}$. Dla $j \in \{1, \ldots, q\}$ niech $z_j \in X$ będzie środkiem metrycznym między $u_{n-1}(w_{j-1})$ i $u_{n-1}(w_j)$. Wtedy $w_{j-1} + d(u_{n-1}(w_{j-1}), z_j) = s_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{w_{j-1}+w_j}{2}$, więc z Lem. 5.21 wynika, że możemy do dziedziny funkcji u_{n-1} kolejno dorzucać liczby $s_1, \ldots, s_q$ i zadawać w nich wartość (nowej) funkcji jako, odpowiednio, $z_1, \ldots, z_q$ bez utraty izometryczności odwzorowania. W ten sposób po q krokach otrzymamy odwzorowanie izometryczne $u_n\colon I_n \to X$, które przedłuża funkcję u_{n-1}.

Mając już określone wszystkie funkcje u_n (które są zgodne), możemy zdefiniować $u_\infty\colon I_\infty \to X$ jako zlepienie wszystkich tych funkcji. Odwzorowanie u_∞ jest izometryczne i ma dziedzinę gęstą w $[0, d(a, b)]$ (oraz posyła 0 w a, a $d(a, b)$ w b). Z zupełności przestrzeni X wynika, że funkcja ta przedłuża się jednoznacznie do krzywej izometrycznej $\gamma\colon [0, d(a, b)] \to X$ (istotnie: funkcja u_∞ przenosi ciągi Cauchy'ego na takież ciągi, a więc na ciągi zbieżne; zachowywanie odległości zachowa się przy przejściu granicznym) i tym samym dowód jest zakończony. □

5.23 Lemat.
Niech a i b będą dwoma różnymi punktami przestrzeni metrycznej (X, d), takimi że dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje punkt $c_\varepsilon \in X$, dla którego $|d(a, b) - 2d(a, c_\varepsilon)| + |d(a, b) - 2d(c_\varepsilon, b)| \leqslant \varepsilon$. Jeśli dla pewnej liczby $r > \frac{1}{2}d(a, b)$ kula $\bar{B}_d(a, r)$ jest zwarta, to istnieje środek metryczny między punktami a i b.

Dowód. Niech $z_n \stackrel{\text{def}}{=} c_{1/n}$. Wiemy, że

$$\lim_{n\to\infty} d(a, z_n) = \lim_{n\to\infty} d(b, z_n) = \frac{1}{2}d(a, b). \tag{5:16}$$

W szczególności, $d(a, z_n) \leqslant r$ dla dostatecznie dużych n, więc ze zwartości kuli wynika, że ciąg $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ ma podciąg zbieżny, powiedzmy do w. Podstawiając w (5:16) za z_n stosowny podciąg i przechodząc do granicy, stwierdzamy, że w jest środkiem metrycznym. □

5.24 Lemat.
Niech a będzie punktem segmentowo zupełnej przestrzeni metrycznej (X, d), a $R > 0$ taką liczbą, że kule $\bar{B}_d(a, r)$ są zwarte dla $0 < r < R$. Niech Ω będzie zbiorem wszystkich krzywych $\gamma\colon [0, 1] \to \bar{B}_d(a, R)$, dla których $\gamma(0) = a$ oraz istnieje stała $c(\gamma) \in \mathbb{R}_+$, taka że

$$\forall s, t \in [0, 1]\colon\ d(\gamma(s), \gamma(t)) = c(\gamma)|s - t|. \tag{5:17}$$

Wtedy dowolny ciąg krzywych z Ω zawiera podciąg zbieżny punktowo do krzywej z Ω.

Dowód. Na wstępie zauważmy, że jeśli $\gamma \in \Omega$, to $c(\gamma) = d(\gamma(0), \gamma(1)) = d(a, \gamma(1)) \leqslant R$, czyli

$$\forall \gamma \in \Omega\ \forall s, t \in \Omega\colon\ d(\gamma(s), \gamma(t)) \leqslant R|s - t|. \tag{5:18}$$

Ustalmy dowolny ciąg $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ krzywych z Ω. Niech $I = \{t_n\colon\ n > 0\} \subset (0, 1)$ będzie dowolnym przeliczalnym zbiorem gęstym w $[0, 1]$ (przy czym ciąg $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ jest różnowartościowy). Dla dowolnego indeksu $k > 0$ oraz krzywej $\alpha \in \Omega$ otrzymujemy: $d(a, \alpha(t_k)) = d(\alpha(0), \alpha(t_k)) \leqslant Rt_k < R$ (z (5:18)), czyli $\alpha(t_k) \in L_k \stackrel{\text{def}}{=} \bar{B}_d(a, Rt_k)$ oraz zbiór L_k jest zwarty, zgodnie z założeniem w lemacie. Produkt $K \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{k=1}^{\infty} L_k$ jest zwartą przestrzenią metryzowalną. W takim razie ciąg $(\gamma_1(t_k))_{k=1}^{\infty}, (\gamma_2(t_k))_{k=1}^{\infty}, (\gamma_3(t_k))_{k=1}^{\infty}, \dots \in K$ zawiera podciąg zbieżny, powiedzmy $(\gamma_{\nu_n}(t_k))_{k=1}^{\infty} \xrightarrow{K} \xi = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in K$ $(n \to \infty)$. Oznacza to, że

$$\forall k > 0\colon\ \gamma_{\nu_n}(t_k) \xrightarrow{X} \xi_k. \tag{5:19}$$

Określamy funkcję $\eta\colon [0, 1) \to X$ w dwóch etapach:

- $\eta(t_n) \stackrel{\text{def}}{=} \xi_n$ dla $n > 0$; zauważmy, że wtedy $d(\eta(t_n), \eta(t_m)) \leqslant R|t_n - t_m|$ — co wynika łatwo z (5:18) oraz (5:19);
- dla $s \in [0, 1) \setminus I$:
$$\eta(s) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{x \to s \\ x \in I}} \eta(x);$$
powyższa granica istnieje, gdyż $\eta(x) \in \bar{B}_d(a, r)$ (a ta kula jest zwarta) dla $x \in I \cap [0, r/R]$, gdzie liczba $r \in (0, R)$ jest tak dobrana, by $t < r/R$; ciąg zbieżny w $[0, 1)$ o wyrazach w I przejdzie (poprzez funkcję η) na ciąg Cauchy'ego w tej kuli, a więc zbieżny.

Zauważmy, że tak określona funkcja η spełnia warunek Lipschitza ze stałą R. Ponadto,

$$\forall s \in [0, 1)\colon\ \gamma_{\nu_n}(s) \xrightarrow{X} \eta(s)\ (n \to \infty). \tag{5:20}$$

Istotnie, dla $s = t_k$ powyższa zbieżność wynika ze wzoru na $\eta(t_k)$ oraz z (5:19). A dla $s \in [0, 1) \setminus I$ rozumujemy tak: dla ustalonej liczby $\varepsilon > 0$ dobieramy najpierw indeks $k > 0$, taki że $|s - t_k| < \frac{\varepsilon}{3R}$, a następnie do tego indeksu dobieramy taki indeks $n_0 > 0$, że $d(\gamma_{\nu_n}(t_k), \eta(t_k)) < \frac{\varepsilon}{3}$ dla $n \geqslant n_0$. Wtedy, dla $n \geqslant n_0$, otrzymujemy (z (5:18)):

$$d(\gamma_{\nu_n}(s), \eta(s)) \leqslant d(\gamma_{\nu_n}(s), \gamma_{\nu_n}(t_k)) + d(\gamma_{\nu_n}(t_k), \eta(t_k)) + d(\eta(t_k), \eta(s)) \leqslant R|s - t_k| + \frac{\varepsilon}{3} + R|s - t_k| \leqslant \varepsilon.$$

W szczególności, $\eta(0) = \lim_{n\to\infty} \gamma_{\nu_n}(0) = a$ oraz

$$c(\gamma_{\nu_n}) = 2d(\gamma_{\nu_n}(0), \gamma_{\nu_n}(1/2)) \to 2d(\eta(0), \eta(1/2))\ (n \to \infty),$$

czyli ciąg $(c(\gamma_{\nu_n}))_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do pewnej liczby $m \in [0, R]$. A wtedy dla wszelkich liczb $s, t \in [0, 1)$ zachodzi ciąg równości: $d(\eta(t), \eta(s)) = \lim_{n\to\infty} d(\gamma_{\nu_n}(t), \gamma_{\nu_n}(s)) = \lim_{n\to\infty} c(\gamma_{\nu_n})|s - t| = m|s - t|$. Jeśli $m = 0$, funkcja η jest stale równa a, więc ma granicę przy $t \to 1^-$ równą a. Natomiast w przypadku, gdy $m > 0$, odwzorowanie $E\colon [0, m) \ni x \mapsto \eta(x/m) \in X$ jest izometryczne. Ponieważ przestrzeń X jest segmentowo zupełna, wnioskujemy, że funkcja E ma granicę przy $x \to m^-$, co jest równoważne istnieniu granicy funkcji η przy $t \to 1^-$.

Powyższy argument pokazuje, że bez względu na wartość parametru m, funkcja η ma granicę przy $t \to 1^-$. Oznacza to, że funkcja ta przedłuża się do funkcji ciągłej określonej na przedziale $[0, 1]$. Oznaczmy to przedłużenie również symbolem η, czyli $\eta\colon [0, 1] \to X$. Zauważmy, że dla wszelkich $t, s \in [0, 1]$ (korzystając z tego, że $(1 - 1/n)t, (1 - 1/n)s \in [0, 1)$) zachodzą równości: $d(\eta(t), \eta(s)) = \lim_{n\to\infty} d((1 - 1/n)t, (1 - 1/n)s) = \lim_{n\to\infty} m|(1 - 1/n)t - (1 - 1/n)s| = m|t - s|$. Tym samym $\eta \in \Omega$ (gdyż $d(a, \eta(t)) = d(\eta(0), \eta(t)) = mt \leqslant R$, czyli $\eta\colon [0, 1] \to \bar{B}_d(a, R)$). Pozostaje jeszcze sprawdzić, że $\gamma_{\nu_n}(1) \to \eta(1)$ $(n \to \infty)$, co sprawdza się analogicznie jak (5:20). □

5.25 ***Uwaga.***
Dowód powyższego lematu można skrócić przez zastosowanie Tw. 9.6 (str. 48) z $[0, 1)$ jako dziedzina funkcji z rodziny, do której chcemy zastosować to twierdzenie.

Dowód Tw. 5.19. Implikacja (HR4) $\Longrightarrow$ (HR3) wynika z punktu (f) Lem. 5.20.

(HR3) $\Longrightarrow$ (HR2): Dla zadanej liczby ε dobieramy krzywą $\gamma\colon [0, 1] \to X$ od x do y, taką że $\ell_d(\gamma) \leqslant d(x, y) + \varepsilon$ (gwarantowaną przez (HR3)). Z jednostajnej ciągłości tej funkcji wynika istnienie liczby $p > 0$, takiej że $d(\gamma(s), \gamma(t)) \leqslant \varepsilon$, ilekroć liczby $s, t \in [0, 1]$ spełniają $|s - t| \leqslant \frac{1}{p}$. Niech $w_j \stackrel{\text{def}}{=} \gamma(j/p)$ dla $j = 0, \dots, p$. Wtedy $w_0 = x$, $w_p = y$, $d(w_j, w_{j-1}) \leqslant \varepsilon$ dla $j = 1, \dots, p$ oraz $\sum_{k=1}^{p} d(w_{k-1}, w_k) \leqslant \ell_d(\gamma) \leqslant d(x, y) + \varepsilon$, co dowodzi (HR2).

(HR2) $\Longrightarrow$ (HR1): Dla ustalonej liczby $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}d(x, y))$ niech punkty $w_0, \dots, w_p$ tworzą układ o własnościach postulowanych w (HR2). Zauważmy, że $d(w_0, w_1) \leqslant \varepsilon < \frac{1}{2}d(x, y) < d(x, y) = d(w_0, w_p)$. Niech $s \in \{1, \dots, p\}$ będzie najmniejszym indeksem, takim że $d(w_0,w_s) > \frac{1}{2}d(x,y)$. Wtedy $s > 1$ oraz $d(w_0,w_{s-1}) \leqslant \frac{1}{2}d(x,y)$ i $d(w_{s-1},w_s) \leqslant \varepsilon$. Oznacza to, że $d(w_0,w_s) \leqslant \frac{1}{2}d(x,y)+\varepsilon$, czyli

$$|d(x,y) - 2d(w_0,w_s)| \leqslant 2\varepsilon \tag{5:21}$$

(przy czym $w_0 = x$). Podobnie, $d(x,y) \leqslant d(w_0,w_{s-1}) + d(w_{s-1},w_p) \leqslant \frac{1}{2}d(x,y) + d(w_{s-1},w_p)$, czyli $d(w_{s-1},w_p) \geqslant \frac{1}{2}d(x,y)$. Ale $d(w_{s-1},w_p) \leqslant d(w_{s-1},w_s) + d(w_s,w_p) \leqslant \varepsilon + d(w_s,w_p)$ i tym samym

$$d(w_s,w_p) \geqslant \frac{1}{2}d(x,y) - \varepsilon. \tag{5:22}$$

Z drugiej strony, $\frac{1}{2}d(x,y) + d(w_s,w_p) \leqslant d(w_0,w_s) + d(w_s,w_p) \leqslant \sum_{k=1}^{p} d(w_{k-1},w_k) \leqslant d(x,y)+\varepsilon$, więc $d(w_s,w_p) \leqslant \frac{1}{2}d(x,y)+\varepsilon$. Nierówność ta, w połączeniu z (5:22) daje $|d(x,y) - 2d(w_s,w_p)| \leqslant 2\varepsilon$ (przy czym $w_p = y$). To z kolei, wraz z (5:21), dla $z \stackrel{\text{def}}{=} w_s$ prowadzi do

$$|d(x,y) - 2d(x,z)| + |d(x,y) - 2d(z,y)| \leqslant 4\varepsilon,$$

co jest równoważne (HR1).

(HR1) $\implies$ (HR4): Dowód tej części jest zdecydowanie najtrudniejszy. Zostanie on podzielony na kilka kroków. Wszędzie poniżej a jest ustalonym punktem przestrzeni X.

Krok 1:

> *Jeśli $R > 0$ jest taką liczbą, że kule $\bar{B}_d(a,r)$ są zwarte dla $r \in (0,R)$, to każdy punkt kuli $\bar{B}_d(a,R)$ różny od a można połączyć z a izometryczną krzywą.*

Dowód kroku 1: Ustalmy punkt $b \in \bar{B}_d(a,R)$ różny od a. Jak w dowodzie Lem. 5.22, oznaczmy

$$I_n \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \frac{k}{2^n} d(a,b)\colon\ k = 0,\dots,2^n \right\}$$

dla $n \geqslant 0$. Niech $u_0\colon I_0 \to X$ posyła 0 w a oraz $d(a,b)$ w b. Indukcyjnie skonstruujemy odwzorowania izometryczne $u_n\colon I_n \to X$ (dla $n > 0$), tak że u_n przedłuża u_{n-1}. Jeśli funkcja u_{n-1} została już określona, a liczba $s \in I_n$ jest średnią arytmetyczną dwóch sąsiadujących liczb p i q ($p < q$) ze zbioru I_{n-1}, warunek (HR1) oraz Lem. 5.23 gwarantują nam istnienie środka metrycznego między $u_{n-1}(p)$ i $u_{n-1}(q)$ (jako że dla liczby $\delta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{3}{4}(q-p) > \frac{1}{2}d(u_{n-1}(p),u_{n-1}(q))$ kula $\bar{B}_d(u_{n-1}(p),\delta)$ jest zawarta w $\bar{B}_d(a,r)$ dla $r \stackrel{\text{def}}{=} p+\delta < R$, a więc jest zwarta). Zatem, rozumując zupełnie analogicznie jak w dowodzie Lem. 5.22, możemy określić funkcję u_n.

Mając już wszystkie funkcje u_n skonstruowane, określamy $u_\infty\colon I_\infty \to X$ jako ich zlepienie, gdzie $I_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$. Jako że dla dowolnej liczby $r \in (0,d(a,b))$ zbiór $F_r \stackrel{\text{def}}{=} u_\infty(I_\infty \cap [0,r])$ zawiera się w $\bar{B}_d(a,r)$, oraz $r < R$ (gdyż $b \in \bar{B}_d(a,R)$), zbiór F_r ma domknięcie zwarte w X i tym samym funkcję u_∞ można przedłużyć do odwzorowania izometrycznego $v_r\colon I_\infty \cup [0,r] \to X$. Z jednoznaczności tego przedłużenia wynika, że funkcje v_r są zgodne, co z kolei implikuje, że ich zlepienie jest odwzorowaniem izometrycznym $\gamma\colon [0,d(a,b)] \to X$. Z konstrukcji wynika, że $\gamma(0) = a$ oraz $\gamma(d(a,b)) = b$, co kończy dowód kroku 1.

Krok 2:

> *Jeśli $R > 0$ jest taką liczbą, że kule $\bar{B}_d(a,r)$ są zwarte dla $r \in (0,R)$, to także kula $\bar{B}_d(a,R)$ jest zwarta.*

Dowód kroku 2: Rozważmy dowolny ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ o wyrazach w $M \stackrel{\text{def}}{=} \bar{B}_d(a,R)$. Niech Ω będzie zbiorem krzywych zdefiniowanym w Lem. 5.24. Dla dowolnego indeksu $n > 0$ istnieje krzywa $\gamma_n \in \Omega$, taka że $\gamma_n(1) = x_n$. Istotnie:

- jeśli $x_n = a$, wystarczy γ_n zdefiniować jako funkcję stale równą a;
- gdy $x_n \neq a$, z kroku 1 wynika istnienie izometrycznej krzywej $\eta\colon [0,d(a,x_n)] \to X$ od a do x_n; wtedy odwzorowanie $\gamma_n\colon [0,1] \ni t \mapsto \eta(td(a,x_n)) \in X$ ma postulowane własności ($\gamma_n([0,1]) \subset M$, gdyż $x_n \in M$ oraz $\eta(0) = a$).

Zastosowanie Lem. 5.24 daje nam podciąg $(\gamma_{\nu_n})_{n=1}^{\infty}$ zbieżny punktowo do pewnej krzywej $\xi \in \Omega$. Wtedy $x_{\nu_n} = \gamma_{\nu_n}(1) \to \xi(1) \in M$ $(n \to \infty)$, czyli przestrzeń M jest zwarta (jako ciągowo zwarta przestrzeń metryczna).

Krok 3:

> *Jeśli $R > 0$ jest taką liczbą, że kula $\bar{B}_d(a,R)$ jest zwarta, to także kula $\bar{B}_d(a,R+\varepsilon)$ jest zwarta dla pewnej liczby $\varepsilon > 0$.*

Dowód kroku 3: Z lokalnej zwartości przestrzeni X wynika, że dowolny punkt $x \in M \stackrel{\text{def}}{=} \bar{B}_d(a,R)$ ma otwarte otoczenie U_x o domknięciu zwartym. Dzięki zwartości zbioru M możemy dobrać zbiór skończony $S \subset M$, taki że $M \subset N \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{x\in S} U_x$. Zbiór N jest otwarty w X i ma domknięcie zwarte (gdyż $\bar{N} = \bigcup_{x\in S} \bar{U}_x$). Jeśli $N = X$, przestrzeń

X jest zwarta i można przyjąć jako ε dowolną liczbę dodatnią. Tak więc załóżmy, że $N \neq X$. Niech $A \stackrel{\text{def}}{=} X \setminus N$. Zbiór A jest domknięty, niepusty i rozłączny z M. W takim razie funkcja $\operatorname{dist}_d(\cdot, A)$ jest ściśle dodatnia na zbiorze M. Z ciągłości tej funkcji i zwartości zbioru M wynika, że istnieje liczba $\varepsilon > 0$, taka że

$$\forall x \in M\colon \quad \operatorname{dist}_d(x, A) \geqslant 3\varepsilon. \tag{5:23}$$

Zastępując w razie potrzeby liczbę ε mniejszą (ale wciąż dodatnią), możemy założyć, że $\varepsilon < R$. Aby zakończyć dowód kroku 3, wystarczy sprawdzić, że $\bar{B}_d(a, R + \varepsilon) \subset N$ lub — co na jedno wychodzi — że

$$(\bar{B}_d(a, R + \varepsilon) \setminus M) \cap A = \varnothing. \tag{5:24}$$

Ustalmy dowolnie punkt $b \in \bar{B}_d(a, R + \varepsilon) \setminus M$ i rozważmy ciąg liczbowy $\tau_n = \frac{2^n - 1}{2^n} d(a, b)$, gdzie $n \geqslant 0$. Zauważmy, że jest to ściśle rosnący ciąg zbieżny do $d(a, b) > R$ i taki, że $\tau_0 = 0$ oraz

$$\tau_n = \frac{\tau_{n-1} + d(a, b)}{2} \qquad (n > 0). \tag{5:25}$$

Niech Q oznacza największy indeks $q \geqslant 0$, taki że $\tau_q < R$. ($Q > 0$, gdyż $\varepsilon < R$ i $d(a, b) \leqslant R + \varepsilon$). Określimy teraz indukcyjnie odwzorowanie izometryczne $u\colon \{\tau_j\colon\ j = 0, \ldots, Q\} \cup \{d(a, b)\}$, startując od danych „brzegowych”:

$$\begin{cases} u(0) = a, \\ u(d(a, b)) = b. \end{cases}$$

Załóżmy, że funkcja u jest już określona dla $d(a, b)$ oraz τ_j z $j \leqslant k$, gdzie $k \in \{0, \ldots, Q - 1\}$. Nierówność $\tau_{k+1} < R$ w połączeniu ze wzorem (5:25) dla $n = k+1$ implikuje, że $\frac{1}{2}(d(a, b) - \tau_k) < R - \tau_k$. Ponadto, $\bar{B}_d(u(\tau_k), R - \tau_k) \subset \bar{B}_d(a, R)$ (bo $d(a, u(\tau_k)) = \tau_k$), więc możemy zastosować Lem. 5.23 (dzięki założeniu w (HR1)), z którego wynika, że istnieje środek metryczny w_{k+1} między $u(\tau_k)$ i $b = u(d(a, b))$. W takim razie Lem. 5.21 implikuje, że wzór $u(\tau_{k+1}) \stackrel{\text{def}}{=} w_{k+1}$ nie psuje izometryczności odwzorowania u, dzięki (5:25).

Oszacujmy od dołu liczbę τ_Q. Wiemy, że liczba $\tau_{Q+1} = \frac{\tau_Q + d(a,b)}{2}$ jest nie mniejsza niż R, zatem $\tau_Q \geqslant 2R - d(a, b) \geqslant R - \varepsilon$. Podstawmy $z \stackrel{\text{def}}{=} u(\tau_Q)$. Wtedy $d(a, z) = d(u(0), u(\tau_Q)) = |\tau_Q - 0| < R$, czyli $z \in M$. Z drugiej strony, $d(z, b) = d(u(\tau_Q), u(d(a, b))) = |\tau_Q - d(a, b)| = d(a, b) - \tau_Q \leqslant R + \varepsilon - (R - \varepsilon) = 2\varepsilon$. Nierówność ta, w konfrontacji z (5:23), pozwala nam wydedukować, że $b \notin A$ (jako że $z \in M$), co kończy dowód (5:24) i kroku 3.

Teraz możemy już zakończyć dowód tego, że (HR4) wynika z (HR1). Dzięki krokowi 1, wystarczy pokazać, że wszystkie kule domknięte o środku w a są zwarte. Niech I będzie zbiorem wszystkich liczb $r > 0$, takich że kula $\bar{B}_d(a, r)$ jest zwarta. Z lokalnej zwartości wynika, że zbiór I jest niepusty. Niech $R \stackrel{\text{def}}{=} \sup(I) \in (0, \infty]$. Z kroku 2 wynika, że $R \in I$, o ile $R < \infty$. Z kolei krok 3 implikuje, że zbiór I nie ma elementu największego — i dlatego $R = \infty$. Ostatecznie $I = (0, \infty)$ i teza. □

5.26 Przykład.
Jak nietrudno się przekonać, przestrzeń $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (z metryką euklidesową) ma wszystkie własności wymienione w punktach (HR1)–(HR3) Twierdzenia Hopfa-Rinowa z wyjątkiem segmentowej zupełności.

5.27 ***Uwaga.***
Klasyczne twierdzenie Hopfa-Rinowa ustala równoważność warunku (HR4) z (HR3), w którym segmentowa zupełność jest zastąpiona zupełnością.

6 Uniwersalność kostki Hilberta

6.1 Twierdzenie.
Dla przestrzeni topologicznej X następujące warunki są równoważne:

(i) *przestrzeń X jest homeomorficzna z podprzestrzenią pewnej przestrzeni normalnej spełniającej II A.P.;*

(ii) *przestrzeń X jest homeomorficzna z podprzestrzenią pewnej zwartej przestrzeni T_2 spełniającej II A.P.;*

(iii) *przestrzeń X jest homeomorficzna z podprzestrzenią kostki Hilberta.*

Dowód. Implikacje (iii) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (i) wynikają natychmiast z tego, że kostka Hilberta jest zwartą przestrzenią metryzowalną, a wszystkie takie przestrzenie spełniają II A.P.

(i) $\Longrightarrow$ (iii): Możemy założyć (i tak czynimy), że $\operatorname{card}(X) > 1$. Niech β będzie co najwyżej przeliczalną bazą topologii przestrzeni X. Niech

$$S \overset{\text{def}}{=} \{(U,V) \in \beta \times \beta | \quad \exists u \in C(X,[0,1])\colon \ u|_U \equiv 1, \ u|_{X\setminus V} \equiv 0\}.$$

Oczywiście $\operatorname{card}(S) \leqslant \aleph_0$. W tym momencie jeszcze nie wiemy, czy $S \neq \varnothing$, ale poniższe rozumowanie pokaże, że tak w istocie jest.

Dla dowolnego indeksu $s = (U,V) \in S$ niech funkcja $g_s \in C(X,[0,1])$ będzie taka, że:

$$g_s|_U \equiv 1, \qquad g_s|_{X\setminus V} \equiv 0.$$

Ponieważ przestrzeń $[0,1]^{\operatorname{card}(S)}$ jest zanurzalna w kostkę Hilberta, wystarczy pokazać, że zestawienie

$$F \overset{\text{def}}{=} \triangle_{s\in S} g_s \colon X \to [0,1]^S$$

jest zanurzeniem topologicznym. Wiemy już, że jest to funkcja ciągła. Do dowodu tego, że jest iniekcją, taką że funkcja $F^{-1}\colon F(X) \to X$ jest ciągła, potrzebujemy następującej własności:

($\star$) Dla dowolnego zbioru $A \in \mathscr{F}(X)$ oraz punktu $a \in X \setminus A$ istnieje indeks $s \in S$, taki że $g_s(a) = 1$ oraz $g_s|_A \equiv 0$.

Aby wykazać powyższą własność, najpierw dobieramy zbiór $V \in \beta$, taki że $a \in V \subset X \setminus A$, potem — korzystając z aksjomatu (T_4) — dobieramy funkcję $v \in C(X,[0,1])$, która znika poza V, a w punkcie a ma wartość 1. Na koniec znajdujemy zbiór $U \in \beta$, taki że $a \in U \subset v^{-1}((\frac{1}{2},2))$. Zauważmy, że wtedy $(U,V) \in S$, gdyż funkcja $\gamma\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ dana wzorem

$$\gamma(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{gdy } t \in (-\infty,0] \\ 2t & \text{gdy } t \in [0,\frac{1}{2}] \\ 1 & \text{gdy } t \in [\frac{1}{2},\infty) \end{cases}$$

jest poprawnie określona i ciągła, a funkcja $\gamma \circ v \in C(X,[0,1])$ znika poza V i jest stale równa 1 na U. W takim razie jest określona funkcja g_s dla $s \overset{\text{def}}{=} (U,V)$ i zachodzi $g_s(a) = 1$ (bo $a \in U$) oraz $g_s|_A \equiv 0$ (bo $A \subset X \setminus V$). Tym samym własność ($\star$) została wykazana.

Teraz bez trudu możemy wykazać, że funkcja F jest różnowartościowa: jeśli x i y to różne punkty przestrzeni X, wtedy podstawiając do ($\star$) $A \overset{\text{def}}{=} \{x\}$ (korzystamy tutaj z tego, że X jest T_1) i $a \overset{\text{def}}{=} y$, znajdziemy indeks $s \in S$ (w szczególności, $S \neq \varnothing$, gdyż $\operatorname{card}(X) > 1$), taki że $g_s(x) = 0$ i $g_s(y) = 1$, a stąd automatycznie $F(x) \neq F(y)$ (wszak $g_s = \pi_s \circ F$).

Przechodzimy do ostatniej części — dowodu ciągłości funkcji F^{-1}. Dla uproszczenia notacji oznaczmy $Z \overset{\text{def}}{=} F(X)$. Chcemy pokazać, że $F^{-1}(\operatorname{cl}_Z(B)) \subset \operatorname{cl}_X(F^{-1}(B))$ dla $B \subset Z$. Równoważnie, chcemy, by $\operatorname{cl}_Z(F(A)) \subset F(\bar{A})$ dla $A \overset{\text{def}}{=} F^{-1}(B) \subset X$, czyli by zbiory $F(X \setminus \bar{A}) = Z \setminus F(\bar{A})$ i $\operatorname{cl}_Z(F(A))$ były rozłączne. W tym celu ustalmy $a \in X \setminus \bar{A}$. Wystarczy pokazać, że

(6:1) $$F(a) \notin \overline{F(A)}$$

(domknięcie w całej przestrzeni $[0,1]^S$). Z relacji $\pi_s(\bar{B}) \subset \overline{\pi_s(B)}$ wynika, że jeśli $g_s(a) = \pi_s(F(a)) \notin \overline{\pi_s(F(A))} = \overline{g_s(A)}$ dla pewnego indeksu $s \in S$, to zachodzi (6:1). Ale $g_s(a) \notin \overline{g_s(A)}$ dla indeksu $s \in S$ dobranego z ($\star$) dla $\bar{A}$ i a. □

6.2 Wniosek. (Twierdzenie Urysohna o uniwersalności kostki Hilberta)
Każda ośrodkowa przestrzeń metryzowalna jest zanurzalna w kostkę Hilberta.

6.3 Definicja.
Mówimy, że przestrzeń topologiczna ma *własność Lindelöfa*, jeśli z każdego jej pokrycia otwartego można wybrać podpokrycie (co najwyżej) przeliczalne.

Przestrzeń regularną o własności Lindelöfa nazywamy przestrzenią *Lindelöfa.*

6.4 Lemat. *Przestrzeń spełniająca II A.P. ma własność Lindelöfa.*

Dowód. Niech β będzie co najwyżej przeliczalną bazą topologii niepustej przestrzeni topologicznej X (spełniającej II A.P.). Ustalmy otwarte pokrycie $\mathcal{U} = \{U_s\}_{s\in S}$ przestrzeni X. Dla dowolnego punktu $x \in X$ istnieje zbiór $B_x \in \beta$ zawarty w pewnym zbiorze z $\mathcal{U}$. Rodzina $\{B_x\colon\ x \in X\}$ jest co najwyżej przeliczalna (jako podzbiór rodziny β), więc jej elementy możemy ustawić w ciąg (jest ona niepusta, bo $X \neq \varnothing$), powiedzmy $V_1, V_2, \ldots$ — czyli $\{B_x\colon\ x \in X\} = \{V_n\colon\ n > 0\}$. Dla dowolnego indeksu $n > 0$ istnieje indeks $s_n \in S$, taki że $V_n \subset U_{s_n}$. Wtedy $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_{s_n} \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = \bigcup_{x\in X} B_x = X$, zatem $\{U_{s_n}\}_{n\in\mathbb{N}_1}$ to przeliczalne podpokrycie. ☐

6.5 Twierdzenie.
Przestrzenie Lindelöfa są parazwarte.

Dowód. Wystarczy wykazać warunek z pokryciami. Niech więc $\mathcal{U} = \{U_s\}_{s\in S}$ będzie pokryciem otwartym niepustej przestrzeni Lindelöfa X. Każdy punkt $x \in X$ ma otwarte otoczenie D_x, takie że zbiór $\bar{D}_x$ jest zawarty w pewnym zbiorze z $\mathcal{U}$. Z pokrycia otwartego $\{D_x\}_{x\in X}$ wybieramy co najwyżej przeliczalne podpokrycie otwarte — ustawmy jego elementy w ciąg $V_1, V_2, \ldots$ Dla dowolnego indeksu $n > 0$ dobieramy indeks $s_n \in S$, taki że $\bar{V}_n \subset U_{s_n}$. Dla $n > 0$ niech $W_n \stackrel{\text{def}}{=} U_{s_n} \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} \bar{V}_k$, gdzie $V_0 \stackrel{\text{def}}{=} \varnothing$. Oczywiście zbiory W_n są otwarte. Zauważmy także, że tworzą one rodzinę lokalnie skończoną: zbiory V_n pokrywają przestrzeń X oraz $V_n \cap W_m = \varnothing$ dla $m > n$. Pozostaje więc wykazać, że $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n$. Dla punktu $x \in X$ oznaczmy przez k najmniejszą liczbę naturalną, taką że $x \in \bar{V}_k$. Wtedy $k > 0$ oraz $x \in W_k$ (bo $\bar{V}_k \subset U_{s_k}$). ☐

6.6 Twierdzenie. (Twierdzenie Urysohna-Tichonowa o metryzowalności)
Dla przestrzeni topologicznej X, która jest ośrodkowa lub ma własność Lindelöfa, następujące warunki są równoważne:

(i) *przestrzeń X jest metryzowalna;*

(ii) *X jest przestrzenią T_3 spełniającą II A.P.*

Dowód. Implikacja „(i) $\Longrightarrow$ (ii)” wynika z Tw. 2.12 (str. 3). Dla dowodu odwrotnej implikacji, rozważmy T_3-przestrzeń X spełniającą II A.P. Z Lem. 6.4 wynika, że X jest przestrzenią Lindelöfa, a z Tw. 6.5, że jest to przestrzeń parazwarta. Tym samym X jest T_4 (bo takież są wszystkie T_2-przestrzenie parazwarte). A stąd X jest przestrzenią metryzowalną, na podstawie Tw. 6.1. ☐

7 Lemat Michaela

7.1 Definicja.
Mówimy, że rodzina $\{A_s\}_{s\in S}$ podzbiorów przestrzeni metrycznej (X, d) jest *metrycznie dyskretna* (*względem* d), gdy istnieje liczba $\varepsilon > 0$, taka że:

$$\forall s, t \in S,\ s \neq t\ \ \forall a \in A_s,\ b \in A_t\colon\ d(a, b) \geqslant \varepsilon.$$

Poniższe twierdzenie jest, obok Twierdzenia Tichonowa, jednym z najważniejszych twierdzeń topologii ogólnej.

7.2 Twierdzenie. (Twierdzenia A.H. Stone'a o parazwartości)
Każda przestrzeń metryzowalna jest parazwarta.

Co więcej, dla dowolnego pokrycia otwartego $\{U_s\}_{s\in S}$ metryzowalnej przestrzeni X istnieje lokalnie skończone pokrycie otwarte $\{V_{s,n}\}_{(s,n)\in S\times\mathbb{N}_1}$, takie że:

- *$V_{s,n} \subset U_s$ dla wszelkich $s \in S$ i $n > 0$;*
- *dla dowolnego $n > 0$, rodzina $\{V_{s,n}\}_{s\in S}$ jest metrycznie dyskretna w X.*

Dowód (*M.E. Rudin*). Oczywiście wystarczy wykazać drugą część twierdzenia. W tym celu ustalmy metrykę d zgodną z topologią przestrzeni X, a na zbiorze indeksów S dowolny dobry porządek „$\preccurlyeq$". Określamy zbiory $V_{t,n}$ (dla $t \in S$) indukcją względem n (przyjmując pomocniczo $V_{s,0} \stackrel{\text{def}}{=} \varnothing$ dla wszelkich $s \in S$):

$$V_{t,n} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{c \in I_{t,n}} B_d(c, 2^{-n}),$$

gdzie $I_{t,n}$ składa się z wszystkich punktów $c \in X$, takich że:

$(1_{t,n})$ $t = \min_{\preccurlyeq}\{s \in S\colon\ c \in U_s\}$;

$(2_{t,n})$ $c \notin \bigcup_{s \in S} \bigcup_{k=0}^{n-1} V_{s,k}$;

$(3_{t,n})$ $B_d(c, 3 \cdot 2^{-n}) \subset U_t$.

Miejmy na uwadze, że dla bardzo wielu $t \in S$ zbiór $I_{t,n}$ może być pusty (i wtedy także $V_{t,n} = \varnothing$). Wprost z definicji zbioru $V_{t,n}$ wynika, że jest to zbiór otwarty zawarty w U_t. Co więcej, jeśli $x \in X$, to zbiór $J_x \stackrel{\text{def}}{=} \{s \in S\colon\ x \in U_s\}$ jest niepusty, więc ma element najmniejszy, powiedzmy t, względem porządku „$\preccurlyeq$". Skoro U_t jest otoczeniem punktu x, istnieje liczba naturalna $n > 1$, taka że $B_d(x, 3 \cdot 2^{-n}) \subset U_t$. Wynika stąd, że albo $x \in \bigcup_{s \in S} \bigcup_{k=1}^{n-1} V_{s,k}$, albo $x \in I_{t,n}$ i wtedy $B_d(x, 2^{-n}) \subset V_{t,n}$. Tak czy inaczej, $x \in V_{s,m}$ dla pewnych $s \in S$ oraz $m \in \mathbb{N}_1$, czyli zbiory $V_{s,m}$ stanowią pokrycie przestrzeni X.

Ustalmy liczbę naturalną $n > 0$ oraz dwa różne indeksy $s, s' \in S$. Możemy przy tym założyć, że $s \preccurlyeq s'$. Niech $x \in V_{s,n}$ oraz $y \in V_{s',n}$. Wtedy $x \in B_d(c, 2^{-n})$ oraz $y \in B_d(e, 2^{-n})$ dla pewnych $c \in I_{s,n}$ i $e \in I_{s',n}$. Wtedy $e \notin U_s$ (dzięki warunkowi $(1_{s',n})$), a zatem $d(c, e) \geqslant 3 \cdot 2^{-n}$ (z $(3_{s,n})$). Z nierówności trójkąta otrzymujemy więc $d(x, y) \geqslant d(c, e) - d(c, x) - d(y, e) > 2^{-n}$. Oznacza to, że rodzina $\{V_{s,n}\}_{s \in S}$ jest metrycznie dyskretna w X. Pozostaje wykazać lokalną skończoność rodziny złożonej z wszystkich zbiorów $V_{s,k}$. Przyda nam się do tego następująca obserwacja:

($*$) Jeśli $B_d(x, 2^{-k}) \subset V_{t,m}$ (gdzie $k \in \mathbb{N}_1$), to $V_{s,n} \cap B_d(x, 2^{-k-1}) = \varnothing$ dla wszelkich $s \in S$ oraz $n > \max(m, k)$.

Aby wykazać ($*$), ustalmy $s \in S$, $n > \max(m, k)$, $z \in V_{s,n}$ oraz punkt $c \in I_{s,n}$, taki że $z \in B_d(c, 2^{-n})$. Wtedy $c \notin V_{t,m}$ (z $(2_{s,n})$), więc $d(x, c) \geqslant 2^{-k}$. A stąd $d(x, z) \geqslant d(x, c) - d(z, c) > 2^{-k} - 2^{-n} \geqslant 2^{-k} - 2^{-k-1} = 2^{-k-1}$, czyli $z \notin B_d(x, 2^{-k-1})$, co kończy dowód ($*$).

Teraz bez trudu wykażemy, że skonstruowana rodzina zbiorów jest lokalnie skończona. Niech $x \in X$. Dobieramy $t \in S$ oraz $m > 0$, takie że $x \in V_{t,m}$. Z otwartości zbioru $V_{t,m}$ możemy dobrać liczbę całkowitą $k > 0$, taką że $B_d(x, 2^{-k}) \subset V_{t,m}$. Dla $r \stackrel{\text{def}}{=} \max(m, k)$ wiemy z ($*$), że kula $B_d(x, 2^{-r-1})$ przecina pusto wszystkie zbiory $V_{s,n}$ z $n > r$, a z wcześniejszej części dowodu, że ta kula przecina niepusto co najwyżej jeden zbiór z rodziny $\{V_{s,j}\}_{s \in S}$ dla $j = 1, \ldots, r$. Tym samym przecina ona niepusto co najwyżej r zbiorów spośród wszystkich $V_{s,n}$. □

7.3 Definicja.
Rodzinę $\mathcal{W}$ podzbiorów przestrzeni topologicznej X nazywamy *kolekcją Michaela*, gdy spełnia warunki:

(M1) Jeśli $A \in \mathcal{W}$, a $U \subset A$ jest zbiorem otwartym w X, to $U \in \mathcal{W}$.

(M2) Jeśli $U, V \in \mathcal{W}$ są zbiorami otwartymi w X, to $U \cup V \in \mathcal{W}$.

(M3) Jeśli rodzina $\{U_s\}_{s \in S} \subset \mathcal{W}$ jest dyskretna w X i składa się ze zbiorów otwartych w X, to $\bigcup_{s \in S} U_s \in \mathcal{W}$.

Jeśli (X, d) to przestrzeń metryczna, a rodzina $\mathcal{W} \subset \mathcal{P}(X)$ spełnia powyższe warunki (M1)–(M2), warunek (M3) dla rodzin przeliczalnych oraz

(Md) jeśli rodzina $\{U_s\}_{s \in S} \subset \mathcal{W}$ jest metrycznie dyskretna w X i składa się ze zbiorów otwartych w X, to $\bigcup_{s \in S} U_S \in \mathcal{W}$,

wtedy $\mathcal{W}$ nazywamy *d-słabą kolekcją Michaela*.

7.4 Obserwacja.
Kolekcja Michaela w przestrzeni metrycznej (X, d) jest d-słabą kolekcją Michaela.

Dowód. Wystarczy zauważyć, że metrycznie dyskretna rodzina $\{A_s\}_{s \in S}$ jest także dyskretna. Istotnie, jeśli $d(x, y) \geqslant \varepsilon$ dla wszelkich $x \in A_s$ oraz $y \in A_t$ przy $s \in t$, to każda kula otwarta o promieniu $\varepsilon/2$ przecina niepusto co najwyżej jeden ze zbiorów A_s. □

7.5 Przykład.
Rozważmy przestrzeń metryczną $X \overset{\text{def}}{=} \{\frac{1}{n}\colon\ n \in \mathbb{N}_1\}$ z metryką naturalną d oraz jej podzbiory $A_n \overset{\text{def}}{=} \{\frac{1}{n}\}$. Wtedy rodzina $\{A_n\}_{n>0}$ jest dyskretna w X, ale nie jest metrycznie dyskretna w (X,d). Szczegóły dowodowe pozostawiamy jako (proste) obowiązkowe ćwiczenie.

Poniższe twierdzenie dla kolekcji Michaela jest prawdziwe w przestrzeniach parazwartych T_2. Dowód w tym ogólnym przypadku przebiega bardzo podobnie.

7.6 Twierdzenie. (Lemat Michaela)
Dla d-słabej kolekcji Michaela $\mathcal{W}$ w przestrzeni metrycznej (X,d) następujące warunki są równoważne:

(i) $\operatorname{top}(X,d) \subset \mathcal{W}$;

(ii) $X \in \mathcal{W}$;

(iii) *dla dowolnego punktu $a \in X$ istnieje zbiór $A \in \mathcal{W}$, taki że $a \in \operatorname{int} A$.*

Dowód. Implikacja (ii) $\Longrightarrow$ (i) wynika z warunku (M1), natomiast (iii) jest natychmiastową konsekwencją (i). Zatem wystarczy pokazać, że (ii) wynika z (iii).

Z warunku (iii) wynika, że dla dowolnego punktu $a \in X$ istnieje zbiór $A_a \in \mathcal{W}$, zawierający w swym wnętrzu punkt a. Z warunku (M1) wynika, że zbiór $U_a \overset{\text{def}}{=} \operatorname{int} A_a$ należy do $\mathcal{W}$. Jako że $a \in U_a$, rodzina $\{U_a\}_{a\in X}$ jest pokryciem otwartym przestrzeni X. Z Tw. 7.2 wynika, że istnieje pokrycie otwarte $\{V_{a,n}\colon\ a \in X,\ n > 0\}$ przestrzeni X, takie że $V_{a,n} \subset U_a$ oraz rodzina $\{V_{a,n}\colon\ a \in X\}$ jest metrycznie dyskretna w X dla dowolnego indeksu $n > 0$. Z (M1) wnioskujemy, że $V_{a,n} \in \mathcal{W}$ i w takim razie również zbiory $D_n \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{a\in X} V_{a,n}$ należą do $\mathcal{W}$, dzięki (Md). Dalej, z indukcji oraz (M2) otrzymujemy, że zbiory $\Omega_n \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{k=1}^{n} D_k$ także należą do $\mathcal{W}$. Zauważmy, że $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ (gdyż zbiory $V_{a,n}$ pokrywały całą przestrzeń) oraz

$$\Omega_n \subset \Omega_{n+1}. \tag{7:1}$$

Jeśli $X = \Omega_n$ dla pewnego indeksu $n > 0$, dowód jest zakończony. Załóżmy zatem, że zbiór $F_n \overset{\text{def}}{=} X \setminus \Omega_n$ jest niepusty dla dowolnej liczby $n > 0$. Określamy zbiory

$$W_n \overset{\text{def}}{=} \left\{x \in X\colon\ \operatorname{dist}_d(x, F_n) > \frac{1}{n}\right\}.$$

Są to zbiory otwarte oraz $W_n \subset \Omega_n$, więc (M1) implikuje, że $W_n \in \mathcal{W}$. Zauważmy, że:

$$\overline{W}_n \subset W_{n+1}, \tag{7:2}$$

gdyż $\overline{W}_n \subset \{x \in X\colon\ \operatorname{dist}_d(x, F_n) \geqslant \frac{1}{n}\}$, a $F_{n+1} \subset F_n$ (dzięki (7:1)), więc $\operatorname{dist}_d(x, F_{n+1}) \geqslant \operatorname{dist}_d(x, F_n)$. Zachodzi także równość:

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n. \tag{7:3}$$

Istotnie, jeśli $x \in X$, to $x \in \Omega_k$ dla pewnego indeksu $k > 0$. Wtedy $\operatorname{dist}_d(x, F_k) > 0$ (bo zbiór F_k jest domknięty i $x \notin F_k$), zatem istnieje liczba $n > k$, taka że $\operatorname{dist}_d(x, F_k) > \frac{1}{n}$, a stąd $\operatorname{dist}_d(x, F_n) \geqslant \operatorname{dist}_d(x, F_k)$ (skoro $F_n \subset F_k$), czyli $x \in W_n$.

Teraz określmy zbiory otwarte $D_n \subset X$ następująco:

$$D_n \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} W_2 & \text{gdy } n = 1 \\ W_{n+1} \setminus \overline{W}_{n-1} & \text{gdy } n > 1 \end{cases} \subset W_{n+1}.$$

Ponowne zastosowanie (M1) daje nam, że $D_n \in \mathcal{W}$. Ponieważ zbiory D_n pokrywają całą przestrzeń X (istotnie: dla ustalonego punktu $x \in X$ dobieramy najmniejszy indeks $n > 0$, taki że $x \in W_n$; jeśli $n < 3$, to $x \in D_1$, a w przeciwnym przypadku $x \in W_n \setminus W_{n-1} \overset{(7:2)}{\subset} W_n \setminus \overline{W}_{n-2} = D_n$), a rodzina $\mathcal{W}$ spełnia warunek (M3) dla rodzin przeliczalnych, pozostaje sprawdzić, że rodziny $\{D_{3n-j}\}_{n>0}$ są dyskretne w X dla $j = 0, 1, 2$ (bo wtedy zbiory $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_{3n-j}$ należą do $\mathcal{W}$, dzięki (M3), więc z (M2) także ich suma należy do $\mathcal{W}$, czyli $X \in \mathcal{W}$). W tym celu zauważmy, że:

(a) jeśli $n > m+2$, to $\bar{D}_n \cap \bar{D}_m = \varnothing$; gdyż:

$n > 1$, więc $D_n = W_{n+1} \setminus \overline{W}_{n-1} \subset \overline{W}_{n+1} \setminus W_{n-1}$, więc także $\bar{D}_n \subset \overline{W}_{n+1} \setminus W_{n-1}$, a jednocześnie $\bar{D}_m \subset \bar{W}_{m+1} \overset{(7:2)}{\subset} W_{m+2} \subset W_{n-1}$ (bo $m+1 \leqslant n-1$);

(b) jeśli $n > m$, to $\bar{D}_n \cap W_m = \varnothing$; gdyż:
$n > 1$, więc $D_n \subset X \setminus W_{n-1} \subset X \setminus W_m$, a ten ostatni zbiór jest domknięty.

Teraz bez trudu możemy wykazać, że rodzina $\mathcal{D} \overset{\text{def}}{=} \{D_{3n-j}\colon\ n > 0\}$ jest dyskretna. Z (a) wynika, że domknięcia zbiorów z $\mathcal{D}$ są parami rozłączne. A z (7:3) wnosimy, że dla dowolnego punktu $a \in X$ istnieje indeks $k > 1$, taki że $a \in W_{3k}$. Rozważamy dwa przypadki:

- istnieje indeks $m \in \{1, \ldots, k\}$, taki że $x \in \bar{D}_{3m-j}$ — wtedy zbiór

$$U \overset{\text{def}}{=} W_{3k} \setminus \bigcup_{\substack{s=1,\ldots,k\\ s\neq m}} \bar{D}_{3s-j}$$

  jest otoczeniem punktu a, takim że:
  $$U \cap D_{3n-j} \neq \varnothing \iff n = m,$$
  co łatwo wynika z własności (b) oraz definicji zbioru U;

- $a \notin \bar{D}_{3m-j}$ dla wszelkich $m \in \{1, \ldots, k\}$ — wtedy $U \overset{\text{def}}{=} W_{3k}$ jest otoczeniem punktu a rozłącznym ze wszystkimi elementami rodziny $\mathcal{D}$, co również łatwo wynika z (b).

Tym samym punkt a ma otoczenie, które przecina niepusto co najwyżej jeden element rodziny $\mathcal{D}$, czyli jest to rodzina dyskretna w X. □

7.7 Wniosek.
Przestrzeń metryzowalna jest metryzowalna w sposób zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jej punkt ma otoczenie metryzowalne w sposób zupełny.

Dowód. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną, a $\mathcal{W} \subset \mathcal{P}(X)$ składa się z metryzowalnych w sposób zupełny podprzestrzeni przestrzeni X. Wystarczy pokazać, że $\mathcal{W}$ to kolekcja Michaela. W tym celu powiększmy przestrzeń (X, d) (w jakikolwiek sposób) do zupełnej przestrzeni metrycznej (M, ϱ) (czyli $X \subset M$ oraz metryka ϱ przedłuża d). Z Wn. 3.5 (str. 7) wynika, że dla $A \subset X$,

$$A \in \mathcal{W} \iff A \text{ jest typu } \mathscr{G}_\delta \text{ w } M.$$

Używając powyższej charakteryzacji, bez trudu możemy wykazać warunki (M1) i (M2):

- jeśli $A \in \mathcal{W}$, a $U \subset A$ jest zbiorem otwartym w X, to A jest typu $\mathscr{G}_\delta$ w M oraz $U = V \cap X$ dla pewnego zbioru V otwartego w M; tym samym $U = V \cap A$ jest typu $\mathscr{G}_\delta$ w M, więc $U \in \mathcal{W}$;

- jeśli zbiory $A, B \subset X$ należą do $\mathcal{W}$, to są to zbiory typu $\mathscr{G}_\delta$ w M, więc także $A \cup B$ jest zbiorem typu $\mathscr{G}_\delta$ w M, czyli $A \cup B \in \mathcal{W}$.

Pozostaje sprawdzić warunek (M3), do czego nie potrzebujemy powyższej charakteryzacji zbiorów należących do $\mathcal{W}$. Ustalmy więc rodzinę $\{U_s\}_{s\in S}$ parami rozłącznych[*7)] podzbiorów otwartych przestrzeni X, z których każdy jest przestrzenią metryzowalną w sposób zupełny. Ustalmy także (dla dowolnego indeksu $s \in S$) zupełną metrykę d_s na U_s, zgodną z topologią tej przestrzeni, taką że $d_s \leqslant 1$. Określamy metrykę D na zbiorze $V \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{s\in S} U_s$ formułą:

$$D(x,y) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} d_s(x,y) & \text{gdy } x, y \in U_s \\ 1 & \text{gdy } x \in U_s,\ y \in U_t,\ s \neq t \end{cases}.$$

To, że $d_s \leqslant 1$ dla wszelkich $s \in S$, pozwala bez trudu pokazać, że funkcja D to metryka na V. Ponadto, dla dowolnego punktu $a \in U_s \subset V$ $(s \in S)$ oraz wszelkich $r \in (0, 1]$,

$$B_{(V,D)}(a,r) = B_{(U_s,d_s)}(a,r), \tag{7:4}$$

co implikuje, że zbiory U_s są otwarte w (V, D), a topologia indukowana na nich pokrywa się z topologią przestrzeni (U_s, d_s). Zatem, dzięki otwartości zbiorów U_s w X, metryka D jest zgodna z topologią (na V) indukowaną z topologii przestrzeni X. Powyższy wzór (7:4) oraz zupełność metryk d_s implikuje, że D jest metryką zupełną, czyli $V \in \mathcal{W}$. □

[*7)] Tutaj nie potrzebujemy tego, że rodzina ma być dyksretna (jak w (M3)) — wystarczy jedynie, że zbiory są parami rozłączne (i otwarte!) — a jest to własność przysługująca elementom każdej rodziny dyskretnej.

7.8 Wniosek.
Jeśli X jest przestrzenią metryzowalną, taką że

($\star$) *dla dowolnego niepustego domkniętego zbioru $A \subset X$ istnieje zbiór domknięty $B \subsetneq A$, taki że przestrzeń $A \setminus B$ jest metryzowalna w sposób zupełny,*

to X jest przestrzenią metryzowalną w sposób zupełny.

Dowód. Niech $\mathcal{U}$ oznacza rodzinę wszystkich zbiorów otwartych w X, które są przestrzeniami metryzowalnymi w sposób zupełny, a V jej sumę. Z Wn. 7.7 wynika, że V jest przestrzenią metryzowalną w sposób zupełny. Twierdzimy, że $V = X$. Dla dowodu nie wprost załóżmy, że zbiór $A \stackrel{\text{def}}{=} X \setminus V$ jest niepusty. Ponieważ jest on domknięty, z ($\star$) wynika, że istnieje zbiór domknięty $B \subsetneq A$, taki że przestrzeń niepusta $C \stackrel{\text{def}}{=} A \setminus B$ jest metryzowalna w sposób zupełny. Z dowodu poprzedniego rezultatu wynika, że wtedy przestrzeń $U \stackrel{\text{def}}{=} V \cup C$ jest metryzowalna w sposób zupełny (bo suma dwóch zbiorów typu $\mathscr{G}_\delta$ jest zbiorem typu $\mathscr{G}_\delta$). Ale $X \setminus U = B$ jest zbiorem domkniętym, więc $U \in \mathcal{U}$ i tym samym $U \subset V$, co oznacza, że $C = \varnothing$ i sprzeczność. $\square$

7.9 Przykład.
Przestrzeń topologiczną X nazywamy *rozproszoną* (ang. *scattered*), gdy każdy jej niepusty podzbiór domknięty A zawiera punkt izolowany w A, tj. taki punkt $a \in A$, że zbiór $A \setminus \{a\}$ jest domknięty. Z Wn. 7.8 wynika natychmiast, że każda metryzowalna przestrzeń rozproszona jest metryzowalna w sposób zupełny. Ponieważ bycie przestrzenią rozproszoną jest własnością dziedziczną (tzn. każda podprzestrzeń przestrzeni rozproszonej także jest rozproszona), metryzowalne przestrzenie rozproszone są dziedzicznie metryzowalne w sposób zupełny. Można wykazać, że ta ostatnia własność (tj. dziedziczna metryzowalność w sposób zupełny) charakteryzuje przestrzenie rozproszone wśród przestrzeni metryzowalnych.

Rozdział ten zakończymy jeszcze jednym ciekawym zastosowaniem Lematu Michaela (i wnioskiem z niego). Jedno z najważniejszych zastosowań tegoż lematu poznamy w rozdziale o tzw. ANR-ach (zob. Tw. 8.27, str. 42).

7.10 Twierdzenie. (Twierdzenie o lokalnym ciężarze)
Dla przestrzeni metryzowalnej X oraz nieskończonej liczby kardynalnej α następujące warunki są równoważne:

(i) *każdy punkt przestrzeni X ma otoczenie U, takie że $w(U) \leqslant \alpha$;*

(ii) *X można przedstawić jako sumę parami rozłącznych podzbiorów otwarto-domkniętych, z których każdy ma ciężar topologiczny nie większy niż α.*

Dowód. Oczywiście z (ii) wynika (i). Dla dowodu przeciwnej implikacji, załóżmy, że zachodzi (i) i oznaczmy przez $\mathcal{W}$ rodzinę wszystkich zbiorów otwartych $U \subset X$, które można przedstawić jako sumę parami rozłącznych zbiorów otwartych w X, z których każdy ma ciężar topologiczny nie większy niż α. Wystarczy pokazać, że $X \in \mathcal{W}$. Zauważmy, że założenie w (i) oznacza, że każdy punkt przestrzeni X ma otoczenie należące do $\mathcal{W}$. Tym samym jeśli pokażemy, że $\mathcal{W}$ to kolekcja Michaela, zastosowanie Tw. 7.6 da nam tezę.

Warunki (M1) i (M3) są natychmiastowe (przy dowodzie (M1) wystarczy rozważyć przecięcia zbioru otwartego z rozłącznymi zbiorami otwartymi, które sumują się do jego nadzbioru z $\mathcal{W}$, natomiast w dowodzie (M3) wystarczy połączyć rodziny zbiorów parami rozłącznych w jedną rodzinę). Jedyne, co trzeba wykazać, to (M2). W tym celu odnotujmy dwie proste własności (wszystkie zbiory występujące poniżej w warunkach (w1)–(w2) są **otwartymi** podzbiorami przestrzeni X):

(w1) Jeśli $w(U) \leqslant \alpha$, a zbiory V_s $(s \in S)$ są parami rozłączne i $U \cap V_s \neq \varnothing$ dla wszelkich $s \in S$, to $\operatorname{card}(S) \leqslant \alpha$.

(w2) Jeśli $\operatorname{card}(S) \leqslant \alpha$ i $w(V_s) \leqslant \alpha$ dla wszelkich $s \in S$, to $w(\bigcup_{s \in S} V_s) \leqslant \alpha$.

Własność (w1) bierze się stąd, że przy założeniach jak w (w1), zbiór U zawiera zbiór gęsty D mocy nie większej niż α i wybierając dowolnie punkt $a_s \in D \cap V_s$, otrzymujemy iniekcję $S \ni s \mapsto a_s \in D$. Własność (w2) jest równie prosta: przy założeniach jak w (w2), każdy ze zbiorów V_s zawiera zbiór gęsty D_s mocy nie większej niż α i wtedy zbiór $\bigcup_{s \in S} D_s$ jest gęsty w $W \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{s \in S} V_s$ i ma moc nie większą niż α (bo $card(S) \leqslant \alpha$). Zatem z metryzowalności przestrzeni W wynika, że $w(W) \leqslant \alpha$.

Dysponując własnościami (w1)–(w2), możemy wykazać warunek (M2). Niech zatem $D = \bigcup_{s\in S} U_s$ oraz $E = \bigcup_{t\in T} V_t$ będą dwoma zbiorami należącymi do $\mathcal{W}$, gdzie $\mathrm{card}(S) \leqslant \alpha$, $\mathrm{card}(T) \leqslant \alpha$, a zbiory U_s — i podobnie zbiory V_t — są parami rozłączne, niepuste i mają ciężar topologiczny nie większy niż α. Zmieniając w razie potrzeby zbiór T na równoliczny z nim, możemy ponadto założyć, że

$$S \cap T = \varnothing. \tag{7:5}$$

Nasz cel to pokazać, że $W \overset{\text{def}}{=} D \cup E \in \mathcal{W}$, czyli przedstawić przestrzeń W jako sumę parami rozłącznych zbiorów otwartych o ciężarze topologicznym nie większym niż α. Ustalmy w tym celu punkt $a \in W$. Indukcyjnie skonstruujemy pewne „kanoniczne" otoczenie otwarte $\Omega_\infty(a)$ punktu a wygenerowane przez rodziny zbiorów $\{U_s\}$ oraz $\{V_t\}$.

Oznaczmy przez $\Omega_0(a)$ sumę mnogościową wszystkich zbiorów spośród U_s i V_t, które zawierają punkt a. Ponieważ te dwie rodziny składają się ze zbiorów parami rozłącznych, w wyznaczaniu tej sumy uczestniczy albo tylko jeden zbiór (łącznie z obu rodzin), albo dokładnie dwa. Tak czy owak, własność (w2) ma zastosowanie i tym samym $w(\Omega_0(a)) \leqslant \alpha$.

Przypuśćmy teraz, że dla pewnej liczby naturalnej $n > 0$ określiliśmy już otwarte otoczenie $\Omega_{n-1}(a)$ punktu a zawarte w W, takie że $w(\Omega_{n-1}(a)) \leqslant \alpha$. Z (w1) wynika, że zbiór $S' \overset{\text{def}}{=} \{s \in S\colon\ \Omega_{n-1}(a) \cap U_s \neq \varnothing\}$ ma moc nie większą niż α. Tym samym, (w2) implikuje, że przestrzeń

$$\Omega'_n(a) \overset{\text{def}}{=} \Omega_{n-1}(a) \cup \bigcup_{s\in S'} U_s$$

ma ciężar topologiczny nie większy niż α. Możemy więc po raz drugi zastosować ten sam schemat działania: z (w1) wynika, że zbiór $T' \overset{\text{def}}{=} \{t \in T\colon \Omega'_n(a) \cap V_t \neq \varnothing\}$ ma moc nie większą niż α i tym samym, z (w2), przestrzeń

$$\Omega_n(a) \overset{\text{def}}{=} \Omega'_n(a) \cup \bigcup_{t\in T'} V_t$$

ma ciężar topologiczny nie większy niż α. Oczywiście $\Omega_n(a)$ jest zbiorem otwartym zawierającym $\Omega_{n-1}(a)$ zawartym w W.

Na koniec określamy $\Omega_\infty(a) \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{n=0}^\infty \Omega_n(a)$. Kolejny raz (w2) implikuje, że $w(\Omega_\infty(a)) \leqslant \alpha$. Dla uproszczenia dalszych rozumowań, oznaczmy:

- $I \overset{\text{def}}{=} S \cup T$;
- $U_t \overset{\text{def}}{=} V_t$ dla $t \in T$.*8)

Na zbiorze I wprowadzamy następującą relację równoważności „$\sim$":

$$u \sim v \iff \exists p > 0\ \exists \ell_0, \ldots, \ell_p \in I\colon \quad \begin{cases} \ell_0 = u,\ \ell_p = v, \\ U_{\ell_{j-1}} \cap U_{\ell_j} \neq \varnothing \quad \text{dla } j = 1, \ldots, p \end{cases}.$$

Wykażemy teraz kluczową własność. Dla $j, k \in I$ oraz $a \in U_j$:

$$j \sim k \iff U_k \cap \Omega_\infty(a) \neq \varnothing \iff U_k \subset \Omega_\infty(a). \tag{7:6}$$

W jej dowodzie będziemy korzystać z tego, w jaki sposób został skonstruowany zbiór $\Omega_\infty(a)$. Jeśli $j \sim k$, to dla pewnego układu $\ell_0 = j, \ldots, \ell_p = k \in I$ zachodzi $U_{\ell_{n-1}} \cap U_{\ell_n} \neq \varnothing$ dla $n = 1, \ldots, p$. W tej sytuacji indukcyjnie sprawdzamy, że $U_{\ell_n} \subset \Omega_n(a)$ dla $n = 0, \ldots, p$ — wystarczy przypomnieć sobie definicję zbiorów $\Omega_n(a)$. Tym samym $U_k = U_{\ell_p} \subset \Omega_p(a) \subset \Omega_\infty(a)$. Z drugiej strony, jeśli $U_k \subset \Omega_\infty(a)$, to oczywiście $U_k \cap \Omega_\infty(a) \neq \varnothing$ (gdyż na wstępie założyliśmy, że wszystkie zbiory U_s oraz V_t są niepuste). Wreszcie, jeśli $U_k \cap \Omega_\infty(a) \neq \varnothing$, to również

$$U_k \cap \Omega_n(a) \neq \varnothing \tag{7:7}$$

dla pewnego indeksu $n \geqslant 0$. Wykażemy indukcją względem n, że z (7:7) wynika, że $j \sim k$.

Dla $n = 0$ z (7:7) wynika, że istnieje indeks $m \in I$, taki że $a \in U_m$ oraz $U_m \cap U_k \neq \varnothing$. Wtedy $a \in U_j \cap U_m$, co implikuje, że $j \sim k$.

Na koniec, jeśli $n > 0$ i zachodzi (7:7), to $U_k \cap \Omega'_n(a) \neq \varnothing$ lub $U_k \cap U_m \neq \varnothing$ dla pewnego indeksu $m \in T \subset I$, takiego że $U_m \cap \Omega'_n(a) \neq \varnothing$. W pierwszym z tych przypadków przyjmujemy $m \overset{\text{def}}{=} k$. W obu przypadkach zachodzi $m \sim k$ oraz $U_m \cap \Omega'_n(a) \neq \varnothing$. Podobnie, z niepustości tego ostatniego przecięcia wynika, że $U_m \cap \Omega_{n-1}(a) \neq \varnothing$ lub że $U_m \cap U_q \neq \varnothing$ dla pewnego indeksu $q \in S \subset I$, takiego że $U_q \cap \Omega_{n-1}(a) \neq \varnothing$. W pierwszym z tych przypadków przyjmujemy $q \overset{\text{def}}{=} m$ i zauważamy, że w obu przypadkach zachodzi $q \sim m$ oraz $U_q \cap \Omega_{n-1}(a)$. W tym momencie możemy zastosować założenie indukcyjne, z którego wnosimy, że $j \sim q$. Ostatecznie, z przechodniości relacji „$\sim$", wynika, że $j \sim q$ (skoro $j \sim q \sim m \sim k$. Dowód (7:6) został zakończony.

*8) W tym miejscu korzystamy z (7:5).

Równoważności wyrażone w (7:6) pokazują, że dla $j \in I$ oraz $a \in U_j$:

(7:8) $$\Omega_\infty(a) = \bigcup_{k\in[j]_\sim} U_k \qquad \text{oraz} \qquad W \setminus \Omega_\infty(a) = \bigcup_{k\in I\setminus[j]_\sim} U_k.$$

W szczególności, dla dowolnie wybranych punktów $a, b \in W$ i dobranych do nich indeksów $j, k \in I$, takich że $a \in U_j$ i $b \in U_k$, możliwe są dwie sytuacje:

- $j \sim k$, wtedy $[j]_\sim = [k]_\sim$, więc z (7:8) wynika, że $\Omega_\infty(a) = \Omega_\infty(b)$;
- $j \not\sim k$, wtedy $[k]_\sim \subset I\setminus[j]_\sim$, więc (ponownie) z (7:8) wynika, że $\Omega_\infty(b) \subset W\setminus\Omega_\infty(a)$, a stąd $\Omega_\infty(a)\cap\Omega_\infty(b) = \infty$.

Powyższe dwie własności pokazują, że rodzina $\{\Omega_\infty(a)\colon\ a \in W\}$ składa się ze zbiorów otwartych, które są parami rozłączne i sumują się do W. Tak więc $W \in \mathcal{W}$, co kończy dowód. □

Jako natychmiastowy wniosek z powyższego twierdzenia, otrzymujemy

7.11 Wniosek.
Niech X będzie spójną przestrzenią metryzowalną.

(a) *Jeśli każdy punkt przestrzeni X ma otoczenie, którego ciężar topologiczny jest nie większy niż $\alpha \geqslant \aleph_0$, to $w(X) \leqslant \alpha$.*

(b) **(Twierdzenie Aleksandrowa)** *Jeśli przestrzeń X jest lokalnie zwarta, to jest ośrodkowa.*

(c) *Jeśli X jest rozmaitością topologiczną, to jest przestrzenią ośrodkową.*

Dowód. Ćwiczenie. □

8 A(N)R-y

8.1 Twierdzenie. (Twierdzenie Arensa-Eellsa)
Dla dowolnej przestrzeni metrycznej (X, d) istnieje przestrzeń unormowana $(E, \|\cdot\|_E)$ oraz odwzorowanie $J\colon X \to E$, takie że:

(AE1) *J jest odwzorowaniem izometrycznym;*

(AE2) *zbiór $J(X)$ jest domknięty w E;*

(AE3) *zbiór $J(X)$ jest liniowo niezależny;*

(AE4) *jeśli metryka d jest zupełna, E jest przestrzeńią Banacha.*

Dowód. Jeśli przestrzeń X jest pusta, wystarczy określić E jako trywialną przestrzeń wektorową (tzn. $\{0\}$). Poniżej zakładamy, że $X \neq \varnothing$.

Ustalmy punkt $a \in X$ i dobierzmy punkt $\omega \notin X$. Metrykę d przedłużamy do metryki ϱ na zbiorze $\hat{X} \stackrel{\text{def}}{=} X \sqcup \{\omega\}$, przyjmując, że $\varrho(x, \omega) = 1 + d(x, a)$ dla $x \in X$. (Sprawdzenie, że ϱ rzeczywiście jest metryką, pozostawiamy jako proste ćwiczenie). Niech

$$\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \{u\colon \hat{X} \to \mathbb{R} |\ \operatorname{Lip}_\varrho(u) \leqslant 1,\ u(\omega) = 0\}$$

oraz $F = \ell_\infty(\Omega)$, tj. F jest rzeczywistą przestrzenią wektorową złożoną ze wszystkich funkcji ograniczonych określonych na Ω o wartościach w $\mathbb{R}$. Przestrzeń F jest przestrzenią Banacha z normą $\|\cdot\|_{\sup}$. Dla $z \in \hat{X}$ niech $\mathfrak{e}_z\colon \Omega \to \mathbb{R}$ będzie funkcją daną wzorem $\mathfrak{e}_z(u) \stackrel{\text{def}}{=} u(z)$. Zauważmy, że $|\mathfrak{e}_z(u)| = |u(z) - u(\omega)| \leqslant \varrho(z, \omega)$, czyli $\mathfrak{e}_z \in F$. Ponadto, $|\mathfrak{e}_z(u) - \mathfrak{e}_w(u)| = |u(z) - u(w)| \leqslant \varrho(z, w)$ dla $w \in \hat{X}$ oraz wszelkich $u \in \Omega$, więc $\|\mathfrak{e}_z - \mathfrak{e}_w\| \leqslant \varrho(z, w)$. Ale dla funkcji $v\colon \hat{X} \ni x \mapsto \varrho(x, w) - \varrho(\omega, w) \in \mathbb{R}$ mamy $v \in \Omega$ (bo $v(\omega) = 0$ oraz $|v(x) - v(y)| = |\varrho(x, w) - \varrho(y, w)| \leqslant \varrho(x, y)$) oraz $|\mathfrak{e}_z(v) - \mathfrak{e}_w(v)| = |v(z) - v(w)| = \varrho(z, w)$, czyli

(8:1) $$\|\mathfrak{e}_z - \mathfrak{e}_w\|_{\sup} = \varrho(z, w) \qquad (z, w \in \hat{X}).$$

Sprawdźmy teraz, że zbiór $\{\mathfrak{e}_x\colon\ x \in X\}$ jest liniowo niezależny. W tym celu ustalmy $p > 0$, różne punkty $x_1, \ldots, x_p \in X$ oraz liczby rzeczywiste $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$, takie że $\sum_{k=0}^{p} \alpha_k \mathfrak{e}_{x_k} = 0$ w F. Oznacza to, że dla dowolnej funkcji $u \in \Omega$ zachodzi równość:

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_k u(x_k) = 0. \tag{8:2}$$

Ustalmy dowolnie $j \in \{1, \ldots, p\}$. Niech $F \stackrel{\text{def}}{=} \{x_1, \ldots, x_p, \omega\} \setminus \{x_j\}$. Ponieważ $\omega \in F$, zbiór F jest niepusty i domknięty w $\hat{X}$. Niech $u \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{dist}_\varrho(\cdot, F)$. Funkcja odległości od zbioru jest nieoddalająca oraz $u(\omega) = 0$ (bo $\omega \in F$), zatem $u \in \Omega$. Zauważmy, że $u(x_k) = 0$ dla wszelkich $k \in \{1, \ldots, p\}$ różnych od j oraz $u(x_j) > 0$ (bo $x_j \notin F$). Podstawienie u do wzoru (8:2) daje $\alpha_j u(x_j) = 0$, a stąd $\alpha_j = 0$, czyli funkcje $\mathfrak{e}_{x_1}, \ldots, \mathfrak{e}_{x_p}$ są liniowo niezależne.

Jeśli przestrzeń metryczna (X, d) jest zupełna, przyjmujemy $(E, \|\cdot\|_E) \stackrel{\text{def}}{=} (F, \|\cdot\|_{\sup})$ oraz $J\colon X \ni x \mapsto \mathfrak{e}_x \in F$. Równość (8:1) implikuje, że J jest odwzorowaniem izometrycznym, a stąd zbiór $J(X)$ jest zupełny w przestrzeni metrycznej E i tym samym jest domknięty. Liniową niezależność tego zbioru wykazaliśmy wcześniej. Tak więc w przypadku metryki zupełnej d dowód jest zakończony.

W dalszym ciągu zakładamy, że metryka d nie jest zupełna. Wtedy określamy $E \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{lin}\{\mathfrak{e}_x\colon\ x \in X\} \subset F$ z normą $\|\cdot\|_E$ indukowaną z $\|\cdot\|_{\sup}$ oraz $J\colon X \ni x \mapsto \mathfrak{e}_x \in E$. Ponownie, wzór (8:1) implikuje, że odzworowanie J jest izometryczne. Ponieważ liniową niezależność zbioru $J(X)$ wykazaliśmy wcześniej, wystarczy pokazać, że ten zbiór jest domknięty. W tym celu załóżmy, że punkty $x_1, x_2, x_3, \ldots \in X$ są takie, że funkcje $\mathfrak{e}_{x_1}, \mathfrak{e}_{x_2}, \mathfrak{e}_{x_3}, \ldots$ zbiegają w przestrzeni E do pewnej funkcji $\varphi \in E$. Z definicji przestrzeni E, funkcję φ możemy przedstawić w postaci $\varphi = \sum_{k=1}^{p} \beta_k \mathfrak{e}_{z_k}$, gdzie $p > 0$, punkty $z_1, \ldots, z_p \in X$ są różne oraz $\beta_1, \ldots, \beta_p \in \mathbb{R}$. Niech $z_0 \stackrel{\text{def}}{=} \omega$, $F \stackrel{\text{def}}{=} \{z_0, \ldots, z_p\}$ oraz $u \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{dist}_\varrho(\cdot, F)$. Jak w poprzedniej części dowodu stwierdzamy, że $u \in \Omega$. Ze zbieżności ciągu $\mathfrak{e}_{x_1}, \mathfrak{e}_{x_2}, \mathfrak{e}_{x_3}, \ldots$ do $\sum_{k=1}^{p} \beta_k \mathfrak{e}_{z_k}$ w przestrzeni E wynika, że $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{e}_{x_n}(u) = \sum_{k=1}^{p} \beta_k \mathfrak{e}_{z_k}(u) = \sum_{k=1}^{p} \beta_k u(z_k) = 0$. Zauważmy, że dla dowolnego indeksu $n > 0$, $\mathfrak{e}_{x_n}(u) = u(x_n) = \varrho(x_n, z_{m_n})$ dla stosownie dobranego indeksu $m_n \in \{0, \ldots, p\}$. Ponieważ ciąg $(m_n)_{n=1}^{\infty}$ przyjmuje tylko skończenie wiele wartości, istnieją ściśle rosnący ciąg $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ oraz indeks $j \in \{0, \ldots, p\}$, takie że $m_{k_n} = j$ dla wszelkich n. Wtedy $\varrho(x_{k_n}, z_j) = \mathfrak{e}_{x_{k_n}}(u) \to 0$ $(n \to \infty)$, czyli $\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = z_j$ w przestrzeni $\hat{X}$. Jako że $\varrho(b, \omega) \geqslant 1$ dla wszelkich $b \in X$, powyższa zbieżność implikuje, że $z_j \neq \omega$, czyli $z_j \in X$. A wtedy (np. z (8:1)) $\mathfrak{e}_{x_{k_n}} \to \mathfrak{e}_{z_j}$ w przestrzeni E i tym samym $\varphi = \mathfrak{e}_{z_j} \in J(X)$, czyli zbiór $J(X)$ jest domknięty w E. □

8.2 Definicja.
Niech $A \subsetneq X$ będzie niepustym domkniętym (właściwym) podzbiorem przestrzeni metrycznej (X, d). *System Dugundjiego* dla trójki (X, A, d) to dowolny układ $\{(b_s, a_s)\}_{s\in S}$, taki że:

(SD1) $b_s\colon X \setminus A \to [0, 1]$ to funkcja ciągła oraz $a_s \in A$ dla wszelkich $s \in S$;

(SD2) $\{b_s\}_{s\in S}$ to rozkład jedności w $X \setminus A$, lokalnie skończony w $X \setminus A$;

(SD3) dla dowolnego indeksu $s \in S$ oraz punktu $c \in X \setminus A$ zachodzi implikacja:

$$b_s(c) \neq 0 \implies d(c, a_s) \leqslant 2 \operatorname{dist}_d(c, A).$$

8.3 Lemat.
Dla dowolnego niepustego domkniętego właściwego podzbioru A przestrzeni metrycznej (X, d) istnieje system Dugundjiego dla (X, A, d).

Dowód. Z Tw. 7.2 (str. 26) wynika, że przestrzeń $X \setminus A$ jest parazwarta, więc dla pokrycia otwartego

$$\mathcal{U} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ B_d\left(x, \frac{1}{4} \operatorname{dist}_d(x, A)\right) :\ x \in X \setminus A \right\}$$

tej przestrzeni[*9)] istnieje lokalnie skończony (w $X \setminus A$) ciągły rozkład jedności $\{b_s\}_{s\in S}$ (w $X \setminus A$) wpisany w $\mathcal{U}$ (zob. Tw. 2.11, str. 3). Ostatnia z tych własności oznacza, że dla dowolnego indeksu $s \in S$ istnieje punkt $x_s \in X \setminus A$, taki że

$$b_s^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subset B_d\left(x_s, \frac{1}{4} \operatorname{dist}_d(x_s, A)\right). \tag{8:3}$$

[*9)] Dla $x \in X \setminus A$ liczba $\operatorname{dist}_d(x, A)$ jest dodatnia, bo zbiór A jest domknięty. Ponadto, $B_d\left(x, \frac{1}{4} \operatorname{dist}_d(x, A)\right) \subset X \setminus A$, gdyż $d(x, a) \geqslant \operatorname{dist}_d(x, A) > \frac{1}{4} \operatorname{dist}_d(x, A)$ dla $a \in A$.

Z definicji odległości od zbioru wynika, że istnieje punkt $a_s \in A$, taki że

$$d(x_s, a_s) \leqslant \frac{5}{4} \operatorname{dist}_d(x_s, A). \tag{8:4}$$

Aby wykazać, że układ $\{(b_s, a_s)\}_{s\in S}$ to system Dugundjiego dla (X, A, d), wystarczy sprawdzić warunek (SD3). W tym celu ustalmy indeks $s \in S$ oraz punkt $c \in X \setminus A$, taki że $b_s(c) \neq 0$. Z (8:3) wnioskujemy, że $d(c, x_s) \leqslant \frac{1}{4} \operatorname{dist}_d(x_s, A)$. Jednocześnie (skoro funkcja odległości od zbioru jest nieoddalająca)

$$\operatorname{dist}_d(x_s, A) \leqslant \operatorname{dist}_d(c, A) + d(x_s, c) \leqslant \operatorname{dist}_d(c, A) + \frac{1}{4} \operatorname{dist}_d(x_s, A),$$

czyli $\frac{3}{4} \operatorname{dist}_d(x_s, A) \leqslant \operatorname{dist}_d(c, A)$ lub równoważnie:

$$\operatorname{dist}_d(x_s, A) \leqslant \frac{4}{3} \operatorname{dist}_d(c, A).$$

Ostatecznie otrzymujemy (z (8:4)):

$$d(c, a_s) \leqslant d(c, x_s) + d(x_s, a_s) \leqslant \frac{1}{4} \operatorname{dist}_d(x_s, A) + \frac{5}{4} \operatorname{dist}_d(x_s, A) = \frac{3}{2} \operatorname{dist}_d(x_s, A) \leqslant \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \operatorname{dist}_d(c, A),$$

czyli $d(c, a_s) \leqslant 2 \operatorname{dist}_d(c, A)$. □

8.4 Definicja.
Przestrzeń lokalnie wypukła (w skrócie: *PLW*) to dowolna przestrzeń wektorowa E nad ciałem $\mathbb{R}$ wraz z topologią τ, taką że:

- funkcja $\mathbb{R} \times E \times E \ni (t, x, y) \mapsto x + ty \in E$ jest ciągła (gdy ciało $\mathbb{R}$ jest rozważane z topologią naturalną);
- każde otoczenie zera w E zawiera wypukłe otoczenie zera.

8.5 Obserwacja.

(a) *Każda przestrzeń unormowana jest przestrzenią lokalnie wypukłą.*

(b) *Jeśli E jest PLW, to dla dowolnego punktu $a \in E$ funkcja $E \ni x \mapsto x + a \in E$ jest homeomorfizmem.*

(c) *Jeśli E jest PLW, to zbiór $U \subset E$ jest otoczeniem punktu $a \in E$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $U - a \overset{\text{def}}{=} \{x - a \colon\ x \in U\}$ jest otoczeniem zera.*

Dowód. Ćwiczenie. □

8.6 Twierdzenie. (Twierdzenie Dugundjiego o przedłużaniu)
Niech A będzie niepustym domkniętym właściwym podzbiorem przestrzeni metrycznej (X, d), $\{(b_s, a_s)\}_{s\in S}$ systemem Dugundjiego dla (X, A, d), a E przestrzenią lokalnie wypukłą.

Dla funkcji ciągłej $f \colon A \to E$ niech funkcja $\hat{f} \colon X \to E$ będzie dana wzorem:

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{gdy } x \in A \\ \sum_{s\in S} b_s(x) f(a_s) & \text{gdy } x \notin A \end{cases}.$$

Wtedy $\hat{f}$ jest poprawnie określoną funkcją ***ciągłą****, która przedłuża funkcję f i spełnia warunek $\hat{f}(X) \subset \operatorname{conv} f(A)$, gdzie* conv *oznacza otoczkę wypukłą.*

Dowód. Ponieważ rozkład jedności $\{b_s\}_{s\in S}$ jest lokalnie skończony w $X \setminus A$, dla dowolnego punktu $x \in X \setminus A$ istnieje otwarte (w X) otoczenie $W_x \subset X \setminus A$ punktu x, takie że zbiór $S(W_x) \overset{\text{def}}{=} \{s \in S \colon\ b_s^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap W_x \neq \varnothing\}$ jest skończony. Wtedy:

$$s \in S \setminus S(W_x),\ y \in W_x \implies b_s(y) = 0$$

i dlatego $\hat{f}(y) = \sum_{s\in S(W_x)} b_s(y)f(a_s)$ dla $y \in W_x$. W szczególności, funkcja $\hat{f}$ jest poprawnie określona oraz $\hat{f}|_{W_x} = (\sum_{s\in S(W_x)} b_s(\cdot)f(a_s))|_{W_x}$. Prawa strona tej równości (jako skończona kombinacja liniowa funkcji ciągłych) jest funkcją ciągłą, co implikuje, że funkcja $\hat{f}$ jest ciągła w punkcie x (gdyż W_x to otoczenie tego punktu). Ponadto, liczby $b_s(x)$ dla $s \in S(W_x)$ są nieujemne, sumują się do 1, a punkty $f(a_s)$ wpadają do $f(A)$, więc $\hat{f}(x) \in \operatorname{conv} f(A)$ (jako kombinacja wypukła elementów z $f(A)$). Pozostaje sprawdzić ciągłość funkcji $\hat{f}$ w punktach zbioru A. Ustalmy więc punkt $a \in A$ i dowolne otwarte otoczenie U punktu $\hat{f}(a) = f(a)$ w E. Z Obs. 8.5 wynika, że $U - f(a)$ jest otoczeniem zera i w takim razie (na podstawie definicji PLW) istnieje wypukłe otoczenie V zera w E, takie że $V \subset U - f(a)$, czyli $V + f(a) \subset U$. Wystarczy więc znaleźć takie otoczenie D punktu a w X, że

$$\hat{f}(D) \subset V + f(a). \tag{8:5}$$

Ponieważ $V + f(a)$ jest otoczeniem punktu $f(a)$ w E, z ciągłości funkcji f wynika, że istnieje liczba $r > 0$, taka że

$$f(B_d(a, r) \cap A) \subset V + f(a). \tag{8:6}$$

Niech $D \stackrel{\text{def}}{=} B_d(a, r/3)$. Pokażemy, że zachodzi (8:5). W tym celu rozważmy dowolny punkt $x \in D$. Jeśli $x \in A$, to $x \in B_d(a, r) \cap A$, więc (8:6) daje $\hat{f}(x) = f(x) \in V + f(a)$. W dalszym ciągu zakładamy, że $x \notin A$.

Oznaczmy $S_x \stackrel{\text{def}}{=} \{s \in S\colon\ b_s(x) \neq 0\}$. Wtedy $S_x \subset S(W_x)$ (czyli zbiór S_x jest skończony) oraz

$$\sum_{s\in S_x} b_s(x) = 1, \qquad \hat{f}(x) = \sum_{s\in S_x} b_s(x)f(a_s). \tag{8:7}$$

Ustalmy na moment dowolny indeks $s \in S_x$. Warunek (SD3) implikuje, że wtedy $d(x, a_s) \leqslant 2\operatorname{dist}_d(x, A)$. A stąd $d(a_s, a) \leqslant d(a_s, x) + d(x, a) \leqslant 2\operatorname{dist}_d(x, A) + d(x, a) \leqslant 3d(x, a) < r$, czyli $a_s \in B_d(a, r) \cap A$ i tym samym (dzięki (8:6)) $f(a_s) \in V + f(a)$. Innymi słowy: $f(a_s) - f(a) \in V$ dla $s \in S_x$. Ponieważ zbiór V jest wypukły, pierwsza równość w (8:7) implikuje, że także $\sum_{s\in S_x} b_s(x)(f(a_s) - f(a)) \in V$. Ale $\sum_{s\in S_x} b_s(x)(f(a_s) - f(a)) = \sum_{s\in S_x} b_s(x)f(a_s) - \sum_{s\in S_x} b_s(x)f(a) \stackrel{(8:7)}{=} \hat{f}(x) - f(a)$, czyli $\hat{f}(x) \in V + f(a)$ i teza. □

8.7 Wniosek.
Przy założeniach i oznaczeniach poprzedniego twierdzenia, dla dowolnej przestrzeni unormowanej $(E, \|\cdot\|_E)$ zachodzą następujące własności:

(a) *Funkcja $I\colon C_b(A, E) \ni f \mapsto \hat{f} \in C_b(X, E)$ jest poprawnie określonym izometrycznym operatorem liniowym; gdzie $C_b(X, E)$ oznacza przestrzeń wszystkich ograniczonych funkcji ciągłych z X w E wyposażoną w normę supremum $\|\cdot\|$ wyznaczoną przez $\|\cdot\|_E$.*

(b) *Funkcja $P\colon C_b(X, E) \ni f \mapsto \widehat{f|_A} \in C_b(X, E)$ jest ciągłym operatorem liniowym, takim że $P^2 = P$, $\|P\| \leqslant 1$ oraz $\ker(P) = \{u \in C_b(X, E)\colon\ u|_A \equiv 0\}$.*

Dowód. W obu punktach liniowośc operatorów tam występujących wynika wprost ze wzoru na $\hat{f}$.

(a) Odwzorowanie liniowe I jest izometryczne wtedy i tylko wtedy, gdy zachowuje normę, czyli gdy $\|I(f)\| = \|f\|$ dla wszelkich $f \in C_b(A, E)$. Ale na pewno $\|I(f)\| \geqslant \|f\|$ (gdyż $I(f)$ przedłuża f). Z drugiej strony, gdy $f \neq 0$ i $r \stackrel{\text{def}}{=} \|f\|$, wtedy $r > 0$, $f(A) \subset \bar{B}_E(0, r)$ oraz kula domknięta jest zbiorem wypukłym (w przestrzeni unormowanej), zatem $\hat{f}(X) \subset \bar{B}_E(0, r)$, co oznacza, że $\|I(f)\| \leqslant r = \|f\|$. Tym samym operator I jest izometryczny.

(b): Zauważmy, że $Pf = I(f|_A)$, więc $\|Pf\| = \|f|_A\| \leqslant \|f\|$, czyli $\|P\| \leqslant 1$. Ponadto, dla $g = Pf$ mamy $g|_A = f|_A$ (gdyż operator I przedłuża funkcje), więc $P^2 f = Pg = I(g|_A) = I(f|_A) = Pf$. Na koniec zauważmy, że (z (a)) $Pf = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f|_A \equiv 0$, co kończy dowód. □

8.8 ***Uwaga****.*
Istnieje przykład zwartej (niemetryzowalnej) przestrzeni Hausdorffa X i jej domkniętego podzbioru $A \neq \varnothing$, dla którego **nie** istnieje liniowy izometryczny operator przedłużania z $C(A, \mathbb{R})$ w $C(X, \mathbb{R})$.

8.9 Twierdzenie. (Twierdzenie Klee o przedłużaniu homeomorfizmów)
Niech E i F będą metryzowalnymi przestrzeniami lokalnie wypukłymi, $A \subset E$ oraz $B \subset F$ ich podzbiorami domkniętymi, a $h\colon A \to B$ dowolnym homeomorfizmem. Wtedy istnieje homeomorfizm $H\colon E \times F \to E \times F$, taki że $H(a, 0) = (0, h(a))$ dla wszelkich $a \in A$.

Dowód. Z Tw. 8.6 (oraz Lem. 8.3) wynika, że istnieją funkcje ciągłe $f\colon E \to F$ oraz $g\colon F \to E$, takie że $f|_A = h$ oraz $g|_B = h^{-1}$.[*10)] Niech $H_1, H_2\colon E \times F \to E \times F$ będą dane wzorami: $H_1(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} (x, y + f(x))$, $H_2(x,y) = (x - g(y), y)$. Obie te funkcje to homeomorfizmy (gdyż $H_1^{-1}(x,y) = (x, y - f(x))$ i $H_2^{-1}(x,y) = (x + g(y), y)$). W takim razie funkcja $H \stackrel{\text{def}}{=} H_2 \circ H_1\colon E \times F \to E \times F$ także jest homeomorfizmem. Na koniec zauważmy, że dla $a \in A$ mamy $H_1(a,0) = (a, f(a)) = (a, h(a))$, więc (skoro $h(a) \in B$) $H(a,0) = H_2(a, h(a)) = (a - g(h(a)), h(a)) = (a - h^{-1}(h(a)), h(a)) = (0, h(a))$ i teza. □

Przedstawimy teraz dwa interesujące wniosku z Twierdzenia Klee.

8.10 Wniosek.
Niech A będzie domkniętym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^n$, a $g\colon A \to \mathbb{R}^n$ takim domkniętym zanurzeniem topologicznym, że $\dim \mathrm{lin}(A - A) + \dim \mathrm{lin}(g(A) - g(A)) \leqslant n$. Wtedy istnieje homeomorfizm $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, który przedłuża funkcję g.

Dowód. Jeśli $A = \varnothing$, teza jest natychmiastowa (wystarczy określić h np. jako identyczność). Możemy więc założyć, że zbiór A jest niepusty, i ustalić dowolnie punkt $a \in A$. Jeśli $A = \{a\}$, możemy h określić wzorem $h(x) \stackrel{\text{def}}{=} x + g(a) - a$. Dlatego w dalszym ciągu dowodu zakładamy, że $\mathrm{card}(A) > 1$. Wprowadźmy następujące oznaczenia:

- $E \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{lin}(A - A)$ (gdzie $A - A = \{x - y\colon\ x, y \in A\}$);
- $F \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{lin}(g(A) - g(A))$;
- $k \stackrel{\text{def}}{=} \dim E$, $\ell \stackrel{\text{def}}{=} \dim F$.

Z założenia w twierdzeniu wynika, że $k + \ell \leqslant n$. Ponadto, $k > 0$ i $\ell > 0$, gdyż $\mathrm{card}(A) > 1$. Niech $P, Q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będą dwoma izomorfizmami liniowymi, takimi że $P(E) = \mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}$ oraz $Q(F) = \{0\}^{n-\ell} \times \mathbb{R}^\ell$. Zauważmy także, że $Q(F) \subset \{0\}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Możemy więc zapisać:

- $P(x) = (u(x), 0)$ dla $x \in E$, gdzie $u\colon E \to \mathbb{R}^k$ to izomorfizm liniowy;
- $Q(y) = (0, v(y))$ dla $y \in F$, gdzie $v\colon F \to \mathbb{R}^{n-k}$ to monomorfizm liniowy (więc, w szczególności, domknięte zanurzenie topologiczne).

Określmy pomocniczo $B \stackrel{\text{def}}{=} u(A - a)$, $D \stackrel{\text{def}}{=} v(g(A) - g(a))$ oraz

$$f\colon B \ni z \mapsto v(g(u^{-1}(z) + a) - g(a)) \in D.$$

Zauważmy, że $B \subset \mathbb{R}^k$, $D \subset \mathbb{R}^{n-k}$ to zbiory domknięte, a f jest homeomorfizmem między nimi (w tym miejscu ważne jest, że zarówno g, jak i v to domknięte włożenia). W takim razie, Tw. 8.9 implikuje, że istnieje homeomorfizm $F\colon \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, taki że $F(b, 0) = (0, f(b))$ dla $b \in B$. Określamy szukany homeomorfizm $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ wzorem $h(x) \stackrel{\text{def}}{=} Q^{-1}(F(P(x - a))) + g(a)$. Pozostaje sprawdzić, że h przedłuża g. W tym celu ustalmy $x \in A$. Wtedy $x - a \in E$, więc $P(x - a) = (u(x - a), 0)$ i $u(x - a) \in B$, a stąd, skoro $g(x) - g(a) \in F$:

$$\begin{aligned} F(P(x-a)) = F(u(x-a), 0) = (0, f(u(x-a))) &= (0, v(g(u^{-1}(u(x-a)) + a) - g(a))) \\ &= (0, v(g(x) - g(a))) = Q(g(x) - g(a)). \end{aligned}$$

Ostatecznie $h(x) = g(a) + Q^{-1}(F(P(x - a))) = g(x)$ — i teza. □

8.11 Twierdzenie. (Twierdzenie Hausdorffa o przedłużaniu metryk)
Niech A będzie domkniętym podzbiorem metryzowalnej przestrzeni X. Każda metryka na A zgodna z topologią indukowaną na A przedłuża się do metryki na X zgodnej z topologią tej przestrzeni. Ponadto, jeśli X jest przestrzenią metryzowalną w sposób zupełny, to każda metryka zupełna na A zgodna z topologią przedłuża się do metryki zupełnej na X zgodnej z topologią.

[*10)] Istnienie funkcji f i g w przypadku, gdy choć jeden ze zbiorów A i B jest pusty lub pełny, sprawdza się bezpośrednio, tj. bez odwoływania się do Twierdzenia Dugundjego.

Dowód (*H. Toruńczyk*). Gdy $A = \varnothing$, teza jest natychmiastowa. W dalszym ciągu dowodu zakładamy, że $A \neq \varnothing$.

Ustalmy metrykę λ na X zgodną z topologią (zupełną, gdy przestrzeń X jest metryzowalna w sposób zupełny). Ustalmy także dowolną metrykę d na A zgodną z topologią indukowaną. Do przestrzeni metrycznych (X, λ) i (A, d) stosujemy Tw. 8.1 (str. 32) i dobieramy domknięte zanurzenia izometryczne $J_X \colon (X, \lambda) \to (E, \|\cdot\|_E)$ i $J_A \colon (A, d) \to (F, \|\cdot\|_F)$ w przestrzenie unormowane, przy czym E jest przestrzenią Banacha, gdy metryka λ jest zupełna, i podobnie F jest przestrzenią Banacha, gdy metryka d jest zupełna. Zauważmy, że zbiory $C \stackrel{\text{def}}{=} J_X(A) \subset E$ oraz $D \stackrel{\text{def}}{=} J_A(A)$ są domknięte, a funkcja $h \colon C \ni x \mapsto J_A(J_X^{-1}(x)) \in D$ jest poprawnie określonym homeomorfizmem między tymi zbiorami. W takim razie Tw. 8.9 gwarantuje, że istnieje homeomorfizm $H \colon E \times F \to E \times F$, taki że $H(x, 0) = (0, h(x))$ dla $x \in C$. Na przestrzeni $E \times F$ rozważamy normę $\|(x, y)\| \stackrel{\text{def}}{=} \|x\|_E + \|y\|_F$. Gdy obie metryki d i λ są zupełne, norma ta także jest zupełna. Określamy funkcję $\varrho \colon X \times X \to \mathbb{R}_+$ formułą: $\varrho(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \|H(J_X(x), 0) - H(J_X(y), 0)\|$. Funkcja ta jest metryką zgodną z topologią przestrzeni X, gdyż odwzorowanie $X \ni x \mapsto H(J_X(x), 0) \in E \times F$ jest zanurzeniem topologicznym. Co więcej, ponieważ jest to zanurzenie domknięte (gdyż odzworowanie J_X jest takież), ϱ jest metryką zupełną, gdy norma $\|\cdot\|$ jest zupełna. Zatem pozostaje sprawdzić, że ϱ przedłuża metrykę d. Niech $a, b \in A$. Wtedy $J_X(a), J_X(b) \in C$, a stąd $H(J_X(a), 0) = (0, h(J_X(a))) = (0, J_A(a))$ i podobnie $H(J_X(b), 0) = (0, J_A(b))$. Ostatecznie, dzięki izometryczności odwzorowania J_A, otrzymujemy

$$\varrho(a, b) = \|(0, J_A(a)) - (0, J_A(b))\| = \|(0, J_A(a) - J_A(b))\| = \|J_A(a) - J_A(b)\|_F = d(a, b),$$

co kończy dowód. □

Przechodzimy teraz do tytułowego terminu tego rozdziału.

8.12 Definicja.
Retrakcja z przestrzeni topologicznej X na podprzestrzeń $A \subset X$ to dowolna funkcja ciągła $r \colon X \to A$, taka że $r(a) = a$ dla wszelkich $a \in A$. Podprzestrzeń A nazywamy *retraktem* przestrzeni X, gdy istnieje retrakcja z X na A.

Metryzowalną przestrzeń topologiczną X nazywamy *absolutnym retraktem*, w skrócie: *AR-em* (ang. *absolute retract*) [odpowiednio: *absolutnym retraktem otoczeniowym*, w skrócie: *ANR-em* (ang. *absolute neighbourhood retract*)], gdy przestrzeń ta ma następującą własność:

> *Ilekroć Z jest przestrzenią metryzowalną, a $B \subset Z$ zbiorem domkniętym homeomorficznym z X, tylekroć B jest retraktem przestrzeni Z [odpowiednio: tylekroć B jest retraktem pewnego zbioru otwartego $U \supset B$ w Z].*

8.13 ***Uwaga.***
Jak nietrudno się przekonać, retrakt przestrzeni Hausdorffa jest jej podzbiorem domkniętym — i to dlatego w definicji A(N)R-ów rozważa się jedynie domknięte kopie „testowanej" przestrzeni.

Poniższe twierdzenie charakteryzuje A(N)R-y (wśród przestrzeni metryzowalnych) jako przestrzenie o własności przedłużania funkcji ciągłych (o wartościach w tej przestrzeni). I to właśnie dzięki tej własności A(N)R-y są tak ważne w topologii.

8.14 Twierdzenie. (Podstawowe twierdzenie o ANR-ach)
Dla przestrzeni metrycznej (X, d) następujące warunki są równoważne:

(i) *X jest AR-em [odpowiednio: ANR-em];*

(ii) *przestrzeń X jest homeomorficzna z retraktem pewnej przestrzeni unormowanej [odpowiednio: z retraktem pewnego zbioru otwartego w pewnej przestrzeni unormowanej];*

(iii) *każda (bijektywna) izometria $u \colon B \to X$ określona na zbiorze domkniętym B w przestrzeni metrycznej (Z, ϱ) przedłuża się do funkcji ciągłej $v \colon Z \to X$ [odpowiednio: do funkcji ciągłej $v \colon U \to X$, gdzie $U \supset B$ jest pewnym zbiorem otwartym w Z];*

(iv) *każda funkcja ciągła $f \colon B \to X$ określona na zbiorze domkniętym B w przestrzeni metryzowalnej Z przedłuża się do funkcji ciągłej $F \colon Z \to X$ [odpowiednio: do funkcji ciągłej $F \colon U \to X$, gdzie $U \supset B$ jest pewnym zbiorem otwartym w Z].*

Dowód. Implikacja (iv) $\Longrightarrow$ (iii) jest natychmiastowa.

(iv) $\Longrightarrow$ (i): Niech B będzie zbiorem domkniętym w przestrzeni metryzowalnej Z homeomorficznym z X. Ustalmy dowolny homeomorfizm $h\colon B \to X$. Z warunku (iv) wynika istnienie ciągłego przedłużenia $g\colon U \to X$ funkcji h, gdzie $U = Z$ [odpowiednio: gdzie $U \supset B$ jest zbiorem otwartym w Z]. Wtedy $r \stackrel{\text{def}}{=} h^{-1} \circ g\colon U \to B$ jest retrakcją (gdyż $g|_B = h$).

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Z Tw. 8.1 (str. 32), istnieje domknięte zanurzenie topologiczne $J\colon X \to E$ przestrzeni X w przestrzeń unormowaną E. Wtedy zbiór $B \stackrel{\text{def}}{=} J(X)$ jest homeomorficzny z X i domknięty w E. Z definicji A[N]R-u wynika zatem, że B jest retraktem przestrzeni E [odpowiednio: retraktem pewnego zbioru otwartego w E], co kończy dowód tej implikacji.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii): Jak w poprzedniej części dowodu, zastosowanie Tw. 8.1 daje nam izometrię $J\colon X \to B$ między X a zbiorem domkniętym B w przestrzeni unormowanej E. Z (iii) wynika, że funkcja odwrotna $J^{-1}\colon B \to X$ przedłuża się do funkcji ciągłej $g\colon U \to X$, gdzie $U = E$ [odpowiednio: gdzie $U \supset B$ to zbiór otwarty w E]. Wtedy funkcja $r \stackrel{\text{def}}{=} J \circ g\colon U \to B$ jest retrakcją, co dowodzi (ii).

(ii) $\Longrightarrow$ (iv): Niech Y będzie retraktem pewnej przestrzeni unormowanej E [odpowiednio: retraktem pewnego zbioru otwartego $V \supset Y$ w pewnej przestrzeni unormowanej E], homeomorficznym z X. Dla ujednolicenia dowodu, w wersji twierdzenia dla AR-ów przyjmijmy $V = E$. Ustalmy homeomorfizm $h\colon Y \to X$ oraz retrakcję $r\colon V \to Y$. Rozważmy dowolną przestrzeń metryzowalną Z, jej podzbiór domknięty B oraz dowolną funkcję ciągłą $f\colon B \to X$. Z Tw. 8.6 (str. 34) (oraz Lem. 8.3) istnieje funkcja ciągła $g\colon Z \to E$, która przedłuża funkcję $h^{-1} \circ f$.[*11)] Niech $U \stackrel{\text{def}}{=} g^{-1}(V)$. Zauważmy, że U jest zbiorem otwartym w Z oraz $U = Z$, gdy dowodzimy wersji twierdzenia dla AR-ów. Ponadto, $B \subset U$, gdyż $g(B) = h^{-1}(f(B)) \subset Y \subset V$. Określmy $F\colon U \to X$ jako $F \stackrel{\text{def}}{=} h \circ r \circ (g|_U)$ i odnotujmy, że F jest poprawnie określoną funkcją ciągłą (bo $g(U) \subset V$). Pozostaje sprawdzić, że F przedłuża funkcję f. A tak jest, gdyż dla $b \in B$, $y \stackrel{\text{def}}{=} g(b) = h^{-1}(f(b)) \in Y$, więc $r(y) = y$ i tym samym $F(b) = h(r(y)) = h(y) = f(b)$. □

8.15 Wniosek.

(a) *Przestrzeń pusta jest ANR-em, ale nie AR-em. Przestrzeń jednopunktowa jest AR-em.*

(b) *Odcinek* $[0,1]$ *oraz prosta* $\mathbb{R}$ *to AR-y.*

(c) *Jeśli* $X_1, X_2, X_3, \dots$ *to ciąg AR-ów, to* $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ *jest AR-em.*

(d) *Iloczyn kartezjański skończenie wielu ANR-ów jest ANR-em.*

(e) *Podzbiór otwarty ANR-u jest ANR-em.*

(f) *Retrakt A[N]R-u jest A[N]R-em.*

(g) *Sfera euklidesowa* $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ *jest ANR-em, ale nie AR-em.*

(h) *Niepusty wypukły podzbiór przestrzeni unormowanej jest AR-em.*

Dowód. Punkt (a) pozostawiamy jako proste ćwiczenie (obowiązkowe!). Teza punktu (b) jest konsekwencją poprzedniego twierdzenia oraz Twierdzenia Tietzego. W dowodach punktów (c)–(f) zamiast sprawdzać warunek definiujący, będziemy sprawdzać warunek sformułowany w punkcie (iv) Tw. 8.14. Aby się nie powtarzać, dla wszystkich tych punktów ustalmy podzbiór domknięty B przestrzeni metryzowalnej Z oraz funkcję ciągłą (która będziemy chcieli przedłużyć) $u\colon B \to M$ o wartościach w przestrzeni M, którą poniżej dobierzemy stosownie do kontekstu.

(c): Niech $M \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Funkcja u ma postać $u(x) = (u_n(x))_{n=1}^{\infty}$ $(x \in B)$, gdzie $u_n\colon B \to X_n$ to funkcja ciągła. Ponieważ X_n to AR, istnieje ciągłe przedłużenie $v_n\colon Z \to X_n$ funkcji u_n. Wtedy funkcja $Z \ni x \mapsto (v_n(x))_{n=1}^{\infty} \in M$ jest ciągłym przedłużeniem funkcji u.

(d): Dowód przebiega podobnie jak poprzednio: jeśli $X_1, \dots, X_k$ to ANR-y $(k > 0)$ i $M \stackrel{\text{def}}{=} X_1 \times \ldots \times X_k$, wtedy funkcja u ma postać $u(x) = (u_1(x), \dots, u_k(x))$ $(x \in B)$, gdzie $u_j\colon B \to X_j$ to funkcja ciągła dla $j = 1, \dots, k$. Z własności ANR-ów wynika, że u_j przedłuża się do funkcji ciągłej $v_j\colon U_j \to X_j$ określonej na pewnym zbiorze $U_j \supset B$ otwartym w Z. Wtedy zbiór $V \stackrel{\text{def}}{=} U_1 \cap \ldots \cap U_k$ jest otwarty w Z, zawiera zbiór B, a funkcja $v\colon V \ni x \mapsto (v_1(x), \dots, v_k(x)) \in M$ jest ciągłym przedłużeniem funkcji u.

(e): Niech X będzie ANR-em, a $M \subset X$ zbiorem otwartym w X. Wtedy także $u\colon B \to X$, więc istnieje ciągłe przedłużenie $v\colon V \to X$ funcji u na zbiór $V \supset B$ otwarty w Z. Teraz wystarczy zauważyć, że zbiór $U \stackrel{\text{def}}{=} v^{-1}(M)$ jest otwarty w Z (jako otwarty w V) i zawiera zbiór B (gdyż $v(B) = u(B) \subset M$), a funkcja $U \ni x \mapsto v(x) \in M$ jest ciągła i przedłuża u.

[*11)] Gdy $B \in \{\varnothing, Z\}$, istnienie funkcji g bez trudu uzasadniamy bez zastosowania Twierdzenia Dugundjiego.

(f): Niech X będzie AR-em [odpowiednio: ANR-em], a $r\colon X \to M$ retrakcją. Wtedy także $u\colon B \to X$ (bo $M \subset X$). Jako że X jest A[N]R-em, istnieje ciągłe przedłużenie $v\colon V \to X$ funkcji u, takie że $V = Z$ [odpowiednio: $V \supset B$ to zbiór otwarty w Z]. Wtedy funkcja $r \circ v\colon V \to M$ także jest ciągłym przedłużeniem funkcji u (gdyż dla $b \in B$ mamy $v(b) = u(b) \in M$ i tym samym $(r \circ v)(b) = u(b)$), co dowodzi, że przestrzeń M jest A[N]R-em.

(g): Twierdzenie Brouwera o nieistnieniu retrakcji implikuje, że sfera nie jest AR-em. Z drugiej strony, z punktów (b) i (c) wynika, że przestrzeń $\mathbb{R}^n$ jest AR-em, zatem — dzięki (e) — przestrzeń $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ jest ANR-em. Zauważmy, że funkcja $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ni x \mapsto \frac{x}{\|x\|_2} \in \mathbb{S}^{n-1}$ jest retrakcją (gdzie $\|\cdot\|_2$ to norma euklidesowa), i dlatego sfera jest ANR-em, dzięki (f).

(h): Teza wynika z Tw. 8.6 (oraz Lem. 8.3): istotnie, jeśli W jest niepustym zbiorem wypukłym w przestrzeni unormowanej E, a $f\colon B \to W$ funkcją ciągłą określoną na zbiorze domkniętym B w przestrzeni metryzowalnej Z, z przywołanego twierdzenia (w przypadku, gdy $B \notin \{\varnothing, Z\}$) wynika istnienie ciągłego przedłużenia $\hat{f}\colon Z \to E$, takiego że $\hat{f}(Z) \subset W$. Przypadek, gdy $B \in \{\varnothing, Z\}$, jest trywialny. □

8.16 Definicja.
Niech X będzie przestrzenią topologiczną.

- Przestrzeń X jest *ściągalna* (ang. *contractible*), gdy istnieje punkt*12) $c \in X$ oraz homotopia $H\colon X \times [0,1] \to X$, taka że $H(x,0) = c$ oraz $H(x,1) = x$ dla wszelkich $x \in X$. W powyższej sytuacji mówimy, że przestrzeń X jest ściągalna do punktu c za pomocą homotopii H, którą na potrzeby tego wykładu będziemy nazywać *ściągaczem*.
- Przestrzeń X jest *lokalnie ściągalna w punkcie* $a \in X$, gdy dla dowolnego otoczenia U punktu a istnieje otoczenie $V \subset U$ tego punktu oraz homotopia $H\colon V \times [0,1] \to U$, taka że $H(x,0) = a$ oraz $H(x,1) = x$ dla wszelkich $x \in V$.
- Przestrzeń X jest *lokalnie ściągalna*, gdy jest lokalnie ściągalna w każdym swoim punkcie.

8.17 Twierdzenie.

(a) *ANR jest przestrzenią lokalnie ściągalną.*

(b) *AR jest przestrzenią ściągalną do każdego swego punktu.*

(c) *Przestrzeń lokalnie ściągalna jest lokalnie drogowo spójna, a ściągalna jest drogowo spójna.*

Dowód. (a): Niech X będzie ANR-em, a dowolnym punktem przestrzeni X, a U otwartym otoczeniem punktu a. Zbiór $B \overset{\text{def}}{=} (U \times \{0,1\}) \cup (\{a\} \times [0,1])$ jest domknięty w przestrzeni metryzowalnej $U \times [0,1]$, a funkcja $f\colon B \to U$ dana wzorem

$$f(x,t) = \begin{cases} x & \text{gdy } t = 1 \\ a & \text{gdy } t \neq 1 \end{cases}$$

jest ciągła. Skoro U jest ANR-em (jako podzbiór otwarty ANR-u), istnieje zbiór otwarty $W \supset B$ w $U \times [0,1]$ oraz ciągłe przedłużenie $g\colon W \to U$ funkcji f. Dla dowolnej liczby $t \in [0,1]$ istnieją otwarte otoczenia $D_t \subset U$ punktu a oraz $I_t \subset [0,1]$ liczby t, takie że $D_t \times I_t \subset W$. Ze zwartości odcinka $[0,1]$ wynika istnienie skończonego układu $s_1, \dots, s_p \in [0,1]$, takiego że $[0,1] = \bigcup_{k=1}^p I_{s_k}$. Wtedy zbiór $V \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{k=1}^p D_{s_k}$ jest otwartym otoczeniem punktu a zawartym w U, dla którego $V \times [0,1] \subset W$. (Istotnie, jeśli $(v,t) \in V \times [0,1]$, to $t \in I_{s_k}$ dla pewnego indeksu $k \in \{1, \dots, p\}$ i wtedy $v \in V \subset D_{s_k}$, więc $(v,t) \in D_{s_k} \times I_{s_k} \subset W$). Niech $H\colon V \times [0,1] \to U$ będzie zawężeniem funkcji g. H jest homotopią, taką że $H(x,0) = a$ oraz $H(x,1) = x$ dla wszelkich $x \in V$, czyli przestrzeń X jest lokalnie ściągalna w punkcie a.

(b): Załóżmy teraz, że X jest AR-em. Wiemy, że wtedy $X \neq \varnothing$. Niech c będzie dowolnym punktem przestrzeni X. Zbiór $B \overset{\text{def}}{=} X \times \{0,1\}$ jest domknięty w przestrzeni metryzowalnej $X \times [0,1]$, a funkcja $f\colon B \to X$ dana wzorem

$$f(x,t) = \begin{cases} x & \text{gdy } t = 1 \\ c & \text{gdy } t = 0 \end{cases}$$

jest ciągła, więc z własności AR-ów wynika, że f przedłuża się do funkcji ciągłej $H\colon X \times [0,1] \to X$. Jako że H przedłuża f, jest to ściągacz, czyli przestrzeń X jest ściągalna do punktu c.

*12) W szczególności, przestrzeń ściągalna musi być niepusta!

(c): Niech X będzie przestrzenią lokalnie ściągalną. Ustalmy punkt $a \in X$ oraz jego dowolne otoczenie U. Z definicji lokalnej ściągalności wynika istnienie otoczenia $V \subset U$ punktu a oraz homotopii $H\colon V \times [0,1] \to U$ o stosownych własnościach. Wtedy funkcja $[0,1] \ni t \mapsto H(v,t) \in U$ jest krzywą od a do (dowolnie wybranego punktu) $v \in V$, w całości położoną w U. Tym samym zbiór $S \overset{\text{def}}{=} H(V \times [0,1])$ jest drogowo spójny, zawarty w U i zawiera zbiór V, czyli S jest otoczeniem punktu a — co oznacza, że przestrzeń X jest lokalnie drogowo spójna w punkcie a.

Na koniec, jeśli X jest przestrzenią ściągalną, a $H\colon X \times [0,1] \to X$ jest ściągaczem, to funkcja $[0,1] \ni t \mapsto H(x,t) \in X$ jest krzywą od ustalonego punktu tej przestrzeni do (dowolnie wybranego punktu) $x \in X$ do , czyli X jest przestrzenią drogowo spójną. □

8.18 **Uwaga.**
Własności sformułowane w Tw. 8.17 charakteryzują ANR-y wśród podprzestrzeni przestrzeni euklidesowych. Mianowicie, podprzestrzeń przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jest ANR-em wtedy i tylko wtedy, gdy jest lokalnie ściągalna. Dowód tego twierdzenia jest zbyt skomplikowany, by go tutaj zaprezentować.

8.19 Lemat.
Niech $f\colon B \to X$ będzie funkcją ciągłą określoną na zbiorze domkniętym B w przestrzeni normalnej Z. Jeśli przestrzeń X jest ściągalna, a funkcja f przedłuża się do funkcji ciągłej określonej na zbiorze $U \supset B$ otwartym w Z, to f przedłuża się do funkcji ciągłej $F\colon Z \to X$.

Dowód. Niech $H\colon X \times [0,1] \to X$ będzie ściągaczem, a $c \in X$ takim punktem, że $H(x,0) = c$ dla wszelkich $x \in X$. Niech $g\colon U \to X$ będzie ciągłym przedłużeniem funkcji f. Zbiory B oraz $Z \setminus U$ są domknięte i rozłączne w przestrzeni normalnej Z, więc istnieje zbiór otwarty $V \supset B$ w Z, taki że $\bar{V} \subset U$. Z Lematu Urysohna, istnieje funkcja ciągła $u\colon Z \to [0,1]$, taka że $u|_B \equiv 1$ oraz $u|_{Z\setminus V} \equiv 0$. Niech $F\colon Z \to X$ będzie funkcją daną wzorem

$$F(z) = \begin{cases} H(g(z), u(z)) & \text{gdy } z \in \bar{V} \\ c & \text{gdy } z \in Z \setminus V \end{cases}.$$

Ponieważ F jest zadana przez dwie funkcje ciągłe określone na zbiorach domkniętych, dzięki twierdzeniu o sklejaniu wystarczy sprawdzić, że te dwa wzory są zgodne — by wydedukować ciągłość funkcji F. Jeśli $z \in \bar{V} \setminus V$, to $u(z) = 0$, więc $H(g(z), u(z)) = c$. Zatem F jest funkcją ciągła. Ponadto, dla $x \in B$ mamy $u(x) = 1$, więc $F(x) = H(g(x), u(x)) = g(x) = f(x)$, czyli F przedłuża funkcję f. □

Wiemy już (z Tw. 8.17), że AR-y to ściągalne ANR-y. Okazuje się, że tak właśnie można scharakteryzować AR-y, co pokazuje poniższe

8.20 Twierdzenie.
Przestrzeń topologiczna jest AR-em wtedy i tylko wtedy, gdy jest ściągalnym ANR-em.

Dowód. Wystarczy pokazać, że ściągalny ANR to AR. Niech więc X będzie ściągalnym ANR-em. Rozważmy dowolną przestrzeń metryzowalną Z i funkcję ciągłą $f\colon B \to X$ określoną na zbiorze domkniętym $B \subset Z$. Ponieważ X jest ANR-em, funkcja f przedłuża się do funkcji ciągłej $g\colon U \to X$ określonej na pewnym zbiorze otwartym $U \supset B$ w Z. Jako że przestrzenie metryzowalne są normalne, zastosowanie Lem. 8.19 kończy dowód. □

Omówimy teraz ogólny schemat konstrukcji AR-ów z ANR-ów. W tym celu wprowadźmy następującą

8.21 Definicja.
Niech X będzie przestrzenią topologiczną. *Stożkiem* (topologicznym) nad X nazywamy przestrzeń topologiczną ΔX postaci:

- $\Delta X = (X \times (0,1]) \sqcup \{\omega\}$;
- zbiór $X \times (0,1]$ jest otwarty w ΔX i topologia indukowana na nim to topologia produktowa;
- baza otwartych otoczeń punktu ω składa się ze zbiorów postaci $\Delta_r(X) \overset{\text{def}}{=} (X \times (0,r)) \sqcup \{\omega\}$, gdzie $r \in (0,1]$.

W powyższej sytuacji punkt ω nazywamy *wierzchołkiem* stożka nad X.

8.22 Lemat.
Przestrzeń topologiczna X jest metryzowalna wtedy i tylko wtedy, gdy stożek ΔX jest przestrzenią metryzowalną.

Dowód. Zauważmy, że przestrzeń X jest homeomorficzna z podprzestrzenią $X \times \{1\}$ stożka ΔX. Jeśli więc stożek jest przestrzenią metryzowalną, to X także ma tę własność. Odwrotnie, jeśli topologia przestrzeni X pochodzi od metryki $d \leqslant 1$, możemy ją przedłużyć do metryki na zbiorze $X' \stackrel{\text{def}}{=} X \sqcup \{\omega\}$ wzorem $d(x, \omega) = 1$ dla wszelkich $x \in X$. Z Tw. 8.1 (str. 32) dobieramy izometryczne zanurzenie $J\colon X' \to E$ przestrzeni X' w przestrzeń unormowaną $(E, \|\cdot\|)$. Zastępując J przez $x \mapsto J(x) - J(\omega)$, możemy założyć, że $J(\omega) = 0$. Wtedy zbiór $J(X)$ składa się z wektorów jednostkowych (tzn. o normie 1). Określamy $h\colon \Delta X \to E$ formułami: $h(\omega) = 0$ oraz $h(x,t) = tJ(x)$ dla $(x,t) \in X \times (0,1] \subset \Delta X$. Zauważmy, że funkcja h jest różnowartościowa, gdyż dla $(x,t) \in X \times (0,1]$:

$$\begin{cases} t = \|h(x,t)\| \\ x = J^{-1}(h(x,t)/\|h(x,t)\|) \end{cases} . \tag{8:8}$$

Wystarczy pokazać, że h jest zanurzeniem topologicznym. W tym celu oznaczmy $D \stackrel{\text{def}}{=} h(\Delta X)$ i zauważmy, że zbiór $D \setminus \{0\} = h((\Delta X) \setminus \{\omega\})$ jest otwarty w D. Ponadto, ze wzoru na h oraz z (8:8) wynika, że $h|_{(\Delta X)\setminus\{\omega\}}$ jest homeomorfizmem między $(\Delta X) \setminus \{\omega\}$ a $D \setminus \{0\}$. Aby więc zakończyć dowód, wystarczy sprawdzić, że baza otwartych otoczeń elementu ω w ΔX przechodzi (poprzez h) na pewną bazę otwartych otoczeń zera w D. A tak jest, gdyż $h(\Delta_r(X)) = D \cap B_E(0,r)$ dla $r \in (0,1]$. □

8.23 ***Uwaga.***
Powyższy dowód pokazuje, że jeśli S jest sferą jednostkową w przestrzeni unormowanej, wtedy stożek ΔS jest homeomorficzny z domkniętą kulą jednostkową w tejże przestrzeni unormowanej.

8.24 Przykład.
Niech $\mathfrak{m}$ będzie dowolną liczbą kardynalną większą od 0. Stożek topologiczny nad przestrzenią dyskretną mocy $\mathfrak{m}$ nazywamy *jeżem z* $\mathfrak{m}$ *kolcami* i oznaczamy go przez $J(\mathfrak{m})$. Z Lem. 8.22 wynika, że $J(\mathfrak{m})$ jest przestrzenią metryzowalną. Wkrótce przekonamy się, że jest to AR. Można łatwo sprawdzić, że jest to przestrzeń metryzowalna w sposób zupełny, taka że $w(J(\mathfrak{m})) = \max(\mathfrak{m}, \aleph_0)$, a stąd także $w(J(\mathfrak{m})^\omega) = \max(\mathfrak{m}, \aleph_0)$. Twierdzenie Kowalsky'ego orzeka, że dla $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ przestrzeń $J(\mathfrak{m})^\omega$ jest przestrzenią uniwersalną dla wszystkich przestrzeni metryzowalnych, których ciężar topologiczny nie przekracza $\mathfrak{m}$, tj. każda taka przestrzeń jest homeomorficzna z pewną podprzestrzenią przestrzeni $J(\mathfrak{m})^\omega$. Uwaga 8.29 poniżej zawiera dalszy ciąg tej historii.

8.25 Lemat.
Dla dowolnej przestrzeni topologicznej X stożek ΔX jest przestrzenią ściągalną do swego wierzchołka.

Dowód. Tradycyjnie, oznaczmy wierzchołek przez ω. Niech funkcja $H\colon (\Delta X) \times [0,1] \to \Delta X$ będzie dana wzorami: $H(\omega, 0) = H(\omega, s) = \omega$, $H((x,t), 0) = \omega$ oraz $H((x,t), s) = (x, ts)$ dla wszelkich $x \in X$ oraz $s, t \in (0,1]$. Jedyne, co musimy sprawdzić, to ciągłość funkcji H (bo wtedy będzie ona ściągaczem). Ustalmy punkt $\Omega \in \Delta X$ oraz liczbę $s \in [0,1]$. Są trzy możliwości:

- $\Omega = \omega$: wtedy $H(\Omega, s) = \omega$ oraz $H(\Delta_r(X) \times [0,1]) \subset \Delta_r(X)$ dla wszelkich $r \in (0,1]$;
- $\Omega \in X \times (0,1]$ i $s = 0$: wtedy $H(\Omega, s) = \omega$ oraz $H((X \times (0,1]) \times [0,r)) \subset \Delta_r(X)$ dla wszelkich $r \in (0,1]$;
- $\Omega \in X \times (0,1]$ i $s > 0$: wtedy $D \stackrel{\text{def}}{=} (X \times (0,1]) \times (0,1]$ jest otoczeniem punktu (Ω, s) otwartym w $(\Delta X) \times [0,1]$ oraz $H|_D$ jest funkcją ciągłą (gdyż D ma topologię produktową),

co pokazuje ciągłość funkcji H w punkcie (Ω, s). □

8.26 Twierdzenie.
Dla przestrzeni topologicznej X następujące warunki są równoważne:

(i) *X jest ANR-em;*

(ii) *ΔX jest ANR-em;*

(iii) *ΔX jest AR-em.*

Dowód. Dzięki Lem. 8.22 możemy założyć, że obie przestrzenie X i ΔX są metryzowalne.

Implikacja (iii) $\Longrightarrow$ (ii) jest natychmiastowa. Zauważmy także, że jeśli ΔX jest ANR-em, to także przestrzeń $X \times (0,1]$ jest ANR-em (jako podzbiór otwarty ANR-u), a stąd X jest ANR-em, jako przestrzeń homeomorficzna z retraktem $X \times \{1\}$ produktu $X \times (0,1]$,[*12)] co dowodzi implikacji (ii) $\Longrightarrow$ (i).

(i) $\Longrightarrow$ (iii): Ustalmy funkcję ciągłą $f\colon B \to \Delta X$ określoną na zbiorze domkniętym B w przestrzeni metryzowalnej Z. Zbiór $D \overset{\text{def}}{=} f^{-1}(\{\omega\})$ jest domknięty w Z, jako przeciwobraz zbioru domkniętego poprzez funkcję ciągłą określoną na zbiorze domkniętym. Tym samym zbiór $Z \setminus D$ jest otwarty w Z. Zauważmy, że $B \setminus D = B \cap (Z \setminus D)$ (więc zbiór $B \setminus D$ jest domknięty w $Z \setminus D$) oraz $f(B \setminus D) \subset X \times (0,1]$ ($\subset \Delta X$). Z Wn. 8.15 (str. 38) wynika, że przestrzeń $X \times (0,1]$ jest ANR-em, przeto istnieje zbiór $V \supset B \setminus D$ otwarty w Z oraz ciągłe przedłużenie $f_1\colon V \to X \times (0,1]$ funkcji $f|_{B \setminus D}$. Ponieważ stożek ΔX jest przestrzenią ściągalną (Lem. 8.25), Lem. 8.19 implikuje, że funkcja $f|_{B\setminus D}$ przedłuża się do funkcji ciągłej $g\colon Z \setminus D \to \Delta X$. Zbiór $W \overset{\text{def}}{=} g^{-1}((\Delta X) \setminus \{\omega\})$ jest otwarty w Z (gdyż dziedzina funkcji g jest zbiorem otwartym), więc zbiór $C \overset{\text{def}}{=} Z \setminus W$ jest domknięty. Zauważmy, że

$$B \cap C = D, \tag{8:9}$$

gdyż $W \subset Z \setminus D$ oraz $g(B \setminus D) = f(B \setminus D) \subset (\Delta X) \setminus \{\omega\}$, czyli $B \setminus D \subset W$. Z definicji zbioru C wynika, że $g(Z \setminus C) \subset X \times (0,1]$, możemy więc zapisać $g(z) = (v(z), w(z))$ dla $z \notin C$, gdzie $v\colon Z \setminus C \to X$ oraz $w\colon Z \setminus C \to (0,1]$ to funkcje ciągłe. Niech $u_0\colon B \cup C \to [0,1]$ będzie funkcją daną wzorem:

$$u_0(z) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } z \in C \\ w(z) & \text{gdy } z \notin C \end{cases}.$$

Twierdzimy, że u_0 jest funkcją ciągłą. W tym celu wystarczy sprawdzić, że jeśli punkty $b_n \in B \setminus C$ zbiegają do punktu $c \in C$, to liczby $w(b_n)$ zbiegają do zera. Aby to wykazać, zauważmy, że w powyższej sytuacji $c \in D$ (dzięki (8:9) oraz domkniętości zbioru B) oraz $f(b_n) = g(b_n) = (v(b_n), w(b_n))$, więc z ciągłości funcji f w punkcie c wynika, że $(v(b_n), w(b_n)) \to f(c) = \omega$ $(n \to \infty)$, co z kolei jest możliwe dokładnie wtedy, gdy $\lim_{n\to\infty} w(b_n) = 0$ (bo zbiory $\Delta_r(X)$ tworzą bazę otoczeń punktu ω).

Z Twierdzenia Tietzego powyższa funkcja u_0 przedłuża się do funkcji ciągłej $u\colon Z \to [0,1]$. Określamy funkcję $F\colon Z \to \Delta X$ formułą:

$$F(z) = \begin{cases} \omega & \text{gdy } u(z) = 0 \\ (v(z), u(z)) & \text{gdy } u(z) > 0 \end{cases}$$

(pamiętajmy, że jeśli $u(z) > 0$, to $z \notin C$, czyli z leży w dziedzinie funkcji v). Wprost z definicji funkcji F oraz z otwartości zbioru $u^{-1}((0,1])$ w Z wynika, że funkcja F jest ciągła w każdym punkcie $z \in Z$, takim że $u(z) > 0$. Aby więc wykazać ciągłość funkcji F, wystarczy sprawdzić, że jeśli punkty $z_n \in u^{-1}((0,1])$ zbiegają do punktu $x \in u^{-1}(\{0\})$, to punkty $F(z_n)$ zbiegają w ΔX do ω. A tak jest, gdyż wtedy (z ciągłości funkcji u) $\lim_{n\to\infty} u(z_n) = u(x) = 0$, więc $(v(z_n), u(z_n)) \overset{\Delta X}{\to} \omega$ $(n \to \infty)$. Tym samym funkcja F jest ciągła. Pozostaje sprawdzić, że F przedłuża funkcję f. W tym celu ustalmy $b \in B$. Jeśli $b \in D$, to $b \in C$, więc $u(b) = u_0(b) = 0$, a stąd $F(b) = \omega = f(b)$. A gdy $b \notin D$, to $b \in B \setminus C$ (dzięki (8:9)), więc $u(b) = u_0(b) = w(b) > 0$, czyli $F(b) = (v(b), u(b)) = (v(b), w(b)) = g(b) = f(b)$ (ostatnia równość bierze się stąd, że g przedłuża $f|_{B\setminus D}$). □

Podamy teraz historycznie jedno z pierwszych ważnych zastosowań Lematu Michaela.

8.27 Twierdzenie. (Twierdzenie Hannera)
Jeśli każdy punkt przestrzeni metryzowalnej ma otoczenie, które jest ANR-em, to cała przestrzeń jest ANR-em.

Dowód. Ustalmy przestrzeń metryzowalną X i niech $\mathcal{W}$ będzie rodziną wszystkich podprzestrzeni przestrzeni X, które są ANR-ami. Dzięki Tw. 7.6 (str. 28) wystarczy pokazać, że $\mathcal{W}$ to kolekcja Michaela. Własność (M1) została dowiedziona w punkcie (e) Wn. 8.15 (str. 38).

[*12)] Funkcja $X \times (0,1] \ni (x,t) \mapsto (x,1) \in X \times \{1\}$ jest retrakcją.

(M3): Załóżmy, że zbiory U_s ($s \in S$) są otwarte, parami rozłączne i każdy z nich jest ANR-em. Mamy pokazać, że przestrzeń $M \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{s \in S} U_s$ jest ANR-em. Zauważmy, że dla dowolnego zbioru $F \subset S$ zbiór $\bigcup_{s \in F} U_s$ jest otwarto-domknięty w M. Niech $f\colon B \to M$ będzie funkcją ciągłą określoną na zbiorze domkniętym B w przestrzeni metrycznej (Z, d), przy czym $d \leqslant 1$. Wtedy zbiory $A_s \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}(U_s)$ ($s \in S$) są domknięte w Z (gdyż U_s jest zbiorem domkniętym w M), a taże zbiór $C_s \stackrel{\text{def}}{=} B \setminus A_s$ jest domknięty w Z (bo A_s jest otwarty w B).

Dla niepustego zbioru $D \subset Z$ określamy funkcję $u_D\colon Z \to \mathbb{R}_+$ jako funkcję odległości od zbioru D, czyli $u_D(z) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{dist}_d(z, D)$. Dodatkowo niech $u_\varnothing \equiv 1$. Zauważmy, że jeśli $D \subset E$, to $u_E \leqslant u_D$ (gdyż $d \leqslant 1$). Dla $s \in S$ niech

$$V_s \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in Z\colon\ u_{A_s}(z) < u_{C_s}(z)\}.$$

Ponieważ funkcje u_D są ciągłe, zbiór V_s jest otwarty w Z. Ponadto, jako że zbiór C_s jest domknięty i rozłączny z A_s, zachodzi relacja:

$$A_s \subset V_s. \tag{8:10}$$

Sprawdźmy teraz, że:

$$s, s' \in S,\ s \neq s' \implies V_s \cap V_{s'} = \varnothing. \tag{8:11}$$

Dla dowodu (nie wprost) powyższej implikacji, załóżmy, że $s \neq s'$ oraz $z \in V_s \cap V_{s'}$. Wtedy $A_{s'} \subset C_s$ oraz $A_s \subset C_{s'}$, a stąd $u_{C_s}(z) \leqslant u_{A_{s'}}(z)$ i $u_{C_{s'}}(z) \leqslant u_{A_s}(z)$. Ale także $u_{A_s}(z) < u_{C_s}(z)$ (bo $z \in V_s$) oraz $u_{A_{s'}}(z) < u_{C_{s'}}(z)$ (bo $z \in V_{s'}$), co jest niemożliwe. Tym samym zachodzi (8:11).

Z definicji zbioru A_s wynika, że $f(A_s) \subset U_s$. Ponieważ U_s jest ANR-em, istnieje zbiór $\Omega_s \supset A_s$ otwarty w Z oraz ciągłe przedłużenie $g_s\colon \Omega_s \to U_s$ funkcji $f|_{A_s}$. Niech $W \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{s \in S} (\Omega_s \cap V_s)$. Zauważmy, że W jest zbiorem otwartym w Z, który zawiera zbiór B (gdyż $B = \bigcup_{s \in S} A_s$ oraz $A_s \subset \Omega_s \cap V_s$, dzięki (8:10)). Określamy $F\colon W \to M$ następująco:

$$F|_{\Omega_s \cap V_s} = g_s|_{\Omega_s \cap V_s} \qquad (s \in S).$$

Ponieważ zbiory $\Omega_s \cap V_s$ są otwarte w Z i parami rozłączne (zob. (8:11)), funkcja F jest poprawnie określona i ciągła. Co więcej, przedłuża ona funkcję f, gdyż $A_s \subset \Omega_s \cap V_s$, $B = \bigcup_{s \in S} A_s$ oraz g_s przedłuża $f|_{A_s}$.

(M2): Niech U_1 i U_2 będą zbiorami otwartymi w X, z których każdy jest ANR-em. Nasze zadanie to pokazać, że $M \stackrel{\text{def}}{=} U_1 \cup U_2$ to ANR. Wiemy już, że zbiór $U_0 \stackrel{\text{def}}{=} U_1 \cap U_2$ jest ANR-em (z (M1)). Zanim przystąpimy do sprawdzania warunku przedłużania, przygotujmy się do tego. Zbiory $M \setminus U_1$ oraz $M \setminus U_2$ są domknięte w M i rozłączne, więc z normalności przestrzeni M wynika, że istnieją rozłączne zbiory V_1 i V_2 otwarte w M (więc także w X), takie że $M \setminus U_j \subset V_j$ dla $j = 1, 2$. Niech $F_j \stackrel{\text{def}}{=} M \setminus V_j$ dla $j = 1, 2$. Zbiory F_1 i F_2 są domknięte w M, pokrywają przestrzeń M oraz $F_j \subset U_j$ dla $j = 1, 2$. Wtedy $F_0 \stackrel{\text{def}}{=} F_1 \cap F_2$ jest zbiorem domkniętym w M zawartym w U_0.

Niech $f\colon B \to M$ będzie funkcją ciągłą określoną na zbiorze domkniętym B w przestrzeni metryzowalnej Z. Zbiory $A_j \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}(F_j)$ dla $j = 0, 1, 2$ są domknięte w Z i spełniają warunki: $A_0 = A_1 \cap A_2$, $B = A_1 \cup A_2$ oraz $f(A_j) \subset U_j$ dla $j = 0, 1, 2$. Zbiór $f^{-1}(U_0)$ jest otwarty w B, więc istnieje zbiór W_0 otwarty w Z, taki że $f^{-1}(U_0) = W_0 \cap B$. Wtedy $A_0 \subset W_0$, więc z normalności przestrzeni Z wynika, że istnieje zbiór G_0 otwarty w Z, taki że:

$$A_0 \subset G_0, \qquad \bar{G}_0 \subset W_0.$$

W szczególności, $f(\bar{G}_0 \cap B) \subset U_0$. Ponieważ U_0 jest ANR-em, istnieje zbiór $\Omega_0 \supset \bar{G}_0 \cap B$ otwarty w Z oraz funkcja ciągła $g_0\colon \Omega_0 \to U_0$, która przedłuża $f|_{\bar{G}_0 \cap B}$. Teraz po raz drugi korzystamy z normalności przestrzeni Z: skoro $A_0 \subset G_0 \cap \Omega_0$, istnieje zbiór D_0 otwarty w Z, taki że:

$$A_0 \subset D_0, \qquad \bar{D}_0 \subset G_0 \cap \Omega_0.$$

Zauważmy, że

$$g_0|_{\bar{D}_0 \cap B} = f|_{\bar{D}_0 \cap B} \tag{8:12}$$

(bo $\bar{D}_0 \cap B \subset \bar{G}_0 \cap B$). Ustalmy $j \in \{1, 2\}$. Z (8:12) wynika, że funkcje $g_0|_{\bar{D}_0}$ oraz $f|_{A_j}$ są zgodne. Ponadto, obie mają wartości w U_j. Tak więc z twierdzenia o sklejaniu wynika, że ich zlepienie jest funkcją ciągłą z $\bar{D}_0 \cup A_j$ w U_j. Jako że U_j jest ANR-em, istnieje zbiór $\Omega_j \supset \bar{D}_0 \cup A_j$ otwarty w Z oraz funkcja ciągła $g_j\colon \Omega_j \to U_j$, która przedłuża $g_0|_{\bar{D}_0}$ i $f|_{A_j}$.

Ponieważ $A_1 \cap A_2 = A_0 \subset D_0$ i D_0 jest zbiorem otwartym, zbiory $A_1 \setminus D_0$ i $A_2 \setminus D_0$ są domknięte i rozłączne. Zatem możemy je powiększyć do rozłącznych zbiorów otwartych, odpowiednio, D_1 i D_2. Zauważmy, że wtedy $A_j \subset W_j \stackrel{\text{def}}{=} (D_0 \cup D_j) \cap \Omega_j$ dla $j = 1, 2$ i tym samym $B \subset W_1 \cup W_2$. Odnotujmy także, że $W_1 \cap W_2 \subset D_0$ (bo zbiory D_1 i D_2 są rozłączne) i tym samym funkcje $g_1|_{W_1}$ oraz $g_2|_{W_2}$ są zgodne (dzięki temu, że obie funkcje g_1 i g_2 przedłużają $g_0|_{D_0}$). Tak więc ich zlepienie jest poprawnie określoną funkcją ciągłą $F\colon W_1 \cup W_2 \to M$. Pozostaje sprawdzić, że F przedłuża f, a tak jest, gdyż $g_j|_{W_j}$ przedłuża $f|_{A_j}$ (dla $j = 1, 2$) oraz $B = A_1 \cup A_2$. $\square$

8.28 Wniosek.

(a) *Metryzowalna rozmaitość jest ANR-em.*

(b) *Jeż $J(\mathfrak{m})$ jest AR-em.*

Dowód. (a): Każdy punkt rozmaitości ma otwarte otoczenie homeomorficzne ze zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^n$ (dla pewnej liczby n), a takie zbiory są ANR-ami. Teraz wystarczy zastosować Twierdzenie Hannera.

(b): W przestrzeni dyskretnej każdy punkt tworzy zbiór otwarty, który jest AR-em. W takim razie — z Tw. 8.27 — przestrzenie dyskretne są ANR-ami. Tym samym jeż, czyli stożek nad przestrzenią dyskretną, jest AR-em, dzięki Tw. 8.26. □

8.29 ***Uwaga.***

Głębokie i trudne Twierdzenie Toruńczyka (z lat '80 XX wieku) podaje pełną klasyfikację (z dokładnością do homeomorfizmu) metryzowalnych w sposób zupełny AR-ów X, które są homeomorficzne z X^ω.[*13)] Mianowicie, są to wyłącznie: przestrzeń jednopunktowa, kostka Hilberta oraz dowolna nieskończenie wymiarowa przestrzeń Hilberta. Tym samym niezwartą taką przestrzeń można rozpoznać po ciężarze topologicznym, a wśród zwartych takich przestrzeni jest tylko jedna niezdegenerowana.

Jak już wiemy, przestrzeń $J(\mathfrak{m})$ jest metryzowalnym w sposób zupełny AR-em. W takim razie z Twierdzenia Toruńczyka wynika, że:

- przestrzeń $J(\mathfrak{m})^\omega$ jest homeomorficzna z kostką Hilberta, gdy $0 < \mathfrak{m} < \aleph_0$;
- przestrzeń $J(\mathfrak{m})^\omega$ jest homeomorficzna z przestrzenią Hilberta $\ell_2(\mathfrak{m})$ wymiaru „hilbertowskiego” $\mathfrak{m}$, gdy $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$.

8.30 ***Uwaga.***

O przestrzeni topologicznej X mówi się, że jest *homotopijnie trywialna*, gdy dla dowolnej liczby $n > 0$ każda funkcja ciągła z $\mathbb{S}^{n-1}$ w X przedłuża się do funkcji ciągłej z $\mathbb{B}_n$ w X, gdzie $\mathbb{B}_n$ to euklidesowa kula jednostkowa. Jeśli przestrzeń X jest ANR-em, dowodzi się, że jest ona homotopijnie trywialna wtedy i tylko wtedy, gdy X jest AR-em albo $X = \varnothing$.

Z ww. pojęciem związane jest ważne kryterium Toruńczyka (tj. warunek wystarczający) na to, by przestrzeń metryzowalna była ANR-em:

> *Jeśli przestrzeń metryzowalna X posiada bazę topologii zamkniętą na skończone przecięcia, której każdy element jest przestrzenią homotopijnie trywialną, to X jest ANR-em.*

9 Twierdzenie Arzeli-Ascolego

9.1 Definicja.

Niech X będzie przestrzenią topologiczną, a (Y, d) przestrzenią metryczną. Mówimy, że rodzina $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$ jest:

- *punktowo relatywnie zwarta*, gdy zbiór
$$\mathcal{F}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{f(x)\colon\ f \in \mathcal{F}\}$$
ma zwarte domknięcie w przestrzeni Y;
- *jednakowo ciągła w punkcie $a \in X$*, gdy dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje w X otoczenie U punktu a, takie że $\operatorname{diam}_d f(U) \leqslant \varepsilon$ dla wszelkich $f \in \mathcal{F}$;
- *jednakowo ciągła*, gdy jest jednakowo ciągła w każdym punkcie.

Topologia zbieżności jednostajnej (względem metryki d) na przestrzeni $C(X, Y)$ to topologia wyznaczona przez metrykę $\min(d_{\sup}, 1)$ na $C(X, Y)$.[*14)]

[*13)] W szczególności, za X można podstawić przestrzeń postaci M^ω, gdzie M jest dowolnym metryzowalnym w sposób zupełny AR-em.

9.2 Lemat.
Jeśli X jest zwartą T_2-przestrzenią, a Y przestrzenią metryzowalną, wtedy topologia zbieżności jednostajnej na $C(X,Y)$ nie zależy od wyboru metryki na Y zgodnej z topologią tej przestrzeni.

Dowód. Gdy przestrzeń X jest pusta, przestrzeń $C(X,Y)$ jest jednoelementowa, więc teza lematu zachodzi w sposób trywialny. Poniżej zakładamy, że $X \neq \varnothing$.

Wystarczy pokazać, że jeśli d i ϱ to dwie metryki na Y zgodne z topologią tej przestrzeni, a funkcje $f_n \in C(X,Y)$ $(n \geqslant 0)$ są takie, że

$$\lim_{n\to\infty} d_{\sup}(f_n, f_0) = 0, \tag{9:1}$$

to także $\lim_{n\to\infty} \varrho_{\sup}(f_n, f_0) = 0$. W tym celu oznaczmy $K_n \stackrel{\text{def}}{=} f_n(X)$ $(n \geqslant 0)$ i odnotujmy, że $K_n \in \mathscr{K}(Y)$. Ponadto, $\lim_{n\to\infty} d_H(K_n, K_0) = 0$, gdyż:

- dla $z \in K_n$, $\operatorname{dist}_d(z, K_0) \leqslant d(f_n(x), f_0(x)) \leqslant d_{\sup}(f_n, f_0)$, gdzie punkt $x \in X$ jest tak dobrany, że $f_n(x) = z$;
- analogicznie: dla $w \in K_0$, $\operatorname{dist}_d(z, K_n) \leqslant d(f_0(x), f_n(x)) \leqslant d_{\sup}(f_n, f_0)$, gdzie punkt $x \in X$ jest tak dobrany, że $f_0(x) = w$

(co pokazuje, że $d_H(K_n, K_0) \leqslant d_{\sup}(f_n, f_0)$). Wynika stąd, że zbiór $L \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$ jest zwarty. Istotnie, każdy ciąg $(w_n)_{n=1}^{\infty} \subset L$ ma podciąg leżący w jednym ze zbiorów K_p (dla pewnego indeksu $p \geqslant 0$), który na pewno ma podciąg zbieżny (w L), lub podciąg postaci $(w_{\nu_n})_{n=1}^{\infty}$, taki że $w_{\nu_n} \in K_{\mu_n}$, gdzie $0 < \mu_n < \mu_{n+1}$ dla wszelkich n. W tej drugiej sytuacji dobieramy punkt $z_n \in K_0$ realizujący odległość w_{ν_n} od K_0, czyli spełniający równanie $d(w_{\nu_n}, z_n) = \operatorname{dist}_d(w_{\nu_n}, K_0)$. Korzystając ze zwartości zbioru K_0 i przechodząc do stosownego podciągu, możemy założyć, że ciąg $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do punktu $v \in K_0$ $(\subset L)$. A wtedy $d(w_{\nu_n}, v) \leqslant d(w_{\nu_n}, z_n) + d(z_n, v) \leqslant d_H(K_{\mu_n}, K_0) + d(z_n, v) \to 0$ $(n \to \infty)$, co uzasadnia, że L jest zbiorem zwartym.

Jako że metryki d i ϱ są równoważne, są one jednostajnie równoważne na zbiorze L (dzięki zwartości tego zbioru). Tak więc dla ustalonej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że:

$$\forall x, y \in L\colon\ (d(x,y) \leqslant \delta \implies \varrho(x,y) \leqslant \varepsilon). \tag{9:2}$$

Z (9:1) wynika, że istnieje indeks $N > 0$, taki że $d_{\sup}(f_n, f_0) \leqslant \delta$ dla $n \geqslant N$. Wtedy dla $n \geqslant N$ oraz $p \in X$ mamy: $d(f_n(p), f_0(p)) \leqslant \delta$ oraz $f_n(p), f_0(p) \in L$, a stąd — dzięki (9:2) — $\varrho(f_n(p), f_0(p)) \leqslant \varepsilon$. Z dowolności $p \in X$ wnioskujemy, że $\varrho_{\sup}(f_n, f_0) \leqslant \varepsilon$, co kończy dowód. □

9.3 Twierdzenie. (Klasyczne Twierdzenie Arzeli-Ascolego)
Niech X będzie zwartą T_2-przestrzenią, a (Y,d) przestrzenią metryczną. Dla rodziny $\mathcal{F} \subset C(X,Y)$ następujące warunki są równoważne:

(i) *domknięcie zbioru $\mathcal{F}$ w $C(X,Y)$ w topologii zbieżności jednostajnej jest zbiorem zwartym;*

(ii) *rodzina $\mathcal{F}$ jest punktowo relatywnie zwarta i jednakowo ciągła.*

Dowód. W niniejszym dowodzie przestrzeń $C(X,Y)$ jest rozważana z topologią zbieżności jednostajnej. Oznaczmy przez $\mathcal{D}$ domknięcie zbioru $\mathcal{F}$ w $C(X,Y)$. Możemy założyć (i tak robimy), że zbiory X oraz $\mathcal{F}$ są niepuste.

Najpierw załóżmy, że zbiór $\mathcal{D}$ jest zwarty. Ponieważ funkcja $C(X,Y) \ni u \mapsto u(x) \in Y$ jest ciągła (dla wszelkich $x \in X$), przeto zbiór $\mathcal{D}(x)$ jest zwarty i tym samym (skoro $\mathcal{F}(x) \subset \mathcal{D}(x)$) rodzina $\mathcal{F}$ jest punktowo relatywnie zwarta. Aby wykazać jej jednakową ciągłość, ustalmy punkt $a \in X$ oraz liczbę $\varepsilon > 0$. Dla dowolnej funkcji $g \in \mathcal{D}$ istnieje otwarte (w X) otoczenie U_g punktu a, takie że $g \in V_g \stackrel{\text{def}}{=} \Theta(\overline{U}_g, B_d(g(a), \frac{1}{2}\varepsilon))$, gdzie

$$\Theta(K,W) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in C(X,Y)\colon\ u(K) \subset W\} \qquad (K \subset X,\ W \subset Y).$$

Zauważmy, że:

(⋆) Zbiór $\Theta(K,W)$ jest otwarty w $C(X,Y)$ dla zbioru zwartego $K \subset X$ oraz otwartego $W \subset Y$.

[*14)] Przypomnijmy, że dla $f, g \in C(X,Y)$, $d_{\sup}(f,g) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x\in X} d(f(x), g(x))$, o ile $X \neq \varnothing$, oraz $d_{\sup}(f,g) = 0$, gdy $X = \varnothing$.

Istotnie, $\Theta(K,Y) = C(X,Y) = \Theta(\varnothing, W)$, a dla $K \neq \varnothing$, $W \neq Y$ i $h \in \Theta(K,W)$ zbiór zwarty $h(K)$ jest rozłączny ze zbiorem domkniętym $Y \setminus W$, więc

$$\operatorname{dist}_d(\cdot, Y \setminus W)|_{h(K)} \geqslant \eta$$

dla pewnej stałej dodatniej η mniejszej od 1. Powyższa nierówność implikuje, że

$$\forall q \in h(K)\colon\ B_d(q,\eta) \subset W.$$

Tym samym, jeśli funkcja $u \in C(X,Y)$ spełnia nierówność $d_{\sup}(u,h) < \eta$, to $u \in \Theta(K,W)$, gdyż $u(x) \in B_d(h(x),\eta) \subset W$ dla $x \in K$. To kończy dowód ($\star$).

Z ($\star$) wynika, że rodzina $\{V_g\}_{g\in\mathcal{D}}$ stanowi pokrycie otwarte zbioru zwartego $\mathcal{D}$. Tak więc $\mathcal{D} \subset \bigcup_{g\in S} V_g$ dla pewnego niepustego zbioru skończonego $S \subset \mathcal{D}$. Wtedy zbiór $E \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{g\in S} U_g$ jest otwartym otoczeniem punktu a. Zauważmy, że jeśli $f \in \mathcal{F}$ ($\subset \mathcal{D}$), to $f \in V_g$ dla pewnej funkcji $g \in S$. A wtedy $f(E) \subset f(\overline{U}_g) \subset B_d(g(a), \frac{1}{2}\varepsilon)$ i tym samym $\operatorname{diam}_d f(E) \leqslant \varepsilon$, co pokazuje, że rodzina $\mathcal{F}$ jest jednakowo ciągła.

Teraz załóżmy, że rodzina $\mathcal{F}$ jest jednakowo ciągła i punktowo relatywnie zwarta. Ze zwartości przestrzeni X oraz jednakowej ciągłości rodziny $\mathcal{F}$ wynika, że dla dowolnej liczby całkowitej $n > 0$ istnieje **skończone** pokrycie otwarte $\mathcal{U}_n$ przestrzeni X, takie że

$$\forall B \in \mathcal{U}_n\ \forall f \in \mathcal{F}\colon\ \operatorname{diam}_d f(B) \leqslant \frac{1}{n}. \tag{9:3}$$

(Istotnie, każdy punkt ma otoczenie o obrazach o średnicy nie większej niż $1/n$ i z tych otoczeń można wybrać skończone podpokrycie). Rodzina $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n$ jest co najwyżej przeliczalna, więc wybierając z każdego jej niepustego elementu dowolnie punkt stwierdzamy, że istnieje co najwyżej przeliczalny niepusty zbiór $A \subset X$, który przecina niepusto każdy niepusty zbiór z $\mathcal{U}_n$ (dla dowolnego indeksu n). Przedstawmy zbiór A jako $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ (ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nie musi być różnowartościowy).

Dla uproszczenia, dla dowolnego punktu $x \in X$ oznaczmy przez K_x domknięcie (w Y) zbioru $\mathcal{F}(x)$. Zgodnie z założeniem, zbiory K_x ($x \in X$) są zwarte. Ponadto, $f(x) \in K_x$ dla wszelkich $f \in \mathcal{F}$.

Aby wykazać zwartość zbioru $\mathcal{D}$, rozważmy dowolny ciąg $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ o wyrazach w $\mathcal{D}$. Dla dowolnego indeksu n istnieje funkcja $f_n \in \mathcal{F}$, taka że $d_{\sup}(f_n, g_n) \leqslant 2^{-n}$. Wystarczy pokazać, że ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ma podciąg $(f_{\nu_n})_{n=1}^{\infty}$, taki że $\lim_{n\to\infty} d_{\sup}(f_{\nu_n}, h) = 0$ dla pewnej funkcji $h \in C(X,Y)$, gdyż wtedy $d_{\sup}(g_{\nu_n}, h) \leqslant d_{\sup}(g_{\nu_n}, f_{\nu_n}) + d_{\sup}(f_{\nu_n}, h) \leqslant 2^{-\nu_n} + d_{\sup}(f_{\nu_n}, h) \to 0$ ($n \to \infty$). Obserwacja ta pozwala nam założyć, że $g_n \in \mathcal{F}$, co czynimy poniżej.

Jako że przestrzenie K_{a_n} są metryzowalne i zwarte, takaż jest przestrzeń $L \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{n=1}^{\infty} K_{a_n}$. Zauważmy, że dla dowolnego indeksu $k > 0$ ciąg $b_k \stackrel{\text{def}}{=} (g_k(a_n))_{n=1}^{\infty}$ jest elementem przestrzeni L. W takim razie ciąg $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ ma podciąg zbieżny (w L), do pewnego punktu $c = (c_n)_{n=1}^{\infty} \in L$. Zastępując wyjściowy ciąg $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ przez stosowny podciąg, możemy założyć, że $b_k \xrightarrow{L} c$ ($k \to \infty$). Oznacza to, że $\lim_{k\to\infty} g_k(a_n) = c_n$ dla dowolnego indeksu $n > 0$. Tym samym dla dowolnego punktu $a \in A$ ciąg $(g_k(a))_{k=1}^{\infty}$ ma granicę w Y. Pokażemy teraz, że ciąg $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ jest zbieżny punktowo (do pewnej funkcji $h\colon X \to Y$) na całym zbiorze X. W tym celu ustalmy dowolnie punkt $x \in X$. Jako że ciąg $(g_k(x))_{k=1}^{\infty}$ ma wyrazy w przestrzeni zwartej K_x, wystarczy pokazać, że jest to ciąg Cauchy'ego. Niech więc $\varepsilon > 0$. Niech $N > 0$ będzie taką liczbą całkowitą, że $3/N \leqslant \varepsilon$, a $V \in \mathcal{U}_N$ takim zbiorem, że $x \in V$. Wtedy $A \cap V \neq \varnothing$. Niech $a \in A$ będzie dowolnym elementem tego przecięcia. Ze zbieżności ciągu $(g_k(a))_{k=1}^{\infty}$ wnioskujemy, że istnieje taki indeks $K > 0$, że $d(g_k(a), g_\ell(a)) \leqslant 3/N$ dla wszelkich $k, \ell \geqslant K$. Z (9:3) — skoro $a, x \in V \in \mathcal{U}_N$ — otrzymujemy, że $d(g_n(x), g_n(a)) \leqslant 1/N$ dla wszelkich $n > 0$. W takim razie, dla $k, \ell \geqslant K$:

$$d(g_k(x), g_\ell(x)) \leqslant d(g_k(x), g_k(a)) + d(g_k(a), g_\ell(a)) + d(g_\ell(a), g_\ell(x)) \leqslant 3/N \leqslant \varepsilon,$$

co dowodzi, że ciąg $(g_k(x))_{k=1}^{\infty}$ jest zbieżny.

Określamy $h\colon X \to Y$ wzorem $h(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{k\to\infty} g_k(x)$. Zauważmy, że h jest funkcją ciągłą: jeśli $N > 0$ jest liczbą całkowitą, $b \in X$ punktem, w którym badamy ciągłość, a $V \in \mathcal{U}_N$ otoczeniem punktu b, to dla dowolnego punktu $x \in V$ mamy (dzięki (9:3)) $d(g_k(x), g_k(b)) \leqslant 1/N$, więc po przejściu do granicy (z $k \to \infty$) dostajemy, że $d(h(x), h(b)) \leqslant 1/N$, co (wobec dowolności N) oznacza ciągłość funkcji h w punkcie b. Pozostaje sprawdzić, że $d_{\sup}(g_k, h) \to 0$ ($k \to \infty$). W tym celu, jak poprzednio, ustalmy liczbę całkowitą $N > 0$ i dobierzmy niepusty zbiór **skończony** $C \subset X$, który przecina niepusto każdy niepusty zbiór z rodziny $\mathcal{U}_N$ (pamiętajmy, że jest to pokrycie skończone). Jako że $\lim_{k\to\infty} \sum_{x\in C} d(g_k(x), h(x)) = 0$, istnieje taki indeks $K > 0$, że $d(g_k(x), h(x)) \leqslant 1/N$ dla wszelkich $k \geqslant K$ i $x \in C$. Niech z będzie dowolnym punktem przestrzeni X. Istnieje wtedy zbiór $V \in \mathcal{U}_N$, który zawiera punkt z. W konsekwencji, $C \cap V \neq \varnothing$. Niech $x \in C$ będzie dowolnym punktem tego przecięcia. Wtedy (korzystając kolejny raz z (9:3)) dla $k \geqslant K$ mamy $d(g_k(x), g_k(z)) \leqslant 1/N$ i podobnie $d(h(x), h(z)) \leqslant 1/N$ (bo $x, z \in V$), a stąd $d(g_k(z), h(z)) \leqslant d(g_k(z), g_k(x)) + d(g_k(x), h(x)) + d(h(x), h(z)) \leqslant 3/N$. Tym samym (z dowolności $z \in X$) $d_{\sup}(g_k, h) \leqslant 3/N$ dla $k \geqslant K$, co kończy dowód twierdzenia. □

Rozdział zakończymy uogólnieniem powyższego Twierdzenia Arzeli-Ascoliego na przypadek, gdy dziedzina jest lokalnie zwartą przestrzenią σ-zwartą. Jednakże w przypadku, gdy przestrzeń X jest **niezwartą** T_2-przestrzenią lokalnie zwartą, na zbiorze $C(X,Y)$ rozważa się (jako domyślną/klasyczną/kanoniczną) inną topologię niż zbieżności jednostajnej. Jest to tzw. topologia *zwarto-otwarta*, czyli topologia zbieżności jednostajnej na podzbiorach zwartych. Jej precyzyjna definicja wygląda tak:

9.4 Definicja.
Dla T_2-przestrzeni X i Y topologia *zwarto-otwarta* na zbiorze $C(X,Y)$ to topologia, której bazę stanowią skończone przecięcia zbiorów postaci

$$\Theta(K,W) = \Theta_{C(X,Y)}(K,W) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in C(X,Y)\colon\ u(K) \subset W\},$$

gdzie $K \subset X$ jest zbiorem zwartym, a $W \subset Y$ zbiorem otwartym.

Przypomnijmy, że przestrzeń *σ-zwarta* to T_2-przestrzeń topologiczna, którą można przedstawić jako sumę mnogościową przeliczalnie wielu jej podzbiorów zwartych.

9.5 Lemat.
Niech X i Y będą przestrzeniami Hausdorffa.

(A) *Dla dowolnego zbioru $A \subset X$ funkcja $\Phi\colon C(X,Y) \ni u \mapsto u|_A \in C(A,Y)$ jest ciągła w topologiach zwarto-otwartych.*

(B) *Jeśli przestrzeń X jest zwarta, a przestrzeń Y metryzowalna, to topologia zwarto-otwarta na $C(X,Y)$ pokrywa się z topologią zbieżności jednostajnej.*

(C) *Jeśli przestrzeń X jest lokalnie zwarta i σ-zwarta, a przestrzeń Y jest metryzowalna, to przestrzeń $C(X,Y)$ z topologią zwarto-otwartą jest metryzowalna. Ponadto, istnieje ciąg $K_1, K_2, \ldots$ zbiorów zwartych w X, taki że dla dowolnych funkcji $u_n \in C(X,Y)$ $(n \geqslant 0)$ zachodzi równoważność:*

$$u_n \stackrel{C(X,Y)}{\to} u_0 \ (n \to \infty) \iff \forall m > 0\colon\ u_n|_{K_m} \stackrel{C(K_m,Y)}{\to} u_0|_{K_m} \ (n \to \infty). \tag{9:4}$$

Dowód. Punkt (A) jest natychmiastowy, gdyż dla zbioru zwartego $K \subset A$ oraz zbioru otwartego $W \subset Y$ zachodzi $\Phi^{-1}(\Theta_{C(A,Y)}(K,W)) = \Theta_{C(X,Y)}(K,W)$. Jak zobaczymy później, oba punkty (B) i (C) są konsekwencjami następującej własności (od dowodu której rozpoczniemy):

($\star$) *Jeśli $d \leqslant 1$ jest metryką zgodną z topologią przestrzeni Y, a podzbiory $K_1, K_2, \ldots$ przestrzeni X są zwarte oraz $K_n \subset \operatorname{int} K_{n+1}$ $(n > 0)$ i $X = \bigcup_{n=1}^\infty K_n$, to funkcja $D\colon C(X,Y) \times C(X,Y) \to \mathbb{R}_+$ określona wzorem*

$$D(f,g) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1} \frac{d_{\sup}(f|_{K_n}, g|_{K_n})}{2^n}$$

jest metryką na $C(X,Y)$ zgodną z topologią zwarto-otwartą.

Dowód ($\star$) rozpocznijmy od obserwacji, że szereg definiujący funkcję D jest zawsze zbieżny, gdyż $d \leqslant 1$. Mając to na uwadze, bez większych kłopotów sprawdza się, że D jest metryką (oznaczoność wynika z tego, że zbiory K_n pokrywają przestrzeń X). Aby wykazać, że D jest metryką zgodną z topologią zwarto-otwartą, wystarczy sprawdzić, że:

(CO1) dla dowolnej funkcji $u \in C(X,Y)$ oraz liczby $\varepsilon > 0$ istnieje skończony układ $(L_1,W_1), \ldots, (L_q,W_q)$ $(q > 0)$, w którym zbiory $L_j \subset X$ są zwarte, a zbiory $W_j \subset Y$ są otwarte, $u(L_j) \subset W_j$ oraz $\bigcap_{j=1}^q \Theta(L_j,W_j) \subset B_D(u,\varepsilon)$;

(CO2) dla dowolnej funkcji $u \in C(X,Y)$ oraz zbioru zwartego $L \subset X$ i zbioru otwartego $W \subset Y$, takich że $u(L) \subset W$, istnieje liczba $\varepsilon > 0$, taka że $B_D(u,\varepsilon) \subset \Theta(L,W)$.

Dla dowodu punktu (CO1) najpierw dobierzmy liczbę całkowitą $N > 0$, taką że $2^{-N} < \varepsilon/2$. Następnie zwartość zbioru K_N i ciągłość funkcji u implikują, że istnieje skończenie wiele zbiorów zwartych $L_1, \ldots, L_q$ $(q > 0)$ w X, takich że $K_N = \bigcup_{j=1}^q L_j$ oraz $\operatorname{diam}_d u(L_j) < \varepsilon/4$. Jeśli $L_j = \varnothing$, określamy W_j jako zbiór pusty, a w przeciwnym przypadku ustalamy dowolnie punkt $z_j \in L_j$ i określamy W_j jako $B_d(u(z_j), \varepsilon/4)$. Zauważmy, że (w obu przypadkach) W_j to zbiór otwarty, taki że $\operatorname{diam}_d W_j \leqslant \varepsilon/2$ oraz $u(L_j) \subset W_j$, czyli $u \in \Theta(L_j,W_j)$. Pozostaje sprawdzić, że $\bigcap_{j=1}^q \Theta(L_j,W_j) \subset B_D(u,\varepsilon)$. W tym celu ustalmy dowolną funkcję $g \in \bigcap_{j=1}^q \Theta(L_j,W_j)$. Aby oszacować odległość u od g (względem D), najpierw oszacujmy $d_{\sup}(u|_{K_N}, g|_{K_N})$. Niech więc $x \in K_N$. Wtedy istnieje indeks $j \in \{1,\ldots,q\}$, taki że $x \in L_j$. Ponieważ $u, g \in \Theta(L_j,W_j)$, przeto $u(x), g(x) \in W_j$, a stąd $d(u(x),g(x)) \leqslant \operatorname{diam}_d W_j \leqslant \varepsilon/2$. Tym samym $d_{\sup}(u|_{K_N}, g|_{K_N}) \leqslant \varepsilon/2$, a stąd

$$\begin{aligned} D(u,g) = \sum_{n=1}^N \frac{d_{\sup}(u|_{K_n}, g|_{K_n})}{2^n} + \sum_{n=N+1}^\infty \frac{d_{\sup}(u|_{K_n}, g|_{K_n})}{2^n} &\leqslant \sum_{n=1}^N \frac{d_{\sup}(u|_{K_N}, g|_{K_N})}{2^n} + \sum_{n=N+1}^\infty \frac{1}{2^n} \\ &\leqslant d_{\sup}(u|_{K_N}, g|_{K_N}) + 2^{-N} < \varepsilon, \end{aligned}$$

co kończy dowód punktu (CO1).

Przechodząc do dowodu (CO2), na wstępie zauważmy, że możemy założyć, że zbiór L jest niepusty oraz $W \neq Y$ (gdyż $\Theta(\varnothing, W) = C(X,Y) = \Theta(L,Y)$). Wtedy $u(L)$ to niepusty zbiór zwarty rozłączny z niepustym zbiorem domkniętym $Y \setminus W$, więc istnieje liczba $\varepsilon > 0$, taka że

$$\forall z \in u(L)\colon \ \operatorname{dist}_d(z, Y \setminus W) \geqslant \varepsilon.$$

Innymi słowy:

$$\forall x \in L\colon \ B_d(u(x), \varepsilon) \subset W. \tag{9:5}$$

Dalej, skoro $L \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ i $K_n \subset \operatorname{int} K_{n+1}$, zwartość zbioru L implikuje, że $L \subset K_N$ dla pewnego indeksu $N > 0$. Twierdzimy, że $B_D(u, \varepsilon/2^N) \subset \Theta(L, W)$. Istotnie, jeśli funkcja $g \in C(X,Y)$ spełnia nierówność $D(u,g) < \varepsilon/2^N$, to tym bardziej $d_{\sup}(u|_{K_N}, g|_{K_N}) < \varepsilon$. A stąd dla $x \in L$ mamy $x \in K_N$, więc $d(u(x), g(x)) < \varepsilon$, co oznacza, że $g(x) \in B_d(u(x), \varepsilon)$, czyli $u(x) \in W$ (dzięki (9:5)). Z dowolności $x \in L$ otrzymujemy $g \in \Theta(L, W)$. Kończy to dowód punktu (CO2) i zarazem całej własności $(\star)$.

Teraz już łatwo możemy wykazać punkty (B) i (C) lematu. W obu tych punktach przestrzeń Y jest metryzowalna, więc możemy ustalić na Y dowolną metrykę $d \leqslant 1$ zgodną z topologią tej przestrzeni (zob. Lem. 9.2, str. 45).

(B): Podstawiamy do $(\star)$ $K_n = X$ dla wszelkich $n > 0$. Wtedy $D = d_{\sup}$, a wiemy, że metryka D jest zgodna z topologią zwarto-otwartą. Tak więc ta topologia to topologia zbieżności jednostajnej (względem d). Lem. 9.2 kończy dowód.

(C): Jako że X jest przestrzenią σ-zwartą, możemy ją zapisać w postaci $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$, gdzie zbiory L_n są zwarte. Startując od $K_0 \stackrel{\text{def}}{=} \varnothing$, indukcyjnie skonstruujemy zbiory zwarte $K_1, K_2, \ldots$, takie że $L_n \cup K_{n-1} \subset \operatorname{int} K_n$ dla wszelkich $n > 0$ (tak skonstruowany ciąg $K_1, K_2, \ldots$ spełnia założenia w $(\star)$). Jeśli dla pewnego $n > 0$ zbiór K_{n-1} jest już skonstruowany, dla dowolnego punktu $a \in M \stackrel{\text{def}}{=} L_n \cup K_{n-1}$ dobieramy (powołując się na lokalną zwartość przestrzeni X) jego otwarte otoczenie U_a o domknięciu zwartym. Ze zwartości zbioru M wynika istnienie zbioru skończonego $F \subset M$, takiego że $M \subset \bigcup_{a \in F} U_a$. Wtedy zbiór $K_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{a \in F} \overline{U}_a$ jest zwarty, a jego wnętrze zawiera zbiór $\bigcup_{a \in F} U_a$, więc tym bardziej zbiór M. Tym samym krok indukcyjny konstrukcji został zakończony.

Powyższy akapit pokazuje, że w przestrzeni X możemy znaleźć zbiory $K_1, K_2, \ldots$, tak by wszystkie założenia stwierdzenia $(\star)$ były spełnione. W takim razie funkcja D, określona tamże, jest metryką zgodną z topologią zwarto-otwartą, co dowodzi, że przestrzeń $C(X,Y)$ jest metryzowalna. Co więcej, dla $u_n \in C(X,Y)$ $(n \geqslant 0)$ wiemy, że

$$u_n \stackrel{C(X,Y)}{\to} u_0 \ (n \to \infty) \iff D(u_n, u_0) \stackrel{\mathbb{R}}{\to} 0 \ (n \to \infty).$$

Podobnie, z (B) wiemy, że

$$u_n|_{K_m} \stackrel{C(K_m,Y)}{\to} u_0|_{K_m} \ (n \to \infty) \iff d_{\sup}(u_n|_{K_m}, u_0|_{K_m}) \stackrel{\mathbb{R}}{\to} 0 \ (n \to \infty).$$

Aby więc wykazać (9:4), wystarczy sprawdzić, że

$$\lim_{n\to\infty} D(u_n, u_0) = 0 \iff \forall m > 0\colon \ \lim_{n\to\infty} d_{\sup}(u_n|_{K_m}, u_0|_{K_m}) = 0. \tag{9:6}$$

A powyższa równoważność jest natychmiastową konsekwencją Tw. 2.16 (str. 4) użytego w następującym kontekście:

- $X_n = [0,1]$ z metryką naturalną;
- ciąg $\left(v^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ (którego zbieżność testujemy) elementów przestrzeni $\prod_{m=1}^{\infty} X_m$: $v^{(n)} = (d_{\sup}(u_n|_{K_m}, u_0|_{K_m}))_{m=1}^{\infty}$;
- testowa granica $z = (z_m)_{m=1}^{\infty} \in \prod_{m=1}^{\infty} X_m$ ww. ciągu: $z_m = 0$.

Jeśli przez $\tilde{D}$ oznaczymy metrykę wprowadzoną w zacytowanym twierdzeniu, wtedy $D(u_n, u_0) = \tilde{D}(v^{(n)}, z)$. W takim razie warunek po lewej stronie równoważności (9:6) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $\left(v^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do z w topologii produktowej, co jest równoważne warunkowi po prawej stronie tej równoważności. $\square$

9.6 Twierdzenie. (Uogólnione Twierdzenie Arzeli-Ascolego)
Niech X będzie lokalnie zwartą σ-zwartą T_2-przestrzenią, a (Y,d) przestrzenią metryczną. Dla rodziny $\mathcal{F} \subset C(X,Y)$ następujące warunki są równoważne:

(i) *domknięcie zbioru $\mathcal{F}$ w $C(X,Y)$ w topologii zwarto-otwartej jest zbiorem zwartym;*

(ii) *rodzina $\mathcal{F}$ jest punktowo relatywnie zwarta i jednakowo ciągła.*

Dowód. Z Lem. 9.5 wiemy, że przestrzeń $C(X,Y)$ jest metryzowalna i z tego względu zwartość jej podzbiorów jest równoważna ich ciągowej zwartości. Oznaczmy przez $\mathcal{D}$ domknięcie (w topologii zwarto-otwartej) zbioru $\mathcal{F}$ w $C(X,Y)$.

Najpierw załóżmy, że zbiór $\mathcal{D}$ jest zwarty. Wtedy rodzina $\mathcal{F}$ jest punktowo relatywnie zwarta (zob. dowód Tw. 9.3, str. 45). Aby wykazać jej jednakową ciągłość, ustalmy punkt $a \in X$ oraz liczbę $\varepsilon > 0$ i dobierzmy otwarte otoczenie U punktu a o zwartym domknięciu K. Z Lem. 9.5 wiemy, że funkcja $\Phi\colon C(X,Y) \ni u \mapsto u|_K \in C(K,Y)$ jest ciągła (w topologiach zwarto-otwartych) oraz że topologia zwarto-otwarta na $C(K,Y)$ to topologia zbieżności jednostajnej. W takim razie zbiór $\Phi(\mathcal{D})$ jest zwarty w topologii zbieżności jednostajnej i tym samym (dzięki Tw. 9.3) jest to rodzina jednakowo ciągła w punkcie a. Oznacza to, że istnieje zbiór $V \subset K$, który jest otwarty w K i zawiera punkt a oraz spełnia warunek:

$$\forall f \in \Phi(\mathcal{D})\colon\ \ \operatorname{diam}_d f(V) \leqslant \varepsilon.$$

Wtedy zbiór $W \stackrel{\text{def}}{=} V \cap U$ jest otwartym otoczeniem punktu a, takim że $\operatorname{diam}_d u(W) \leqslant \varepsilon$ dla wszelkich $u \in \mathcal{F}$.

Teraz załóżmy, że rodzina $\mathcal{F}$ jest jednakowo ciągła i punktowo relatywnie zwarta. Podobnie jak w dowodzie Tw. 9.3, aby wykazać zwartość zbioru $\mathcal{D}$, wystarczy pokazać, że każdy ciąg o wyrazach w $\mathcal{F}$ ma podciąg zbieżny w $C(X,Y)$. Ustalmy więc dowolny ciąg $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$. Jak w dowodzie punktu (C) w Lem. 9.5, pokryjmy przestrzeń X zbiorami zwartymi $K_1, K_2, \ldots$, takimi że $K_n \subset \operatorname{int} K_{n+1}$. Z tamtegoż dowodu wynika, że wtedy zachodzi równoważność (9:4). Zauważmy, że dla dowolnego indeksu $n > 0$ rodzina $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}|_{K_n} \stackrel{\text{def}}{=} \{g|_{K_n}\colon\ g \in \mathcal{F}\} \subset C(K_n,Y)$ jest punktowo relatywnie zwarta oraz jednakowo ciągła (gdyż rodzina $\mathcal{F}$ ma obie te własności). Zatem z Tw. 9.3 wynika, że domknięcie $\mathcal{D}_n$ zbioru $\mathcal{F}_n$ w $C(K_n,Y)$ jest zwarte, a stąd także przestrzeń $L \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_n$ jest zwarta (i metryzowalna!). Tym samym ciąg $(v_k)_{k=1}^{\infty}$, gdzie $v_k \stackrel{\text{def}}{=} (u_k|_{K_n})_{n=1}^{\infty} \in L$ $(k > 0)$, ma podciąg zbieżny, powiedzmy $(v_{\nu_k})_{k=1}^{\infty}$. Oznaczmy granicę (w L) tego ciągu przez $w = (w_n)_{n=1}^{\infty}$. Wtedy

$$u_{\nu_k}|_{K_n} \stackrel{C(K_n,Y)}{\to} w_n \ (k \to \infty) \tag{9:7}$$

dla dowolnego indeksu $k > 0$. W szczególności, $w_n(x) = \lim_{k\to\infty} u_{\nu_k}(x)$ dla wszelkich $x \in K_n$. Ponieważ zbiory K_n pokrywają przestrzeń X, ostatnia zbieżność pokazuje, że ciąg funkcyjny $(u_{\nu_k})_{k=1}^{\infty}$ jest zbieżny punktowo. Oznaczmy przez $g\colon X \to Y$ granicę punktową tego ciągu (czyli $g(x) = \lim_{k\to\infty} u_{\nu_k}(x)$). Wtedy $g|_{K_n} = w_n$, więc g jest funkcją ciągła w każdym punkcie wnętrza zbioru K_n. Ale $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{int} K_{n+1}$, co implikuje, że $g \in C(X,Y)$. Na koniec zauważmy, że $g|_{K_n} = w_n$, więc (9:7), w połączeniu z (9:4), daje nam, że $u_{\nu_n} \stackrel{C(X,Y)}{\to} g$ $(n \to \infty)$ i teza. $\square$

Pierwsza (wstępna) część egzaminu

Zagadnienia do sprawdzianu w ramach I części egzaminu (**oprócz wymienionych poniżej haseł obowiązuje umiejętność podawania prostych przykładów związanych z tymi zagadnieniami i pojęciami**):

- (definicje) metryzowalna i metryzowalna w sposób zupełny przestrzeń topologiczna (2.1)
- (definicje) ciężar topologiczny i charakter gęstości; przestrzeń ośrodkowa (2.2)
- (definicje) zbiór typu $\mathscr{G}_\delta$ i $\mathscr{F}_\sigma$ (2.3)
- (definicje) podzbiór dyskretny; (ε-)rozproszona przestrzeń metryczna (2.4)
- (definicje) topologia produktowa; przestrzeń postaci X^ω (2.5)
- (definicja) kostka Hilberta (2.6)
- (definicje) kontinuum; kontinuum peanowskie (2.7)
- (definicje) rodzina wpisana w inną; rodzina drobniejsza od innej; rodzina lokalnie skończona; rodzina dyskretna (2.8)
- (definicja) przestrzeń parazwarta (2.9)
- (definicje) rozkład jedności: ciągły; lokalnie skończony; wpisany w rodzinę (2.10)
- (definicje) oscylacja i zbiór oscylacji (3.1)
- (definicja) odstęp Hausdorffa (4.1)
- (definicje) ścieżka (zbiorów); średnica ścieżki; ścieżka od a do b; ε-ścieżka; ścieżka: półwłaściwa; właściwa; wpisana w inną; wpisana w inną ściśle (5.3)
- (definicje) długość „krzywej"; „krzywa" prostowalna (5.16)
- (definicja) środek metryczny (5.17)
- (definicja) segmentowa zupełność (5.18)
- (definicje) własność Lindelöfa i przestrzeń Lindelöfa (6.3)
- (definicja) metrycznie dyskretna rodzina zbiorów (7.1)
- (definicje) kolekcja Michaela; d-słaba kolekcja Michaela (7.3)
- (definicja) system Dugundjiego (8.2)
- (definicja) przestrzeń lokalnie wypukła (8.4)
- (definicje) retrakcja i retrakt; ANR-y i AR-y (8.12)
- (definicje) przestrzeń: ściągalna; lokalnie ściągalna w punkcie; lokalnie ściągalna (8.16)
- (definicje) stożek topologiczny i jego wierzchołek (8.21)
- (definicja) topologiczny jeż (8.24)
- (definicja) homotopijnie trywialna przestrzeń (8.30)
- (definicje) punktowo relatywnie zwarta oraz jednakowo ciągła w punkcie rodzina funkcji (9.1)
- (wypowiedź) twierdzenie o rozkładzie jedności 2.11)
- (wypowiedź) ogólne twierdzenie o charakterystykach kardynalnych (2.12)
- (wypowiedź) twierdzenie Hausdorffa o zwartości (2.14)
- (wypowiedź) twierdzenie Cantora o przestrzeniach zupełnych (2.15
- (wypowiedź) twierdzenie o metryzowalności produktu (2.16)
- (wypowiedź) twierdzenie o zbiorze zgodności funkcji (2.18)
- (wypowiedź) twierdzenie A.H. Stone'a o parazwartości (7.2)

- (wypowiedź) metryzowalność stożka (8.22)
- (wypowiedź) twierdzenie o oscylacji (3.2)
- (wypowiedź) twierdzenie Aleksandrowa-Hausdorffa (3.5)
- (wypowiedź) twierdzenie Ławrientiewa (3.7)
- (wypowiedź) twierdzenie Hahna (4.3)
- (wypowiedź) twierdzenie o zwartości hiperprzestrzeni (4.4)
- (wypowiedź) twierdzenie Mazurkiewicza-Moore'a (5.1)
- (wypowiedź) twierdzenie Hahna-Mazurkiewicza (5.2)
- (wypowiedź) twierdzenie o diadyczności (5.12)
- (wypowiedź) drogowa a łukowa spójność (5.15)
- (wypowiedź) twierdzenie Hopfa-Rinowa (5.19)
- (wypowiedź) twierdzenie Urysohna o uniwersalności kostki Hilberta (6.2)
- (wypowiedź) twierdzenie Urysohna-Tichonowa o metryzowalności (6.6)
- (wypowiedź) lemat Michaela (7.6)
- (wypowiedź) twierdzenie o lokalnym ciężarze (7.10)
- (wypowiedź) twierdzenie Arensa-Eellsa (8.1)
- (wypowiedź) twierdzenie Dugundjiego o przedłużaniu (8.6)
- (wypowiedź) twierdzenie Klee o przedłużaniu homeomorfizmów (8.9)
- (wypowiedź) twierdzenie o przedłużaniu homeomorfizmów między podzbiorami $\mathbb{R}^n$ (8.10)
- (wypowiedź) twierdzenie Hausdorffa o przedłużaniu metryk (8.11)
- (wypowiedź) podstawowe twierdzenie o ANR-ach (8.14)
- (wypowiedź) własności A(N)Rów (8.15)
- (wypowiedź) ANR-y a ściągalność (8.17)
- (wypowiedź) ANR-y a AR-y (8.20)
- (wypowiedź) stożek nad ANR-em (8.26)
- (wypowiedź) twierdzenie Hannera (8.27)
- (wypowiedź) twierdzenie Arzeli-Ascolego [wersja klasyczna] (9.3)

Druga (główna) część egzaminu

Za zgodą uczestników proponowane udogodnienie w drugiej części egzaminu:

> ***Dla każdej puli pytań (na 4.0 i na 5.0), którą zainteresowana jest osoba egzaminowana, osoba ta opracowuje tylko 10 wybranych przez siebie zagadnień, których listę przedstawia egzaminatorowi na początku drugiej części egzaminu. Pytania losowane są dla niej wyłącznie spośród tych 10 zagadnień.***

Pozostałe zasady pozostają bez żadnych zmian.

Zagadnienia na ocenę dobrą (4.0)

A1 (Sformułowanie i DOWÓD) Twierdzenie Aleksandrowa-Hausdorffa (3.5)

A2 (Sformułowanie i DOWÓD) Twierdzenie o zwartości hiperprzestrzeni (4.4)

A3 (Sformułowanie i DOWÓD) „Małe” krzywe w kontinuach peanowskich (5.11)

A4 (Sformułowanie i DOWÓD) Ciągły obraz kontinuum peanowskiego (5.14)

A5 (Sformułowanie i DOWÓD) Przedłużalność izometrycznych odwzorowań podzbiorów prostej (5.21)

A6 (Sformułowanie i DOWÓD) Krzywe izometryczne a środki metryczne (5.22)

A7 (Sformułowanie i DOWÓD) Parazwartość przestrzeni Lindelöfa (6.5)

A8 (Sformułowanie i DOWÓD) Twierdzenie Urysohna-Tichonowa o metryzowalności (6.6)

A9 (Sformułowanie i DOWÓD) Metryzowalność w sposób zupełny to własność lokalna (7.7)

A10 (Sformułowanie i DOWÓD) Warunek na metryzowalność w sposób zupełny w języku podzbiorów domkniętych (7.8)

A11 (Sformułowanie i DOWÓD) Twierdzenie Arensa-Eellsa (8.1)

A12 (Sformułowanie i DOWÓD) Lemat o systemie Dugundjiego (8.3)

A13 (Sformułowanie i DOWÓD) Twierdzenie Klee o przedłużaniu homeomorfizmów (8.9)

A14 (Sformułowanie i DOWÓD) Twierdzenie Hausdorffa o przedłużaniu metryk (8.11)

A15 (Sformułowanie i DOWÓD) Lemat o przedłużaniu odzworowań w przestrzeni ściągalnej (8.19)

A16 (Sformułowanie i DOWÓD) ANR-y a AR-y (8.20)

A17 (Sformułowanie i DOWÓD) Ściągalność stożka (8.25)

A18 (Sformułowanie i DOWÓD) Uogólnione twierdzenie Arzeli-Ascoliego (9.6)

Zagadnienia na ocenę bardzo dobrą (5.0)

B1 (Sformułowanie i DOWÓD) Twierdzenie o oscylacji (3.2)

B2 (Sformułowanie i DOWÓD) Twierdzenie Ławrientiewa (3.7)

B3 (Sformułowanie i DOWÓD) Twierdzenie Hahna (4.3)

B4 (Sformułowanie i DOWÓD) Twierdzenie Mazurkiewicza-Moore’a (5.1)
Podczas głównej części egzaminu można mieć przy sobie notatkę z definicjami pojęć związanych ze ścieżkami (5.3) oraz wypowiedzi pomocnicznych lematów (5.4, 5.5, 5.6, 5.7, 5.8, 5.9).

B5 (Sformułowanie i DOWÓD) Twierdzenie Hahna-Mazurkiewicza (5.2)

B6 (Sformułowanie i DOWÓD) Twierdzenie o diadyczności (5.12)

B7 (Sformułowanie i DOWÓD) Ciągły obraz zwartej przestrzeni metryzowalnej (5.13)

B8 (Sformułowanie i DOWÓD) Twierdzenie Hopfa-Rinowa (5.19)

B9 (Sformułowanie i DOWÓD) Twierdzenie o zanurzaniu w kostkę Hilberta (6.1)

B10 (Sformułowanie i DOWÓD) Lemat Michaela (7.6)

B11 (Sformułowanie i DOWÓD) Twierdzenie o lokalnym ciężarze (7.10)

B12 (Sformułowanie i DOWÓD) Twierdzenie Dugundjiego o przedłużaniu (8.6)

B13 (Sformułowanie i DOWÓD) Twierdzenie o przedłużaniu homeomorfizmów między podzbiorami $\mathbb{R}^n$ (8.10)

B14 (Sformułowanie i DOWÓD) Podstawowe twierdzenie o ANR-ach (8.14)

B15 (Sformułowanie i DOWÓD) Własności A(N)Rów (8.15)

B16 (Sformułowanie i DOWÓD) ANR-y a ściągalność (8.17)

B17 (Sformułowanie i DOWÓD) Stożek nad ANR-em (8.26)

B18 (Sformułowanie i DOWÓD) Twierdzenie Hannera (8.27)

B19 (Sformułowanie i DOWÓD) Klasyczne twierdzenie Arzeli-Ascoliego (9.3)
