1 Oznaczenia i konwencje

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\quad \mathbb{N}_1 = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\quad \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.
- $\mathcal{P}(X)$ to zbiór potęgowy zbioru X, czyli rodzina wszystkich jego podzbiorów.
- Słowa *funkcja*, *odwzorowanie*, *przekształcenie* uznajemy za synonimy.
- Otoczenia nie muszą być zbiorami otwartymi.
- Przestrzenie (w tym metryczne) nie muszą być niepuste.
- Gdy d jest metryką na zbiorze X i $A \subset X$, piszemy dla uproszczenia (A, d) zamiast $(A, d|_{A\times A})$.
- Podzbiory przestrzeni topologicznej są, co do zasady, przestrzeniami topologicznymi wyposażonymi w topologię indukowaną (chyba że w danym kontekście wyraźnie wskazano topologię na podzbiorze).
- Iloczyny kartezjańskie przestrzeni topologicznych są wyposażone, co do zasady, w topologię produkową (chyba że w danym kontekście wyraźnie wskazano topologię na takim iloczynie).
- Przestrzenie ilorazowe przestrzeni topologicznych są wyposażone, co do zasady, w topologię ilorazową (chyba że w danym kontekście wyraźnie wskazano topologię na zbiorze ilorazowym).
- Jeśli A jest podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^n$ (dla pewnej liczby $n \in \mathbb{N}_1$) i z kontekstu nie wynika, jaka jest topologia lub metryka na A, wtedy zbiór A rozważamy z topologią indukowaną z topologii naturalnej na $\mathbb{R}^n$ oraz z metryką euklidesową.
- Metryka euklidesowa w $\mathbb{R}^n$ to d_e.

2 Elementarz

2.1 Definicja.
Metryką na zbiorze X nazywamy dowolną funkcję $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_+$, taką że dla dowolnych punktów $x, y, z \in X$:

- $d(x, y) = 0 \iff x = y$ [oznaczoność];
- $d(y, x) = d(x, y)$ [symetria];
- $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ [nierówność trójkąta].

Jeśli funkcja d spełnia jedynie dwa ostatnie (z powyższych) warunki oraz znika na przekątnej (tzn. $d(x, x) = 0$ dla wszelkich $x \in X$), funkcję d nazywamy *pseudometryką* na zbiorze X.

Przestrzeń metryczna to para (X, d), gdzie X to zbiór, a d to metryka na zbiorze X. Dla $x, y \in X$ liczbę $d(x, y)$ nazywamy *odległością* punktu x od punktu y (względem metryki d).

Powszechnie stosuje się skrót myślowy i przestrzenią metryczną nazywa się sam zbiór, który jest wyposażony w metrykę.

Podzbiór przestrzeni metrycznej w naturalny sposób staje się również przestrzenią metryczną — bez zmiany wzoru na metrykę.

2.2 Definicja.
Niech d będzie metryką na zbiorze X i niech $a \in X$. *Kulą otwartą* (odp. *domkniętą*) *o środku w punkcie* a *i promieniu* $r > 0$ (*względem metryki* d) nazywamy zbiór:

- kula otwarta:
$$B(a, r) = B_X(a, r) = B_d(a, r) = B_{(X,d)}(a, r) = \{x \in X\colon\ d(a, x) < r\};$$
- kula domknięta:
$$\bar{B}(a, r) = \bar{B}_X(a, r) = \bar{B}_d(a, r) = \bar{B}_{(X,d)}(a, r) = \{x \in X\colon\ d(a, x) \leqslant r\}.$$

Inne oznaczenia (nie będziemy ich używać): $K(a, r)$ i $\bar{K}(a, r)$.

Notacja kul z symbolami w indeksie dolnym przydaje się zwłaszcza w przypadku, gdy na jednym zbiorze rozważamy kilka metryk lub gdy wyznaczamy kulę w podzbiorze, np.: gdy (X, d) to przestrzeń metryczna, a $a \in A \subset X$, możemy wtedy rozważać zarówno $B_A(a, r)$, jak i $B_X(a, r)$. Oczywiście $B_A(a, r) = B_X(a, r) \cap A$.

2.3 Obserwacja.
Poniżej a i b oznaczają punkty przestrzeni metrycznej (X, d), a r i s to liczby dodatnie.

- $B(a, r) \subset \bar{B}(a, r)$;
- $r \leqslant s \implies B(a, r) \subset B(a, s),\ \bar{B}(a, r) \subset \bar{B}(a, s)$;
- $r < s \implies \bar{B}(a, r) \subset B(a, s)$;
- $r + s \leqslant d(a, b) \implies B(a, r) \cap \bar{B}(b, s) = \varnothing$;
- $r + s < d(a, b) \implies \bar{B}(a, r) \cap \bar{B}(b, s) = \varnothing$;
- $r + d(a, b) \leqslant s \implies B(a, r) \subset B(b, s),\ \bar{B}(a, r) \subset \bar{B}(b, s)$;
- $r + d(a, b) < s \implies \bar{B}(a, r) \subset B(b, s)$.

Dowód. Mniej oczywiste własności wynikają z nierówności trójkąta. □

2.4 Definicja.
Zbiór otwarty w przestrzeni metrycznej (X, d) to dowolny podzbiór U przestrzeni X o następującej własności:

$$\forall x \in U\ \exists r > 0\colon\ B(x, r) \subset U.$$

Rodzinę wszystkich zbiorów otwartych w przestrzeni (X, d) oznaczamy przez $\operatorname{top}(X, d)$, $\operatorname{top}(X)$ (lub $\operatorname{top} X$) lub $\mathscr{G}(X)$.

2.5 ***Uwaga.***
Zbiór $U \subset X$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy: $\quad \forall x \in U\ \exists r > 0\colon\ \bar{B}(a, r) \subset U$.

2.6 Obserwacja.
Niech $\tau = \operatorname{top}(X, d)$. Wtedy:

(Top1) $\varnothing, X \in \tau$;

(Top2) $U_s \in \tau\ (s \in S) \implies \bigcup_{s \in S} U_s \in \tau \qquad [S$ — dowolny zbiór indeksów$]$;

(Top3) $U, V \in \tau \implies U \cap V \in \tau$.

Dowód. Własność (Top1) wynika wprost z definicji zbioru otwartego (możemy podstawić dowolny promień do kuli).

Dla dowodu (Top2), weźmy dowolny punkt a ze zbioru $W \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{s \in S} U_s$. Wtedy istnieje indeks $t \in S$, taki że $a \in U_t$. Ale U_t to zbiór otwarty, więc istnieje liczba $r > 0$, taka że $B(a, r) \subset U_t$. Wtedy tym bardziej $B(a, r) \subset W$ (bo $U_t \subset W$), więc zbiór W jest otwarty.

Na koniec przechodzimy do (Top3). Dla dowolnego punktu $b \in U \cap V$ możemy znaleźć liczby dodatnie r i s, takie że $B(b, r) \subset U$ oraz $B(b, s) \subset V$. Wtedy dla $p \overset{\text{def}}{=} \min(r, s)$ mamy $B(b, p) \subset B(b, r) \cap B(b, s) \subset U \cap V$, co dowodzi, że przecięcie dwóch zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym. □

2.7 Definicja.
Topologią na zbiorze X nazywamy dowolną rodzinę τ jego podzbiorów, która spełnia warunki (Top1)–(Top3). W tej sytuacji parę (X, τ) (lub skrótowo: zbiór X) nazywamy *przestrzenią topologiczną*. Elementy topologii τ

nazywamy zbiorami *otwartymi* w X. Rodzinę wszystkich zbiorów otwartych w przestrzeni topologicznej oznacza się także przez $\operatorname{top}(X)$ (lub $\operatorname{top} X$) lub $\mathscr{G}(X)$.

Topologią wyznaczoną przez metrykę d na zbiorze X (lub: *topologią przestrzeni metrycznej* (X, d)) nazywamy rodzinę $\operatorname{top}(X, d)$.

Przestrzeń topologiczną (X, τ) nazywamy *metryzowalną*, gdy istnieje metryka d na X, taka że

$$\operatorname{top}(X, d) = \tau.$$

Każdą metrykę d spełniającą powyższą równość nazywamy *zgodną z topologią* przestrzeni X (lub *z topologią* τ).

2.8 Przykład.
Niech X będzie zbiorem. Funkcję $\delta_X : X \times X \to \mathbb{R}_+$ określoną wzorem:

$$\delta_X(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } a = b \\ 1 & \text{gdy } a \neq b \end{cases}$$

nazywamy *metryką dyskretną* na zbiorze X. Zauważmy, że $B_{\delta_X}(a, 1) = \{a\}$ oraz $\bar{B}_{\delta_X}(a, 1) = X$ dla dowolnego punktu $a \in X$. Wynika stąd, że $\operatorname{top}(X, \delta_X) = \mathcal{P}(X)$. Rodzinę $\mathcal{P}(X)$ nazywamy *topologią dyskretną* na zbiorze X.

Innym przykładem z gatunku „trywialnych” topologii na zbiorze jest tzw. topologia *banalna* na X, która zawiera tylko dwa zbiory: $\varnothing$ oraz X.

Pojęcie dualne do zbioru otwartego to zbiór domknięty.

2.9 Definicja.
Zbiór domknięty w przestrzeni topologicznej to podzbiór tej przestrzeni, którego dopełnienie jest otwarte:

$$F \subset X \text{ jest domknięty} \iff X \setminus F \in \operatorname{top}(X).$$

Rodzinę wszystkich zbiorów domkniętych w przestrzeni topologicznej X oznaczamy przez $\mathscr{F}(X)$ lub $\sigma(X)$.

Warunek równoważny domkniętości podzbioru przestrzeni metrycznej, który lepiej oddaje intuicję słowa „domknięty”, poznamy później, w Tw. 3.3 (str. 11).

2.10 Obserwacja.
Niech X będzie przestrzenią topologiczną oraz $\Delta = \mathscr{F}(X)$.

(σ1) $\varnothing, X \in \Delta$;

(σ2) $F_s \in \Delta$ $(s \in S \neq \varnothing) \implies \bigcap_{s\in S} F_s \in \Delta$ [S — dowolny niepusty zbiór indeksów];

(σ3) $A, B \in \Delta \implies A \cup B \in \Delta$.

Dowód. Wszystkie własności wynikają natychmiast z praw de Morgana i własności (Top1)–(Top3) zbiorów otwartych. □

Przyjęte przez nas nazewnictwo byłoby niefortunne, gdyby kula otwarta nie była zbiorem otwartym lub kula domknięta nie była zbiorem domkniętym. O tym, że nazewnictwo jest uzasadnione, świadczy poniższa

2.11 Obserwacja.
W przestrzeni metrycznej kule otwarte są zbiorami otwartymi, a kule domknięte zbiorami domkniętymi.

Dowód. Aby uzasadnić otwartość kuli otwartej, wystarczy zauważyć, że $B(x,s) \subset B(a,r)$ dla $x \in B(a,r)$ i $s \overset{\text{def}}{=} r - d(a,x) > 0$.

Podobnie, by uzasadnić, że kula domknięta jest zbiorem domkniętym, wystarczy zauważyć, że $B(x,s) \subset X \setminus \bar{B}(a,r)$ dla $x \in X \setminus \bar{B}(a,r)$ i $s \overset{\text{def}}{=} d(a,x) - r$.

Obie powyższe inkluzje wynikają z Obs. 2.3 (str. 2). □

Własności (Top1)–(Top3) zbiorów otwartych oraz własności zbiorów domkniętych sformułowane w Obs. 2.10 pozwalają na zdefiniowane ważnych w topologii operacji na dowolnych podzbiorach przestrzeni topologicznej.

2.12 Definicja.
Niech (X,τ) będzie przestrzenią topologiczną, a B jej podzbiorem.

- *Wnętrze* zbioru B (w przestrzeni topologicznej X) to zbiór:
$$\mathring{B} = \operatorname{int}(B) = \operatorname{int} B = \operatorname{int}_X(B) = \operatorname{int}_\tau(B) = \operatorname{int}_{(X,\tau)}(B) \overset{\text{def}}{=} \bigcup\{U\colon\ U \subset B,\ U \text{ otwarty w } X\}.$$
- *Domknięcie* zbioru B (w przestrzeni topologicznej X) to zbiór:
$$\bar{B} = \operatorname{cl}(B) = \operatorname{cl} B = \operatorname{cl}_X(B) = \operatorname{cl}_\tau(B) = \operatorname{cl}_{(X,\tau)}(B) \overset{\text{def}}{=} \bigcap\{F\colon\ B \subset F,\ F \text{ domknięty w } X\}\ (\ni X).$$
- *Brzeg* zbioru B (w przestrzeni topologicznej X) to zbiór:
$$\partial B = \partial(B) = \partial_X B = \partial_\tau B = \partial_{(X,\tau)} B = \operatorname{Fr}(B) = \operatorname{bd}(B) \overset{\text{def}}{=} \bar{B} \setminus \operatorname{int}(B).$$

Otoczenie punktu $a \in X$ to dowolny zbiór $A \subset X$, taki że $a \in \operatorname{int}(A)$. *Otoczenie* w przestrzeni X to dowolny zbiór o niepustym wnętrzu.

2.13 Obserwacja.
Dla dowolnego podzbioru A przestrzeni topologicznej X:

(a) *wnętrze zbioru A jest zbiorem otwartym;* $\operatorname{int}(A)$ *to największy zbiór otwarty zawarty w A;*

(b) *domknięcie zbioru A jest zbiorem domkniętym; $\bar{A}$ to najmniejszy zbiór domknięty obejmujący A;*

(c) *brzeg zbioru A jest zbiorem domkniętym;*

(d) *A jest zbiorem otwartym (odp. domkniętym) wtedy i tylko wtedy, gdy* $A = \operatorname{int}(A)$ *(odp.* $A = \operatorname{cl}(A)$*);*

(e) *dla dowolnego punktu $a \in X$:*

- $a \in \operatorname{int}(A) \iff \exists U$ *otoczenie punktu a:* $U \subset A$*;*
- $a \in \bar{A} \iff \forall U$ *otoczenie punktu a:* $U \cap A \neq \varnothing$*;*
- $a \in \partial(A) \iff \forall U$ *otoczenie punktu a:* $U \cap A \neq \varnothing \neq U \cap (X \setminus A)$*;*

(f) $\operatorname{int}(A) \subset A \subset \bar{A}$*;*

(g) $\bar{A} = \operatorname{int}(A) \cup \partial(A) = A \cup \partial(A)$, $\operatorname{int}(A) \cap \partial(A) = \varnothing$ *oraz* $\operatorname{int}(A) = A \setminus \partial(A)$*;*

(h) *dla dowolnego zbioru $B \subset A$:* $\operatorname{int}(B) \subset \operatorname{int}(A)$ *oraz* $\bar{B} \subset \bar{A}$.

Dowód. Punkt (a) wynika z własności (Top1), a (b) z (σ2). Z kolei (c) bierze się stąd, że $\partial(A) = \bar{A} \cap (X \setminus \operatorname{int}(A))$ oraz że dopełnienie zbioru otwartego jest zbiorem domkniętym. Punkty (d), (f), (g) i (h) wynikają łatwo z (a) i (b).

Przechodzimy do punktu (e). Przy dowodzeniu implikacji „ $\Longrightarrow$ ” w warunku na przynależność do wnętrza, wystarczy podstawić $U = \operatorname{int}(A)$, natomiast przeciwna implikacja wynika z (h): jeśli $U \subset A$, to $\operatorname{int}(U) \subset \operatorname{int}(A)$ (oraz $a \in \operatorname{int}(U)$). Aby udowodnić warunek na przynależność do domknięcia, wystarczy uzasadnić równoważność zaprzeczeń:
$$a \notin \bar{A} \iff \exists U \text{otoczenie punktu } a\colon\ U \cap A = \varnothing.$$

Aby wykazać powyższe zdanie, najpierw zauważmy, że jeśli $a \notin \bar{A}$, to zbiór $U \stackrel{\text{def}}{=} X \setminus \bar{A}$ jest otoczeniem punktu a rozłącznym ze zbiorem A. Odwrotnie, jeśli U jest otoczeniem punktu a rozłącznym ze zbiorem A, to $A \subset F \stackrel{\text{def}}{=} X \setminus \operatorname{int}(U)$, F jest zbiorem domkniętym i nie zawiera a. Stąd $\bar{A} \subset F$ (z (b)) i dlatego $a \notin \bar{A}$.

Na koniec zauważmy, że:

$$a \in \partial(A) \iff a \in \bar{A} \wedge a \notin \operatorname{int}(A).$$

Aby więc otrzymać warunek równoważny przynależności punktu do brzegu zbioru A, wystarczy połączyć koniunkcją warunek na przynależność do domknięcia oraz zaprzeczenie warunku przynależności do wnętrza, co można ująć w formie sformułowanej w ostatnim warunku punktu (e). □

2.14 Twierdzenie.
Dla dowolnego podzbioru A przestrzeni topologicznej X:

(i) $\operatorname{int}(X \setminus A) = X \setminus \bar{A}$;

(ii) $\overline{X \setminus A} = X \setminus \operatorname{int}(A)$;

(iii) $\partial(X \setminus A) = \partial(A)$.

Dowód. Dla dowodu (i), oznaczmy $U \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{int}(X \setminus A)$ oraz $F = \bar{A}$. Wtedy U jest zbiorem otwartym, a F domkniętym. Ponadto $U \cap A = \varnothing$, więc $A \subset X \setminus U$, a stąd $F \subset X \setminus U$, bo $X \setminus U$ to zbiór domknięty. Przechodząc do dopełnień w tej ostatniej inkluzji, otrzymujemy $U \subset X \setminus F$. Dalej, $X \setminus F \subset X \setminus A$ (bo $A \subset F$), a więc $X \setminus F \subset U$, bo zbiór $X \setminus F$ jest otwarty. Ta inkluzja w połączeniu z poprzednią daje tezę z (i).

Punkt (ii) moglibyśmy wyprowadzić podobnymi metodami do tych zaprezentowanych powyżej, ale w istocie punkt (ii) od razu wynika z tezy punktu (i). Istotnie, jeśli do (i) zamiast litery A wstawimy literę B, otrzymamy poprawny wzór: $\operatorname{int}(X \setminus B) = X \setminus \bar{B}$. Jeśli teraz za B podstawimy zbiór $X \setminus A$, ostatnia równość zamieni się w: $\operatorname{int}(A) = X \setminus \overline{X \setminus A}$. Teraz wystarczy przejść do dopełnień zbiorów, by otrzymać tezę z (ii).

Na koniec jednym ruchem wykażmy (iii), stosując (ii):

$$\partial(A) = \bar{A} \cap (X \setminus \operatorname{int}(A)) = \bar{A} \cap \overline{X \setminus A} = \partial(X \setminus A).$$

□

2.15 Twierdzenie.
Dla dowolnych dwóch zbiorów A i B w przestrzeni topologicznej:

(i) $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B)$ *oraz* $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$;

(ii) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ *oraz* $\operatorname{int}(A \cup B) \supset \operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B)$.

Dowód. Wykażemy (i). Z inkluzji $A \cap B \subset A$ oraz $A \cap B \subset B$ wynika, że $\operatorname{int}(A \cap B) \subset \operatorname{int}(A)$, $\operatorname{int}(A \cap B) \subset \operatorname{int}(B)$, $\overline{A \cap B} \subset \bar{A}$ i $\overline{A \cap B} \subset \bar{B}$, a stąd $\operatorname{int}(A \cap B) \subset \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B)$ oraz $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$. Aby zakończyć dowód, zauważmy, że $\operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B) \subset A \cap B$, a zatem $\operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B) \subset \operatorname{int}(A \cap B)$.

Ponieważ dowód (ii) można wykazać bezpośrednio w sposób podobny do powyższego dowodu (i) lub stosując przejście do dopełnień oraz wzory z (i), wykazanie (ii) pozostawiamy jako (obowiązkowe) ćwiczenie. □

2.16 Definicja.
Normą na rzeczywistej przestrzeni wektorowej W nazywamy dowolną funkcję $p\colon W \to \mathbb{R}_+$ spełniającą następujące trzy warunki (w których $x, y \in W$ oraz $t \in \mathbb{R}$):

- $p(x) = 0 \iff x = 0$ [oznaczoność];
- $p(tx) = |t|p(x)$ [jednorodność];
- $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$ [nierówność trójkąta].

Klasyczna i powszechnie przyjęta notacja: $\|x\|$ zamiast $p(x)$.

Jeśli p jest normą na przestrzeni wektorowej W, funkcja $d_p\colon W \times W \ni (x, y) \mapsto p(x - y) \in \mathbb{R}_+$ jest metryką zwaną *metryką indukowaną przez normę p*. *Topologia normy* na W (wyznaczona przez normę p) to $\operatorname{top}(W, d_p)$.

2.17 Definicja.
Na przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^n$ (gdzie $n \in \mathbb{N}_1$) określamy trzy klasyczne normy (poniżej $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$):

- norma *euklidesowa* (tzw. norma ℓ_2):
$$\|x\|_e = \|x\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2};$$
- norma *sumy* (tzw. norma ℓ_1):
$$\|x\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{n} |x_j|;$$
- norma *maksimum* (lub *supremum*, tzw. norma ℓ_∞):
$$\|x\|_\infty = \|x\|_{\sup} = \|x\|_{\max} \stackrel{\text{def}}{=} \max(|x_1|, \dots, |x_n|).$$

Metrykom wyznaczonym przez te normy nadajemy analogiczne nazwy: metryka *euklidesowa* (lub ***naturalna***) d_e, metryka *sumy* d_Σ (lub metryka *manhattańska*, *taksówkowa*); metryka *maksimum* $d_{\max}$.

Topologia ***naturalna*** na $\mathbb{R}^n$ (lub topologia *euklidesowa*) to $\operatorname{top}(\mathbb{R}^n, d_e)$.

2.18 Obserwacja.
Normy sumy i maksimum to rzeczywiście normy.

Dowód. Ćwiczenie. □

2.19 Twierdzenie.
Norma euklidesowa to rzeczywiście norma.

Dowód. Na potrzeby dowodu wprowadźmy tzw. *standardowy iloczyn skalarny* w $\mathbb{R}^n$:
$$\langle x, y \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{n} x_j y_j,$$
gdzie $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Zauważmy, że:

(is1) funkcja $\langle \cdot, y \rangle$ jest liniowa dla dowolnego wektora y;

(is2) $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle$;

(is3) $\langle x, x \rangle > 0$ dla dowolnego wektora $x \neq 0$.

Na podstawie powyższych własności wyprowadzimy teraz tzw. nierówność Schwarza (Schwarza-Cauchy'ego-Buniakowskiego-…?):

$$\langle x, y \rangle^2 \leqslant \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle. \tag{2:1}$$

Ustalmy więc dowolnie wektory x i y. Możemy przy tym założyć, że $y \neq 0$ (bo $\langle x, 0 \rangle = 0$). Z (is3) wynika, że:
$$\forall t \in \mathbb{R}\colon\ \langle x + ty, x + ty \rangle \geqslant 0$$
oraz $\langle y, y \rangle > 0$. Ale — korzystając z (is1) oraz (is2) — $\langle x + ty, x + ty \rangle = t^2 \langle y, y \rangle + 2t \langle x, y \rangle + \langle x, x \rangle$. Zatem:
$$\forall t \in \mathbb{R}\colon\ \langle y, y \rangle t^2 + 2 \langle x, y \rangle t + \langle x, x \rangle \geqslant 0.$$

Aby powyższa nierówność kwadratowa (z niewiadomą t) mogła zachodzić dla wszelkich $t \in \mathbb{R}$, wyróżnik musi być niedodatni. Ale nierówność „$\Delta \leqslant 0$" jest łatwo przekształcalna do (2:1).

Teraz bez trudu sprawdzimy, że $\|\cdot\|_2$ to norma. Oznaczoność i jednorodność są natychmiastowe. Pozostaje więc nierówność trójkąta. Podnosząc obie strony tej nierówności do kwadratu, otrzymujemy równoważny warunek:

$$\langle x+y, x+y\rangle \leqslant \langle x, x\rangle + 2\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle} + \langle y, y\rangle.$$

Lewa strona powyższej nierówności (dzięki własnościom (is1) i (is2)) to $\langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$, więc wystarczy, że $\langle x, y\rangle \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}$, a to wynika z (2:1). □

2.20 ***Uwaga.***
Można udowodnić, że dla dowolnej liczby $p \in (1, \infty)$ funkcja

$$\mathbb{R}^n \ni (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \|x\|_p \stackrel{\text{def}}{=} \Big(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\Big)^{1/p} \in \mathbb{R}_+$$

jest normą na $\mathbb{R}^n$. Dowód jest znacznie trudniejszy niż zaprezentowany powyżej dla $p = 2$ i pomijamy go. W tym wykładzie oprócz $\|\cdot\|_2$ nie będziemy używać żadnej z powyższych norm.

2.21 Definicja.
Dwie metryki d i ϱ na zbiorze X są:

- *równoważne*, gdy wyznaczają te same topologie, tzn. gdy $\operatorname{top}(X, d) = \operatorname{top}(X, \varrho)$;
- *porównywalne*, gdy istnieją stałe (liczbowe) dodatnie m i c, takie że $d \leqslant m\varrho$ oraz $\varrho \leqslant cd$.

Dwie normy na tej samej przestrzeni wektorowej są *równoważne* (odp. *porównywalne*), gdy takież są wyznaczone przez nie metryki.

2.22 Obserwacja.
Metryki porównywalne są równoważne.

Dowód. Niech d i ϱ będą metrykami na zbiorze X, takimi że $d \leqslant m\varrho$ dla pewnej stałej liczbowej $m > 0$. Wystarczy pokazać, że wtedy $\operatorname{top}(X, d) \subset \operatorname{top}(X, \varrho)$. Z definicji zbioru otwartego w przestrzeni metrycznej (oraz z otwartości kul otwartych) wynika, że inkluzja ta zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall x \in X\ \forall r > 0\ \exists s > 0\colon\ B_\varrho(x, s) \subset B_d(x, r).$$

Z nierówności $d \leqslant m\varrho$ wynika, że możemy podstawić w powyższym warunku $s = \frac{r}{m}$. □

2.23 Przykład.
Metryki $\delta_{\mathbb{Z}}$ oraz naturalna (tzn. euklidesowa) są równoważne na $\mathbb{Z}$, ale nie są porównywalne (bo pierwsza z nich jest ograniczona, a druga nie).

2.24 Twierdzenie.
Normy są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy są porównywalne.

Dowód. Z Obs. 2.22 wynika, że normy porównywalne są równoważne. Pokażemy, że jest również odwrotnie. Niech więc $\|\cdot\|_a$ oraz $\|\cdot\|_b$ będą normami równoważnymi na rzeczywistej przestrzeni wektorowej W. Z symetrii założeń wystarczy pokazać, że

$$\|x\|_a \leqslant c\|x\|_b \tag{2:2}$$

dla pewnej stałej $c > 0$ i wszelkich $x \in W$. Ponieważ kula $B_{\|\cdot\|_a}(0,1)$ jest otwarta względem $\|\cdot\|_a$, istnieje liczba $R > 0$, taka że

$$B_{\|\cdot\|_b}(0,R) \subset B_{\|\cdot\|_a}(0,1). \tag{2:3}$$

Sprawdźmy, że (2:2) zachodzi (np.) dla $c \overset{\text{def}}{=} \frac{2}{R}$. Niech więc $x \in W$. Dla $x = 0$ nierówność (2:2) jest oczywista. Załóżmy więc, że $x \neq 0$ i niech $z \overset{\text{def}}{=} \frac{Rx}{2\|x\|_b}$. Wtedy $\|z\|_b = \frac{R}{2} < R$, więc z (2:3) wnosimy, że $\|z\|_a < 1$, czyli $\|x\|_a < c\|x\|_b$ i koniec dowodu. □

2.25 Obserwacja.
Normy euklidesowa, sumy i maksimum są równoważne w $\mathbb{R}^n$.

Dowód. Bez trudu stwierdzamy, że $\|x\|_{\max} \leqslant \|x\|_e \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\|x\|_{\max}$ (drugą nierówność wyprowadzamy przez podniesienie obu stron do kwadratu). □

2.26 Przykład.
Jak pokazuje powyższa obserwacja, trzy klasyczne metryki w $\mathbb{R}^n$ (tj. euklidesowa, sumy i maksimum) wyznaczają topologię naturalną tej przestrzeni. Poniżej podajemy przykłady dwóch innych metryk na płaszczyźnie, popularnych w podręcznikach z topologii. Warto pamiętać, że obie te (poniższe) metryki zadają sztuczny świat na płaszczyźnie, gdyż żadna z tych metryk nie jest równoważna metryce euklidesowej. Z tego względu można sobie pozwolić na stwierdzenie, że płaszczyzna nie jest właściwym zbiorem podkładowym do modelowania tych dwóch ciekawych światów metrycznych.

- **Metryka węzła kolejowego**. Wyobraźmy sobie ubogą sieć kolejową posiadającą tylko jeden węzeł kolejowy (u nas będzie to punkt $(0,0)$). W takiej sieci podróż koleją odbywa się albo w linii prostej, albo z przesiadką w tym węźle. Innymi słowy: tory to proste na płaszczyźnie przechodzące przez początek układu współrzędnych. Gdybyśmy chcieli zmierzyć długość trasy, jaką musimy pokonać z punktu A do B, nietrudno przekonać się, że wzór zależałby od tego, czy punkty A, B i $W = (0,0)$ są współliniowe, czy nie. Konkretnie, oznaczając tę długość przez $d_W(A,B)$, otrzymujemy tzw. metrykę *węzła kolejowego* określoną następująco:

$$d_W(A,B) = \begin{cases} d_e(A,B) & \text{gdy punkty } A,\ B \text{ i } W \text{ są współliniowe} \\ d_e(A,W) + d_e(W,B) & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}.$$

- **Metryka rzeki**. Tym razem wyobraźmy sobie, że żyjemy w świecie, w którym zasadniczo możemy poruszać się tylko w kierunku pionowym, a jedynym obszarem, w którym możliwy jest ruch poziomy, to pozioma rzeka — u nas będzie to oś X. Jeśli więc chcielibyśmy przemieścić się między punktami, które nie są położone w jednym pionie (tzn. nie leżą na tym samym „południku”), musielibyśmy najpierw dojść do rzeki, potem przepłynąć nią we właściwym kierunku do punktu, który leży w tym samym pasie pionowym, co punkt docelowy, i dopiero stamtąd dotrzeć do celu. Jak poprzednio, długość trasy, jaką pokonamy, zadaje metrykę na płaszczyźnie, zwaną metryką *rzeki* (lub *biblioteczną*). Zadaje ją następujący wzór:

$$d_R((x_A,y_A),(x_B,y_B)) = \begin{cases} |y_A - y_B| & \text{gdy } x_A = x_B \\ |y_A| + |x_A - x_B| + |y_B| & \text{gdy } x_A \neq x_B \end{cases}.$$

Czytelnikom zainteresowanym tym tematem pozostawiamy sprawdzenie, że obie powyższe funkcje to rzeczywiście metryki, oraz wyznaczenie kul w tych metrykach.

2.27 Przykład.
W teorii przestrzeni metrycznych niezwykle przydatną techniką jest operacja zmiany metryki na inną (równoważną) przez nałożenie na wyjściową metrykę pewnej funkcji jednej zmiennej rzeczywistej. Dowodzi się bez najmniejszych kłopotów, że jeśli funkcja $\omega\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ ma następujące własności:

(ω1) $\omega(t) = 0 \iff t = 0$;

(ω2) $0 \leqslant s \leqslant t \implies \omega(s) \leqslant \omega(t)$;

($\omega 3$) $\omega(s+t) \leqslant \omega(s) + \omega(t)$;

($\omega 4$) $\lim_{t\to 0^+} \omega(t) = 0$,

to dla dowolnej metryki d (określonej na dowolnym zbiorze) funkcja $\omega \circ d$ również jest metryką, i to (jednostajnie) równoważną metryce d. Interesującym jest także, że każda funkcja o własnościach ($\omega 1$)–($\omega 4$) jest automatycznie jednostajnie ciągła. Funkcje takie często nazywa się *modułami ciągłości.*

Przykładami modułów ciągłości są:

- $\omega(x) = \min(x, 1)$;
- $\omega(x) = \frac{x}{x+1}$;
- $\omega(x) = x^p$, gdzie $p \in (0, 1]$ (ale nie $p > 1$ [!]);
- ogólniej: każda nieujemna niezerowa funkcja wklęsła na $\mathbb{R}_+$, która jest ciągła w zerze i znika w zerze;
- jeszcze ogólniej: każda funkcja $\omega\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ spełniająca ($\omega 1$), ($\omega 2$), ($\omega 4$) i taka, że funkcja $(0, \infty) \ni t \mapsto \frac{\omega(t)}{t} \in (0, \infty)$ jest słabo malejąca.

Dowody powyższych faktów pozostawiamy zainteresowanym czytelnikom.

Każdy podzbiór przestrzeni metrycznej (X, d) w naturalny sposób (*indukowany* z przestrzeni X) staje się przestrzenią metryczną — poprzez zawężenie metryki. Tym samym każdy taki podzbiór ma swoją własną topologię (wyznaczoną przez metrykę całej przestrzeni). Chcielibyśmy umieć w naturalny sposób określać topologie na podzbiorach przestrzeni topologicznej, wyznaczone przez topologię (całej) tej przestrzeni. W tym celu scharakteryzujmy zbiory otwarte w podzbiorach przestrzeni metrycznej:

2.28 Obserwacja.
Niech A będzie podzbiorem przestrzeni metrycznej (X, d). Wtedy:

$$\operatorname{top}(A, d) = \{U \cap A\colon\ U \in \operatorname{top}(X, d)\}.$$

Dowód. Niech najpierw $U \in \operatorname{top}(X, d)$. Dla dowolnego punktu $a \in U \cap A$ istnieje liczba $r > 0$, taka że $B_X(a, r) \subset U$. Wtedy $B_A(a, r) = B_X(a, r) \cap A \subset U \cap A$, czyli zbiór $U \cap A$ jest otwarty w (A, d).

Odwrotnie, załóżmy, że $V \subset A$ jest zbiorem otwartym w (A, d). Wtedy dla dowolnego punktu $v \in V$ istnieje liczba $r_v > 0$, taka że $B_A(v, r_v) \subset V$. Wtedy zbiór $U \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{v\in V} B_X(v, r_v)$ jest otwarty w (X, d) oraz $U \cap A = V$, bo $V = \bigcup_{v\in V} B_A(v, r_v)$. □

2.29 Definicja.
Topologią *indukowaną* na podzbiorze A przestrzeni topologicznej (X, τ) nazywamy rodzinę:

$$\tau|_A \overset{\text{def}}{=} \{U \cap A\colon\ U \in \tau\}.$$

Innymi słowy, w topologii indukowanej: $\operatorname{top}(A) = \operatorname{top}(X)|_A$. Bez trudu sprawdza się, że $\tau|_A$ rzeczywiście jest topologią na zbiorze A.

2.30 Obserwacja.
Dla $A \subset X$, $\mathscr{F}(A) = \{F \cap A\colon\ F \in \mathscr{F}(X)\}$.

Dowód. Ćwiczenie. □

2.31 Twierdzenie.
Dla podzbiorów A i B przestrzeni topologicznej X, takich że $A \subset B$, zachodzi wzór:

$$\mathrm{cl}_B(A) = \mathrm{cl}_X(A) \cap B. \tag{2:4}$$

Dowód. Z Obs. 2.30 wynika, że zbiór $\mathrm{cl}_X(A) \cap B$ jest domknięty w B i tym samym $\mathrm{cl}_B(A) \subset \mathrm{cl}_X(A) \cap B$. Aby wykazać przeciwną inkluzję, ustalmy dowolny punkt $z \in \mathrm{cl}_X(A) \cap B$. Wtedy oczywiście $z \in B$, więc $z \in \mathrm{cl}_B(A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall V \text{otoczenie punktu } z \text{ w } B\colon\ V \cap A \neq \varnothing$$

(por. punkt (e) Obs. 2.13 (str. 4)). Niech zatem V będzie dowolnym otoczeniem punktu z w B. Wtedy istnieje zbiór U otwarty w X, taki że $\mathrm{int}_B(V) = U \cap B$. Stąd U jest otoczeniem punktu z w X. Skoro z należy do $\mathrm{cl}_X(A)$, wnosimy że $U \cap A \neq \varnothing$. A zatem $V \cap A \supset \mathrm{int}_B(V) \cap A = U \cap B \cap A = U \cap A \neq \varnothing$, co kończy dowód. □

Między wnętrzem w topologii indukowanej a wnętrzem w całej przestrzeni nie ma „naturalnego” związku — podobnego do (2:4). Ewentualne rozważania na ten temat pozostawiamy czytelnikom.

2.32 Definicja.
Mówimy, że podzbiór A przestrzeni topologicznej X jest:

- *gęsty*, gdy $\bar{A} = X$;
- *brzegowy*, gdy $\mathrm{int}(A) = \varnothing$;
- *nigdziegęsty*, gdy $\mathrm{int}(\bar{A}) = \varnothing$.

2.33 Przykład.
Jak wynika z Tw. 2.14 (str. 5), pojęcia zbioru gęstego i brzegowego (podobnie jak otwartego i domkniętego) są wzajemnie dualne do siebie, tzn. podzbiór przestrzeni topologicznej jest jednego rodzaju (spośród ww.) wtedy i tylko wtedy, gdy jego dopełnienie (w całej przestrzeni) jest drugiego rodzaju. Nietrudno się przekonać, że — przy tym rozumieniu słowa „dualne” — własnością dualną do bycia zbiorem nigdziegęstym jest zawieranie gęstego zbioru otwartego. Jednakże ani ta własność, ani zbiory o tej własności, nie mają powszechnie przyjętej nazwy.

Przyjęta terminologia „zbiór brzegowy” może nam się słusznie kojarzyć z brzegami zbiorów. Z tego względu warto pamiętać, że brzeg zbioru na ogół nie jest zbiorem brzegowym (!). Jednym z najprostszych przykładów o tym świadczących jest zbiór liczb wymiernych w $\mathbb{R}$: $\partial_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. Zbiory $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (jako podzbiory $\mathbb{R}$) świadczą o tym, że zarówno suma mnogościowa dwóch zbiorów brzegowych nie musi być zbiorem brzegowym, jak i przecięcie dwóch zbiorów gęstych nie musi być zbiorem gęstym.

2.34 Obserwacja.
Niech $A \subset B \subset X$, gdzie X to przestrzeń topologiczna.

(a) *Jeśli zbiór A jest otwarty w B, a zbiór B jest otwarty w X, to zbiór A jest otwarty w X.*

(b) *Jeśli zbiór A jest domknięty w B, a zbiór B jest domknięty w X, to zbiór A jest domknięty w X.*

(c) *Jeśli zbiór A jest gęsty w B, a zbiór B jest gęsty w X, to zbiór A jest gęsty w X.*

(d) $\mathrm{int}_X(A) \subset \mathrm{int}_B(A)$.

(e) *Jeśli A jest brzegowy lub nigdziegęsty w B, to jest takiż w X.*

(f) *Suma dwóch zbiorów nigdziegęstych jest zbiorem nigdziegęstym.*

Dowód. Ćwiczenie. □

3 Ciągi uogólnione

Zanim wprowadzimy tytułowe pojęcie tej części, najpierw zajmiemy się „zwykłymi” ciągami w przestrzeniach metrycznych.

3.1 Definicja.
Mówimy, że ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ o wyrazach w przestrzeni metrycznej (X, d) *jest zbieżny* (lub *zbiega*) do elementu $g \in X$, gdy:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k > 0\ \forall n \geqslant k\colon\ d(x_n, g) \leqslant \varepsilon.$$

W powyższej sytuacji punkt g nazywamy *granicą* ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ (względem metryki d lub: w przestrzeni X).
Notacja: $x_n \to g$ $(n \to \infty)$; $x_n \xrightarrow{X} g$ $(n \to \infty)$; $x_n \xrightarrow{d} g$ $(n \to \infty)$; $x_n \xrightarrow{(X,d)} g$ $(n \to \infty)$; lub $\lim_{n\to\infty} x_n = g$.
Zauważmy, że $\lim_{n\to\infty} x_n = g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n\to\infty} d(x_n, g) = 0$, gdzie ostatnia granica rozumiana jest w sensie analizy matematycznej.

Powyższy warunek (definiujący zbieżność) nie ma szans na uogólnienie na przestrzenie niemetryczne, jako że w sposób ewidentny używa metryki. Dlatego interesuje nas warunek równoważny zbieżności, który będzie można łatwo zaadaptować także do przestrzeni niemetryzowalnych.

3.2 Obserwacja.
Dla ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ w przestrzeni metrycznej (X, d) oraz elementu $g \in X$ następujące warunki są równoważne:

(i) $x_n \to g$ $(n \to \infty)$;

(ii) $\forall U$ *otoczenie punktu* g $\exists k > 0\ \forall n \geqslant k\colon\ x_n \in U$.

Dowód. Równoważność obu warunków łatwo wynika stąd, że:

- $B_d(g, \varepsilon)$ jest otoczeniem punktu g dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$; oraz
- dla dowolnego otoczenia U punktu g istnieje liczba $\varepsilon > 0$, taka że $B_d(g, \varepsilon) \subset U$.

□

W przestrzeniach metryzowalnych (a także w pewnych niemetryzowalnych przestrzeniach topologicznych — ale nie wszystkich!) ciągi zbieżne przydają się do opisu domknięcia zbioru, jak to pokazuje poniższe

3.3 Twierdzenie.
Niech A będzie podzbiorem przestrzeni metryzowalnej X. Wtedy dla $b \in X$:

$$b \in \bar{A} \iff \exists\, (a_n)_{n=1}^{\infty} \subset A\colon\ a_n \to b\ (n \to \infty).$$

W szczególności, zbiór A jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera granice wszystkich swoich ciągów zbieżnych w X.

Dowód. Ustalmy metrykę d zgodną z topologią przestrzeni X.
Najpierw załóżmy, że $b \in \bar{A}$. Wtedy z punktu (e) Obs. 2.13 (str. 4) wynika, że dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}_1$ istnieje punkt $a_n \in A$, taki że $a_n \in B_d(b, 2^{-n})$. Wtedy $a_n \to b$ $(n \to \infty)$, gdyż $\lim_{n\to\infty} d(a_n, b) < 2^{-n}$.
Odwrotnie, załóżmy, że mamy pewien ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$, który zbiega do b. Wtedy w dowolnym otoczeniu U punktu b leży nieskończenie wiele wyrazów ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ (dzięki Obs. 3.2), zatem $A \cap U \neq \varnothing$. Tym samym (z punktu (e) Obs. 2.13 (str. 4)) $b \in \bar{A}$. □

3.4 Przykład.
Warunek (ii) z Obs. 3.2 służy jako definicja zbieżności ciągu w dowolnej przestrzeni topologicznej. (My lada moment — w Def. 3.8 (str. 13) — zdefiniujemy w analogiczny sposób zbieżność dla tzw. ciągów *uogólnionych*,

które obejmują także „zwykłe” ciągi). Poniżej podajemy przykład świadczący o tym, że warunek charakteryzujący zbiory domknięte podany w Tw. 3.3 nie jest prawdziwy w pełnej ogólności w przestrzeniach topologicznych.

Niech X będzie zbiorem nieprzeliczalnym. Wyposażmy zbiór X w tzw. topologię *dopełnień przeliczalnych*, uznając za zbiory otwarte zbiór pusty oraz wszystkie zbiory $A \subset X$, takie że $\operatorname{card}(X \setminus A) \leqslant \aleph_0$. Nietrudno się przekonać, że w tej przestrzeni:

- $a \in \overline{X \setminus \{a\}}$ dla dowolnego punktu $a \in X$;
- „zwykłe” ciągi zbieżne są od pewnego momentu stałe;
- każdy „zwykły” ciąg ma co najwyżej jedną granicę.

W szczególności, jeśli zbiór $A \subset X$ nie jest domknięty oraz ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$ zbiega do $a \in X$, to $a \in A$.

Zbiory zamknięte na branie granic swoich „zwykłych” ciągów zbieżnych nazywamy *ciągowo domkniętymi.*

Własność sformułowana w Tw. 3.3 jest jedną z wielu, które mają charakter ciągowy i przysługują wszystkim przestrzeniom metryzowalnym, ale nie wszystkim topologicznym. Próba „załatania” tej „ciągowej” przepaści (między przestrzeniami metryzowalnymi a topologicznymi) doprowadziła do powstania nowego (niezwykle użytecznego w topologii) pojęcia ciągu *uogólnionego* (lub ciągu *Moore'a-Smitha* — aczkolwiek w tym skrypcie nie będziemy używać tej nazwy). Dwie zasadnicze różnice między tym pojęciem a pojęciem „zwykłego” ciągu, to:

- dziedziną ciągu uogólnionego może być zbiór dowolnie dużej mocy, a jego elementy nie muszą być między sobą porównywalne;
- sposób, w jaki definiuje się podciąg uogólniony: dziedzina podciągu może być np. zbiorem rozłącznym z dziedziną ciągu; ponadto podciąg uogólniony „zwykłego” ciągu na ogół nie jest „zwykłym” ciągiem.

Precyzyjne definicje podajemy poniżej.

3.5 Definicja.
Zbiorem *skierowanym* (lub dokładniej: *skierowanym w górę*) nazywamy dowolną parę $(\Sigma, \leqslant)$, taką że Σ jest **niepustym** zbiorem, a „$\leqslant$” jest relacją *półporządku* na Σ (tzn. dwuargumentową relacją w zbiorze Σ, która jest zwrotna i przechodnia), taką że:

(dir) $$\forall \sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma\ \exists \sigma_0 \in \Sigma \colon\ \sigma_1 \leqslant \sigma_0 \wedge \sigma_2 \leqslant \sigma_0.$$

Warunek (dir) nazywa się warunkiem *skierowania.*

Ciąg uogólniony w zbiorze X to dowolna funkcja określona na (jakimkolwiek) zbiorze skierowanym o wartościach w X. Zamiast $f\colon \Sigma \to X$, będziemy pisać $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma} \subset X$ (gdzie $x_\sigma = f(\sigma)$).

3.6 Przykład.
Rodzina wszystkich otoczeń ustalonego punktu w przestrzeni topologicznej, wyposażona w relację obejmowania (czyli relację „$\supset$” odwrotną do inkluzji), jest zbiorem skierowanym. Jest ona często wykorzystywana jako zbiór indeksów w konstrukcji ciągów uogólnionych zbieżnych do danego punktu.

3.7 Definicja.
Mówimy, że funkcja $\lambda\colon \Sigma \to \Delta$ między zbiorami skierowanymi $(\Sigma, \leqslant_\Sigma)$ i $(\Delta, \leqslant_\Delta)$ jest *współkońcowa*, gdy spełnia warunek:

(∞) $$\forall \delta \in \Delta\ \exists \tau \in \Sigma\ \forall \sigma \in \Sigma \colon\ (\sigma \geqslant_\Sigma \tau \implies \lambda(\sigma) \geqslant_\Delta \delta).$$

(Powyższy warunek można łatwo zapamiętać, stosując sugestywną, ale nieformalną notację: $\lim_{\sigma\to\infty} \lambda(\sigma) = \infty$). Warto zapamiętać, że funkcja współkońcowa nie musi być monotoniczna (i w wielu zastosowaniach ciągów uogólnionych taka nie jest).

Podciąg uogólniony ciągu uogólnionego $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ to dowolny ciąg uogólniony $(z_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, dla którego istnieje funkcja współkońcowa $\varphi\colon \Lambda \to \Sigma$, taka że:

$$\forall \lambda \in \Lambda \colon\ z_\lambda = x_{\varphi(\lambda)}.$$

Innymi słowy: podciąg uogólniony danego ciągu uogólnionego powstaje przez podstawienie do indeksu funkcji współkońcowej. Pamiętajmy także, że „zwykły” podciąg „zwykłego” ciągu jest jego podciągiem uogólnionym.

Inne nazewnictwo (którego nie będziemy stosować): podciąg *subtelniejszy* = podciąg uogólniony.

Jak nietrudno się przekonać, złożenie dwóch funkcji współkońcowych (między zbiorami skierowanymi) również jest funkcją współkońcową. Wynika stąd, że podciąg uogólniony podciągu uogólnionego pewnego ciągu uogólnionego jest również podciągiem uogólnionym tego ciągu.

W topologii kluczową własnością przysługującą ciągom uogólnionym jest zbieżność.

3.8 Definicja.
Mówimy, że ciąg uogólniony $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ w przestrzeni topologicznej (X,τ) *jest zbieżny* (lub: *zbiega*) do punktu $g \in X$, gdy:

$$\forall U \text{otoczenie punktu } g\ \exists \xi \in \Sigma\ \forall \sigma \geqslant \xi\colon\ x_\sigma \in U.$$

Notacja: $x_\sigma \to g$ $(\sigma \in \Sigma)$; $x_\sigma \xrightarrow{X} g$ $(\sigma \in \Sigma)$; $x_\sigma \xrightarrow{\tau} g$ $(\sigma \in \Sigma)$; $x_\sigma \xrightarrow{(X,\tau)} g$ $(\sigma \in \Sigma)$; lub $\lim_{\sigma\in\Sigma} x_\sigma = g$ — ale ta ostatnia notacja dozwolona jest jedynie w sytuacji, gdy ciąg uogólniony ma dokładnie jedną granicę.

3.9 ***Uwaga****.*
W żadnej z powyższych definicji nie żąda się, by zbiór skierowany nie miał elementu największego. Tym samym funkcje określone (np.) na zbiorze częściowo uporządkowanym posiadającym element największy są pełnoprawnymi ciągami uogólnionymi. Jak nietrudno się przekonać, wszystkie one są zbieżne (np. do wyrazu o największym indeksie). Mimo że nie są one wykluczone w definicji ciągu uogólnionego, śmiało możemy je postrzegać jako „urwane” lub patologiczne.

3.10 Przykład.
Niech X będzie zbiorem nieprzeliczalnym wyposażonym w topologię dopełnień przeliczalnych (zob. Prz. 3.4, str. 11). Niech Σ będzie rodziną wszystkich co najwyżej przeliczalnych podzbiorów zbioru X. Zbiór Σ z relacją inkluzji „$\subset$” jest zbiorem skierowanym. Dla dowolnego zbioru $\sigma \in \Sigma$ niech x_σ będzie dowolnym elementem zbioru $X \setminus \sigma$. Otrzymujemy w ten sposób ciąg uogólniony $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ w przestrzeni X. Ciąg ten jest zbieżny do każdego elementu przestrzeni X (mimo iż w tej przestrzeni zwykłe ciągi mają co najwyżej jedną granicę!). Istotnie, jeśli U jest otoczeniem jakiegokolwiek punktu $g \in X$, to zbiór $\xi \stackrel{\text{def}}{=} X \setminus U$ jest co najwyżej przeliczalny, czyli $\xi \in \Sigma$. Jeśli teraz element $\sigma \in \Sigma$ spełnia warunek $\sigma \geqslant \xi$, czyli $\xi \subset \sigma$, to $x_\sigma \in X \setminus \sigma \subset X \setminus \xi = U$ — i teza.

W dalszym ciągu wykładu poznamy warunek charakteryzujący przestrzenie topologiczne, w których każdy ciąg uogólniony ma co najwyżej jedną granicę — zob. Tw. 6.5 (str. 24).

Ustalimy teraz podstawowe własności związane ze zbieżnością ciągów uogólnionych.

3.11 Obserwacja.
Niech $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ będzie ciągiem uogólnionym w przestrzeni topologicznej X i niech $a \in X$.

(a) *Jeśli zbiór $A \subset X$ zawiera wszystkie wyrazy ciągu uogólnionego $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ oraz punkt a, to:*

$$x_\sigma \xrightarrow{X} a\ (\sigma \in \Sigma) \iff x_\sigma \xrightarrow{A} a\ (\sigma \in \Sigma).$$

(b) *Jeśli $x_\sigma \to a$ $(\sigma \in \Sigma)$, to każdy podciąg uogólniony ciągu $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ także zbiega do a.*

(c) *Ciąg uogólniony $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ zbiega do a wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego podciąg uogólniony ma podciąg uogólniony zbieżny do a.*

Dowód. Własność (a) wynika wprost z definicji topologii indukowanej, natomiast (b) łatwo wyprowadza się z warunków definiujących zbieżność oraz funkcję współkońcową (do otoczenia U dobiera się σ_0, a następnie do σ_0 dobiera się λ_0).

Zauważmy, że z (b) wynika implikacja „ $\Longrightarrow$ ” z (c). Poniżej wykażemy jedyną nietrywialną część tej obserwacji: czyli implikację „ $\Longleftarrow$ ” w (c). Wykażemy ją nie wprost.

Załóżmy więc, że każdy podciąg uogólniony ciągu uogólnionego $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ ma podciąg uogólniony zbieżny do a, ale sam ten ciąg nie zbiega do a. Ostatnia z ww. własności oznacza, że istnieje otoczenie V punktu a o następującej własności:

$$\forall \sigma_1 \in \Sigma\ \exists \sigma_2 \geqslant \sigma_1 :\ x_{\sigma_2} \notin V. \tag{3:1}$$

Niech J będzie zbiorem wszystkich takich $\sigma \in \Sigma$, że $x_\sigma \notin V$. Twierdzimy, że zbiór J (z relacją półporządku indukowaną z relacji na Σ) jest skierowany. Istotnie, niepustość J wynika z (3:1) oraz niepustości Σ. Ponadto, jeśli $\sigma_1, \sigma_2 \in J$, to istnieje indeks $\sigma_3 \in \Sigma$, taki że $\sigma_3 \geqslant \sigma_1$ i $\sigma_3 \geqslant \sigma_2$. Na podstawie warunku (3:1) możemy dobrać indeks $\sigma_0 \in J$, taki że $\sigma_3 \leqslant \sigma_0$. Wtedy oczywiście $\sigma_1 \leqslant \sigma_0$ oraz $\sigma_2 \leqslant \sigma_0$, czyli spełniony jest warunek skierowania.

Dalej, zauważmy, że warunek (3:1) oznacza dokładnie tyle, że funkcja identycznościowa z J w Σ jest współkońcowa. Tym samym $(x_\sigma)_{\sigma\in J}$ jest podciągiem uogólnionym. Z założenia w (c) wynika zatem, że ma on podciąg uogólniony $(x_{\nu(\lambda)})_{\lambda\in\Lambda}$ zbieżny do a. Ale $\nu(\lambda) \in J$, więc $x_{\nu(\lambda)} \notin V$ dla żadnego indeksu $\lambda \in \Lambda$, co przeczy zbieżności do a tegoż podciągu. □

Za pomocą ciągów uogólnionych możemy „uogólnić” Tw. 3.3 (str. 11):

3.12 Twierdzenie.
Punkt a należy do domknięcia zbioru A w przestrzeni topologicznej X wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg uogólniony o wyrazach w A zbieżny do a.

W szczególności, zbiór jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera wszystkie granice swoich wszystkich ciągów uogólnionych zbieżnych w X.

Dowód. Oczywiście wystarczy udowodnić pierwsze stwierdzenie.

Najpierw załóżmy, że mamy ciąg uogólniony $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma} \subset A$ zbieżny do a. Aby wykazać, że $a \in \bar{A}$, stosujemy punkt (e) Obs. 2.13 (str. 4). Niech więc U będzie otoczeniem punktu a. Z założonej zbieżności wynika, że istnieje indeks $\sigma_0 \in \Sigma$, taki że $x_{\sigma_0} \in U$. A stąd $A \cap U \neq \varnothing$, co kończy dowód tej implikacji.

Załóżmy teraz, że $a \in \bar{A}$. Oznacza to, że dla dowolnego otoczenia U punktu a istnieje element $x_U \in A$, taki że $x_U \in U$. Niech Σ będzie rodziną wszystkich otoczeń punktu a. Wtedy $(\Sigma, \supset)$ jest zbiorem skierowanym oraz $x_U \to a$ $(U \in \Sigma)$, co kończy dowód. □

Ostatnią część tego rozdziału poświęcimy charakteryzacji granic zbieżnych podciągów uogólnionych ustalonego ciągu uogólnionego. Zaprezentowany poniżej wynik posłuży nam później do scharakteryzowania przestrzeni zwartych w języku ciągów uogólnionych — zob. Tw. 7.11 (str. 33).

3.13 Definicja.
Punkt a przestrzeni topologicznej X nazywamy *punktem skupienia* ciągu uogólnionego $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma} \subset X$, gdy

$$\forall U \text{otoczenie punktu } a\ \forall \sigma_1 \in \Sigma\ \exists \sigma_2 \geqslant \sigma_1 :\ x_{\sigma_2} \in U.$$

3.14 Twierdzenie.
Punkt a jest punktem skupienia ciągu uogólnionego $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg ten ma podciąg uogólniony zbieżny do a.

Dowód. Najpierw załóżmy, że $(x_{\nu(\lambda)})_{\lambda\in\Lambda}$ jest podciągiem uogólnionym zbieżnym do a. Ustalmy otoczenie V punktu a oraz indeks $\sigma_1 \in \Sigma$. Ze współkońcowości funkcji ν wynika, że istnieje taki indeks $\lambda_1 \in \Lambda$, że $\nu(\lambda) \geqslant \sigma_1$ dla wszelkich $\lambda \geqslant \lambda_1$. Jednocześnie, ze zbieżności podciągu wnioskujemy, że istnieje indeks $\lambda_2 \in \Lambda$, taki że $x_{\nu(\lambda)} \in V$ dla wszelkich $\lambda \geqslant \lambda_2$. Teraz wystarczy skorzystać ze skierowania zbioru Λ: istnieje indeks $\lambda_0 \in \Lambda$, taki że $\lambda_1 \leqslant \lambda_0$ oraz $\lambda_2 \leqslant \lambda_0$. A wtedy indeks $\sigma_2 \stackrel{\text{def}}{=} \nu(\lambda_0)$ spełnia $\sigma_1 \leqslant \sigma_2$ oraz $x_{\sigma_2} \in V$.

Załóżmy teraz, że a jest punktem skupienia danego ciągu uogólnionego i rozważmy zbiór skierowany

$$\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \{(\sigma, U) :\ \sigma \in \Sigma,\ U \text{otoczenie punktu } a\}$$

z półporządkiem:

$$(\sigma_1, U_1) \preccurlyeq (\sigma_2, U_2) \iff \sigma_1 \leqslant \sigma_2 \wedge U_1 \supset U_2.$$

(Sprawdzenie, że jest to zbiór skierowany, pozostawiamy jako ćwiczenie). Z warunku definiującego punkt skupienia wnosimy, że dla dowolnej pary $\lambda = (\sigma, U) \in \Lambda$ istnieje indeks $\nu(\lambda) \in \Sigma$, taki że:

(a) $\nu(\lambda) \geqslant \sigma$; oraz

(b) $x_{\nu(\lambda)} \in U$.

Powyższy warunek (a) gwarantuje nam, że funkcja $\nu\colon \Lambda \to \Sigma$ jest współkońcowa (dla zadanego indeksu σ_0 wystarczy wskazać $\lambda_0 = (\sigma_0, X)$). Z kolei warunek (b) oznacza, że ciąg uogólniony $(x_{\nu(\lambda)})_{\lambda\in\Lambda}$ jest zbieżny do a (dla zadanego otoczenia V punktu a wystarczy wskazać $\lambda_0 = (\sigma_0, V)$, gdzie σ_0 to dowolnie wybrany element zbioru Σ), co kończy dowód twierdzenia. □

3.15 ***Uwaga***.
Prawdziwy jest odpowiednik Tw. 3.14 dla zwykłych podciągów (zwykłych ciągów) w przestrzeniach metryzowalnych, ale nie we wszystkich topologicznych. Dowód tego faktu (wraz ze wskazaniem kontrprzykładu w przestrzeniach niemetryzowalnych) pozostawiamy zainteresowanym czytelnikom.

3.16 Obserwacja.

(a) *Ciąg uogólniony $(z_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ w przestrzeni metrycznej (X, d) zbiega do elementu $g \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczbowy ciąg uogólniony $(d(z_\sigma, g))_{\sigma\in\Sigma}$ zbiega do 0 w $\mathbb{R}$.*

(b) *W $\mathbb{R}$ prawdziwe są dla ciągów uogólnionych (o wspólnym zbiorze indeksującym): twierdzenie o 3 ciągach oraz o granicy sumy i iloczynu skończenie wielu ciągów zbieżnych.*

(c) *Ciąg uogólniony $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ w przestrzeni $\mathbb{R}^d$, gdzie $x_\sigma = (x_\sigma^{(1)}, \ldots, x_\sigma^{(d)})$, zbiega do elementu $b = (b^{(1)}, \ldots, b^{(d)})$ wtedy i tylko wtedy, gdy*
$$\forall k \in \{1, \ldots, d\}\colon\ x_\sigma^{(k)} \xrightarrow{\mathbb{R}} b^{(k)}\ (\sigma \in \Sigma).$$

Dowód. Punkt (a) wynika z tego, że każde otoczenie punktu g zawiera pewną kulę otwartą (szczegóły — ćwiczenie). Punkt (b) pozostawiamy jako ćwiczenie. Tutaj zajmiemy się jedynie punktem (c). Z (a) wiemy, że ciąg uogólniony $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ zbiega do b wtedy i tylko wtedy, gdy
$$d_e(x_\sigma, b) \to 0.$$
Dzięki (b) (oraz Obs. 2.25, str. 8) powyższa zbieżność jest równoważna następującej:
$$d_\Sigma(x_\sigma, b) \to 0.$$
Ponownie z (b) (w jedną stronę z twierdzenia o 3 ciągach, w drugą z twierdzenia o granicy sumy ciągów uogólnionych) wnosimy, że ta ostatnia zbieżność jest równoważna temu, że $|x_\sigma^{(k)} - b^{(k)}| \to 0$ $(\sigma \in \Sigma)$ dla $k = 1, \ldots, d$, co jest równoważne (dzięki (a)) warunkowi sfomułowanemu w (c) (tj. warunkowi zbieżności po współrzędnych). □

4 Ciągłość

4.1 Definicja.
Niech $f\colon (X, d) \to (Y, \varrho)$ będzie dowolną funkcją między przestrzeniami metrycznymi. Mówimy, że funkcja f jest *ciągła w punkcie* $a \in X$, gdy:
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X\colon\ (d(x, a) \leqslant \delta \implies \varrho(f(x), f(a)) \leqslant \varepsilon).$$

Aby uogólnić powyższą definicję (ze świata metrycznego na topologiczny), potrzebujemy charakteryzacji, w której nie pojawiają się metryki.

4.2 Obserwacja.
Funkcja $f\colon (X, d) \to (Y, \varrho)$ jest ciągła w punkcie $a \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
$$\forall V \text{ otoczenie punktu } f(a) \text{ w } Y\ \exists U \text{ otoczenie punktu } a \text{ w } X\colon\ f(U) \subset V.$$

Dowód. Ćwiczenie (obowiązkowe). □

4.3 Definicja.
Niech $f\colon X \to Y$ będzie dowolną funkcją między przestrzeniami topologicznymi i niech $a \in X$. Mówimy, że funkcja f jest *ciągła w punkcie* a, gdy:

$$\forall V \text{otoczenie punktu } f(a) \text{ w } Y\ \exists U \text{otoczenie punktu } a \text{ w } X\colon\ f(U) \subset V.$$

Funkcja jest *ciągła*, gdy jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny.

Przez $C(X,Y)$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich funkcji ciągłych z X w Y. Ponadto, $C(X) \overset{\text{def}}{=} C(X,\mathbb{R})$ oraz

$$C_b(X) \overset{\text{def}}{=} \{f \in C(X)\colon \text{ zbiór } f(X) \text{ jest ograniczony}\}.$$

4.4 Obserwacja.
Niech $f\colon X \to Y$ będzie funkcją między przestrzeniami topologicznymi i niech $a \in X$.

(a) *Funkcja f jest ciągła w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy:*

$$x_\sigma \xrightarrow{X} a\ (\sigma \in \Sigma) \implies f(x_\sigma) \xrightarrow{Y} f(a)\ (\sigma \in \Sigma).$$

(b) *Jeśli przestrzeń X jest metryzowalna, to funkcja f jest ciągła w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy:*

$$x_n \xrightarrow{X} a\ (n \to \infty) \implies f(x_n) \xrightarrow{Y} f(a)\ (n \to \infty).$$

W szczególności, gdy przestrzeń X jest metryzowalna, to funkcja f jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągowo ciągła, *tzn. gdy spełnia warunek:*

$$x_n \xrightarrow{X} x\ (n \to \infty) \implies f(x_n) \to f(x)\ (n \to \infty).$$

(c) *Jeśli $B \subset Y$ jest dowolnym zbiorem, takim że $f(X) \subset B$, to funkcja f jako $f\colon X \to Y$ jest ciągła w punkcie a (odp. ciągła) wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f jako $f\colon X \to B$ jest ciągła w punkcie a (odp. ciągła).*

(d) *Jeśli U jest otoczeniem punktu a w przestrzeni X, to funkcja f jest ciągła w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $f|_U\colon U \to Y$ jest ciągła w punkcie a.*

Dowód. Rozpoczynamy od (a). Załóżmy, że funkcja f jest ciągła w punkcie a i niech $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma} \subset X$ będzie ciągiem uogólnionym zbieżnym do a. Aby wykazać, że ciąg $(f(x_\sigma))_{\sigma\in\Sigma}$ zbiega do $f(a)$, ustalmy dowolne otoczenie V punktu $f(a)$ w Y. Z założenia wiemy, że istnieje otoczenie U punktu a w X, takie że $f(U) \subset V$. Ze zbieżności ciągu $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ do a wynika istnienie indeksu $\sigma_0 \in \Sigma$, takiego że $x_\sigma \in U$ dla wszelkich $\sigma \geqslant \sigma_0$. Ale wtedy także $f(x_\sigma) \in f(U) \subset V$, co kończy dowód tej implikacji.

Załóżmy teraz, że f spełnia warunek z ciągami uogólnionymi sformułowany w punkcie (a). Chcemy wykazać, że funkcja jest ciągła w a. Dowodzimy tego nie wprost: załóżmy więc hipotetycznie, że funkcja f nie jest ciągła w punkcie a. Oznacza to, że istnieje otoczenie V punktu $f(a)$ w Y, dla którego nie istnieje otoczenie U punktu a w X, takie że $f(U) \subset V$. Oznacza to, że dla dowolnego otoczenia U punktu a istnieje punkt

$$x_U \in U, \tag{4:1}$$

taki że

$$f(x_U) \notin V. \tag{4:2}$$

W ten sposób otrzymujemy ciąg uogólniony $(x_U)_{U\in\Sigma}$, gdzie Σ to zbiór skierowany wszystkich otoczeń punktu a z relacją obejmowania („$\supset$"). Z warunku (4:1) wynika, że

$$x_\sigma \xrightarrow{X} a\ (\sigma \in \Sigma).$$

Jednocześnie warunek (4:2) oznacza, że ciąg $(f(x_\sigma))_{\sigma\in\Sigma}$ nie jest zbieżny do $f(a)$ — co przeczy naszemu obecnemu założeniu i tym samym dowodzi ciągłości funkcji f w a.

Przejdźmy do (b). Ustalmy metrykę d na X zgodną z topologią tej przestrzeni. Zauważmy, że jeśli funkcja jest ciągła w punkcie a, to dzięki (a) spełnia warunek ciągowy sformułowany w punkcie (b). Wystarczy więc wykazać odwrotną implikację. Podobnie jak poprzednio, dowodzimy jej nie wprost: zakładamy, że funkcja f nie jest ciągła w punkcie a, mimo że spełnia warunek ciągowy sformułowany w (b). Z nieciągłości wynika, że istnieje otoczenie V punktu $f(a)$ w Y, takie że dla dowolnej liczby całkowitej $n > 0$ istnieje punkt $x_n \in B_d(a, 2^{-n})$ spełniający $f(x_n) \notin V$. Wtedy $x_n \xrightarrow{X} a$ $(n \to \infty)$, ale ciąg $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ nie zbiega do $f(a)$ — i sprzeczność.

Stwierdzenia ujęte w punktach (c) i (d) wynikają z definicji topologii indukowanej oraz tego, że jeśli U jest otoczeniem punktu a w X, a V jest otoczeniem punktu a w U, to V jest otoczeniem punktu a w X. Szczegóły dowodowe tych punktów pozostawiamy jako ćwiczenie (obowiązkowe). □

4.5 Twierdzenie.
Dla funkcji $f\colon X \to Y$ między przestrzeniami topologicznymi następujące warunki są równoważne:

(i) *funkcja f jest ciągła;*

(ii) $\forall U \in \mathscr{G}(Y)\colon\ f^{-1}(U) \in \mathscr{G}(X)$;

(iii) $\forall F \in \mathscr{F}(Y)\colon\ f^{-1}(F) \in \mathscr{F}(X)$;

(iv) $\forall A \subset X\colon\ f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$;

(v) $x_\sigma \xrightarrow{X} x\ (\sigma \in \Sigma) \implies f(x_\sigma) \xrightarrow{Y} f(x)\ (\sigma \in \Sigma)$.

Dowód. Równoważność między (i) i (v) wynika z punktu (a) Obs. 4.4. Zauważmy także, że warunki (ii) i (iii) są równoważne (wystarczy przejść do dopełnień zbiorów).

Załóżmy, że zachodzi (i). Niech V będzie zbiorem otwartym w Y. Aby wykazać, że zbiór $U \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}(V)$ jest otwarty w X, wystarczy uzasadnić, że dla dowolnego punktu $a \in U$ istnieje otoczenie W punktu a, które zawiera się w U. Niech więc $a \in U$, czyli $f(a) \in V$. Z ciągłości funkcji f w punkcie a wynika istnienie otoczenia W punktu a w X, takiego że $f(W) \subset V$. Ale wtedy $W \subset U$, co kończy dowód (ii).

Odwrotnie, jeśli zachodzi (ii), a jest punktem przestrzeni X oraz V jest otoczeniem punktu $f(a)$ w Y, to $U \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}(\operatorname{int}(V))$ jest zbiorem otwartym zawierającym punkt a i spełniającym $f(U) \subset V$, co dowodzi ciągłości funkcji f.

Wykazaliśmy już równoważność warunków (i), (ii), (iii) oraz (v). Pozostaje sprawdzić, że warunek (iii) jest równoważny (iv). Jeśli (iii) zachodzi i A jest dowolnym podzbiorem przestrzeni X, to zbiór $F \stackrel{\text{def}}{=} \overline{f(A)}$ jest domknięty w Y, więc także zbiór $f^{-1}(F)$ jest domknięty. Ale $A \subset f^{-1}(F)$ (bo $f(A) \subset F$), zatem $\bar{A} \subset f^{-1}(F)$, czyli $f(\bar{A}) \subset F$, co daje (iv).

Na koniec załóżmy, że zachodzi warunek (iv) i niech F będzie zbiorem domkniętym w Y. Oznaczmy $A \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}(F)$. Wtedy $f(A) \subset F$, więc z (iv) wynika, że $f(\bar{A}) \subset F$, czyli $\bar{A} \subset f^{-1}(F) = A$, co oznacza, że zbiór $A = f^{-1}(F)$ jest domknięty w X. □

4.6 Definicja.
Funkcję $f\colon X \to Y$ nazywamy:

- *homeomorfizmem*, gdy f jest bijekcją oraz f i f^{-1} są funkcjami ciągłymi;
- *zanurzeniem* lub *włożeniem* (*topologicznym*), gdy f jest homeomorfizmem między X a $f(X)$;
- *zanurzeniem otwartym* (odp. *domkniętym*) lub *włożeniem otwartym* (odp. *domkniętym*), gdy f jest zanurzeniem topologicznym, a zbiór $f(X)$ jest otwarty (odp. domknięty) w Y;
- *odwzorowaniem otwartym*, gdy $f(U)$ jest zbiorem otwartym w Y dla dowolnego zbioru U otwartego w X;
- *odwzorowaniem domkniętym*, gdy $f(F)$ jest zbiorem domkniętym w Y dla dowolnego zbioru F domkniętego w X.

4.7 Obserwacja.
Niech $f\colon X \to Y$ będzie dowolną funkcją.

(a) *Funkcja f jest zanurzeniem otwartym (odp. domkniętym) wtedy i tylko wtedy, gdy f jest ciągłą iniekcją i zarazem odwzorowaniem otwartym (odp. domkniętym).*

(b) *Funkcja f jest homeomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy f jest suriektywnym zanurzeniem topologicznym.*

Dowód. Ćwiczenie (obowiązkowe). □

4.8 Obserwacja.

(A) *Jeśli $f\colon X \to Y$ jest funkcją ciągłą w punkcie $a \in X$, a $g\colon Y \to Z$ funkcją ciągłą w punkcie $b = f(a) \in Y$, to funkcja $g \circ f\colon X \to Z$ jest ciągła w punkcie a.*

(B) *Zawężenie funkcji ciągłej do dowolnej podprzestrzeni dziedziny jest funkcją ciągłą.*

(C) *Funkcja jest ciągła, gdy jest* lokalnie ciągła, *tzn. gdy każdy punkt dziedziny ma otoczenie, na którym ciągłe jest zawężenie tej funkcji.*

(D) *Złożenie dwóch funkcji tego samego typu spośród wymienionych poniżej jest funkcją także tego typu:*

funkcja ciągła; homeomorfizm; zanurzenie topologiczne; zanurzenie domknięte; zanurzenie otwarte; odwzorowanie otwarte; odwzorowanie domknięte.

(E) *Zawężenie zanurzenia topologicznego do dowolnej podprzestrzeni dziedziny jest zanurzeniem topologicznym.*

(F) *Zawężenie zanurzenia (odp. odwzorowania) otwartego do podzbioru otwartego dziedziny jest zanurzeniem (odp. odwzorowaniem) otwartym.*

(G) *Zawężenie zanurzenia (odp. odwzorowania) domkniętego do podzbioru domkniętego dziedziny jest zanurzeniem (odp. odwzorowaniem) domkniętym.*

Dowód. Ćwiczenie (obowiązkowe). □

4.9 Twierdzenie.
*Niech $\{f_j\colon A_j \to Y\}_{j\in J}$ będzie rodziną zgodnych[*1)] funkcji ciągłych, gdzie zbiory A_j są podzbiorami jednej przestrzeni topologicznej X. Niech $A \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{j\in J} A_j$ oraz $f \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{j\in J} f_j\colon A \to Y$ (f to zlepienie[*2)] funkcji f_j). Wtedy funkcja f jest ciągła, jeśli zachodzi jeden z dwóch poniższych warunków:*

(a) *wszystkie zbiory A_j ($j \in J$) są otwarte w X; lub*

(b) *wszystkie zbiory A_j ($j \in J$) są domknięte w X, a zbiór J jest skończony.*

Dowód. Zauważmy, że dla dowolnego zbioru $B \subset Y$:

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(B) \cap A = \bigcup_{j\in J} (f^{-1}(B) \cap A_j) = \bigcup_{j\in J} (f|_{A_j})^{-1}(B) = \bigcup_{j\in J} f_j^{-1}(B).$$

Jeśli więc zachodzi (a) (odp. (b)), a zbiór B jest otwarty (odp. domknięty) w Y, wtedy $f^{-1}(B)$ jest zbiorem otwartym (odp. domkniętym) jako suma mnogościowa (odp. suma mnogościowa skończenie wielu) zbiorów domkniętych (por. Obs. 2.34 (str. 10)). □

5 Baza topologii i baza otoczeń

5.1 Definicja.
Bazą topologii τ na zbiorze X nazywamy dowolną rodzinę zbiorów β o następujących dwóch własnościach:

[*1)] Tzn. $f_j(x) = f_k(x)$ dla wszelkich $j, k \in J$ oraz $x \in A_j \cap A_k$.
[*2)] Tj. $f(x) = f_j(x)$ dla $x \in A_j$.

- $\beta \subset \tau$ (czyli zbiory z bazy są otwarte); oraz
- $\forall U \in \tau\ \exists \beta_0 \subset \beta\colon\ \bigcup \beta_0 = U$.

Ciężar (*topologiczny*) przestrzeni topologicznej (X, τ) to liczba kardynalna $w(X) = w(X, \tau)$ określona następująco:

$$w(X) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\operatorname{card}(\beta)\colon\ \beta \text{ to baza topologii } X\}$$

(pamiętajmy, że $\beta \stackrel{\text{def}}{=} \tau$ jest bazą topologii). Chociaż tak określona wielkość może być skończona, w praktyce często przyjmuje się, że $w(X) \geqslant \aleph_0$ (tzn. zastępuje się $w(X)$ przez $\max(w(X), \aleph_0)$).

5.2 Obserwacja.
Niech β będzie bazą pewnej topologii na zbiorze X. Wtedy:

(B1) $\forall x \in X\ \exists U \in \beta\colon\ x \in U$;

(B2) $\forall U, V \in \beta\ \forall a \in U \cap V\ \exists W \in \beta\colon\ a \in W \subset U \cap V$.

Dowód. Z definicji bazy topologii wynika, że $X = \bigcup \beta$, co implikuje (B1). Podobnie, jeśli $U, V \in \beta$, wtedy $U \cap V$ jest sumą mnogościową pewnej podrodziny rodziny β, więc każdy element zbioru $U \cap V$ wpada do pewnego zbioru $W \in \beta$ zawartego w $U \cap V$. □

Jak pokazuje powyższa obserwacja, własności (B1)–(B2) przysługują każdej bazie (każdej) topologii. Okazuje się, że są one zarazem wystarczające do tego, by rodzina podzbiorów była bazą pewnej topologii:

5.3 Twierdzenie. (Twierdzenie o zadawaniu topologii przez bazę)
Niech β będzie dowolną rodziną podzbiorów zbioru X spełniającą warunki (B1)–(B2). *Wtedy istnieje dokładnie jedna topologia τ na X, której bazą jest β. Co więcej, topologia ta jest określona następująco:*

$$U \in \tau \iff \forall a \in U\ \exists V \in \beta\colon\ a \in V \subset U.$$

Dowód. Określamy rodzinę τ warunkiem sformułowanym w twierdzeniu. Pokażemy, że jest to topologia na X. Z warunku (B1) wynika, że $X \in \tau$. Wprost z definicji rodziny τ wynika warunek (Top2) oraz to, że $\varnothing \in \tau$. Pozostaje (Top3). Niech więc $U, V \in \tau$. Aby sprawdzić, że $U \cap V \in \tau$, ustalmy $a \in U \cap V$ i dobierzmy zbiory $B_1, B_2 \in \beta$, takie że $a \in B_1 \subset U$ oraz $a \in B_2 \subset V$ (istnienie tych zbiorów jest zagwarantowane przez to, że $U, V \in \tau$). Teraz wystarczy zastosować warunek (B2): skoro $a \in B_1 \cap B_2$, istnieje zbiór $B_0 \in \beta$, taki że $a \in B_0 \subset B_1 \cap B_2$. Tym samym $a \in B_0 \subset U \cap V$, co dowodzi, że $U \cap V \in \tau$. Tak więc τ to topologia na X. Zauważmy także, że warunek definiujący rodzinę τ implikuje, że $\beta \subset \tau$ oraz że β jest bazą tej topologii.

Na koniec zauważmy, że wprost z definicji pojęcia bazy topologii wynika, że dana rodzina zbiorów może być bazą tylko jednej topologii. □

Przejdziemy teraz do pojęcia pokrewnego pojęciu bazy topologii.

5.4 Definicja.
Bazą otoczeń punktu a w przestrzeni topologicznej X nazywamy dowolną rodzinę $\beta(a)$ podzbiorów zbioru X, taką że:

- $\forall V \in \beta(a)\colon\ a \in \operatorname{int}(V)$ (tzn. $\beta(a)$ składa się z otoczeń punktu a); oraz
- $\forall U$otoczenie punktu a $\exists V \in \beta(a)\colon\ V \subset U$.

Jeśli ponadto $\beta(a)$ składa się ze zbiorów otwartych, mówimy wtedy o *bazie otoczeń otwartych* punktu a. Liczbę kardynalną

$$\chi(X, a) = \min\{\operatorname{card}(\beta(a))\colon\ \beta(a) \text{ to baza otoczeń punktu } a\}$$

nazywamy *charakterem przestrzeni X w punkcie a*. *Charakter punktowy* przestrzeni X to liczba kardynalna

$$\chi(X) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{gdy } X = \varnothing \\ \sup_{x\in X} \chi(X,x) & \text{gdy } X \neq \varnothing \end{cases}.$$

Pełny układ otoczeń (odp. *otwartych*) przestrzeni X to dowolna rodzina $\{\beta(x)\}_{x\in X}$ indeksowana zbiorem X, taka że $\beta(x)$ to baza otoczeń (odp. otwartych) punktu x dla dowolnego punktu $x \in X$.

5.5 Obserwacja.
Niech X będzie przestrzenią topologiczną.

(a) *Jeśli γ jest bazą topologii przestrzeni X, to wzór*

$$\beta(x) \overset{\text{def}}{=} \{U \in \gamma\colon\ x \in U\}$$

dla $x \in X$ określa pełny układ otoczeń otwartych.

(b) *Jeśli $\{\beta(x)\}_{x\in X}$ to pełny układ otoczeń otwartych w X, wtedy rodzina*

$$\gamma \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{x\in X} \beta(x)$$

jest bazą topologii tej przestrzeni.

Dowód. Ćwiczenie (obowiązkowe). □

5.6 Obserwacja.
Niech $\{\beta(x)\}_{x\in X}$ będzie pełnym układem otoczeń ***otwartych*** *w pewnej topologii na zbiorze X. Wtedy:*

(O1) $\forall x \in X\colon\ \beta(x) \neq \varnothing$ *oraz* $\forall U \in \beta(x)\colon\ x \in U$*;*

(O2) $\forall x \in X\ \forall U, V \in \beta(x)\ \exists W \in \beta(x)\colon\ W \subset U \cap V$*;*

(O3) $\forall x \in X\ \forall U \in \beta(x)\ \forall y \in U\ \exists V \in \beta(y)\colon\ V \subset U$*.*

Dowód. Ćwiczenie (obowiązkowe). □

5.7 Twierdzenie. (Twierdzenie o zadawaniu topologii przez pełny układ otoczeń otwartych)
Niech X będzie zbiorem oraz $\{\beta(x)\}_{x\in X}$ rodziną zbiorów, taką że $\beta(x)$ to rodzina podzbiorów zbioru X dla dowolnego punktu $x \in X$ oraz spełnione są warunki (O1)–(O3)*. Wtedy istnieje dokładnie jedna topologia τ na zbiorze X, w której ta rodzina indeksowana jest pełnym układem otoczeń otwartych. Ponadto, topologia τ określona jest następująco:*

$$U \in \tau \iff \forall a \in U\ \exists V \in \beta(a)\colon\ V \subset U.$$

Dowód. Określmy rodzinę τ warunkiem sformułowanym w twierdzeniu. Wystarczy sprawdzić, że τ to topologia na X oraz że zbiory z rodziny $\beta(x)$ (dla dowolnego punktu $x \in X$) są otwarte w tej topologii (wtedy automatycznie rodzina $\{\beta(x)\}_{x\in X}$ będzie pełnym układem otoczeń). Z warunku (O1) wynika, że $X \in \tau$, a z warunku definiującego rodzinę τ wnioskujemy, że aksjomat (Top2) jest spełniony oraz $\varnothing \in \tau$. Z kolei (Top3) wynika łatwo z (O2), a otwartość zbiorów z $\bigcup_{x\in X} \beta(x)$ z (O3). Na koniec zauważmy, że wprost z definicji pojęcia pełnego układu otoczeń wynika, że indeksowana rodzina zbiorów może być pełnym układem otoczeń tylko w jednej topologii. □

5.8 Definicja.
Mówimy, że przestrzeń topologiczna X:

- *spełnia I aksjomat przeliczalności* (w skrócie: X I A.P.), gdy $\chi(X) \leqslant \aleph_0$;
- *spełnia II aksjomat przeliczalności* (w skrócie: X II A.P.), gdy $w(X) \leqslant \aleph_0$.

Innymi słowy, przestrzeń X spełnia I A.P., gdy w każdym punkcie ma (co najwyżej) przeliczalną bazę otoczeń; oraz X spełnia II A.P., gdy ma (co najwyżej) przeliczalną bazę.

5.9 Przykład.

(A) Każda przestrzeń metryzowalna spełnia I A.P. Istotnie, jeśli d jest metryką zgodną z topologią takiej przestrzeni X, to (np.) $\beta(a) \stackrel{\text{def}}{=} \{B_d(a, 2^{-n})\colon\ n \in \mathbb{N}\}$ jest przeliczalną bazą otoczeń punktu $a \in X$.

(B) Przestrzenie euklidesowe spełniają II A.P. Istotnie, kule o środkach w $\mathbb{Q}^n$ i wymiernych promieniach tworzą bazę topologii $\mathbb{R}^n$ (ćwiczenie).

(C) Jeśli przestrzeń X ma przeliczalną bazę otoczeń w punkcie a, to ma w tym punkcie przeliczalną bazę otoczeń utworzoną przez zstępujący ciąg zbiorów otwartych. Istotnie, jeśli zbiory $V_0, V_1, V_2, \ldots$ tworzą bazę otoczeń punktu a, to zbiory $U_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{k=1}^{n} \operatorname{int}(V_k)$ $(n \in \mathbb{N})$ tworzą szukaną bazę otoczeń.

(D) Jeśli przestrzeń topologiczna X ma przeliczalną bazę otoczeń w punkcie a, to:

- dla dowolnego zbioru $A \subset X$,
$$a \in \bar{A} \iff \exists\, (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A\colon\ x_n \to a\ (n \to \infty);$$
- a jest punktem skupienia ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest granicą pewnego jego (zwykłego) podciągu;
- dla dowolnej funkcji $f\colon X \to Y$, gdzie Y to przestrzeń topologiczna, funkcja f jest ciągła w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy
$$x_n \xrightarrow{X} a\ (n \to \infty) \implies f(x_n) \xrightarrow{Y} f(a)\ (n \to \infty).$$

W szczególności, jeśli X spełnia I A.P., to funkcja $f\colon X \to Y$ jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągowo ciągła. Dowody ww. własności pozostawiamy czytelnikom jako proste ćwiczenie.

Na potrzeby kolejnego rezultatu wprowadzamy następujące pojęcia:

5.10 Definicja.

- Mówimy, że zbiór $A \subset X$ jest *dyskretnym podzbiorem* przestrzeni topologicznej X, gdy:
$$\forall x \in X\ \exists U \text{otoczenie punktu } x\colon\ \operatorname{card}(A \cap U) \leqslant 1.$$
- Przestrzeń metryczną (X, d) nazywamy *ε-rozproszoną* (gdzie $\varepsilon > 0$), gdy $d(x, y) \geqslant \varepsilon$ dla dowolnych dwóch różnych punktów $x, y \in X$. Przestrzeń (X, d) jest *metrycznie rozproszona*, gdy jest ε-rozproszona dla pewnej liczby $\varepsilon > 0$.

5.11 Definicja.
Charakter gęstości przestrzeni topologicznej X to liczba kardynalna
$$d(X) = \operatorname{dens}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\operatorname{card}(A)\colon\ A \subset X,\ \bar{A} = X\}.$$

Przestrzeń X jest *ośrodkowa*, gdy $d(X) \leqslant \aleph_0$ (czyli gdy X zawiera co najwyżej przeliczalny podzbiór gęsty).

5.12 Twierdzenie.
Dla przestrzeni metrycznej (X,d) oraz nieskończonej liczby kardynalnej $\mathfrak{m}$, następujące warunki są równoważne:

(i) $w(X) \leqslant \mathfrak{m}$;

(ii) $d(X) \leqslant \mathfrak{m}$;

(iii) *każda rodzina parami rozłącznych niepustych zbiorów otwartych w X ma moc $\leqslant \mathfrak{m}$;*

(iv) *dla dowolnej rodziny $\{U_s\}_{s\in S}$ zbiorów otwartych, takiej że $\bigcup_{s\in S} U_s = X$, istnieje zbiór $T \subset S$, taki że $\bigcup_{s\in T} U_s = X$ oraz $\operatorname{card}(T) \leqslant \mathfrak{m}$;*

(v) *każdy zbiór $A \subset X$, na którym topologia indukowana jest dyskretna, ma moc $\leqslant \mathfrak{m}$;*

(vi) *każdy dyskretny podzbiór przestrzeni X ma moc $\leqslant \mathfrak{m}$;*

(vii) *każda metrycznie rozproszona podprzestrzeń przestrzeni X ma moc $\leqslant \mathfrak{m}$.*

W szczególności, $w(X) = d(X)$ dla dowolnej przestrzeni metryzowalnej X.

Dowód. Schemat dowodu jest następujący: (i) $\iff$ (ii); (i) $\implies$ (iv),(v); (ii) $\implies$ (iii); (iv) $\implies$ (ii); (v) $\implies$ (vi) $\implies$ (vii); (iii) $\implies$ (vii); (vii) $\implies$ (ii). Wszystkie wypisane tutaj implikacje są raczej intuicyjne, z wyjątkiem ostatniej, która sprawia, że w przestrzeniach metryzowalnych warunki (i)–(vi) są równoważne.

(i) $\iff$ (ii): Implikacja „$\implies$” jest prawdziwa w dowolnej przestrzeni topologicznej: jeśli β jest bazą topologii, to:

$$\forall U \in \beta \setminus \{\varnothing\}\ \exists x_U\colon\ x_U \in U.$$

Wtedy zbiór $A \overset{\text{def}}{=} \{x_U\colon\ U \in \beta \setminus \{\varnothing\}\}$ jest gęsty (bo przecina niepusto każdy niepusty zbiór z bazy) i ma moc nie większą niż $\operatorname{card}(\beta)$ (jako obraz podrodziny rodziny β poprzez pewną funkcję). Implikacja odwrotna potrzebuje metryki: jeśli $A \subset X$ jest zbiorem gęstym i $\operatorname{card}(A) \leqslant \mathfrak{m}$, to rodzina

$$\beta \overset{\text{def}}{=} \{B_d(a, 2^{-n})\colon\ a \in A,\ n \in \mathbb{N}\}$$

jest bazą topologii (ćwiczenie) oraz $\operatorname{card}(\beta) \leqslant \operatorname{card}(A) \cdot \aleph_0 \leqslant \mathfrak{m}$.

(i) $\implies$ (iv),(v): Ustalmy bazę topologii β, taką że $\operatorname{card}(\beta) \leqslant \mathfrak{m}$. Najpierw załóżmy, że zbiory U_s $(s \in S)$ są otwarte i że $X = \bigcup_{s\in S} U_s$. Niech

$$\beta_0 \overset{\text{def}}{=} \{V \in \beta |\ \exists s \in S\colon\ V \subset U_s\}.$$

Dla dowolnego zbioru $V \in \beta_0$ dobierzmy indeks $t(V) \in S$, taki że $V \subset U_{t(V)}$. Wtedy zbiór $T \overset{\text{def}}{=} \{t(V)\colon\ V \in \beta_0\}$ ma moc nie większą niż $\operatorname{card}(\beta_0) \leqslant \mathfrak{m}$ (jako obraz tej rodziny poprzez pewną funkcję). Ponadto, $\bigcup_{s\in T} U_s = X$, gdyż: jeśli $x \in X$, to istnieją indeks $p \in S$ oraz zbiór $V \in \beta$, takie że $x \in V \subset U_p$. Wtedy $V \in \beta_0$, $s \overset{\text{def}}{=} t(V) \in T$ oraz $x \in V \subset U_s$.

Weźmy teraz zbiór $A \subset X$, na którym topologia indukowana jest dyskretna. Oznacza to, że dla dowolnego punktu $a \in A$ singleton $\{a\}$ jest otwarty w A, więc istnieje zbiór U_a otwarty w X, taki że $U_a \cap A = \{a\}$. Z definicji bazy topologii wynika, że wtedy istnieje zbiór $V_a \in \beta$, taki że $a \in V_a \subset U_a$. A stąd $V_a \cap A = \{a\}$, co implikuje, że funkcja $A \ni a \mapsto V_a \in \beta$ jest różnowartościowa, a więc $\operatorname{card}(A) \leqslant \operatorname{card}(\beta) \leqslant \mathfrak{m}$.

(ii) $\implies$ (iii): Niech A będzie zbiorem gęstym w X, takim że $\operatorname{card}(A) \leqslant \mathfrak{m}$. Rozważmy dowolną rodzinę $\mathcal{U}$ niepustych parami rozłącznych zbiorów otwartych. Z gęstości zbioru A wynika, że

$$\forall U \in \mathcal{U}\ \exists x_U \in A\colon\ x_U \in U.$$

Ponieważ zbiory z rodziny $\mathcal{U}$ są parami rozłączne, funkcja $\mathcal{U} \ni U \mapsto x_U \in A$ jest różnowartościowa i tym samym $\operatorname{card}(\mathcal{U}) \leqslant \operatorname{card}(A) \leqslant \mathfrak{m}$.

(iv) $\implies$ (ii): Z (iv) wynika, że dla dowolnej liczby naturalnej n istnieje zbiór $A_n \subset X$, taki że $\operatorname{card}(A_n) \leqslant \mathfrak{m}$ oraz

$$X = \bigcup_{x\in A_n} B_d(x, 2^{-n}).$$

Powyższa równość oznacza, że:

$$\forall x \in X\ \exists y \in A_n\colon\ d(x,y) < 2^{-n}$$

i tym samym zbiór $D \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ jest gęsty w X. Ale także $\operatorname{card}(D) \leqslant \mathfrak{m} \cdot \aleph_0 = \mathfrak{m}$, co dowodzi (ii).

(v) $\implies$ (vi) $\implies$ (vii): Te implikacje są trywialne, gdyż każdy podzbiór dyskretny ma dyskretną topologię indukowaną oraz każdy zbiór metrycznie rozproszony jest dyskretnym podzbiorem całej przestrzeni (zob. np. dowód następnej implikacji).

(iii) $\Longrightarrow$ (vii): Niech $A \subset X$ będzie zbiorem ε-rozproszonym dla pewnej liczby $\varepsilon > 0$. Wtedy zbiory $B_d(a, \frac{\varepsilon}{2})$ $(a \in A)$ są parami rozłączne, niepuste i otwarte oraz funkcja $A \ni a \mapsto B_d(a, \frac{\varepsilon}{2})$ jest iniekcją. Zatem, z (iii) wnosimy, że $\mathrm{card}(A) \leqslant \mathfrak{m}$.

(vii) $\Longrightarrow$ (ii): Przystępujemy do najbardziej „spektakularnej" części dowodu. Lemat Kuratowskiego-Zorna implikuje, że dla dowolnej liczby naturalnej n wśród podzbiorów przestrzeni X, które są przestrzeniami 2^{-n}-rozproszonymi, istnieje element maksymalny (względem imkluzji), powiedzmy A_n. Z (vii) wynika wtedy, że $\mathrm{card}(A_n) \leqslant \mathfrak{m}$, natomiast z maksymalności tego zbioru wynika, że:

$$X = \bigcup_{x \in A_n} B_d(x, 2^{-n})$$

(istotnie, gdyby suma po prawej stronie była różna od X, element spoza tej sumy można by dorzucić do zbioru A_n i otrzymać większy zbiór 2^{-n}-rozproszony). Tym samym zbiór $D \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ jest gęsty w X i spełnia $\mathrm{card}(D) \leqslant \mathfrak{m} \cdot \aleph_0 = \mathfrak{m}$.

Aby zakończyć cały dowód, zauważmy, że dla metryzowalnej przestrzeni X:

$$w(X) < \aleph_0 \iff \mathrm{card}(X) < \aleph_0 \iff d(X) < \aleph_0$$

oraz że $w(X) = d(X) = \mathrm{card}(X)$ w przypadku, gdy przestrzeń X jest skończona. Tym samym dla nieskończonej przestrzeni X obie liczby $w(X)$ i $d(X)$ są nieskończone i z równoważności między (i) a (ii) wynika, że wtedy także $w(X) = d(X)$. □

Jako natychmiastową konsekwencję powyższego twierdzenia otrzymujemy

5.13 Wniosek.
Przestrzeń metryzowalna spełnia II A.P. wtedy i tylko wtedy, gdy jest ośrodkowa.

*5.14 **Uwaga**.*
Jak nietrudno się przekonać, własność «*ciężar topologiczny jest* $\leqslant \mathfrak{m}$» jest *dziedziczna* (tzn. jeśli przysługuje przestrzeni topologicznej X, to przysługuje także każdej jej podprzestrzeni). Zatem z Wn. 5.13 wynika, że podprzestrzeń ośrodkowej przestrzeni metryzowalnej jest także ośrodkowa. Warto jednak pamiętać, że ośrodkowość **nie jest** dziedziczna w królestwie wszystkich przestrzeni topologicznych. Konkretnie: kostka Tichonowa $[0, 1]^{2^{\aleph_0}}$ jest ośrodkową zwartą przestrzenią T_2, która zawiera nieośrodkową podprzestrzeń domkniętą (a więc także zwartą). Ośrodkowość tej kostki nie jest łatwa do wykazania (pozostawiamy ją jako ćwiczenie „z gwiazdką"), natomiast zawieranie nieośrodkowej podprzestrzeni stanie się stosunkowo łatwym ćwiczeniem po zapoznaniu się z materiałem rozdziału 11 (str. 65) tego skryptu.

6 Aksjomaty oddzielania, część I

Jak nietrudno się przekonać, im więcej w przestrzeni jest zbiorów otwartych, tym więcej jest funkcji ciągłych określonych na tej przestrzeni (o wartościach w ustalonej [innej] przestrzeni, np. w $\mathbb{R}$ lub $[0, 1]$). Bogactwo topologii (jako struktury na zbiorze) możemy mierzyć na różne sposoby. Jednym z nich, zarazem najważniejszym, są tzw. aksjomaty oddzielania: im wyższy aksjomat oddzielania spełnia przestrzeń topologiczna, tym więcej ma zbiorów otwartych i tym „bliższa" jest przestrzeniom metryzowalnym. W tym rozdziale poznamy 5 takich aksjomatów, kolejne trzy poznamy w rozdziale 11 (str. 65).

6.1 Definicja.
Mówimy, że przestrzeń topologiczna X jest przestrzenią:

- T_0, gdy
$$\forall x, y \in X,\ x \neq y\ \exists U \in \mathscr{G}(X) \colon\ \mathrm{card}(U \cap \{x, y\}) = 1;$$
- T_1, gdy
$$\forall x, y \in X,\ x \neq y\ \exists U \in \mathscr{G}(X) \colon\ U \cap \{x, y\} = \{x\};$$
- T_2, czyli przestrzenią *Hausforffa*, gdy
$$\forall x, y \in X,\ x \neq y\ \exists U, V \in \mathscr{G}(X) \colon\ x \in U,\ y \in V,\ U \cap V = \varnothing;$$

- T_3, czyli przestrzenią *regularną*, gdy jest przestrzenią T_1 oraz

$$\forall A \in \mathscr{F}(X),\ x \in X \setminus A\ \exists U, V \in \mathscr{G}(X)\colon\ x \in U,\ A \subset V,\ U \cap V = \varnothing;$$

- T_4, czyli przestrzenią *normalną*, gdy jest przestrzenią T_1 oraz

$$\forall A, B \in \mathscr{F}(X),\ A \cap B = \varnothing\ \exists U, V \in \mathscr{G}(X)\colon\ A \subset U,\ B \subset V,\ U \cap V = \varnothing.$$

Zamiast pisać, że przestrzeń jest T_j $(j = 0, 1, 2, 3, 4)$, możemy mówić o *T_j-przestrzeni.*
Warunki T_1–T_4 nazywamy *aksjomatami oddzielania.*

6.2 Obserwacja.
Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną.

(a) *X jest T_0 wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall x, y \in X,\ x \neq y\colon\ \tau(x) \neq \tau(y),$$

gdzie $\tau(x) \overset{\text{def}}{=} \{U \in \tau\colon\ x \in U\}$.

(b) *X jest T_1 wtedy i tylko wtedy, gdy skończone podzbiory przestrzeni X są domknięte.*

(c) *X jest T_3 wtedy i tylko wtedy, gdy zbiory skończone są domknięte oraz*

$$\forall x \in X\ \forall U \text{ otoczenie punktu } x\ \exists V \text{ otoczenie punktu } x\colon\ \bar{V} \subset U.$$

(d) *X jest T_4 wtedy i tylko wtedy, gdy zbiory skończone są domknięte oraz*

$$\forall A \in \mathscr{F}(X)\ \forall U \in \mathscr{G}(X),\ A \subset U\ \exists V \in \mathscr{G}(X)\colon\ A \subset V,\ \bar{V} \subset U.$$

Dowód. Ćwiczenie (obowiązkowe). □

6.3 Wniosek.
$T_4 \implies T_3 \implies T_2 \implies T_1 \implies T_0$.

6.4 ***Uwaga.***
Jako proste ćwiczenie pozostawiamy czytelnikom sprawdzenie, że w pełnej ogólności: $T_0 \not\Rightarrow T_1 \not\Rightarrow T_2$. Znacznie trudniej podaje się przykład świadczący o tym, że $T_2 \not\Rightarrow T_3$. Z kolei przykład przestrzeni T_3, która nie jest T_4, poznamy w Prz. 11.11 (str. 68). Przykład ten pokaże, że normalność jest najbardziej „nienormalnym” aksjomatem oddzielania, i zarazem przyczyni się do narodzin nowego aksjomatu oddzielania — $T_{3\frac{1}{2}}$.

Aksjomat T_2 można elegancko scharakteryzować w języku ciągów uogólnionych:

6.5 Twierdzenie.
Przestrzeń topologiczna jest T_2 wtedy i tylko wtedy, gdy każdy ciąg uogólniony w tej przestrzeni ma co najwyżej jedną granicę.

Dowód. Najpierw załóżmy, że przestrzeń jest T_2, i rozważmy ciąg uogólniony $(x_\sigma)_{\sigma \in \Sigma} \subset X$ zbieżny do punktu a. Aby uzasadnić, że granica ta jest jedyna, rozważmy dowolny element $b \in X$ różny od a. Z warunku T_2 wynika, że istnieją rozłączne otoczenia U i V punktów a i b (odpowiednio). Ze zbieżności wiemy, że $x_\sigma \in U$ dla wszelkich $\sigma \geqslant \sigma_0$ (i pewnego $\sigma_0 \in \Sigma$). Wtedy $x_\sigma \notin V$ dla takich $\sigma \in \Sigma$, skąd wynika, że $x_\sigma \not\to b$ $(\sigma \in \Sigma)$, dzięki warunkowi skierowania.

Odwrotnie, załóżmy, że w przestrzeni każdy ciąg uogólniony ma co najwyżej jedną granicę. Aby uzasadnić, że przestrzeń jest Hausdorffa, rozumujemy nie wprost. Przypuśćmy, że wszystkie otoczenia pewnych dwóch różnych punktów a i b przestrzeni X mają niepuste przecięcie. Określmy zbiór skierowany Σ jako iloczyn kartezjański $\tau(a)\times\tau(b)$, z relacją „$\leqslant$" obejmowania po współrzędnych[*3)]. Zgodnie z naszym hipotetycznym założeniem, dla dowolnego indeksu $\sigma = (U, V) \in \Sigma$ istnieje element $x_\sigma \in U \cap V$. Z tego warunku wynika, że ciąg uogólniony $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ zbiega i do a, i do b, co przeczy założeniu i kończy dowód. □

Jak zobaczymy niebawem (w Tw. 6.15 poniżej), normalność (czyli aksjomat T_4) gwarantuje istnienie mnóstwa rzeczywistych funkcji ciągłych określonych na przestrzeni o tej własności. Wcześniej jednak sprawdźmy, że przestrzenie metryzowalne są normalne.

6.6 Definicja.
Mówimy, że funkcja $f\colon (X, d) \to (Y, \varrho)$ *spełnia warunek Lipschitza ze stałą* $M \geqslant 0$, gdy

$$\forall x, y \in X\colon\ \varrho(f(x), f(y)) \leqslant M d(x, y).$$

Funkcja f *spełnia warunek Lipschitza* (lub *jest funkcją lipschitzowską*), gdy spełnia go z pewną stała M. Najmniejszą taką stałą M nazywamy *stałą Lipschitza* odwzorowania f i oznaczamy przez $\mathrm{Lip}(f) = \mathrm{Lip}_d^\varrho(f)$ (a gdy Y jest podzbiorem $\mathbb{R}$, zaś ϱ jest metryką euklidesową, możemy również stosować notację $\mathrm{Lip}_d(f)$).

Odwzorowanie *nieoddalające* to funkcja (między przestrzeniami metrycznymi), która spełnia warunek Lipschitza ze stałą 1.

Odwzorowanie $f\colon (X, d) \to (Y, \varrho)$ nazywamy *dylatacyjnym*, gdy dla pewnej stałej $c > 0$ zachodzi tożsamość:

$$\forall x, y \in X\colon\ \varrho(f(x), f(y)) = c d(x, y).$$

Jeśli powyższy warunek zachodzi dla $c = 1$, odzworowanie f nazywamy *izometrycznym*. *Dylatacja* (odp. *izometria*) to bijektywne odwzorowanie dylatacyjne (odp. izometryczne). Dwie przestrzenie metryczne są *izometryczne*, gdy istnieje między nimi izometria.

6.7 Obserwacja.
Funkcje lipschitzowskie są ciągłe.

Dowód. Ćwiczenie. □

6.8 Lemat.
Niech $\{u_s\colon (X, d) \to \mathbb{R}\}_{s\in S}$ będzie niepustą rodziną odzworowań spełniających warunek Lipschitza ze stałą $M \geqslant 0$. Niech funkcja $v\colon X \to [-\infty, \infty)$ będzie określona wzorem:

$$v(x) \overset{\text{def}}{=} \inf_{s\in S} u_s(x).$$

Wtedy albo $v \equiv -\infty$, albo $v\colon X \to \mathbb{R}$ i $\mathrm{Lip}_d(v) \leqslant M$.

Podobnie, funkcja $w\colon X \ni x \mapsto \sup_{s\in S} u_s(x) \in (-\infty, \infty]$ jest albo stale równa ∞, albo jest rzeczywista i spełnia warunek Lipschitza ze stałą M.

Dowód. Zastąpienie rodziny $\{u_s\}_{s\in S}$ przez $\{-u_s\}_{s\in S}$ sprowadza zagadnienie z funkcją w do zagadnienia z funkcją v. Dlatego wykażemy jedynie tezę dla v. W tym celu zakładamy, że $v(b) > -\infty$ dla pewnego elementu $b \in X$. Musimy pokazać, że v ma wartości liczbowe oraz $\mathrm{Lip}_d(v) \leqslant M$. Dowód przeprowadzimy w dwóch krokach:

<u>Krok 1</u>. Jeśli $v(a) > -\infty$, wtedy $v(a) - Md(z, a) \leqslant v(z)$ dla wszelkich $z \in X$.

Dowód kroku 1: Dla dowolnego punktu $z \in X$ mamy $v(a) \leqslant u_s(a) \leqslant u_s(z)+Md(a, z)$, czyli $v(a)-Md(a, z) \leqslant u_s(z)$. Przechodząc do infimum (po $s \in S$) po prawej stronie tej nierówności otrzymujemy tezę kroku 1.

<u>Krok 2</u>. $v\colon X \to \mathbb{R}$ oraz $\mathrm{Lip}_d(v) \leqslant M$.

Dowód kroku 2: Podstawiając $a = b$ i $z = x$ do Kroku 1, otrzymujemy $v(x) > -\infty$, czyli $v\colon X \to \mathbb{R}$. Potem do tego samego kroku podstawiamy najpierw $a = y$ i $z = x$, by otrzymać nierówność $v(y) - v(x) \leqslant Md(y, x)$, a potem odwrotnie: $a = x$, $z = y$, co daje $v(x) - v(y) \leqslant Md(x, y)$ i tym samym $|v(x) - v(y)| \leqslant Md(x, y)$. □

[*3)] Tzn. $(U_1, V_1) \leqslant (U_2, V_2)$, gdy $U_1 \supset U_2$ oraz $V_1 \supset V_2$.

6.9 Definicja.
Niech A będzie niepustym podzbiorem przestrzeni metrycznej (X, d). *Odległością od zbioru A (względem metryki d)* nazywamy funkcję $\operatorname{dist}_d(\cdot, A)\colon X \to \mathbb{R}_+$ określoną następująco:

$$\operatorname{dist}_d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

6.10 Twierdzenie.
Dla dowolnego niepustego podzbioru A przestrzeni metrycznej (X, d) funkcja $v = \operatorname{dist}_d(\cdot, A)$ jest nieoddalająca oraz $v^{-1}(\{0\}) = \bar{A}$.

Dowód. Dla $a \in A$ niech $u_a\colon X \ni x \mapsto d(a, x) \in \mathbb{R}_+$. Z nierówności trójkąta wynika, że $\operatorname{Lip}_d(u_a) \leqslant 1$. Ponadto, $v(X) \subset \mathbb{R}_+$ oraz $v(x) = \inf_{a \in A} u_a(x)$, zatem z Lem. 6.8 wynika, że $\operatorname{Lip}_d(v) \leqslant 1$. Ponieważ $v|_A \equiv 0$, ciągłość funkcji v implikuje, że $\bar{A} \subset v^{-1}(\{0\})$. Pozostaje wykazać odwrotną inkluzję. Zauważmy, że z własności infimum wynika, że dla dowolnego elementu $x \in X$ istnieje ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$, taki że $v(x) = \lim_{n \to \infty} d(x, a_n)$. Jeśli więc $v(x) = 0$, to $a_n \to x$ $(n \to \infty)$ i tym samym $x \in \bar{A}$. □

6.11 Wniosek.
Przestrzenie metryzowalne są normalne.

Dowód. Niech X będzie przestrzenią metryzowalną, a d metryką na przestrzeni X zgodną z jej topologią. Sprawdzenie, że X jest T_1, pozostawiamy jako prościutkie ćwiczenie. Dla zbioru domkniętego $F \subset X$ określamy funkcję $u_F\colon X \to \mathbb{R}_+$ regułą:

- $u_\varnothing \equiv 1$;
- $u_F = \operatorname{dist}_d(\cdot, F)$ dla $F \neq \varnothing$.

Z Tw. 6.10 wynika, że funkcja u_F jest ciągła oraz

(6:1) $$u_F^{-1}(\{0\}) = F.$$

Ustalmy dwa zbiory domknięte A i B w X, takie że:

(6:2) $$A \cap B = \varnothing.$$

Z warunków (6:1) i (6:2) wynika, że funkcja $u_A + u_B$ przyjmuje wartości ściśle dodatnie. Tym samym funkcja $v\colon X \to [0, 1]$ określona wzorem

$$v(x) = \frac{u_A(x)}{u_A(x) + u_B(x)}$$

jest poprawnie określona i ciągła*4). Co więcej, z (6:1) wynika, że $v^{-1}(\{0\}) = A$ oraz $v^{-1}(\{1\}) = B$. Tym samym zbiory $v^{-1}((-1, \frac{1}{2}))$ oraz $v^{-1}((\frac{1}{2}, 2))$ są otwartymi, rozłącznymi nadzbiorami zbiorów A i B, odpowiednio — czyli przestrzeń X jest normalna. □

W powyższym dowodzie na każdej przestrzeni metryzowalnej skonstruowaliśmy funkcję ciągłą o wartościach w $[0, 1]$, która przy uprzednio zadanych dwóch domkniętych zbiorach rozłącznych znika na jednym z nich, a na drugim jest stale równa 1. Okazuje się, że własność ta przysługuje wszystkim przestrzeniom normalnym, co jest treścią poniższego

6.12 Twierdzenie. (Lemat Urysohna)
Niech X będzie przestrzenią normalną. Wtedy dla dowolnych dwóch rozłącznych zbiorów domkniętych A i B w X istnieje funkcja ciągła $u\colon X \to [0, 1]$, taka że:

$$u|_A \equiv 0 \qquad \textit{oraz} \qquad u|_B \equiv 1.$$

*4) Aby się upewnić, że ta funkcja jest ciągła, wystarczy sprawdzić ciągową ciągłość przez zastosowanie znanych faktów nt. zbieżnych ciągów liczbowych. Ciągłość tego typu wzorów można również szybko wyprowadzić z materiału przedstawionego w rozdziale 10 (str. 54).

Dowód. Dla $n \in \mathbb{N}$ niech
$$I_n \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\frac{k}{2^n}\colon\ k \in \mathbb{N},\ k \leqslant 2^n\right\}.$$
Niech także $J \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$. Zauważmy, że:

- $0, 1 \in I_0$;
- $I_n \subset I_{n+1}$;
- $\bar{J} = [0, 1]$ (dowód — ćwiczenie).

Ostatnia z ww. własności okaże się być kluczowa pod koniec dowodu.

Skonstruujemy zbiory otwarte $\{U_j\}_{j \in J}$ w taki sposób, że:

(U1) $A \subset U_0$ oraz $U_1 = X \setminus B$;

(U2) $\bar{U}_p \subset U_q$ dla wszelkich $p, q \in J$, takich że $p < q$.

Konstrukcja będzie przebiegać indukcyjnie (względem n): w ten sposób określimy zbiory U_p, dla których $p \in I_n$.

Krok 1: $n = 0$.

Zauważmy, że $I_0 = \{0, 1\}$. Określamy $U_1 \stackrel{\text{def}}{=} X \setminus B$ oraz na podstawie punktu (d) Obs. 6.2 (str. 24) dobieramy zbiór otwarty U_0, tak by $A \subset U_0$ oraz $\bar{U}_0 \subset U_1$. Widzimy, że zachodzi warunek (U1) oraz na typ etapie konstrukcji spełniony jest warunek (U2).

Krok 2: $n \rightsquigarrow n + 1$.

Zakładamy, że mamy już zbiory U_p dla $p \in I_n$ określone w taki sposób, że spełnione są warunki (U1)–(U2) (dla $p, q \in I_n$). Ustalmy $p \in I_{n+1} \setminus I_n$. Wtedy p ma postać $p = \frac{2k-1}{2^{n+1}}$, gdzie $k \in \mathbb{N}$ oraz $0 < k \leqslant 2^n$. Mamy już określone zbiory $U_{\frac{k-1}{2^n}}$ i $U_{\frac{k}{2^n}}$ oraz
$$\bar{U}_{\frac{k-1}{2^n}} \subset U_{\frac{k}{2^n}}.$$
Ponownie korzystając z punktu (d) Obs. 6.2 (str. 24), dobieramy zbiór otwarty U_p, taki że $\bar{U}_{\frac{k-1}{2^n}} \subset U_p$ oraz $\bar{U}_p \subset U_{\frac{k}{2^n}}$. W ten sposób określiliśmy zbiory U_j dla wszelkich $j \in I_{n+1}$ w ten sposób, że jeśli wypiszemy je w kolejności wg porządku indeksów:
$$U_{\frac{0}{2^{n+1}}}, U_{\frac{1}{2^{n+1}}}, U_{\frac{2}{2^{n+1}}}, \ldots, U_{\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}}},$$
to każdy zbiór z powyższej listy z wyjątkiem pierwszego zawiera w sobie domknięcie zbioru bezpośrednio go poprzedzającego. Tym samym warunek (U2) spełniony jest dla wszelkich $p, q \in I_{n+1}$.

Po zakończeniu całej indukcji otrzymujemy rodzinę $\{U_j\}_{j \in J}$, która spełnia oba warunki (U1) i (U2) (ten drugi bierze się stąd, że zbiory I_n tworzą ciąg wstępujący). Teraz określamy funkcję $u\colon X \to [0, 1]$, której szukamy:
$$u(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{gdy } x \notin U_1 \\ \inf\{s \in J\colon x \in U_s\} & \text{gdy } x \in U_1 \end{cases}.$$
Z własności (U1) wynika od razu, że $u|_A \equiv 0$ oraz $u|_B \equiv 1$, zatem jedyne, co pozostaje do udowodnienia, to ciągłość tej funkcji. W tym celu wystarczy pokazać, że $u^{-1}((\alpha, \beta))$ jest zbiorem otwartym dla dowolnych liczb $\alpha < \beta$. Ale ten przeciwobraz to $u^{-1}((-\infty, \beta)) \cap u^{-1}((\alpha, \infty))$, więc wystarczy, że oba przeciwobrazy występujące w tym przecięciu są otwarte. W dowodzie przydadzą nam się następujące dwie własności, które wynikają z definicji funkcji u oraz tego, że zbiory U_s rosną wraz ze wzrostem indeksu $s \in J$:

(U3) $x \in U_s \implies u(x) \leqslant s$;

(U4) $u(x) < s \implies x \in U_s$.

Najpierw sprawdźmy łatwiejszą część — że zbiór $D \stackrel{\text{def}}{=} u^{-1}((-\infty, \beta))$ jest otwarty. Jeśli $\beta > 1$, wtedy $D = X$. Załóżmy więc, że $\beta \leqslant 1$, i niech $b \in D$. Wtedy $u(b) < \beta \leqslant 1$, więc istnieje indeks $s \in J$, taki że $s < \beta$ oraz $b \in U_s$. A wtedy (U3) implikuje, że U_s jest otwartym otoczeniem punktu b zawartym w D, co dowodzi otwartości zbioru D.

Przystępujemy teraz do ostatniej części dowodu — wykazania, że zbiór $G \stackrel{\text{def}}{=} u^{-1}((\alpha, \infty))$ jest otwarty. Jeśli $\alpha < 0$, to $G = X$ — możemy więc założyć, że $\alpha \geqslant 0$. Niech $a \in G$. Wtedy $0 \leqslant \alpha < u(a) \leqslant 1$, zatem z gęstości zbioru J w przedziale $[0, 1]$ wnioskujemy, że istnieją dwa indeksy $p, q \in J$, takie że $\alpha < p < q < u(a)$. Zauważmy, że $a \notin U_q$, dzięki (U3). Z (U2) wynika zatem, że tym bardziej $a \in V \stackrel{\text{def}}{=} X \setminus \bar{U}_p$. Zbiór V jest otwarty i z (U4) wynika, że $u(x) \geqslant p$ dla $p \in V$. Tym samym $V \subset G$ i zbiór G jest otwarty. □

6.13 ***Uwaga.***
Jak nietrudno się przekonać, własność sformułowana w Lemacie Urysohna charakteryzuje przestrzenie normalne wśród przestrzeni T_1: dowód tego stwierdzenia zawarty jest w ostatnim zdaniu dowodu Wn. 6.11.

Lemat Urysohna jest szczególnym przypadkiem Twierdzenia Tietzego-Urysohna (Tw. 6.15 poniżej), które jest naszym najbliższym celem. Stanowi on zarazem główne narzędzie w dowodzie. Drugie potrzebne nam narzędzie to poniższy rezultat dobrze znany m.in. z analizy matematycznej.

6.14 Lemat.

(a) *Granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji (o wartościach w przestrzeni metrycznej) ciągłych w ustalonym punkcie jest funkcją ciągłą w tym punkcie.*

(b) *Jeśli $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ $(n > 0)$ to funkcje ciągłe na przestrzeni topologicznej, takie że*

$$\forall n > 0\ \forall x \in X\colon\ |f_n(x)| \leqslant cq^{n-1}$$

dla pewnych stałych $c \in \mathbb{R}_+$ oraz $q \in [0,1)$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny jednostajnie do rzeczywistej funkcji ciągłej na X. Ponadto, funkcja graniczna ma wartości w przedziale $[-\frac{c}{1-q}, \frac{c}{1-q}]$.

Dowód. Dowód podajemy jedynie dla kompletności wykładu.

(a): Niech $f_n\colon Z \to (X,d)$ będą funkcjami ciągłymi w punkcie $a \in Z$ zbieżnymi jednostajnie do funkcji $g\colon Z \to X$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Ze zbieżności jednostajnej wynika, że istnieje taki indeks $N > 0$, że:

$$\forall x \in X\colon\ d(f_N(x), g(x)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Z ciągłości funkcji f_N w punkcie a wynika istnienie otoczenia U punktu a w przestrzeni Z, które spełnia $f_N(U) \subset B_d(f_N(a), \frac{\varepsilon}{3})$. Wtedy dla $z \in U$ mamy:

$$d(g(z), g(a)) \leqslant d(g(z), f_N(z)) + d(f_N(z), f_N(a)) + d(f_N(a), g(a)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

co dowodzi ciągłości funkcji g w punkcie a.

(b): Wiemy, że $\sum_{n=1}^{\infty} cq^{n-1} = \frac{c}{1-q} =: \delta < \infty$, więc z kryterium porównawczego wnosimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny dla dowolnego argumentu $x \in X$, powiedzmy do $g(x)$. Ponadto, $|g(x)| \leqslant \delta$. Co więcej,

$$\Big|g(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x)\Big| = \Big|\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)\Big| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(x)| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} cq^{n-1} = \delta q^N \to 0\ (N \to \infty),$$

co pokazuje, że szereg zbiega jednostajnie do g. Ciągłość funkcji g wynika z (a). □

6.15 Twierdzenie. (Twierdzenie Tietzego-Urysohna)
Niech A będzie ***domkniętym*** *podzbiorem przestrzeni* ***normalnej*** *X, a J niepustym przedziałem w $\mathbb{R}$. Każda funkcja ciągła $f\colon A \to J$ przedłuża się do funkcji ciągłej $F\colon X \to J$.*

Dowód. Dowód podzielimy na 4 kroki.

<u>Krok 1</u>: $J = [-1,1]$.

Niech $c \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{3}$ and $\delta \overset{\text{def}}{=} \frac{2}{3}$. Indukcyjnie skonstruujemy funkcje ciągłe $u_1, u_2, \ldots\colon X \to \mathbb{R}$, takie że:

(T-U1)$_n$ $|u_n(x)| \leqslant c\delta^{n-1}$ dla wszelkich $n > 0$ oraz $x \in X$;

(T-U2)$_n$ $|f(a) - \sum_{k=1}^{n} u_k(a)| \leqslant \delta^n$ dla wszlkich $n > 0$ oraz $a \in A$.

W konstrukcji użyjemy poniższej obserwacji (w której obowiązują założenia twierdzenia):

($\star$) *Jeśli $v\colon A \to [-\gamma, \gamma]$ (gdzie $\gamma > 0$) jest funkcją ciągłą, to istnieje funkcja ciągła $w\colon X \to [-\frac{1}{3}\gamma, \frac{1}{3}\gamma]$, taka że $|v(a) - w(a)| \leqslant \frac{2}{3}\gamma$ dla wszelkich $a \in A$.*

Aby wykazać ($\star$), zauważmy, że zbiory $B \overset{\text{def}}{=} v^{-1}([-\gamma, -\frac{1}{3}\gamma])$ oraz $C \overset{\text{def}}{=} v^{-1}([\frac{1}{3}\gamma, \gamma])$ są rozłączne oraz domknięte w X (jako domknięte podzbiory zbioru domkniętego A). Z Lematu Urysohna wynika istnienie funkcji ciągłej $u\colon X \to [0,1]$, która znika na zbiorze B oraz jest stale równa 1 na zbiorze C. Określamy $w \overset{\text{def}}{=} \frac{2}{3}\gamma u - \frac{1}{3}\gamma$. Bez trudu stwierdzamy, że $w(X) \subset [-\frac{1}{3}\gamma, \frac{1}{3}\gamma]$. Ponadto, dla $a \in A$:

- jeśli $a \in B$, to $w(a) = -\frac{1}{3}\gamma$ oraz $-\gamma \leqslant v(a) \leqslant -\frac{1}{3}\gamma$, więc $|w(a) - v(a)| \leqslant \frac{2}{3}\gamma$;

- jeśli $a \in C$, to $w(a) = \frac{1}{3}\gamma$ oraz $\frac{1}{3}\gamma \leqslant v(a) \leqslant \gamma$, więc $|w(a) - v(a)| \leqslant \frac{2}{3}\gamma$;
- jeśli $a \notin B \cup C$, to $w(a), v(a) \in [-\frac{1}{3}\gamma, \frac{1}{3}\gamma]$, więc i tym razem $|w(a) - v(a)| \leqslant \frac{2}{3}\gamma$,

co kończy dowód ($\star$).

Teraz przystępujemy do konstrukcji funkcji $u_1, u_2, \ldots$ Funkcję u_1 definiujemy jako funkcję w skonstruowaną z ($\star$) dla $v = f$ i $\gamma = 1$. Z własności tejże funkcji wynika, że zachodzą warunki (T-U1)$_1$–(T-U2)$_1$. Dalej, załóżmy, że określiliśmy już funkcje $u_1, \ldots, u_n$. Do ($\star$) podstawiając $v = f - \sum_{k=1}^{n} u_k|_A$ oraz $\gamma = \delta^n$ ((T-U2)$_n$ gwarantuje, że taka wartość parametru γ jest dobrana poprawnie), otrzymujemy funkcję w, którą oznaczamy przez u_{n+1}. Zauważmy, że własności tejże funkcji (sformułowane w ($\star$)) zapewniają nam prawdziwość (T-U1)$_{n+1}$ i (T-U2)$_{n+1}$.

Dzięki indukcji, w powyższy sposób wszystkie funkcje u_n zostały zdefiniowane. Własności (T-U1)$_n$ pozwalają nam zastosować punkt (b) Lem. 6.14 (str. 28), z którego wynika, że wzór $F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ określa funkcję ciągłą $F\colon X \to \mathbb{R}$ o wartościach w przedziale $[-\frac{c}{1-\delta}, \frac{c}{1-\delta}] = [-1, 1]$. Z kolei własności (T-U2)$_n$ gwarantują, że $F(a) = f(a)$ dla $a \in A$. Tym samym dowód kroku 1 został zakończony.

<u>Krok 2</u>: $J = \mathbb{R}$.

Niech $h\colon \mathbb{R} \to (-1, 1)$ będzie funkcją określoną wzorem

$$h(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

Jak łatwo sprawdzić, h jest bijekcją i $h^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}$ (ćwiczenie). Tym samym h jest homeomorfizmem. Dla ustalonej funkcji ciągłej $f\colon A \to \mathbb{R}$ stosujemy krok 1 do funkcji $g \stackrel{\text{def}}{=} h \circ f\colon A \to (-1, 1) \subset [-1, 1]$ i otrzymujemy jej ciągłe przedłużenie $G\colon X \to [-1, 1]$. Wtedy zbiór $B \stackrel{\text{def}}{=} G^{-1}(\{-1, 1\})$ jest domknięty. Ponadto, $A \cap B = \varnothing$, gdyż $G|_A = g$ i $g(A) \subset (-1, 1)$. Z Lematu Urysohna istnieje ciągła funkcja $u\colon X \to [0, 1]$, która znika na zbiorze B i jest stale równa 1 na zbiorze A. Twierdzimy, że funkcja $U \stackrel{\text{def}}{=} uG\colon X \to \mathbb{R}$ ma wartości w $(-1, 1)$. Istotnie:

- jeśli $x \in B$, wtedy $U(x) = 0$;
- jeśli $x \in X \setminus B$, wtedy $-1 < G(x) < 1$ i $0 \leqslant u(x) \leqslant 1$, więc $-1 < u(x)G(x) < 1$.

Określamy $F \stackrel{\text{def}}{=} h^{-1} \circ U\colon X \to \mathbb{R}$. F jest funkcją ciągłą jako złożenie dwóch takich funkcji. Ponadto, gdy $a \in A$, wtedy $u(a) = 1$, więc $U(a) = G(a) = g(a) = h(f(a))$, a stąd $F(a) = h^{-1}(G(a)) = f(a)$, czyli F przedłuża f, co kończy dowód kroku 2.

<u>Krok 3</u>: $J = \mathbb{R}_+$.

Niech $f\colon A \to \mathbb{R}_+$ będzie funkcją ciągłą. Z kroku 2 istnieje ciągłe przedłużenie $G\colon X \to \mathbb{R}$ funkcji f. Wtedy funkcja $F \stackrel{\text{def}}{=} |G|\colon X \to \mathbb{R}_+$ jest także ciągłym przedłużeniem funkcji f.

<u>Krok 4</u>: J to dowolny niepusty przedział.

Jeśli $\mathrm{card}(J) = 1$, wtedy teza jest trywialna (funkcję stałą przedłużamy w jeden jedyny sposób do funkcji stałej o wartościach w J). Z kolei gdy $\mathrm{card}(J) > 1$, przestrzeń J jest homeomorficzna z dokładnie jednym przedziałem $I \in \{[-1, 1], \mathbb{R}, \mathbb{R}_+\}$ (ćwiczenie). Niech $H\colon J \to I$ będzie homeomorfizmem. Dla funkcji ciągłej $f\colon A \to J$ do funkcji $H \circ f\colon A \to I$ możemy zastosować krok 1, 2 lub 3 (stosownie do postaci I) i otrzymać jej przedłużenie $G\colon X \to I$. Wtedy $F \stackrel{\text{def}}{=} H^{-1} \circ G\colon X \to J$ jest ciągłym przedłużeniem funkcji f, którego szukamy. □

6.16 Wniosek.
Niech X będzie przestrzenią normalną.

(a) *Dla dowolnego zbioru domkniętego $A \subset X$ funkcje*

$$C(X) \ni f \mapsto f|_A \in C(A) \qquad \text{oraz} \qquad C_b(X) \ni f \mapsto f|_A \in C_b(A)$$

to suriekcje.

(b) *Dla dowolnego zbioru dyskretnego D w przestrzeni X i dowolnej (odp. ograniczonej) funkcji $u\colon D \to \mathbb{R}$ istnieje funkcja $v \in C(X)$ (odp. $v \in C_b(X)$), taka że $v|_D = u$.*

(c) *Rodzina $C_b(X)$ rozdziela punkty zbioru X, tzn. dla dowolnych dwóch różnych punktów $x, y \in X$ istnieje funkcja $f \in C_b(X)$, taka że $f(x) \neq f(y)$.*

Dowód. Wszystkie punkty są natychmiastową konsekwencją Tw. 6.15. □

6.17 ***Uwaga.***
Jak pokazuje Wn. 6.16, zbiór $C_b(X)$ dla przestrzeni normalnej X jest bardzo bogaty. Sytuacja diametralnie się zmienia dla przestrzeni regularnych. Otóż, istnieje przestrzeń regularna Z, taka że zbiór $C(Z)$ zawiera jedynie funkcje stałe. Konstrukcja tej przestrzeni jest trudna i czytelnikom zainteresowanym tym tematem pozostawiamy ją jako zadanie „z gwiazdką”. Tutaj informujemy jedynie, że taka przestrzeń nie może spełniać II A.P.

6.18 ***Uwaga.***
Jak zobaczyliśmy w dowodzie Wn. 6.11 (str. 26), w przestrzeni metrycznej (X, d) domknięte zbiory rozłączne możemy oddzielać funkcją ciągłą daną jawnym wzorem (przez oddzielanie dwóch zbiorów funkcją danej klasy mamy na myśli istnienie funkcji tej klasy, która na jednym zbiorze znika, a na drugim jest stale równa 1). Mimo to z konstrukcji przedstawionej w dowodzie Tw. 6.15 niezwykle trudno wyprowadzić wzór na przedłużenie funkcji ciągłej określonej na domkniętym niepustym zbiorze $A \subset X$. Jawny wzór ciągłego przedłużenia podał jako pierwszy Hausdorff. Mianowicie, jeśli $f\colon A \to \mathbb{R}_+$ jest funkcją ciągłą oraz $\operatorname{diam}(X, d) < \infty$, to funkcja $F\colon X \to \mathbb{R}_+$ dana wzorem

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{gdy } x \in A \\ \inf\{f(a) + \frac{d(x,a)}{\operatorname{dist}_d(x,A)} - 1\colon\ a \in A\} & \text{gdy } x \notin A \end{cases}$$

również jest ciągła. Dowód ciągłości pozostawiamy zainteresowanym czytelnikom jako zadanie „z małą gwiazdką”.

7 Zwartość

7.1 Definicja.
Mówimy, że rodzina zbiorów $\{A_s\}_{s\in S}$ *pokrywa* zbiór B, gdy

$$B \subset \bigcup_{s\in S} A_s.$$

Pokryciem zbioru B nazywamy dowolną rodzinę, która pokrywa zbiór B. *Podpokryciem* pokrycia zbioru B nazywamy dowolną podrodzinę tego pokrycia, która sama także jest pokryciem zbioru B, czyli: podpokryciem rodziny $\{A_s\}_{s\in S}$ jest dowolna rodzina postaci $\{A_t\}_{t\in T}$, gdzie $T \subset S$ jest takim zbiorem, że $B \subset \bigcup_{t\in T} A_t$.

O pokryciu podprzestrzeni B przestrzeni topologicznej X mówimy, że jest *otwarte* (odp. *otwarte w* X, *otwarte w* B, *domknięte*, itp.), gdy takież są wszystkie zbiory należące do tego pokrycia.
Uwaga: Powyższy (dość ogólny) schemat „doklejania” przymiotnika do słowa *pokrycie* nie stosuje się do przymiotnika *dyskretny* — rodzina dyskretna to coś innego niż rodzina złożona ze zbiorów dyskretnych (definicję rodziny dyskretnej poznamy w rozdziale 15, str. 82). Ta sama uwaga dotyczy przymiotników oznaczających liczebność zbiorów: oczywiście pokrycie skończone/przeliczalne/itp. oznacza pokrycie, które jest zbiorem skończonym/przeliczalnym/itp.

7.2 Definicja.
Przestrzeń topologiczna jest *zwarta*, gdy [jest przestrzenią T_2 oraz] spełnia *warunek pokryciowy*, tzn. gdy każde pokrycie otwarte tej przestrzeni ma podpokrycie skończone.

Zwartość jest bez wątpienia najważniejszym pojęciem (własnością) w topologii ogólnej. W tym rozdziale zbadamy podstawowe własności zwartych przestrzeni T_2 oraz w pełni scharakteryzujemy zwartość w przestrzeniach metryzowalnych — zob. Tw. 7.15 (str. 34). Jednakże dopiero w podrozdziale 10.1 wykażemy najważniejszy rezultat o przestrzeniach zwartych, czyli Twierdzenie Tichonowa (Tw. 10.26, str. 63).

7.3 ***Uwaga.***
Uważny czytelnik zauważył, że w definicji przestrzeni zwartej żądanie, by przestrzeń była T_2, został ujęty w nawias kwadratowy. Zastosowaliśmy taki zapis, aby już na samym początku „przygody” z tym pojęciem wyczulić czytelnika na dwie kwestie:

- W zwartości chodzi o spełnianie warunku pokryciowego — aksjomat T_2 jest w pewnym sensie drugorzędny, mimo że sam warunek pokryciowy (tzn. bez T_2) nie niesie ze sobą żadnych szczególnie ważnych konsekwencji; w praktyce, gdy mówimy o przestrzeniach zwartych, w domyśle zawsze mamy na myśli przestrzenie Hausdorffa.

- Z uwagi na powyższą uwagę (tj. że w zwartości chodzi o warunek pokryciowy), przyjęło się jako standard (w fachowej literaturze międzynarodowej) uzupełniać przymiotnik *zwarty* (ang. *compact*) dopiskiem T_2 lub *Hausdorffa* (mimo iż „wszyscy" właśnie to mamy na myśli, gdy mówimy o zwartości!). Z tego powodu albo w artykułach umieszcza się na wstępie zdanie w stylu: „w tej pracy wszystkie przestrzenie zwarte są Hausdorffa", albo konsekwentnie (chciałoby się wręcz rzec: z uporem maniaka) za każdym razem mówi się o „zwartych przestrzeniach T_2" lub „zwartych przestrzeniach Hausdorffa".

W niniejszym skrypcie podążamy za międzynarodowym standardem i chociaż przestrzeń zwartą definiujemy jako przestrzeń Hausdorffa (o szczególnej własności), za każdym razem, gdy będziemy mówić o zwartości, będziemy dopisywać aksjomat T_2. Przy tym:

- napis „T_2" będziemy umieszczać w nawiasie kwadratowym wszędzie tam, gdzie po pominięciu tego założenia (zarówno w danym kontekście, jak i w definicji zwartości) stwierdzenie nadal pozostanie prawdziwe;

- napis „T_2" nie będzie otaczany nawiasem kwadratowym tylko tam, gdzie spełnienie tego aksjomatu jest koniecznym założeniem (i bez niego teza nie zachodzi).

Rozpoczynamy od bardzo prostej, ale zarazem bardzo przydatnej obserwacji.

7.4 Obserwacja.

(a) *Podprzestrzeń* [T_2-]*przestrzeni topologicznej X jest zwartą przestrzenią* [T_2] *wtedy i tylko wtedy, gdy z każdego pokrycia tej podprzestrzeni zbiorami otwartymi w X można wybrać podpokrycie skończone.*

(b) *Podzbiór domknięty zwartej przestrzeni* [T_2] *jest również zwartą przestrzenią* [T_2].

(c) *Skończone przestrzenie* [T_1] *są zwarte.*

(d) *Jeśli $f\colon X \to Y$ jest funkcją ciągłą* [*i Y jest T_2*]*, a $K \subset X$ jest przestrzenią zwartą* [T_2]*, to przestrzeń $f(K) \subset Y$ jest zwarta.*

Dowód. Punkt (a) wynika łatwo z postaci topologii indukowanej (ćwiczenie), natomiast (c) jest trywialną obserwacją (pamiętajmy, że skończone przestrzenie T_1 mają topologię dyskretną, więc są T_2). Tutaj wykażemy jedynie (b) i (d). Dla dowodu punktu (b) rozważmy domknięty podzbiór A zwartej [T_2-]przestrzeni X i jego pokrycie $\mathcal{U} = \{U_s\}_{s\in S}$ zbiorami otwartymi w X. Wtedy rodzina $\mathcal{V} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{U} \cup \{X \setminus A\}$ jest **otwartym** pokryciem przestrzeni X, więc istnieje podpokrycie tej przestrzeni postaci $\{U_s\}_{s\in F} \cup \{X \setminus A\}$, gdzie $F \subset S$ jest zbiorem skończonym. Wtedy $\{U_s\}_{s\in F}$ jest skończonym podpokryciem (w stosunku do pokrycia $\mathcal{U}$) zbioru A, gdyż $A \cap (X \setminus A) = \varnothing$. [To, że A jest T_2, łatwo wynika z tego, że X jest T_2].

Dla dowodu (d), rozważmy pokrycie $\{V_s\}_{s\in S}$ zbioru $f(K)$ zbiorami otwartymi w Y. Wtedy rodzina $\{f^{-1}(V_s)\}_{s\in S}$ jest otwartym pokryciem zbioru K, więc $K \subset \bigcup_{s\in F} f^{-1}(V_s)$ dla pewnego skończonego zbioru $F \subset S$. Wtedy także $f(K) \subset \bigcup_{s\in F} V_s$ i tym samym $f(K)$ jest przestrzenią zwartą, dzięki (a). □

7.5 Definicja.
Rodzinę zbiorów $\{A_s\}_{s\in S}$ nazywamy *scentrowaną*, gdy

$$\forall d > 0\ \forall s_1, \ldots, s_d \in S\colon \bigcap_{k=1}^{d} A_{s_k} \neq \varnothing.$$

Pojęcie rodziny scentrowanej jest pokrewne warunkowi pokryciowemu. Sedno tego pojęcia (w kontekście przestrzeni zwartych) wyjaśnia następująca

7.6 Obserwacja.
Przestrzeń $[T_2]$ jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy każda niepusta i scentrowana rodzina jej podzbiorów domkniętych ma przecięcie niepuste.

Dowód. Teza łatwo wynika stąd, że dla ustalonej niepustej przestrzeni topologicznej X funkcja $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^{(')}$ określona wzorem
$$\mathcal{A}^{(')} \stackrel{\text{def}}{=} \{X \setminus A \colon\ A \in \mathcal{A}\}$$
jest inwolucją (tj. bijekcją identyczną ze swoją funkcją odwrotną) na zbiorze wszystkich rodzin podzbiorów zbioru X, która ustala wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między pokryciami otwartymi przestrzeni X bez podpokrycia skończonego a niepustymi scentrowanymi rodzinami zbiorów domkniętych o pustym przecięciu. □

7.7 Lemat.
Niech A będzie zwartą $[T_2]$ podprzestrzenią przestrzeni topologicznej X, a $B \subset X$ takim zbiorem, że

(7:1) $$\forall a \in A\ \exists U_a, V_a \in \mathscr{G}(X)\colon\ a \in U_a,\ B \subset V_a,\ U_a \cap V_a = \varnothing.$$

Wtedy istnieją zbiory U i V otwarte w X, takie że:
$$A \subset U,\ B \subset V,\ U \cap V = \varnothing.$$

Dowód. Gdy $A = \varnothing$, wystarczy przyjąć $U = \varnothing$ i $V = X$. Dalej zakładamy, że $A \neq \varnothing$. Zbiory U_a $(a \in A)$ występujące w (7:1) tworzą pokrycie otwarte przestrzeni A, więc z jej zwartości wynika istnienie skończonego układu elementów $a_1, \ldots, a_p \in A$ (gdzie $p \in \mathbb{N}_1$), takich że zbiór $U \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{j=1}^{p} U_{a_j}$ zawiera A. Określmy $V \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{j=1}^{p} V_{a_j}$ i zauważmy, że V jest zbiorem otwartym zawierającym B. Ponadto,
$$U \cap V = \bigcup_{j=1}^{p} (U_{a_j} \cap V) \subset \bigcup_{j=1}^{p} (U_{a_j} \cap V_{a_j}) = \varnothing,$$
co kończy dowód. □

Przestrzenie zwarte w wielu aspektach przypominają zbiory skończone. Świadczy o tym m.in. poniższy rezultat.

7.8 Twierdzenie.
Niech X będzie przestrzenią T_2.

(a) *Jeśli $K \subset X$ jest przestrzenią zwartą, to zbiór K jest domknięty w X.*

(b) *Jeśli K i L są zwartymi podprzestrzeniami przestrzeni X, takimi że $K \cap L = \varnothing$, to istnieją zbiory U i V otwarte w X, takie że $K \subset U$, $L \subset V$ oraz $U \cap V = \varnothing$.*

(c) *Jeśli X jest T_3, $K \subset X$ jest przestrzenią zwartą, a $F \subset X$ jest zbiorem domkniętym rozłącznym z K, to istnieją zbiory U i V otwarte w X, takie że $K \subset U$, $F \subset V$ oraz $U \cap V = \varnothing$.*

Dowód. (a): Niech $z \in X \setminus K$. Do Lem. 7.7 podstawiamy $A \stackrel{\text{def}}{=} K$ oraz $B \stackrel{\text{def}}{=} \{z\}$. Z własności T_2 przestrzeni X wynika, że warunek (7:1) jest spełniony. Zatem z tezy tegoż lematu wynika istnienie otwartego otoczenia W_z punktu z rozłącznego z K. Tym samym zbiór $X \setminus K = \bigcup_{z \notin K} W_z$ jest otwarty.

(c): Rozumujemy podobnie: do Lem. 7.7 podstawiamy $A \stackrel{\text{def}}{=} K$ oraz $B \stackrel{\text{def}}{=} F$. Regularność przestrzeni X implikuje, że zachodzi (7:1). Z tezy lematu otrzymujemy tezę punktu (c).

(b): Najpierw ustalmy $z \in K$. Do Lem. 7.7 podstawmy $A \stackrel{\text{def}}{=} L$ oraz $B \stackrel{\text{def}}{=} \{z\}$. Z własności T_2 przestrzeni X wynika, że warunek (7:1) jest spełniony. Zatem z tezy tegoż lematu wynika istnienie zbiorów otwartych D_z i G_z, takich że:
$$z \in D_z,\ L \subset G_z,\ D_z \cap G_z = \varnothing.$$
Z dowolności punktu $z \in K$ widzimy więc, że spełniony jest warunek (7:1) dla $A \stackrel{\text{def}}{=} K$ oraz $B \stackrel{\text{def}}{=} L$. Ponowne zastosowanie Lem. 7.7 (w obecnej konfiguracji) produkuje zbiory otwarte, których szukamy. □

Jako natychmiastowy wniosek otrzymujemy

7.9 Twierdzenie.
Każda zwarta przestrzeń T_2 jest normalna. Podzbiór zwartej przestrzeni T_2 jest przestrzenią zwartą wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty.

Dowód. Wystarczy zastosować Tw. 7.8 oraz punkt (b) Obs. 7.4. □

Tw. 7.8 ma jeszcze jedną, dość zaskakującą konsekwencję:

7.10 Twierdzenie.
Niech $f\colon X \to Y$ będzie funkcją między zwartą $[T_2$-$]$przestrzenią X a T_2-przestrzenią Y.

- *Jeśli funkcja f jest ciągła, to jest odwzorowaniem domkniętym.*
- *Funkcja f jest zanurzeniem domkniętym wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągłą iniekcją.*
- *Funkcja f jest homeomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągłą bijekcją.*

Dowód. Wystarczy pokazać, że jeśli f jest funkcją ciągłą, to jest odwzorowaniem domkniętym (zob. Obs. 4.7, str. 17). Niech więc A będzie podzbiorem domkniętym przestrzeni X. Wtedy jest to przestrzeń zwarta, a stąd także przestrzeń $f(A)$ jest zwarta (dzięki Obs. 7.4). Ponieważ przestrzeń Y jest T_2, zastosowanie punktu (a) Tw. 7.8 daje domkniętość zbioru $f(A)$ i kończy dowód. □

Okazuje się, że zwartość można elegancko scharakteryzować w terminach ciągów uogólnionych:

7.11 Twierdzenie.
Przestrzeń topologiczna $[T_2]$ jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy każdy ciąg uogólniony jej elementów ma podciąg uogólniony zbieżny.

Dowód. Rozważmy dowolną $[T_2$-$]$przestrzeń topologiczną X. Możemy przy tym założyć (co niniejszym czynimy), że $X \neq \varnothing$ (dla przestrzeni pustej twierdzenie jest oczywiste).

Najpierw załóżmy, że przestrzeń X jest zwarta i rozważmy dowolny ciąg uogólniony $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ jej elementów. Przypuśćmy, dla dowodu nie wprost, że ciąg ten nie ma podciągu uogólnionego zbieżnego. Z Tw. 3.14 (str. 14) wnosimy, że ów ciąg uogólniony nie ma punktu skupienia w przestrzeni X. Oznacza to, że:

$$\forall x \in X\ \exists U_x \text{ otwarte otoczenie punktu } x\ \exists \sigma_x \in \Sigma\ \forall \sigma \geqslant \sigma_x\colon\ x_\sigma \notin U_x. \tag{7:2}$$

Z pokrycia otwartego $\{U_x\}_{x\in X}$ możemy wybrać podpokrycie skończone:

$$X = \bigcup_{k=1}^{p} U_{x_k} \tag{7:3}$$

dla pewnych punktów $x_1, \ldots, x_p \in X$ (i $p \in \mathbb{N}_1$). Z warunku skierowania dla zbioru Σ wynika, że istnieje indeks $\sigma \in \Sigma$, taki że $\sigma \geqslant \sigma_{x_k}$ dla $k = 1, \ldots, p$. W takim razie — na podstawie (7:2) — $x_\sigma \notin U_{x_k}$ dla $k = 1, \ldots, p$, co jest sprzeczne z (7:3) i kończy tę część dowodu.

Teraz załóżmy, że w przestrzeni X każdy ciąg uogólniony ma podciąg uogólniony zbieżny. Dowód zwartości przestrzeni X również tym razem przeprowadzamy nie wprost. Załóżmy więc, że istnieje pokrycie otwarte $\{U_s\}_{s\in S}$ przestrzeni X, które nie ma podpokrycia skończonego. Oznacza to, że

$$X \neq \bigcup_{s\in F} U_s \qquad (F \subset S,\ \operatorname{card}(F) < \aleph_0). \tag{7:4}$$

Oznaczmy przez Σ rodzinę wszystkich **skończonych** podzbiorów zbioru S. Oczywiście $(\Sigma, \subset)$ to zbiór skierowany. Z (7:4) wynika, że dla dowolnego zbioru $F \in \Sigma$ istnieje element $x_F \in X$, taki że

$$x_F \notin \bigcup_{s\in F} U_s. \tag{7:5}$$

W ten sposób otrzymaliśmy ciąg uogólniony $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma} \subset X$. Z naszego założenia wnioskujemy, że ów ciąg ma podciąg zbieżny, czyli — dzięki Tw. 3.14 (str. 14) — ma punkt skupienia. Niech z będzie takim punktem. Ponieważ zbiory U_s ($s \in S$) pokrywają przestrzeń X, istnieje indeks $t \in S$, taki że $z \in U_t$. Z definicji punktu skupienia wynika, że dla $\sigma_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{t\} \in \Sigma$ istnieje indeks $F \in \Sigma$, taki że $t \in F$ (czyli „$F \geqslant \sigma_0$") oraz $x_F \in U_t$. Jednak obie te własności nie mogą zachodzić jednocześnie, gdyż zachodzi (7:5). Otrzymana sprzeczność kończy cały dowód. □

Naszym najbliższym celem jest analogiczna charakteryzacja zwartości w przestrzeniach metryzowalnych, ale wyrażona w terminach „zwykłych" ciągów (zob. Tw. 7.15 poniżej). Inne twierdzenie charakteryzujące zwartość w przestrzeniach metrycznych poznamy w rozdziale 9 (zob. Tw. 9.10, str. 49).

7.12 Definicja.
Przestrzeń topologiczna jest *ciągowo zwarta*, gdy każdy (zwykły) ciąg elementów tej przestrzeni ma (zwykły) podciąg zbieżny w tej przestrzeni.

7.13 Lemat. (Lemat o liczbie Lebesgue'a pokrycia)
Niech (X, d) będzie ciągowo zwartą przestrzenią metryczną. Dla dowolnego pokrycia otwartego $\mathcal{U}$ przestrzeni X istnieje liczba $\varepsilon > 0$, taka że:

(7:6)
$$\forall x \in X\ \exists U \in \mathcal{U}\colon\ B_d(x, \varepsilon) \subset U.$$

Każdą liczbę $\varepsilon > 0$, dla której zachodzi (7:6) nazywamy *liczbą Lebesgue'a* pokrycia $\mathcal{U}$.

Dowód. Rozumujemy nie wprost: jeśli teza jest fałszywa, to dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$ istnieje punkt $x_n \in X$, taki że kula $B_d(x_n, 2^{-n})$ nie zawiera się w żadnym zbiorze z pokrycia $\mathcal{U}$. Z ciągowej zwartości przestrzeni wynika, że $x_{\nu_n} \to a \in X$ ($n \to \infty$) dla stosownie dobranego podciągu. Ponieważ $\mathcal{U}$ pokrywa X, istnieje zbiór $U \in \mathcal{U}$ zawierający punkt a. Dobieramy liczbę $r > 0$, taką że $B_d(a, 2r) \subset U$. Ze zbieżności podciągu wnioskujemy, że istnieje indeks $k > 0$, taki że $d(x_{\nu_k}, a) < r$ i zarazem $2^{-\nu_k} < r$. Wtedy (dzięki przedostatniej własności w Obs. 2.3, str. 2) $B_d(x_{\nu_k}, 2^{-\nu_k}) \subset B_d(a, 2r) \subset U \in \mathcal{U}$, co jest sprzeczne z doborem punktu x_{ν_k} i kończy dowód. □

7.14 Lemat.
Zwarta przestrzeń $[T_2]$ spełniająca I A.P. jest ciągowo zwarta.

Dowód. Powtarzamy dowód Tw. 7.11: Załóżmy (dla dowodu nie wprost), że w zwartej $[T_2$-$]$przestrzeni X pewien ciąg $(x_n)_{n=1}^\infty$ nie ma zwykłego podciągu zbieżnego. Na podstawie punktu (D) Prz. 5.9 (str. 21) wnioskujemy, że wtedy żaden punkt przestrzeni X nie jest punktem skupienia tego ciągu. Tak więc każdy punkt $a \in X$ ma otoczenie otwarte U_a, w którym leży tylko skończenie wiele wyrazów ciągu $(x_n)_{n=1}^\infty$. Wtedy w dowolnym zbiorze postaci $\bigcup_{j=1}^p U_{a_j}$, gdzie $p > 0$ i $a_1, \ldots, a_p \in X$, także leży tylko skończenie wiele wyrazów tego ciągu. Tym samym żaden z tych zbiorów nie pokrywa się z X, więc X nie jest przestrzenią zwartą — i sprzeczność. □

7.15 Twierdzenie.
Przestrzeń metryzowalna jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągowo zwarta.

Dowód. Implikacja „tylko wtedy" wynika z Lem. 7.14. Dla dowodu przeciwnej implikacji, rozważmy niepustą ciągowo zwartą przestrzeń metryzowalną X, ustalmy metrykę d na X zgodną z topologią i weźmy dowolne pokrycie otwarte $\mathcal{U}$ tej przestrzeni. Niech $\varepsilon > 0$ będzie liczbą Lebesgue'a dla tego pokrycia (zob. Lem. 7.13). Wystarczy pokazać, że istnieje zbiór skończony $F \subset X$, taki że

(7:7)
$$X = \bigcup_{a \in F} B_d(a, \varepsilon).$$

Istotnie, jeśli taki zbiór F istnieje, to z definicji liczby Lebesgue'a wynika, że

$$\forall a \in F\ \exists U_a \in \mathcal{U}\colon\ B_d(a, \varepsilon) \subset U_a.$$

A wtedy (7:7) implikuje, że rodzina $\{U_a\}_{a\in F}$ jest pokrywa zbiór X, czyli jest skończonym podpokryciem.

Przechodzimy do dowodu istnienia skończonego zbioru $F \subset X$, który spełnia (7:7). Rozumujemy nie wprost (zakładamy, że takowy zbiór nie istnieje) i indukcyjnie konstruujemy ciąg $a_0, a_1, a_2, \dots$ elementów zbioru X, takich że:

$$\forall n, m \in \mathbb{N},\ n \neq m\colon\ d(a_n, a_m) \geqslant \varepsilon. \tag{7:8}$$

Element a_0 wybieramy dowolnie. Załóżmy, że elementy $a_0, \dots, a_n$ zostały już skonstruowane. Z naszego hipotetycznego założenia wynika, że $X \neq \bigcup_{j=0}^{n} B_d(a_j, \varepsilon)$. Element a_{n+1} wybieramy jako dowolny element zbioru $X \setminus \bigcup_{j=0}^{n} B_d(a_j, \varepsilon)$. Oznacza to, że $d(a_{n+1}, a_j) \geqslant \varepsilon$ dla $j = 0, \dots, n$. Tym samym warunek (7:8) jest spełniony (dla indeksów nie większych niż $n+1$).

Dzięki indukcji otrzymujemy nieskończony ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ spełniający (7:8). Z założenia o X wynika, że $a_{\nu_n} \to b \in X$ $(n \to \infty)$ dla stosownie dobranego podciągu. A wtedy $d(a_{\nu_n}, b) < \frac{\varepsilon}{2}$ dla dostatecznie dużych indeksów n. Ale to jest niemożliwe — dzięki nierówności trójkąta i (7:8). Dowód został zakończony. □

7.16 Twierdzenie.
Dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbb{R}$, takich że $a < b$, przestrzeń $[a, b]$ jest zwarta.

Dowód. Ciągowa zwartość przedziałów domkniętych i ograniczonych została wykazana na kursie z analizy matematycznej. Tutaj pokażemy bezpośrednio, że przestrzenie te spełniają warunek pokryciowy.

Niech $\mathcal{U}$ będzie dowolnym pokryciem przestrzeni $[a, b]$ zbiorami otwartymi w $\mathbb{R}$. Niech

$$J \overset{\text{def}}{=} \{t \in (a, b]\colon\ \text{zbiór } [a, t] \text{ można pokryć skończoną podrodziną pokrycia } \mathcal{U}\}$$

oraz $c \overset{\text{def}}{=} \sup(J)$. Na wstępie zauważmy, że $J \neq \varnothing$, gdyż $a \in U$ dla pewnego zbioru $U \in \mathcal{U}$ oraz $[a, a+\delta] \subset U$ dla pewnej liczby $\delta > 0$ (bo U jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}$) — tym samym $\min(a+\delta, b) \in J$. Aby zakończyć dowód, wystarczy pokazać, że $c \in J$ oraz $c = b$. Istnieje zbiór $V \in \mathcal{U}$ zawierający punkt c. Z otwartości tego zbioru wynika istnienie liczby $\varepsilon > 0$, takiej że $[c-\varepsilon, c+\varepsilon] \subset V$. Z definicji supremum i tego, że $c - \varepsilon < c$, wynika, że $c - \varepsilon < s$ dla pewnej liczby $s \in J$. Skoro $s \in J$, możemy dobrać skończenie wiele zbiorów $U_1, \dots, U_p \in \mathcal{U}$, takich że $[a, s] \subset \bigcup_{j=1}^{p} U_j$. A wtedy $[a, c] \subset [a, s] \cup [c-\varepsilon, c+\varepsilon] \subset V \cup \bigcup_{j=1}^{p} U_j$ i tym samym $c \in J$ (bo $V \in \mathcal{U}$). Gdyby $c \neq b$, to dla pewnej liczby $\delta \in (0, \varepsilon)$ byłoby $c + \delta < b$ i wtedy także $[a, c+\delta] \subset V \cup \bigcup_{j=1}^{p} U_j$, co oznaczałoby, że $c + \delta \in J$ — a to jest niemożliwe, gdyż c to kres górny zbioru J. Tak więc $c = b$ i dowód jest zakończony. □

7.17 Definicja.
Średnicą przestrzeni metrycznej (X, d) nazywamy wielkość

$$\operatorname{diam}(X, d) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{gdy } X = \varnothing \\ \sup_{x,y\in X} d(x, y) & \text{gdy } X \neq \varnothing \end{cases} \in [0, \infty].$$

Przestrzeń metryczną (X, d) nazywamy *ograniczoną*, gdy $\operatorname{diam}(X, d) < \infty$.

7.18 Obserwacja.
Zwarta przestrzeń metryczna jest ograniczona.

Dowód. Gdy przestrzeń (X, d) jest niepusta i $a \in X$, z pokrycia $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_d(a, n)$ można wybrać podpokrycie skończone, co implikuje, że $X = B_d(a, N)$ dla pewnej liczby $N > 0$. A wtedy $\operatorname{diam}(X, d) \leqslant 2N < \infty$. □

7.19 Wniosek. (Twierdzenie Heinego-Borela)
Podzbiór przestrzeni $\mathbb{R}^d$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony.

Dowód. Konieczność wynika z Obs. 7.18 oraz punktu (a) Tw. 7.8 (str. 32). Wystarczalność wykażemy pokazując, że każdy ciąg w zbiorze domkniętym i ograniczonym A w $\mathbb{R}^d$ ma podciąg zbieżny w A (posłużymy się tutaj Obs. 3.16, str. 15, oraz Tw. 7.15). Niech więc $\left((x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(d)})\right)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem o wyrazach w A. Z ograniczoności tego zbioru wynika istnienie liczby $R>0$, takiej że $|x_n^{(k)}|\leqslant R$ dla wszelkich $n>0$ oraz $k=1,\dots,d$. W takim razie, procedując indukcyjnie (dla $k=1,\dots,d$ po kolei) z zastosowaniem Tw. 7.16, znajdujemy nieskończone zbiory $J_1,\dots,J_d$ liczb naturalnych (odpowiadające indeksom podciągów), takie że $J_1\supset J_2\dots\supset J_d$ oraz dla $k=1,\dots,d$ ciąg $(x_n^{(k)})_{n\in J_k}$ jest zbieżny do pewnej liczby $b_k\in[-R,R]$. Wtedy $((x_n^{(1)},\dots,x_n^{(d)}))_{n\in J_d}$ jest podciągiem wyjściowego ciągu zbieżnym w $\mathbb{R}^d$ do $b\overset{\text{def}}{=}(b_1,\dots,b_d)$. Z domkniętości zbioru A wnioskujemy, że $b\in A$ i tym samym zbiór A jest ciągowo zwarty, czyli zwarty. □

7.20 Definicja.
Przestrzeń metryczną nazywamy przestrzenią *Heinego-Borela*, gdy wszystkie jej kule domknięte są zwarte.

7.21 Wniosek. (Twierdzenie Weierstrassa o kresach)
Jeśli $f\colon X\to\mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą określoną na niepustej zwartej przestrzeni $[T_2]$, to istnieją punkty $a,b\in X$, takie że

$$\forall x\in X\colon\ f(a)\leqslant f(x)\leqslant f(b).$$

Dowód. Z Obs. 7.4 (str. 31) wiemy, że zbiór $K\overset{\text{def}}{=}f(X)$ jest zwarty, i niepusty. Wystarczy więc pokazać, że każdy taki zbiór zawiera swoje kresy (dolny i górny). Z Wn. 7.19 wiemy, że zbiór K jest domknięty i ograniczony. Wiadomo także, że kresy zbioru niepustego są granicami pewnych ciągów o wyrazach w tym zbiorze. Zatem oba kresy zbioru K należą do K — co wynika z tego, że oba te kresy należą do $\mathbb{R}$, oraz z domkniętości zbioru K. □

7.22 Definicja.
Funkcję $f\colon(X,d)\to(Y,\varrho)$ między przestrzeniami metrycznymi nazywamy *jednostajnie ciągłą*, gdy

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x,y\in X\colon\ (d(x,y)\leqslant\delta\implies\varrho(f(x),f(y))\leqslant\varepsilon).$$

Oczywiście każda funkcja jednostajnie ciągła jest ciągła. Implikacja odwrotna (w konktekście metrycznym) jest na ogół fałszywa, aczkolwiek zachodzi

7.23 Twierdzenie.
Jeśli $f\colon(X,d)\to(Y,\varrho)$ jest funkcją ciągłą, a przestrzeń X jest zwarta, to funkcja f jest jednostajnie ciągła.

Dowód. Rozumujemy nie wprost — przypuśćmy, że funkcja nie jest jednostajnie ciągła. Oznacza to, że istnieje liczba $\varepsilon>0$ oraz dwa ciągi $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ i $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ elementów przestrzeni X, takie że

$$d(x_n,y_n)\to 0\ (n\to\infty)\qquad\text{oraz}\qquad\forall n>0\colon\ \varrho(f(x_n),f(y_n))>\varepsilon.\tag{7:9}$$

Dzięki (ciągowej) zwartości przestrzeni X, możemy założyć, zastępując oba ciągi przez ich stosowne podciągi, że $x_n\xrightarrow{X}z$ $(n\to\infty)$. Z ciągłości funkcji f w punkcie z wynika, że istnieje liczba $\delta>0$, taka że:

$$\forall w\in X\colon\ \Big(d(w,z)\leqslant\delta\implies\varrho(f(w),f(z))\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon\Big).\tag{7:10}$$

Pierwsza własność w (7:9) implikuje, że $d(x_n,z)\leqslant\delta$ oraz $d(y_n,z)\leqslant\delta$ dla dostatecznie dużych indeksów n. A wtedy (7:10) implikuje (dzięki nierówności trójkąta), że dla tychże indeksów $\varrho(f(x_n),f(y_n))\leqslant\varepsilon$, co przeczy drugiej własności w (7:9) i kończy dowód. □

7.24 Twierdzenie. (Twierdzenie Kuratowskiego o zbieżności jednostajnej)
Niech $f_1,f_2,f_3,\dots\colon(X,d)\to(Y,\varrho)$ będą funkcjami ciągłymi między przestrzeniami metrycznymi, a $g\colon X\to Y$ dowolną funkcją. Następujące warunki są równoważne:

(i) *funkcje $f_1,f_2,f_3,\dots$ zbiegają do funkcji g punktowo oraz jednostajnie (względem metryki ϱ) na każdym zwartym podzbiorze przestrzeni X;*

(ii) *funkcja g jest ciągła oraz:*

$$x_n \xrightarrow{X} x \ (n \to \infty) \implies f_n(x_n) \xrightarrow{Y} g(x) \ (n \to \infty). \tag{7:11}$$

Dowód. (i) $\implies$ (ii): Wystarczy pokazać, że funkcja g jest ciągowo ciągła i że zachodzi warunek (7:11). W tym celu oznaczmy $K \overset{\text{def}}{=} \{x_n\colon\ n > 0\} \cup \{x\}$ i zauważmy, że ze zbieżności ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ do x wynika zwartość zbioru K. W takim razie, z założenia w (i) wynika, że ciąg liczbowy $M_n \overset{\text{def}}{=} \sup_{a\in K} \varrho(f_n(a), g(a))$ zbiega do zera, a Lem. 6.14 (str. 28) implikuje, że funkcja $g|_K$ jest ciągła. Tym samym $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x)$ (czyli ciągowa ciągłość) oraz:

$$\varrho(f_n(x_n), g(x)) \leqslant \varrho(f_n(x_n), g(x_n)) + \varrho(g(x_n), g(x)) \leqslant M_n + \varrho(g(x_n), g(x)) \to 0 \ (n \to \infty),$$

gdyż funkcja g jest ciągła w x.

(ii) $\implies$ (i): Niech $K \subset X$ będzie niepustym zbiorem zwartym. Wystarczy pokazać, że funkcje $f_1|_K, f_2|_K, f_3|_K, \ldots$ są zbieżne jednostajnie do funkcji $g|_K$. Rozumujemy nie wprost — załóżmy, że zbieżności jednostajnej nie ma. Oznacza to, że istnieje liczba $\varepsilon > 0$, taka że zbiór

$$\{n > 0 | \ \exists x \in K\colon \ \varrho(f_n(x), g(x)) \geqslant \varepsilon\}$$

jest nieskończony. To z kolei oznacza, że istnieje podciąg $(\nu_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}_1$, dla którego istnieje ciąg $(x_{\nu_n})_{n=1}^{\infty} \subset K$, taki że:

$$\forall n > 0\colon \varrho(f_{\nu_n}(x_{\nu_n}), g(x_{\nu_n})) \geqslant \varepsilon. \tag{7:12}$$

Korzystając z ciągowej zwartości przestrzeni K i przechodząc do stosownego podciągu ciągu $(x_{\nu_n})_{n=1}^{\infty}$ oraz zastępując ciąg $(\nu_n)_{n=1}^{\infty}$ dobranym ciągiem indeksów, możemy ponadto założyć, że:

$$x_{\nu_n} \xrightarrow{X} x \ (n \to \infty).$$

Powiększamy powyższy (pod)ciąg $(x_{\nu_n})_{n=1}^{\infty}$ do ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ określając x_n dla indeksów n spoza zbioru wyrazów ciągu $(\nu_n)_{n=1}^{\infty}$ jako x. W ten sposób otrzymujemy ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ zbieżny do x. W takim razie z (7:11) wynika, że $\lim_{n\to\infty} \varrho(f_n(x_n), g(x)) = 0$, więc tym bardziej $\lim_{n\to\infty} \varrho(f_{\nu_n}(x_{\nu_n}), g(x)) = 0$. Ponadto, z ciągłości funkcji g wnosimy, że $\lim_{n\to\infty} \varrho(g(x_{\nu_n}), g(x)) = 0$. A stąd nierówność trójkąta daje nam $\lim_{n\to\infty} \varrho(f_{\nu_n}(x_{\nu_n}), g(x_{\nu_n})) = 0$, co jest sprzeczne z (7:12) i kończy dowód. □

7.25 Definicja.
Przestrzeń topologiczną X nazywamy *k-przestrzenią*, gdy X jest T_2 oraz dla dowolnego podzbioru A przestrzeni X zachodzi równoważność:

$$A \in \mathscr{F}(X) \iff \forall K \text{ zwarty podzbiór przestrzeni } X\colon A \cap K \in \mathscr{F}(X).$$

7.26 Obserwacja.

(a) *Zwarte przestrzenie T_2 oraz przestrzenie T_2 spełniające I A.P. są k-przestrzeniami.*

(b) *Funkcja $f\colon X \to Y$ określona na k-przestrzeni X jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $f|_K\colon K \to Y$ jest ciągła dla dowolnego zwartego podzbioru przestrzeni X.*

Dowód. (a): Dla przestrzeni zwartej T_2 nie ma co robić. W przypadku T_2-przestrzeni X spełniającej I A.P. rozumujemy tak: Niech $A \subset X$ będzie takim zbiorem, że $A \cap K \in \mathscr{F}(X)$ dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset X$. Weźmy dowolny punkt $b \in \bar{A}$. Z punktu (D) Prz. 5.9 (str. 21) wiemy, że istnieje zwykły (!) ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$ zbieżny do b. Wtedy zbiór $K \overset{\text{def}}{=} \{a_n\colon\ n > 0\} \cup \{b\}$ jest zwartym podzbiorem przestrzeni X, więc (zgodnie z naszym założeniem) zbiór $A \cap K$ jest domknięty. Ale $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset A \cap K$, zatem $b \in A \cap K \subset A$, co pokazuje domkniętość zbioru A.

(b) Załóżmy, że zawężenia funkcji f do zbiorów zwartych są ciągłe. Niech $B \in \mathscr{F}(Y)$. Pytamy, czy zbiór $A \overset{\text{def}}{=} f^{-1}(B)$ jest domknięty w X. Skoro X jest k-przestrzenią, wystarczy, że zbiór $A \cap K$ będzie domknięty w X dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset X$. Ale $A \cap K = (f|_K)^{-1}(B)$, więc jest to zbiór domknięty w K, czyli domknięty w X (bo zbiór K, będąc zwartym, jest domknięty w X). □

Stwierdzenie, że obraz zbioru zwartego poprzez funkcję ciągłą jest także zbiorem zwartym, jest niczym więcej niż prostą obserwacją (zob. Obs. 7.4, str. 31). Analogiczna własność dla przeciwobrazów prowadzi do nowego pojęcia:

7.27 Definicja.
Mówimy, że funkcja ciągła $u\colon X \to Y$ jest odwzorowaniem *właściwym*, gdy zbiór $u^{-1}(K)$ jest zwarty dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset Y$.

7.28 Twierdzenie.
Niech X będzie przestrzenią T_2, a Y k-przestrzenią. Dla funkcji ciągłej $u\colon X \to Y$ następujące warunki są równoważne:

(i) *u jest odwzorowaniem właściwym;*

(ii) *u jest odwzorowaniem domkniętym oraz zbiór $u^{-1}(\{y\})$ jest zwarty dla dowolnego punktu $y \in Y$.*

Dowód. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Wystarczy pokazać, że u jest odwzorowaniem domkniętym. Niech więc $A \subset X$ będzie zbiorem domkniętym, a $K \subset Y$ zbiorem zwartym. Wystarczy pokazać, że zbiór $u(A) \cap K$ jest domknięty (bo Y to k-przestrzeń). Z założenia wiemy, że zbiór $L \overset{\text{def}}{=} u^{-1}(K)$ jest zwarty. W takim razie także zbiór $A \cap L$ jest zwarty (zob. punkt (b) Obs. 7.4, str. 31). Z ciągłości funkcji u wynika, że zbiór $u(A \cap L)$ jest zwarty, a więc domknięty (bo Y jest T_2). Ale $u(A \cap L) = u(A \cap u^{-1}(K)) = u(A) \cap K$ i teza.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Niech $K \subset Y$ będzie zbiorem zwartym. Aby wykazać, że zbiór $L \overset{\text{def}}{=} u^{-1}(K)$ jest zwarty, korzystamy z Obs. 7.6 (str. 32). Niech zatem $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s \in S}$ będzie niepustą i scentrowaną rodziną podzbiorów zbioru L domkniętych w L. Skoro u jest funkcją ciągłą, zbiór L jest domknięty i tym samym wszystkie zbiory A_s są domknięte w X. Dorzucając do rodziny $\mathcal{A}$ zbiory postaci $\bigcap_{k=1}^{d} A_{s_k}$ gdzie $d > 0$ i $s_1, \dots, s_d \in S$, możemy dodatkowo założyć, że:

$$\forall A, B \in \mathcal{A}\colon\ A \cap B \in \mathcal{A}. \tag{7:13}$$

Z założenia w (ii) wynika, że wtedy zbiory $B_s \overset{\text{def}}{=} u(A_s)$ $(s \in S)$ są domknięte w Y. Skoro $\mathcal{A}$ jest rodziną scentrowaną, takąż jest rodzina $\{B_s\}_{s \in S}$. Ale $B_s \subset K$ i ze zwartości K wynika, że $\bigcap_{s \in S} B_s \neq \varnothing$. Niech y będzie elementem tego przecięcia. Zbiór $M \overset{\text{def}}{=} u^{-1}(\{y\})$ jest zwarty (z założenia w (ii)). Ponadto, rodzina $\mathcal{F} \overset{\text{def}}{=} \{A_s \cap M\}_{s \in S}$ składa się ze zbiorów domkniętych w M i niepustych (bo $y \in f(A_s)$ dla wszelkich $s \in S$). Z (7:13) wynika, że rodzina $\mathcal{F}$ jest scentrowana. Zatem ze zwartości przestrzeni M wynika, że $\bigcap_{s \in S}(A_s \cap M) \neq \varnothing$ i tym bardziej $\bigcap_{s \in S} A_s$ jest zbiorem niepustym — czyli zbiór L jest zwarty. □

8 Spójność

8.1 Definicja.
Mówimy, że przestrzeń topologiczna X jest *niespójna*, gdy można ją przedstawić jako sumę dwóch niepustych rozłącznych zbiorów otwartych:

$$\text{przestrzeń } X \text{ jest niespójna} \iff \exists U, V \in \mathscr{G}(X) \setminus \{\varnothing\}\colon\ U \cap V = \varnothing,\ U \cup V = X.$$

W przeciwnym przypadku mówimy, że przestrzeń X jest *spójna*.

Spójność jest jednym z kilku możliwych sposobów formalnego rozumienia intuicyjnego pojęcia przestrzeni „jednokawałkowej”.

8.2 Definicja.
Mówimy, że dwa podzbiory A i B przestrzeni topologicznej są *rozgraniczone*, gdy $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \varnothing$.

Zbiór *otwarto-domknięty* w przestrzeni topologicznej to dowolny jej podzbiór, który jest jednocześnie otwarty i domknięty.

8.3 Obserwacja.

(A) *Niech A, B, C będą podzbiorami przestrzeni topologicznej X, takimi że $A \cup B \subset C$. Następujące warunki są równoważne:*

(i) *zbiory A i B są rozgraniczone w X;*

(ii) *zbiory A i B są rozgraniczone w C;*

(iii) *zbiory A i B są rozgraniczone w $A \cup B$;*

(iv) *zbiory A i B są rozłączne oraz otwarte w $A \cup B$;*

(v) *zbiory A i B są rozłączne oraz domknięte w $A \cup B$;*

(vi) *zbiory A i B są rozłączne oraz otwarto-domknięte w $A \cup B$.*

(B) *Dla przestrzeni topologicznej X następujące warunki są równoważne:*

(i) *przestrzeń X jest niespójna;*

(ii) *istnieją dwa niepuste rozłączne zbiory domknięte C i D, takie że $X = C \cup D$;*

(iii) *istnieje niepusty właściwy zbiór otwarto-domknięty w X;*

(iv) *istnieją dwa niepuste zbiory rozgraniczone A i B, takie że $X = A \cup B$.*

(C) *Dwa zbiory otwarte, jak również dwa zbiory domknięte, są rozgraniczone wtedy i tylko wtedy, gdy są rozłączne.*

(D) *Przestrzeń topologiczna pusta lub jednoelementowa jest spójna.*

Dowód. Jako że punkty (B) oraz (C) łatwo wynikają z (A), wykażemy jedynie (A) (a (B) i (C) pozostawiamy jako [obowiązkowe] ćwiczenie; punkt (D) jest trywialny).

Aby wykazać (A), wystarczy sprawdzić, że punkty (i), (iv) i (v) tamże są równoważne. W tym celu zauważmy, że jeśli zbiory A i B są rozłączne oraz $Z \overset{\text{def}}{=} A \cup B$, to $A = Z \setminus B$ oraz $B = Z \setminus A$, co implikuje, że warunki (iv) i (v) są równoważne. Ponadto, jeśli zachodzi (i), to $A \cap B = \varnothing$ oraz $\mathrm{cl}_Z(A) = \bar{A} \cap Z = A$, bo $\bar{A} \cap B = \varnothing$ (zob. także Tw. 2.31, str. 10). Podobnie, $\mathrm{cl}_Z(B) = B$, czyli (v) wynika z (i). Na koniec załóżmy, że zachodzi (v). Wtedy $\bar{A} \cap B = \bar{A} \cap Z \cap B = \mathrm{cl}_Z(A) \cap B = A \cap B = \varnothing$ i analogicznie $A \cap \bar{B} = \varnothing$, czyli zachodzi (i). □

8.4 Twierdzenie.
Niech S będzie spójną podprzestrzenią przestrzeni topologicznej X. Jeśli $A \subset X$ jest dowolnym zbiorem, takim że

$$S \subset A \subset \bar{S}, \tag{8:1}$$

to również zbiór A jest spójny.

Dowód. Rozumujemy nie wprost — załóżmy, że przestrzeń A jest niespójna. Oznacza to, że A możemy przedstawić w postaci $A = U \cup V$, gdzie zbiory U i V są niepuste, rozłączne i otwarte w A. Warunek (8:1) oznacza, że zbiór S jest gęstym podzbiorem przestrzeni A. W takim razie zbiory $S \cap U$ oraz $S \cap V$ są niepuste. Są one także rozłączne i otwarte w S oraz $S = (S \cap U) \cup (S \cap V)$, co implikuje, że zbiór S jest niespójny — i koniec dowodu. □

8.5 Definicja.
Mówimy, że rodzina $\mathcal{F}$ podzbiorów przestrzeni topologicznej jest *topologicznie spójna*, gdy:

$$\forall A, B \in \mathcal{F}\ \exists N > 0\ \exists C_0, \ldots, C_N \in \mathcal{F}\colon \begin{cases} C_0 = A,\ C_N = B, \\ \text{zbiory } C_k \text{ i } C_{k-1} \textbf{ nie są} \text{ rozgraniczone dla } k \in \{1, \ldots, N\}. \end{cases}$$

8.6 Twierdzenie.
Suma mnogościowa topologicznie spójnej rodziny zbiorów spójnych jest zbiorem spójnym.

Dowód. Dowodzimy nie wprost: załóżmy, że istnieje topologicznie spójna rodzina $\mathcal{F}$ spójnych podzbiorów przestrzeni topologicznej X, taka że zbiór $S \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup \mathcal{F}$ jest niespójny. Oznacza to, że przestrzeń S możemy przedstawić w postaci $S = U \cup V$, gdzie zbiory U i V są niepuste, rozłączne i otwarte w S. Na wstępie zauważmy, że:

$$\forall D \in \mathcal{F}\colon\ D \subset U \ \vee\ D \subset V. \tag{8:2}$$

Istotnie, powyższa własność wynika z tego, że każdy zbiór D z rodziny $\mathcal{F}$ jest spójny i zawiera się w $U \cup V$ oraz zbiory $D \cap U$ i $D \cap V$ są rozłączne i otwarte w D.

Z niepustości zbiorów U i V wnosimy, że istnieją zbiory $A, B \in \mathcal{F}$, takie że $A \cap U \neq \varnothing$ i $B \cap V \neq \varnothing$. Z (8:2) i rozłączności zbiorów U i V wynika, że w takim razie $A \subset U$ i $B \subset V$. Niech $C_0, \dots, C_N \in \mathcal{F}$ (gdzie $N > 0$) będą takimi zbiorami, że $C_0 = A$, $C_N = B$ oraz zbiory C_k i C_{k-1} nie są rozgraniczone dla $k = 1, \dots, N$. Niech $p \in \{0, \dots, N\}$ będzie najmniejszym indeksem, takim że $C_p \subset V$. Wtedy $p > 0$ (bo $\varnothing \neq A = C_0 \subset U$) i $C_{p-1} \subset U$ (dzięki (8:2)). Ale wtedy zbiory $E \stackrel{\text{def}}{=} C_{p-1}$ i $F \stackrel{\text{def}}{=} C_p$ nie są rozgraniczone, gdyż oba są otwarte w $H \stackrel{\text{def}}{=} E \cup F$, dlatego że $H \cap U = E$ oraz $H \cap V = F$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód twierdzenia. □

8.7 Wniosek.
Niech $\{A_s\}_{s \in S}$ będzie niepustą rodziną spójnych podzbiorów przestrzeni topologicznej X. Jeśli

- $\exists t \in S\ \forall s \in S\colon\ A_s \cap A_t \neq \varnothing$; *lub*
- $\bigcap_{s \in S} A_s \neq \varnothing$,

to zbiór $\bigcup_{s \in S} A_s$ jest spójny.

Dowód. Wystarczy zauważyć, że w obu ww. przypadkach rodzina $\{A_s\}_{s \in S}$ jest topologicznie spójna, a następnie zastosować poprzednie twierdzenie. □

8.8 Twierdzenie.
Zbiór w $\mathbb{R}$ jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy jest przedziałem, singletonem lub zbiorem pustym. Precyzyjnie: zbiór $I \subset \mathbb{R}$ mocy większej niż 1 jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy $(\inf(I), \sup(I)) \subset I$.

Dowód. Ponieważ przestrzeń pusta i przestrzenie jednoelementowe są w sposób ewidentny spójne, możemy założyć, że badany zbiór I ma więcej niż 1 element. Jeśli $(\inf(I), \sup(I)) \not\subset I$, to istnieje liczba $c \notin I$, taka że $\inf(I) < c < \sup(I)$. Obie te nierówności implikują, że wtedy zbiory $U \stackrel{\text{def}}{=} I \cap (-\infty, c)$ oraz $V \stackrel{\text{def}}{=} I \cap (c, \infty)$ są niepuste. Ponadto, są one rozłączne i otwarte w I oraz $I = U \cup V$, czyli zbiór I jest niespójny.

Pozostaje pokazać, że jeśli $(\inf(I), \sup(I)) \subset I$, to zbiór I jest spójny. Ten przypadek łatwo można zredukować (dzięki Wn. 8.7) do zagadnienia spójności przedziału postaci $[a, b]$, gdzie $-\infty < a < b < \infty$. (Istotnie: ustalamy $c \in (\inf(I), \sup(I))$ i zapisujemy $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, gdzie $a_n = \inf(I)$, gdy $\inf(I) \in I$, a w przeciwnym przypadku liczby $a_n \in I \cap (-\infty, c)$ zbiegają do $\inf(I)$; analogiczne reguły dla ciągu $b_n \in I \cap (c, \infty)$). Dlatego poniżej zakładamy, że $I = [a, b]$.

Dla dowodu nie wprost, załóżmy, że $[a, b] = K \cup L$, gdzie K i L to dwa niepuste, domknięte i rozłączne podzbiory przedziału $[a, b]$, przy czym $b \in L$. Zbiór K jako domknięty i ograniczony jest zwarty, więc (np.) z Wn. 7.21 (str. 36) wynika, że liczba $c \stackrel{\text{def}}{=} \sup(K)$ należy do K. Zatem $c < b$. Jednocześnie $K \cap (c, b) = \varnothing$ i tym samym $(c, b) \subset L$. Ale L jest zbiorem domkniętym, więc $c \in L$, co oznacza, że $c \in K \cap L$, i przeczy rozłączności zbiorów K i L. Otrzymana sprzeczność dowodzi spójności przedziału. □

8.9 Definicja.
Krzywa lub *droga* w przestrzeni topologicznej X to dowolna funkcja ciągła z (niezdegenerowanego) przedziału $[a, b]$ w X. Dla punktów $x, y \in X$ *drogą od x do y* (lub *krzywą od x do y*; *drogą/krzywą łączącą x i y*) nazywamy dowolną drogę $\gamma\colon [a, b] \to X$, taką że $\gamma(a) = x$ oraz $\gamma(b) = y$.

Drogę, która jest zanurzeniem topologicznym, nazywamy *łukiem.* W analogiczny sposób (do powyższego) definiujemy *łuk od x do y.*

8.10 Definicja.
Mówimy, że przestrzeń topologiczna X jest

- *drogowo spójna*, gdy dla dowolnych punktów $x, y \in X$ istnieje droga w X od x do y;
- *łukowo spójna*, gdy dla dowolnych różnych punktów $x, y \in X$ istnieje łuk w X od x do y.

8.11 Obserwacja.
Niech $f\colon X \to Y$ będzie funkcją ciągłą oraz $S \subset X$. Jeśli zbiór S jest spójny lub drogowo spójny, to takiż jest zbiór $f(S)$.

Dowód. Najpierw załóżmy, że zbiór S jest spójny i niech $B \subset f(S)$ będzie zbiorem otwarto-domkniętym w $f(S)$. Wtedy zbiór $f^{-1}(B) \cap S$ jest otwarto-domknięty w S. Ze spójności zbioru S wnosimy, że $f^{-1}(B) \cap S = \varnothing$ (i wtedy $B = \varnothing$) lub $S \subset f^{-1}(B)$ (i wtedy $B = f(S)$). Tym samym przestrzeń $f(S)$ nie zawiera niepustego właściwego podzbioru otwarto-domkniętego, czyli jest przestrzenią spójną.

Załóżmy teraz, że zbiór S jest drogowo spójny. Dla $x, y \in f(S)$ istnieją punkty $u, v \in S$, takie że $f(u) = x$ oraz $f(v) = y$. Z naszego założenia wynika, że istnieje droga $\gamma\colon [a, b] \to S$, taka że $\gamma(a) = u$ i $\gamma(b) = v$. Wtedy $f \circ \gamma\colon [a, b] \to f(S)$ jest drogą od x do y i tym samym zbiór $f(S)$ jest drogowo spójny. $\square$

8.12 Wniosek.
Każda przestrzeń łukowo spójna jest drogowo spójna. Każda przestrzeń drogowo spójna jest spójna.

Dowód. Pierwsza własność jest natychmiastowa (funkcje stałe to drogi od punktu do tego samego punktu). Aby wykazać drugą z nich, ustalmy niepustą przestrzeń drogowo spójną X i jej dowolnie ustalony punkt $a \in X$. Dla dowolnego punktu $x \in X$ istnieje droga γ_x od a do x. Z Obs. 8.11 oraz Tw. 8.8 wynika, że zbiór $S_x \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{im}(\gamma_x)$ jest spójny. Ponadto, $a, x \in S_x$. Tym samym $X = \bigcup_{x \in X} S_x$ oraz ta suma zbiorów jest zbiorem spójnym — dzięki Wn. 8.7. $\square$

Zachodzi także ważne (aczkolwiek znacznie trudniejsze w dowodzie; zob. Wn. 14.8, str. 81):

8.13 Twierdzenie.
W przestrzeniach Hausdorffa drogowa i łukowa spójność są równoważne, tzn. drogowo spójna przestrzeń T_2 jest łukowo spójna.

(*bez dowodu*)

8.14 Obserwacja.
Dla punktu p w przestrzeni topologicznej X niech

$$S(p) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid \exists C \subset X\colon\ C \text{ zbiór spójny},\ p, x \in C\}$$

oraz

$$S_{arc}(p) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid \exists \gamma\colon\ \gamma \text{ droga od } p \text{ do } x\}.$$

Zbiór $S(p)$ jest spójny, zawiera punkt p i jest największym zbiorem spójnym w X zawierającym punkt p. Podobnie, zbiór $S_{arc}(p)$ jest drogowo spójny, zawiera punkt p i jest największym zbiorem drogowo spójnym zawierającym punkt p.

Dowód. Ponieważ przestrzeń $\{p\}$ jest drogowo spójna, $p \in S(p) \cap S_{arc}(p)$. Ponadto, zauważmy, że

$$S(p) = \bigcup \{C \subset X\colon\ C \text{ zbiór spójny},\ p \in C\}$$

i analogicznie

$$S_{arc}(p) = \bigcup\{C \subset X\colon\ C \text{ zbiór drogowo spójny},\ p \in C\}.$$

Z powyższego wynika od razu, że zbiór $S(p)$ jest spójny (dzięki Wn. 8.7). Pozostaje więc wykazać, że zbiór $S_{arc}(p)$ jest drogowo spójny. W tym celu ustalmy punkty $x, y \in S_{arc}(p)$. Wtedy istnieją drogi $\gamma_1\colon [a,b] \to X$ oraz $\gamma_2\colon [c,d] \to X$, takie że $\gamma_1(a) = \gamma_2(c) = p$, $\gamma_1(b) = x$ i $\gamma_2(d) = y$. Podstawiając do krzywej γ_1 stosownie dobraną ściśle malejącą funkcję afiniczną, a do funkcji γ_2 ściśle rosnącą takąż, możemy założyć, że $[a,b] = [0,1]$, $\gamma_1(0) = x$, $\gamma_1(1) = p$, $[c,d] = [1,2]$, $\gamma_2(1) = p$ oraz $\gamma_2(2) = y$. W tej sytuacji Tw. 4.9 (str. 18) pokazuje, że zlepienie $\gamma_0\colon [0,2] \to X$ tych dwóch krzywych jest krzywą od x do y. Ponadto, $\mathrm{im}(\gamma_0)$ jest zbiorem drogowo spójnym zawierającym punkt p, więc $\mathrm{im}(\gamma_0) \subset S_{arc}(p)$, czyli zbiór $S_{arc}(p)$ jest drogowo spójny. □

8.15 Definicja.
Składowa (*spójna*) *w punkcie* $p \in X$ przestrzeni topologicznej X to zbiór $S(p)$ z Obs. 8.14, czyli największy spójny podzbiór przestrzeni X zawierający punkt p. Analogicznie, *składowa drogowa* (lub *łukowa*) *w punkcie* p przestrzeni X to zbiór $S_{arc}(p)$ z Obs. 8.14, czyli największy drogowo spójny podzbiór przestrzeni X zawierający punkt p. *Składowa* (odp. *składowa drogowa*) przestrzeni X to taka składowa w pewnym punkcie.

8.16 ***Uwaga****.*
Składowa jest zawsze zbiorem niepustym. Tym samym przestrzeń pusta nie ma żadnych składowych. Jest to zarazem jedyna spójna (odpowiednio drogowo spójna) przestrzeń topologiczna, która nie pokrywa się z żadną swoją składową (odp. składową drogową).

8.17 Twierdzenie.
Niech X będzie przestrzenią topologiczną.

(a) *Każda składowa przestrzeni X jest zbiorem domkniętym.*

(b) *Składowe tworzą podział zbioru X (tzn. są niepuste, parami rozłączne i pokrywają zbiór X).*

(c) *Składowe drogowe tworzą podział zbioru X.*

Dowód. (a): Niech S będzie składową przestrzeni X, powiedzmy w punkcie p. Wtedy zbiór $\bar{S}$ jest spójny (dzięki Tw. 8.4) i zawiera punkt p. W takim razie $\bar{S} \subset S$, czyli zbiór S jest domknięty.

(b): Wystarczy pokazać, że dwie różne składowe są rozłączne. Niech więc S_1 i S_2 będą składowymi przestrzeni X, takimi że $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$. Wtedy zbiór $S_1 \cup S_2$ jest spójny (z Wn. 8.7), więc z maksymalności składowych otrzymujemy $S_1 \cup S_2 \subset S_1$ i podobnie $S_1 \cup S_2 \subset S_2$, i tym samym $S_1 = S_2$.

(c): Podobnie jak w (b), wystarczy pokazać, że dwie różne składowe drogowe są rozłączne. Niech więc S_j dla $j = 1, 2$ będzie składową drogową w punkcie $p_j \in X$. Załóżmy, że $p_0 \in S_1 \cap S_2$. Niech S_0 będzie składową drogową w punkcie p_0. Ponieważ S_0 to największy zbiór drogowo spójny zawierający p_0, zatem $S_1 \subset S_0$ oraz $S_2 \subset S_0$. Tym samym $p_1, p_2 \in S_0$. Skoro S_j to największy zbiór drogowo spójny zawierający p_j ($j = 1, 2$), otrzymujemy $S_0 \subset S_1$ i $S_0 \subset S_2$. Tak więc $S_1 = S_0 = S_2$. □

8.18 Przykład.
Niech $S_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, \sin(\pi/x))\colon\ x \in (0,1]\}$ oraz $S_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{0\} \times [-1,1]$. Nietrudno przekonać się, że:

- oba zbiory S_1 i S_2 są drogowo spójne;
- $\bar{S}_1 = S_1 \cup S_2$.

Z Tw. 8.4 wynika, że zbiór $K \stackrel{\text{def}}{=} \bar{S}_1$ jest spójny. Nie jest to jednak zbiór drogowo spójny, co uzasadniamy w następnym akapicie. Tym samym zwarte metryzowalne przestrzenie spójne nie muszą być drogowo spójne, a składowe drogowe nie muszą być zbiorami domkniętymi.

Aby pokazać, że zbiór K nie jest drogowo spójny, najpierw zauważmy, że:

($*$) dla dowolnego punktu $p = (u,v) \in S_1 \setminus \{q\}$, gdzie $q = (1,0)$, zbiór $K \setminus \{p\}$ ma dwie składowe: $K \cap ((-\infty, u) \times \mathbb{R})$ oraz $K \cap ((u, \infty) \times \mathbb{R})$.

Przypuśćmy teraz, dla dowodu nie wprost, że istnieje droga w K od $(0,0)$ do q, powiedzmy $\gamma\colon [0,1] \to K$. Zapiszmy $\gamma(t) =: (\alpha(t), \beta(t))$. Funkcje $\alpha\colon [0,1] \to [0,1]$ oraz $\beta\colon [0,1] \to [-1,1]$ są ciągłe. Z własności $(*)$ wynika, że:

$(**)$ jeśli $\alpha(s) > 0$ dla pewnej liczby $s \in (0,1]$, to $S_1 \cap ((-\infty, \alpha(s)] \times \mathbb{R}) \subset \gamma([0,s])$.

Ponieważ $(\frac{2}{4n+1}, 1), (\frac{2}{4n-1}, -1) \in S_1$ dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}_1$, własność $(**)$ pozwala określić (indukcyjnie) dwa ciągi $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ i $(v_n)_{n=1}^{\infty}$, takie że:

$$0 < u_{n+1} < v_n < u_n < 1$$

oraz $\beta(u_n) = 1$ i $\beta(v_n) = -1$ dla wszelkich $n > 0$. Wtedy ciąg $u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots$ jest ściśle malejący, więc zbieżny, powiedzmy do liczby $c \in [0,1]$. Z ciągłości funkcji β otrzymujemy nieprawdziwą równość: $1 = \lim_{n\to\infty} \beta(u_n) = \beta(c) = \lim_{n\to\infty} \beta(v_n) = -1$, co kończy dowód.

8.19 Definicja.
Skończony układ punktów $z_0, \ldots, z_N$ w przestrzeni metrycznej (X,d) nazywamy *ε-ścieżką od a do b* (gdzie $\varepsilon > 0$), gdy $N > 0$, $z_0 = a$, $z_N = b$ oraz $d(z_k, z_{k-1}) \leqslant \varepsilon$ dla $k = 1, \ldots, N$. Mówimy wtedy także, że punkty a i b są połączone ε-ścieżką $z_0, \ldots, z_N$.

Mówimy, że przestrzeń metryczna jest *metrycznie spójna*, gdy jej dowolne dwa punkty można połączyć ε-ścieżką dla wszelkich $\varepsilon > 0$.

8.20 Twierdzenie.

(A) *Spójna przestrzeń metryczna (X,d) jest metrycznie spójna.*

(B) *Zwarta metrycznie spójna przestrzeń metryczna jest spójna.*

Dowód. (A): Niech $\varepsilon > 0$. W dowodzie wykorzystamy klasyczną metodę *dobrych punktów* stosowaną w przestrzeniach spójnych. Mianowicie, ustalmy dowolnie „startowy” punkt $a \in X$ i niech D składa się z wszystkich „dobrych” punktów, czyli takich, które można połączyć ε-ścieżką z punktem a. Przywołana metoda polega na tym, by wykazać, że D jest niepustym zbiorem otwarto-domkniętym w X. Wtedy, ze spójności X, otrzymamy $D = X$, co zakończy dowód tego punktu.

W tej konkretnej sytuacji zbiór D spełnia równanie $D = \bigcup_{x\in D} B_d(x,\varepsilon)$ oraz zawiera punkt a. Przywołane równanie implikuje, że zbiór D jest otwarto-domknięty — i teza.

(B): Dowodzimy nie wprost. Załóżmy więc, że (K,d) jest zwartą metrycznie spójną przestrzenią metryczną, taką że $K = A \cup B$ dla pewnych niepustych i rozłącznych zbiorów domkniętych A i B w K. Z Tw. 6.10 (str. 26) funkcja $\mathrm{dist}_d(\cdot, B)$ przyjmuje wartości dodatnie na zbiorze A. W takim razie Wn. 7.21 (str. 36) implikuje, że istnieje liczba $\varepsilon > 0$, taka że $\mathrm{dist}_d(a,B) \geqslant 2\varepsilon$ dla wszelkich $a \in A$. Ustalmy dowolnie punkty $a \in A$ oraz $b \in B$ i dobierzmy ε-ścieżkę $z_0, \ldots, z_N$ od a do b. Niech $p \in \{0, \ldots, N\}$ będzie najmniejszym indeksem, takim że $z_p \in B$. Wtedy $p > 0$ i $z_{p-1} \notin B$. W takim razie $z_{p-1} \in A$ i tym samym $2\varepsilon \leqslant \mathrm{dist}_d(z_{p-1}, B) \leqslant d(z_{p-1}, z_p) \leqslant \varepsilon$, co jest niemożliwe. ☐

8.21 Przykład.
Zwartość w punkcie (B) powyższego twierdzenia jest koniecznym założeniem. Istotnie, przestrzeń $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ |x|y = 1\}$ jest metrycznie spójną przestrzenią Heinego-Borela, która jest niespójna.

8.22 Definicja.
Przestrzeń topologiczną X nazywamy:

- *dziedzicznie niespójną*, gdy jedynymi jej podzbiorami spójnymi są singletony i zbiór pusty;
- *całkowicie niespójną*, gdy dla dowolnych dwóch różnych punktów $x, y \in X$ istnieje zbiór otwarto-domknięty $U \subset X$, taki że $U \cap \{x,y\} = \{x\}$;
- *zerowymiarową* (inaczej: $\mathrm{ind}(X) = 0$), gdy zbiory otwarto-domknięte tworzą bazę topologii;

- *mocno zerowyniarową* (inaczej: $\mathrm{Ind}(X) = 0$), gdy dla dowolnych dwóch rozłącznych zbiorów domkniętych $A, B \subset X$ istnieje zbiór otwarto-domknięty U, taki że $A \subset U$ i $U \cap B = \varnothing$;
- *ekstremalnie niespójną*, gdy zbiór $\bar{U}$ jest otwarty dla dowolnego zbioru otwartego $U \subset X$.

8.23 Obserwacja.

(A) *Przestrzeń dziedzicznie niespójna jest T_1.*

(B) *Przestrzeń całkowicie niespójna jest dziedzicznie niespójna.*

(C) *Zerowymiarowa T_1-przestrzeń jest całkowicie niespójna i regularna.*

(D) *Mocno zerowymiarowa T_1-przestrzeń jest zerowymiarowa i normalna.*

Dowód. (A): W przestrzeni dziedzicznie niespójnej składowe są singletonami, a składowe są zawsze domknięte.

(B): Teza wynika stąd, że każda składowa zawiera się albo w (ustalonym) zbiorze otwarto-domkniętym, albo w jego dopełnieniu.

(C),(D): ćwiczenie (obowiązkowe). □

8.24 ***Uwaga.***
Dowodzi się, że każda ekstremalnie niespójna przestrzeń metryzowalna jest dyskretna. Istnieje bardzo wiele nieskończonych T_2-przestrzeni, które są zwarte i ekstremalnie niespójne, ale żadna z nich nie jest „namacalna” (i na drodze do nich zawsze pojawia się pewnik wyboru).

8.25 Twierdzenie.
Zwarta dziedzicznie niespójna T_2-przestrzeń K jest mocno zerowymiarowa.

Dowód. Dowód przeprowadzimy w trzech krokach.

Krok 1: Dla dowolnego punktu $a \in K$, $\{a\} = \bigcap \mathfrak{F}(a)$, gdzie $\mathfrak{F}(a) \overset{\text{def}}{=} \{U \in \mathscr{G}(K) \cap \mathscr{F}(K) \colon\ a \in U\}$.

Dowód kroku 1: Oczywiście $K \in \mathfrak{F}(a)$ oraz $a \in S \overset{\text{def}}{=} \bigcap \mathfrak{F}(a)$. Dla dowodu nie wprost, przypuśćmy, że $\mathrm{card}(S) > 1$. Wtedy zbiór S jest niespójny (bo przestrzeń K jest dziedzicznie niespójna). W takim razie możemy zapisać $S = A \cup B$, gdzie zbiory A i B są niepuste, rozłączne i domknięte w S, oraz $a \in A$. Wtedy zbiory A i B są domknięte w X, gdyż $S \in \mathscr{F}(K)$ (jako przecięcie niepustej rodziny zbiorów domkniętych). Z normalności przestrzeni K (zob. Tw. 7.9, str. 33) wynika istnienie rozłącznych zbiorów otwartych U i V, takich że $A \subset U$ oraz $B \subset V$. Wtedy rodzina $\{F \setminus (U \cup V) \colon\ F \in \mathfrak{F}(a)\}$ ma puste przecięcie, jest zamknięta na skończone przecięcia i składa się ze zbiorów domkniętych (w przestrzeni zwartej K). W takim razie z Obs. 7.6 (str. 32) wynika, że rodzina ta nie jest scentrowana, więc zawiera zbiór pusty. Innymi słowy, $F \subset U \cup V$ dla pewnego zbioru $F \in \mathfrak{F}(a)$. Zauważmy, że wtedy:

- $a \in D \overset{\text{def}}{=} F \cap U$;
- $D \in \mathscr{G}(K)$;
- $D \in \mathscr{F}(K)$, gdyż $D = F \setminus V$.

W takim razie $D \in \mathfrak{F}(a)$, a stąd $S \subset D \subset U$, czyli $B = \varnothing$ — i sprzeczność.

Krok 2: Zbiory otwarto-domknięte tworzą bazę topologii.

Dowód kroku 2: Niech $U \in \mathscr{G}(X)$ oraz $a \in U$. Wystarczy pokazać, że $V \subset U$ dla pewnego zbioru $V \in \mathfrak{F}(a)$. Z kroku 1 wynika, że rodzina $\{F \setminus U \colon\ F \in \mathfrak{F}(a)\}$ ma puste przecięcie, mimo że jest zamknięta na skończone przecięcia i składa się ze zbiorów domkniętych. W takim razie — argumentując podobnie jak w dowodzie kroku 1 — wnioskujemy, że rodzina ta zawiera zbiór pusty — i teza.

Krok 3: Przestrzeń K jest mocno zerowymiarowa.

Dowód kroku 3: Niech A i B będą rozłącznymi zbiorami domkniętymi w X. Możemy założyć, że $A \neq \varnothing$. Z kroku 2 wynika, że dla dowolnego punktu $a \in A$ istnieje zbiór $V_a \in \mathfrak{F}(a)$, taki że $V_a \subset X \setminus B$. Z pokrycia otwartego $\{V_a\}_{a \in A}$ zbioru zwartego A możemy wybrać podpokrycie skończone: $A \subset U \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{k=1}^{n} V_{a_k}$ dla pewnych punktów $a_1, \ldots, a_n \in A$. Zbiór U jest szukanym zbiorem otwarto-domkniętym. □

8.26 Przykład. (Zbiór Cantora)
W tym przykładzie skonstruujemy tzw. (*klasyczny*) *zbiór Cantora*, który oznaczymy przez $\mathcal{C}$. Jest to zwarty dziedzicznie niespójny podzbiór odcinka $[0,1]$ bez punktów izolowanych, mocy $2^{\aleph_0}$.

Niech $I_0 = [0,1/3]$ i $I_1 = [2/3,1]$. Indukcyjnie określamy przedziały $I_{\nu_1\ldots\nu_n}$, gdzie $n > 0$ oraz $\nu_1,\ldots,\nu_n \in \{0,1\}$. Mając już określony przedział $I_{\nu_1\ldots\nu_n}$ jako, powiedzmy, $[\alpha,\beta]$, definiujemy: $I_{\nu_1\ldots\nu_n 0} \stackrel{\text{def}}{=} [\alpha, \frac{2\alpha+\beta}{3}]$ oraz $I_{\nu_1\ldots\nu_n 1} \stackrel{\text{def}}{=} [\frac{\alpha+2\beta}{3},\beta]$ (innymi słowy: przedział $I_{\nu_1\ldots\nu_n}$ dzielimy na 3 przedziały równej długości i usuwamy środkowy). W ten sposób określona rodzina przedziałów ma następujące własności:

($\mathcal{C}$1) $\operatorname{diam}(I_{\nu_1\ldots\nu_n}) = 3^{-n}$;

($\mathcal{C}$2) $I_{\nu_1\ldots\nu_n\lambda} \subset I_{\nu_1\ldots\nu_n}$;

($\mathcal{C}$3) $I_{\nu_1\ldots\nu_n} \cap I_{\mu_1\ldots\mu_n} = \varnothing$ gdy $(\nu_1,\ldots,\nu_n) \neq (\mu_1,\ldots,\mu_n)$.

Oznaczmy teraz $J_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup\{I_{\nu_1\ldots\nu_n}\colon\ \nu_1,\ldots,\nu_n \in \{0,1\}\}$ i zdefiniujmy

$$\mathcal{C} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n.$$

Korzystając z własności ($\mathcal{C}$1)–($\mathcal{C}$3), nietrudno dowodzi się, że funkcja $\kappa\colon \{0,1\}^{\mathbb{N}_1} \to \mathcal{C}$ zadana regułą:

$$\kappa((\nu_n)_{n=1}^{\infty}) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{\nu_1\ldots\nu_n}$$

jest poprawnie określoną bijekcją, a przestrzeń $\mathcal{C}$ nie ma punktów izolowanych i jest dziedzicznie niespójna. Okazuje się, że każda niepusta przestrzeń, która jest zwarta, metryzowalna, dziedzicznie niespójna i nie ma punktów izolowanych, jest homeomorficzna z $\mathcal{C}$ (twierdzenie Brouwera). Szczegóły pozostawiamy jako ćwiczenie.

9 Zupełne przestrzenie metryczne

9.1 Definicja.
Ciąg *Cauchy'ego* lub *fundamentalny* (względem metryki d) w przestrzeni metrycznej (X,d) to dowolny ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$, taki że:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0\ \forall n,m \geqslant N\colon\ d(x_n,x_m) \leqslant \varepsilon.$$

Mówimy, że przestrzeń metryczna (X,d) jest *zupełna* lub że metryka d jest *zupełna* (na zbiorze X), gdy każdy ciąg Cauchy'ego elementów przestrzeni X jest zbieżny.

9.2 Obserwacja.
Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną.

(A) *Niech $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$.*
   - (a) *Jeśli ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny, to jest ciągiem Cauchy'ego.*
   - (b) *Jeśli $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego i ma podciąg zbieżny do $a \in X$, to $x_n \to a$ $(n \to \infty)$.*
   - (c) *Jeśli $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego, to wyrazy tego ciągu tworzą zbiór ograniczony (w metryce d).*

(B) *Niech $A \subset X$.*
   - (a) *Jeśli przestrzeń metryczna (A,d) jest zupełna, to zbiór A jest domknięty w X.*
   - (b) *Jeśli (X,d) jest przestrzenią metryczną zupełną, to przestrzeń metryczna (A,d) jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór A jest domknięty w X.*

(C) *Jeśli przestrzeń (X,d) jest Heinego-Borela, to jest zupełna.*

(D) *Istnieje przestrzeń metryczna zupełna $(\bar{X},\bar{d})$, taka że $(X,d) \subset (\bar{X},\bar{d})$ (tzn. $X \subset \bar{X}$ oraz metryka $\bar{d}$ przedłuża metrykę d) oraz zbiór X jest gęsty w $\bar{X}$.*

Każdą przestrzeń metryczną $(\bar{X}, \bar{d})$ o własnościach opisanych w powyższym punkcie (D) nazywamy *uzupełnieniem* (metrycznym) przestrzeni metrycznej (X, d).

Dowód. (A): Najpierw załóżmy, że $x_n \to a \in X$ $(n \to \infty)$. Wtedy dla dowolnie dobranej liczby $\varepsilon > 0$ możemy wskazać liczbę całkowitą $N > 0$, taką że $d(x_n, a) \leqslant \varepsilon/2$ dla $n \geqslant N$. A wtedy, dla $n, m \geqslant N$ otrzymujemy $d(x_n, x_m) \leqslant d(x_n, a) + d(a, x_m) \leqslant \varepsilon$.

Teraz załóżmy, że $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego. Wtedy istnieje indeks $N > 0$, taki że $d(x_n, x_m) \leqslant 1$ dla $n, m \geqslant N$. A wtedy dla dowolnych indeksów $n, m > 0$ mamy

$$d(x_n, x_m) \leqslant d(x_n, x_N) + d(x_N, x_m) \leqslant 2\max(1, d(x_1, x_N), \dots, d(x_N, x_N)),$$

czyli wyrazy tego ciągu tworzą zbiór ograniczony. Dalej, jeśli $(x_{\nu_n})_{n=1}^{\infty}$ jest podciągiem zbieżnym do a, to dla zadanej liczby $\varepsilon > 0$ możemy dobrać liczby $N > 0$ oraz $k > 0$, takie że $d(x_n, x_m) \leqslant \varepsilon/2$ dla $n, m \geqslant N$ oraz $d(x_{\nu_n}, a) \leqslant \varepsilon/2$ dla $n \geqslant k$. Niech teraz $n \geqslant N$. Istnieje indeks $m \geqslant k$, taki że $\nu_m \geqslant N$, a więc:

$$d(x_n, a) \leqslant d(x_n, x_{\nu_m}) + d(x_{\nu_m}, a) \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

co pokazuje, że ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ zbiega do a, i kończy dowód punktu (A).

(B): Najpierw załóżmy, że przestrzeń (A, d) jest zupełna. Niech $a \in \bar{A}$. Wtedy istnieje ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$ zbieżny do a. Z punktu (A) wnioskujemy, że ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest Cauchy'ego (jako zbieżny), więc z zupełności zbioru A wynika, że $a_n \to b$ $(n \to \infty)$ dla pewnego punktu $b \in A$. Ale wtedy ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ma w przestrzeni X dwie granice: a i b. Z własności T_2 wnioskujemy, że zatem $a = b \in A$, czyli zbiór A jest domknięty.

Odwrotnie: załóżmy, że przestrzeń (X, d) jest zupełna, i niech $A = \bar{A}$. Jeśli $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$ jest ciągiem Cauchy'ego, to z zupełności przestrzeni X wynika, że $x_n \xrightarrow{X} a$ $(n \to \infty)$ dla pewnego punktu $a \in X$, natomiast z domkniętości zbioru A wynika, że $a \in A$, czyli przestrzeń (A, d) jest zupełna.

(C): Niech $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni Heinego-Borela (X, d). Z punktu (A) wynika, że $\{x_n\colon\ n > 0\} \subset \bar{B}_d(a, R)$ dla pewnych $a \in X$ oraz $R > 0$. Ze zwartości kuli $\bar{B}_d(a, R)$ wynika, że w takim razie ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ma podciąg zbieżny, a zatem — jako ciąg Cauchy'ego — cały ten ciąg jest zbieżny (ponownie dzięki (A)).

(D): Ponieważ pusta przestrzeń metryczna jest zupełna, możemy założyć, że $X \neq \varnothing$. Niech $\ell_\infty(X)$ będzie przestrzenią wektorową wszystkich rzeczywistych funkcji ograniczonych na zbiorze X; czyli $f \in \ell_\infty(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f\colon X \to \mathbb{R}$ oraz $\operatorname{diam}(f(X)) < \infty$. Przestrzeń tę wyposażamy w normę supremum:

$$\|f\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in X} |f(x)|$$

(sprawdzenie, że w istocie jest to norma, pozostawiamy jako obowiązkowe ćwiczenie). Dla kompletności wykładu, pokażemy, że ta przestrzeń unormowana jest zupełna (tzn. że metryka indukowana przez tę normę jest zupełna).

Niech więc $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \ell_\infty(X)$ będzie ciągiem Cauchy'ego. Wtedy dla dowolnego punktu $x \in X$ ciąg liczbowy $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ także jest Cauchy'ego, gdyż

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n - f_m\|_\infty. \tag{9:1}$$

Z punktu (C) wiemy, że przestrzeń $\mathbb{R}$ jest zupełna, więc ciąg $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny, powiedzmy do $g(x)$. W ten sposób otrzymujemy funkcję $g\colon X \to \mathbb{R}$. Z punktu (A) wynika, że $\|f_n - f_m\|_\infty \leqslant R$ dla pewnej liczby $R > 0$ i wszelkich $n, m > 0$. Nierówność ta, w połączeniu z (9:1), daje — po podstawieniu $n = 1$ i przejściu z m do ∞ — $|f_1(x) - g(x)| \leqslant R$, a zatem $|g(x)| \leqslant |f_1(x)| + R \leqslant \|f_1\|_\infty + R$, czyli $g \in \ell_\infty(X)$. Na koniec, dla dowolnie zadanej liczby $\varepsilon > 0$ znajdziemy indeks $N > 0$, taki że $\|f_n - f_m\|_\infty \leqslant \varepsilon$ dla $n, m \geqslant N$. Niech $n \geqslant N$. Do (9:1) podstawiamy $m \geqslant N$, by otrzymać $|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon$. Następnie przechodzimy z m do nieskończoności, by otrzymać $|f_n(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon$. Tym samym $\|f_n - g\|_\infty \leqslant \varepsilon$, co oznacza, że $f_n \xrightarrow{\ell_\infty(X)} g$, czyli przestrzeń $\ell_\infty(X)$ jest zupełna.

Przechodzimy do dalszej części dowodu punktu (D). Ustalmy $a \in X$ i dla dowolnego punktu $x \in X$ niech $\mathfrak{e}_x\colon X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją daną wzorem:

$$\mathfrak{e}_x(z) \stackrel{\text{def}}{=} d(z, x) - d(z, a).$$

Zauważmy, że $|\mathfrak{e}_x(z)| \leqslant d(x, a)$, czyli $\mathfrak{e}_x \in \ell_\infty(X)$. Otrzymujemy w ten sposób odwzorowanie*5)

$$J\colon X \ni x \mapsto \mathfrak{e}_x \in \ell_\infty(X).$$

Twierdzimy, że jest ono izometryczne. Istotnie, $|\mathfrak{e}_x(z) - \mathfrak{e}_y(z)| = |d(z, x) - d(z, y)| \leqslant d(x, y)$ oraz $|\mathfrak{e}_x(y) - \mathfrak{e}_y(y)| = d(x, y)$, czyli $\|\mathfrak{e}_x - \mathfrak{e}_y\|_\infty = d(x, y)$. W takim razie $J\colon X \to Z$ jest izometrią dla $Z \stackrel{\text{def}}{=} J(X)$. Z punktu (B) wnosimy, że przestrzeń $\bar{Z}$ jest zupełna (z metryką indukowaną z normy $\|\cdot\|_\infty$). Niech teraz Y będzie dowolnym zbiorem, takim że $X \cap Y = \varnothing$ oraz $\operatorname{card}(Y) = \operatorname{card}(\bar{Z} \setminus Z)$. Ustalmy dowolną bijekcję $\kappa\colon Y \to \bar{Z} \setminus Z$ i niech $\bar{X}$ oraz $\lambda\colon \bar{X} \to \bar{Z}$ będą określone następująco: $\bar{X} \stackrel{\text{def}}{=} X \cup Y$,

$$\lambda(w) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} J(w) & \text{gdy } w \in X \\ \kappa(w) & \text{gdy } w \in Y \end{cases}.$$

*5) Zwane często *odzworowaniem Kuratolwskiego.*

Zauważmy, że λ jest bijekcją. Na koniec określamy funkcję $\bar{d}\colon \bar{X} \times \bar{X} \to \mathbb{R}_+$ formułą $\bar{d}(u,w) \overset{\text{def}}{=} \|\lambda(u) - \lambda(w)\|_\infty$. Ponieważ λ jest iniekcją, funkcja $\bar{d}$ jest metryką. Co więcej, wprost z definicji tej metryki wynika, że $\lambda\colon \bar{X} \to \bar{Z}$ jest izometrią. Tym samym przestrzeń $(\bar{X}, \bar{d})$ jest zupełna. Zauważmy, że odzworowanie $\lambda^{-1} \circ J\colon (X,d) \to (\bar{X}, \bar{d})$ jest izometryczne (jako złożenie dwóch takich odzworowań). Jednocześnie funkcja ta jest identycznością, co oznacza, że metryka $\bar{d}$ przedłuża metrykę d. Na koniec, skoro $\lambda^{-1}\colon \bar{Z} \to \bar{X}$ jest homeomorfizmem (jako izometria), zbiór $X = \lambda^{-1}(Z)$ jest gęsty w $\bar{X}$ (jako obraz zbioru gęstego Z w $\bar{Z}$), co kończy cały dowód. □

9.3 Twierdzenie.
*Każda funkcja jednostajnie ciągła $u\colon A \to Z$ określona na podzbiorze A przestrzeni metrycznej (X,d) o wartościach w przestrzeni metrycznej **zupełnej** (Z,ϱ) przedłuża się jednoznacznie do funkcji ciągłej $v\colon \bar{A} \to Z$. Ponadto, to przedłużenie jest także funkcją jednostajnie ciągłą.*

Dowód. Zauważmy, że:

($\star$) jeśli $(a_n)_{n=1}^\infty \subset A$ jest ciągiem zbieżnym w X, to $(u(a_n))_{n=1}^\infty$ jest ciągiem zbieżnym w Z.

Istotnie, dzięki zupełności przestrzeni Z wystarczy pokazać, że ciąg $(u(a_n))_{n=1}^\infty$ jest Cauchy'ego, a to łatwo wynika z jednostajnej ciągłości funkcji: Dla zadanej liczby $\varepsilon > 0$ dobieramy liczbę $\delta > 0$, taką że

$$\forall x,y \in A\colon\ (d(x,y) < \delta \implies \varrho(u(x),u(y)) \leqslant \varepsilon). \tag{9:2}$$

Ciąg $(a_n)_{n=1}^\infty$ jest Cauchy'ego (jako zbieżny), zatem istnieje indeks $N > 0$, taki że $d(a_n, a_m) < \delta$ dla wszelkich $n,m \geqslant N$. A wtedy (9:2) implikuje, że $\varrho(u(a_n),u(a_m)) \leqslant \varepsilon$ dla $n,m \geqslant N$.

Korzystając z ($\star$), dowodzimy kolejno, że:

- Jeśli $(a_n)_{n=1}^\infty \subset A$ i $(b_n)_{n=1}^\infty \subset A$ zbiegają w X do tej samej granicy, to $\lim_{n\to\infty} u(a_n) = \lim_{n\to\infty} u(b_n)$.
  [Bo: ciąg $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots \in A$ jest zbieżny w X, więc z (9:2) wynika, że ciąg $u(a_1), u(b_1), u(a_2), u(b_2), \ldots$ jest zbieżny w Z].
- Reguła $v(b) \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} u(a_n)$, gdzie $(a_n)_{n=1}^\infty \subset A$ zbiega do b, poprawnie określa funkcję $v\colon \bar{A} \to Z$.
  [Bo: dla dowolnego punktu $b \in \bar{A}$ istnieje ciąg $(a_n)_{n=1}^\infty \subset A$ zbieżny do b; oraz granica ciągu $(u(a_n))_{n=1}^\infty$ nie zależy od wyboru ciągu $(a_n)_{n=1}^\infty \subset A$ zbieżnego do b — co wynika z poprzedniego punktu].
- Powyższa funkcja v przedłuża funkcję u.
  [Bo: dla $b \in A$ wystarczy podstawić $a_n = b$].

Pokażemy teraz, że funkcja v jest „tak samo” jednostajnie ciągła jak funkcja u. Precyzyjnie to stwierdzenie rozumiemy tak: jeśli dla pary $(\varepsilon, \delta) \in (0,\infty) \times (0,\infty]$ zachodzi (9:2), to także

$$\forall x,y \in \bar{A}\colon\ (d(x,y) < \delta \implies \varrho(v(x),v(y)) \leqslant \varepsilon).$$

Istotnie, niech $x,y \in \bar{A}$ spełniają $d(x,y) < \delta$. Dobieramy dowolne dwa ciągi $(a_n)_{n=1}^\infty \subset A$ oraz $(b_n)_{n=1}^\infty \subset A$, takie że $\lim_{n\to\infty} a_n = x$ oraz $\lim_{n\to\infty} b_n = y$. Wtedy dla dostatecznie dużych n zachodzi $d(a_n,b_n) < \delta$, więc z (9:2) otrzymujemy $\varrho(u(a_n),u(b_n)) \leqslant \varepsilon$. Tym samym

$$\varrho(v(x),v(y)) \leqslant \varrho(v(x),u(a_n)) + \varrho(u(a_n),u(b_n)) + \varrho(u(b_n),v(y)) \leqslant \varrho(v(x),u(a_n)) + \varrho(u(b_n),v(y)) + \varepsilon.$$

Przechodząc w powyższej nierówności z n do ∞, dostajemy $\varrho(v(x),v(y)) \leqslant \varepsilon$, co dowodzi naszej tezy i zarazem pokazuje, że funkcja v jest jednostajnie ciągła.

Pozostaje wykazać jedyność ciągłego przedłużenia funkcji u. W tym celu rozważmy dowolną funkcję ciągłą $w\colon \bar{A} \to Z$, która przedłuża funkcję u. Zauważmy, że zbiór $\{x \in \bar{A}\colon\ v(x) = w(x)\}$ zawiera zbiór A i jest domknięty (co wynika z ciągłości obu funkcji oraz jednoznaczności granicy w przestrzeniach metryzowalnych). Tym samym zbiór ten pokrywa się z $\bar{A}$, czyli $w = v$. □

9.4 Wniosek.
Każda przestrzeń metryczna ma dokładnie jedno, z dokładnością do izometrii, uzupełnienie. Dokładniej, jeśli (X_1,d_1) oraz (X_2,d_2) to uzupełnienia przestrzeni metrycznej (X,d), to istnieje dokładnie jedna izometria $u\colon (X_1,d_1) \to (X_2,d_2)$, taka że $u(x) = x$ dla $x \in X$.

Dowód. Istnienie uzupełnienia pokazaliśmy w punkcie (D) Obs. 9.2. Tutaj wykażemy jedyność, rozumianą tak, jak to zostało sformułowane w wypowiedzi wniosku.

Jeśli (X_1, d_1) oraz (X_2, d_2) są uzupełnieniami tej samej przestrzeni metrycznej, możemy zastosować Tw. 9.3 (wraz z „taką samą jakością" jednostajnej ciągłości wykazaną w dowodzie) do funkcji identycznościowych $X_2 \supset X \to X_1$ oraz $X_1 \supset X \to X_2$, by otrzymać dwa odwzorowania nieoddalające $u\colon X_1 \to X_2$ oraz $v\colon X_2 \to X_1$, które są identycznością na X. Wtedy $v \circ u\colon X_1 \to X_1$ oraz $u \circ v\colon X_2 \to X_2$ to funkcje ciągłe przedłużające identyczność na X, więc (np. korzystając z jedyności w Tw. 9.3) obie te funkcje są (globalnie) identycznościami. W takim razie funkcja u jest bijekcją oraz $u^{-1} = v$. A stąd $d_1(x,y) = d_1(v(u(x)), v(u(y))) \leqslant d_2(u(x), u(y)) \leqslant d_1(x,y)$, czyli u jest izometrią — i teza. □

9.5 Obserwacja.
Dla dowolnego podzbioru A przestrzeni metrycznej (X,d): $\operatorname{diam}_d(A) = \operatorname{diam}_d(\bar{A})$.

Dowód. Ćwiczenie (obowiązkowe). □

9.6 Twierdzenie. (Twierdzenie Cantora o przestrzeniach zupełnych)
Dla przestrzeni metrycznej (X,d) następujące warunki są równoważne:

(i) *przestrzeń (X,d) jest zupełna;*

(ii) *ilekroć $F_1, F_2, F_3, \ldots$ jest zstępującym ciągiem niepustych zbiorów domkniętych w X, takim że*

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}_d(F_n) = 0,$$

tylekroć $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing$;

(iii) *ilekroć $\mathcal{F}$ jest rodziną podzbiorów przestrzeni X o własnościach:*

($\mathcal{F}1$) $\forall A \in \mathcal{F}\colon\ A \neq \varnothing$;

($\mathcal{F}2$) $\forall A, B \in \mathcal{F}\ \exists C \in \mathcal{F}\colon\ C \subset A \cap B$;

($\mathcal{F}3$) $\forall \varepsilon > 0\ \exists A \in \mathcal{F}\colon\ \operatorname{diam}_d(A) \leqslant \varepsilon$,

tylekroć $\operatorname{card}(\bigcap_{F\in\mathcal{F}} \bar{F}) = 1$.

Dowód. Zacznijmy od dowodu najtrudniejszej implikacji, czyli że (iii) wynika z (i). Niech więc $\mathcal{F}$ będzie rodziną podzbiorów zupełnej przestrzeni metrycznej (X,d) spełniającą warunki ($\mathcal{F}1$)–($\mathcal{F}3$). Indukcyjnie konstruujemy zbiory $F_1, F_2, F_3, \ldots \in \mathcal{F}$, takie że dla $n > 0$:

(F1) $F_{n+1} \subset F_n$;

(F2) $\operatorname{diam}_d(F_n) \leqslant 2^{-n}$.

Zbiór F_1 dobieramy wykorzystując własność ($\mathcal{F}3$) (podstawiając $\varepsilon = \frac{1}{2}$). Gdy mamy F_n, najpierw — z ($\mathcal{F}3$) — dobieramy pomocniczo zbiór $A \in \mathcal{F}$, taki że $\operatorname{diam}_d(A) \leqslant 2^{-n-1}$. Z własności ($\mathcal{F}2$) dobieramy zbiór $F_{n+1} \in \mathcal{F}$, taki że $F_{n+1} \subset A \cap F_n$. W ten sposób otrzymujemy warunek (F1) oraz (F2) (dla $n+1$).

Teraz pokażemy, że:

(9:3)
$$\forall A \in \mathcal{F}\colon\ \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{F_n \cap A} \neq \varnothing.$$

Z własności ($\mathcal{F}1$)–($\mathcal{F}2$) wynika, że $F_n \cap A \neq \varnothing$ dla wszelkich $n > 0$. Niech a_n będzie dowolnym elementem zbioru $F_n \cap A$. Wtedy dla $n, m \geqslant N > 0$ mamy $a_n \in F_n \subset F_N$ (z (F1)) i podobnie $a_m \in F_N$, więc $d(a_n, a_m) \leqslant \operatorname{diam}_d(F_N) \leqslant 2^{-N}$ (z (F2)), co pokazuje, że ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest Cauchy'ego. Oznaczmy przez b jego granicę. Dla $n \geqslant N > 0$ mamy $a_n \in F_n \cap A \subset F_N \cap A$, więc $b \in \overline{F_N \cap A}$, czyli b jest elementem przecięcia występującego w (9:3).

Teraz do (9:3) podstawiamy $A = F_1$ i wybieramy dowolny element a przecięcia $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{F}_n$ (z (F1) wiemy, że $F_n \cap F_1 = F_n$). Pokażemy, że $a \in \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \bar{F}$. W tym celu ustalmy $A \in \mathcal{F}$. Z (9:3) wiemy, że istnieje $b \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{F_n \cap A}$. Aby stwierdzić, że $a \in \bar{A}$, wystarczy pokazać, że $b = a$. Dla dowolnej liczby $n > 0$ mamy $a, b \in \bar{F}_n$, a stąd (dzięki (F2)) $d(a,b) \leqslant 2^{-n}$. Z dowolności $n > 0$ wynika, że $d(a,b) = 0$, czyli $a = b$. Na koniec tej części dowodu zauważmy, że to, co pokazaliśmy powyżej (tzn. „$b = a$") dowodzi zarazem, że przecięcie domknięć zbiorów z rodziny $\mathcal{F}$ jest jednoelementowe. Istotnie: jeśli b należy do tego przecięcia, to także $b \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{F_n \cap F_1}$, a zatem — z powyższej części dowodu: $b = a$.

Ponieważ (ii) jest szczególnym przypadkiem (iii), pozostaje pokazać, że z (ii) wynika zupełność metryki. W tym celu rozważmy dowolny ciąg Cauchy'ego $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ w przestrzeni metrycznej (X,d), która spełnia warunek (ii). Niech $A_n \stackrel{\text{def}}{=} \{x_k\colon\ k \geqslant n\}$. Z tego, że ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest Cauchy'ego, wynika, że $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}_d(A_n) = 0$. W takim razie także $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}_d(\bar{A}_n) = 0$ (zob. Obs. 9.5). Ciąg $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots$ jest zstępujący i składa się ze zbiorów domkniętych i niepustych. Możemy więc zastosować (ii): istnieje punkt a należący do przecięcia $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n$. A wtedy $a, x_n \in \bar{A}_n$ dla dowolnego indeksu $n > 0$, zatem $d(x_n, a) \leqslant \operatorname{diam}_d(\bar{A}_n) \to 0$ $(n \to \infty)$, czyli ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ zbiega do a. □

9.7 ***Uwaga****.*
Warunek (ii) z powyższego twierdzenia stanowi jedno z wielu kryteriów na zupełność metryki. Zwartość przestrzeni metryzowalnych można scharakteryzować w podobny sposób, mianowicie: przestrzeń metryzowalna jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy każdy zstepujący ciąg niepustych zbiorów domkniętych ma przecięcie niepuste. Dowód tego (nietrywialnego!) warunku pozostawiamy jako ćwiczenie dla chętnych.

9.8 Definicja.
Podzbiór A przestrzeni metrycznej (X,d) nazywamy *ε-siecią* dla zbioru $B \subset X$ (gdzie $\varepsilon > 0$), gdy $A \subset B$ oraz

$$B \subset \bigcup_{a\in A} B_d(a,\varepsilon).$$

Przestrzeń metryczną nazywamy *całkowicie ograniczoną*, gdy posiada skończoną ε-sieć dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$.

9.9 Wniosek.
Całkowicie ograniczona przestrzeń metryczna jest ośrodkowa.

Dowód. Jeśli A_n jest skończoną 2^{-n}-siecią w przestrzeni metrycznej, to zbiór $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ jest co najwyżej przeliczalnym gęstym podzbiorem tej przestrzeni. □

Z punktu (C) Obs. 9.2 wiemy, że zwarte przestrzenie metryczne są zupełne. Jest również ewidentne, że takie przestrzenie są całkowicie ograniczone. Okazuje się, że obie te własności jednocześnie charakteryzują zwartość:

9.10 Twierdzenie. (Twierdzenie Hausdorffa o zwartości)
Niech A będzie podzbiorem zupełnej przestrzeni metrycznej (X,d). Domknięcie zbioru A w X jest zwarte wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje skończony zbiór $F \subset X$, taki że

$$A \subset \bigcup_{b\in F} B_d(b,\varepsilon).$$

W szczególności:

- *przestrzeń metryczna jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy jest zupełna i całkowicie ograniczona;*
- *uzupełnienie przestrzeni metrycznej X jest przestrzenią zwartą wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzeń X jest całkowicie ograniczona.*

Dowód. Wystarczy wykazać jedynie pierwszą część twierdzenia oraz to, że podzbiór zwartej przestrzeni metrycznej jest przestrzenią całkowicie ograniczoną.

Niech więc zbiór A będzie podzbiorem zupełnej przestrzeni metrycznej (X,d), dla którego istnieją skończone zbiory $F_1, F_2, F_3, \ldots \subset X$, takie że

$$A \subset \bigcup_{b\in F_n} B_d(b, 2^{-n}). \tag{9:4}$$

Pokażemy, że zbiór $\bar{A}$ jest zwarty. Niech więc $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem o wyrazach w $\bar{A}$. Dla dowolnego indeksu $n > 0$ istnieje punkt $a_n \in A$, taki że $d(a_n, x_n) \leqslant 1/n$. Zauważmy, że jeśli podciąg $(a_{\nu_n})_{n=1}^{\infty}$ zbiega do $c \in X$, to $c \in \bar{A}$ oraz $d(x_{\nu_n}, c) \leqslant d(a_{\nu_n}, c) + 1/\nu_n \to 0$ $(n \to \infty)$, więc także ciąg $(x_{\nu_n})_{n=1}^{\infty}$ zbiega do c. Tym samym wystarczy pokazać, że ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ma podciąg Cauchy'ego (dzięki zupełności przestrzeni X). W tym celu indukcyjnie skonstruujemy nieskończone zbiory $J_1, J_2, J_3, \ldots \subset \mathbb{N}_1$, takie że dla $n > 0$:

(J1) $J_{n+1} \subset J_n$;

(J2) istnieje punkt $b_n \in F_n$, taki że $\{a_k\colon\ k \in J_n\} \subset B_d(b_n, 2^{-n})$.

Pomocniczo przyjmijmy $J_0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{N}_1$ i załóżmy, że mamy zbiór J_{n-1} dla pewnego indeksu $n > 0$. Dla $b \in F_n$ niech $J^{b,n} \stackrel{\text{def}}{=} \{k \in J_{n-1}\colon\ a_k \in B_d(b, 2^{-n})\}$. Z (9:4) wynika, że $J_{n-1} = \bigcup_{b \in F_n} J^{b,n}$. Ponieważ zbiór F_n jest skończony, a zbiór J_{n-1} nie, musi istnieć element $b_n \in F_n$, taki że zbiór $J_n \stackrel{\text{def}}{=} J^{b_n,n}$ $(\subset J_{n-1})$ jest nieskończony. Ta konstrukcja zapewnia nam automatycznie (J1)–(J2).

Teraz wybieramy dowolnie $\nu_1 \in J_1$ i (indukcyjnie) dobieramy $\nu_{n+1} \in J_{n+1}$ jako dowolny element większy niż ν_n. W ten sposób otrzymujemy podciąg $(a_{\nu_n})_{n=1}^{\infty}$, taki że $a_{\nu_n} \in B_d(b_N, 2^{-N})$ dla wszelkich $n \geqslant N > 0$ (jest tak dzięki (J1)–(J2)). A to daje nam $d(a_{\nu_n}, a_{\nu_m}) \leqslant 2^{1-N}$ dla $n, m \geqslant N$, czyli ten podciąg jest ciągiem Cauchy'ego.

Pozostaje wykazać, że podzbiór przestrzeni zwartej jest całkowicie ograniczony. Jeśli $E \subset K$, gdzie (K, ϱ) jest zwartą przestrzenią metryczną, oraz $\varepsilon > 0$, to istnieje skończony zbiór $F \subset K$, taki że $K = \bigcup_{a \in F} B_\varrho(a, \varepsilon/2)$. Niech $F_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in F\colon\ B_\varrho(a, \varepsilon/2) \cap E \neq \varnothing\}$ oraz dla $a \in F_0$ niech x_a będzie dowolnym elementem zbioru $B_\varrho(a, \varepsilon/2) \cap E$. Wtedy zbiór $S \stackrel{\text{def}}{=} \{x_a\colon\ a \in F_0\}$ jest skończonym podzbiorem zbioru E. Ponadto, jest to ε-sieć dla E. Istotnie, jeśli $b \in E$, to istnieje punkt $a \in F$, taki że $b \in B_\varrho(a, \varepsilon/2)$. Wtedy $a \in F_0$ i tym samym $x_a \in S$ oraz $\varrho(x_a, b) \leqslant \varrho(x_a, a) + \varrho(a, b) < \varepsilon$, czyli $b \in B_\varrho(x_a, \varepsilon)$. □

9.11 Definicja.
Punkt stały funkcji f to dowolny element a jej dziedziny, taki że $f(a) = a$.

9.12 Twierdzenie. (Twierdzenie Banacha o punkcie stałym)
*Niech $f\colon X \to X$ będzie funkcją określoną na niepustej zupełnej przestrzeni metrycznej (X, d) spełniającą warunek Lipschitza ze stałą $c \in [0, 1)$. Wtedy funkcja f ma dokładnie jeden punkt stały, powiedzmy $a \in X$. Ponadto, dla dowolnego punktu $x \in X$ ciąg $(f^n(x))_{n=1}^{\infty}$ [*6)] zbiega do a oraz:*

(9:5)
$$\forall n \geqslant 0\colon\ d(f^n(x), a) \leqslant \frac{c^n}{1-c} d(f(x), x).$$

Dowód. Zacznijmy od tego, że funkcja f ma co najwyżej jeden punkt stały: jeśli a i b to punkty stałe tej funkcji, to $(1-c)d(a, b) = d(f(a), f(b)) - cd(a, b) \leqslant 0$ i tym samym $d(a, b) = 0$, czyli $a = b$. Aby więc zakończyć dowód, wystarczy pokazać, że dla dowolnie zadanego punktu x ciąg $(f^n(x))_{n=1}^{\infty}$ zbiega do (jakiegoś) punktu stałego a, takiego że zachodzi warunek (9:5). W tym celu pokażemy, że dla $m \geqslant n \geqslant 0$ zachodzi nierówność:

(9:6)
$$d(f^n(x), f^m(x)) \leqslant \frac{c^n}{1-c} d(f(x), x).$$

Istotnie, $f^m(x) = f^n(f^{m-n}(x))$ oraz (indukcja względem n) $d(f^n(p), f^n(q)) \leqslant c^n d(p, q)$ (dla wszelkich $p, q \in X$), a więc dla $m > n$:

$$d(f^n(x), f^m(x)) = d(f^n(x), f^n(f^{m-n}(x))) \leqslant c^n d(x, f^{m-n}(x)) \stackrel{\triangle}{\leqslant} c^n \sum_{k=1}^{m-n} d(f^{k-1}(x), f^k(x))$$
$$= c^n \sum_{k=1}^{m-n} d(f^{k-1}(x), f^{k-1}(f(x))) \leqslant c^n \sum_{k=1}^{m-n} c^{k-1} d(x, f(x)) = c^n \cdot \frac{1-c^{m-n}}{1-c} d(x, f(x)) = \frac{c^n - c^m}{1-c} d(f(x), x),$$

co daje (9:6). Ponieważ $c < 1$, nierówność (9:6) implikuje, że ciąg $(f^n(x))_{n=1}^{\infty}$ jest Cauchy'ego, a więc zbiega do pewnego punktu $a \in X$. A wtedy dla $n > 0$:

$$d(f(a), a) \leqslant d(f(a), f^{n+1}(x)) + d(f^{n+1}(x), a) \leqslant cd(a, f^n(x)) + d(f^{n+1}(x), a) \to 0\ (n \to \infty),$$

[*6)] Gdzie $f^0(x) = x$ oraz $f^n = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n}$ dla $n > 0$. (Innymi słowy: $f^n = f \circ f^{n-1}$ dla $n > 0$).

gdyż $\left(f^{n+1}(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ jest podciągiem ciągu $(f^n(x))_{n=1}^{\infty}$ zbieżnego do a. Powyższe szacowanie daje $d(f(a), a) = 0$, czyli a jest punktem stałym odwzorowania f. Na koniec zauważmy, że dla ustalonej liczby $n \geqslant 0$ oraz wszelkich $m \geqslant n$ mamy (dzięki (9:6)):

$$d(f^n(x), a) \leqslant d(f^n(x), f^m(x)) + d(f^m(x), a) \leqslant \frac{c^n}{1-c} d(f(x), x) + d(f^m(x), a) \to \frac{c^n}{1-c} d(f(x), x) \ (m \to \infty),$$

czyli zachodzi (9:5). □

9.13 Przykład.
Jak nietrudno się przekonać (zob. np. dowód Tw. 9.3, str. 47), funkcja jednostajnie ciągła między przestrzeniami metrycznymi przenosi ciągi Cauchy'ego na ciągi Cauchy'ego. Tym samym jeśli $f\colon X \to Y$ jest bijekcją między przestrzeniami metrycznymi, taką że obie funkcje f i f^{-1} są jednostajnie ciągłe, to ciągom Cauchy'ego (odp. zbieżnym) w X odpowiadają [wzajemnie jednoznacznie] ciągi Cauchy'ego (odp. zbieżne) w Y. Wynika stąd, że wtedy albo obie przestrzenie X i Y są zupełne, albo obie niezupełne. Jak pokazuje przykład przestrzeni $\mathbb{R}$ i $(0, 1)$, sytuacja wygląda odmiennie przy homeomorfizmach, tj. przestrzeń metryczna homeomorficzna z zupełną przestrzenią metryczną nie musi być zupełna. Oznacza to, że zupełność (przestrzeni metrycznej) nie jest niezmiennikiem homeomorfizmów i tym samym nie jest pojęciem topologicznym — lecz metrycznym.

9.14 Definicja.
Mówimy, że przestrzeń topologiczna X jest *metryzowalna w sposób zupełny*, gdy istnieje metryka zupełna d na X, taka że $\operatorname{top}(X) = \operatorname{top}(X, d)$. Równoważnie: przestrzeń jest metryzowalna w sposób zupełny, gdy jest homeomorficzna z zupełną przestrzenią metryczną.

9.15 Definicja.
Zbiór *typu $\mathscr{G}_\delta$* w przestrzeni topologicznej X to dowolny jej podzbiór, który można przedstawić jako przeliczalne przecięcie zbiorów otwartych:

$$A \text{ jest typu } \mathscr{G}_\delta \iff \exists\, (U_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{G}(X)\colon\ A = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n.$$

Podobnie, zbiór typu $\mathscr{F}_\sigma$ w przestrzeni topologicznej X to dowolny jej podzbiór, który można przedstawić jako przeliczalną sumę mnogościową zbiorów domkniętych:

$$B \text{ jest typu } \mathscr{F}_\sigma \iff \exists\, (D_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}(X)\colon\ B = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n.$$

9.16 Obserwacja.

(A) *Podzbiór przestrzeni topologicznej jest typu $\mathscr{G}_\delta$ (odp. typu $\mathscr{F}_\sigma$) wtedy i tylko wtedy, gdy jego dopełnienie jest zbiorem typu $\mathscr{F}_\sigma$ (odp. typu $\mathscr{G}_\delta$).*

(B) *Zbiór otwarty jest typu $\mathscr{G}_\delta$. Zbiór domknięty jest typu $\mathscr{F}_\sigma$.*

(C) *Przeliczalne przecięcie zbiorów typu $\mathscr{G}_\delta$ jest zbiorem typu $\mathscr{G}_\delta$. Przeliczalna suma zbiorów typu $\mathscr{F}_\sigma$ jest zbiorem typu $\mathscr{F}_\sigma$.*

(D) *Suma skończenie wielu zbiorów typu $\mathscr{G}_\delta$ jest zbiorem typu $\mathscr{G}_\delta$. Przecięcie skończenie wielu (w niezerowej liczbie) zbiorów typu $\mathscr{F}_\sigma$ jest zbiorem typu $\mathscr{F}_\sigma$.*

(E) *W przestrzeniach metryzowalnych zbiory otwarte są typu $\mathscr{F}_\sigma$, a zbiory domknięte typu $\mathscr{G}_\delta$.*

Dowód. Punkty (A), (B), (C) pozostawiamy jako proste ćwiczenie. Dzięki (A), w dowodzie punktu (D) (odp. (E)) wystarczy wykazać tezę dla zbiorów typu $\mathscr{G}_\delta$ (odp. domkniętych).

(D): Jeśli $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ oraz $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$, gdzie zbiory U_n i V_n są otwarte, to $A \cup B = \bigcap_{n,m=1}^{\infty}(U_n \cup V_m)$, czyli zbiór ten jest przeliczalnym przecięciem zbiorów otwartych.

(E): Z dowodu Wn. 6.11 (str. 26) wynika, że w przestrzeni metryzowalnej X dla dowolnego zbioru domkniętego A istnieje funkcja ciągła $u\colon X \to [0,1]$, taka że $A = u^{-1}(\{0\})$. A wtedy $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} u^{-1}((-1/n, 1/n))$, czyli jest to zbiór typu $\mathscr{G}_\delta$. □

9.17 Twierdzenie. (Twierdzenie Baire'a)
*W metryzowalnej w sposób zupełny przestrzeni topologicznej przeliczalna suma mnogościowa brzegowych zbiorów typu $\mathscr{F}_\sigma$ jest **brzegowym** zbiorem typu $\mathscr{F}_\sigma$.*

Dowód. Niech $A_1, A_2, \ldots$ będą brzegowymi zbiorami typu $\mathscr{F}_\sigma$ w metryzowalnej w sposób zupełny przestrzeni topologicznej X. Pytamy, czy zbiór $B \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ jest brzegowy (w X). Zapiszmy każdy zbiór A_n jako $A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_{n,m}$, gdzie $F_{n,m} \in \mathscr{F}(X)$. Wtedy zbiór $F_{n,m}$ jest brzegowy oraz $B = \bigcup_{n,m=1}^{\infty} F_{n,m}$. Tym samym — zastępując rodzinę $\{A_n\colon\ n > 0\}$ przez $\{F_{n,m}\colon\ n, m > 0\}$ — możemy założyć, że każdy ze zbiorów A_n jest domknięty, co czynimy poniżej. Ustalamy także metrykę d zupełną na X i zgodną z topologią tej przestrzeni.

Dla dowodu nie wprost załóżmy, że zbiór B ma wnętrze niepuste. Oznacza to, że istnieje kula domknięta F_0 (względem metryki d), która zawiera się w zbiorze B. Indukcyjnie konstruujemy zbiory $F_1, F_2, \ldots$, takie że:

(B1) F_n to kula domknięta (względem metryki d) o promieniu nie większym niż $1/n$;

(B2) $F_n \cap A_n = \varnothing$;

(B3) $F_n \subset F_{n-1}$.

Załóżmy, że mamy zbiór F_{n-1} (dla pewnej liczby $n > 0$). Ponieważ F_{n-1} jest kulą domkniętą, $\operatorname{int}(F_{n-1}) \neq \varnothing = \operatorname{int}(A_n)$. W takim razie $U \overset{\text{def}}{=} \operatorname{int}(F_{n-1}) \setminus A_n$ jest zbiorem niepustym. Zauważmy, że U jest zbiorem otwartym (bo $\bar{A}_n = A_n$). Tak więc istnieje zbiór F_n, który spełnia (B1) i zawiera się w U. Wtedy automatycznie zachodzą warunki (B2)–(B3).

Z (B1) i (B3) oraz Tw. 9.6 (str. 48) wynika, że istnieje $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Wtedy $a \in F_0 \subset B$, czyli istnieje indeks $k > 0$, taki że $a \in A_k$. Ale zarazem $a \in F_k$, co jest sprzeczne z (B2). Otrzymana sprzeczność kończy dowód twierdzenia. □

9.18 Twierdzenie. (Twierdzenie Baire'a — wersja dualna)
*W metryzowalnej w sposób zupełny przestrzeni topologicznej przeliczalne przecięcie gęstych zbiorów typu $\mathscr{G}_\delta$ jest **gęstym** zbiorem typu $\mathscr{G}_\sigma$.*

Dowód. Teza wynika z Tw. 9.17 przez przejście do dopełnień zbiorów (ćwiczenie). □

9.19 ***Uwaga.***
Można łatwo wykazać, że Twierdzenie Baire'a jest równoważne następującemu stwierdzeniu:

> *Dla dowolnego ciągu podzbiorów $A_1, A_2, \ldots$ przestrzeni metryzowalnej w sposób zupełny zachodzi inkluzja:*
> $$\operatorname{int}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n\Big) \subset \operatorname{cl}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{int}(\bar{A}_n)\Big).$$

9.20 Definicja.
Zbiór *pierwszej kategorii* (*Baire'a*) w przestrzeni topologicznej jest to dowolny podzbiór przeliczalnej sumy mnogościowej brzegowych zbiorów typu $\mathscr{F}_\sigma$. Zbiór, który nie jest pierwszej kategorii, jest *drugiej kategorii* (*Baire'a*). Zbiór *rezydualny* to dopełnienie zbioru pierwszej kategorii.

W powyższej terminologii twierdzenie Baire'a można krótko wypowiedzieć tak: niepusta metryzowalna w sposób zupełny przestrzeń topologiczna jest drugiej kategorii (w samej sobie).

9.21 Twierdzenie.
Niech $f\colon A \to Z$ będzie funkcją ciągłą określoną na gęstym podzbiorze A przestrzeni topologicznej X, o wartościach w przestrzeni metryzowalnej w sposób zupełny Z. Wtedy istnieje zbiór $B \supset A$ typu $\mathscr{G}_\delta$ w X oraz ciągła funkcja $F\colon B \to Z$, która przedłuża funkcję f.

Dowód. Ustalmy metrykę zupełną d na Z zgodną z topologią tej przestrzeni. Dla $n > 0$ niech

$$V_n \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X | \ \exists U \text{otwarte otoczenie punktu } x\colon \ \operatorname{diam}_d f(A \cap U) < 2^{-n}\}.$$

Zauważmy, że zbiór V_n jest otwarty, gdyż jeśli dla $x \in V_n$ dobierzemy zbiór U jw., to $U \subset V_n$. Zauważmy także, że $A \subset V_n$. Istotnie, jeśli $a \in A$, to z ciągłości funkcji f w tym punkcie wynika istnienie zbioru W otwartego w A, takiego że $a \in W$ oraz $\operatorname{diam}_d f(W) < 2^{-n}$. Wtedy istnieje zbiór U otwarty w X, taki że $U \cap A = W$, co oznacza, że $a \in U \subset V_n$.

Zbiór B definiujemy jako $\bigcap_{n=1}^\infty V_n$. Z powyższych własności wynika, że B jest zbiorem typu $\mathscr{G}_\delta$, który zawiera zbiór A. Ustalmy $b \in B$. Niech

$$\mathcal{F}_b \stackrel{\text{def}}{=} \{f(U \cap A)\colon \ U \text{otwarte otoczenie punktu } b \text{ w } X\}.$$

Zauważmy, że rodzina $\mathcal{F}_b$ spełnia warunki ($\mathcal{F}1$)–($\mathcal{F}3$) z Tw. 9.6 (str. 48). Istotnie: składa się ze zbiorów niepustych, gdyż zbiór A jest gęsty w X, oraz zawiera zbiory o dowolnie małej średnicy, gdyż $b \in V_n$ dla dowolnego indeksu n. Z tegoż twierdzenia wynika, że przecięcie domknięć zbiorów z rodziny $\mathcal{F}_b$ jest jednoelementowe. Określamy funkcję $F\colon B \to Z$ regułą:

$$\{F(b)\} = \bigcap_{D \in \mathcal{F}_b} \bar{D}.$$

Wykażemy, że F przedłuża f i jest funkcją ciągłą (co zakończy dowód). Jeśli $a \in A$, to $f(a) \in \bigcap \mathcal{F}_a \subset \{F(a)\}$, czyli $F(a) = f(a)$. Pozostaje ciągłość. W tym celu ustalmy punkt $b \in B$ oraz liczbę $\varepsilon > 0$. Dobieramy $N > 0$ oraz otwarte (w X) otoczenie U punktu b, takie że $\operatorname{diam}_d f(A \cap U) < 2^{-N} < \varepsilon$. Wtedy dla dowolnego punktu $x \in B \cap U$ mamy: $f(A \cap U) \in \mathcal{F}_x$, czyli $F(x) \in \overline{f(A \cap U)}$, a zatem $d(F(x), F(b)) \leqslant \operatorname{diam}_d \overline{f(A \cap U)} < \varepsilon$, czyli funkcja F jest ciągła w punkcie b. ∎

9.22 ***Uwaga.***
Zbiory typu $\mathscr{G}_\delta$ lub $\mathscr{F}_\sigma$ stanowią początek hierarchii zbiorów *borelowskich* w przestrzeniach topologicznych (najczęściej aplikowanej do przestrzeni metryzowalnych). Litery „δ” i „σ” (w indeksie dolnym) symbolizują, odpowiednio, przeliczalne przecinanie oraz przeliczalne sumowanie zbiorów. Dokładniej, dla dowolnej rodziny zbiorów $\mathscr{A}$:

- $\mathscr{A}_\delta$ to rodzina wszystkich przeliczalnych przecięć zbiorów z $\mathscr{A}$: $\mathscr{A}_\delta \stackrel{\text{def}}{=} \{\bigcap_{n=1}^\infty A_n\colon \ A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A}\} \supset \mathscr{A}$; stosując operację „$\delta$” powstają *mutliplikatywne* klasy (czyli rodziny) zbiorów;
- $\mathscr{A}_\sigma$ to rodzina wszystkich przeliczalnych sum zbiorów z $\mathscr{A}$: $\mathscr{A}_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{\bigcup_{n=1}^\infty A_n\colon \ A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A}\} \supset \mathscr{A}$; stosując operację „$\sigma$” powstają *addytywne* klasy (czyli rodziny) zbiorów.

Startując od rodziny $\mathscr{G}$ wszystkich zbiorów otwartych oraz od rodziny $\mathscr{F}$ wszystkich zbiorów domkniętych, możemy tworzyć kolejne (coraz większe) multiplikatywne i addytywne klasy zbiorów:

- $\mathscr{G}_\delta$: zbiory pierwszej klasy multiplikatywnej Π_1 ($\mathscr{G}_\sigma = \mathscr{G}$);
- $\mathscr{F}_\sigma$: zbiory pierwszej klasy addytywnej Σ_1 ($\mathscr{F}_\delta = \mathscr{F}$);
- $\mathscr{G}_{\delta\sigma} = (\mathscr{G}_\delta)_\sigma$: zbiory drugiej klasy addytywnej Σ_2 ($(\mathscr{G}_\delta)_\delta = \mathscr{G}_\delta$);
- $\mathscr{F}_{\sigma\delta} = (\mathscr{F}_\sigma)_\delta$: zbiory drugiej klasy multiplikatywnej Π_2 ($(\mathscr{F}_\sigma)_\sigma = \mathscr{F}_\sigma$);
- $\mathscr{G}_{\delta\sigma\delta} = (\mathscr{G}_{\delta\sigma})_\delta$: zbiory trzeciej klasy multiplikatywnej Π_3;
- $\mathscr{F}_{\sigma\delta\sigma} = (\mathscr{F}_{\sigma\delta})_\sigma$: zbiory trzeciej klasy addytywnej Σ_3;
- itd...

Ogólniej: dla dowolnej przeliczalnej liczby porządkowej α definiuje się multiplikatywną klasę Π_α oraz addytywną klasę Σ_α (jako, odpowiednio, przeliczalne przecięcia/sumy zbiorów addytywnych/multiplikatywnych klas niższego „poziomu” niż α). W przestrzeniach metryzowalnych (zob. punkt (E) Obs. 9.16) mamy $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}_\delta$ (czyli $\Pi_0 \subset \Pi_1$) oraz $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}_\sigma$ (czyli $\Sigma_0 \subset \Sigma_1$) i dzięki temu dowodzi się (indukcją pozaskończoną), że w takich przestrzeniach

$\Sigma_\alpha \subset \Sigma_{\alpha+1}$ i podobnie $\Pi_\alpha \subset \Pi_{\alpha+1}$. Natomiast w dowolnej przestrzeni topologicznej zachodzą inkluzje $\Pi_\alpha \subset \Sigma_{\alpha+1}$ oraz $\Sigma_\alpha \subset \Pi_{\alpha+1}$ i tym samym

$$\bigcup_\alpha \Sigma_\alpha = \bigcup_\alpha \Pi_\alpha \tag{9:7}$$

(gdzie α przebiega wszystkie przeliczalne liczby porządkowe). Rodzina zbiorów (9:7) jest zamknięta na dopełnianie oraz przeliczalne sumy i przecięcia (jest to tzw. *σ-algebra zbiorów borelowskich*).

9.23 Przykład.
Przestrzeń metryczną (X, d) nazywamy *ultrametryczną*, gdy

$$\forall x, y, z \in X\colon\; d(x, z) \leqslant \max(d(x, y), d(y, z)).$$

W powyższej sytuacji mówimy, że metryka d jest *niearchimedesowa* lub że d jest *ultrametryką*.
Następujące własności przestrzeni ultrametrycznych pozostawiamy jako ćwiczenia dla zainteresowanych:

- wszystkie kule (i otwarte, i domknięte) są zbiorami otwarto-domkniętymi;
- jeśli dwie dowolnie wybrane kule są nierozłączne, to jedna z tych kul zawiera się w drugiej;
- ciąg $(x_n)_{n=1}^\infty$ jest ciągiem Cauchy'ego względem niearchimedesowej metryki d wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$;
- uzupełnienie przestrzeni ultrametrycznej jest przestrzenią ultrametryczną;
- (ćwiczenie „z małą gwiazdką”) przestrzenie ultrametryczne są mocno zerowymiarowe;
- (ćwiczenie „z dwoma gwiazdkami”) każda metryzowalna przestrzeń mocno zerowymiarowa jest *ultrametryzowalna*, tzn. istnieje ultrametryka zgodna z jej topologią.

10 Topologia produktowa

Rozważania tego rozdziału rozpoczniemy od iloczynu kartezjańskiego skończenie wielu przestrzeni topologicznych.

10.1 Obserwacja.
Niech $X_1, \ldots, X_d$ $(d > 0)$ będą przestrzeniami topologicznymi oraz

$$\beta \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{\prod_{k=1}^d U_k\colon\; U_k \in \mathscr{G}(X_k)\ (k = 1, \ldots, d)\Big\} \quad \subset \mathcal{P}\Big(\prod_{k=1}^d X_k\Big). \tag{10:1}$$

Rodzina β jest bazą pewnej topologii na zbiorze $X \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{k=1}^d X_k$.

Dowód. Dzięki Tw. 5.3 (str. 19) wiemy, że wystarczy sprawdzić warunki (B1)–(B2) tamtegoż twierdzenia. Ale one są natychmiastowe, gdyż $X \in \beta$ oraz $U \cap V \in \beta$ dla dowolnych $U, V \in \beta$. $\square$

10.2 Definicja.
Jedną jedyną topologię na zbiorze $\prod_{k=1}^d X_k$, gdzie $(X_1, \tau_1), \ldots, (X_d, \tau_d)$ to przestrzenie topologiczne, której bazą jest rodzina β określona w (10:1), nazywamy topologią *produktową* (wyznaczoną przez topologie $\tau_1, \ldots, \tau_d$) i oznaczamy ją przez $\tau_1 \times \ldots \times \tau_d$.

Aby wprowadzić topologię produktową na iloczynie kartezjańskim nieskończenie wielu przestrzeni topologicznych, scharakteryzujmy ciągi uogólnione zbieżne w topologii produktowej skończenie wielu przestrzeni:

10.3 Obserwacja.
Ciąg uogólniony $x_\sigma = (x_\sigma^{(1)}, \ldots, x_\sigma^{(d)}) \in \prod_{k=1}^d X_k$ $(\sigma \in \Sigma)$ *jest zbieżny w topologii produktowej do punktu* $g = (g^{(1)}, \ldots, g^{(d)}) \in \prod_{k=1}^d X_k$ *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall k \in \{1, \ldots, d\}\colon\ x_\sigma^{(k)} \xrightarrow{X_k} g^{(k)}\ (\sigma \in \Sigma).$$

Dowód. Zob. dowód Obs. 10.6 poniżej. □

Okazuje się, że na iloczynie kartezjańskim dowolnej rodziny przestrzeni topologicznych można określić topologię w jeden jedyny sposób, tak by zachodziła charakteryzacja zbieżności ciągów uogólnionych analogiczna do sformułowanej w powyższej obserwacji. Do jej określenia przyda nam się poniższa obserwacja (por. Obs. 10.1).

10.4 Obserwacja.
Niech X_s $(s \in S)$ *będzie przestrzenią topologiczną* (*a* S *dowolnym zbiorem indeksów*) *oraz*

(10:2) $$\beta \overset{\text{def}}{=} \Big\{ \prod_{s \in S} U_s |\ (\forall s \in S\colon\ U_s \in \mathscr{G}(X_s)) \text{ oraz } (\forall! s \in S\colon\ U_s = X_s) \Big\} \quad \subset \mathcal{P}\Big(\prod_{s \in S} X_s\Big).$$

Rodzina β *jest bazą pewnej topologii na zbiorze* $X \overset{\text{def}}{=} \prod_{s \in S} X_s$.

Dowód. Dzięki Tw. 5.3 (str. 19) wiemy, że wystarczy sprawdzić warunki (B1)–(B2) tamtegoż twierdzenia. Ale one są natychmiastowe, gdyż $X \in \beta$ oraz $U \cap V \in \beta$ dla dowolnych $U, V \in \beta$. □

10.5 Definicja.
Jedną jedyną topologię na zbiorze $\prod_{s \in S} X_s$ (gdzie (X_s, τ_s) $(s \in S)$ to przestrzeń topologiczna), której bazą jest rodzina β określona w (10:2), nazywamy topologią *produktową* lub *Tichonowa* (wyznaczoną przez topologie τ_s) i oznaczamy ją przez $\prod_{s \in S} \tau_s$.

Zbiory z bazy β określonej w (10:2) nazywamy *otwartymi zbiorami cylindrycznymi* lub *otwartymi cylindrami.*
Notacja: zapis $\mathrm{Cyl}(\{V_s\}_{s \in S_0}, \{X_s\}_{s \in S})$

- niesie ze sobą „automatyczne” założenia: że $S_0 \subset S$ jest zbiorem skończonym oraz że $V_s \in \mathscr{G}(X_s)$ dla $s \in S_0$;
- oznacza otwarty cylinder $\prod_{s \in S} U_s$, gdzie $U_s = V_s$ dla $s \in S_0$ oraz $V_s = X_s$ dla $s \in S \setminus S_0$.

Zauważmy, że powyższa definicja uogólnia Def. 10.2, tzn. dla skończonych (niepustych) rodzin przestrzeni topologicznych obie te definicje są zgodne.

10.6 Obserwacja.
Ciąg uogólniony $x_\sigma = (x_\sigma^{(s)})_{s \in S} \in \prod_{s \in S} X_s$ $(\sigma \in \Sigma)$ *jest zbieżny w topologii produktowej do punktu* $g = (g^{(s)})_{s \in S} \in \prod_{s \in S} X_s$ *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall s \in S\colon\ x_\sigma^{(s)} \xrightarrow{X_s} g^{(s)}\ (\sigma \in \Sigma).$$

Dowód. Najpierw załóżmy, że $x_\sigma \to g$, i ustalmy dowolnie $s_o \in S$. Aby sprawdzić, że

(10:3) $$x_\sigma^{(s_o)} \to g^{(s_o)}\ (\sigma \in \Sigma),$$

ustalmy dowolne otoczenie $U_{s_o} \in \mathscr{G}(X_{s_o})$ punktu $g^{(s_o)}$. Wtedy dla $S_o \overset{\text{def}}{=} \{s_o\}$ zbiór $V \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Cyl}(\{U_s\}_{s \in S_o}, \{X_s\}_{s \in S})$ jest otoczeniem punktu g w $X \overset{\text{def}}{=} \prod_{s \in S} X_s$, więc istnieje indeks $\sigma_o \in \Sigma$, taki że $x_\sigma \in V$ dla $\sigma \geqslant \sigma_o$. Wtedy także $x_\sigma^{(s_o)} \in U_{s_o}$ dla $\sigma \geqslant \sigma_o$, czyli (10:3).

Załóżmy teraz, że zachodzi (10:3) dla wszelkich $s_o \in S$, i ustalmy dowolne otoczenie W punktu g w X. Wtedy istnieje cylinder otwarty $V \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Cyl}(\{V_s\}_{s \in S_o}, \{X_s\}_{s \in S})$, taki że $g \in V \subset W$. Dla dowolnego indeksu $t \in S_o$ zbiór V_t

jest otoczeniem punktu $g^{(t)}$ w X_t, zatem istnieje taki indeks $\sigma_t \in \Sigma$, że $x_\sigma^{(t)} \in V_t$ dla $\sigma \geqslant \sigma_t$. Ze skierowania zbioru Σ i skończoności zbioru S_o wynika istnienie indeksu $\sigma_* \in \Sigma$, takiego że $\sigma_* \geqslant \sigma_t$ dla wszelkich $t \in S_o$. A wtedy dla dowolnego indeksu $\sigma \geqslant \sigma_*$ mamy $\sigma \geqslant \sigma_t$ $(t \in S_o)$, więc $x_\sigma^{(t)} \in V_t$ dla wszelkich $t \in S_o$. Tym samym $x_\sigma \in V \subset W$ i teza. □

10.7 Definicja.
Niech $\{X_s\}_{s\in S}$ będzie rodziną przestrzeni topologicznych.

- Dla $t \in S$ funkcję
$$p_t = \pi_t = \pi_t^S \colon \prod_{s\in S} X_s \ni (x_s)_{s\in S} \mapsto x_t \in X_t$$
nazywamy *rzutowaniem na współrzędną t*.
- Dla przestrzeni topologicznej Z, *zestawieniem* (lub *przekątną*) funkcji $u_s \colon Z \to X_s$ $(s \in S)$ nazywamy odwzorowanie
$$\triangle_{s\in S} u_s \colon Z \ni z \mapsto (u_s(z))_{s\in S} \in \prod_{s\in S} X_s.$$
- Dla rodziny przestrzeni topologicznych $\{Z_s\}_{s\in S}$ [ten sam zbiór indeksów!], *iloczynem kartezjańskim* funkcji $v_s \colon Z_s \to X_s$ $(s \in S)$ nazywamy odwzorowanie
$$\prod_{s\in S} v_s \colon \prod_{s\in S} Z_s \ni (z_s)_{s\in S} \mapsto (v_s(z_s))_{s\in S} \in \prod_{s\in S} X_s.$$
- Gdy $X_s = Y$ (jako przestrzenie topologiczne) dla wszelkich $s \in S$, piszemy Y^S zamiast $\prod_{s\in S} X_s$.

10.8 Obserwacja.

(A) *Topologia produktowa to najmniejsza topologia, w której rzutowania na wszystkie współrzędne są ciągłe.*

(B) *Zestawienie rodziny funkcji jest funkcją ciągłą wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie funkcje tej rodziny są ciągłe. Jeśli jedna z funkcji z tej rodziny jest zanurzeniem topologicznym (a pozostałe są ciągłe), zestawienie tych funkcji również jest zanurzeniem topologicznym.*

(C) *Iloczyn kartezjański rodziny funkcji między niepustymi przestrzeniami topologicznymi jest funkcją ciągłą wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie funkcje tej rodziny są ciągłe. W szczególności, iloczyn kartezjański homeomorfizmów jest homeomorfizmem.*

(D) *Niech $\{X_s\}_{s\in S}$ będzie* ***niepustą*** *rodziną przestrzeni topologicznych.*

(a) *Dla dowolnej bijekcji $\kappa \colon T \to S$ funkcja*
$$\prod_{s\in S} X_s \ni (x_s)_{s\in S} \mapsto (x_{\kappa(t)})_{t\in T} \in \prod_{t\in T} X_{\kappa(t)}$$
jest homeomorfizmem.

(b) *Dla dowolnie ustalonego niepustego zbioru $T \subset S$ oraz punktu $(a_s)_{s\in S} \in \prod_{s\in S} X_s$ funkcja*
$$\triangle_{s\in S} \xi_s \colon \prod_{t\in T} X_t \to \prod_{s\in S} X_s,$$
gdzie $\xi_t(x) = \pi_t^T(x)$ dla $t \in T$ oraz $\xi_s(x) = a_s$ dla $s \in S \setminus T$, jest zanurzeniem topologicznym.

(c) *Jeśli $X_s = Z$ (jako przestrzenie topologiczne) dla wszelkich $s \in S$, wtedy odwzorowanie $\triangle_{s\in S} \mathrm{id}_{X_s} \colon Z \to Z^S$ jest zanurzeniem topologicznym.*

(d) *Dla dowolnie ustalonego niepustego zbioru $T \subset S$ funkcja*
$$\prod_{s\in S} X_s \ni (x_s)_{s\in S} \mapsto (x_t)_{t\in T} \in \prod_{t\in T} X_t$$
jest ciągłą i otwartą suriekcją.

Dowód. Ustalmy rodzinę przestrzeni topologicznych $\{(X_s,\tau_s)\}_{s\in S}$ i oznaczmy $X \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{s\in S} X_s$.

(A): Ciągłość rzutowań wynika ze wzoru:

$$\pi_t^{-1}(V) = \mathrm{Cyl}(\{U_s\}_{s\in S_o}, \{X_s\}_{s\in S}) \qquad \text{gdzie } S_o = \{t\},\ U_t = V \in \mathscr{G}(X_t).$$

Ponadto, jeśli wszystkie rzutowania są ciągłe w pewnej topologii τ na X, to, o ile zbiór S_o jest niepusty,

$$\mathrm{Cyl}(\{U_s\}_{s\in S_o}, \{X_s\}_{s\in S}) = \bigcap_{s\in S_o} \pi_s^{-1}(U_s) \ \in \tau,$$

co implikuje, że wtedy $\prod_{s\in S} \tau_s \subset \tau$.

(B): Niech $f_s\colon Z \to X_s$. Jeśli $g \stackrel{\text{def}}{=} \triangle_{s\in S} f_s$ jest funkcją ciągłą, to także funkcja $f_s = \pi_s \circ g$ jest ciągła (dzięki (A)). Odwrotnie, jeśli wszystkie funkcje f_s są ciągłe, to także funkcja g jest ciągła, gdyż otwarte cylindry stanowią bazę topologii produktowej oraz, o ile $S_o \neq \varnothing$:

$$g^{-1}(\mathrm{Cyl}(\{U_s\}_{s\in S_o}, \{X_s\}_{s\in S})) = \bigcap_{s\in S_o} f_s^{-1}(U_s).$$

Załóżmy teraz, że wszystkie funkcje f_s są ciągłe oraz że f_t jest zanurzeniem topologicznym dla pewnego indeksu $t \in S$. Aby sprawdzić, że także funkcja g jest zanurzeniem topologicznym, przede wszystkim zauważmy, że g jest iniekcją (gdyż $f_t = \pi_t \circ g$ jest takaż). Aby wykazać, że g^{-1} jest funkcją ciągłą, rozważmy dowolny ciąg uogólniony $(z_\sigma)_{\sigma\in\Sigma} \subset Z$ oraz punkt $w \in Z$, takie że $g(z_\sigma) \xrightarrow{X} g(w)$ $(\sigma \in \Sigma)$. Z Obs. 10.6 wynika, że wtedy $f_t(z_\sigma) \xrightarrow{X_t} f_t(w)$ $(\sigma \in \Sigma)$. Skoro f_t jest zanurzeniem topologicznym, otrzymujemy pożądaną tezę: $z_\sigma \xrightarrow{Z} w$.

(C): Niech $f_s\colon Z_s \to X_s$ oraz $g \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{s\in S} f_s$. Ze wzoru

$$g^{-1}(\prod_{s\in S} B_s) = \prod_{s\in S} f_s^{-1}(B_s)$$

wynika, że jeśli funkcje f_s są ciągłe, to przeciwobraz otwartego cylindra poprzez g także jest otwartym cylindrem — czyli g jest funkcją ciągłą. Odwrotnie, jeśli funkcja g jest ciągła, to (korzystając z pewnika wyboru) ustalamy punkt $(a_s)_{s\in S} \in \prod_{s\in S} Z_s$. Dla ustalonego indeksu $t \in S$ mamy wtedy $f_t = \pi_t \circ g \circ (\triangle_{s\in S}\xi_s)$, gdzie $\xi_t\colon Z_t \ni x \mapsto x \in Z_t$ oraz $\xi_s\colon Z_t \ni x \mapsto a_s \in Z_s$ dla $s \neq t$ (por. punkt (b) w (D)). Z (B) wiemy, że zestawienie tu występujące jest ciągłe, więc także funkcja f_t jest ciągła. Na koniec, jeśli funkcje f_s to homeomorfizmy, to funkcja g jest bijekcją oraz $g^{-1} = \prod_{s\in S} f_s^{-1}$, zatem (dzięki powyższemu) obie funkcje g i g^{-1} są ciągłe.

(D): Punkt (a) to szczególny przypadek (C), a (c) to szczególny przypadek (B). Pozostaje pokazać punkty (b) i (d). Ciągłość funkcji $\xi \stackrel{\text{def}}{=} \triangle_{s\in S}\xi_s$ wynika z (B). Zauważmy także, że ξ jest iniekcją. Aby zakończyć dowód (b), wystarczy więc wykazać, że jeśli $\xi(x_\sigma) \to \xi(g)$ $(\sigma \in \Sigma)$, to $x_\sigma \to g$ $(\sigma \in \Sigma)$, a to jest natychmiastową konsekwencją Obs. 10.6.

Przechodzimy do (d). Zauważmy, że funkcja określona w tym punkcie to $\rho \stackrel{\text{def}}{=} \triangle_{t\in T}\pi_t^S$, a więc jest to funkcja ciągła (dzięki (B)). Suriektywność wynika z pewnika wyboru, a otwartość z tego, że obraz otwartego cylindra poprzez ρ jest cylindrem otwartym. □

10.9 Definicja.
Potęgą (*kartezjańską*) przestrzeni topologicznej X o wykładniku $\alpha \in \mathrm{Card}$ nazywamy dowolną przestrzeń topologiczną postaci X^S, gdzie $\mathrm{card}(S) = \alpha$. Z pierwszej własności wymienionej w punkcie (D) Obs. 10.8 wynika, że wszystkie takie produkty kartezjańskie są „naturalnie” homeomorficzne. Z tego powodu stosuje się uproszczoną, sugestywną notację: X^α. W przypadku $\alpha = \aleph_0$ stosuje się także notację X^ω.

Nietrudno sprawdzić, że niepuste otwarte cylindry to jedyne niepuste otwarte podzbiory iloczynu kartezjańskiego przestrzeni topologicznych, które same są iloczynami kartezjańskimi pewnych podzbiorów tych przestrzeni. Okazuje się, że produkt kartezjański zbiorów domkniętych zawsze jest zbiorem domkniętym:

10.10 Twierdzenie.
Dla dowolnego zestawu zbiorów $A_s \subset X_s$ $(s \in S)$ zachodzi:

$$\mathrm{cl}(\prod_{s\in S} A_s) = \prod_{s\in S} \bar{A}_s.$$

Dowód. Możemy założyć, że $A_s \neq \varnothing$ dla wszelkich $s \in S$. Wystarczy pokazać, że każdy punkt z $B \overset{\text{def}}{=} \prod_{s\in S} \bar{A}_s$ należy do domknięcia zbioru $\prod_{s\in S} A_s$ oraz że zbiór B jest domknięty.

Jeśli $b = (b_s)_{s\in S} \in B$ oraz $V = \mathrm{Cyl}(\{U_s\}_{s\in S_o}, \{X_s\}_{s\in S})$ jest otwartym cylindrem zawierającym punkt b, to $b_s \in \bar{A}_s \cap U_s$ dla $s \in S_o$. Tym samym $A_s \cap U_s \neq \varnothing$, a więc $(\prod_{s\in S} A_s) \cap V = \prod_{s\in S} C_s$, gdzie $C_s = A_s \cap U_s$ $(\neq \varnothing)$ dla $s \in S_o$ oraz $C_s = A_s$ $(\neq \varnothing)$ dla $s \notin S_o$. Z pewnika wyboru wynika więc, że $(\prod_{s\in S} A_s) \cap V \neq \varnothing$, czyli punkt b należy do domknięcia zbioru $\prod_{s\in S} A_s$. Domkniętość zbioru B wynika ze wzoru:

$$(\prod_{s\in S} X_s) \setminus (\prod_{s\in S} \bar{A}_s) = \bigcup_{t\in S} \mathrm{Cyl}(\{X \setminus \bar{A}_s\}_{s\in\{t\}}, \{X_s\}_{s\in S}).$$

□

10.11 Wniosek.
Niech $(a_s)_{s\in S}$ będzie ustalonym elementem przestrzeni $X \overset{\text{def}}{=} \prod_{s\in S} X_s$. Jeśli wszystkie przestrzenie X_s są T_1, to dla dowolnego indeksu $t \in S$ zbiór

$$\{(x_s)_{s\in S} \in X |\ \forall s \neq t\colon\ x_s = a_s\}$$

jest zbiorem domkniętym w X homeomorficznym z przestrzenią X_t.

Dowód. Z drugiej własności wymienionej w punkcie (D) Obs. 10.8 wynika, że rzeczony zbiór jest homeomorficzny z X_t. Jednocześnie jest on iloczynem kartezjańskim podzbiorów domkniętych (co wynika z tego, że wszystkie przestrzenie X_s są T_1), więc jego domkniętość wynika z Tw. 10.10. □

Własność T_2 można elegancko scharakteryzować w języku iloczynów kartezjańskich:

10.12 Twierdzenie.
Dla przestrzeni topologicznej X następujące warunki są równoważne:

(i) *X jest przestrzenią T_2;*

(ii) *dla dowolnego niepustego zbioru S funkcja $\triangle_{s\in S} \mathrm{id}_X\colon X \to X^S$ jest zanurzeniem domkniętym;*

(iii) *istnieje zbiór S mocy większej niż 1, dla którego zbiór*

$$\Delta_X(S) \overset{\text{def}}{=} \{(x_s)_{s\in S} \in X^S |\ \forall s,t \in S\colon\ x_s = x_t\}$$

jest domknięty w X^S.

Dowód. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Z trzeciej własności wymienionej w punkcie (D) Obs. 10.8 wynika, że dla dowolnego zbioru S funkcja

$$\triangle_{s\in S} \mathrm{id}_X\colon X \to X^S$$

jest zanurzeniem topologicznym. Zatem warunek (ii) jest równoważny stwierdzeniu, że zbiór $\Delta_X(S)$ (zdefiniowany w (iii)) jest domknięty w X^S.

Ustalmy dowolny punkt $(a_s)_{s\in S} \in X^S \setminus \Delta_X(S)$. Wtedy istnieją indeksy $p, q \in S$, takie że $a_p \neq a_q$. Ponieważ X jest przestrzenią T_2, istnieją zbiory otwarte $U_p, U_q \subset X$, takie że $a_p \in U_p$, $a_q \in U_q$ oraz $U_p \cap U_q = \varnothing$. Ostatnia z tych własności oznacza, że zbiór $W \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Cyl}(\{U_s\}_{s\in\{p,q\}}, \{X_s\}_{s\in S})$ (gdzie $X_s \overset{\text{def}}{=} X$) jest rozłączny z $\Delta_X(S)$. Ponadto, W jest otwartym otoczeniem punktu $(a_s)_{s\in S}$, co dowodzi, że dopełnienie zbioru $\Delta_X(S)$ jest zbiorem otwartym.

Implikacja „(ii) $\Longrightarrow$ (iii)" jest natychmiastowa.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): Niech S będzie takim zbiorem mocy większej niż 1, że zbiór $\Delta_X(S)$ jest domknięty w X^S. Ustalmy dowolnie indeks $p \in S$. Niech a, b będą różnymi punktami zbioru X. Wtedy element $u = (u_s)_{s\in S} \in X^S$ określony regułą:

$$u_s = \begin{cases} a & \text{gdy } s = p \\ b & \text{gdy } s \neq p \end{cases}$$

nie należy do $\Delta_X(S)$ (bo $\mathrm{card}(S) > 1$). Z naszego założenia wynika, że istnieje otwarty cylinder

$$V = \mathrm{Cyl}(\{U_s\}_{s\in S_o}, \{X_s\}_{s\in S})$$

(gdzie $X_s \overset{\text{def}}{=} X$), który zawiera punkt u i jest rozłączny z $\Delta_X(S)$. Dookreślając ewentualnie $U_p \overset{\text{def}}{=} X$, możemy założyć, że $p \in S_o$. Wtedy $a \in U_p$ oraz $\bigcap_{s\in S_o} U_s = \varnothing$ (gdyby to przecięcie zawierało np. punkt $c \in X$, to element $(x_s)_{s\in S}$, taki że $x_s = c$ dla wszelkich $s \in S$, należałby do $V \cap \Delta_X(S)$). W takim razie $\operatorname{card}(S_o) > 1$ oraz $b \in \bigcap_{s \in S_*} U_s =: W$ (bo $u \in V$), gdzie $S_* \stackrel{\text{def}}{=} S_o \setminus \{p\}$. Ostatecznie otrzymujemy, że $a \in U_p$, $b \in W$ oraz $U_p \cap W = \varnothing$, czyli X jest przestrzenią T_2. □

10.13 Wniosek.
Dla dowolnej rodziny funkcji ciągłych $f_s \colon X \to Y$ $(s \in S)$ ***o wartościach w przestrzeni Hausdorffa*** *zbiór*

$$\{x \in X \mid \forall s, t \in S\colon\ f_s(x) = f_t(x)\}$$

jest domknięty.

Dowód. Możemy założyć, że $S \neq \varnothing$. Oznaczając przez $F \colon X \to Y^S$ zestawienie funkcji f_s $(s \in S)$ oraz przez $\Delta_Y(S)$ zbiór $\{(y_s)_{s \in S} \in Y^S \mid \forall s, t \in S\colon y_s = y_t\}$, z Obs. 10.8 oraz Tw. 10.12 wnosimy, że (odpowiednio) funkcja F jest ciągła, a zbiór $\Delta_Y(S)$ jest domknięty w Y^S. W takim razie zbiór $F^{-1}(\Delta_Y(S))$ jest domknięty w X, ale

$$F^{-1}(\Delta_Y(S)) = \{x \in X \mid \forall s, t \in S\colon\ f_s(x) = f_t(x)\}.$$

□

10.14 Twierdzenie.
Niech α będzie nieskończoną liczbą kardynalną. Dla dowolnej rodziny przestrzeni topologicznych X_s $(s \in S)$, takiej że $\operatorname{card}(S) \leqslant \alpha$ oraz $w(X_s) \leqslant \alpha$ (odp. $\chi(X_s) \leqslant \alpha$) dla wszelkich $s \in S$, zachodzi

$$w\Big(\prod_{s \in S} X_s\Big) \leqslant \alpha$$

(odp. $\chi(\prod_{s \in S} X_s) \leqslant \alpha$).

Dowód. Dla $s \in S$ niech β_s będzie bazą topologii przestrzeni X_s, taką że $\operatorname{card}(\beta_s) \leqslant \alpha$. Wtedy rodzina β złożona z wszystkich zbiorów postaci

(10:4) $$\operatorname{Cyl}(\{U_s\}_{s \in S_o}, \{X_s\}_{s \in S}),$$

gdzie $S_o \subset S$ jest zbiorem skończonym oraz $U_s \in \beta_s$ dla wszelkich $s \in S_o$, jest bazą topologii produktowej mocy nie większej niż α (oszacowanie mocy wynika łatwo z wielokrotnego zastosowania twierdzenia Hessenberga — szczegóły pozostawiamy jako obowiązkowe ćwiczenie). Istotnie, wystarczy pokazać, że każdy otwarty cylinder jest sumą mnogościową pewnych zbiorów z β, a tak jest, gdyż dla dowolnego niepustego skończonego zbioru $S_o = \{s_1, \ldots, s_d\} \subset S$ oraz dla dowolnie zadanych zbiorów otwartych $U_s \subset X_s$ $(s \in S_o)$ istnieją rodziny $\beta_s^* \subset \beta_s$ $(s \in S_o)$, takie że $U_s = \bigcup \beta_s^*$, a stąd:

$$\operatorname{Cyl}(\{U_s\}_{s \in S_o}, \{X_s\}_{s \in S}) = \bigcup_{V_{s_1} \in \beta_{s_1}^*} \ldots \bigcup_{V_{s_d} \in \beta_{s_d}^*} \operatorname{Cyl}(\{V_s\}_{s \in S_o}, \{X_s\}_{s \in S}).$$

Podobnie, startując od baz $\beta_s(a_s)$ otoczeń otwartych punktów $a_s \in X_s$, każda mocy nie większej niż α, gołym okiem widać, że wyprodukowana z nich rodzina zbiorów postaci (10:4) jest bazą otoczeń punktu $(a_s)_{s \in S}$ mocy nie większej niż α. □

10.15 Twierdzenie.
Niech $\{(X_n, d_n)\}_{n=1}^N$ (gdzie $N \in \{2, 3, \ldots, \infty\}$) będzie (co najwyżej) przeliczalną rodziną przestrzeni metrycznych, taką że:

(10:5) $$N = \infty \implies \operatorname{diam}(X_n, d_n) \to 0\ (n \to \infty).$$

Wtedy funkcja $\varrho \colon (\prod_{n=1}^N X_n) \times (\prod_{n=1}^N X_n) \to \mathbb{R}_+$ dana wzorem

$$\varrho((x_n)_{n=1}^N, (y_n)_{n=1}^N) = \sup_n d_n(x_n, y_n)$$

jest metryką zgodną z topologią produktową przestrzeni $\prod_{n=1}^N X_n$. Ponadto, jeśli wszystkie metryki d_n są zupełne, to ϱ też jest metryką zupełną.

Dowód. To, że ϱ jest poprawnie określoną metryką, łatwo wynika z (10:5) (ćwiczenie). Aby sprawdzić, że jest to metryka zgodna z topologią produktową, wystarczy pokazać, że:

- dla dowolnego punktu $a \in X$ oraz liczby $r > 0$ istnieje otwarty cylinder V, taki że $a \in V \subset B_\varrho(a, r)$;
- dla dowolnego otwartego cylindra V oraz punktu $a \in V$ istnieje liczba $r > 0$, taka że $B_\varrho(a, r) \subset V$.

Ustalmy punkt $a = (a_n)_{n=1}^N$ oraz promień $r > 0$. Z (10:5) wynika, że istnieje indeks $k \in \mathbb{N}_1$, taki że $k \leqslant N$ oraz

$$\forall n \in \mathbb{N},\ k < n \leqslant N\colon\ \operatorname{diam}(X_n, d_n) < r/2.$$

Zauważmy, że wtedy $\operatorname{Cyl}(\{B_{d_n}(a_n, r/2)\}_{n\in\{1,\dots,k\}}, \{X_n\}_{n=1}^N) \subset B_\varrho(a, r)$. Odwrotnie, jeśli $V = \operatorname{Cyl}(\{U_j\}_{j\in J}, \{X_n\}_{n=1}^N)$ jest otwartym cylindrem zawierającym powyższy punkt a, to oznaczając przez m największy element zbioru $J \cup \{1\}$, możemy dobrać liczbę $\delta > 0$, taką że $\operatorname{Cyl}(\{B_{d_n}(a_n, \delta)\}_{n\in\{1,\dots,m\}}, \{X_n\}_{n=1}^N) \subset V$. A wtedy tym bardziej $B_\varrho(a, \delta) \subset V$.

Pozostaje sprawdzić, że metryka ϱ jest zupełna, gdy takież są metryki d_n. Rozważmy więc ciąg Cauchy'ego $(x_n)_{n=1}^\infty \subset X$ (względem ϱ). Oznaczmy $x_n = (x_n^{(k)})_{k=1}^N$. Wtedy dla dowolnego indeksu $k \in \mathbb{N}_1 \cap [1, N]$ mamy $d_k(x_n^{(k)}, x_m^{(k)}) \leqslant \varrho(x_n, x_m)$. Tym samym ciąg $\left(x_n^{(k)}\right)_{n=1}^\infty$ jest Cauchy'ego (względem d_k). Z założonej zupełności wnosimy, że $x_n^{(k)} \xrightarrow{X_k} g^{(k)}$ $(n \to \infty)$. W takim razie, z Obs. 10.6, $x_n \xrightarrow{X} g \overset{\text{def}}{=} (g^{(k)})_{k=1}^N$ w topologii produktowej. Ale metryka ϱ jest zgodna z tą topologią, czyli ciąg $(x_n)_{n=1}^\infty$ zbiega do g w metryce ϱ — i teza. □

10.16 Wniosek. (Twierdzenie o metryzowalności produktu)
Skończone i przeliczalne iloczyny kartezjańskie przestrzeni metryzowalnych (odp. metryzowalnych w sposób zupełny) są przestrzeniami metryzowalnymi (odp. metryzowalnymi w sposób zupełny).

Dowód. Jeśli $\{X_n\}_{n=1}^N$ to skończona lub przeliczalna rodzina przestrzeni metryzowalnych (odp. metryzowalnych w sposób zupełny), to na każdej z tych przestrzeni X_n możemy dobrać metrykę (odp. metrykę zupełną) ϱ_n zgodną z topologią. Wtedy metryka $d_n \overset{\text{def}}{=} \min(\varrho_n, 2^{-n})$ jest równoważna metryce ϱ_n (i zupełna, gdy ϱ_n jest zupełna), więc także jest zgodna z topologią przestrzeni X_n. Ponadto, dla metryk d_n spełniony jest warunek (10:5) z Tw. 10.15. Zastosowanie tegoż twierdzenia daje tezę. □

10.17 ***Uwaga.***
Nietrudno pokazać, że jeśli $\{X_s\}_{s\in S}$ jest nieprzeliczalną rodziną przestrzeni topologicznych, takich że $\operatorname{top}(X_s) \neq \{\varnothing, X_s\}$ dla wszelkich $s \in S$, to przestrzeń $\prod_{s\in S} X_s$ nie ma przeliczalnej bazy otoczeń w żadnym punkcie. Tym samym tylko przeliczalne produkty niezdegenerowanych przestrzeni metryzowalnych są metryzowalne.

10.18 Wniosek.
Topologia euklidesowa przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jest identyczna z topologią produktową tej przestrzeni.

Dowód. Z Tw. 10.15 wiemy, że topologia produktowa na $\mathbb{R}^n$ jest indukowana przez normę $\|\cdot\|_\infty$, która jest równoważna euklidesowej. □

10.19 Obserwacja.
Dowolna metryka d zgodna z topologią metryzowalnej przestrzeni X jest funkcją ciągłą.

Dowód. Z Tw. 10.15 wiemy, że metryka

$$\varrho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \overset{\text{def}}{=} \max(d(x_1, x_2), d(y_1, y_2))$$

jest zgodna z topologią produktową przestrzeni $X \times X$. Ale w tej metryce funkcja d jest lipschitzowska, gdyż:

$$|d(x, y) - d(x', y')| \leqslant d(x, x') + d(y, y') \leqslant 2\varrho((x, y), (x', y')).$$

Tym samym d jest funkcją ciągłą. □

10.20 Obserwacja.
W dowolnej przestrzeni unormowanej $(X, \|\cdot\|_X)$ nad ciałem $\mathbb{K}$ działania $X \times X \ni (x, y) \mapsto x + y \in X$ oraz $\mathbb{K} \times X \ni (t, x) \mapsto tx \in X$ są ciągłe.

Dowód. Z Tw. 10.15 wiemy, że topologia produktowa na $X \times X$ jest indukowana przez normę

$$\|(x, y)\|_{\max} \overset{\text{def}}{=} \max(\|x\|_X, \|y\|_X),$$

która jest równoważna normie $\|(x, y)\| \overset{\text{def}}{=} \|x\|_X + \|y\|_X$. Analogicznie, topologia produktowa na $\mathbb{K} \times X$ jest indukowana przez normę $\|(t, x)\|_o \overset{\text{def}}{=} |t| + \|x\|_X$. Wystarczy więc pokazać, że dodawanie spełnia warunek Lipschitza względem metryk indukowanych przez normy $\|\cdot\|_X$ (w X) i $\|\cdot\|$ (w $X \times X$), a mnożenie spełnia warunek Lipschitza na zbiorach ograniczonych (względem normy $\|\cdot\|_o$). A to jest proste:

$$\|(x + y) - (x' + y')\|_X \leqslant \|x - x'\|_X + \|y - y'\|_X = \|(x, y) - (x', y')\|$$

oraz, gdy $\|(t, x)\|_o \leqslant M$ i $\|(s, y)\|_o \leqslant M$ (dla pewnej dowolnie dobranej stałej M):

$$\|tx - sy\|_X \leqslant \|tx - ty\|_X + \|ty - sy\|_X \leqslant M(\|x - y\|_X + |t - s|) \leqslant M\|(t, x) - (s, y)\|_o.$$

□

10.21 Wniosek.
Niech X będzie przestrzenią topologiczną, a W przestrzenią unormowaną nad ciałem $\mathbb{K}$. Jeśli $p \in \mathbb{N}_1$ i funkcje $u_1, \dots, u_p \colon X \to \mathbb{K}$ oraz $v_1, \dots, v_p \colon X \to W$ są ciągłe, to także funkcja $X \ni x \mapsto \sum_{k=1}^{p} u_k(x) v_k(x) \in W$ jest ciągła.

Dowód. Dzięki indukcji, wystarczy pokazać, że $u_1 v_1$ oraz $v_1 + v_2$ są funkcjami ciągłymi. W tym celu oznaczmy $m \colon \mathbb{K} \times W \ni (t, x) \mapsto tx \in W$ oraz $s \colon W \times W \ni (x, y) \mapsto x + y \in W$ i zauważmy, że $u_1 v_1 = m \circ (u_1 \triangle v_1)$ oraz $v_1 + v_2 = s \circ (v_1 \triangle v_2)$. Tym samym teza wynika z Obs. 10.8 oraz Obs. 10.20. □

10.22 Twierdzenie. (Twierdzenie o spójności produktu)
Iloczyn kartezjański niepustych przestrzeni topologicznych jest przestrzenią spójną (odp. drogowo spójną) wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie te przestrzenie są spójne (odp. drogowo spójne).

Co więcej, jeśli X_s $(s \in S)$ to niepusta przestrzeń topologiczna, składowe (odp. składowe drogowe) przestrzeni $\prod_{s \in S} X_s$ to dokładnie zbiory postaci $\prod_{s \in S} C_s$ gdzie C_s $(s \in S)$ to składowa (odp. składowa drogowa) przestrzeni X_s.

Dowód. Zauważmy, że dla pustej rodziny przestrzeni topologicznych całe twierdzenie jest prawdziwe. Ustalmy niepusty zbiór S, niepuste przestrzenie topologiczne X_s $(s \in S)$ i oznaczmy $X \overset{\text{def}}{=} \prod_{s \in S} X_s$.

Dowód rozpoczynamy od obserwacji, że (dzięki pewnikowi wyboru) rzutowania na wszystkie współrzędne są suriekcjami (ciągłymi). Tym samym jeśli przestrzeń X jest spójna lub drogowo spójna, to takież są wszystkie przestrzenie X_s. Implikacja odwrotna dla drogowej spójności bez bardzo prosta: jeśli wszystkie przestrzenie X_s są drogowo spójne oraz $(a_s)_{s \in S}$ i $(b_s)_{s \in S}$ to dowolne dwa punkty przestrzeni X, to dla każdego indeksu $s \in S$ istnieje droga $\gamma_s \colon [0, 1] \to X_s$ od a_s do b_s i wtedy zestawienie $\triangle_{s \in S} \gamma_s \colon [0, 1] \to X$ jest drogą od a do b.

Dowód tego, że iloczyn kartezjański spójnych przestrzeni także jest przestrzenią spójną, jest subtelniejszy. Przeprowadzimy go w dwóch krokach:

Krok 1: Jeśli $n \in \mathbb{N}_1$ oraz $Z_1, \dots, Z_n$ to spójne niepuste przestrzenie topologiczne, wtedy $Z_1 \times \ldots \times Z_n$ jest przestrzenią spójną.

Dowód kroku 1: Jak łatwo sprawdzić, topologia produktowa przestrzeni $\prod_{k=1}^{n} Z_k$ pokrywa się z topologią produktową na $W \times Z_n$, gdzie $W = \prod_{k=1}^{n-1} Z_k$ ma topologię produktową. Tym samym wystarczy wykazać tezę kroku 1 dla $n = 2$ (dzięki indukcji). Rozważmy więc dwie niepuste spójne przestrzenie Z oraz W. Ustalmy punkt $a \in Z$. Niech $C^a \overset{\text{def}}{=} \{a\} \times W$ oraz $C_b \overset{\text{def}}{=} Z \times \{b\}$ dla $b \in W$. Z Obs. 10.8 wynika, że przestrzeń C^a jest homeomorficzna z Z, a przestrzenie C_b z Y. Tym samym są to przestrzenie spójne. Ponadto, zauważmy, że $C^a \cap C_b = \{(a, b)\}$ dla $b \in W$. Z Wn. 8.7 (str. 40) wynika więc, że $C^a \cup \bigcup_{b \in W} C_b$ jest zbiorem spójnym, ale ta suma to $Z \times W$.

Krok 2: Jeśli przestrzenie X_s są (niepuste i) spójne, to przestrzeń $X = \prod_{s \in S} X_s$ jest spójna.

Dowód kroku 2: Ustalmy punkt $(b_s)_{s\in S} \in X$. Dla niepustego zbioru skończonego S_o niech

$$C_{S_o} \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_s)_{s\in S} |\ \forall s \in S \setminus S_o\colon\ x_s = b_s\}.$$

Z Obs. 10.8 wynika, że przestrzeń C_{S_o} jest homeomoriczna z $\prod_{s\in S_o} X_s$. Tym samym C_{S_o} jest przestrzenią spójną (dzięki krokowi 1). Zauważmy także, że $(b_s)_{s\in S} \in C_{S_o}$. Z Wn. 8.7 (str. 40) wynika więc, że zbiór

$$D \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup \{C_{S_o}\colon\ \varnothing \neq S_o \subset S,\ S_o \text{ zbiór skończony}\}$$

jest spójny. Ale D jest zbiorem gęstym w X, gdyż zbiór D przecina niepusto każdy niepusty otwarty cylinder w X. Tak więc z Tw. 8.4 (str. 39) otrzymujemy spójność przestrzeni X.

Przechodzimy teraz do drugiej części twierdzenia. Najpierw zauważmy, że jeśli C_s $(s \in S)$ jest składową (odp. składową drogową) przestrzeni X_s, to zbiór $C \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{s\in S} C_s$ jest spójny (odp. drogowo spójny) — co wynika z wcześniejszej części dowodu — oraz niepusty (co wynika z pewnika wyboru). Można go więc powiększyć do składowej (odp. składowej drogowej), powiedzmy P. A wtedy $C_s \subset \pi_s(P)$ oraz zbiór $\pi_s(P)$ jest spójny (odp. drogowo spójny). Zatem $C_s = \pi_s(P)$, a stąd $P \subset \prod_{s\in S} C_s = C$, czyli $P = C$. To pokazuje, że produkt składowych (odp. składowych drogowych) jest składową (odp. składową drogową). Odwrotnie, jeśli C jest składową (odp. składową drogową) przestrzeni X, to dla dowolnego indeksu $s \in S$ zbiór $C_s \stackrel{\text{def}}{=} \pi_s(C)$ jest niepusty i spójny (odp. drogowo spójny), więc można go powiększyć do składowej (odp. składowej drogowej) przestrzeni X_s, powiedzmy P_s. Wtedy $C \subset \prod_{s\in S} C_s \subset \prod_{s\in S} P_s$ oraz zbiór $\prod_{s\in S} P_s$ jest spójny (odp. drogowo spójny). A stąd $C = \prod_{s\in S} P_s$, czyli wszystkie składowe (odp. składowe drogowe) są produktami składowych (odp. składowych drogowych). □

10.23 Twierdzenie. (Twierdzenie o zwartości przeliczalnego produktu przestrzeni metryzowalnych)
Iloczyn kartezjański skończenie lub przeliczalnie wielu zwartych przestrzeni metryzowalnych jest zwartą przestrzenią metryzowalną.

Dowód. Niech $\{X_n\}_{n=1}^N$ (gdzie $N \in \{2, 3, \dots, \infty\}$) będzie rodziną zwartych przestrzeni metryzowalnych. Z Wn. 10.16 wiemy, że przestrzeń $X \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{n=1}^N X_n$ jest metryzowalna. Wystarczy więc pokazać ciągową zwartość. Niech więc $x_n = (x_n^{(k)})_{k=1}^N \in X$. Powtarzamy dowód Wn. 7.19 (str. 35). Określamy $J_0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{N}_1$ i indukcyjnie określamy nieskończone zbiory $J_k \subset \mathbb{N}_1$ dla $k \in \mathbb{N}_1 \cap [1, N]$ w taki sposób, że $J_k \subset J_{k-1}$ oraz ciąg $(x_n^{(k)})_{n\in J_k}$ zbiega (w przestrzeni X_k) do pewnego elementu $g^{(k)}$: gdy zbiór J_{k-1} jest już określony i $k \leqslant N$, ciąg $(x_n^{(k)})_{n\in J_{k-1}} \subset X_k$ ma podciąg zbieżny, więc możemy dobrać nieskończony zbiór $J_k \subset J_{k-1}$, taki że ciąg $(x_n^{(k)})_{n\in J_k}$ zbiega do pewnego elementu $g^{(k)}$. Gdy $N < \infty$, finalny podciąg otrzymujemy przez ustawienie wszystkich elementów zbioru J_N w (jeden jedyny) ciąg ściśle rosnący $(\nu_n)_{n=1}^\infty$. Gdy $N = \infty$, finalny podciąg konstruujemy indukcyjnie: ν_1 to dowolny element zbioru J_1, a ν_n dla $n > 1$ to dowolny element zbioru J_n większy od ν_{n-1}. Taka konstrukcja zapewnia nam, że:

- $\{\nu_n\colon\ n \geqslant k\} \subset J_k$ dla dowolnej liczby $k > 0$;
- $x_{\nu_n}^{(k)} \xrightarrow{X_k} g^{(k)}$ $(n \to \infty)$.

Tym samym, dzięki Obs. 10.6, ciąg $(x_{\nu_n})_{n=1}^\infty$ zbiega w X do elementu $(g^{(k)})_{k=1}^N$ — i teza. □

10.24 Definicja. (Kostka Hilberta)
Kostka Hilberta to przestrzeń $[0, 1]^\omega$.

Z Tw. 10.22 oraz Tw. 10.23 wynika, że kostka Hilberta jest zwartą spójną przestrzenią metryzowalną.

10.25 Twierdzenie. (Skończony przypadek Twierdzenia Tichonowa)
Iloczyn kartezjański skończenie wielu zwartych przestrzeni $[T_2]$ *jest zwartą* $[T_2$-$]$*przestrzenią.*

Dowód. Dzięki Obs. 10.8 oraz indukcji, wystarczy wykazać, że iloczyn kartezjański dwóch zwartych $[T_2$-$]$przestrzeni X i Y jest zwartą $[T_2$-$]$przestrzenią. Sprawdzenie, że jeśli obie te przestrzenie są T_2, to również przestrzeń $X \times Y$ jest T_2, pozostawiamy jako proste ćwiczenie. Tutaj ograniczymy się jedynie do wykazaniu warunku pokryciowego. Oczywiście możemy założyć, że obie przestrzenie X i Y są niepuste. Niech więc $\{W_s\}_{s\in S}$ będzie otwartym pokryciem przestrzeni $X \times Y$. Ustalmy dowolnie punkt $a \in X$. Dla dowolnego punktu $y \in Y$ istnieją zbiory otwarte $Z_y \subset X$ i $G_y \subset Y$ oraz indeks $t(y) \in S$, takie że $(a, y) \in Z_y \times G_y \subset W_{t(y)}$. Z pokrycia otwartego $\{G_y\}_{y\in Y}$ wybieramy podpokrycie skończone: $Y = \bigcup_{k=1}^p G_{y_k}$ dla pewnych punktów $y_1, \dots, y_p \in Y$. Oznaczmy:

- $U_a \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{k=1}^{p} Z_{y_k} \in \mathscr{G}(X)$;
- $T_a \overset{\text{def}}{=} \{t(y_k)\colon\ k = 1, \ldots, p\} \subset S$.

Zauważmy, że zbiór T_a jest skończony, $a \in U_a$ oraz $U_a \times G_{y_k} \subset W_{t(y_k)}$. Tym samym:

(10:6)
$$U_a \times Y \subset \bigcup_{s \in T_a} W_s.$$

Teraz z pokrycia otwartego $\{U_a\}_{a \in X}$ wybieramy podpokrycie skończone: $X = \bigcup_{j=1}^{d} U_{a_j}$ dla pewnych punktów $a_1, \ldots, a_d \in X$. A wtedy z (10:6) otrzymujemy:

$$X \times Y = \bigcup_{j=1}^{d} (U_{a_j} \times Y) \subset \bigcup_{j=1}^{d} \bigcup_{s \in T_{a_j}} W_s,$$

czyli rodzina $\{W_s\colon\ s \in \bigcup_{j=1}^{d} T_{a_j}\}$ jest skończonym podpokryciem przestrzeni $X \times Y$. □

10.1 Twierdzenie Tichonowa

Niniejszy (krótki) podrozdział poświęcony jest dowodowi następującego twierdzenia:

10.26 Twierdzenie. (Twierdzenie Tichonowa)
Iloczyn kartezjański zwartych przestrzeni $[T_2]$ jest zwartą przestrzenią $[T_2]$.

Odwrotnie, jeśli przestrzenie topologiczne X_s ($s \in S$) są niepuste, a przestrzeń $\prod_{s \in S} X_s$ jest zwarta, to każda z przestrzeni X_s także jest zwarta.

Jest to jedno z najważniejszych twierdzeń w całej topologii, mające mnóstwo zastosowań w innych działach matematyki.

10.27 Definicja.
Filtr w zbiorze X to dowolna rodzina $\mathcal{F}$ podzbiorów zbioru X, taka że:

- $\varnothing \notin \mathcal{F} \neq \varnothing$;
- $\mathcal{F} \ni A \subset B \subset X \implies B \in \mathcal{F}$;
- $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$.

Ultrafiltr w X to maksymalna (względem inkluzji) rodzina wśród scentrowanych rodzin podzbiorów zbioru X.

10.28 Przykład.
Dla dowolnego punktu $a \in X$, rodzina $\mathfrak{U}_a \overset{\text{def}}{=} \{A \subset X\colon\ a \in A\}$ jest ultrafiltrem w X, takim że $\bigcap \mathfrak{U}_a \neq \varnothing$. Odwrotnie, każdy ultrafiltr o niepustym przecięciu jest postaci $\mathfrak{U}_a$ dla pewnego punktu $a \in X$. Ultrafiltry tej postaci nazywa się *głównymi*.

10.29 Obserwacja.
Niech X będzie zbiorem niepustym.

(A) *Każdy ultrafiltr w X jest filtrem.*

(B) *Każdy filtr w X jest scentrowaną rodziną zbiorów.*

(C) *Każdą scentrowaną rodzinę podzbiorów zbioru X można powiększyć do ultrafiltru w X.*

(D) *Niech $\mathfrak{U}$ będzie dowolnym ultrafiltrem w X i niech $A \subset X$.*

  (a) $A \in \mathfrak{U} \iff \forall B \in \mathfrak{U}\colon\ A \cap B \neq \varnothing$.
  (b) $A \in \mathfrak{U} \vee X \setminus A \in \mathfrak{U}$.

Dowód. (A): Jest jasne, że rodzina scentrowana nie zawiera zbioru pustego. Ponadto, rodzina $\{X\}$ jest scentrowana i tym samym pusta rodzina zbiorów nie jest maksymalną wśród scentrowanych, co pokazuje, że ultrafiltr jest rodziną niepustą. Dalej, jeśli $\mathfrak{U}$ to ultrafiltr w X oraz $\mathfrak{U} \ni A \subset B \subset X$, to także rodzina $\mathfrak{U} \cup \{B\}$ jest scentrowaną rodziną (podzbiorów zbioru X), gdyż $C_1 \cap \ldots \cap C_p \cap B \supset C_1 \cap \ldots \cap C_p \cap A \neq \varnothing$ dla wszelkich $C_1, \ldots, C_p \in \mathfrak{U}$ (oraz $p \in \mathbb{N}$). Z maksymalności rodziny $\mathfrak{U}$ wnosimy, że $B \in \mathfrak{U}$. Analogicznie sprawdzamy, że jeśli $A, B \in \mathfrak{U}$, to rodzina $\mathfrak{U} \cup \{A \cap B\}$ jest scentrowana, i tym samym $A \cap B \in \mathfrak{U}$, czyli $\mathfrak{U}$ jest filtrem.

(B): Jeśli $\mathcal{F}$ jest filtrem w X, to z indukcji wynika, że $B \stackrel{\text{def}}{=} A_1 \cap \ldots \cap A_n$ należy do $\mathcal{F}$ dla wszelkich $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ (gdzie $n > 0$). Stąd $B \neq \varnothing$, gdyż $\varnothing \notin \mathcal{F}$.

(C): Dzięki Lematowi Kuratowskiego-Zorna wystarczy pokazać, że suma mnogościowa każdego niepustego łańcucha (względem relacji inkluzji) scentrowanych rodzin podzbiorów zbioru X jest takąż rodziną. A to jest bardzo proste, gdyż: jeśli $A_1, \ldots, A_n \in \bigcup \mathcal{L}$, gdzie $\mathcal{L}$ jest rzeczonym łańcuchem (i $n > 0$), to $A_j \in S_j$ dla pewnych $S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{L}$; a wtedy $S_j \subset S_k$ dla pewnego indeksu $k \in \{1, \ldots, n\}$ i wszelkich $j \in \{1, \ldots, n\}$ (gdyż $\mathcal{L}$ to łańcuch), więc $A_1, \ldots, A_n \in S_k$ i tym samym $A_1 \cap \ldots \cap A_n \neq \varnothing$ (bo S_k, jako element łańcucha $\mathcal{L}$, jest rodziną scentrowaną).

Przechodzimy do (D). Jeśli $A \in \mathfrak{U}$, to z (A) wynika, że $A \cap B \in \mathfrak{U}$ dla wszelkich $B \in \mathfrak{U}$, i tym samym $A \cap B \neq \varnothing$. Odwrotnie, jeśli zbiór A przecina niepusto każdy element rodziny $\mathfrak{U}$, to $\mathfrak{U} \cup \{A\}$ jest scentrowaną rodziną (podzbiorów zbioru X), gdyż (ponownie z (A)):

$$B_1, \ldots, B_n \in \mathfrak{U} \ (n > 0) \implies B_1 \cap \ldots \cap B_n \in \mathfrak{U} \implies B_1 \cap \ldots \cap B_n \cap A \neq \varnothing.$$

Z maksymalności rodziny $\mathfrak{U}$ wnioskujemy, że $A \in \mathfrak{U}$.

Pozostaje pokazać podpunkt (b). Dla dowodu nie wprost, załóżmy, że ani $A \notin \mathfrak{U}$, ani $X \setminus A \notin \mathfrak{U}$. Z podpunktu (a) wnioskujemy, że w takim razie istnieją zbiory $B, C \in \mathfrak{U}$, takie że $A \cap B = (X \setminus A) \cap C = \varnothing$. Wtedy $D \stackrel{\text{def}}{=} B \cap C$ należy do $\mathfrak{U}$, więc $D \neq \varnothing$. Ale zarazem $D = D \cap X = (D \cap A) \cup (D \cap (X \setminus A)) \subset (B \cap A) \cup (C \cap (X \setminus A)) = \varnothing$ i sprzeczność. □

Dowód Twierdzenia Tichonowa (*Tw.* 10.26). Niech X_s ($s \in S$) będą zwartymi przestrzeniami $[T_2]$. Jeśli wszystkie one są T_2, to także produkt $X \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{s \in S} X_s$ jest przestrzenią Hausdorffa, gdyż dwa różne jego punkty możemy oddzielić (rozłącznymi) otwartymi cylindrami, które „używają" tylko jednej współrzędnej (tej, na której te dwa punkty się różnią). (Szczegóły — ćwiczenie). Tutaj skupimy się „jedynie" na warunku pokryciowym. Możemy przy tym założyć, że $X \neq \varnothing$ oraz $S \neq \varnothing$, co czynimy poniżej.

Niech $\mathcal{A} = \{A_j\}_{j \in J}$ będzie niepustą scentrowaną rodziną zbiorów domkniętych w X. Dzięki Obs. 7.6 (str. 32), wystarczy pokazać, że $\bigcap_{j \in J} A_j \neq \varnothing$. Zgodnie z Obs. 10.29, $\mathcal{A} \subset \mathfrak{U}$, gdzie $\mathfrak{U}$ to pewien ultrafiltr w X. Wtedy także $\bigcap_{j \in J} A_j \supset \bigcap_{F \in \mathfrak{U}} \bar{F}$, zatem wystarczy pokazać, że

$$\bigcap_{F \in \mathfrak{U}} \bar{F} \neq \varnothing \tag{10:7}$$

dla dowolnego ultrafiltru $\mathfrak{U}$ w X.

Ustalmy dowolny indeks $t \in S$. Rodzina $\{\pi_t(F)\colon \ F \in \mathfrak{U}\}$ jest scentrowana, więc ze zwartości przestrzeni X_t wynika, że

$$\bigcap_{F \in \mathfrak{U}} \operatorname{cl}_{X_t} \pi_t(F) \neq \varnothing.$$

Niech $a_t \in X_t$ będzie dowolnym elementem tego (powyższego) przecięcia. Z własności domknięcia zbioru wynika, że wtedy:

$$\forall F \in \mathfrak{U} \ \forall U \text{otwarte otoczenie punktu } a_t \text{ w } X_t\colon \ U \cap \pi_t(F) \neq \varnothing. \tag{10:8}$$

Niech teraz $a \stackrel{\text{def}}{=} (a_s)_{s \in S} \in X$. Aby wykazać (10:7), wystarczy uzasadnić, że $a \in \bar{F}$ dla dowolnego zbioru $F \in \mathfrak{U}$. W tym celu ustalmy otwarte otoczenie W punktu a w X. Wystarczy, że

$$\forall F \in \mathfrak{U}\colon \ W \cap F \neq \varnothing. \tag{10:9}$$

Ponieważ otwarte cylindry tworzą bazę topologii produktowej, możemy założyć, że W ma postać

$$W = \operatorname{Cyl}(\{U_s\}_{s \in S_o}, \{X_s\}_{s \in S})$$

(gdzie $S_o \subset S$ to niepusty zbiór skończony). Wtedy $a_t \in U_t$ dla $t \in S_o$ oraz $W = \bigcap_{t \in S_o} \pi_t^{-1}(U_t)$. Ustalmy dowolnie $t \in S_o$, a następnie $F \in \mathfrak{U}$. Z (10:8) wnosimy, że $\pi_t(F) \cap U_t \neq \varnothing$. Oznacza to, że istnieje punkt $z \in F$, taki że $\pi_t(z) \in U_t$, czyli $z \in \pi_t^{-1}(U_t)$, co daje $F \cap \pi_t^{-1}(U_t) \neq \varnothing$. Z dowolności zbioru $F \in \mathfrak{U}$ oraz Obs. 10.29 wnioskujemy, że w takim razie $\pi_t^{-1}(U_t) \in \mathfrak{U}$ (dla dowolnego indeksu $t \in S_o$). Skoro $\mathfrak{U}$ jest filtrem (a zbiór S_o jest skończony), otrzymujemy, że także $\bigcap_{t \in S_o} \pi_t^{-1}(U_t) \in \mathfrak{U}$, czyli $W \in \mathfrak{U}$. A dzięki temu (10:9) wynika z własności filtrów. Zatem przestrzeń X jest zwarta.

Drugie zdanie twierdzenia wynika stąd, że rzutowania są ciągłe (więc zbiór $\pi_s(X)$ jest zwarty, o ile X jest przestrzenią zwartą) oraz suriektywne (dzięki założeniom tamże zawartym i pewnikowi wyboru). □

10.30 Definicja.
Kostka Tichonowa ciężaru α (gdzie $\alpha \geqslant \aleph_0$) to przestrzeń $[0,1]^\alpha$. Każdą z tych przestrzeni nazywamy także skrótowo *kostką Tichonowa.*

Zauważmy, że kostka Hilberta jest szczególnym przykładem kostki Tichonowa. Co więcej:

10.31 Obserwacja.
Kostka Tichonowa $[0,1]^\alpha$ *(gdzie* $\alpha \geqslant \aleph_0$*) jest zwartą i drogowo spójną przestrzenią* T_2*, której ciężar topologiczny jest równy* α*.*

Dowód. Dzięki Tw. 10.22 (str. 61), Tw. 10.14 (str. 59) oraz Tw. 10.26, wystarczy pokazać, ze $w([0,1]^\alpha) \geqslant \alpha$. W tym celu ustalmy zbiór S mocy α i dla $t \in S$ niech $X_t = [0,1]$, $U_t \overset{\text{def}}{=} (0,1]$ oraz $a^{(t)} = (a^{(t)}_s)_{s\in S} \in [0,1]^S$ będzie punktem określonym następująco:

$$a^{(t)}_s = \begin{cases} 1 & \text{gdy } s = t \\ 0 & \text{gdy } s \neq t \end{cases}.$$

Na koniec niech $A \overset{\text{def}}{=} \{a^{(t)}\colon\ t \in S\}$. Zauważmy, że

$$\forall t \in S\colon\ A \cap \operatorname{Cyl}(\{U_s\}_{s\in\{t\}}, \{X_s\}_{s\in S}) = \{a^{(t)}\}. \tag{10:10}$$

Jeśli β jest dowolną bazą topologii produktowej tej kostki Tichonowa, to dla dowolnego indeksu $t \in S$ istnieje taki zbiór $V_t \in \beta$, że $a^{(t)} \in V_t \subset \operatorname{Cyl}(\{U_s\}_{s\in\{t\}}, \{X_s\}_{s\in S})$. W takim razie $A \cap V_t = \{a^{(t)}\}$ (dzięki (10:10)), co oznacza, że funkcja $S \ni s \mapsto V_s \in \beta$ jest różnowartościowa, czyli $\operatorname{card}(\beta) \geqslant \operatorname{card}(S) = \alpha$ i tym samym $w([0,1]^\alpha) \geqslant \alpha$. □

11 Aksjomaty oddzielania, część II

11.1 Twierdzenie.
Dla przestrzeni topologicznej X *następujące warunki są równoważne:*

(i) *przestrzeń* X *jest homeomorficzna z podprzestrzenią pewnej przestrzeni normalnej;*

(ii) *przestrzeń* X *jest homeomorficzna z podprzestrzenią pewnej zwartej przestrzeni* T_2*;*

(iii) *przestrzeń* X *jest homeomorficzna z podprzestrzenią kostki Tichonowa* $[0,1]^\alpha$*, gdzie* $\alpha \overset{\text{def}}{=} \max(w(X), \aleph_0)$*;*

(iv) X *jest przestrzenią* T_1 *oraz*

$$(T_{3\frac{1}{2}}) \qquad \forall A \in \mathscr{F}(X)\ \forall a \in X \setminus A\ \exists u \in C(X,[0,1])\colon\ u(a) = 1\ \wedge\ u|_A \equiv 0.$$

Dowód. Implikacje (iii) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (i) wynikają natychmiast z Obs. 10.31 oraz Tw. 7.9 (str. 33).

(i) $\Longrightarrow$ (iv): Niech $h\colon X \to M$ będzie zanurzeniem w normalną przestrzeń M. Wtedy $\{x\} = h^{-1}(\{h(x)\}) \in \mathscr{F}(X)$ dla dowolnego punktu $x \in X$, więc X jest przestrzenią T_1. Ponadto, jeśli $A \in \mathscr{F}(X)$ oraz $a \in X \setminus A$, wtedy $b \overset{\text{def}}{=} h(a) \notin h(A)$ oraz zbiór $h(A)$ jest domknięty w $h(X)$. W takim razie $h(A) = B \cap h(X)$ dla pewnego zbioru domkniętego $B \subset M$. Wtedy $b \notin B$ (gdyż $b \in h(X) \setminus h(A)$), więc z Lematu Urysohna istnieje funkcja ciągła $v\colon M \to [0,1]$, taka że $v(b) = 1$ oraz $v|_B \equiv 0$. Wystarczy podstawić $u \overset{\text{def}}{=} v \circ h\colon X \to [0,1]$, by otrzymać $(T_{3\frac{1}{2}})$.

(iv) $\Longrightarrow$ (iii): Możemy założyć (i tak czynimy), że $\operatorname{card}(X) > 1$. Niech β będzie bazą topologii przestrzeni X, taką że $\operatorname{card}(\beta) \leqslant \alpha$. Niech

$$S \overset{\text{def}}{=} \{(U,V) \in \beta \times \beta |\quad \exists u \in C(X,[0,1])\colon\ u|_U \equiv 1,\ u|_{X\setminus V} \equiv 0\}.$$

Oczywiście $\operatorname{card}(S) \leqslant \alpha$ (bo $S \subset \beta \times \beta$ oraz $\alpha \geqslant \aleph_0$). W tym momencie jeszcze nie wiemy, czy $S \neq \varnothing$, ale poniższe rozumowanie pokaże, że tak w istocie jest.

Dla dowolnego indeksu $s = (U,V) \in S$ niech funkcja $g_s \in C(X,[0,1])$ będzie taka, że:

$$g_s|_U \equiv 1, \qquad g_s|_{X\setminus V} \equiv 0.$$

Ponieważ przestrzeń $[0,1]^{\mathrm{card}(S)}$ jest zanurzalna w $[0,1]^\alpha$ (zob. np. punkt (D) w Obs. 10.8, str. 56), wystarczy pokazać, że zestawienie $F \stackrel{\text{def}}{=} \triangle_{s\in S} g_s \colon X \to [0,1]^S$ jest zanurzeniem topologicznym. Wiemy już, że jest to funkcja ciągła. Do dowodu tego, że jest iniekcją, taką że funkcja $F^{-1}\colon F(X) \to X$ jest ciągła, potrzebujemy następującej własności:

($\star$) Dla dowolnego zbioru $A \in \mathscr{F}(X)$ oraz punktu $a \in X \setminus A$ istnieje indeks $s \in S$, taki że $g_s(a) = 1$ oraz $g_s|_A \equiv 0$.

Aby wykazać powyższą własność, najpierw dobieramy zbiór $V \in \beta$, taki że $a \in V \subset X \setminus A$, potem — korzystając z warunku $(T_{3\frac{1}{2}})$ — dobieramy funkcję $v \in C(X,[0,1])$, która znika poza V, a w punkcie a ma wartość 1. Na koniec znajdujemy zbiór $U \in \beta$, taki że $a \in U \subset v^{-1}((\frac{1}{2},2))$. Zauważmy, że wtedy $(U,V) \in S$, gdyż funkcja $\gamma\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ dana wzorem

$$\gamma(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{gdy } t \in (-\infty,0] \\ 2t & \text{gdy } t \in [0,\frac{1}{2}] \\ 1 & \text{gdy } t \in [\frac{1}{2},\infty) \end{cases}$$

jest poprawnie określona i ciągła, a funkcja $\gamma \circ v \in C(X,[0,1])$ znika poza V i jest stale równa 1 na U. W takim razie jest określona funkcja g_s dla $s \stackrel{\text{def}}{=} (U,V)$ i zachodzi $g_s(a) = 1$ (bo $a \in U$) oraz $g_s|_A \equiv 0$ (bo $A \subset X \setminus V$). Tym samym własność ($\star$) została wykazana.

Teraz bez trudu możemy wykazać, że funkcja F jest różnowartościowa: jeśli x i y to różne punkty przestrzeni X, wtedy podstawiając do ($\star$) $A \stackrel{\text{def}}{=} \{x\}$ (korzystamy tutaj z tego, że X jest T_1) i $a \stackrel{\text{def}}{=} y$, znajdziemy indeks $s \in S$ (w szczególności, $S \neq \varnothing$, gdyż $\mathrm{card}(X) > 1$), taki że $g_s(x) = 0$ i $g_s(y) = 1$, a stąd automatycznie $F(x) \neq F(y)$ (wszak $g_s = \pi_s \circ F$).

Przechodzimy do ostatniej części — dowodu ciągłości funkcji F^{-1}. Dla uproszczenia notacji oznaczmy $Z \stackrel{\text{def}}{=} F(X)$. Chcemy pokazać, że $F^{-1}(\mathrm{cl}_Z(B)) \subset \mathrm{cl}_X(F^{-1}(B))$ dla $B \subset Z$ (zob. Tw. 4.5, str. 17). Równoważnie, chcemy, by $\mathrm{cl}_Z(F(A)) \subset F(\bar{A})$ dla $A \stackrel{\text{def}}{=} F^{-1}(B) \subset X$, czyli by zbiory $F(X \setminus \bar{A}) = Z \setminus F(\bar{A})$ i $\mathrm{cl}_Z(F(A))$ były rozłączne. W tym celu ustalmy $a \in X \setminus \bar{A}$. Wystarczy pokazać, że

$$F(a) \notin \overline{F(A)} \tag{11:1}$$

(domknięcie w całej przestrzeni $[0,1]^S$). Z relacji $\pi_s(\bar{B}) \subset \overline{\pi_s(B)}$ wynika, że jeśli $g_s(a) = \pi_s(F(a)) \notin \overline{\pi_s(F(A))} = \overline{g_s(A)}$ dla pewnego indeksu $s \in S$, to zachodzi (11:1). Ale $g_s(a) \notin \overline{g_s(A)}$ dla indeksu $s \in S$ dobranego z ($\star$) dla $\bar{A}$ i a. □

11.2 ***Uwaga.***
Jak nietrudno się przekonać, dla ustalonego zbioru A i punktu a warunek $(T_{3\frac{1}{2}})$ jest równoważny następującemu:

- istnieje przestrzeń normalna Z oraz funkcja ciągła $v\colon X \to Z$, taka że $v(a) \notin \overline{v(A)}$.

Istotnie, w powyższej sytuacji wystarczy dobrać, z Lematu Urysohna, funkcję ciągłą $\gamma\colon Z \to [0,1]$, która znika na $\overline{v(A)}$, a w punkcie $v(a)$ ma wartość 1, i podstawić $u \stackrel{\text{def}}{=} \gamma \circ v$, by otrzymać funkcję poszukiwaną w $(T_{3\frac{1}{2}})$.

W szczególności, za powyższą przestrzeń Z można podstawiać przestrzenie metryzowalne, np. $\mathbb{R}$.

11.3 Definicja.
Mówimy, że przestrzeń topologiczna X jest *całkowicie regularna* lub *przestrzenią Tichonowa*, lub *przestrzenią* $T_{3\frac{1}{2}}$, gdy jest T_1 i spełnia warunek $(T_{3\frac{1}{2}})$ z Tw. 11.1.

Aksjomat oddzielania $T_{3\frac{1}{2}}$ to warunek „$T_1 + (T_{3\frac{1}{2}})$”.

11.4 Wniosek.
$T_4 \implies T_{3\frac{1}{2}} \implies T_3$.

Dowód. Pierwsza implikacja wynika np. z Lematu Urysohna (lub Tw. 11.1), a druga jest prosta i jej dowód pozostawiamy jako ćwiczenie (obowiązkowe). □

11.5 Definicja.
Mówimy, że własność $\mathcal{W}$ przysługująca przestrzeniom topologicznym jest:

- *dziedziczna*, gdy spełniony jest warunek:

  ilekroć przestrzeń topologiczna X ma własność $\mathcal{W}$ i $A \subset X$, tylekroć przestrzeń A (w topologii indukowanej) ma własność $\mathcal{W}$;

- *produktowa*, gdy spełniony jest warunek:

  ilekroć przestrzenie topologiczne X_s mają własność $\mathcal{W}$ dla $s \in S \neq \varnothing$, tylekroć przestrzeń $\prod_{s\in S} X_s$ (w topologii produktowej) ma własność $\mathcal{W}$.

11.6 Przykład.
Metryzowalność to własność dziedziczna, ale nie produktowa. Metryzowalność w sposób zupełny nie jest ani dziedziczna, ani produktowa. Zwartość nie jest dziedziczna, ale jest produktowa.

11.7 Obserwacja.
Własności $T_0, T_1, T_2, T_3, T_{3\frac{1}{2}}$ oraz „$w(X) \leqslant \alpha$”, jak również „$\chi(X) \leqslant \alpha$” (gdzie α to dowolnie ustalona liczba kardynalna) są dziedziczne.

Dowód. Dowód tego, że wymienione aksjomaty oddzielania są dziedziczne, wynika z postaci zbiorów otwartych i domkniętych w topologii indukowanej (ćwiczenie). Dziedziczność wymienionych nierówności bierze się stąd, że zawężenie bazy (odp. bazy otoczeń) do podprzestrzeni (tj. przejście do śladów) jest bazą (odp. bazą otoczeń). $\square$

11.8 Wniosek. (Twierdzenie o uniwersalności kostki Tichonowa)
Niech α będzie nieskończoną liczbą kardynalną. Dla przestrzeni topologicznej X następujące warunki są równoważne:

(i) *przestrzeń X jest zanurzalna w kostkę Tichonowa $[0,1]^\alpha$;*

(ii) *X jest $T_{3\frac{1}{2}}$ oraz $w(X) \leqslant \alpha$.*

Dowód. Teza wynika z Tw. 11.1 oraz Obs. 10.31 i Obs. 11.7. $\square$

Jako szczególny przypadek powyższego rezultatu, otrzymujemy:

11.9 Wniosek. (Twierdzenie Urysohna o uniwersalności kostki Hilberta)
Każda ośrodkowa przestrzeń metryzowalna jest zanurzalna w kostkę Hilberta.

Ogólniej: przestrzeń topologiczna jest zanurzalna w kostkę Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy jest całkowicie regularną przestrzenią spełniającą II A.P.

W Obs. 11.7 nie wymieniono aksjomatu T_4. Okazuje się, że nie jest on dziedziczny, co czyni go najbardziej „patologicznym” z aksjomatów oddzielania. Aby wykazać brak jego dziedziczności, posłużymy się cennym warunkiem na to, by przestrzeń nie była T_4.

11.10 Twierdzenie.
Niech α będzie nieskończoną liczbą kardynalną. Jeśli przestrzeń topologiczna X zawiera podzbiór gęsty D mocy nie większej niż α i zarazem domknięty podzbiór A mocy co najmniej 2^α, którego topologia indukowana jest dyskretna, to X nie jest T_4.

Dowód. Gdyby przestrzeń X była normalna, to z Twierdzenia Tietzego (Tw. 6.15, str. 28) wynikałoby, że funkcja

$$C(X,\mathbb{R}) \ni f \mapsto f|_A \in C(A,\mathbb{R})$$

jest suriekcją. Ale $C(A,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^A$ (bo topologia na A jest dyskretna). Tym samym byłoby $\operatorname{card}(C(X,\mathbb{R})) \geqslant \operatorname{card}(\mathbb{R}^A) = (2^{\aleph_0})^{\operatorname{card}(A)} \geqslant (2^{\aleph_0})^{2^\alpha} = 2^{\aleph_0\cdot 2^\alpha} = 2^{2^\alpha} > 2^\alpha$. Jednakże, z Wn. 10.13 (str. 59) wynika, że funkcja

$$C(X,\mathbb{R}) \ni f \mapsto f|_D \in \mathbb{R}^D$$

jest różnowartościowa. Tym samym $\operatorname{card}(C(X,\mathbb{R})) \leqslant \operatorname{card}(\mathbb{R}^D) = (2^{\aleph_0})^{\operatorname{card}(D)} \leqslant (2^{\aleph_0})^\alpha = 2^{\aleph_0\cdot\alpha} = 2^\alpha$. □

11.11 Przykład. (Płaszczyzna Niemyckiego)
Podamy teraz przykład przestrzeni nienormalnej, która zanurza się w kostkę Tichonowa $[0,1]^{2^{\aleph_0}}$. Poniższa przestrzeń X to tzw. *płaszczyzna Niemyckiego.*

W tym przykładzie $B(a,r)$ oraz $\bar{B}(a,r)$ oznaczają kule euklidesowe w $\mathbb{R}^2$ (czyli koła). Rozważmy domkniętą półpłaszczyznę $X \overset{\text{def}}{=} \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$. Niech także $F \overset{\text{def}}{=} \mathbb{R}\times\{0\} \subset X$. Na zbiorze X zadajemy topologię przez pełny układ otoczeń **otwartych** (!):

- baza otoczeń punktu $a = (x,y) \notin F$ to $\beta(a) \overset{\text{def}}{=} \{B((x,y), y\cdot 2^{-n})\colon\ n > 0\}$ (zauważmy, że elementy rodziny $\beta(a)$ to koła otwarte o środku w a, których domknięcia euklidesowe są rozłączne z F);
- baza otoczeń punktu $a = (x,0) \in F$ to $\beta(a) \overset{\text{def}}{=} \{B((x,2^{-n}),2^{-n}) \cup \{a\}\colon\ n > 0\}$ (zauważmy, że elementy rodziny $\beta(a)$ to otwarte koła styczne w punkcie a do prostej F, z dorzuconym do nich punktem a).

Rutynowo sprawdza się (z pomocą Tw. 5.7, str. 20), że powyższe rodziny to pełny układ otoczeń otwartych w pewnej topologii na X (obowiązkowe ćwiczenie). Pokażemy, że jest to przestrzeń całkowicie regularna, która nie jest normalna.

Na wstępie zauważmy, że:

- przestrzeń X spełnia I A.P.;
- zbiór $X\setminus F$ jest gęsty w X;
- topologia indukowana na $X\setminus F$ pokrywa się z euklidesową;
- $w(X) \leqslant 2^{\aleph_0}$;
- przestrzeń X jest ośrodkowa;
- zbiór F jest domknięty w X, a jego topologia indukowana jest dyskretna.

Wszystkie ww. własności wynikają z definicji rodzin $\beta(a)$. Z Tw. 11.10 wynika, że przestrzeń X nie jest normalna. Odnotujmy także, iż jeśli pokażemy, że przestrzeń X jest $T_{3\frac12}$, to będzie ona zanurzalna w $[0,1]^{2^{\aleph_0}}$ (dzięki Tw. 11.1). Tym samym pozostaje sprawdzić, że X jest $T_{3\frac12}$.

Jest sprawą ewidentną, że X jest T_1. Ustalmy zbiór domknięty A oraz punkt $a \notin A$. Istnieje wtedy zbiór $U \in \beta(a)$ rozłączny z A. Wystarczy więc określić rzeczywistą funkcję ciągłą, która znika poza U, a w punkcie a jest dodatnia. W tym celu rozważamy dwa przypadki.

Najpierw załóżmy, że $a \notin F$. W tej sytuacji sprawa jest bardzo prosta. Zbiór U, jako bazowy, ma domknięcie euklidesowe $\operatorname{cl}_{d_e}(U)$ rozłączne z F. Tym samym $\operatorname{cl}_{d_e}(U) = \operatorname{cl}_X(U)$, więc dalej będziemy pisać $\bar{U}$. Zbiór $\bar{U}$ to domknięte koło $\bar{B}(a,r)$. Szukaną funkcję określamy następująco:

$$u(p) = \begin{cases} 1 - \frac{d_e(p,a)}{r} & \text{gdy } p \in \bar{U} \\ 0 & \text{gdy } p \in X\setminus U \end{cases}.$$

Z Tw. 4.9 (str. 18) (oraz tego, że topologia indukowana na $\bar{U}$ pokrywa się z euklidesową) wynika, że $u\colon X \to [0,1]$ jest funkcją ciągłą.

Pozostaje rozważyć przypadek, gdy $a = (x,0) \in F$. Wtedy $U = B((x,r),r) \cup \{a\}$ dla pewnej liczby dodatniej r. Łatwo sprawdzić, że wtedy $\operatorname{cl}_X(U) = \bar{B}((x,0),r) = \operatorname{cl}_{d_e}(U)$, więc (tak jak w pierwszym przypadku) będziemy pisać $\bar{U}$. Szukaną funkcję określamy następująco:

$$u(p) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } p = a \\ 0 & \text{gdy } p \notin U \\ 1 - \frac{d_e^2(p,a)}{2r\operatorname{dist}_{d_e}(p,F)} & \text{gdy } p \in \bar{U}\setminus\{a\} \end{cases}.$$

Ostatni z wypisanych wzorów można obliczyć tak: jeśli $p = (u, v) \in \bar{U}$ oraz $v > 0$, odnajdujemy jeden jedyny okrąg przechodzący przez p i zarazem styczny do F w punkcie a, oznaczamy jego promień przez r_p i wtedy $u(p) = 1 - \frac{r_p}{r}$. Stąd $u(p) = 0$ dla $p \in \partial_{d_e} U \setminus \{a\}$, czyli funkcja u jest poprawnie określona. Patrząc na pierwotny wzór funkcji u (i pamiętając, że topologia indukowana na $X \setminus F$ pokrywa się z euklidesową), jedynym punktem, w którym ciągłość wymaga dowodu, to a. Ale jeśli $p_n \xrightarrow{X} a$ $(n \to \infty)$ i $p_n \neq a$, to z postaci $\beta(a)$ wynika, że $r_{p_n} \to 0$ $(n \to \infty)$ i tym samym $u(p_n) \to 1$ $(n \to \infty)$. Szczegóły pozostawiamy czytelnikowi.

11.12 Wniosek.
Własność T_4 nie jest dziedziczna.

Dowód. Wiemy, że kostka Tichonowa $[0,1]^{2^{\aleph_0}}$ jest zwartą przestrzenią T_2, a więc przestrzenią normalną. Jednocześnie Prz. 11.11 pokazuje, że kostka ta zawiera podprzestrzeń nienormalną. □

11.13 Definicja.
Mówimy, że przestrzeń topologiczna jest przestrzenią

- T_5, czyli przestrzenią *dziedzicznie normalną*, gdy każda jej podprzestrzeń jest normalna;
- T_6, czyli przestrzenią *doskonale normalną*, gdy jest przestrzenią normalną, w której każdy zbiór domknięty jest typu $\mathscr{G}_\delta$.

Własności T_5 oraz T_6 to kolejne aksjomaty oddzielania.

Patrząc na powyższą definicję, nie widać, dlaczego własności T_5 i T_6 również nazywane są aksjomatami oddzielania. Kwestię tę wyjaśniają poniższe dwa twierdzenia.

11.14 Twierdzenie.
Dla T_1-przestrzeni topologicznej X następujące warunki są równoważne:

(i) *X jest T_5;*

(ii) *każdy otwarty i gęsty podzbiór przestrzeni X jest przestrzenią normalną;*

(iii) *dowolne dwa zbiory rozgraniczone w X można oddzielić rozłącznymi nadzbiorami otwartymi, tzn.:*

$$\forall A, B \subset X \text{ zbiory rozgraniczone } \exists U, V \in \mathscr{G}(X)\colon\ A \subset U,\ B \subset V,\ U \cap V = \varnothing.$$

Zauważmy, że powyższy warunek (iii) ma „kształt” aksjomatu oddzielania.

Dowód. (ii) $\Longrightarrow$ (iii): Niech $A, B \subset X$ będą zbiorami rozgraniczonymi w X. Oznaczmy $\Omega \overset{\text{def}}{=} X \setminus (\bar{A} \cap \bar{B}) \in \mathscr{G}(X)$. Zbiór Ω jest gęsty w X, gdyż zbiór $\bar{A} \cap \bar{B}$ jest brzegowy w X (dlaczego: gdyby niepusty zbiór otwarty U zawierał się w $\bar{A} \cap \bar{B}$, to wtedy $U \subset \bar{A}$, a zbiór A jest gęsty w $\bar{A}$, więc byłoby $U \cap A \neq \varnothing$, a wtedy tym bardziej $A \cap \bar{B} \neq \varnothing$, gdyż $U \subset \bar{B}$). Stąd — z założenia w (ii) — Ω jest przestrzenią normalną. Zauważmy także, że $A \cup B \subset \Omega$, gdyż $(A \cup B) \cap \bar{A} \cap \bar{B} = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) = \varnothing$. Co więcej, zbiory $\mathrm{cl}_\Omega(A)$ i $\mathrm{cl}_\Omega(B)$ są rozłączne. Istotnie: $\mathrm{cl}_\Omega(A) \cap \mathrm{cl}_\Omega(B) = \Omega \cap \bar{A} \cap \bar{B} = \varnothing$. Tak więc z normalności przestrzeni Ω wynika istnienie rozłącznych zbiorów $U, V \subset \Omega$ otwartych w Ω, takich że $\mathrm{cl}_\Omega(A) \subset U$ oraz $\mathrm{cl}_\Omega(B) \subset V$. Wtedy tym bardziej $A \subset U$ i $B \subset V$ oraz U i V są otwarte w X, gdyż są otwarte w zbiorze otwartym w X.

Ponieważ (ii) w sposób ewidentny wynika z (i), pozostaje pokazać, że (i) wynika z (iii). Ustalmy zatem dowolną podprzestrzeń Z przestrzeni X i rozważmy dwa rozłączne zbiory $A, B \subset Z$ domknięte w Z. Jako że T_1 jest własnością dziedziczną, wystarczy oddzielić zbiory A i B rozłącznymi nadzbiorami otwartymi w Z. W tym celu zauważmy, że A i B są rozgraniczone: $\bar{A} \cap B = \bar{A} \cap Z \cap B = \mathrm{cl}_Z(A) \cap B = A \cap B = \varnothing$ i podobnie $A \cap \bar{B} = \varnothing$. W takim razie możemy dobrać zbiory U i V o własnościach wymienionych w punkcie (iii). Wtedy zbiory $U \cap Z$ oraz $V \cap Z$ to szukane nadzbiory otwarte w Z. □

11.15 Twierdzenie.
Dla T_1-przestrzeni topologicznej X następujące warunki są równoważne:

(i) *X jest T_6;*

(ii) *dla dowolnego zbioru domkniętego $A \subset X$ istnieje funkcja ciągła $u\colon X \to \mathbb{R}$, taka że $u^{-1}(\{0\}) = A$;*

(iii) *dla dowolnych dwóch rozłącznych zbiorów domkniętych $A, B \subset X$ istnieje funkcja ciągła $u\colon X \to [0,1]$, taka że $u^{-1}(\{0\}) = A$ i $u^{-1}(\{1\}) = B$.*

Jak poprzednio, zauważmy, że powyższy warunek (iii) ma „kształt” aksjomatu oddzielania.

Dowód. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Ustalmy zbiór domknięty $A \subset X$. Z założenia w (i) istnieje ciąg $U_1, U_2, \ldots$ zbiorów otwartych, taki że $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Oznaczmy $F_n = X \setminus U_n \in \mathscr{F}(X)$ i zauważmy, że $A \cap F_n = \varnothing$. Skoro X jest T_4, z Lematu Urysohna wynika istnienie funkcji ciągłej $u_n\colon X \to [0,1]$, która znika na A i jest stale równa 1 na F_n. Do ciągu funkcji $\frac{u_1}{2}, \frac{u_2}{2^2}, \ldots$ możemy zastosować Lem. 6.14 (str. 28): szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{2^n}$ jest zbieżny jednostajnie do pewnej funkcji ciągłej $u\colon X \to \mathbb{R}$. Bez trudu stwierdzamy, że $u|_A \equiv 0$. Zauważmy także, że gdy $x \notin A$, to $u_n(x) \geqslant 0$ dla wszelkich n oraz $u_k(x) = 1$ dla pewnego indeksu k, gdyż $X \setminus A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ i $u_n|_{F_n} \equiv 1$. Tym samym $u(x) > 0$ dla $x \notin A$, czyli $u^{-1}(\{0\}) = A$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Ustalmy dwa rozłączne zbiory domknięte $A, B \subset X$. Z (ii) dobieramy funkcje ciągłe $u, v\colon X \to \mathbb{R}$, takie że $u^{-1}(\{0\}) = A$ i $v^{-1}(\{0\}) = B$. Wtedy funkcja $|u| + |v|\colon X \to \mathbb{R}_+$ jest ciągła i przyjmuje wyłącznie wartości dodatnie (bo $u^{-1}(\{0\}) \cap v^{-1}(\{0\}) = \varnothing$). Tak więc funkcja $w \overset{\text{def}}{=} \frac{|u|}{|u|+|v|}\colon X \to \mathbb{R}_+$ jest poprawnie określona i ciągła. Zauważmy także, że $w(X) \subset [0,1]$, $w^{-1}(\{0\}) = u^{-1}(\{0\}) = A$ i $w^{-1}(\{1\}) = v^{-1}(\{0\}) = B$, czyli zachodzi (iii).

Implikacja (iii) $\Longrightarrow$ (i) jest natychmiastowa (zob. Uw. 6.13, str. 27). □

11.16 Wniosek.
Własności T_5, T_6 są dziedziczne.

Dowód. Dziedziczność T_5 wynika wprost z definicji tego aksjomatu. Aby pokazać dziedziczność T_6, wystarczy sprawdzić, że warunek (ii) sformułowany w Tw. 11.15 jest dziedziczny. A to akurat jest bardzo proste: jeśli $A \subset B \subset X$ i zbiór A jest domknięty w podzbiorze B, a przestrzeń X jest T_6, to dobieramy funkcję ciągłą $v\colon X \to \mathbb{R}$, taką że $v^{-1}(\{0\}) = \bar{A}$. Wtedy funkcja $u \overset{\text{def}}{=} v|_B\colon B \to \mathbb{R}$ także jest ciągła i spełnia $u^{-1}(\{0\}) = v^{-1}(\{0\}) \cap B = \bar{A} \cap B = \mathrm{cl}_B(A) = A$, czyli B jest przestrzenią T_6. □

11.17 Wniosek.
Metryzowalność $\Longrightarrow T_6 \Longrightarrow T_5 \Longrightarrow T_4$.

Dowód. Pierwsza implikacja wynika z Tw. 6.10 (str. 26), druga z Wn. 11.16, a trzecia z definicji T_5. □

11.18 Twierdzenie.
Własności $T_0, T_1, T_2, T_3, T_{3\frac{1}{2}}$ są produktowe.

Dowód. Dla T_0, T_1, T_2 dowody są znacznie prostsze niż dla T_3, więc tutaj ograniczymy się tylko do pokazania dziedziczności dla T_3 i $T_{3\frac{1}{2}}$. Dziedziczność $T_{3\frac{1}{2}}$ wynika z równoważności między warunkami (ii) i (iv) w Tw. 11.1 oraz z Tw. 10.26. Przejdźmy do aksjomatu T_3. Załóżmy, że przestrzenie X_s ($s \in S \neq \varnothing$) są T_3. Jest kwestią ewidentną, że wtedy przestrzeń $X \overset{\text{def}}{=} \prod_{s\in S} X_s$ jest T_1 (wynika to natychmiast np. Tw. 10.10, str. 57). Rozważmy zbiór domknięty A w X oraz punkt $a = (a_s)_{s\in S} \in X \setminus A$. Możemy dobrać otwarty cylinder $V = \mathrm{Cyl}(\{U_s\}_{s\in S_o}, \{X_s\}_{s\in S})$ (gdzie $S_o \neq \varnothing$), taki że $a \in V \subset X \setminus A$. Wtedy $a_s \in U_s$ dla $s \in S_o$ i z regularności przestrzeni X_s możemy dobrać taki zbiór otwarty $W_s \subset X_s$ (jedynie dla $s \in S_o$!), że $a_s \in W_s$ i $\bar{W}_s \subset U_s$. Teraz wystarczy określić $W_s \overset{\text{def}}{=} X_s$ dla $s \in S \setminus S_o$ oraz zauważyć, że $a \in D \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Cyl}(\{W_s\}_{s\in S_o}, \{X_s\}_{s\in S})$ oraz (dzięki Tw. 10.10) $\bar{D} = \prod_{s\in S} \bar{W}_s \subset V$, czyli $A \subset X \setminus \bar{D}$, co kończy dowód regularności przestrzeni X. □

11.19 Przykład. (Prosta Sorgenfreya, topologia strzałki)
Podamy teraz przykład przestrzeni doskonale normalnej X, takiej że przestrzeń $X \times X$ nie jest normalna. Przestrzeń tę nazywa się *prostą Sorgenfreya*, a jej topologię *topologią strzałki*.

Niech $X = \mathbb{R}$ będzie zbiorem wyposażonym w topologię $\tau_{\rightarrow}$, której bazą jest rodzina

$$\beta_{\rightarrow} \stackrel{\text{def}}{=} \{[a,b) \colon \ -\infty < a < b < \infty\}.$$

Jest rzeczą ewidentną, że ta rodzina spełnia aksjomaty (B1)–(B2) bazy topologii. Można pokazać, że:

(S1) przestrzeń X jest ośrodkowa, spełnia I A.P. i jest zerowymiarową przestrzenią T_3;

(S2) każdy niepusty zbiór otwarty można przedstawić jako sumę przeliczalnej rodziny zbiorów z bazy $\beta_{\rightarrow}$;

(S3) każde pokrycie otwarte przestrzeni X ma podpokrycie co najwyżej przeliczalne.

Dowody tych własności pozostawiamy jako obowiązkowe ćwiczenie (pierwsze jest bardzo proste, dwa pozostałe szybko wynikają z własności wykazanej w następnym akapicie tego przykładu). Jak zobaczymy w rozdziale 15, przestrzenie regularne o własności (S3) (nazywa się je przestrzeniami *Lindelöfa*) są normalne, zatem X jest przestrzenią normalną. Z własności (S2) i tego, że rodzina $\beta_{\rightarrow}$ składa się ze zbiorów otwarto-domkniętych, łatwo wynika, że zbiory domknięte są typu $\mathscr{G}_\delta$. Tak więc X to przestrzeń T_6. Twierdzimy, że przestrzeń $X \times X$ nie jest normalna. W tym celu korzystamy z Tw. 11.10: przestrzeń $X \times X$ jest ośrodkowa (dzięki (S1)), a zbiór $A \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,-x) \colon \ x \in \mathbb{R}\}$ jest domknięty i jego topologia indukowana (z topologii produktowej strzałki) jest dyskretna, więc przestrzeń $X \times X$ nie może być normalna. Obie przywołane tu własności zbioru A są bardzo proste — wystarczy posługiwać się postacią zbiorów z bazy $\beta_{\rightarrow}$ (ćwiczenie obowiązkowe).

Aby łatwiej było udowodnić własności (S2) i (S3) sformułowane powyżej, pokażemy, że dla dowolnej rodziny $\mathcal{U} = \{U_s\}_{s\in S} \subset \tau_{\rightarrow}$ istnieje co najwyżej przeliczalny zbiór $J \subset S$, taki że

$$\bigcup_{s\in J} U_s = \bigcup_{s \in S} U_s{}^{*7)}. \tag{11:2}$$

Najpierw rozważmy dowolny przedział postaci $[a,b]$ (gdzie $-\infty < a < b < \infty$) zawarty w $V \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{s\in S} U_s$. Pokażemy, że ów przedział można pokryć (co najwyżej) przeliczalną podrodziną rodziny $\mathcal{U}$. W tym celu oznaczmy przez I zbiór wszystkich liczb $x \in (a,b]$, takich że przedział $[a,x]$ można pokryć przeliczalną podrodziną rodziny $\mathcal{U}$, i oznaczmy $c \stackrel{\text{def}}{=} \sup(I)$ (por. dowód Tw. 8.8, str. 40). Zauważmy, że zbiór I jest niepusty (gdyż liczba a wpada do jakiegoś zbioru z $\mathcal{U}$ i ów zbiór zawiera zbiór z $\beta_{\rightarrow}$ zawierający punkt a). Zauważmy także, że $c \in I$, gdyż (z definicji supremum) istnieje ciąg $(c_n)_{n\to\infty} \subset I$ zbieżny do c i wtedy $[a,c) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}[a,c_n]$ oraz c ($\in [a,b]$) wpada do jakiegoś zbioru $U \in \mathcal{U}$. Na koniec zauważmy, że (ten właśnie) zbiór U zawiera przedział postaci $[c,d]$, gdzie $d > c$, więc $\min(b,d) \in I$ i tym samym $c = b$, jako kres górny zbioru I. Pokazaliśmy więc, że przedział $[a,b]$ można pokryć przeliczalnym podpokryciem rodziny $\mathcal{U}$.

Aby zakończyć dowód (11:2), zauważmy, że każda składowa (w topologii **naturalnej** prostej rzeczywistej!) zbioru V jest przedziałem niezdegenerowanym, więc zawiera liczbę wymierną i tym samym składowych tych jest co najwyżej przeliczalnie wiele. Ponieważ każda z tych składowych jest przedziałem, każdą z nich możemy przedstawić jako sumę mnogościową przeliczalnie wielu przedziałów zwartych. Tym samym $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ dla pewnego ciągu zwartych przedziałów K_n. Stosując własność wykazana w poprzednim akapicie do każdego ze zbiorów K_n, znajdziemy co najwyżej przeliczalny zbiór $T_n \subset S$, taki że $\bigcup_{s\in T_n} U_s \supset K_n$. Wtedy $J \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$ jest szukanym podzbiorem indeksów (dla którego zachodzi (11:2)).

Powyższy przykład pokazuje, że:

11.20 Wniosek.
Własności T_4, T_5, T_6 nie są produktowe.

12 Dodatki I

W roku akademickim 2020/21 zawartość niniejszego rozdziału nie obowiązuje na egzamin.

*7) Z własności tej wynika, że każda podprzestrzeń prostej Sorgenfreya także jest przestrzenią Lindelöfa.

12.1 Twierdzenie.
Niech X będzie przestrzenią metryzowalną w sposób zupełny, Z przestrzenią Hausdorffa, a $h\colon X \to Z$ zanurzeniem topologicznym. Wtedy zbiór $h(X)$ jest typu $\mathscr{G}_\delta$ w swoim domknięciu.

Dowód. Zastępując Z przez $\mathrm{cl}_Z(h(X))$, możemy założyć, że zbiór $h(X)$ jest gęsty w Z. W tej sytuacji mamy pokazać, że zbiór $h(X)$ jest typu $\mathscr{G}_\delta$. W tym celu ustalmy zupełną metrykę d na X zgodną z topologią tej przestrzeni.

Ustalmy $n > 0$. Dla dowolnego punktu $x \in X$ zbiór $h(B_d(x, 2^{-n}))$ jest otwarty w $h(X)$, więc istnieje zbiór $V_{x,n}$ otwarty w Z i taki, że

$$h(B_d(x, 2^{-n})) = V_{x,n} \cap h(X).$$

Określamy $U_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{x\in X} V_{x,n}$. Ponieważ zbiór U_n jest otwarty w Z, wystarczy pokazać, że $h(X) = \bigcap_{n=1}^\infty U_n$. Inkluzja „$\subset$” wynika z tego, że $h(x) \in V_{x,n}$ dla wszelkich $x \in X$ oraz $n > 0$. Pozostaje więc wykazać inkluzję przeciwną. Niech zatem $z \in \bigcap_{n=1}^\infty U_n$. Wtedy dla dowolnej liczby $n > 0$ istnieje punkt $x_n \in X$, taki że $z \in V_{x_n,n}$. Zauważmy, że dla dowolnych całkowitych liczb dodatnich n i m zbiór $V_{x_n,n} \cap V_{x_m,m}$ jest otwarty i niepusty (bo zawiera z), więc z gęstości zbioru $h(X)$ w Z wynika, że $V_{x_n,n} \cap V_{x_m,m} \cap h(X) \neq \varnothing$, czyli

$$h(B_d(x_n, 2^{-n}) \cap B_d(x_m, 2^{-m})) = h(B_d(x_n, 2^{-n})) \cap h(B_d(x_m, 2^{-m})) = V_{x_n,n} \cap h(X) \cap V_{x_m,m} \cap h(X) \neq \varnothing.$$

Powyższa własność implikuje, że zbiór $B_d(x_n, 2^{-n}) \cap B_d(x_m, 2^{-m})$ jest niepusty i tym samym $d(x_n, x_m) < 2^{-n} + 2^{-m}$. Z nierówności tej wnioskujemy, że ciąg $(x_n)_{n=1}^\infty$ jest Cauchy'ego. Tym samym

$$x_n \xrightarrow{X} w \tag{12:1}$$

dla pewnego punktu $w \in X$. Pokażemy, że $z = h(w)$, co zakończy cały dowód. Rozumujemy nie wprost: przypuśćmy, że $h(w) \neq z$. Wtedy, z własności T_2 przestrzeni Z, istnieją rozłączne zbiory W i D otwarte w Z i takie, że $h(w) \in W$ oraz $z \in D$. Zauważmy, że zbiór $D \cap V_{x_n,n} \cap h(X)$ jest niepusty (bo $\mathrm{cl}_Z(h(X)) = Z$). Oznacza to, że istnieje punkt $y_n \in B_d(x_n, 2^{-n})$, taki że $h(y_n) \in D$. Ale wtedy $d(y_n, x_n) < 2^{-n}$, więc z (12:1) wynika, że $y_n \xrightarrow{X} w$ i tym samym $h(y_n) \xrightarrow{Z} h(w)$. Ale to jest sprzeczne z tym, że $h(y_n) \notin W$ (bo $h(y_n) \in D$) — i koniec dowodu. □

12.2 Twierdzenie.
Zbiór A typu $\mathscr{G}_\delta$ w przestrzeni metryzowalnej X jest homeomorficzny z podzbiorem domkniętym przestrzeni $X \times \mathbb{R}_+^\omega$.

Dowód. Możemy założyć, że $A \neq X$. Ustalmy metrykę d na X zgodną z topologią tej przestrzeni i przedstawmy $X \setminus A$ jako $\bigcup_{n=1}^\infty F_n$, gdzie F_n jest niepustym zbiorem domkniętym w X. Dla $n > 0$ niech $u_n\colon A \to \mathbb{R}_+$ będzie funkcją ciągłą daną wzorem:

$$u_n(x) = \frac{1}{\mathrm{dist}_d(x, F_n)}$$

(funkcja u_n jest poprawnie określona, gdyż F_n jest zbiorem domkniętym rozłącznym z A). Określmy $h\colon A \to X \times \mathbb{R}_+^\omega$ formułą

$$h(x) = (x, (u_n(x))_{n=1}^\infty).$$

Z punktu (B) Obs. 10.8 (str. 56) wynika, że funkcja h jest zanurzeniem topologicznym. Aby zakończyć dowód, wystarczy więc pokazać, że zbiór $B \stackrel{\text{def}}{=} h(A)$ jest domknięty w $X \times \mathbb{R}_+^\omega$. W tym celu załóżmy, że punkty $a_n \in A$ są takie, że $\lim_{k\to\infty} h(a_k) = (z, (b_n)_{n=1}^\infty) \in X \times \mathbb{R}_+^\omega$. Chcemy pokazać, że $z \in A$ oraz $h(a_k) \to h(z)$ $(k \to \infty)$. Ponieważ $h(a_k) = (a_k, (u_n(a_k))_{n=1}^\infty)$, z charakteryzacji zbieżności w topologii produktowej otrzymujemy, że $z = \lim_{k\to\infty} a_k$ oraz $b_n = \lim_{k\to\infty} u_n(a_k)$. A wtedy dla dowolnego indeksu $n > 0$, $\mathrm{dist}_d(z, F_n) = \lim_{k\to\infty} \mathrm{dist}_d(a_k, F_n)$ oraz $\frac{1}{\mathrm{dist}_d(a_k, F_n)} \to b_n \in \mathbb{R}$ $(k \to \infty)$, co implikuje, że $\mathrm{dist}_d(z, F_n) \neq 0$, czyli $z \notin F_n$. Tym samym $z \in \bigcap_{n=1}^\infty (X \setminus F_n) = A$. A wtedy automatycznie $h(z) = \lim_{k\to\infty} h(a_k)$ i teza. □

12.3 Wniosek. (Twierdzenie Aleksandrowa-Hausdorffa)
Dla przestrzeni metryzowalnej X następujące warunki są równoważne:

(i) *przestrzeń X jest metryzowalna w sposósb zupełny;*

(ii) *przestrzeń X jest homeomorficzna z podzbiorem typu $\mathscr{G}_\delta$ pewnej metryzowalnej w sposób zupełny przestrzeni topologicznej;*

(iii) przestrzeń X jest absolutnego typu $\mathscr{G}_\delta$ *(w klasie przestrzeni metryzowalnych), tzn. dla dowolnego zanurzenia topologicznego $h\colon X \to Z$ w przestrzeń metryzowalną Z, zbiór $h(X)$ jest typu $\mathscr{G}_\delta$ w Z.*

Dowód. Implikacja „(i) $\Longrightarrow$ (iii)” wynika z Tw. 12.1 oraz tego, że przestrzenie metryzowalne są doskonale normalne. Z kolei implikacja „(ii) $\Longrightarrow$ (i)” wynika z Tw. 12.2 oraz tego, że przeliczalny produkt kartezjański przestrzeni metryzowalnych w sposób zupełny (oraz podzbiór domknięty takiej przestrzeni) także jest przestrzenią metryzowalną w sposób zupełny. Wreszcie implikacja „(iii) $\Longrightarrow$ (ii)” wynika natychmiast stąd, że każdą przestrzeń metryczną możemy uzupełnić (tzn. powiększyć do przestrzeni metrycznej zupełnej, w której ta wyjściowa przestrzeń jest zbiorem gęstym). $\square$

12.4 Wniosek. („Abstrakcyjne” twierdzenie Baire'a)
Przecięcie przeliczalnie wielu metryzowalnych w sposób zupełny gęstych podprzestrzeni przestrzeni ***metryzowalnej*** *jest* ***gęstą*** *podprzestrzenią metryzowalną w sposób zupełny.*

Dowód. Wystarczy najpierw uzupełnić przestrzeń metryzowalną, w której ”rozgrywa się akcja”, następnie zastosować Wn. 12.3, a potem klasyczne twierdzenie Baire'a. $\square$

12.5 Wniosek.
Jeśli przestrzeń metryzowalna jest sumą skończenie wielu swoich podprzestrzeni metryzowalnych w sposób zupełny, to sama jest metryzowalna w sposób zupełny.

Dowód. Uzupełniamy przestrzeń, stosujemy Twierdzenie Aleksandrowa-Hausdorffa i korzystamy z tego, że suma skończenie wielu zbiorów typu $\mathscr{G}_\delta$ jest także zbiorem typu $\mathscr{G}_\delta$. $\square$

12.6 Twierdzenie. (Twierdzenie Ławrientiewa)
Niech X i Y będą przestrzeniami metryzowalnymi w sposób zupełny, a $h\colon A \to B$ homeomorfizmem między $A \subset X$ oraz $B \subset Y$. Wtedy istnieją zbiory $\tilde{A} \subset X$, $\tilde{B} \subset Y$ typu $\mathscr{G}_\delta$ oraz homeomorfizm $\tilde{h}\colon \tilde{A} \to \tilde{B}$, takie że $A \subset \tilde{A}$, $B \subset \tilde{B}$ oraz $\tilde{h}|_A = h$.

Dowód. Z Tw. 9.21 (str. 53) wynika, że istnieją funkcje ciągłe $F\colon A_0 \to Y$ oraz $G\colon B_0 \to X$, takie że $A_0 \supset A$ jest zbiorem typu $\mathscr{G}_\delta$ w $\bar{A}$ (i tym samym typu $\mathscr{G}_\delta$ w X), $B_0 \supset B$ jest typu $\mathscr{G}_\delta$ w $\bar{B}$ (i tym samym typu $\mathscr{G}_\delta$ w Y) oraz $F|_A = h$ i $G|_B = h^{-1}$. Rozważmy następujące podzbiory produktu $X \times Y$:

$$\Gamma \overset{\text{def}}{=} \{(x, F(x))\colon\ x \in A_0\}, \qquad \Gamma^* \overset{\text{def}}{=} \{(G(y), y)\colon\ y \in B_0\}$$

(Γ to wykres funkcji F, a Γ^* to „odwrócony” wykres funkcji G). Ponieważ A_0 i B_0 to przestrzenie metryzowalne w sposób zupełny (dzięki Twierdzeniu Aleksandrowa-Hausdorffa), a funkcje $\Phi\colon A_0 \ni x \mapsto (x, F(x)) \in \Gamma$ oraz $\Psi\colon B_0 \ni y \mapsto (G(y), y) \in \Gamma^*$ to homeomorfizmy, także przestrzenie Γ i Γ^* są metryzowalne w sposób zupełny. Zatem są to podzbiory typu $\mathscr{G}_\delta$ w $X \times Y$. Stąd także zbiór $\Delta \overset{\text{def}}{=} \Gamma \cap \Gamma^*$ jest typu $\mathscr{G}_\delta$ w $X \times Y$, czyli Δ to przestrzeń metryzowalna w sposób zupełny. W takim razie przestrzenie $\tilde{A} \overset{\text{def}}{=} \Phi^{-1}(\Delta) \subset X$ oraz $\tilde{B} \overset{\text{def}}{=} \Psi^{-1}(\Delta) \subset Y$ są metryzowalne w sposób zupełny, czyli są to zbiory typu $\mathscr{G}_\delta$ (ponownie dzięki Tw. 12.2). Dalej, ponieważ $\{(x, h(x))\colon x \in A\} = \{(h^{-1}(y), y)\colon y \in B\} \subset \Delta$, widzimy, że $A \subset \tilde{A}$ oraz $B \subset \tilde{B}$. Na koniec określamy $\tilde{h}\colon \tilde{A} \to Y$ jako $F|_{\tilde{A}}$. Jest jasne, że funkcja $\tilde{h}$ jest ciągła i przedłuża funkcję h. Pozostaje pokazać, że $\tilde{h}(\tilde{A}) = \tilde{B}$ oraz że $\tilde{h}$ to iniekcja o ciągłej funkcji odwrotnej. W tym celu zauważmy, że:

$$\{(x, \tilde{h}(x))\colon\ x \in \tilde{A}\} = \Delta = \{(G(y), y)\colon\ y \in \tilde{B}\}.$$

Istotnie, pierwsza równość wynika z definicji zbioru $\tilde{A}$ oraz tego, że $\Delta \subset \Gamma^{*8)}$, a druga z analogicznych własności. Tym samym widzimy, że wykres funkcji $\tilde{h}$ jest „odwróconym” wykresem (czyli relacją odwrotną do wykresu) funkcji $G|_{\tilde{B}}$. Stąd automatycznie wynika, że funkcja $\tilde{h}$ jest bijekcją między $\tilde{A}$ a $\tilde{B}$ oraz że $\tilde{h}^{-1} = G|_{\tilde{B}}$, czyli $\tilde{h}\colon \tilde{A} \to \tilde{B}$ to homeomorfizm. $\square$

12.7 Wniosek.
Dla przestrzeni metryzowalnej X oraz przeliczalnej liczby porządkowej $\alpha > 1$ następujące warunki są równoważne:

[*8)] Podzbiór wykresu funkcji (o niekoniecznie pełnej dziedzinie) jest również wykresem (takiej) funkcji.

(i) *przestrzeń X jest* absolutnej addytywnej (odp. multiplikatywnej) klasy α (*w klasie przestrzeni metryzowalnych*), *tzn. ilekroć* $h\colon X \to Z$ *to zanurzenie topologiczne w przestrzeń metryzowalną* Z, *tylekroć zbiór* $h(X)$ *jest addytywnej* (*odp. multiplikatywnej*) *klasy* α *w* Z;

(ii) *przestrzeń* X *można zanurzyć w przestrzeń metryzowalną w sposób zupełny jako zbiór addytywnej* (*odp. multiplikatywnej*) *klasy* α.

W szczególności, podzbiór borelowski przestrzeni metryzowalnej w sposób zupełny jest absolutnie borelowski w klasie przestrzeni metryzowalnych.

Dowód. Oczywiście jedyne, co wymaga dowodu, to implikacja „(ii) $\Longrightarrow$ (i)". Dla uproszczenia rozumowania, nazwijmy addytywną (odp. multiplikatywną) klasę α, dla której dowodzimy twierdzenie, klasą $\mathfrak{M}$. Załóżmy, że $e\colon X \to M$ jest zanurzeniem topologicznym w przestrzeń metryzowalną w sposób zupełny M, takim że zbiór $e(X)$ jest klasy $\mathfrak{M}$ w M, oraz rozważmy dowolne zanurzenie topologiczne $h\colon X \to Z$ w przestrzeń metryzowalną. Uzupełniając Z względem dowolnej metryki zgodnej z jej topologią, możemy (i tak czynimy poniżej) założyć, że przestrzeń Z jest metryzowalna w sposób zupełny[*9)].

Z twierdzenia Ławrientiewa, funkcję $e^{-1} \circ h\colon e(X) \to h(X)$ możemy przedłużyć do homeomorfizmu $H\colon A \to B$ między podzbiorami $A \subset M$, $B \subset Z$ typu $\mathscr{G}_\delta$. Ponieważ homeomorfizmy zachowują addytywne i multiplikatywne klasy zbiorów (co również łatwo pokazuje się indukcją pozaskończoną), zbiór $H(e(X)) = h(X)$ jest tej samej klasy w B, co $e(X)$ w A. Ponieważ $e(X)$ jest klasy $\mathfrak{M}$ w M, więc jest tej samej klasy w A, a zatem $h(X)$ jest klasy $\mathfrak{M}$ w B. Ale $\alpha > 1$, więc B, jako zbiór typu $\mathscr{G}_\delta$ (czyli mutliplikatywnej klasy 1 i addytywnej klasy 2), jest klasy $\mathfrak{M}$ w Z. Ponieważ podzbiór klasy $\mathfrak{M}$ w podzdbiorze klasy $\mathfrak{M}$ sam jest podzbiorem klasy $\mathfrak{M}$ (indukcja pozaskończona), otrzymujemy tezę. □

12.8 ***Uwaga.***
Wszystkie poniższe informacje dotyczą klasy przestrzeni metryzowalnych.

Tw. 12.2 oraz Wn. 12.7 podają dokładną charakteryzację przestrzeni absolutnej addytywnej klasy $\alpha > 1$ oraz absolutnej multiplikatywnej klasy $\beta > 0$. Bardzo łatwo dowodzi się, że przestrzeń pusta jest jedynym zbiorem absolutnej addytywnej klasy 0 (czyli zbiorem „absolutnie otwartym"). Znacznie trudniej (ale nie „aż tak" trudno) przeprowadza się dowód tego, że przestrzenie absolutnej multiplikatywnej klasy 0 (czyli zbiory „absotulnie domknięte") to dokładnie przestrzenie zwarte. Prościej (powołując się na Wn. 11.9, str. 67) dowodzi się, że ośrodkowe przestrzenie absolutnej multiplikatywnej klasy 1 (czyli zbiory *absolutnego typu* $\mathscr{F}_\sigma$) to dokładnie przestrzenie *σ-zwarte*, czyli takie, które można przedstawić jako sumę przeliczalnie wielu podzbiorów zwartych. Zdecydowanie najtrudniej dowodzi się ogólnego przypadku dla absolutnej addytywnej klasy 1 — jest to wynik pochodzący od A.H. Stone'a:

Dla przestrzeni metryzowalnej X następujące warunki są równoważne:

- *przestrzeń X jest absolutnego typu* $\mathscr{F}_\sigma$;
- *przestrzeń X jest* σ-lokalnie zwarta, *czyli można ją przedstawić jako sumę przeliczalnie wielu podzbiorów lokalnie zwartych*[*10)];
- *przestrzeń X można przedstawić jako sumę przeliczalnie wielu domkniętych podzbiorów lokalnie zwartych.*

13 Lokalna zwartość

13.1 **Definicja.**
Przestrzeń topologiczną nazywamy *lokalnie zwartą*, jeśli każdy jej punkt ma zwarte otoczenie [oraz gdy cała przestrzeń jest T_2].

[*9)] Nietrudno się przekonać — stosując indukcję pozaskończoną względem α — że jeśli $P \cup Q \subset R$ i P jest addytywnej lub multiplikatywnej klasy α w R, to $P \cap Q$ również jest tej klasy w Q. Z tej obserwacji skorzystamy także w następnym paragrafie.
[*10)] Przestrzenie lokalnie zwarte omawiamy w następnym rozdziale.

13.2 Obserwacja.
Przestrzeń T_2 jest lokalnie zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jej punkt ma otoczenie otwarte o domknięciu zwartym.

Dowód. Ćwiczenie. □

13.3 ***Uwaga.***
Koncepcja „ulokalniania” własności w przestrzeniach topologicznych jest powszechna. Wprowadzone w Def. 13.1 pojęcie lokalnej zwartości jest jednym z jej przykładów. Aczkolwiek, warunek je definiujący odbiega od zasadniczej idei kryjącej się pod ww. koncepcją. Mianowicie, przestrzeń topologiczna ma pewną własność lokalnie, jeśli w każdym swoim punkcie ma bazę otoczeń (niekoniecznie otwartych) posiadających tę własność. W lokalnej zwartości żąda się jedynie, by każdy punkt miał choć jedno otoczenie zwarte (a więc niekoniecznie bazę otoczeń złożoną ze zbiorów zwartych). Jak nietrudno się przekonać, oba te warunki są równoważne w przestrzeniach T_3. Jednakże, jak zobaczymy w Tw. 13.8 poniżej, każda lokalnie zwarta przestrzeń T_2 jest całkowicie regularna — a więc taka przestrzeń ma dowolnie małe otoczenia zwarte. Dlaczego zatem jako warunek definiujący wybiera się ten, który odbiega od standardu lokalności? Prawdopodobnie dlatego, że jest wygodniejszy do sprawdzania.

13.4 Przykład.

(A) Podzbiór otwarty zwartej przestrzeni T_2 jest przestrzenią lokalnie zwartą (co wynika od razu z regularności zwartych przestrzeni).

(B) Przestrzeń metryczna Heinego-Borela jest lokalnie zwarta.

(C) Przestrzenie euklidesowe są lokalnie zwarte (ale nie zwarte).

Jak zobaczymy niebawem (zob. Tw. 13.12), również każdy otwarty podzbiór lokalnie zwartej przestrzeni T_2 jest przestrzenią lokalnie zwartą — ale chwilowo nie jesteśmy w stanie tego krótko uzasadnić.

Poniższy rezultat to jedno z najważniejszych (choć podstawowych) narzędzi do badania przestrzeni lokalnie zwartych.

13.5 Twierdzenie. (Twierdzenie Aleksandrowa o jednopunktowym uzwarceniu)
Niech X będzie lokalnie zwartą przestrzenią T_2.

(a) (Istnienie) *Istnieje zwarta T_2-przestrzeń Z, taka że:*

- ($\omega 1$) $X \subset Z$ *i* X *jest zbiorem gęstym w* Z*;*
- ($\omega 2$) $\operatorname{top}(Z)|_X = \operatorname{top}(X)$*;*
- ($\omega 3$) $\operatorname{card}(Z \setminus X) \leqslant 1$.

(b) (Jedyność) *Jeśli W jest zwartą T_2-przestrzenią, a $h\colon X \to W$ zanurzeniem topologicznym, takim że*

$$\operatorname{card}(W \setminus h(X)) \leqslant 1 \qquad \text{oraz} \qquad \operatorname{cl}_W(h(X)) = W,$$

to istnieje dokładnie jeden homeomorfizm $H\colon Z \to W$ przedłużający funkcję h.

Dowód. Najpierw zajmiemy się istnieniem przestrzeni Z o postulowanych własnościach. Gdy przestrzeń X jest zwarta, przyjmujemy $Z \overset{\text{def}}{=} X$. Poniżej przedstawiamy konstrukcję dla niezwartej przestrzeni X.

Niech $\omega \notin X$ oraz $Z \overset{\text{def}}{=} X \cup \{\omega\}$. Na zbiorze Z wprowadzamy rodzinę τ_Z jego podzbiorów określoną następująco:

$$U \in \tau_Z \iff (U \in \operatorname{top}(X) \ \vee \ X \setminus U \text{ to zwarty podzbiór przestrzeni } X).$$

Zauważmy, że:

(Z1) Rodzina τ_Z to topologia na zbiorze Z:

- $\varnothing, Z \in \tau_Z$;
- jeśli $U, V \in \tau_Z$ i $U \cap V \notin \mathrm{top}(X)$, to zbiory $X \setminus U$ oraz $X \setminus V$ są zwartymi podzbiorami przestrzeni X, a wtedy także $X \setminus (U \cap V)$ $(= (X \setminus U) \cup (X \setminus V))$ jest zbiorem zwartym — co pokazuje, że przecięcie dwóch zbiorów z τ_Z również należy do τ_Z;
- jeśli $U_s \in \tau_Z$ dla $s \in S$ (i $S \neq \varnothing$), to albo wszystkie zbiory U_s są otwartymi podzbiorami X (i wtedy $\bigcup_{s\in S} U_s \in \mathrm{top}(X)$), albo $\omega \in \bigcap_{s\in S} U_s$ i wtedy zbiory $X \setminus U_s$ $(s \in S)$ są zwarte w X (więc domknięte tamże — bo przestrzeń ta jest T_2), a stąd także $X \setminus (\bigcup_{s\in S} U_s)$ $(= \bigcap_{s\in S}(X \setminus U_s))$ jest zwartym podzbiorem przestrzeni X — co uzasadnia, że $\bigcup_{s\in S} U_s \in \tau_Z$.

(Z2) Zbiór X jest gęsty w Z.

Istotnie, zbiór $Z \setminus X = \{\omega\}$ jest brzegowy w Z (gdyż X nie jest przestrzenią zwartą).

(Z3) $X \in \tau_Z$ oraz $\tau_Z|_X = \mathrm{top}(X)$ — co wynika wprost z definicji rodziny τ_Z.

(Z4) Przestrzeń (Z, τ_Z) jest T_2.

Istotnie, jeśli $a, b \in X$ są różne, to z własności T_2 przestrzeni X wynika, że istnieją rozłączne zbiory $U, V \in \mathrm{top}(X)$, takie że $a \in U$ oraz $b \in V$. A wtedy $U, V \in \tau_Z$ i teza. Jeśli natomiast np. $a \in X$ oraz $b = \omega$, to z lokalnej zwartości przestrzeni X wynika istnienie zbioru zwartego $K \subset X$, takiego że $a \in \mathrm{int}_X(K)$. Wtedy $U \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{int}_X(K) \in \tau_Z$ jest otoczeniem punktu a w Z, $V \stackrel{\mathrm{def}}{=} Z \setminus K$ jest otwartym otoczeniem punktu b ($V \in \tau_Z$, gdyż $X \setminus V = K$) oraz $U \cap V = \varnothing$.

(Z5) Przestrzeń Z jest zwarta. Istotnie, jeśli $\{W_s\}_{s\in S}$ jest pokryciem otwartym przestrzeni Z, to istnieje indeks $s_0 \in S$, taki że $\omega \in W_{s_0}$. Wtedy zbiór $K \stackrel{\mathrm{def}}{=} Z \setminus W_{s_0}$ jest zwarty (w X), a zbiory $W_s \cap X$ (gdzie $s \in S$) stanowią otwarte pokrycie przestrzeni X. Tak więc istnieje skończony zbiór $F \subset S$, taki że $K \subset \bigcup_{s\in F} W_s$. Wtedy rodzina $\{W_s\}_{s\in F\cup\{s_0\}}$ jest skończonym podpokryciem przestrzeni Z.

Z określenia zbioru Z oraz powyższych własności wynika, że zachodzi (a). Dla dowodu (b), załóżmy, że przestrzeń W oraz funkcja $h\colon X \to W$ mają własności opisane tamże. Jeśli przestrzeń X jest zwarta, wtedy zbiór $h(X)$ jest domknięty w W, więc z założenia w (b) wynika, że $h(X) = W$, czyli że h to homeomorfizm. Z racji, że w tym przypadku $Z = X$, teza jest spełniona.

Załóżmy teraz, że przestrzeń X nie jest zwarta. Wtedy także zbiór $h(X)$ nie jest zwarty, więc $h(X) \neq W$. Wynika stąd, że $W = h(X) \cup \{w\}$. Określamy funkcję $H\colon Z \to W$ regułami: $H|_X = h$ oraz $H(\omega) = w$. Zauważmy, że H to bijekcja, która jest ciągła w każdym punkcie zbioru X. Aby więc wykazać ciągłość funkcji H, wystarczy pokazać jej ciągłość w punkcie ω. Niech zatem $V \subset W$ będzie otwartym otoczeniem punktu $H(\omega) = w$. Wtedy zbiór $W \setminus V$ jest zwartym podzbiorem zbioru $h(X)$, co implikuje, że zbiór $K \stackrel{\mathrm{def}}{=} h^{-1}(W \setminus V) \subset X$ jest zwarty w X (bo h to włożenie topologiczne). Ale $K = H^{-1}(W \setminus V) = Z \setminus H^{-1}(V)$, co oznacza, że $H^{-1}(V) \in \tau_Z$ i pokazuje, że funkcja H jest ciągła w punkcie ω. Tym samym $H\colon Z \to W$ to ciągła bijekcja między zwartymi przestrzeniami T_2, a takie funkcje są homeomorfizmami (por. Tw. 7.10, str. 33).

Jedyność funkcji H wynika z Wn. 10.13 (str. 59). □

Zauważmy, że jeśli niezwarta przestrzeń X jest podprzestrzenią zwartej T_2-przestrzeni Z oraz $\mathrm{card}(Z \setminus X) \leqslant 1$, to X jest gęstą podprzestrzenią przestrzeni Z.

13.6 Definicja.
Niech X i Z będą przestrzeniami topologicznymi. Mówimy, że przestrzeń Z jest *uzwarceniem* przestrzeni X, jeśli Z to zwarta przestrzeń T_2 oraz istnieje zanurzenie topologiczne $h\colon X \to Z$, którego obraz jest gęsty w Z. Zbiór $Z \setminus h(X)$ nazywamy *narostem* uzwarcenia.

Jednopunktowym uzwarceniem lub *uzwarceniem Aleksandrowa* lokalnie zwartej **niezwartej** przestrzeni T_2 nazywamy (dowolne) uzwarcenie tej przestrzeni, którego narost jest jednopunktowy. W tej sytuacji element narostu często nazywa się *nieskończonością* danej przestrzeni lokalnie zwartej. Uzwarcenie Aleksandrowa przestrzeni X standardowo oznacza się przez ωX. Równie często stosuje się notacje $\omega X = X \cup \{\infty\}$ oraz $\omega X = X \cup \{\omega\}$.

Tw. 13.5 pokazuje, że każda niezwarta przestrzeń lokalnie zwarta posiada jedno jedyne (z dokładnością do homeomorfizmu) uzwarcenie Aleksandrowa.

13.7 Obserwacja.
Przestrzeń topologiczna X posiada uzwarcenie wtedy i tylko wtedy, gdy jest $T_{3\frac{1}{2}}$.

Dowód. Teza wynika natychmiast z Tw. 11.1 (str. 65). □

13.8 Twierdzenie.
Lokalnie zwarte przestrzenie T_2 są $T_{3\frac{1}{2}}$.

Dowód. Teza wynika z Tw. 13.5 oraz Obs. 13.7. □

13.9 Obserwacja.
Istnieje lokalnie zwarta przestrzeń T_2, która nie jest T_4.

Dowód. Prz. 11.11 (str. 68) pokazuje, że kostka Tichonowa $[0,1]^{2^{\aleph_0}}$ nie jest T_5. Tym samym — na podstawie charakteryzacji podanej w Tw. 11.14 (str. 69), przestrzeń ta zawiera gęsty podzbiór otwarty X, który nie jest przestrzenią normalną. Z Prz. 13.4(A) wnosimy, że X jest przestrzenią lokalnie zwartą — i teza. □

Jak wiemy, przestrzenie euklidesowe są lokalnie zwarte i niezwarte. Rodzi się więc naturalne pytanie, jaką przestrzenią jest $\omega\mathbb{R}^n$. Odpowiada na nie następujące

13.10 Twierdzenie. (Twierdzenie o rzucie stereograficznym)
Niech $e \stackrel{\text{def}}{=} (0,0,\dots,0,1) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $b \stackrel{\text{def}}{=} 2e$ oraz

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{R}^{n+1}\colon\ \|z-e\|_2 = 1\}.$$

Dla dowolnego wektora $x \in \mathbb{R}^n$ istnieje dokładnie jedna liczba $t_x > 0$, taka że wektor $h(x) \stackrel{\text{def}}{=} (1-t_x)b + t_x(x,0)$ należy do S. Otrzymana w ten sposób funkcja $h\colon \mathbb{R}^n \to S$ jest zanurzeniem topologicznym, a jej zbiór wartości to $S \setminus \{b\}$.

W szczególności, jednopunktowe uzwarcenie przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jest homeomorficzne z n-wymiarową sferą euklidesową $\mathbb{S}^n \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^{n+1}\colon\ \|x\|_2 = 1\}$.

Funkcję $h^{-1}\colon S \setminus \{b\} \to \mathbb{R}^n$ nazywamy *rzutem stereograficznym.*

Dowód. Dzięki Tw. 13.5, wystarczy pokazać, że funkcja h określona powyżej jest zanurzeniem topologicznym, którego zbiorem wartości jest zbiór $S \setminus \{b\}$.

Zacznijmy od uzasadnienia, że liczba t_x jest jedna jedyna, i wyznaczmy tę liczbę. Niech więc t będzie liczbą dodatnią, a x dowolnym wektorem w $\mathbb{R}^n$. Pytamy, kiedy wektor $(1-t)b + t(x,0)$ należy do S. Jest tak wtedy, gdy $\|(1-t)b + t(x,0) - e\|_2 = 1$. Podnosząc obie strony tego równania (z niewiadomą t) do kwadratu i stosując wzór na normę $\|\cdot\|_2$, równanie to zamienia się na:

$$t^2\|x\|_2^2 + (1-2t)^2 = 1.$$

Uwzględniając warunek $t \neq 0$, bez trudu wyznaczamy $t = t_x$:

$$t_x = \frac{4}{4 + \|x\|_2^2} \quad \in (0,1].$$

Tym samym $h(x) = (1-t_x)b + t_x(x,0)$ jest funkcją ciągłą. Zauważmy także, że $h(x) \neq b$ (bo $t_x \neq 0$ i $b \neq (x,0)$). Pozostaje więc pokazać, że funkcja h jest bijekcją między $\mathbb{R}^n$ a $S \setminus \{b\}$ oraz że funkcja odwrotna jest ciągła. W tym celu ustalmy dowolnie punkt $z \in S \setminus \{b\}$ i rozważmy równanie

$$h(x) = z \tag{13:1}$$

(z niewiadomą $x \in \mathbb{R}^n$). Zapiszmy $z = (z', z_0)$, gdzie $z' \in \mathbb{R}^n$ oraz $z_0 \in \mathbb{R}$, i zauważmy, że warunek $z \in S \setminus \{b\}$ implikuje, że $z_0 \in [0,2)$. Równanie (13:1) jest równoważne układowi równań:

$$\begin{cases} 1 - t_x = \frac{1}{2}z_0 \\ t_x x = z' \end{cases}.$$

Pierwsze z tych równań pozwala nam wyznaczyć t_x, a drugie x: $t_x = 1 - \frac{1}{2}z_0$, $x = \frac{1}{t_x}z' = \frac{2z'}{2-z_0}$. Zauważmy, że wtedy $t_x > 0$ oraz $(1-t_x)b + t_x x = z \in S$, więc wprost z definicji funkcji h wynika, że $h(x) = z$. Z jedyności rozwiązania tego równania wynika, że h jest bijekcją (na $S \setminus \{b\}$) oraz $h^{-1}(z) = \frac{2z'}{2-z_0}$, czyli także ta funkcja jest ciągła. □

Zajmiemy się teraz podprzestrzeniami lokalnie zwartymi przestrzeni Hausdorffa.

13.11 Twierdzenie.
Jeśli A jest lokalnie zwartą podprzestrzenią przestrzeni Hausdorffa X, to zbiór $\bar{A} \setminus A$ jest domknięty w X.

Dowód. Zauważmy, że teza twierdzenia jest równoważna stwierdzeniu, że zbiór A jest otwarty w $\bar{A}$. Z tego względu, zastępując X przez $\bar{A}$, możemy założyć, że zbiór A jest gęsty w X. W tej sytuacji mamy pokazać, że zbiór A jest otwarty. Tego właśnie dowodzimy poniżej.

Niech $a \in A$. Z lokalnej zwartości przestrzeni A wnosimy, że istnieje zbiór V otwarty w A, taki że $a \in V$ oraz $\mathrm{cl}_A(V)$ jest zbiorem zwartym. Wtedy automatycznie $\mathrm{cl}_A(V)$ jest zbiorem domkniętym w X (bo X jest T_2) i, co za tym idzie, $\mathrm{cl}_A(V) = \bar{V}$. Ponieważ V jest zbiorem otwartym w A, istnieje zbiór U otwarty w X, taki że $A \cap U = V$. Z gęstości zbioru A w X oraz otwartości U w X wynika, że zbiór $A \cap U$ jest gęsty w U. Oznacza to, że $\bar{U} = \overline{A \cap U} = \bar{V} \subset A$. Tym samym $U \subset A$. Ale $a \in V \subset U$, czyli U jest otoczeniem punktu a otwartym w X, zawartym w A. Tak więc zbiór A jest otwarty. □

13.12 Twierdzenie.
Podzbiór A lokalnie zwartej T_2-przestrzeni X jest przestrzenią lokalnie zwartą wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\bar{A} \setminus A$ jest domknięty w X.

Dowód. Dzięki poprzedniemu rezultatowi, wystarczy pokazać, że jeśli $\bar{A} \setminus A$ jest zbiorem domkniętym (w przestrzeni lokalnie zwartej), to przestrzeń A jest lokalnie zwarta. Dowód tegoż podzielimy na trzy części.

Najpierw załóżmy, że zbiór A jest domknięty. Dla $a \in A$ dobieramy otoczenie U otwarte w X, którego domknięcie jest zwarte. Wtedy zbiór $A \cap \bar{U}$ jest zwarty i zawiera zbiór $A \cap U$, który jest otoczeniem punktu a w A. Tym samym A jest przestrzenią lokalnie zwartą.

Teraz załóżmy, że zbiór A jest otwarty. Dla $a \in A$ dobieramy otoczenie U otwarte w X, którego domknięcie jest zwarte. Wtedy zbiór $A \cap U$ jest otoczeniem punktu a otwartym w X, więc z regularności przestrzeni X (zob. Tw. 13.8) wynika istnienie otwartego otoczenia V punktu a, takiego że $\bar{V} \subset A \cap U$. A wtedy $\bar{V}$ jest domkniętym podzbiorem zwartej przestrzeni $\bar{U}$, więc jest to przestrzeń zwarta. Tym samym $a \in V$ oraz $\bar{V} \subset A$, czyli punkt a ma w przestrzeni A otoczenie zwarte.

Niech wreszcie A będzie dowolnym zbiorem, takim że zbiór $\bar{A} \setminus A$ jest domknięty. Oznacza to, że zbiór A jest otwarty w przestrzeni $\bar{A}$. Z pierwszej części dowodu wiemy, że przestrzeń $\bar{A}$ jest lokalnie zwarta, a z drugiej części dowodu, że przestrzeń A jest lokalnie zwarta (skoro A jest zbiorem otwartym w przestrzeni lokalnie zwartej $\bar{A}$). □

13.13 Twierdzenie.
Iloczyn kartezjański niepustych przestrzeni topologicznych jest lokalnie zwartą T_2-przestrzenią wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie te przestrzenie są lokalnie zwarte T_2 i tylko skończenie wiele spośród nich jest niezwartych.

Dowód. Niech $\{X_s\}_{s \in S}$ będzie rodziną niepustych przestrzeni. Z produktowości (Tw. 11.18, str. 70) i dziedziczności (Obs. 11.7, str. 67) własności T_2 wynika, że możemy założyć, że wszystkie te przestrzenie są T_2. Wtedy także przestrzeń $X \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{s \in S} X_s$ jest T_2.

($\Longleftarrow$): Niech F będzie skończonym podzbiorem zbioru S, takim że przestrzeń X_s jest lokalnie zwarta dla $s \in F$ oraz zwarta dla $s \in S \setminus F$. Z Twierdzenia Tichonowa (Tw. 10.26, str. 63) wynika, że przestrzeń $K \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{s \in S \setminus F} X_s$ jest zwarta. Ponieważ przestrzenie X oraz $K \times \prod_{s \in F} X_s$ są homeomorficzne, wystarczy pokazać, że iloczyn kartezjański skończenie wielu przestrzeni lokalnie zwartych jest przestrzenią lokalnie zwartą. W tym celu rozważmy lokalnie zwarte przestrzenie $W_1, \ldots, W_p$ oraz punkt $w = (w_1, \ldots, w_p) \in W \stackrel{\text{def}}{=} W_1 \times \ldots \times W_p$. Dla $j = 1, \ldots, p$ dobieramy zwarte otoczenie U_j punktu w_j w W_j. Wtedy zbiór $U \stackrel{\text{def}}{=} U_1 \times \ldots \times U_p$ jest zwartym otoczeniem punktu w w W (zwartość ponownie wynika z Twierdzenia Tichonowa, a to, że U jest otoczeniem punktu w, bierze się stąd, że zbiór $\mathrm{int}(U_1) \times \ldots \times \mathrm{int}(U_p)$ jest otwarty w W).

($\Longrightarrow$): Z Wn. 10.11 (str. 58) wiemy, że każda z przestrzeni X_s jest homeomorficzna z domkniętą podprzestrzenią przestrzeni X, więc X_s jest przestrzenią lokalnie zwartą (dzięki Tw. 13.12). Na koniec ustalmy dowolny punkt $a = (a_s)_{s \in S} \in X$ i dobierzmy otwarty cylinder $C = \mathrm{Cyl}(\{V_s\}_{s \in S_0}, \{X_s\}_{s \in S})$ zawierający a, który ma zwarte domknięcie w X. Wtedy przestrzeń $\prod_{s \in S} A_s$, gdzie $A_s \stackrel{\text{def}}{=} \{a_s\}$ dla $s \in S_0$ oraz $A_s \stackrel{\text{def}}{=} X_s$ dla $s \notin S_0$, jest homeomorficzna z produktem

$$\prod_{s \in S \setminus S_0} X_s \tag{13:2}$$

i zarazem zbiorem domkniętym w X zawartym w C, a więc jest zwarta. Tym samym produkt (13:2) jest przestrzenią zwartą, a stąd przestrzeń X_s jest zwarta dla $s \in S \setminus S_0$ — i teza. □

Na zakończenie tego rozdziału udowodnimy twierdzenie Baire'a dla przestrzeni lokalnie zwartych. Jak zobaczymy, dowód w tym przypadku przebiega bardzo podobnie jak dla przestrzeni metryzowalnych w sposób zupełny.

13.14 Twierdzenie. (Twierdzenie Baire'a dla przestrzeni lokalnie zwartych)
*Suma mnogościowa przeliczalnie wielu brzegowych zbiorów typu $\mathscr{F}_\sigma$ w lokalnie zwartej przestrzeni Hausdorffa jest zbiorem **brzegowym** typu $\mathscr{F}_\sigma$.*

Dowód. Niech $D_1, D_2, \ldots$ będą brzegowymi zbiorami typu $\mathscr{F}_\sigma$ w lokalnie zwartej T_2-przestrzeni X. Bez straty ogólności, możemy założyć, że wszystkie zbiory D_j są domknięte (por. początek dowodu Tw. 9.17, str. 52). Przeprowadzamy dowód nie wprost. Załóżmy, że zbiór $B \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ ma niepuste wnętrze. Oznacza to, że istnieje zbiór zwarty K_0 o niepustym wnętrzu, który zawiera się w B. Dalej konstruujemy indukcyjnie zbiory zwarte $K_1, K_2, \ldots$ (korzystając z tego, że przestrzeń X jest lokalnie zwarta), takie że:

(1_n) $K_n \subset K_{n-1}$;

(2_n) $\operatorname{int}(K_n) \neq \varnothing$.

(3_n) $K_n \cap D_n = \varnothing$;

Jeśli zbiór K_{n-1} jest skonstruowany, to zbiór $\operatorname{int}(K_{n-1}) \setminus D_n$ jest niepusty (gdyż zbiór D_n jest brzegowy), więc jako że jest otwarty (bo D_n jest zbiorem domkniętym), musi zawierać zbiór zwarty K_n o niepustym wnętrzu. Tak dobrany zbiór spełnia warunki (1_n)–(3_n).

Mając już ciąg zbiorów $K_0, K_1, K_2, \ldots$, z ich zwartości oraz własności (1_n)–(2_n) wynika, że $\bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$ jest zbiorem niepustym. Niech a będzie dowolnym punktem tego przecięcia. Wtedy $a \in K_0 \subset B$, czyli $a \in D_p$ dla pewnego indeksu $p > 0$. Ale także $a \in K_p$, czyli $K_p \cap D_p \neq \varnothing$, co jest sprzeczne z warunkiem (3_p). □

14 Lokalna spójność i lokalna drogowa spójność

14.1 Definicja.
Mówimy, że przestrzeń topologiczna X jest *lokalnie spójna w punkcie* $a \in X$, gdy X ma bazę spójnych otoczeń (niekoniecznie otwartych) w tym punkcie:

$$\forall U \text{ otoczenie punktu } a \ \exists S \text{ zbiór spójny}\colon \ S \subset U \wedge a \in \operatorname{int}_X(S).$$

Przestrzeń X jest *lokalnie spójna*, gdy jest lokalnie spójna w każdym swoim punkcie.

14.2 Twierdzenie.
Dla przestrzeni topologicznej X następujące warunki są równoważne:

(i) *przestrzeń X jest lokalnie spójna;*

(ii) *spójne zbiory otwarte tworzą bazę przestrzeni X;*

(iii) *składowe zbiorów otwartych w X są zbiorami otwartymi.*

Dowód. Zauważmy, że implikacje (iii) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (i) są natychmiastowe. Wystarczy więc pokazać, że z (i) wynika (iii). W tym celu ustalmy składową S zbioru U otwartego w X oraz dowolny punkt $a \in S$. Jedyne, co musimy zrobić, to znaleźć otoczenie punktu a zawarte w S. Aby wskazać takie otoczenie, korzystamy z lokalnej spójności przestrzeni X w punkcie a. Z warunku definiującego tę własność wynika, że istnieje zbiór spójny C zawarty w U, taki że $a \in \operatorname{int}(C)$. Z własności składowych wynika, że wtedy $C \subset S$, a stąd $a \in \operatorname{int}(C) \subset S$ i teza. □

14.3 Definicja.
Mówimy, że przestrzeń topologiczna X jest *lokalnie drogowo spójna w punkcie* $a \in X$, gdy:

$$\forall U \text{ otoczenie punktu } a\ \exists V \text{ otoczenie punktu } a\ \forall z \in V\ \exists \gamma\colon [0,1] \to U \text{ droga: } \ \gamma(0) = a,\ \gamma(1) = z.$$

Przestrzeń X jest *lokalnie drogowo spójna*, gdy jest lokalnie drogowo spójna w każdym swoim punkcie.

14.4 Przykład.
Jak nietrudno się przekonać, każda przestrzeń unormowana jest lokalnie drogowo spójna. Istotnie, w takich przestrzeniach kule otwarte są zbiorami wypukłymi, a więc drogowo spójnymi (funkcja „odcinkowa" $[0,1] \ni t \mapsto (1-t)a + tb$ jest drogą od punktu a do b leżącą w dowolnym zbiorze wypukłym zawierającym te punkty).

14.5 Twierdzenie.
Przestrzeń lokalnie drogowo spójna jest lokalnie spójna, a każdy jej spójny podzbiór otwarty jest drogowo spójny.

Dowód. Ustalmy lokalnie drogowo spójną przestrzeń topologiczną X i jej otwarty podzbiór U oraz punkt $a \in U$. Z Def. 14.3 wynika, że istnieje otwarte otoczenie V punktu a, takie że dla dowolnego punktu $b \in V$ istnieje droga $\gamma_b\colon [0,1] \to U$ od a do b. Wtedy zbiór $S \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{b \in V} \gamma_b([0,1]) \subset U$ jest zbiorem spójnym (gdyż zbiory $\gamma_b([0,1])$ są spójne i zawierają a) obejmującym zbiór V, co pokazuje, że przestrzeń X jest lokalnie spójna. Załóżmy teraz, że zbiór U jest otwarty i spójny. Dla ustalonego punktu $a \in U$ oznaczmy przez W zbiór tych punktów $b \in U$, które można połączyć z a drogą leżącą w U. Ponieważ $a \in W$, aby stwierdzić, że zbiór U jest drogowo spójny (czyli że $W = U$), wystarczy pokazać, że zbiór W jest otwarty oraz domknięty w U (dzięki spójności zbioru U). Obie te własności dość łatwo wynikają z lokalnej drogowej spójności przestrzeni X oraz otwartości zbioru U. Istotnie, aby wykazać otwartość zbioru W, ustalamy punkt $b \in W$ i dla otoczenia U punktu b dobieramy otoczenie V punktu b o tej własności, że każdy punkt z V można połączyć z b drogą leżącą w U. Wtedy $V \subset W$, gdyż stosowną drogę od b do $x \in V$ (jako funkcję z $[1,2]$ w U) możemy zlepić z drogą od a do b (która istnieje dzięki temu, że $b \in W$), by otrzymać drogę od a do x leżącą w U. Tym samym zbiór W jest otwarty. Aby wykazać jego domkniętość w U, wystarczy sprawdzić, że $W = U \cap \overline{W}$. Niech więc $c \in U \cap \overline{W}$. Z lokalnej drogowej spójności przestrzeni X wynika, że istnieje otoczenie V punktu c, takie że każdy punkt z V można połączyć z c drogą leżącą w U. Skoro V to otoczenie punktu c, a $c \in \overline{W}$, istnieje punkt z leżący w $V \cap W$. Wtedy z możemy połączyć drogami leżącymi w U zarówno z a (bo $z \in W$), jak i z c (bo $z \in V$). Zlepienie dwóch takich dróg da nam drogę od a do c leżącą w U, więc $c \in W$, co kończy dowód twierdzenia. □

Choć pojęcia lokalnej spójności i lokalnie drogowej spójności nie są równoważne nawet w klasie metryzowalnych przestrzeni, nie jest łatwo podać przykład takiej przestrzeni, która jest lokalnie spójna, ale nie lokalnie drogowo spójna. Trudność ta ma związek z następującym ważnym twierdzeniem:

14.6 Twierdzenie. (Twierdzenie Mazurkiewicza-Moore'a)
Spójny otwarty podzbiór metryzowalnej w sposób zupełny przestrzeni lokalnie spójnej jest łukowo spójny.

(*bez dowodu*)

Powyższe twierdzenie stanowi główne narzędzie w dowodzie równie ważnego rezultatu:

14.7 Twierdzenie. (Twierdzenie Hahna-Mazurkiewicza)
Dla T_2-przestrzeni X następujące warunki są równoważne:

(i) *istnieje ciągła suriekcja z $[0,1]$ na X;*

(ii) *X jest przestrzenią o następujących własnościach:*

- *$X \neq \varnothing$;*
- *X jest przestrzenią spójną i lokalnie spójną;*

- *X jest przestrzenią zwartą;*
- *X spełnia II A.P. (lub równoważnie [w tym kontekście]: X jest przestrzenią metryzowalną).*

(*bez dowodu*)

14.8 Wniosek.
Drogowo spójna przestrzeń T_2 jest łukowo spójna.

Dowód. Niech a i b będą dwoma różnymi punktami drogowo spójnej T_2-przestrzeni X i niech $\gamma\colon [0,1] \to X$ będzie drogą od a do b. Z Tw. 14.7 wynika, że wtedy przestrzeń $W \stackrel{\text{def}}{=} \gamma([0,1])$ jest metryzowalna, zwarta, spójna i lokalnie spójna. W takim razie, dzięki Tw. 14.6, jest ona także łukowo spójna. W szczególności, istnieje łuk od a do b (gdyż oba te punkty leżą w W). □

Twierdzenie Hahna-Mazurkiewicza implikuje, że ciągły obraz odcinka (o ile jest przestrzenią Hausdorffa) jest przestrzenią lokalnie spójną. Można pokazać, że w ogólności **nie jest prawdą**, że ciągły obraz przestrzeni lokalnie spójnej jest przestrzenią lokalnie spójną (nawet jeśli obie przestrzenie są metryzowalne w sposób zupełny). Mimo to lokalna spójność jest zachowana przy przekształceniach zwartych przestrzeni T_2, co pokazuje poniższe

14.9 Twierdzenie.
Ciągły obraz lokalnie [drogowo] spójnej zwartej [T_2-]przestrzeni jest przestrzenią lokalnie [drogowo] spójną, o ile jest to przestrzeń T_2.

Dowód. Niech Z będzie T_2-przestrzenią, X lokalnie [drogowo] spójną przestrzenią zwartą, a $u\colon X \to Z$ ciągłą suriekcją. Niech także W będzie otwartym otoczeniem punktu $b \in Z$. Dla dowolnego punktu $a \in A \stackrel{\text{def}}{=} u^{-1}(\{b\})$ niech V_a będzie składową zbioru $u^{-1}(W)$ w punkcie a. Z lokalnej spójności przestrzeni X wynika, że zbiory V_a są otwarte (a w przypadku, gdy przestrzeń X jest lokalnie drogowo spójna, wiemy także, że zbiory V_a są drogowo spójne; zob. Tw. 14.5). Ponadto, $b \in u(V_a)$ dla wszelkich $a \in A$, więc z [drogowej] spójności zbiorów V_a (i ciągłości funkcji u) wynika, że zbiór $S \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{a\in A} u(V_a)$ jest [drogowo] spójny. Oczywiście $S \subset W$. Pozostaje więc pokazać, że S jest otoczeniem punktu b. Przeprowadzamy dowód nie wprost, stosując ciągi uogólnione.

Jeśli S nie jest otoczeniem punktu b, wtedy istnieje ciąg uogólniony $(c_\sigma)_{\sigma\in\Sigma} \subset Z\setminus S$ zbieżny do b. Z suriektywności odwzorowania u wynika istnienie ciągu uogólnionego $(a_\sigma)_{\sigma\in\Sigma} \subset X$, takiego że $u(a_\sigma) = c_\sigma$ dla wszelkich $\sigma \in \Sigma$. Zwartość przestrzeni X implikuje, że ciąg uogólniony $(a_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ ma podciąg uogólniony zbieżny. Przechodząc do tegoż podciągu, możemy założyć, że $a_\sigma \to a \in X$ ($\sigma \in \Sigma$). A wtedy także c_σ $(= u(a_\sigma)) \to u(a)$ ($\sigma \in \Sigma$). Z jedyności granicy w Z (jest to przestrzeń T_2!) wynika, że $u(a) = b$, czyli $a \in A$. Zbiór V_a jest otoczeniem punktu a, zatem $a_{\sigma_0} \in V_a$ dla pewnego $\sigma_0 \in \Sigma$. A wtedy $c_{\sigma_0} \in u(V_a) \subset S$ i sprzeczność. □

14.10 Twierdzenie.
Produkt kartezjański niepustych przestrzeni topologicznych jest przestrzenią lokalnie [drogowo] spójną wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie te przestrzenie są lokalnie [drogowo] spójne oraz tylko skończenie wiele spośród nich jest niespójnych.

Dowód. Niech $\{X_s\}_{s\in S}$ będzie rodziną niepustych przestrzeni topologicznych i niech $X \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{s\in S} X_s$. Przez $p_s\colon X \to X_s$ oznaczamy rzutowanie na współrzędną s. Z Obs. 10.8 (str. 56) wiemy, że funkcje p_s są otwarte.

($\Longrightarrow$): Ustalmy $s \in S$ oraz otwarte otoczenie $U \subset X_s$ punktu $a \in X_s$. Z pewnika wyboru dobieramy dowolny element $b \in X$, taki że $p_s(b) = a$. Niech C będzie składową zbioru $p_s^{-1}(U)$ w punkcie b. Jako że $p_s^{-1}(U)$ jest otwartym otoczeniem punktu b, lokalna [drogowa] spójność przestrzeni X implikuje, że C jest zbiorem otwartym (i drogowo spójnym, gdy przestrzeń X jest takaż). W takim razie $p_s(C)$ jest [drogowo] spójnym otoczeniem punktu a, zawartym w U, czyli przestrzeń X_s jest lokalnie [drogowo] spójna.

Aby wykazać, że tylko skończenie wiele przestrzeni spośród X_s może być niespójnych, rozważmy dowolną składową przestrzeni X, powiedzmy C. Z Tw. 10.22 (str. 61) wiemy, że C ma postać $\prod_{s\in S} C_s$, gdzie C_s to (pewna) składowa przestrzeni X_s. Jednocześnie z lokalnej spójności przestrzeni X wynika, że zbiór C jest otwarty, więc (będąc niepusty) musi zawierać niepusty cylinder otwarty, powiedzmy $W \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Cyl}(\{V_s\}_{s\in S_0}, \{X_s\}_{s\in S})$. Skoro $W \subset C$, z pewnika wyboru wynika, że $C_s = X_s$ dla $s \in S \setminus S_0$, czyli przestrzeń X_s jest spójna dla takich indeksów.

($\Longleftarrow$): Niech $F \subset S$ będzie zbiorem skończonym, takim że przestrzeń X_s jest spójna dla $s \in S \setminus F$. Ustalmy dowolny punkt $b = (b_s)_{s\in S}$ przestrzeni X i jego otoczenie V. Wtedy istnieje otwarty cylinder, powiedzmy $C = \mathrm{Cyl}(\{U_s\}_{s\in S_0}, \{X_s\}_{s\in S})$, taki że $b \in C \subset V$. Zwiększając ewentualnie zbiór S_0, możemy założyć, że $F \subset S_0$, czyli że przestrzeń X_s dla $s \notin S_0$ jest spójna. Zauważmy, że dla $s \in S_0$, U_s jest otwartym otoczeniem punktu b_s w X_s. Oznaczmy przez D_s składową zbioru U_s w tym punkcie. Z lokalnej [drogowej] spójności przestrzeni X_s wynika, że D_s jest otwartym [drogowo] spójnym otoczeniem punktu b_s. Dla $s \notin S_0$ niech $D_s \overset{\text{def}}{=} X_s$ (także jest to zbiór [drogowo] spójny). Z Tw. 10.22 (str. 61) wnosimy, że zbiór $E \overset{\text{def}}{=} \prod_{s\in S} D_s$ jest [drogowo] spójny. Jednocześnie, powyższe obserwacje pokazują, że E jest otwartym cylindrem. Jako że zbiór ten zawiera punkt b i zawiera się w V, dowód lokalnie [drogowej] spójności przestrzeni X został zakończony. □

14.11 Definicja.
Kontinuum to spójna, zwarta i niepusta przestrzeń T_2. *Kontinuum peanowskie* to przestrzeń T_2, która jest ciągłym obrazem odcinka $[0, 1]$.
Uwaga: Wielu autorów w definicji kontinuum zastępuje warunek T_2 metryzowalnością.

Tw. 14.7 podaje pełną charakteryzację kontinuów peanowskich. Warto pamiętać, że musi to być przestrzeń metryzowalna (w przeciwieństwie do kontinuów — trzymając się przyjętej przez nas definicji).

Na potrzeby poniższego wyniku, wprowadźmy następujące pojęcie: powiemy, że rodzina zbiorów jest *skierowana w dół*, gdy dla dowolnych dwóch jej elementów A i B istnieje trzeci jej element C, taki że $C \subset A \cap B$ (innymi słowy: niepusta rodzina $\mathcal{A}$ jest skierowana w dół, gdy zbiór częściowo uporządkowany $(\mathcal{A}, \supset)$ jest skierowany).

14.12 Twierdzenie.
Przecięcie niepustej i skierowanej w dół rodziny kontinuów w przestrzeni Hausdorffa jest kontinuum.

Dowód. Niech K_s dla $s \in S \neq \varnothing$ będzie kontinuum leżącym w T_2-przestrzeni X. Wtedy każdy ze zbiorów K_s jest domknięty, więc zbiór $L \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{s\in S} K_s$ także jest domknięty. W takim razie jest to zbiór zwarty, jako domknięty podzbiór K_{s_0} (gdzie s_0 jest dowolnie ustalonym indeksem ze zbioru S). Co więcej, $L \neq \varnothing$, jako przecięcie scentrowanej rodziny $\{K_s \cap K_{s_0}\}_{s\in S}$ niepustych podzbiorów domkniętych przestrzeni K_{s_0}. Pozostaje więc wykazać, że zbiór L jest spójny. Przeprowadzamy dowód nie wprost. Załóżmy więc, że $L = A \cup B$, gdzie A i B to niepuste rozłączne zbiory domknięte w L. Wtedy A i B są zwarte. W takim razie z Tw. 7.8 (str. 32) wynika istnienie dwóch rozłącznych zbiorów U i V otwartych w X, takich że $A \subset U$ i $B \subset V$. Wtedy zbiory $K_s \cap K_{s_0} \setminus (U \cup V)$ są domknięte w K_{s_0}, tworzą rodzinę skierowaną w dół i mają przecięcie puste, zatem ze zwartości przestrzeni K_{s_0} wynika, że nie tworzą one rodziny scentrowanej. Dla rodzin skierowanych w dół brak tej własności jest równoważny temu, że jeden ze zbiorów z rodziny jest pusty; co w naszej sytuacji oznacza, że dla pewnego indeksu $t \in S$ zachodzi $K_t \setminus (U \cup V) = \varnothing$, czyli $K_t \subset U \cup V$. Ponieważ zbiory U i V są rozłączne i otwarte, a zbiór K_t jest spójny, z ostatniej inkluzji wynika, że $K_t \subset U$ lub $K_t \subset V$. A wtedy tym bardziej $L \subset U$ lub $L \subset V$. Bez straty na ogólności, możemy założyć, że $L \subset U$. A wtedy $B \subset L \cap V \subset U \cap V = \varnothing$ i sprzeczność. □

14.13 ***Uwaga****.*

(A) (Ćwiczenie z „dwoma gwiazdkami") Istnieje ośrodkowa spójna i lokalnie spójna przestrzeń metryzowalna mocy większej niż 1, w której żadnych dwóch różnych punktów nie da się połączyć drogą.

(B) (Ćwiczenie z „dwoma gwiazdkami") Jeśli lokalnie zwarta niezwarta przestrzeń T_2 jest spójna i lokalnie spójna, to jej jednopunktowe uzwarcenie jest lokalnie spójnym kontinuum.

(C) (Ćwiczenie z „małą gwiazdką") Istnieje lokalnie spójne kontinuum, które nie jest drogowo spójne.

15 Parazwartość

15.1 Definicja.
Dla dwóch rodzin zbiorów $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s\in S}$ oraz $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t\in T}$, mówimy, że rodzina $\mathcal{A}$ jest

- *wpisana* w rodzinę $\mathcal{B}$, gdy każdy element rodziny $\mathcal{A}$ jest zawarty w jakimś elemencie rodziny $\mathcal{B}$:
$$\forall s \in S\ \exists t \in T\colon\ A_s \subset B_t;$$
- *drobniejsza* od rodziny $\mathcal{B}$, gdy $S = T$ oraz $A_s \subset B_s$ dla wszelkich $s \in S$;
- *punktowo skończona*, gdy $\bigcap_{s\in J} A_s = \varnothing$ dla dowolnego nieskończonego zbioru $J \subset S$.

Rodzina $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s\in S}$ podzbiorów przestrzeni topologicznej X jest

- *lokalnie skończona* (*w* X), gdy dowolny punkt przestrzeni X ma otoczenie V (w X), takie że zbiór $\operatorname{meet}(\mathcal{A}, V) \overset{\text{def}}{=} \{s \in S\colon\ A_s \cap V \neq \varnothing\}$ jest skończony;
- *dyskretna* (*w* X), gdy dowolny punkt przestrzeni X ma otoczenie V (w X), takie że $\operatorname{card}(\operatorname{meet}(\mathcal{A}, V)) \leqslant 1$.

15.2 Obserwacja.
Niech $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s\in S}$ będzie rodziną podzbiorów przestrzeni topologicznej X i niech $\bar{\mathcal{A}} \overset{\text{def}}{=} \{\bar{A}_s\}_{s\in S}$.

(A) *Rodzina $\mathcal{A}$ jest lokalnie skończona [odp. dyskretna] w X wtedy i tylko wtedy, gdy rodzina $\bar{\mathcal{A}}$ jest lokalnie skończona [odp. dyskretna] w X.*

(B) *Niech $\mathcal{T} = \{T_\mu\}_{\mu\in M}$ będzie rodziną podzbiorów zbioru indeksów S. Niech $\mathcal{B} = \{B_\mu\}_{\mu\in M}$, gdzie dla $\mu \in M$,*
$$B_\mu \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{s\in T_\mu} A_s.$$

- *Jeśli rodzina $\mathcal{T}$ jest punktowo skończona, a rodzina $\mathcal{A}$ jest lokalnie skończona w X, to także rodzina $\mathcal{B}$ jest lokalnie skończona w X.*
- *Jeśli rodzina $\mathcal{T}$ składa się ze zbiorów parami rozłącznych, a rodzina $\mathcal{A}$ jest dyskretna w X, to także rodzina $\mathcal{B}$ jest dyskretna w X.*

W szczególności, podrodzina rodziny lokalnie skończonej [odp. dyskretnej] w X jest również takaż.

(C) *Jeśli rodzina $\mathcal{A}$ jest lokalnie skończona, to*

$$\overline{\bigcup_{s\in S} A_s} = \bigcup_{s\in S} \bar{A}_s. \tag{15:1}$$

(D) *Rodzina $\mathcal{A}$ jest lokalnie skończona w X wtedy i tylko wtedy, gdy rodzina $\bar{\mathcal{A}}$ jest punktowo skończona oraz dla dowolnego zbioru skończonego $F \subset S$ zbiór $\bigcup_{s\in S\setminus F} \bar{A}_s$ jest domknięty.*

(E) *Rodzina $\mathcal{A}$ jest dyskretna w X wtedy i tylko wtedy, gdy rodzina $\bar{\mathcal{A}}$ składa się ze zbiorów parami rozłącznych oraz zbiór*

$$\bigcup_{s\in S\setminus\{t\}} \bar{A}_s \tag{15:2}$$

jest domknięty dla dowolnego indeksu $t \in S$. W szczególności, rodzina $\mathcal{A}$ jest dyskretna w X wtedy i tylko wtedy, gdy jest lokalnie skończona w X oraz $\bar{\mathcal{A}}$ składa się ze zbiorów parami rozłącznych.

Dowód. Zauważmy, że dla zbioru V otwartego w X zachodzi wzór $\operatorname{meet}(\mathcal{A}, V) = \operatorname{meet}(\bar{\mathcal{A}}, V)$, co dowodzi punktu (A).

Aby wykazać punkt (B), załóżmy, że rodzina $\mathcal{A}$ jest lokalnie skończona (odp. dyskretna), a rodzina $\mathcal{T}$ jest punktowo skończona (odp. składa się ze zbiorów parami rozłącznych) i rozważmy otoczenie otwarte V ustalonego punktu X, takie że zbiór $J \overset{\text{def}}{=} \operatorname{meet}(\mathcal{A}, V)$ jest skończony (odp. mocy mniejszej niż 2). Dla $\mu \in M$ zachodzi równoważność:

$$B_\mu \cap V \neq \varnothing \iff T_\mu \cap J \neq \varnothing. \tag{15:3}$$

Z punktowej skończoności rodziny $\mathcal{T}$ oraz skończoności zbioru J wynika, że zbiór $F \overset{\text{def}}{=} \{\mu \in M\colon\ T_\mu \cap J \neq \varnothing\}$ jest skończony. Wzór (15:3) pokazuje, że $\operatorname{meet}(\mathcal{B}, V) = F$. Tym samym rodzina $\mathcal{B}$ jest lokalnie skończona. Ponadto, gdy rodzina $\mathcal{A}$ jest dyskretna, $\operatorname{card}(J) \leqslant 1$, więc $\operatorname{card}(F) \leqslant 1$, gdyż w tej sytuacji rodzina $\mathcal{T}$ składa się ze zbiorów parami rozłącznych. Tym samym rodzina $\mathcal{B}$ jest dyskretna.

(C): Wystarczy pokazać inkluzję „$\subset$". W tym celu weźmy dowolny punkt z, taki że

$$z \in \overline{\bigcup_{s\in S} A_s}. \tag{15:4}$$

Niech V będzie otwartym otoczeniem punktu z, takim że zbiór $J \overset{\text{def}}{=} \operatorname{meet}(\mathcal{A}, V)$ jest skończony. Zbiór J jest niepusty, gdyż $V \cap \bigcup_{s\in S} A_s \neq \varnothing$ (dzięki (15:4)). Niech $J = \{s_1, \dots, s_p\}$. Twierdzimy, że z należy do domknięcia zbioru $C \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{k=1}^p A_{s_k}$. Istotnie, jeśli U jest otoczeniem punktu z, to także $U \cap V$ jest otoczeniem punktu z, więc $U \cap V \cap (\bigcup_{s\in S} A_s) \neq \varnothing$, dzięki (15:4). Ale $V \cap \bigcup_{s\in S\setminus J} A_s = \varnothing$, zatem $U \cap C \neq \varnothing$, co pokazuje, że $z \in \bar{C}$. Ale $\bar{C} = \bigcup_{k=1}^p \bar{A}_{s_k}$, co kończy dowód punktu (C).

(D): Jeśli rodzina $\mathcal{A}$ jest lokalnie skończona, to także rodzina $\bar{\mathcal{A}}$ jest lokalnie skończona (z (A)), więc tym bardziej rodzina ta jest punktowo skończona oraz każda jej podrodzina jest lokalnie skończona. Zatem, dzięki (C), suma mnogościowa dowolnej podrodziny rodziny $\bar{\mathcal{A}}$ jest zbiorem domkniętym. Odwrotnie, załóżmy, że rodzina $\bar{\mathcal{A}}$ jest punktowo skończona i że zbiór $\bigcup_{s\in S\setminus F} \bar{A}_s$ jest domknięty dla dowolnego skończonego zbioru $F \subset S$. Ustalmy punkt $z \in X$ i niech $F \overset{\text{def}}{=} \operatorname{meet}(\bar{\mathcal{A}}, \{z\})$. Z punktowej skończoności rodziny $\bar{\mathcal{A}}$ wynika, że zbiór F jest skończony. W takim razie zbiór $D \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{s\in S\setminus F} \bar{A}_s$ jest domknięty. Ponadto, $z \notin D$ (co wynika z określenia zbioru F). Tak więc zbiór $V = X \setminus D$ jest otoczeniem punktu z. Z konstrukcji wynika, że $\operatorname{meet}(\bar{\mathcal{A}}, V) = F$, czyli rodzina $\bar{\mathcal{A}}$ jest lokalnie skończona.

(E): Jeśli rodzina $\mathcal{A}$ jest dyskretna, to także rodzina $\bar{\mathcal{A}}$ jest dyskretna (z (A)), a z (D) wynika, że zbiór (15:2) jest domknięty. To, że zbiory z $\bar{\mathcal{A}}$ są parami rozłączne, jest natychmiastową konsekwencją dyskretności tej rodziny w X. Odwrotnie, jeśli rodzina $\bar{\mathcal{A}}$ składa się ze zbiorów parami rozłącznych, a zbiór (15:2) jest domknięty dla dowolnego indeksu $t \in S$, to także zbiór $D \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{s\in S} \bar{A}_s$ jest domknięty (jako suma mnogościowa dwóch zbiorów domkniętych). Dla dowolnego punktu $z \in X$ zachodzi jedna z dwóch możliwości:

- $z \notin D$ — wtedy $V \overset{\text{def}}{=} X \setminus D$ jest otoczeniem punktu z, takim że $\operatorname{meet}(\bar{\mathcal{A}}, V) = \varnothing$;
- istnieje dokładnie jeden indeks $t \in S$, taki że $z \in \bar{A}_t$ — wtedy zbiór $E \overset{\text{def}}{=} D \setminus \bar{A}_t$ jest domknięty (z domkniętości zbioru (15:2) oraz wzajemnej rozłączności zbiorów z $\bar{\mathcal{A}}$) i nie zawiera punktu z, zatem $V \overset{\text{def}}{=} X \setminus E$ to otoczenie punktu z; ponadto, $\operatorname{meet}(\bar{\mathcal{A}}, V) = \{t\}$,

czyli rodzina $\bar{\mathcal{A}}$ jest dyskretna.

Ostatnie stwierdzenie z punktu (E) jest natychmiastową konsekwencją punktu (D) oraz głównej charakteryzacji podanej w (E). □

15.3 Przykład.

(A) Ustawmy wszystkie liczby wymierne w różnowartościowy ciąg $(q_n)_{n=1}^\infty$. Dla $n > 0$ niech $A_n \overset{\text{def}}{=} \{q_k\colon\ k \geqslant n\}$. Rodzina $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ jest punktowo skończona i składa się ze zbiorów gęstych w $\mathbb{Q}$, więc nie jest lokalnie skończona w $\mathbb{Q}$.

(B) Niech $F_n \overset{\text{def}}{=} \{2^{-n}\}$ dla $n > 0$. Rodzina $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ jest dyskretna w $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ale nie jest lokalnie skończona w $\mathbb{R}$.

15.4 Definicja.
Mówimy, że przestrzeń topologiczna X jest *parazwarta*, gdy X jest przestrzenią T_2 oraz w każde jej pokrycie otwarte można wpisać pokrycie otwarte lokalnie skończone.

15.5 Przykład.

(A) Zwarte przestrzenie T_2 są parazwarte.

(B) Domknięty podzbiór przestrzeni parazwartej jest przestrzenią parazwartą.

Istotnie, wystarczy zauważyć, że jeśli $A = \bar{A} \subset X$ i $\{U_s\}_{s\in S}$ jest rodziną zbiorów otwartych w X pokrywającą zbiór A, to $\mathcal{U} \overset{\text{def}}{=} \{X \setminus A\} \cup \{U_s\}_{s\in S}$ jest pokryciem otwartym przestrzeni X, więc w $\mathcal{U}$ można wpisać pokrycie otwarte $\mathcal{V} = \{V_t\}_{t\in T}$ lokalnie skończone w X. Wtedy rodzina $\{V_t \cap A\}_{t\in T}$ jest pokryciem otwartym przestrzeni A lokalnie skończonym w A wpisanym w $\{U_s \cap A\}_{s\in S}$.

Podobnie jak dla przestrzeni zwartych, okazuje się, że każda przestrzeń parazwarta jest normalna. Aby to uzasadnić, potrzebujemy pomocniczego lematu (por. Lem. 7.7, str. 32).

15.6 Lemat.
Niech $A = \bar{A}$ i B będą dwoma podzbiorami przestrzeni parazwartej, takimi że

$$\forall a \in A\ \exists U_a, V_a \in \mathscr{G}(X)\colon\ a \in U_a,\ B \subset V_a,\ U_a \cap V_a = \varnothing.$$

Wtedy istnieją zbiory U i V otwarte w X, takie że:

$$A \subset U,\ B \subset V,\ U \cap V = \varnothing.$$

Dowód. Z rozłączności zbiorów U_a i V_a wynika, że

$$\forall a \in A\colon\ \bar{U}_a \cap B = \varnothing. \tag{15:5}$$

W pokrycie otwarte $\{X \setminus A\} \cup \{U_a\}_{a\in A}$ wpisujemy otwarte pokrycie $\{W_s\}_{s\in S}$ lokalnie skończone w X. Dla dowolnego punktu $a \in A$ dobieramy indeks $t(a) \in S$, taki że $a \in W_{t(a)}$. Wtedy $W_{t(a)} \not\subset X \setminus A$, więc istnieje punkt $b(a) \in A$, taki że $W_{t(a)} \subset U_{b(a)}$. Niech $U \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{a\in A} W_{t(a)}$. Z Obs. 15.2 wnioskujemy, że

$$\bar{U} = \bigcup_{a\in A} \overline{W}_{t(a)} \subset \bigcup_{a\in A} \bar{U}_{b(a)}.$$

W takim razie $\bar{U} \cap B = \varnothing$ (dzięki (15:5)), więc B leży w zbiorze otwartym $V \overset{\text{def}}{=} X \setminus \bar{U}$. Pozostaje jeszcze zauważyć, że $A \subset U$ oraz $U \cap V = \varnothing$. □

15.7 Twierdzenie.
Każda przestrzeń parazwarta jest normalna.

Dowód. Rozważmy dwa rozłączne zbiory domknięte K i L w parazwartej przestrzeni X.

Ustalmy punkt $a \in L$. Ponieważ X jest przestrzenią T_2, widzimy, że spełnione są założenia Lem. 15.6 dla zbiorów $A \overset{\text{def}}{=} K$ i $B \overset{\text{def}}{=} \{a\}$. Z jego tezy wynika istnienie dwóch rozłącznych zbiorów otwartych U_a i V_a, takich że $a \in U_a$ oraz $K \subset V_a$. Tym samym spełnione są założenia Lem. 15.6 dla $A \overset{\text{def}}{=} L$ oraz $B \overset{\text{def}}{=} K$. Teza tego lematu daje nam rozłączne nadzbiory otwarte zbiorów K i L, czyli normalność przestrzeni X. □

15.8 Definicja.
Rozkład jedności na zbiorze X to dowolna rodzina funkcji $\{f_s\}_{s\in S}$, takich że $f_s\colon X \to [0,1]$ oraz

$$\forall x \in X\colon\ \sum_{s\in S} f_s(x) = 1.^{*11)}$$

Rozkład jedności $\{f_s\}_{s\in S}$ jest *punktowo skończony*, gdy takaż jest rodzina zbiorów $\{f_s^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})\}_{s\in S}$.

Jeśli X jest przestrzenią topologiczną, rozkład jedności $\{f_s\colon X \to [0,1]\}_{s\in S}$ jest, odpowiednio:

- *lokalnie skończony*;
- *wpisany w rodzinę zbiorów* $\{U_t\}_{t\in T}$;
- *drobniejszy od rodziny zbiorów* $\{U_t\}_{t\in T}$,

gdy takaż jest rodzina zbiorów $\{\operatorname{supp}(f_s)\}_{s\in S}$, gdzie $\operatorname{supp}(f_s) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{cl}(f_s^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}))$ to *nośnik* funkcji f_s. Rozkład ten jest *ciągły*, gdy wszystkie funkcje f_s są ciągłe.

15.9 Lemat.
Dla dowolnego pokrycia otwartego $\{U_s\}_{s\in S}$ parazwartej przestrzeni X istnieje lokalnie skończone otwarte pokrycie $\{V_s\}_{s\in S}$, takie że $\bar{V}_s \subset U_s$ dla wszelkich $s \in S$.

Dowód. Dla dowolnego punktu $a \in X$ dobierzmy indeks $t(a) \in S$, taki że $a \in U_{t(a)}$. Z normalności przestrzeni X wynika, że istnieje otwarte otoczenie G_a punktu a, takie że $\bar{G}_a \subset U_{t(a)}$. Niech $\{W_z\}_{z\in Z}$ będzie lokalnie skończonym pokryciem otwartym przestrzeni X wpisanym w pokrycie $\{G_a\}_{a\in X}$. Dla $z \in Z$ dobierzmy punkt $b(z) \in X$, taki że $W_z \subset G_{b(z)}$. Na koniec, dla $s \in S$ określamy $T_s \overset{\text{def}}{=} \{z \in Z\colon\ t(b(z)) = s\} \subset Z$ oraz

$$V_s \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{z\in T_s} W_z.$$

Zauważmy, że zbiory T_s $(s \in S)$ są parami rozłączne. W takim razie z Obs. 15.2 wynika, że:

- rodzina $\{V_s\}_{s\in S}$ jest lokalnie skończona oraz
- $\bar{V}_s = \bigcup_{z\in T_s} \overline{W}_z \subset \bigcup_{z\in T_s} \bar{G}_{b(z)} \subset U_s$ (bo $t(b(z)) = s$ dla $z \in T_s$).

Pozostaje więc pokazać, że $\bigcup_{s\in S} V_s = X$. Ale tak jest, gdyż $X = \bigcup_{z\in Z} W_z$ oraz $z \in T_u$ dla $u \overset{\text{def}}{=} t(b(z))$, więc $W_z \subset V_u$. □

Jak łatwo zauważyć, własność sformułowana w poniższym twierdzeniu charakteryzuje przestrzenie parazwarte (wśród przestrzeni Hausdorffa).

15.10 Twierdzenie. (Twierdzenie o rozkładzie jedności)
Dla dowolnego pokrycia otwartego parazwartej przestrzeni X istnieje ciągły lokalnie skończony rozkład jedności drobniejszy od tego pokrycia.

Dowód. Ustalmy pokrycie otwarte $\{U_s\}_{s\in S}$ parazwartej przestrzeni X. Z Lem. 15.9 wynika, że istnieją dwa lokalnie skończone pokrycia otwarte $\mathcal{V} = \{V_s\}_{s\in S}$ oraz $\{W_s\}_{s\in S}$, takie że $\overline{W}_s \subset V_s$ i $\bar{V}_s \subset U_s$ dla dowolnego indeksu $s \in S$. Z Lematu Urysohna (Tw. 6.12, str. 26) wynika, że istnieje funkcja ciągła $u_s\colon X \to [0,1]$, która jest stale równa 1 na W_s i znika poza V_s. Rozważmy funkcję $w\colon X \to [0,\infty]$ daną wzorem $w(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{s\in S} u_s(x)$ i zauważmy, że:

- Każdy punkt $x \in X$ ma otwarte otoczenie D_x, takie że zbiór $F_x \overset{\text{def}}{=} \operatorname{meet}(\mathcal{V}, D_x)$ jest skończony.
- Dla dowolnego punktu $z \in D_x$, $w(z) = \sum_{s\in F_x} u_s(z)$ — gdyż funkcja u_s znika poza V_s i $V_s \cap D_x = \varnothing$ dla $s \in S \setminus F_x$. W szczególności, $w\colon X \to \mathbb{R}_+$ jest funkcją ciągłą.
- Dla dowolnego punktu $x \in X$ istnieje indeks $s \in S$, taki że $x \in W_s$, a wtedy $u_s(x) = 1$, więc $w(x) \geqslant 1$ — i tym samym $w\colon X \to [1,\infty)$.
- Dla dowolnego indeksu $s \in S$, funkcja $f_s \overset{\text{def}}{=} \frac{u_s}{w}$ jest dobrze określona, ciągła oraz $f_s\colon X \to [0,1]$.
- Rodzina $\{f_s\}_{s\in S}$ to rozkład jedności.
- Dla dowolnego indeksu $s \in S$, $\operatorname{supp}(f_s) \subset \bar{V}_s$, więc ten rozkład jedności jest lokalnie skończony i drobniejszy od pokrycia $\{U_s\}_{s\in S}$.

□

Poniższe twierdzenie jest, obok Twierdzenia Tichonowa, jednym z najważniejszych twierdzeń topologii ogólnej.

15.11 Twierdzenie. (Twierdzenia A.H. Stone'a o parazwartości)
Każda przestrzeń metryzowalna jest parazwarta.

Co więcej, dla dowolnego pokrycia otwartego $\{U_s\}_{s\in S}$ metryzowalnej przestrzeni X istnieje lokalnie skończone pokrycie otwarte $\{V_{s,n}\}_{(s,n)\in S\times\mathbb{N}_1}$, takie że:

- *$V_{s,n} \subset U_s$ dla wszelkich $s \in S$ i $n > 0$;*
- *dla dowolnego $n > 0$, rodzina $\{V_{s,n}\}_{s\in S}$ jest dyskretna w X.*

[*11)] Suma $\sum_{t\in T} a_t$ zestawu $(a_t)_{t\in T}$ liczb **nieujemnych** to $\sup_F \sum_{t\in F} a_t$, gdzie F przebiega wszystkie skończone zbiory $F \subset T$ (przy czym $\sum_{\varnothing} = 0$).

Dowód (*M.E. Rudin*). Oczywiście wystarczy wykazać drugą część twierdzenia. W tym celu ustalmy metrykę d zgodną z topologią przestrzeni X, a na zbiorze indeksów S dowolny dobry porządek „$\preccurlyeq$". Określamy zbiory $V_{t,n}$ (dla $t \in S$) indukcją względem n (przyjmując pomocniczo $V_{s,0} \overset{\text{def}}{=} \varnothing$ dla wszelkich $s \in S$):

$$V_{t,n} \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{c \in I_{t,n}} B_d(c, 2^{-n}),$$

gdzie $I_{t,n}$ składa się z wszystkich punktów $c \in X$, takich że:

$(1_{t,n})$ $t = \min_{\preccurlyeq}\{s \in S\colon\ c \in U_s\}$;

$(2_{t,n})$ $c \notin \bigcup_{s \in S} \bigcup_{k=0}^{n-1} V_{s,k}$;

$(3_{t,n})$ $B_d(c, 3 \cdot 2^{-n}) \subset U_t$.

Miejmy na uwadze, że dla bardzo wielu $t \in S$ zbiór $I_{t,n}$ może być pusty (i wtedy także $V_{t,n} = \varnothing$). Wprost z definicji zbioru $V_{t,n}$ wynika, że jest to zbiór otwarty zawarty w U_t. Co więcej, jeśli $x \in X$, to zbiór $J_x \overset{\text{def}}{=} \{s \in S\colon\ x \in U_s\}$ jest niepusty, więc ma element najmniejszy, powiedzmy t, względem porządku „$\preccurlyeq$". Skoro U_t jest otoczeniem punktu x, istnieje liczba naturalna $n > 1$, taka że $B_d(x, 3 \cdot 2^{-n}) \subset U_t$. Wynika stąd, że albo $x \in \bigcup_{s \in S} \bigcup_{k=1}^{n-1} V_{s,k}$, albo $x \in I_{t,n}$ i wtedy $B_d(x, 2^{-n}) \subset V_{t,n}$. Tak czy inaczej, $x \in V_{s,m}$ dla pewnych $s \in S$ oraz $m \in \mathbb{N}_1$, czyli zbiory $V_{s,m}$ stanowią pokrycie przestrzeni X.

Ustalmy liczbę naturalną $n > 0$ oraz dwa różne indeksy $s, s' \in S$. Możemy przy tym założyć, że $s \preccurlyeq s'$. Niech $x \in V_{s,n}$ oraz $y \in V_{s',n}$. Wtedy $x \in B_d(c, 2^{-n})$ oraz $y \in B_d(e, 2^{-n})$ dla pewnych $c \in I_{s,n}$ i $e \in I_{s',n}$. Wtedy $e \notin U_s$ (dzięki warunkowi $(1_{s',n})$), a zatem $d(c,e) \geqslant 3 \cdot 2^{-n}$ (z $(3_{s,n})$). Z nierówności trójkąta otrzymujemy więc $d(x,y) \geqslant d(c,e) - d(c,x) - d(y,e) > 2^{-n}$. Oznacza to, że dla dowolnego punktu $z \in X$, kula $B_d(z, 2^{-n-1})$ przecina niepusto co najwyżej jeden ze zbiorów $V_{s,n}$ — czyli rodzina $\{V_{s,n}\}_{s \in S}$ jest dyskretna w X. Pozostaje wykazać lokalną skończoność rodziny złożonej z wszystkich zbiorów $V_{s,k}$. Przyda nam się do tego następująca obserwacja:

($*$) Jeśli $B_d(x, 2^{-k}) \subset V_{t,m}$ (gdzie $k \in \mathbb{N}_1$), to $V_{s,n} \cap B_d(x, 2^{-k-1}) = \varnothing$ dla wszelkich $s \in S$ oraz $n > \max(m,k)$.

Aby wykazać ($*$), ustalmy $s \in S$, $n > \max(m,k)$, $z \in V_{s,n}$ oraz punkt $c \in I_{s,n}$, taki że $z \in B_d(c, 2^{-n})$. Wtedy $c \notin V_{t,m}$ (z $(2_{s,n})$), więc $d(x,c) \geqslant 2^{-k}$. A stąd $d(x,z) \geqslant d(x,c) - d(z,c) > 2^{-k} - 2^{-n} \geqslant 2^{-k} - 2^{-k-1} = 2^{-k-1}$, czyli $z \notin B_d(x, 2^{-k-1})$, co kończy dowód ($*$).

Teraz bez trudu wykażemy, że skonstruowana rodzina zbiorów jest lokalnie skończona. Niech $x \in X$. Dobieramy $t \in S$ oraz $m > 0$, takie że $x \in V_{t,m}$. Z otwartości zbioru $V_{t,m}$ możemy dobrać liczbę całkowitą $k > 0$, taką że $B_d(x, 2^{-k}) \subset V_{t,m}$. Dla $r \overset{\text{def}}{=} \max(m,k)$ wiemy z ($*$), że kula $B_d(x, 2^{-r-1})$ przecina pusto wszystkie zbiory $V_{s,n}$ z $n > r$, a z wcześniejszej części dowodu, że ta kula przecina niepusto co najwyżej jeden zbiór z rodziny $\{V_{s,j}\}_{s \in S}$ dla $j = 1, \dots, r$. Tym samym przecina ona niepusto co najwyżej r zbiorów spośród wszystkich $V_{s,n}$. □

Kolejną ważna klasę przestrzeni parazwartych stanowią przestrzenie Lindelöfa, zdefiniowane poniżej.

15.12 Definicja.
Mówimy, że przestrzeń topologiczna ma *własność Lindelöfa*, jeśli z każdego jej pokrycia otwartego można wybrać podpokrycie (co najwyżej) przeliczalne.

Przestrzeń regularną o własności Lindelöfa nazywamy przestrzenią *Lindelöfa*.

Przestrzeń *σ-zwarta* to przestrzeń, którą można przedstawić jako sumę mnogościową ciągu jej podzbiorów zwartych.

15.13 Obserwacja.

(A) *Zwarte przestrzenie Hausdorffa są Lindelöfa.*

(B) *Przestrzeń metryzowalna jest Lindelöfa wtedy i tylko wtedy, gdy jest ośrodkowa.*

(C) *Przestrzenie σ-zwarte mają własność Lindelöfa.*

(D) *Przestrzeń spełniająca II A.P. ma własność Lindelöfa.*

Dowód. Punkt (A) jest oczywisty, natomiast (B) jest szczególnym przypadkiem Tw. 5.12 (str. 22). Dowód punktu (C) jest prosty: każdy ze zbiorów zwartych z ciągu pokrywającego przestrzeń σ-zwartą można pokryć skończoną liczbą zbiorów z ustalonego pokrycia otwartego i tym samym całą przestrzeń pokryje co najwyżej przeliczalne podpokrycie. Tutaj skupimy się jedynie na dowodzie (D). Niech więc β będzie co najwyżej przeliczalną bazą topologii niepustej przestrzeni topologicznej X (spełniającej II A.P.). Ustalmy otwarte pokrycie $\mathcal{U} = \{U_s\}_{s\in S}$ przestrzeni X. Dla dowolnego punktu $x \in X$ istnieje zbiór $B_x \in \beta$ zawarty w pewnym zbiorze z $\mathcal{U}$. Rodzina $\{B_x\colon\ x \in X\}$ jest co najwyżej przeliczalna (jako podzbiór rodziny β), więc jej elementy możemy ustawić w ciąg (jest ona niepusta, bo $X \neq \varnothing$), powiedzmy $V_1, V_2, \ldots$ — czyli $\{B_x\colon\ x \in X\} = \{V_n\colon\ n > 0\}$. Dla dowolnego indeksu $n > 0$ istnieje indeks $s_n \in S$, taki że $V_n \subset U_{s_n}$. Wtedy $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_{s_n} \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = \bigcup_{x\in X} B_x = X$, zatem $\{U_{s_n}\}_{n\in\mathbb{N}_1}$ to przeliczalne podpokrycie. □

15.14 Twierdzenie.
Przestrzenie Lindelöfa są parazwarte.

Dowód. Wystarczy wykazać warunek z pokryciami. Niech więc $\mathcal{U} = \{U_s\}_{s\in S}$ będzie pokryciem otwartym niepustej przestrzeni Lindelöfa X. Każdy punkt $x \in X$ ma otwarte otoczenie D_x, takie że zbiór $\bar{D}_x$ jest zawarty w pewnym zbiorze z $\mathcal{U}$. Z pokrycia otwartego $\{D_x\}_{x\in X}$ wybieramy co najwyżej przeliczalne podpokrycie otwarte — ustawmy jego elementy w ciąg $V_1, V_2, \ldots$ Dla dowolnego indeksu $n > 0$ dobieramy indeks $s_n \in S$, taki że $\bar{V}_n \subset U_{s_n}$. Dla $n > 0$ niech $W_n \stackrel{\text{def}}{=} U_{s_n} \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} \bar{V}_k$, gdzie $V_0 \stackrel{\text{def}}{=} \varnothing$. Oczywiście zbiory W_n są otwarte. Zauważmy także, że tworzą one rodzinę lokalnie skończoną: zbiory V_n pokrywają przestrzeń X oraz $V_n \cap W_m = \varnothing$ dla $m > n$. Pozostaje więc wykazać, że $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n$. Dla punktu $x \in X$ oznaczmy przez k najmniejszą liczbę naturalną, taką że $x \in \bar{V}_k$. Wtedy $k > 0$ oraz $x \in W_k$ (bo $\bar{V}_k \subset U_{s_k}$). □

Powyższy rezultat ma ważną konsekwencję:

15.15 Twierdzenie. (Twierdzenie Urysohna-Tichonowa o metryzowalności)
Dla przestrzeni topologicznej X, która jest ośrodkowa lub ma własność Lindelöfa, następujące warunki są równoważne:

(i) *przestrzeń X jest metryzowalna;*

(ii) *X jest przestrzenią T_3 spełniającą II A.P.*

Dowód. Implikacja „(i) $\Longrightarrow$ (ii)" wynika z Tw. 5.12 (str. 22). Dla dowodu odwrotnej implikacji, rozważmy T_3-przestrzeń X spełniającą II A.P. Z Obs. 15.13 wynika, że X jest przestrzenią Lindelöfa, a z Tw. 15.14, że jest to przestrzeń parazwarta. Tym samym X jest T_4 (dzięki Tw. 15.7). A stąd X jest przestrzenią metryzowalną, na podstawie Tw. 11.1 (str. 65). □

16 Twierdzenie Brouwera o punkcie stałym

W niniejszym rozdziale pewne klasyczne pojęcia topologii algebraicznej definiujemy w uproszczonej formie, odpowiedniej dla potrzeb dowodu (ważnego) twierdzenia Brouwera o punkcie stałym (Tw. 16.6 poniżej).

16.1 Definicja.
Sympleksem (*geometrycznym*) w $\mathbb{R}^n$ nazywamy otoczkę wypukłą[*12)] dowolnego układu wektorów $u_0, \ldots, u_k \in \mathbb{R}^n$, takiego że wektory $u_1 - u_0, \ldots, u_k - u_0$ są liniowo niezależne. Taki sympleks oznaczamy przez $\operatorname{conv}(u_0, \ldots, u_k)$, liczbę k (która w tej sytuacji jest wyznaczona jednoznacznie) nazywamy *wymiarem sympleksu*, a punkty $u_0, \ldots, u_k$ *wierzchołkami sympleksu.* Zbiór wszystkich wierzchołków sympleksu Δ oznaczamy przez $\operatorname{vert}(\Delta)$.

Sympleks standardowy wymiaru n to zbiór

$$\Delta_n \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^{n+1}\colon\ \sum_{k=0}^{n} x_k = 1\Big\}.$$

Zauważmy, że $\operatorname{vert}(\Delta_n) = \{e_0, \ldots, e_n\}$, gdzie $e_0, \ldots, e_n$ to baza kanoniczna przestrzeni $\mathbb{R}^{n+1}$.

[*12)] Czyli najmniejszy zbiór wypukły zawierający dany układ wektorów.

16.2 Twierdzenie.
Sympleks Δ_n jest homeomorficzny z n-wymiarową kulą euklidesową, czyli ze zbiorem

$$\mathbb{B}_n \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ \|x\|_2 \leqslant 1\}.$$

Dowód Tw. 16.2 pozostawiamy (przynajmniej na tym etapie wykładu) jako (obowiązkowe) ćwiczenie. Czytelnicy zainteresowani precyzyjnym dowodem znajdą go na końcu niniejszego rozdziału.

16.3 Definicja.
Triangulacją sympleksu $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy dowolną skończoną rodzinę $\mathcal{T} = \{T_1, \ldots, T_p\}$ o następujących własnościach:

(tr1) T_j to sympleks tego samego wymiaru co Δ ($j = 1, \ldots, p$);

(tr2) $\Delta = \bigcup_{j=1}^p T_j$;

(tr3) dla dowolnych $j, k \in \{1, \ldots, p\}$, jeśli $T_j = \operatorname{conv}(a_0, \ldots, a_r)$ i $T_k = \operatorname{conv}(b_0, \ldots, b_r)$, to $T_j \cap T_k = \operatorname{conv}(\{a_0, \ldots, a_r\} \cap \{b_0, \ldots, b_r\})$.

Średnicą triangulacji $\mathcal{T}$ nazywamy liczbę

$$\operatorname{diam}(\mathcal{T}) \stackrel{\text{def}}{=} \max(\operatorname{diam}_{d_e}(T_1), \ldots, \operatorname{diam}_{d_e}(T_p)).$$

Podziałem barycentrycznym (poziomu 1) sympleksu $\Delta = \operatorname{conv}(w_0, \ldots, w_r)$ (wymiaru r) nazywamy triangulację $\{T_\sigma\colon\ \sigma \in \Sigma_{r+1}\}$, gdzie Σ_{r+1} to pełna grupa permutacji zbioru $\{0, 1, \ldots, r\}$ oraz dla $\sigma \in \Sigma_{r+1}$, $T_\sigma = \operatorname{conv}(b_0^\sigma, \ldots, b_r^\sigma)$, przy czym $b_k^\sigma = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k w_{\sigma(j)}$.
Podział barycentryczny poziomu $n > 1$ sympleksu Δ określamy indukcyjnie jako sumę mnogościową podziałów barycentrycznych wszystkich sympleksów tworzących podział barycentryczny poziomu $n - 1$.

Aby nie zamęczyć czytelnika, pomijamy dowód tego, że podziały barycentryczne dowolnego poziomu to rzeczywiście triangulacje. Wykażemy natomiast przydatny

16.4 Lemat.
Niech $\mathcal{T}_n$ oznacza podział barycentryczny poziomu n sympleksu $\Delta \subset \mathbb{R}^q$. Wtedy:

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(\mathcal{T}_n) = 0.$$

Dowód. Wystarczy pokazać, że $\operatorname{diam}(\mathcal{T}_1) \leqslant \frac{q}{q+1} \operatorname{diam}(\Delta)$ (średnica względem d_e), gdyż wtedy z indukcji otrzymamy $\operatorname{diam}(\mathcal{T}_{n+1}) \leqslant \frac{q}{q+1} \operatorname{diam}(\mathcal{T}_n)$, a stąd łatwo wynika teza. Przyjmijmy więc, że Δ ma wymiar r oraz że $\Delta = \operatorname{conv}(w_0, \ldots, w_r)$, i ustalmy permutację σ zbioru $\{0, \ldots, r\}$. Odnotujmy, że $r \leqslant q$. Ponieważ metryka euklidesowa pochodzi od normy, zachodzi wzór:

$$\forall F \subset \mathbb{R}^q\colon\ \ \operatorname{diam}(\operatorname{conv}(F)) = \operatorname{diam}(F).$$

(Istotnie, dwa elementy $u, v \in \operatorname{conv}(F)$ możemy przedstawić w postaci $u = \sum_{s=0}^m \alpha_s f_s$ oraz $v = \sum_{t=0}^n \beta_t g_t$, gdzie $m, n \geqslant 0$, $f_0, \ldots, f_m, g_0, \ldots, g_n \in F$ oraz $(\alpha_0, \ldots, \alpha_m) \in \Delta_m$ i $(\beta_0, \ldots, \beta_n) \in \Delta_n$. Wtedy $u = \sum_{s=0}^m \sum_{t=0}^n \alpha_s \beta_t f_s$ i $v = \sum_{s=0}^m \sum_{t=0}^n \alpha_s \beta_t g_t$, zatem $d_e(u, v) = \| \sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^n \alpha_s \beta_t (f_s - g_t)\|_2 \leqslant \sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^n \alpha_s \beta_t \|f_s - g_t\|_2 \leqslant \operatorname{diam}(F)$).
A więc, zgodnie z definicją podziału barycentrycznego, pozostaje uzasadnić, że

$$\operatorname{diam}(\{b_0^\sigma, \ldots, b_r^\sigma\}) \leqslant \frac{q}{q+1} \operatorname{diam}(\{w_0, \ldots, w_r\}) \tag{16:1}$$

(gdzie punkty b_s^σ są takie, jak w Def. 16.3). W tym celu oznaczmy $M \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{diam}(\{w_0, \ldots, w_r\})$ (dla uproszczenia) i ustalmy dowolnie $j,k \in \{0,\dots,r\}$, przy czym $j<k$. Otrzymujemy:

$$b_k^\sigma - b_j^\sigma = \frac{1}{k+1}\sum_{s=0}^{k} w_{\sigma(s)} - \frac{1}{j+1}\sum_{s=0}^{j} w_{\sigma(s)} = \frac{\sum_{s=0}^{k}(j+1)w_{\sigma(s)} - \sum_{s=0}^{j}(k+1)w_{\sigma(s)}}{(k+1)(j+1)}$$
$$= \frac{\sum_{s=j+1}^{k}(j+1)w_{\sigma(s)} - \sum_{s=0}^{j}(k-j)w_{\sigma(s)}}{(k+1)(j+1)}.$$

Zapiszmy teraz sumę $\sum_{s=j+1}^{k}(j+1)w_{\sigma(s)}$ w postaci $\sum_{t=1}^{(j+1)(k-j)} x_t$ (gdzie $x_t \in \{w_{\sigma(s)}\colon\ j<s\leqslant k\}$ oraz wektor $w_{\sigma(s)}$ pojawia się w zestawie $x_1,\dots,x_{(j+1)(k-j)}$ dokładnie $j+1$ razy) i podobnie sumę $\sum_{s=0}^{j}(k-j)w_{\sigma(s)}$ w postaci $\sum_{t=1}^{(j+1)(k-j)} z_t$ (gdzie $z_t \in \{w_{\sigma(s)}\colon\ 0\leqslant s\leqslant k-j\}$ oraz wektor $w_{\sigma(s)}$ pojawia się w zestawie $z_1,\dots,z_{(j+1)(k-j)}$ dokładnie $k-j$ razy). Kontynuując powyższe przekształcenia, dostajemy $b_k^\sigma - b_j^\sigma = \frac{\sum_{s=0}^{(j+1)(k-j)}(x_t-z_t)}{(k+1)(j+1)}$. A stąd:

$$d_e(b_j^\sigma, b_k^\sigma) \leqslant \frac{\sum_{s=0}^{(j+1)(k-j)}\|x_t-z_t\|_2}{(k+1)(j+1)} \leqslant \frac{(j+1)(k-j)M}{(j+1)(k+1)} = \frac{k-j}{k+1}M \leqslant \frac{k}{k+1}M \leqslant \frac{q}{q+1}M,$$

co kończy dowód (16:1). □

Czytelnik zainteresowany dowodem poniższego kombinatorycznego rezultatu może zajrzeć np. do *Topologii ogólnej* R. Engelkinga.

16.5 Twierdzenie. (Lemat Spernera)
Niech $\mathcal{T}$ będzie triangulacją sympleksu standardowego Δ_n i niech $W \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{T\in\mathcal{T}} \operatorname{vert}(T)$. Jeśli funkcja $v\colon W \to \{0,\dots,n\}$ spełnia warunek:

(Sp) $\forall (x_0,\dots,x_n)\in W\colon\ v(x_0,\dots,x_n) \in \{k\in\{0,\dots,n\}\colon\ x_k>0\}$,

to zbiór wszystkich $T\in\mathcal{T}$, takich że funkcja v jest różnowartościowa na zbiorze wierzchołków sympleksu T, ma nieparzystą liczbę elementów (w szczególności, jest to zbiór niepusty).

(*bez dowodu*)

Jesteśmy już gotowi do sformułowania i udowodnienia tytułowego twierdzenia tego rozdziału:

16.6 Twierdzenie. (Twierdzenie Brouwera o punkcie stałym)
Każda funkcja ciągła $f\colon \mathbb{B}_n \to \mathbb{B}_n$ ma punkt stały.

Dowód. Na początku pokażemy, że (każda) funkcja ciągła $u\colon \Delta_n \to \Delta_n$ ma punkt stały. Jest to główna część dowodu. Dla $x=(x_0,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ i $k\in\{0,\dots,n\}$ oznaczamy przez $\pi_k(x)$ współrzędną wektora x o numerze k, czyli $\pi_k(x)=x_k$. Niech także $u_k=\pi_k\circ u\colon \Delta_n\to[0,1]$. Funkcje π_k i u_k są ciągłe.

Dla $m>0$ niech $\mathcal{T}_m$ oznacza podział barycentryczny poziomu m sympleksu Δ_n, a W_m zbiór wierzchołków tej triangulacji (tzn. $W_m=\bigcup_{T\in\mathcal{T}_m}\operatorname{vert}(T)$). Jeśli funkcja u ma punkt stały w zbiorze W_m, dowód tej części jest zakończony. Załóżmy zatem, że u nie ma punktu stałego w zbiorze W_m. Określamy funkcję $v\colon W_m\to\{0,\dots,n\}$ regułą:

$$v(x) \overset{\text{def}}{=} \min\{k\in\{0,\dots,n\}\colon\ u_k(x)<\pi_k(x)\}.$$

Zauważmy, że zbiór występujący po prawej stronie powyższego wzoru jest niepusty. Istotnie: ponieważ $\sum_{k=0}^{n}u_k(x)=1=\sum_{k=0}^{n}\pi_k(x)$ oraz $u(x)\neq x$, pewna współrzędna wektora $u(x)-x$ musi być ujemna. Zauważmy także, że jeśli $k=v(x)$, to $\pi_k(x)>0$. Oznacza to, że funkcja v spełnia warunek (Sp) z Lematu Spernera. Z jego tezy wnosimy, że istnieje sympleks $T_m\in\mathcal{T}_m$, taki że funkcja v jest różnowartościowa na jego wierzchołkach. W takim razie możemy ustawić jego wierzchołki w takiej kolejności $w_0^{(m)},\dots,w_n^{(m)}$, że $v(w_k^{(m)})=k$ dla $k=0,\dots,n$, czyli:

$$u_k(w_k^{(m)}) < \pi_k(w_k^{(m)}). \tag{16:2}$$

Skoro zbiór Δ_n jest zwarty, ciąg $\left(w_0^{(m)}\right)_{m=1}^{\infty}$ zawiera podciąg zbieżny, powiedzmy $w_0^{(\nu_m)}\to z\in\Delta_n$ $(m\to\infty)$. Z Lem. 16.4 wiemy, że $\lim_{m\to\infty}\|w_k^{(\nu_m)}-w_0^{(\nu_m)}\|_2=0$, więc z nierówności trójkąta wnioskujemy, że $\lim_{m\to\infty}w_k^{(\nu_m)}=z$ dla $k=0,\dots,n$. Stosując (16:2) do dobranego podciągu i przechodząc z m do ∞, dzięki ciągłości funkcji π_k i u_k

otrzymujemy, że $u_k(z) \leqslant \pi_k(z)$ dla $k = 0, \ldots, n$. Oznacza to, że wszystkie współrzędne wektora $z - u(z)$ są nieujemne. Ale $z, u(z) \in \Delta_n$, co implikuje, że suma współrzędnych wektora $z - u(z)$ jest równa 0. Tym samym $u(z) = z$, co kończy dowód pierwszej części dowodu.

Przejdźmy teraz do dowodu twierdzenia. Niech $H \colon \Delta_n \to \mathbb{B}_n$ będzie homeomorfizmem, którego istnienie zapewnia nam Tw. 16.2. Z pierwszej części dowodu wnioskujemy, że funkcja $u \stackrel{\text{def}}{=} H^{-1} \circ f \circ H \colon \Delta_n \to \Delta_n$ ma punkt stały, powiedzmy z. Wtedy $H(z) = H(u(z)) = f(H(z))$, czyli $H(z)$ jest punktem stałym odwzorowania f. □

16.7 Definicja.
Retrakcją nazywamy dowolną funkcję ciągłą $r \colon X \to A$, gdzie A jest podprzestrzenią przestrzeni topologicznej X, taką że $r(a) = a$ dla wszelkich $a \in A$. Zbiór $B \subset X$ nazywamy *retraktem* przestrzeni X, gdy istnieje retrakcja z X na B.

16.8 Wniosek. (Twierdzenie Brouwera o nieistnieniu retrakcji)
Sfera $\mathbb{S}^{n-1} = \partial \mathbb{B}_n$ nie jest retraktem kuli $\mathbb{B}_n$.

Dowód. Jeśliby odwzorowanie $r \colon \mathbb{B}_n \to \mathbb{S}^{n-1}$ było retrakcją, to funkcja $\mathbb{B}_n \ni x \mapsto -r(x) \in \mathbb{B}_n$ nie miałaby punktu stałego. (Istotnie, jeśli $x = -r(x)$, to $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, a wtedy $r(x) = x$, czyli $x = -x$ i sprzeczność). □

16.9 ***Uwaga.***
Powyższy dowód pokazuje, że z twierdzenia Brouwera o punkcie stałym wynika nieistnienie retrakcji z kuli na jej brzeg. Okazuje się, że oba te twierdzenia są w istocie równoważne. Mianowicie, jeśliby istniała funkcja ciągła $u \colon \mathbb{B}_n \to \mathbb{B}_n$, która nie miałaby punktu stałego, to można by było skonstruować retrakcję $r \colon \mathbb{B}_n \to \mathbb{S}^{n-1}$, określając $r(x)$ jako punkt przecięcia sfery $\mathbb{S}^{n-1}$ z otwartą półprostą $\{(1-t)u(x) + tx \colon\ t > 0\}$. Jedyna trudność to ciągłość tak określonej funkcji. Jednakże, korzystając z podstawowych własności iloczynu skalarnego, można pokazać, że tak określona funkcja miałaby wzór:

$$r(x) = u(x) + \frac{\langle u(x), u(x) - x \rangle + \sqrt{\langle u(x), u(x) - x \rangle^2 + \|u(x) - x\|_2^2 (1 - \|u(x)\|_2^2)}}{\|u(x) - x\|_2^2} (x - u(x)).$$

Szczegóły dowodowe pozostawiamy czytelnikom zainteresowanym tym zagadnieniem.

Podamy teraz informacyjnie (a więc bez dowodu) kilka ważnych twierdzeń nt. topologii euklidesowych. Ich dowody są znacznie trudniejsze niż powyżej zaprezentowany dowód twierdzenia Brouwera o punkcie stałym. Tylko pierwszego z nich użyjemy w dalszej części tego skryptu.

16.10 Twierdzenie. (Twierdzenie Brouwera o zachowaniu obszaru)
Podzbiór przestrzeni $\mathbb{R}^n$ homeomorficzny ze zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym.

(*bez dowodu*)

16.11 Twierdzenie. (Twierdzenie Borsuka-Ulama o antypodach)
Dla dowolnej funkcji ciągłej $f \colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ istnieje punkt $x \in \mathbb{S}^n$, taki że $f(-x) = f(x)$.

(*bez dowodu*)

16.12 Twierdzenie. (Twierdzenie Jordana o rozcinaniu)
Jeśli $K \subset \mathbb{R}^n$ (przy czym $n > 1$) jest zbiorem homeomorficznym ze sferą $\mathbb{S}^{n-1}$, to zbiór $\mathbb{R}^n \setminus K$ ma dwie składowe, z których jedna jest ograniczona, a druga nieograniczona. Ponadto, zbiór K jest brzegiem (w $\mathbb{R}^n$) każdej z tych składowych.

(*bez dowodu*)

16.13 ***Uwaga.***
Przy założeniach i oznaczeniach powyższego twierdzenia, przez $\operatorname{ins} K$ oraz $\operatorname{ext} K$ oznacza się, odpowiednio, ograniczoną i nieograniczoną składową przestrzeni $\mathbb{R}^n \setminus K$.

16.14 Twierdzenie. (Twierdzenie Schönfliesa)
Każde zanurzenie topologiczne $h\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ przedłuża się do homeomorfizmu $H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

(*bez dowodu*)

16.15 ***Uwaga.***
Mając na uwadze twierdzenia Jordana i Schönfliesa, rodzi się naturalne pytanie, czy drugie z nich jest prawdziwe w wyższych wymiarach. Negatywnej odpowiedzi na to pytanie udzielił Alexander, podając przykład tzw. *rogatej sfery* (*Alexandera*), zob. `https://en.wikipedia.org/wiki/alexander_horned_sphere` oraz `https://www.youtube.com/watch?v=Pe2mnrLUYFU`. Jest to taki podzbiór S przestrzeni $\mathbb{R}^3$ homeomorficzny z $\mathbb{S}^2$, dla którego zbiór $\operatorname{ext} S$ nie jest homeomorficzny z $\operatorname{ext} \mathbb{S}^2$.

Dla kompletności wykładu, rozdział kończymy brakującym dowodem.

Dowód Tw. 16.2. Niech

$$s\colon \mathbb{R}^{n+1} \ni (x_0, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{k=0}^{n} x_k \in \mathbb{R}$$

oraz $E \overset{\text{def}}{=} \ker(s)$. Ponieważ $\dim(E) = n$, a rzeczywiste przestrzenie liniowe z iloczynem skalarnym tego samego skończonego wymiaru są liniowo izometryczne, wnosimy, że przestrzenie metryczne $(\mathbb{R}^n, d_e)$ oraz (E, d_e) są izometryczne i tym samym kula $\mathbb{B}_n$ jest homeomorficzna z $B \overset{\text{def}}{=} E \cap \mathbb{B}_{n+1}$. Wystarczy więc wykazać, że przestrzenie Δ_n oraz B są homeomorficzne. W tym celu oznaczmy $e \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{n+1}(1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ oraz $S \overset{\text{def}}{=} \partial_E(B)$ i zauważmy, że $e \in \Delta_n$ oraz $S = \{x \in E\colon\ \|x\|_2 = 1\}$. Niech $\varphi\colon \mathbb{R} \to (0, \infty]$ będzie funkcją daną wzorem:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{(n+1)|t|} & \text{gdy } t < 0 \\ \infty & \text{gdy } t \geqslant 0 \end{cases}.$$

Odnotujmy, że funkcja φ jest ciągła. Stąd także funkcja

$$r\colon S \ni (x_0, \ldots, x_n) \mapsto \min(\varphi(x_0), \varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)) \in (0, \infty]$$

jest ciągła. Ponadto, ma ona wartości rzeczywiste[*13)], czyli $r\colon S \to (0, \infty)$. Wprost z definicji funkcji φ i r wynika, że:

$$r(x_0, \ldots, x_n) = \max\Big\{ s > 0 \big|\quad \forall j \in \{0, 1, \ldots, n\}\colon\ \frac{1}{n+1} + s x_j \geqslant 0 \Big\}. \tag{16:3}$$

Powyższy wzór oznacza, że w szczególności $e + r(x)x \in \Delta_n$ dla dowolnego punktu $x \in S$. Na koniec niech $H\colon B \to \Delta_n$ będzie funkcją określoną następująco: $H(0) = e$ oraz $H(x) = e + r(x/\|x\|_2)x$ dla $x \neq 0$. Ponieważ dla niezerowego wektora x, $H(x) = (1 - \|x\|_2)e + \|x\|_2(e + r(z)z)$, gdzie $z = x/\|x\|_2$, z wypukłości zbioru Δ_n wynika, że $H(x) \in \Delta_n$. Bezpośrednio ze wzoru definiującego funkcję H otrzymujemy ciągłość tej funkcji poza zerem. Aby sprawdzić, że odwzorowanie H jest ciągłe także w zerze, załóżmy, że punkty $x^{(k)} \in B \setminus \{0\}$ dążą do 0. Z ograniczoności funkcji r (jako ciągłej na zbiorze zwartym) wynika, że $r(x^{(k)}/\|x^{(k)}\|_2)x^{(k)} \to 0$ przy $k \to \infty$ i tym samym $\lim_{k\to\infty} H(x^{(k)}) = e = H(0)$. Pozostaje więc sprawdzić, że funkcja H jest bijekcją (gdyż ma dziedzinę zwartą). W tym celu załóżmy, że punkty $x, y \in B$ są takie, że $H(x) = H(y)$ oraz $x \neq 0$. Wtedy $y \neq 0$ oraz $y = \frac{r(x/\|x\|_2)}{r(y/\|y\|_2)}x$, a stąd $\frac{y}{\|y\|_2} = \frac{x}{\|x\|_2}$ i w konsekwencji $y = x$. To dowodzi, że H jest iniekcją.

Na koniec niech $w \in \Delta_n \setminus \{e\}$. Wtedy $w - e \in E$ i tym samym punkt $u \overset{\text{def}}{=} \frac{w-e}{\|w-e\|_2}$ należy do S. Zauważmy, że dla $s \overset{\text{def}}{=} \|w - e\|_2 > 0$ mamy $e + su = w \in \Delta_n$, więc $s \leqslant r(u)$ (dzięki (16:3)). W takim razie punkt $x \overset{\text{def}}{=} \frac{s}{r(u)}u$ należy do B. Ponadto, $H(x) = e + su = w$, czyli H jest suriekcją. $\square$

[*13)] Gdyż: $x \in S \implies x \in E \setminus \{0\} \implies x_j < 0$ dla pewnego indeksu $j = 0, 1, \ldots, n$.

17 Grupa podstawowa i nakrycia

17.1 Definicja.
Homotopia między przestrzeniami topologicznymi X i Y to dowolna funkcja ciągła $H\colon X\times[0,1]\to Y$. Dla $t\in[0,1]$ piszemy wtedy $H_t\stackrel{\text{def}}{=}H(\cdot,t)\colon X\to Y$ i mówimy, że H jest homotopią od H_0 do H_1. Zamiast „H” można także pisać $\{H_t\}_{t\in[0,1]}$ na oznaczenie homotopii.

Dwie funkcje ciągłe $f,g\colon X\to Y$ są *homotopijne*, gdy istnieje homotopia H między X a Y, taka że $H_0=f$ i $H_1=g$. Piszemy wtedy $f\stackrel{H}{\simeq}g$. Stwierdzenie, że f i g są homotopijne, zapisujemy symbolicznie $f\simeq g$.

Ogólniej, jeśli $\mathcal{F}$ jest dowolną rodzią funkcji ciągłych z X w Y, mówimy, że funkcje $f,g\in\mathcal{F}$ są *homotopijne w* $\mathcal{F}$, jeśli istnieje homotopia H, taka że $f\stackrel{H}{\simeq}g$ oraz $H_t\in\mathcal{F}$ dla wszelkich $t\in[0,1]$. Piszemy wtedy $f\underset{\mathcal{F}}{\stackrel{H}{\simeq}}g$. Stwierdzenie, że f i g są homotopijne w $\mathcal{F}$, odnotowujemy $f\underset{\mathcal{F}}{\simeq}g$. Tym samym, dla $f,g\colon X\to Y$:

$$f\simeq g\iff f\underset{C(X,Y)}{\simeq}g.$$

Homotopia przeciwna do homotopii H to homotopia $\ominus H$ określona regułą: $(\ominus H)_t\stackrel{\text{def}}{=}H_{1-t}$. Jeśli homotopie H i G są takie, że $H_1=G_0$, ich *złączeniem* nazywamy homotopię $H\oplus G$ określoną następująco:

$$(H\oplus G)_t\stackrel{\text{def}}{=}\begin{cases}H_{2t} & \text{gdy } t\in[0,\frac{1}{2}]\\ G_{2t-1} & \text{gdy } t\in[\frac{1}{2},1]\end{cases}.$$

17.2 Obserwacja.
Dla dowolnej rodziny $\mathcal{F}$ ciągłych odwzorowań między przestrzeniami topologicznymi X i Y relacja „$\underset{\mathcal{F}}{\simeq}$” jest relacją równoważności na zbiorze $\mathcal{F}$.

Dowód. Dla $f,g,h\in\mathcal{F}$:

- $f\underset{\mathcal{F}}{\stackrel{F}{\simeq}}f$, gdzie $F\colon X\times[0,1]\ni(x,t)\mapsto f(x)\in Y$;
- jeśli $f\underset{\mathcal{F}}{\stackrel{H}{\simeq}}g$, to $g\underset{\mathcal{F}}{\stackrel{\ominus H}{\simeq}}f$;
- jeśli $f\underset{\mathcal{F}}{\stackrel{H}{\simeq}}g$ i $g\underset{\mathcal{F}}{\stackrel{G}{\simeq}}h$, to $f\underset{\mathcal{F}}{\stackrel{H\oplus G}{\simeq}}h$.

□

17.3 Definicja.
Dla dwóch punktów a i b przestrzeni topologicznej X niech

$$\Sigma_1(X,a,b)\stackrel{\text{def}}{=}\{u\in C([0,1],X)\colon\ u(0)=a,\ u(1)=b\}$$

oraz $\Sigma_1(X,a)\stackrel{\text{def}}{=}\Sigma_1(X,a,a)$. Elementy zbioru $\Sigma_1(X,a)$ nazywamy *pętlami* w punkcie a. Relację „$\underset{\Sigma_1(X,a,b)}{\simeq}$” (na zbiorze $\Sigma_1(X,a,b)$) będziemy oznaczać „${}_a{\simeq}_b$”. Niech $\mathfrak{e}_a\in\Sigma_1(X,a)$ oznacza drogę stale równą a. Dla $\alpha\in\Sigma_1(X,a,b)$ oraz $\beta\in\Sigma_1(X,b,c)$ (gdzie $c\in X$) określamy:

- *krzywą przeciwną* do α jako $\ominus\alpha\in\Sigma_1(X,b,a)$, $(\ominus\alpha)(t)\stackrel{\text{def}}{=}\alpha(1-t)$;
- *złączenie* krzywych α i β jako $\alpha\oplus\beta\in\Sigma_1(X,a,c)$,

$$(\alpha\oplus\beta)(t)\stackrel{\text{def}}{=}\begin{cases}\alpha(2t) & \text{gdy } t\in[0,\frac{1}{2}]\\ \beta(2t-1) & \text{gdy } t\in[\frac{1}{2},1]\end{cases}.$$

Pętlę $\alpha\in\Sigma_1(X,a)$ nazywamy *trywialną* lub *ściągalną*, gdy $\alpha\ {}_a{\simeq}_a\ \mathfrak{e}_a$.

Wykażemy teraz podstawowe, ale ważne własności zdefiniowanych przed chwilą operacji.

17.4 Obserwacja.
Niech $\alpha, \alpha' \in \Sigma_1(X,a,b)$, $\beta, \beta' \in \Sigma_1(X,b,c)$, $\gamma \in \Sigma_1(X,c,d)$, gdzie a,b,c i d to dowolne punkty przestrzeni topologicznej X. Wtedy:

(a) *jeśli $\alpha \ {}_a{\simeq}_b\ \alpha'$ i $\beta \ {}_b{\simeq}_c\ \beta'$, to $\alpha \oplus \beta \ {}_a{\simeq}_c\ \alpha' \oplus \beta'$;*

(b) $(\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma \ {}_a{\simeq}_d\ \alpha \oplus (\beta \oplus \gamma)$;

(c) $\mathfrak{e}_a \oplus \alpha \ {}_a{\simeq}_b\ \alpha \ {}_a{\simeq}_b\ \alpha \oplus \mathfrak{e}_b$;

(d) $\alpha \oplus (\ominus\alpha) \ {}_a{\simeq}_a\ \mathfrak{e}_a$ *oraz* $(\ominus\alpha) \oplus \alpha \ {}_b{\simeq}_b\ \mathfrak{e}_b$.

Dowód. Dla każdej z powyższych relacji homotopijności podamy jawny (konkretny) wzór na homotopię $H\colon [0,1] \times [0,1] \to X$.

(a): Niech H i H' będą takimi homotopiami, że $\alpha \ {}_a{\overset{H}{\simeq}}_b\ \alpha'$ oraz $\beta \ {}_b{\overset{H'}{\simeq}}_c\ \beta'$. Wtedy wzór $H''_t \overset{\text{def}}{=} H_t \oplus H'_t$ poprawnie określa homotopię H'', taką że $\alpha \oplus \beta \ {}_a{\overset{H''}{\simeq}}_c\ \alpha' \oplus \beta'$.

(b): Zauważmy, że:

$$((\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma)(t) = \begin{cases} \alpha(4t) & \text{gdy } t \in [0, \frac14] \\ \beta(4t-1) & \text{gdy } t \in [\frac14, \frac12] \\ \gamma(2t-1) & \text{gdy } t \in [\frac12, 1] \end{cases} \quad \text{oraz} \quad (\alpha \oplus (\beta \oplus \gamma))(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{gdy } t \in [0, \frac12] \\ \beta(4t-2) & \text{gdy } t \in [\frac12, \frac34] \\ \gamma(4t-3) & \text{gdy } t \in [\frac34, 1] \end{cases}.$$

Niech

$$H(x,t) = \begin{cases} \alpha(\frac{4x}{t+1}) & \text{gdy } 0 \leqslant x \leqslant \frac{t+1}{4} \\ \beta(4x-t-1) & \text{gdy } \frac{t+1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{t+2}{4} \\ \gamma(\frac{4x-t-2}{2-t}) & \text{gdy } \frac{t+2}{4} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}.$$

Wtedy $(\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma \ {}_a{\overset{H}{\simeq}}_d\ \alpha \oplus (\beta \oplus \gamma)$.

(c): Tym razem niech

$$H_\ell(x,t) = \begin{cases} a & \text{gdy } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1-t}{2} \\ \alpha(\frac{2x+t-1}{t+1}) & \text{gdy } \frac{1-t}{2} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad H_r(x,t) = \begin{cases} \alpha(\frac{2x}{t+1}) & \text{gdy } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1+t}{2} \\ b & \text{gdy } \frac{1+t}{2} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}.$$

Wtedy $\mathfrak{e}_a \oplus \alpha \ {}_a{\overset{H_\ell}{\simeq}}_b\ \alpha$ oraz $\alpha \oplus \mathfrak{e}_b \ {}_a{\overset{H_r}{\simeq}}_b\ \alpha$.

(d): Dla uproszczenia przyjmijmy $\beta \overset{\text{def}}{=} \ominus\alpha$. Niech

$$H(x,t) = \begin{cases} a & \text{gdy } 0 \leqslant x \leqslant \frac{t}{2} \\ \alpha(2x-t) & \text{gdy } \frac{t}{2} \leqslant x \leqslant \frac12 \\ \beta(2x+t-1) & \text{gdy } \frac12 \leqslant x \leqslant \frac{2-t}{2} \\ a & \text{gdy } \frac{2-t}{2} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}.$$

Wtedy $\alpha \oplus \beta \ {}_a{\overset{H}{\simeq}}_a\ \mathfrak{e}_a$. Z uwagi na to, że $\ominus\beta = \alpha$, z wykazanej właśnie relacji wynika, że $\beta \oplus \alpha \ {}_b{\simeq}_b\ \mathfrak{e}_b$. □

17.5 Definicja.
Dla ustalonego punktu a przestrzeni X niech

$$\pi_1(X,a) \overset{\text{def}}{=} \Sigma_1(X,a) \ / \ {}_a{\simeq}_a,$$

wraz z działaniem „$*$” określonym regułą:

$$[\alpha]_{a\simeq a} * [\beta]_{a\simeq a} \overset{\text{def}}{=} [\alpha \oplus \beta]_{a\simeq a} \qquad (\alpha, \beta \in \Sigma_1(X,a)).$$

Parę $(\pi_1(X,a), *)$ nazywamy *grupą podstawową* przestrzeni topologicznej X *w punkcie* a. Dla uproszczenia, będziemy pisać $[\alpha]$ zamiast $[\alpha]_{a\simeq a}$, gdy z kontekstu będzie jasne, jaki punkt jest wyróżniony.

17.6 Twierdzenie.
$(\pi_1(X,a),*)$ to grupa. Jej elementem neutralnym jest $e = [\mathfrak{e}_a]$, a elementem odwrotnym do $[\alpha]$ (dla $\alpha \in \Sigma_1(X,a)$) jest $[\ominus\alpha]$.

Dowód. Przede wszystkim, działanie „$*$” jest poprawnie określone dzięki własności (a) z Obs. 17.4. Jest ono łączne dzięki własności (b), natomiast pozostała część tezy to punkty (c) i (d) tamże. □

17.7 Twierdzenie.
Niech $\gamma\colon [0,1] \to X$ będzie drogą od a do b. Wtedy odwzorowanie

$$\Phi_\gamma\colon \pi_1(X,a) \ni [\alpha]_{a\simeq a} \mapsto [(\ominus\gamma) \oplus (\alpha \oplus \gamma)]_{b\simeq b} \in \pi_1(X,b)$$

jest poprawnie określonym izomorfizmem grup.

Dowód. Dla uproszczenia, oznaczmy przez δ krzywą przeciwną do γ. Poprawna określoność odwzorowania Φ_γ wynika z własności (a) Obs. 17.4. Ponadto, dla $\alpha, \beta \in \Sigma_1(X,a)$ zachodzą równości:[*14)]

$$\begin{aligned}\Phi_\gamma([\alpha]_{a\simeq a} * [\beta]_{a\simeq a}) &= \Phi_\gamma([\alpha \oplus \beta]_{a\simeq a}) = [\delta \oplus ((\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma]_{b\simeq b} \overset{(b)}{=} [(\delta \oplus \alpha) \oplus (\beta \oplus \gamma)]_{b\simeq b} \\ &\overset{(c)}{=} [(\delta \oplus (\alpha \oplus \mathfrak{e}_a)) \oplus (\beta \oplus \gamma)]_{b\simeq b} \overset{(d)}{=} [(\delta \oplus (\alpha \oplus (\gamma \oplus \delta)) \oplus (\beta \oplus \gamma)]_{b\simeq b} \overset{(c)}{=} [(\delta \oplus (\alpha \oplus \gamma)) \oplus (\delta \oplus (\beta \oplus \gamma))]_{b\simeq b} \\ &= [\delta \oplus (\alpha \oplus \gamma)]_{b\simeq b} * [\delta \oplus (\beta \oplus \gamma)]_{b\simeq b} = \Phi_\gamma([\alpha]_{a\simeq a}) * \Phi_\gamma([\beta]_{a\simeq a}),\end{aligned}$$

czyli Φ_γ to homomorfizm grup. Analogicznie mamy określony homomorfizm $\Phi_\delta\colon \pi_1(X,b) \to \pi_1(X,a)$. Aby zakończyć dowód, wystarczy pokazać, że złożenie tych dwóch homomorfizmów w dowolnej kolejności jest identycznością. Z symetrii założeń, możemy się ograniczyć do, powiedzmy, $\Phi_\gamma \circ \Phi_\delta$. Dla $\beta \in \Sigma_1(X,b)$ otrzymujemy:[*14)]

$$\begin{aligned}(\Phi_\gamma \circ \Phi_\delta)([\beta]_{b\simeq b}) &= \Phi_\gamma([\gamma \oplus (\beta \oplus \delta)]_{a\simeq a}) = [\delta \oplus ((\gamma \oplus (\beta \oplus \delta)) \oplus \gamma)]_{b\simeq b}] \overset{(b)}{=} [(\delta \oplus \gamma) \oplus (\beta \oplus (\delta \oplus \gamma))]_{b\simeq b} \\ &\overset{(d)}{=} [\mathfrak{e}_b \oplus (\beta \oplus \mathfrak{e}_b)]_{b\simeq b} \overset{(c)}{=} [\beta]_{b\simeq b},\end{aligned}$$

co kończy dowód. □

17.8 Definicja.
Grupą podstawową niepustej drogowo spójnej przestrzeni topologicznej X nazywamy każdą grupę izomorficzną z $\pi_1(X,a)$, gdzie a jest dowolnie wybranym punktem przestrzeni X. Tw. 17.7 zapewnia, że definicja ta jest poprawna.
Notacja: $\pi_1(X)$ (dla drogowo spójnej przestrzeni X).
Konwencja: $\pi_1(\varnothing)$ to grupa trywialna (czyli przestrzeń pusta jest jednospójna).

17.9 Obserwacja.
Niech a, b będą dwoma punktami przestrzeni X.

(a) *Jeśli $H\colon [0,1]\times[0,1] \to X$ jest homotopią od $\alpha \in \Sigma_1(X,a)$ do $\beta \in \Sigma_1(X,a)$, to $[\alpha]*[\tau] = [\sigma]*[\beta]$ (w $\pi_1(X,a)$), gdzie $\sigma, \tau \in \Sigma_1(X,a)$ są dane wzorami: $\sigma(t) \overset{\text{def}}{=} H(0,t)$ oraz $\tau(t) \overset{\text{def}}{=} H(1,t)$.*

(b) *$\pi_1(X,a) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej pętli $\alpha \in \Sigma_1(X,a)$ istnieje homotopia H od α do $\mathfrak{e}_a$, taka że $H(0,t) = H(1,t)$ dla wszelkich $t \in [0,1]$.*

(c) *Jeśli $\pi_1(X,a) = 0$ oraz $\alpha, \beta \in \Sigma_1(X,a,b)$, to $\alpha \;{}_a{\simeq}_b\; \beta$.*

[*14)] Poniżej, przy niektórych przejściach, nad znakiem równości podajemy etykietę własności z Obs. 17.4, na którą się powołujemy. W niemal każdym przejściu (ponadto) stosujemy własność (a) podaną tamże.

Dowód. (a): Bez trudu sprawdzamy, że $\sigma, \tau \in \Sigma_1(X, a)$. Niech $S, T\colon [0,1] \times [0,1] \ni X$ będą dane wzorami: $S(x,t) \overset{\text{def}}{=} \sigma(xt)$ oraz $T(x,t) \overset{\text{def}}{=} \tau(xt)$. Są to homotopie, takie że $S_t(0) = T_t(0) = a$, $S_t(1) = \sigma(t) = H_t(0)$ oraz $T_t(1) = \tau(t) = H_t(1)$. Oznacza to, że następujący wzór poprawnie określa homotopię $W\colon W_t \overset{\text{def}}{=} (S_t \oplus H_t) \oplus (\ominus T_t)$. Zauważmy, że $W_0 = (\mathfrak{e}_a \oplus \alpha) \oplus \tau$ i $W_1 = (\sigma \oplus \beta) \oplus \mathfrak{e}_a$ oraz $W_t(0) = a = W_t(1)$, czyli $W_0 \;{}_a{\simeq}_a\; W_1$. Przejście do klas abstrakcji daje tezę.

(b): Konieczność istnienia takiej homotopii jest natychmiastowa. Odwrotnie, jęsli H jest homotopią o własnościach opisanych w punkcie (b), oraz $\sigma(t) = H(0,t)$, to z punktu (a) mamy: $[\alpha] * [\sigma] = [\sigma] * [\mathfrak{e}_a]$, czyli $[\alpha] = [\mathfrak{e}_a]$.

(c): Stosujemy własności wymienione w Obs. 17.4:

$$\alpha \;{}_a{\simeq}_b\; \alpha \oplus \mathfrak{e}_b \;{}_a{\simeq}_b\; \alpha \oplus ((\ominus\beta) \oplus \beta) \;{}_a{\simeq}_b\; (\alpha \oplus (\ominus\beta)) \oplus \beta \;{}_a\overset{(\star)}{\simeq}_b\; \mathfrak{e}_a \oplus \beta \;{}_a{\simeq}_b\; \beta,$$

gdzie przejście $(\star)$ bierze się stąd, że $\alpha \oplus (\ominus\beta) \in \Sigma_1(X, a)$ oraz $\pi_1(X, a) = 0$. □

17.10 Definicja.
Mówimy, że przestrzeń topologiczna X jest

- *ściągalna*, gdy istnieje punkt $c \in X$[*15)] oraz homotopia $H\colon X \times [0,1] \to X$, taka że $H_1 = \mathrm{id}_X$ oraz $H_0 \equiv c$;
- *prawidłowa*, gdy jest drogowo spójna, lokalnie drogowo spójna i spełnia następujący warunek: każdy punkt przestrzeni X ma otoczenie U, takie że każda pętla w tym punkcie, której obraz zawiera się w U, jest trywialna (jako pętla w całej przestrzeni);
- *jednospójna*, gdy jest drogowo spójna, lokalnie drogowo spójna oraz gdy jej grupa podstawowa jest trywialna (tzn. $\pi_1(X) = 0$).[*16)]

17.11 Twierdzenie.
Niech X będzie przestrzenią ściągalną.

(A) *Dowolne dwie funkcje ciągłe $f, g\colon X \to Y$ o wartościach w przestrzeni drogowo spójnej Y są homotopijne.*

(B) *Dowolne dwie funkcje ciągłe $u, v\colon Z \to X$ są homotopijne.*

(C) *X jest przestrzenią drogowo spójną oraz $\pi_1(X) = 0$.*

Dowód. Niech $H\colon X \times [0,1] \to X$ będzie taką homotopią, że $H_1 = \mathrm{id}_X$ oraz $H_0 \equiv c \in X$.

(A): Funkcja $F \overset{\text{def}}{=} f \circ H\colon X \times [0,1] \to Y$ jest homotopią, taką że $F_0 \equiv f(c)$ oraz $F_1 = f$. Tym samym $f \simeq f(c)$. Analogicznie, $g(c) \simeq g$. Ponieważ przestrzeń Y jest drogowo spójna, istnieje droga $\gamma\colon [0,1] \to Y$ od $f(c)$ do $g(c)$. Wtedy funkcja $X \times [0,1] \ni (x,t) \mapsto \gamma(t) \in Y$ jest homotopią od funkcji (z X w Y) stale równej $f(c)$ do stale równej $g(c)$. Zatem te dwie funkcje są homotopijne. W konsekwencji, $f \simeq g$, dzięki Obs. 17.2.

(B): Funkcja $Z \times [0,1] \ni (z,t) \mapsto H(u(z),t) \in X$ jest homotopią od funkcji (z Z w X) stale równej c do u, czyli $u \simeq c$. Stąd także $v \simeq c$ i ponowne użycie Obs. 17.2 daje tezę.

(C): Dla dowolnego punktu $x \in X$ funkcja $[0,1] \ni t \mapsto H(x,t) \in X$ jest drogą od c do x, co pokazuje, że przestrzeń jest drogowo spójna. Aby zakończyć dowód, wystarczy pokazać, że grupa $\pi_1(X, c)$ jest trywialna. A jest tak, ponieważ dla dowolnej pętli $\alpha \in \Sigma_1(X, c)$ funkcja $W\colon [0,1] \times [0,1] \ni (x,t) \mapsto H(\alpha(x),t) \in X$ jest homotopią od $\mathfrak{e}_c$ do α, taką że $W_t(0) = W_t(1)$ dla wszelkich $t \in [0,1]$. Zastosowanie punktu (b) Obs. 17.9 kończy dowód. □

17.12 Przykład.
Jak nietrudno się przekonać, niepusty wypukły podzbiór przestrzeni unormowanej jest ściągalną przestrzenią prawidłową. Isotnie, jeśli W jest niepustym i wypukłym zbiorem w przestrzeni unormowanej E, a $c \in W$ jest dowolnym punktem, to funkcja $H_c\colon W \times [0,1] \ni (w,t) \mapsto (1-t)w + tc \in W$ jest homotopią od $\mathfrak{e}_c$ do id_W (czyli W jest przestrzenią ściągalną), taką że $H_c((B_E(c,r) \cap W) \times [0,1]) \subset B_E(c,r) \cap W$ dla dowolnego promienia $r > 0$. Tym samym punkt c ma bazę otoczeń otwartych złożoną ze zbiorów ściągalnych, co implikuje, że W jest przestrzenią prawidłową.

[*15)] Pamiętajmy, że przestrzeń ściągalna jest niepusta.
[*16)] Wielu autorów w definicji jednospójności pomija lokalną drogową spójność. Warto więc zapamiętać, że w niniejszym skrypcie przestrzenie jednospójne są prawidłowe.

Wprowadzimy teraz i zbadamy pojęcie, które jest ważnym narzędziem do wyznaczania grup podstawowych przestrzeni prawidłowych.

17.13 Definicja.
Ciągłe odwzorowanie $p\colon Z \to X$ nazywamy *nakryciem*, jeśli jest to suriekcja o następującej własności:

(cov) Każdy punkt $x \in X$ ma otwarte otoczenie V, takie że zbiór $p^{-1}(V)$ można przedstawić w postaci

$$p^{-1}(V) = \bigcup_{s\in S} U_s, \tag{17:1}$$

gdzie zbiory U_s są otwarte i parami rozłączne oraz $p|_{U_s}$ jest homeomorfizmem między U_s a V.

(Powyższy zbiór indeksów S może zależeć od punktu x). W powyższej sytuacji zbiór V nazywamy *otoczeniem kanonicznym*, a wzór (17:1) *rozkładem kanonicznym dla* V. Z i X to, odpowiednio, przestrzeń *nakrywająca* i *nakrywana*.

Nakryciem przestrzeni topologicznej X nazywamy dowolną parę (Z, p), gdzie $p\colon Z \to X$ jest nakryciem. Nakrycie (Z, p) jest *uniwersalne*, gdy przestrzeń Z jest jednospójna.

17.14 Przykład.
Niech $\mathbb{T} \overset{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| = 1\}$. Jak nietrudno się przekonać, przestrzeń $\mathbb{T}$ jest prawidłowa, a funkcja

$$p\colon \mathbb{R} \ni x \mapsto e^{ix} \in \mathbb{T}$$

jest nakryciem. Istotnie, wiemy, że jest to suriekcja ciągła o okresie 2π. Ponadto, jeśli $z = p(x)$, to $p^{-1}(\mathbb{T}\setminus\{-z\}) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} U_k$, gdzie $U_k \overset{\text{def}}{=} (x + 2\pi k - \pi, x + 2\pi k + \pi)$, oraz $p|_{U_k}$ jest homeomorfizmem z U_k na $\mathbb{T} \setminus \{-z\}$. Szczegóły tego prostego przykładu pozostawiamy czytelnikom jako (obowiązkowe) ćwiczenie.

Ponieważ przestrzeń $\mathbb{R}$ jest jednospójna, para $(\mathbb{R}, p)$ jest nakryciem uniwersalnym okręgu $\mathbb{T}$.

17.15 Definicja.
Gdy $p\colon Z \to X$ jest nakryciem, a $u\colon W \to Z$ funkcją ciągłą, funkcję u nazywamy *podniesieniem funkcji* $p \circ u$.

17.16 Twierdzenie. (Twierdzenie o jednoznaczności podniesienia)
Niech $p\colon Z \to X$ będzie nakryciem, Ω przestrzenią spójną, a $u, v\colon \Omega \to Z$ funkcjami ciągłymi, takimi że $p\circ u = p\circ v$. Wtedy albo $u = v$, albo $u(\omega) \neq v(\omega)$ dla wszelkich $\omega \in \Omega$.

Dowód. Załóżmy, że zbiór $F \overset{\text{def}}{=} \{\omega \in \Omega\colon\ u(\omega) = v(\omega)\}$ jest niepusty. Aby wykazać, że $F = \Omega$, wystarczy sprawdzić, że zbiór F jest otwarto-domknięty w Ω.

Ustalmy punkt $a \in F$. Niech V będzie otoczeniem kanonicznym punktu $p(u(a)) = p(v(a))$, a $p^{-1}(V) = \bigcup_{s\in S} U_s$ jego rozkładem kanonicznym. Dobierzmy taki indeks $t \in S$, że $(v(a) =)\ u(a) \in U_t$. Wtedy zbiór $D \overset{\text{def}}{=} u^{-1}(U_t)\cap v^{-1}(U_t)$ jest otoczeniem punktu a, takim że $u(D) \cup v(D) \subset U_t$. Skoro $p|_{U_t}$ jest iniekcją oraz $p|_{U_t} \circ u|_D = p|_{U_t} \circ v|_D$, zachodzi $D \subset F$ — czyli zbiór F jest otwarty.

Niech teraz punkt a należy do domknięcia zbioru F w Ω. Jak poprzednio, dobieramy otoczenie kanoniczne V punktu $p(u(a)) = p(v(a))$ i rozkład kanoniczny $p^{-1}(V) = \bigcup_{s\in S} U_s$ dla V. Wtedy $u(a) \in U_t$ oraz $v(a) \in U_{t'}$ dla pewnych indeksów $t, t' \in S$. Zatem zbiór $D \overset{\text{def}}{=} u^{-1}(U_t) \cap v^{-1}(U_{t'})$ jest otoczeniem punktu $a \in \bar{F}$, stąd $D \cap F \neq \varnothing$. Niech więc $b \in F \cap D$. Wtedy $U_t \ni u(b) = v(b) \in U_{t'}$, co implikuje, że $t' = t$. Na koniec, z równości $p|_{U_t}(u(a)) = p|_{U_t}(v(a))$ oraz różnowartościowości funkcji $p|_{U_t}$ wnosimy, że $u(a) = v(a)$, czyli $\bar{F} = F$. □

17.17 Lemat. (Twierdzenie o podnoszeniu krzywej)
Niech $p\colon Z \to X$ będzie nakryciem, $\gamma\colon [0, 1] \to X$ dowolną krzywą, a $b \in Z$ dowolnym punktem, takim że $p(b) = \gamma(0)$. Wtedy istnieje dokładnie jedna krzywa $\tilde{\gamma}\colon [0, 1] \to Z$, taka że $\tilde{\gamma}(0) = b$ oraz $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$.

Dowód. Jedyność krzywej wynika z Tw. 17.16. Aby wykazać istnienie, dla pokrycia odcinka zbiorami postaci $\gamma^{-1}(V)$, gdzie V przebiega otoczenia kanoniczne w X, dobierzmy liczbę Lebesgue'a (zob. Lem. 7.13, str. 34), powiedzmy $\delta = \frac{1}{m}$ (gdzie $m \in \mathbb{N}_1$). Indukcyjnie określimy zgodne krzywe $\alpha_k\colon [\frac{k-1}{2m}, \frac{k}{2m}] \to Z$ dla $k = 1, \ldots, 2m$, takie że $\alpha_1(0) = b$ oraz γ przedłuża $p \circ \alpha_k$. Wtedy ich zlepienie będzie krzywą, której szukamy. Oprócz warunku częściowego podnoszenia krzywej γ, w startowym kroku indukcyjnym żądamy jedynie, by $\alpha_1(0) = b$, a w kolejnych, by $\alpha_k(\frac{k-1}{2m}) = \alpha_{k-1}(\frac{k-1}{2m})$. Załóżmy więc, że dla pewnego indeksu $k = 1, \ldots, 2m$ został ustalony warunek początkowy dla krzywej α_k, czyli że znamy jej wartość w punkcie $\frac{k-1}{2m}$, powiedzmy v, przy czym

$$p(v) = \gamma\left(\frac{k-1}{2m}\right). \tag{17:2}$$

Ponieważ średnica przedziału $[\frac{k-1}{2m}, \frac{k}{2m}]$ jest mniejsza niż δ, przeto $\gamma([\frac{k-1}{2m}, \frac{k}{2m}]) \subset V$ dla pewnego otoczenia kanonicznego w X. Z warunku (17:2) wynika istnienie zbioru otwartego $U \subset Z$ wchodzącego w skład rozkładu kanonicznego dla zbioru V, który zawiera punkt v. Oznacza to, że funkcja $h \overset{\text{def}}{=} p|_U\colon U \to V$ jest poprawnie określonym homeomorfizmem. W takim razie wzór $\alpha_k \overset{\text{def}}{=} h^{-1} \circ \gamma|_{[\frac{k-1}{2m}, \frac{k}{2m}]}$ poprawnie określa krzywą, taką że $\alpha_k(\frac{k-1}{2m}) = v$ i że krzywa γ przedłuża $p \circ \alpha_k$, co kończy dowód. □

17.18 Lemat. (Twierdzenie o podnoszeniu homotopii)
Niech $p\colon Z \to X$ będzie nakryciem, $H\colon [0,1]^2 \to X$ dowolną homotopią, a $b \in Z$ dowolnym punktem, takim że $p(b) = H(0,0)$. Wtedy istnieje dokładnie jedna homotopia $\tilde{H}\colon [0,1]^2 \to Z$, taka że $\tilde{H}(0,0) = b$ oraz $H = p \circ \tilde{H}$.

Dowód. Jednoznaczność wynika z Tw. 17.16. Aby skonstruować homotopię $\tilde{H}$, wystarczy określić zgodną (skończoną) rodzinę funkcji ciągłych określonych na zwartych kwadratach pokrywających $[0,1]^2$, w taki sposób, by jedna z nich posyłała punkt $(0,0)$ w b oraz by każda z tych funkcji była podniesieniem zawężenia homotopii H. Taką konstrukcję przeprowadzamy poniżej.

Z istnienia liczb Lebesgue'a dla pokryć otwartych kwadratu $[0,1]^2$ wynika, że istnieje taka liczba całkowita $m > 0$, że dla dowolnych liczb $j, k = 1, \ldots, m$ zbiór $H([\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}] \times [\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m}])$ zawiera się w pewnym otoczeniu kanonicznym w X, powiedzmy V_{jk}. Dla uproszczenia, oznaczmy $I_{jk} \overset{\text{def}}{=} [\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}] \times [\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m}]$ oraz $w_{jk} = (\frac{j-1}{m}, \frac{k-1}{m})$ (lewy dolny róg kwadratu I_{jk}). Określimy teraz indukcyjnie zgodne funkcje ciągłe $W_{jk}\colon I_{jk} \to Z$ $(j, k = 1, \ldots, m)$, tak by $W_{11}(0,0) = b$ oraz by homotopia H przedłużała $p \circ W_{jk}$. Skonstruujemy je w następującej kolejności:

$$W_{11}, \ldots, W_{1m}; W_{21}, \ldots, W_{2m}; \ldots; \ldots; W_{m1}, \ldots, W_{mm}.$$

Na każdym etapie konstrukcji mamy warunek początkowy postaci $W_{jk}(w_{jk}) = v_{jk}$, gdzie

$$v_{jk} = \begin{cases} b & \text{gdy } j = k = 1 \\ W_{j,k-1}(w_{jk}) & \text{gdy } k > 1 = j \\ W_{j-1,k}(w_{jk}) & \text{gdy } j > 1 \end{cases}.$$

Zauważmy, że w każdym z ww. przypadków zachodzi wzór $p(v_{jk}) = H(w_{jk})$. W takim razie istnieje otwarte otoczenie $U_{jk} \subset X$ punktu v_{jk} (wchodzące w skład rozkładu kanonicznego dla V_{jk}), takie że wzór $h_{jk} \overset{\text{def}}{=} p|_{U_{jk}}\colon U_{jk} \to V_{jk}$ poprawnie określa homeomorfizm. Dzięki temu możemy poprawnie określić funkcję ciągłą W_{jk} wzorem $W_{jk} \overset{\text{def}}{=} h_{jk}^{-1} \circ H|_{I_{jk}}$, z zachowaniem warunku początkowego. Wprost z definicji tej funkcji wynika, że homotopia H przedłuża $p \circ W_{jk}$. Pozostaje sprawdzić, że na tym etapie układ funkcji jest zgodny. Dziedzina funkcji W_{jk} ma niepuste przecięcie z dziedzinami co najwyżej 4 wcześniejszych funkcji: $W_{j-1,k-1}$ (gdy $j > 1$ i $k > 1$), $W_{j-1,k+1}$ (gdy $j > 1$ i $k < m$), $W_{j-1,k}$ (gdy $j > 1$) oraz $W_{j,k-1}$ (gdy $k > 1$); przy czym z dziedzinami funkcji $W_{j-1,k+1}$ i $W_{j-1,k-1}$ ma jeden punkt wspólny, który należy także do dziedzin pozostałych 2 wymienionych tutaj funkcji, które są już zgodne, więc wystarczy, że funkcja W_{jk} będzie zgodna z $W_{j-1,k}$ (gdy $j > 1$) i $W_{j,k-1}$ (gdy $k > 1$). Dla uproszczenia, oznaczmy przez F jedną (dowolnie wybraną) z funkcji $W_{j-1,k}$ i $W_{j,k-1}$. Z definicji punktu v_{jk} i zgodności wcześniej (tzn. przed W_{jk}) określonych funkcji wynika, że $v_{jk} = F(w_{jk})$. Część wspólna dziedzin obu funkcji — F i W_{jk} — jest odcinkiem L poziomym lub pionowym, którego jednym z końców jest punkt w_{jk}. Określmy pomocniczo krzywą $\gamma\colon [0,1] \to [0,1]^2$, która w punkcie 0 ma wartość w_{jk} i której zbiorem wartości jest odcinek L. Wtedy $F \circ \gamma, W_{jk} \circ \gamma\colon [0,1] \to Z$ to dwie krzywe, które zgadzają się w zerze oraz spełniają wzór: $p \circ (F \circ \gamma) = H \circ \gamma = p \circ (W_{jk} \circ \gamma)$. W takim razie, z Tw. 17.16 wynika, że $F \circ \gamma = W_{jk} \circ \gamma$, czyli funkcje W_{jk} i F pokrywają się na zbiorze wartości funkcji γ — co oznacza, że są to funkcje zgodne. □

Dwa ostatnie lematy są szczególnym przypadkiem poniższego twierdzenia. Stanowią zarazem główne narzędzie w jego dowodzie.

17.19 Twierdzenie. (Twierdzenie o podnoszeniu)
Niech $p\colon Z \to X$ będzie nakryciem, W przestrzenią jednospójną, a $u\colon W \to X$ funkcją ciągłą. Dla dowolnych punktów $a \in W$ i $b \in Z$, takich że $p(b) = u(a)$, istnieje dokładnie jedna funkcja ciągła $\tilde{u}\colon W \to Z$, taka że $\tilde{u}(a) = b$ oraz $u = p \circ \tilde{u}$.

Dowód. Jedyność, jak zwykle, wynika z Tw. 17.16. Do konstrukcji funkcji $\tilde{u}$ potrzebujemy następującej obserwacji:

($\star$) Jeśli $\alpha, \beta \in \Sigma_1(W, a, x)$ i $\alpha', \beta'\colon [0,1] \to Z$ to krzywe, takie że $\alpha'(0) = \beta'(0) = b$, $p \circ \alpha' = u \circ \alpha$ i $p \circ \beta' = u \circ \beta$, to $\alpha'(1) = \beta'(1)$.

Wykażmy ($\star$). Z jednospójności przestrzeni W i własności (c) z Obs. 17.9 wynika istnienie homotopii $H\colon [0,1]^2 \to W$ od α do β, takiej że $H_t \in \Sigma_1(W, a, x)$. Z Lem. 17.18 wynika, że istnieje homotopia $Q\colon [0,1]^2 \to Z$, taka że $Q(0,0) = b$ oraz $p \circ Q = u \circ H$. Skoro $p \circ Q_0 = u \circ \alpha = p \circ \alpha'$, z Tw. 17.16 wynika, że $Q_0 = \alpha'$. W podobny sposób uzasadniamy, że $Q(0,t) = b$ i $Q(1,t) = \alpha'(1)$ (jako podniesienia funkcji stałej), a następnie że $Q_1 = \beta'$ (jako zgodne w zerze) i tym samym $\beta'(1) = Q_1(1) = \alpha'(1)$.

Zdefiniujmy teraz szukaną funkcję $\tilde{u}\colon W \to Z$ regułą: dla $x \in W$ dobieramy (dowolnie) krzywą γ_x od a do x, następnie Lem. 17.17 daje nam (jedną jedyną) krzywą $\xi_x\colon [0,1] \to Z$, taką że $\xi_x(0) = b$ i $p \circ \xi_x = u \circ \gamma_x$; wtedy $\tilde{u}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \xi_x(1)$. Własność ($\star$) implikuje, że wartość $\tilde{u}(x)$ nie zależy od wyboru krzywej γ_x. Wprost z jej określenia wynika, że $p \circ \tilde{u} = u$ oraz $\tilde{u}(a) = b$ (gdyż możemy γ_a zdefiniować jako $\mathfrak{e}_a$). Pozostaje więc udowodnić ciągłość funkcji $\tilde{u}$. W tym celu ustalmy dowolnie punkt $c \in W$ i otwarte otoczenie D punktu $v \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{u}(c)$ w Z. Niech $V \subset X$ będzie otoczeniem kanonicznym punktu $p(v)$, a $U \subset Z$ otwartym otoczeniem punktu v, które wchodzi w skład rozkładu kanonicznego dla V. Oznacza to, że $h \stackrel{\text{def}}{=} p|_U\colon U \to V$ jest homeomorfizmem. Wtedy zbiór $h(U \cap D)$ jest otoczeniem punktu $p(v)$, a stąd zbiór $E \stackrel{\text{def}}{=} u^{-1}(h(U \cap D))$ jest otoczeniem punktu c w W (bo $u(c) = p(\tilde{u}(c)) = p(v)$). Z lokalnej drogowej spójności przestrzeni W wynika, że istnieje otoczenie B punktu c, takie że każdy punkt x zbioru B można połączyć krzywą μ_x z punktem c (przy czym $\mu_x(0) = c$) leżącą w całości w zbiorze E. Twierdzimy, że $\tilde{u}(B) \subset D$. Istotnie, jeśli $x \in B$, to $\eta \stackrel{\text{def}}{=} h^{-1} \circ u|_E \circ \mu_x$ jest krzywą, taką że $\eta(0) = v$ oraz $p \circ \eta = u \circ \mu_x$. W takim razie $\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_c \oplus \mu_x$ jest krzywą od a do x, a $\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \xi_c \oplus \eta$ jest krzywą, taką że $\sigma(0) = b$ i $p \circ \sigma = u \circ \lambda$. Zatem z ($\star$) wynika, że $\tilde{u}(x) = \sigma(1) = \eta(1) \in U \cap D$ — i teza. □

17.20 Definicja.
Grupą Poincaré nakrycia uniwersalnego (Z, p) przestrzeni topologicznej X nazywamy zbiór

$$\Gamma(p) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in C(Z, Z)\colon\ p \circ u = p\}$$

wraz z operacją składania jako działaniem wewnętrznym.

17.21 Twierdzenie.
Przy oznaczeniach Def. 17.20*, para $(\Gamma(p), \circ)$ jest grupą przekształceń.*[*17)]

Dowód. Jest jasne, że $\mathrm{id}_X \in \Gamma(p)$ oraz że $u \circ v \in \Gamma(p)$ dla $u, v \in \Gamma(p)$. Dalej, ustalmy dowolnie punkt $a \in Z$. Dla $v \in \Gamma(p)$, z Tw. 17.19 wynika, że istnieje funkcja ciągła $w\colon Z \to Z$, taka że $w(v(a)) = a$ i $p \circ w = p$. Wtedy $w \in \Gamma(p)$ oraz $p \circ (w \circ v) = p$ i $(w \circ v)(a) = a$. Zatem, z jednoznaczności podniesienia w Tw. 17.19,

$$w \circ v = \mathrm{id}_X\,. \tag{17:3}$$

To pokazuje, że w jest suriekcją, a v iniekcją. Ale powyższe rozumowanie możemy powtórzyć dla w w miejsce v, skąd wnioskujemy, że w jest iniekcją, czyli bijekcją. Z równości (17:3) wynika zatem, że także v jest bijekcją oraz $v^{-1} = w \in \Gamma(p)$, czyli $\Gamma(p)$ to grupa. □

[*17)] Dopisek „przekształceń” do słowa „grupa” oznacza nie tylko tyle, że jej elementami są funkcje, a działaniem jest składanie, ale także, że jej elementem neutralnym jest odzworowanie identycznościowe.

17.22 Wniosek.
Niech $p\colon Z \to X$ będzie nakryciem, a $q\colon W \to X$ nakryciem uniwersalnym.

(a) *Istnieje funkcja ciągła $u\colon W \to Z$, taka że $q = p \circ u$.*

(b) *Jeśli nakrycie (Z, p) jest uniwersalne, to istnieje homeomorfizm $h\colon Z \to W$, taki że $p = q \circ h$.*

Uwaga: Dowodzi się, że funkcja u z tezy punktu (a) jest nakryciem, o ile przestrzeń Z jest spójna.

Dowód Wn. 17.22. (a): Wystarczy zastosować Tw. 17.19 dla funkcji $u \stackrel{\text{def}}{=} q$.

(b): Z (a) wynika, że istnieją funkcje ciągłe $g\colon W \to Z$ oraz $h\colon Z \to W$, takie że $q = p \circ g$ i $p = q \circ h$. Wtedy $p \circ (g \circ h) = p$, czyli $g \circ h \in \Gamma(p)$. Analogicznie, $h \circ g \in \Gamma(q)$. Tw. 17.21 implikuje, że $v \stackrel{\text{def}}{=} g \circ h$ i $h \circ g$ to homeomorfizmy. Zatem obie funkcje g i h są bijekcjami oraz $h^{-1} = v^{-1} \circ g$, czyli h to homeomorfizm. $\square$

Powyższy rezultat orzeka m.in., że przestrzeń topologiczna ma co najwyżej jedno (z dokładnością do homeomorfizmu podnoszącego nakrycia — zob. punkt (b) powyżej) uniwersalne nakrycie. Rodzi się więc naturalne pytanie o to, które przestrzenie topologiczne mają takie nakrycia. Odpowiada na nie następujące

17.23 Twierdzenie.
Przestrzeń topologiczna ma nakrycie uniwersalne wtedy i tylko wtedy, gdy jest przestrzenią prawidłową.

(*bez dowodu*)

Powracamy do badań grupy Poincaré nakrycia uniwersalnego. Jak zobaczymy niebawem (Tw. 17.26 poniżej), grupa ta jest w dość naturalny sposób izomorficzna z grupą podstawową nakrywanej przestrzeni prawidłowej.

17.24 Lemat.
Niech (Z, p) będzie nakryciem uniwersalnym niepustej przestrzeni prawidłowej X, a a dowolnym punktem w Z. Wtedy funkcja
$$\Gamma(p) \ni h \mapsto h(a) \in Z$$
jest różnowartościowa, a jej zbiór wartości to $p^{-1}(\{p(a)\})$.

Dowód. Różnowartościowość wynika z Tw. 17.16. Ponadto, dla $h \in \Gamma(p)$, $p(h(a)) = (p \circ h)(a) = p(a)$, czyli $h(a) \in p^{-1}(\{p(a)\})$. Pozostaje więc wykazać, że dla dowolnego punktu $b \in p^{-1}(\{p(a)\})$ istnieje funkcja $h \in \Gamma(p)$, taka że $h(a) = b$. A to wynika od razu z Tw. 17.19 (dla $W \stackrel{\text{def}}{=} Z$ i $u \stackrel{\text{def}}{=} p$). $\square$

17.25 Lemat.
Niech (Z, p) będzie nakryciem uniwersalnym niepustej przestrzeni prawidłowej X, a a dowolnym punktem w Z.

(a) *Dla dowolnej krzywej $\gamma\colon [0,1] \to Z$, takiej że $\gamma(0) = a$, zachodzi równoważność: $p \circ \gamma \in \Sigma_1(X, p(a))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\gamma(1) \in p^{-1}(\{p(a)\})$.*

(b) *Jeśli $\alpha, \beta\colon [0,1] \to Z$ to krzywe, takie że $\alpha(0) = \beta(0) = a$ oraz $\alpha(1), \beta(1) \in p^{-1}(\{p(a)\})$, to:*
$$p \circ \alpha \ {}_{p(a)}{\simeq}_{p(a)} \ p \circ \beta \iff \alpha(1) = \beta(1).$$

Dowód. Punkt (a) jest natychmiastowy: skoro $(p \circ \gamma)(0) = p(a)$, przeto
$$p \circ \gamma \in \Sigma_1(X, p(a)) \iff p(\gamma(1)) = p(a) \iff \gamma(1) \in p^{-1}(\{p(a)\}).$$

Przechodzimy do (b). Jeśli $(c \stackrel{\text{def}}{=})\ \alpha(1) = \beta(1)$, wtedy z punktu (c) Obs. 17.9 wynika, że istnieje homotopia $H\colon [0,1] \times [0,1] \to Z$ od α do β, taka że $H_t \in \Sigma_1(X, a, c)$ dla wszelkich $t \in [0,1]$. W konsekwencji, $p \circ \alpha \ {}_{p(a)}\overset{p\circ H}{\simeq}_{p(a)} \ p \circ \beta$.

Odwrotnie, załóżmy, że $p \circ \alpha \overset{H}{{}_{p(a)}\simeq_{p(a)}} p \circ \beta$. Z Tw. 17.19 (lub Lem. 17.18) wnioskujemy istnienie homotopii $G\colon [0,1]^2 \to Z$, takiej że $G(0,0) = a$ oraz $p \circ G = H$. Jednoznaczność podniesienia implikuje, że $G_0 = \alpha$, $G_t(0) = a$ oraz $G_t(1) = b$ dla wszelkich $t \in [0,1]$ (gdyż $p(G_t(0)) = H_t(0) = p(a)$, $p(G_t(1)) = H_t(1) = p(a)$, $G_0(0) = a$ i $G_0(1) = b$). A stąd także $G_1 = \beta$ (z jednoznaczności podniesienia), gdyż $\beta(0) = G_1(0)$, i tym samym $\beta(1) = G_1(1) = b$. □

17.26 Twierdzenie.
Niech (Z,p) będzie nakryciem uniwersalnym niepustej przestrzeni prawidłowej X, a a dowolnym punktem w Z. Dla dowolnego punktu $b \in p^{-1}(\{p(a)\})$ niech $\gamma_b\colon [0,1] \to Z$ będzie dowolnie ustaloną drogą od a do b. Wtedy odwzorowanie

$$\Phi\colon \Gamma(p) \ni h \mapsto [p \circ \gamma_{h(a)}] \in \pi_1(X, p(a))$$

jest poprawnie określonym izomorfizmem grup, który nie zależy od doboru krzywych γ_b ($b \in p^{-1}(\{p(a)\})$). W szczególności, grupy $\pi_1(X)$ oraz $\Gamma(p)$ są izomorficzne.

Dowód. To, że odwzorowanie Φ jest poprawnie określone i nie zależy od wyboru krzywych γ_b, wynika z dwóch poprzednich lematów. Z nich także można łatwo wywnioskować, że Φ jest bijekcją. Istotnie:

- jeśli $\Phi(h_1) = \Phi(h_2)$, to z punktu (b) Lem. 17.25 wynika, że $h_1(a) = h_2(b)$, a z Lem. 17.24 że $h_1 = h_2$; czyli Φ jest iniekcją;
- dla dowolnej krzywej $\alpha \in \Sigma_1(X, p(a))$ istnieje podniesienie $\beta\colon [0,1] \to Z$, takie że $\beta(0) = a$; wtedy $b \overset{\text{def}}{=} \beta(1)$ należy do zbioru $p^{-1}(\{p(a)\})$ (dzięki punktowi (a) Lem. 17.25), więc $b = h(a)$ dla pewnego homeomorfizmu $h \in \Gamma(p)$ (zob. Lem. 17.24); na koniec punkt (b) Lem. 17.25 implikuje, że $\Phi(h) = [\alpha]$, czyli Φ jest suriekcją.

Pozostaje sprawdzić, że Φ jest homomorfizmem grup. W tym celu ustalmy $f, g \in \Gamma(p)$, przyjmijmy $h \overset{\text{def}}{=} f \circ g$ i zauważmy, że wzór $\gamma'_{h(a)} \overset{\text{def}}{=} \gamma_{f(a)} \oplus (f \circ \gamma_{g(a)})$ poprawnie określa krzywą $\gamma'_{h(a)}$ od a do $h(a)$. Ponieważ już wiemy, że Φ nie zależy od doboru krzywych γ_b, tym samym:

$$\Phi(f \circ g) = [p \circ \gamma'_{h(a)}] = [(p \circ \gamma_{f(a)}) \oplus (p \circ f \circ \gamma_{g(a)})] = [(p \circ \gamma_{f(a)}) \oplus (p \circ \gamma_{g(a)})] = [p \circ \gamma_{f(a)}] * [p \circ \gamma_{g(a)}] = \Phi(f) * \Phi(g),$$

co kończy dowód. □

17.27 Wniosek. **(Twierdzenie o grupie podstawowej okręgu)**
$\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$.[*18)]

Dowód. Po naturalnym utożsamieniu $\mathbb{R}^2$ z $\mathbb{C}$, otrzymujemy, że funkcja

$$p\colon \mathbb{R} \ni x \mapsto e^{ix} \in \mathbb{S}^1$$

jest nakryciem uniwersalnym (por. Prz. 17.14). W takim razie, na mocy Tw. 17.26, grupy $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ i $\Gamma(p)$ są izomorficzne — wystarczy więc wyznaczyć drugą z nich.

Jeśli $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, taką, że $p \circ f = p$, wtedy $e^{i(f(x)-x)} = 1$, czyli funkcja $u\colon \mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{f(x)-x}{2\pi} \in \mathbb{R}$ ma wartości całkowite. Ale jako że jest ona ciągła, a jej dziedzina jest spójna, musi to być funkcja stała, czyli $u(x) = k$ dla wszelkich $x \in \mathbb{R}$ i pewnej ustalonej liczby całkowitej $k \in \mathbb{Z}$. Tym samym $f(x) = x + 2\pi k$. Odwrotnie, bezpośredni rachunek pokazuje, że funkcja $g_k\colon \mathbb{R} \ni x \mapsto x + 2\pi k \in \mathbb{R}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, należy do $\Gamma(p)$. Pokazaliśmy więc, że $\Gamma(p) = \{g_k\colon\ k \in \mathbb{Z}\}$. Jako proste (obowiązkowe) ćwiczenie pozostawiamy sprawdzenie, że funkcja

$$\mathbb{Z} \ni k \mapsto g_k \in \Gamma(p)$$

jest izomorfizmem grup — a stąd $\Gamma(p) \cong \mathbb{Z}$ i teza. □

Naszym ostatnim celem tego rozdziału jest wykazanie, że sfery euklidesowe wyższego wymiaru (czyli $\mathbb{S}^n$ dla $n > 1$) są jednospójne. Przyda nam się do tego następujący wynik, który podaje warunek wystarczający na trywialność grupy podstawowej.

[*18)] Tutaj i w dowodzie tego rezultatu symbol „$\cong$” oznacza izomorficzność grup.

17.28 Lemat.
Jeśli X jest przestrzenią topologiczną, którą można przedstawić w postaci $X = X_1 \cup X_2$, przy czym

- *zbiory X_1 i X_2 są otwarte w X, drogowo spójne i ich grupy podstawowe są trywialne (tj. $\pi_1(X_j) = 0$);*
- *zbiór $X_1 \cap X_2$ jest drogowo spójny i niepusty,*

wtedy X jest przestrzenią drogowo spójną i $\pi_1(X) = 0$.

Dowód. Ustalmy punkt $a \in X_1 \cap X_2$. Z drogowej spójności przestrzeni X_1 i X_2 wynika, że każdy punkt należący do $X_1 \cup X_2$ można połączyć drogą z a. Oznacza to, że przestrzeń X jest drogowo spójna. Wystarczy więc wykazać, że $\pi_1(X, a) = 0$.

Niech $\alpha \in \Sigma_1(X, a)$ i niech $m > 0$ będzie taką liczbą całkowitą, że $\frac{1}{m}$ jest liczbą Lebesgue'a dla pokrycia $\{\alpha^{-1}(X_1), \alpha^{-1}(X_2)\}$. Dla $k \in \{0, \dots, m\}$ niech $I_k \overset{\text{def}}{=} [\frac{k}{m+1}, \frac{k+1}{m+1}]$. Dobierzmy indeks $s_k \in \{1, 2\}$, taki że $\alpha(I_k) \subset X_{s_k}$. Dalej, określamy jednoznacznie wyznaczone liczby $q \geqslant 0$ i $\mu(0) < \ldots < \mu(q+1)$, takie że

- $\mu(0) = 0$, $\mu(q+1) = m+1$;
- $s_k = s_{\mu(j)}$ ilekroć $0 \leqslant j \leqslant q$ i $\mu(j) \leqslant k < \mu(j+1)$;
- $s_{\mu(j)} \neq s_{\mu(j+1)}$, ilekroć $0 \leqslant j < q$.

Niech teraz $J_j \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{k=\mu(j)}^{\mu(j+1)-1} I_k$ oraz $\nu_j = s_{\mu(j)}$ dla $0 \leqslant j \leqslant q$. Z powyższych własności wynika, że

$$\begin{cases} \alpha(J_j) \subset X_{\nu_j} & \text{gdy } 0 \leqslant j \leqslant q \\ \nu_j \neq \nu_{j+1} & \text{gdy } 0 \leqslant j < q. \end{cases} \tag{17:4}$$

Jest jasne, że $J_0, \dots, J_q$ to zwarte przedziały pokrywające $[0, 1]$, z których dowolne dwa o sąsiednich numerach mają jeden punkt wspólny. Dla $0 < j \leqslant q$ oznaczmy przez c_j jeden jedyny punkt zbioru $J_{j-1} \cap J_j$. Dodatkowo, niech $c_0 \overset{\text{def}}{=} 0$ i $c_{q+1} \overset{\text{def}}{=} 1$. Zauważmy, że $J_j = [c_j, c_{j+1}]$ dla $j = 0, \dots, q$. Własności (17:4) implikują, że ($b_j \overset{\text{def}}{=}$) $\alpha(c_j) \in X_1 \cap X_2$, gdy $0 \leqslant j \leqslant q+1$ ($b_0 = b_{q+1} = a$). Z założenia, dla $j = 0, \dots, q$ istnieje krzywa $\gamma_j \colon J_j \to X_1 \cap X_2$ od b_j do b_{j+1}. Ustalmy na moment $j \in \{0, \dots, q\}$. Ponieważ $\alpha(J_j) \cup \gamma_j(J_j) \subset X_{\mu(j)}$ oraz $\pi_1(X_{\nu(j)}, a) = 0$, z punktu (c) Obs. 17.9 wynika, że istnieje homotopia $W^j \colon J_j \times [0, 1] \to X_{\nu(j)}$, taka że $W_0^j = \alpha|_{J_j}$, $W_1^j = \gamma_j$ oraz $W_t^j(c_j) = b_j$ i $W_t^j(c_{j+1}) = b_{j+1}$ dla wszelkich $t \in [0, 1]$. W ten sposób otrzymaliśmy zgodną rodzinę homotopii $\{W^0, \dots, W^q\}$. Oznaczmy ich zlepienie przez H. Tym samym $H \colon [0, 1]^2 \to X$ jest homotopią, taką że $H_0 = \alpha$, ($\beta \overset{\text{def}}{=}$) $H_1 \colon [0, 1] \to X_1 \cap X_2$ oraz $H_t(0) = H_t(1) = a$ dla wszelkich $t \in [0, 1]$. W szczególności, $\alpha \;{}_a{\simeq}_a\; \beta$. Ale $\beta \in \Sigma_1(X_1, a)$, więc $\beta \;{}_a{\simeq}_a\; \mathfrak{e}_a$ (w X_1 i tym samym także w X), co ostatecznie daje $\alpha \;{}_a{\simeq}_a\; \mathfrak{e}_a$. □

17.29 Twierdzenie. (Twierdzenie o jednospójności sfer)
Dla $n \geqslant 0$, sfera euklidesowa $\mathbb{S}^n$ jest jednospójna wtedy i tylko wtedy, gdy $n > 1$.

Dowód. Jako że sfera $\mathbb{S}^0$ jest niespójna, Wn. 17.27 implikuje, że sfera $\mathbb{S}^n$ nie jest jednospójna dla $n < 2$. Aby uzasadnić, że pozostałe sfery są jednospójne, ustalmy $n > 1$ i zauważmy, że przestrzeń $\mathbb{S}^n$ jest drogowo spójna i lokalnie drogowo spójna. Ponadto, z Tw. 13.10 (str. 77) wynika, że dla pewnego punktu $p \in \mathbb{S}^n$, przestrzenie $X_1 \overset{\text{def}}{=} \mathbb{S}^n \setminus \{p\}$ oraz $\mathbb{R}^n$ są homeomorficzne. W szczególności, X_1 jest przestrzenią jednospójną. Ponieważ funkcja $\mathbb{S}^n \ni x \mapsto -x \in \mathbb{S}^n$ jest homeomorfizmem posyłającym punkt p w $-p$, wnioskujemy, że także przestrzeń $X_2 \overset{\text{def}}{=} \mathbb{S}^n \setminus \{-p\}$ jest jednospójna[*19)]. Jako że przestrzeń $X_1 \cap X_2 = \mathbb{S}^n \setminus \{p, -p\}$ jest homeomorficzna z przestrzenią postaci $\mathbb{R}^n \setminus \{\text{punkt}\}$, jest to przestrzeń drogowo spójna, gdyż $n > 1$, zatem zastosowanie Lem. 17.28 kończy dowód. □

17.30 ***Uwaga.***
Grupa podstawowa może być grupą nieabelową. Dowodzi się np., że grupa podstawowa przestrzeni będącej sumą mnogościową dwóch stycznych okręgów jest (nieabelową) grupą wolną o dwóch wolnych generatorach.

[*19)] Podajemy tutaj możliwie najprostszy dowód z zastosowaniem Lem. 17.28. Stosując np. macierze ortogonalne (jako homeomorfizmy sfery), można łatwo pokazać, że sfery euklidesowe są *topologicznie jednorodne*, tzn. dla dowolnych dwóch punktów sfery istnieje homeomorfizm, który posyła jeden z nich w drugi. W konsekwencji, przestrzeń $\mathbb{S}^n \setminus \{a\}$ jest homeomorficzna z $\mathbb{R}^n$ dla dowolnego punktu $a \in \mathbb{S}^n$.

18 Rozmaitości

18.1 Definicja.
Rozmaitością n-wymiarową [bez brzegu] (gdzie $n > 0$) nazywamy dowolną przestrzeń metryzowalną, taką że każdy jej punkt ma otoczenie otwarte homeomorfligiczne z $\mathbb{R}^n$. *Rozmaitości 0-wymiarowe* to przestrzenie dyskretne.

Rozmaitością n-wymiarową (potencjalnie) z brzegiem (gdzie $n > 0$) nazywamy dowolną przestrzeń metryzowalną, taką że każdy jej punkt ma otoczenie otwarte homeomorficzne z $\mathbb{R}^n$ lub z $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1}$ (z konwencją: $\mathbb{R}^0 \overset{\text{def}}{=} \{0\}$). Jeśli M jest n-wymiarową rozmaitością (potencjalnie) z brzegiem, jej *brzegiem* nazywamy zbiór ∂M wszystkich tych punktów z M, które nie mają otwartego otoczenia homeomorficznego z $\mathbb{R}^n$. M jest *rozmaitością z brzegiem*, gdy $\partial M \neq \varnothing$.

Rozmaitość to rozmaitość n-wymiarowa dla pewnej nieujemnej liczby całkowitej n. Podobnie, *rozmaitość z brzegiem* to rozmaitość n-wymiarowa z brzegiem dla pewnej dodatniej liczby całkowitej n.

Rozmaitość jest *zamknięta*, gdy jest zwarta i bez brzegu oraz ma dodatni wymiar.

18.2 ***Uwaga.***
W definicji rozmaitości (zarówno z brzegiem, jak i bez brzegu) założenie o metryzowalności można zastąpić (otrzymując warunek równoważny) parazwartością przestrzeni. Niektórzy autorzy żądają, by rozmaitość spełniała II A.P. (wtedy wystarczy, że jest ona regularna i już będzie metryzowalna). Ponieważ rozmaitości są lokalnie spójne, drugi aksjomat przeliczalności (dla metryzowalnych rozmaitości) jest równoważny temu, że rozmaitość ma przeliczalną liczbę składowych. Istotnie, zgodnie z pewnym twierdzeniem Aleksandrowa, każda spójna parazwarta lokalnie zwarta przestrzeń topologiczna jest σ-zwarta.

Rzadziej w definicji rozmaitości metryzowalność zastępuje się jedynie aksjomatem T_2 . Otrzymuje się w ten sposób ogólniejsze pojęcie, prowadzące do nieco patologicznych rozmaitości (również bez brzegu), jak np. *długa prosta* (czyli *prosta Aleksandrowa*), zob. `https://en.wikipedia.org/wiki/Long_line_(topology)`.

18.3 Obserwacja.

(A) *Rozmaitość n-wymiarowa (bez brzegu) ma bazę topologii złożoną ze zbiorów homeomorficznych z $\mathbb{R}^n$. Rozmaitość n-wymiarowa z brzegiem ma bazę topologii złożoną ze zbiorów, z których każdy jest homeomorficzny z $\mathbb{R}^n$ lub z $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1}$.*

(B) *Niepusty podzbiór otwarty rozmaitości (odp. rozmaitości potencjalnie z brzegiem) jest takąż rozmaitością tego samego wymiaru. Odwrotnie, jeśli przestrzeń metryzowalna ma pokrycie otwarte złożone z rozmaitości (odp. rozmaitości potencjalnie z brzegiem) tego samego wymiaru, to przestrzeń ta jest takąż rozmaitością, o tym samym wymiarze.*

(C) *Metryzowalna przestrzeń topologiczna jest n-wymiarową rozmaitością bez brzegu (gdzie $n > 0$) wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jej punkt ma otoczenie homeomorficzne ze zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^n$.*

(D) *Metryzowalna przestrzeń topologiczna jest n-wymiarową rozmaitością (bez brzegu lub, odpowiednio, potencjalnie z brzegiem) wtedy i tylko wtedy, gdy jest przestrzenią lokalnie spójną i każda jej składowa jest taką rozmaitością.*

(E) *Jeśli niepusta przestrzeń jest n-wymiarową rozmaitością potencjalnie z brzegiem zarówno dla $n = a$, jak i dla $n = b$, to $a = b$.*

Dowód. Ustalmy metryzowalną przestrzeń topologiczną M.

(A): Jeśli przestrzeń M jest rozmaitością, to każdy jej punkt ma otwarte otoczenie homeomorficzne z $\mathbb{R}^n$. A ponieważ wszystkie euklidesowe kule otwarte w $\mathbb{R}^n$ są homeomorficzne z $\mathbb{R}^n$ [ćwiczenie!], widzimy, że każdy punkt przestrzeni M ma bazę otwartych otoczeń homeomorficznych z $\mathbb{R}^n$. Podobnie, jeśli M jest rozmaitością z brzegiem, to każdy punkt ma otoczenie homeomorficzne z $\mathbb{R}^n$ lub z $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1}$, a druga z tych przestrzeni ma bazę topologii złożoną ze zbiorów homeomorficznych z jedną z tych przestrzeni — i tym samym M też ma bazę topologii o takiej własności.

(B): Teza wynika z (A).

(C): Niech $h\colon A \to V$ będzie homeomorfizmem między otoczeniem A punktu $a \in M$ a zbiorem V otwartym w $\mathbb{R}^n$. Wtedy zbiór $U \overset{\text{def}}{=} \operatorname{int}(A)$ jest otwartym otoczeniem punktu a, a zbiór $h(U)$ jest otwarty w $\mathbb{R}^n$. W takim razie istnieje euklidesowa kula otwarta B o środku w punkcie $h(a)$, która zawiera się w $h(U)$. Wtedy zbiór $E \overset{\text{def}}{=}$

$h^{-1}(B)$ jest otwartym otoczeniem punktu a homeomorficznym z B. Ale kula B jest homeomorficzna z $\mathbb{R}^n$, co pokazuje równoważność sformułowaną w punkcie (C).

(D): Ponieważ każdy punkt rozmaitości ma otoczenie homeomorficzne z jedną z przestrzeni $\mathbb{R}^n$ lub $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1}$, a obie te przestrzenie są lokalnie spójne, wnioskujemy, że każda rozmaitość jest przestrzenią lokalnie spójną. W szczególności, jej składowe są otwarte i w konsekwencji są rozmaitościami, zgodnie z (B). Implikacja odwrotna wynika od razu z (B).

(E): Dla dowodu nie wprost, załóżmy, że np. $a < b$. Korzystając z niepustości, możemy dobrać dwa otwarte otoczenia V i W tego samego punktu rozmaitości, homeomorficzne odpowiednio z $\mathbb{R}^a$ lub z $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{a-1}$ (o ile $a > 0$)[*20] oraz z $\mathbb{R}^b$ lub z $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{b-1}$. Wtedy zbiór $U \overset{\text{def}}{=} V \cap W$ jest jednocześnie homeomorficzny z podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^a$ oraz z niepustym zbiorem otwartym w $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{b-1}$.[*21] Korzystając z gęstości zbioru $(0, \infty) \times \mathbb{R}^{b-1}$ w $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{b-1}$, możemy zmniejszyć zbiór U do niepustego zbioru otwartego U' homeomorficznego ze zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^b$. Ostatecznie otrzymujemy niepusty zbiór otwarty w M homeomorficzny jednocześnie ze zbiorem $F \subset \mathbb{R}^a$ i ze zbiorem E otwartym w $\mathbb{R}^b$. W konsekwencji, niepusty zbiór otwarty $E \subset \mathbb{R}^b$ jest homeomorficzny ze zbiorem $F \times \{0\}^{b-a} \subset \mathbb{R}^b$, który jest nigdziegęsty w $\mathbb{R}^b$. A to jest niemożliwe, dzięki Twierdzeniu o zachowaniu obszaru (Tw. 16.10, str. 91). □

Punkt (D) powyższej obserwacji pozwala ograniczyć badanie rozmaitości do spójnych przestrzeni, co ma miejsce niezmiernie często w praktyce.

18.4 Twierdzenie.
Niech M będzie n-wymiarową rozmaitością z niepustym brzegiem. Wtedy ∂M jest zbiorem domkniętym w M i rozmaitością (bez brzegu) wymiaru $n-1$.

Dowód. Na wstępie zauważmy, że — zgodnie z definicją brzegu rozmaitości:

$$a \in M \setminus \partial M \iff \exists U \text{ otwarte otoczenie pktu } a\colon\ U \cong \mathbb{R}^n$$

(powyżej oraz w całym tym dowodzie, „$\cong$" oznacza homeomorficzność). W szczególności, jeśli zbiór U jest jw., to $U \subset M \setminus \partial M$, co pokazuje, że zbiór $M \setminus \partial M$ jest otwarty w M.

Ustalmy na chwilę homeomorfizm $h\colon U \to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1}$ określony na pewnym zbiorze otwartym $U \subset M$. Twierdzimy, że wtedy:

$$U \cap \partial M = h^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}). \tag{18:1}$$

Inkluzja „$\subset$" jest natychmiastowa, gdyż $(0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1} \cong \mathbb{R}^n$, więc zbiór otwarty $U \setminus h^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1})$ jest homeomorficzny z $\mathbb{R}^n$, czyli zawiera się w $M \setminus \partial M$ (na podstawie pierwszej części dowodu). Dla dowodu przeciwnej inkluzji skorzystamy z Twierdzenia o zachowaniu obszaru. Przypuśćmy więc, dla dowodu nie wprost, że $a \in U \setminus \partial M$ spełnia $h(a) \in \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ (dla $n = 1$ zapis ten oznacza, że $h(a) = 0$. Wtedy istnieje otwarte otoczenie $V \subset U$ punktu a oraz homeomorfizm $g\colon V \to \mathbb{R}^n$. W takim razie funkcja $f\colon \mathbb{R}^n \ni x \mapsto h(g^{-1}(x)) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ jest zanurzeniem topologicznym. Zatem z Tw. 16.10 (str. 91) wynika, że zbiór $V \overset{\text{def}}{=} f(\mathbb{R}^n)$ jest otwarty w $\mathbb{R}^n$, co jest nieprawdą, gdyż $h(a) \in V \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1}$. Otrzymana sprzeczność dowodzi wzoru (18:1).

Teraz bez trudu wykażemy, że ∂M jest rozmaitością wymiaru $n-1$. Oczywiście jest to przestrzeń metryzowalna. Co więcej, dla $a \in \partial M$ istnieje zbiór otwarty U zawierający punkt a i taki, że istnieje homeomorfizm $h\colon U \to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1}$. Z (18:1) wynika, że wtedy $U \cap \partial M$ jest zbiorem homeomorficznym z $\mathbb{R}^{n-1}$ (co dla $n = 1$ oznacza, że jest to zbiór jednoelementowy). Obserwacja, że $a \in U \cap \partial M$, kończy dowód. □

18.5 Twierdzenie.
Każda spójna jednowymiarowa rozmaitość z brzegiem lub bez jest homeomorficzna z dokładnie jedną spośród przestrzeni: $\mathbb{R}$, $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{R}_+$, $[0,1]$.

(bez dowodu)

Stosując Tw. 13.10 (str. 77) oraz Tw. 17.29 (str. 102), czytelnik bez trudu udowodni następujące

18.6 Twierdzenie.
Dla $n > 1$ sfera $\mathbb{S}^n$ jest jednospójną n-wymiarową rozmaitością zamkniętą.

[*20] Pamiętajmy o konwencji: $\mathbb{R}^0 \overset{\text{def}}{=} \{0\}$.
[*21] Możemy pominąć $\mathbb{R}^b$, gdyż $b > 0$ i przestrzeń $\mathbb{R}^b$ jest homeomorficzna ze zbiorem otwartym w $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{b-1}$.

Dowód pozostawiamy jako (obowiązkowe) ćwiczenie.

Podamy teraz przykłady kilku klasycznych spójnych rozmaitości dwuwymiarowych.

18.7 Przykład.

(A) Dwuwymiarowy *torus* $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ jest zamkniętą rozmaitością zanurzalną w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. W realnym świecie modelem torusa jest dętka do koła (pusta w środku rura sklejona końcami).

(B) *Wstęga Möbiusa* to dwuwymiarowa rozmaitość, która powstaje przez zlepienie pionowych boków prostokąta po uprzednim obróceniu jednego z nich do góry nogami. Wstęga Möbiusa może być zwarta z brzegiem (gdy startujemy od pełnego prostokąta) — wtedy jej brzeg jest spójny i homeomorficzny z okręgiem; może być także bez brzegu (gdy startujemy od prostokąta z usuniętym poziomymi bokami) — wtedy jest niezwarta. Powierzchnia wstęgi Möbiusa ma tylko jedną stronę: gdybyśmy wykonali z papieru jej model i rysowali linię wzdłuż tej wstęgi przez jej środek, po zakończeniu rysowania okazałoby się, że linia pojawiła się po „obu stronach” wstęgi. Własność ta oznacza, że wstęga Möbiusa jest rozmaitością *nieorientowalną*.
`https://en.wikipedia.org/wiki/Mobius_strip`

(C) Powierzchnia boczna walca, czyli zbiór $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$, to dwuwymiarowa zwarta rozmaitość z brzegiem będącym sumą mnogościową dwóch rozłącznych okręgów ($\mathbb{S}^1 \times \{0,1\}$).

(D) Jeśli skleimy ze sobą obie składowe brzegu powierzchni bocznej walca (w naturalny sposób), otrzymamy przestrzeń homeomorficzną z dwuwymiarowym torusem. Możemy jednak dokonać abstrakcyjnego sklejenia, tzn. połączenia, które nie jest wykonalne w realnym świecie (w przestrzeni trójwymiarowej), otrzymując w ten sposób tzw. *butelkę Kleina*, czyli dwywymiarową rozmaitość zamkniętą, która nie jest zanurzalna w $\mathbb{R}^3$. Aby opisać jej konstrukcję, na jednym z okręgów brzegowych powierzchni bocznej walca ustalmy kierunek poruszania się po nim. Gdy sklejamy oba brzegowe okręgi w naturalny sposób, możemy odgadnąć, jaki jest kierunek poruszania się po drugim okręgu brzegowym, tak by przy sklejaniu kierunki ruchów na obu okręgach się zgadzały. Butelka Kleina powstaje przez zmianę kierunku ruchu (na przeciwny) na drugim okręgu i sklejenie obu brzegowych okręgów w sposób zgodny z kierunkami ruchów na obu okręgach. Tak powstała rozmaitość jest zanurzalna w przestrzeń $\mathbb{R}^4$. Jej niezwykłą własnością jest to, że jej dwuwymiarowa powierzchnia ma tylko jedną stronę (czyli jest to rozmaitość nieorientowalna). Oznacza to, że gdybyśmy rozpoczęli malowanie butelki Kleina w dowolnym miejscu po dowolnej „stronie” i malowali „bez odrywania pędzla” dopóki są niezamalowane **dostępne** miejsca, po zakończeniu okazałoby się, że butelka Kleina jest zamalowana w 100% z „obu jej stron”. (Dla porównania, sfera dwuwymiarowa jest również rozmaitością zamkniętą, która w intuicyjny sposób ma stronę zewnętrzną i wewnętrzną — możemy ją pomalować od wewnątrz kolorem białym, a na zewnątrz czarnym i po jej rozcięciu zobaczymy prawidłowy efekt).
`https://en.wikipedia.org/wiki/Klein_bottle`

18.8 ***Uwaga.***

Znana jest klasyfikacja spójnych zamkniętych rozmaitości dwuwymiarowych (czyli powierzchni zamkniętych). Oprócz sfery $\mathbb{S}^2$, każda inna, z dokładnością do homeomorfizmu, powstaje w jeden z następujących dwóch sposobów:

- Wycinamy w sferze n „dysków” (gdzie $n > 0$), dostając w ten sposób tyleż „brzegowych” parami rozłącznych okręgów. Następnie do każdego z tych okręgów doklejamy (brzegiem) zwartą wstęgę Möbiusa (pamiętajmy, że jej brzeg jest homeomorficzny z $\mathbb{S}^1$, więc formalne sklejenie jest możliwe) — tak powstają wszystkie nieorientowalne spójne powierzchnie zamknięte.
- Wycinamy w sferze $2n$ „dysków” (gdzie $n > 0$), dostając w ten sposób tyleż „brzegowych” parami rozłącznych okręgów. Następnie łączymy je w pary i do każdej pary doklejamy (brzegiem, w naturalny sposób) powierzchnię boczną walca. Tak powstają wszystkie orientowalne spójne powierzchnie zamknięte inne niż sfera. Orientowalną powierzchnię zamkniętą można wyobrazić sobie jako powierzchnię precla z n dziurami, które fachowo nazywa się *genusami* (czyli zamknięta powierzchnia orientowalna o zerowej liczbie genusów to sfera).

`https://en.wikipedia.org/wiki/Surface_(topology)`

Z powyższej klasyfikacji wynika następujące

18.9 Twierdzenie.
Sfera $\mathbb{S}^2$ jest jedyną, z dokładnością do homeomorfizmu, jednospójną zamkniętą rozmaitością dwuwymiarową.

(*bez dowodu*)

18.10 Przykład.
Niezwykle ważną klasę rozmaitości stanowią tzw. *przestrzenie rzutowe*. Tutaj ograniczymy się jedynie do rzeczywistych przestrzeni rzutowych, oznaczanych przez $P^n(\mathbb{R})$, które są spójnymi rozmaitościami zamkniętymi. Przestrzeń $P^n(\mathbb{R})$ powstaje ze sfery $\mathbb{S}^n$ przez sklejenie parami jej punktów antypodalnych. Precyzyjnie, na $\mathbb{S}^n$ wprowadzamy relację równoważności:

$$x \sim y \iff y = x \vee y = -x.$$

$P^n(\mathbb{R})$ to zbiór ilorazowy $\mathbb{S}^n/\sim$ z topologią ilorazową (zob. następny rozdział). Pokazuje się stosunkowo łatwo, że $P^1(\mathbb{R}) \cong \mathbb{S}^1$, natomiast dla $n > 1$ przestrzeń $P^n(\mathbb{R})$ jest spójną [nieorientowalną] n-wymiarową rozmaitością zamkniętą. Ponadto, $\pi_1(P^n(\mathbb{R}))$ dla $n > 1$ jest grupą dwuelementową, a rzutowanie kanoniczne z $\mathbb{S}^n$ na $P^n(\mathbb{R})$ jest nakryciem uniwersalnym.

18.11 ***Uwaga.*** **(Hipoteza Poincaré)**
Jednym z centralnych problemów matematycznych XX wieku, najważniejszym w teorii rozmaitości, była tzw. hipoteza Poincaré:

> *Każda jednospójna trójwymiarowa rozmaitość zamknięta jest homeomorficzna z $\mathbb{S}^3$.*

Hipoteza ta doczekała się uogólnień na wyższe wymiary (gdzie, oprócz jednospójności, żąda się dodatkowo innych własności). Historia pokazała, że owo uogólnienie na wyższe wymiary zostało pozytywnie rozwiązane wcześniej niż klasyczna (sformułowana powyżej) hipoteza Poincaré. Ona sama została pozytywnie rozstrzygnięta przez Gregorija Perelmana dopiero w pierwszej dekadzie XXI wieku.
`https://en.wikipedia.org/wiki/Poincare_conjecture`

19 Topologia ilorazowa i grupy topologiczne

19.1 Definicja.
Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną, $R \subset X \times X$ pewną relacją równoważności na zbiorze X, a $\pi \colon X \to X/R$ rzutowaniem kanonicznym na zbiór ilorazowy. Topologią *ilorazową* (*indukowaną z τ, wyznaczoną przez R*) nazywamy najbogatszą[*22)] topologię τ_R, względem której $\pi \colon (X, \tau) \to (X/R, \tau_R)$ jest funkcją ciągłą. Dokładniej: zbiór $U \subset X/R$ jest otwarty w topologii ilorazowej, gdy $\pi^{-1}(U) \in \tau$.
Notacja: τ/R.

19.2 Obserwacja.
Niech R będzie relacją równoważności na przestrzeni topologicznej X i niech $\pi \colon X \to Z$ oznacza rzutowanie kanoniczne na przestrzeń $Z \overset{\text{def}}{=} X/R$ z topologią ilorazową.

(a) *Zbiór $F \subset Z$ jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\pi^{-1}(Z)$ jest domknięty w X.*

(b) *Funkcja $g \colon Z \to Y$ (gdzie Y to przestrzeń topologiczna) jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy ciągła jest funkcja $g \circ \pi \colon X \to Y$.*

(c) *Przestrzeń Z jest T_1 wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie klasy abstrakcji są domknięte, tzn. gdy $[x]_R \in \mathscr{F}(X)$ dla wszelkich $x \in X$.*

[*22)] Tzn. największą względem relacji inkluzji. Topologie najmniejsze względem tej relacji (wśród spełniających określone warunki) określa się mianem najuboższych.

(d) *Jeśli przestrzeń Z jest T_2, to R jest zbiorem domkniętym w $X \times X$.*

Dowód. Własność (a) wynika ze wzoru $\pi^{-1}(Z \setminus F) = X \setminus \pi^{-1}(F)$ oraz z definicji topologii ilorazowej. Również własność (b) jest konsekwencją tej definicji: jeśli funkcja $g \circ \pi$ jest ciągła, to dla dowolnego zbioru otwartego $V \subset Y$ zbiór $\pi^{-1}(g^{-1}(V)) = (g \circ \pi)^{-1}(V)$ jest otwarty w X, więc zbiór $g^{-1}(V)$ jest otwarty w Z. Z kolei własności (c) i (d) są natychmiastowymi konsekwencjami wzorów:

$$\pi^{-1}(\{\pi(x)\}) = [x]_R \qquad (x \in X)$$
$$(\pi \times \pi)^{-1}(\Delta_Z) = R$$

oraz charakteryzacji aksjomatów T_1 i T_2 (zob. Obs. 6.2, str. 24, oraz Tw. 10.12, str. 58). □

Na ogół domkniętość relacji równoważności w kwadracie kartezjańskim przestrzeni topologicznej nie wystarcza, by przestrzeń ilorazowa była T_2. Tak jednak jest dla przestrzeni zwartych, co pokazuje poniższe

19.3 Twierdzenie.
Dla relacji równoważności R na zwartej T_2-przestrzeni X następujące warunki są równoważne:

(i) *przestrzeń X/R jest T_2;*

(ii) *relacja R jest zbiorem domkniętym w $X \times X$.*

Dowód. Na mocy punktu (d) Obs. 19.2 wystarczy pokazać, że (i) wynika z (ii). W tym celu załóżmy, że R jest domkniętym zbiorem w $X \times X$. Na potrzeby niniejszego dowodu powiemy, że zbiór $A \subset X$ jest R-*niezmienniczy*, jeśli $[x]_R \subset A$ dla dowolnego punktu $x \in A$. Innymi słowy: zbiór A jest R-niezmienniczy wtedy i tylko wtedy, gdy $A = \pi^{-1}(\pi(A))$. Dodatkowo, przez $\pi\colon X \to Z$ oznaczamy rzutowanie kanoniczne na przestrzeń ilorazową $Z \overset{\text{def}}{=} X/R$.

Na wstępie wykażmy następującą własność:

($\star$) Jeśli zbiory $A, B \subset X$ są rozłączne, domknięte i R-niezmiennicze, to istnieje domknięty zbiór R-niezmienniczy C, taki że $A \subset \operatorname{int}(C)$ oraz $C \cap B = \varnothing$.

Niech A i B będą jw. Ponieważ przestrzeń X jest normalna, istnieją zbiory otwarte U i V, takie że $A \subset U$, $B \subset V$ oraz $U \cap V = \varnothing$. Wtedy także $\bar{U} \cap V = \varnothing$, co implikuje, że zbiory $\bar{U}$ i B są rozłączne. Niech $C \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{x \in \bar{U}} [x]_R$. Wprost z definicji tegoż zbioru wynika, że jest on R-niezmienniczy i zawiera zbiór U, czyli $A \subset \operatorname{int}(C)$. Ponadto, $C \cap B = \varnothing$. Istotnie, gdyby pewien punkt $z \in B$ należał do C, to istniałby punkt $x \in \bar{U}$, taki że $z \in [x]_R$. Wtedy także $x \in [z]_R$ i z R-niezmienniczości zbioru B otrzymalibyśmy, że $x \in B$, co przeczyłoby temu, że zbiory B i $\bar{U}$ są rozłączne. Pozostaje pokazać, że zbiór C jest domknięty. A to wynika z domkniętości relacji R w $X \times X$, gdyż:

- zbiór $D \overset{\text{def}}{=} R \cap (\bar{U} \times X)$ jest domknięty w $X \times X$, zatem jest to zbiór zwarty;
- rzut zbioru D na drugą współrzędną, czyli $C' \overset{\text{def}}{=} \{y \in X| \quad \exists x \in X\colon\ (x, y) \in D\}$, jest zwarty, więc C' to zbiór domknięty w X;
- $C = C'$ — gdyż:

$$z \in C \iff \exists x \in \bar{U}\colon\ z \in [x]_R \iff \exists x \in \bar{U}\colon (x, z) \in R \iff \exists x \in X\colon (x, y) \in D.$$

Powyższe uwagi kończą dowód ($\star$). Dalej, zauważmy, że z ($\star$) wynika, że:

($*$) Jeśli zbiory $E, F \subset X$ są rozłączne, domknięte i R-niezmiennicze, to istnieją domknięte zbiory R-niezmiennicze K i L, takie że $E \subset \operatorname{int}(K)$, $F \subset \operatorname{int}(L)$ oraz $K \cap L = \varnothing$.

Istotnie, najpierw do ($\star$) podstawiamy $A \overset{\text{def}}{=} E$ i $B \overset{\text{def}}{=} F$, by otrzymać zbiór C, który oznaczamy przez K, a potem do ($\star$) podstawiamy $A \overset{\text{def}}{=} F$ i $B \overset{\text{def}}{=} K$, by otrzymać nowy zbiór C, który oznaczamy przez L. Wtedy K i L spełniają ($*$).

Mając ($*$), pokażemy, że przestrzeń ilorazowa jest T_2. W tym celu ustalmy dla różne punkty α i β w Z. Wtedy $\pi^{-1}(\{\alpha\}) = [x]_R$ oraz $\pi^{-1}(\{\beta\}) = [y]_R$ dla pewnych punktów $x, y \in X$. Zauważmy, że zbiory $K_0 \overset{\text{def}}{=} [x]_R$ oraz $L_0 \overset{\text{def}}{=} [y]_R$ są R-niezmiennicze, rozłączne i domknięte (domkniętość wynika stąd, że, np., K_0 to rzut na drugą współrzędną zbioru $R \cap (\{x\} \times X)$). Teraz puszczamy w ruch indukcję i wielokrotnie stosujemy ($*$): jeśli zbiory K_n i L_n są już określone (oraz są rozłączne, domknięte i R-niezmiennicze) dla pewnej liczby $n \geqslant 0$, to, podstawiając $E \stackrel{\text{def}}{=} K_n$ i $F \stackrel{\text{def}}{=} L_n$, z $(*)$ otrzymujemy zbiory K_{n+1} i L_{n+1} o analogicznych własnościach i takie, że

$$K_n \subset \operatorname{int}(K_{n+1}) \qquad \text{oraz} \qquad L_n \subset \operatorname{int}(L_{n+1}). \tag{19:1}$$

Na koniec określamy $U \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$ oraz $V \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$. Z rozłączności zbiorów K_n i L_n oraz z (19:1) wynika, że U i V to rozłączne i otwarte nadzbiory zbiorów K_0 i L_0 (odpowiednio). Tym samym $\alpha \in \pi(U)$ i $\beta \in \pi(V)$. Ponadto, $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \pi^{-1}(\pi(K_n)) = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n = U$ i podobnie $\pi^{-1}(\pi(V)) = V$, co implikuje, że zbiory $\pi(U)$ i $\pi(V)$ są otwarte i rozłączne — i teza. □

Przejdziemy teraz do interesującej klasy przestrzeni topologicznych jaką stanowią grupy topologiczne.

19.4 Definicja.
Grupą topologiczną nazywamy grupę $(G, \cdot)$ wyposażoną w topologię, taką że funkcja $G \times G \ni (x, y) \mapsto xy^{-1} \in G$ jest ciągła. *Homomorfizm grup topologicznych* to ciągły homomorfizm. Analogicznie definiuje się *izomorfizm grup topologicznych* oraz *automorfizm grupy topologicznej.*

Dla dowolnych podzbiorów A i B grupy G określamy zbiory:

$$A^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{a^{-1}\colon\ a \in A\}$$
$$A \cdot B \stackrel{\text{def}}{=} \{ab\colon\ a \in A,\ b \in B\}$$
$$gA = \{g\} \cdot A, \quad Ag = A \cdot \{g\} \quad (g \in G)$$
$$A^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{n} \quad (n > 1)$$
$$A^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} (A^{-1})^n \quad (n > 1)$$
$$[A]^k \stackrel{\text{def}}{=} \{a^k\colon\ a \in A\} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Zbiór A nazywamy *symetrycznym*, gdy $A = A^{-1}$, tzn. gdy $a^{-1} \in A$ dla wszelkich $a \in A$. Jeśli G jest grupą topologiczną, otoczenia elementu neutralnego e_G grupy G nazywamy *e-otoczeniami.*

Pseudometryka ϱ na grupie G jest *lewostronnie niezmiennicza* (w skrócie: *lewo-niezmiennicza*), gdy

$$\forall x, y, z \in G\colon\ \varrho(zx, zy) = \varrho(x, y).$$

Analogicznie, pseudometryka ϱ jest *prawostronnie niezmiennicza* (w skrócie: *prawo-niezmiennicza*), gdy

$$\forall x, y, z \in G\colon\ \varrho(xz, yz) = \varrho(x, y).$$

Jeśli pseudometryka jest lewo- i prawo-niezmiennicza, nazywamy ją *obustronnie niezmienniczą* (w skrócie: *bi-niezmienniczą* lub *obu-niezmienniczą*).

Waluacją (lub *normą*) na grupie G nazywamy dowolną funkcję $p\colon G \to \mathbb{R}_+$, taką że dla dowolnych elementów $g, h \in G$:

(V1) $p(g) = 0 \iff g = e_G$;

(V2) $p(g^{-1}) = p(g)$;

(V3) $p(gh) \leqslant p(g) + p(h)$.

Jeśli funkcja p spełnia jedynie warunki (V2)–(V3) oraz znika w elemencie neutralnym grupy G, nazywamy ją *półwaluacją* lub *seminormą*.

Półwaluację p nazywamy *symetryczną*, gdy $p(gh) = p(hg)$ dla wszelkich $g, h \in G$.

W praktyce żąda się, by grupy topologiczne były przestrzeniami Hausdorffa. Jak zobaczymy poniżej, każda grupa topologiczna T_0 jest automatycznie T_3 (a nawet $T_{3\frac{1}{2}}$ — zob. Wn. 19.11 poniżej; takie grupy topologiczne mogą nie być normalne).

19.5 Obserwacja.
Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, p półwaluacją, d pseudometryką, a τ topologią — na G.

(A) (G,τ) *to grupa topologiczna wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje* $(G\times G,\tau\times\tau)\ni(x,y)\mapsto xy\in(G,\tau)$ *oraz* $(G,\tau)\ni x\mapsto x^{-1}\in(G,\tau)$ *są ciągłe.*

(B1) *Jeśli d jest [pseudo]metryką lewo- lub prawo-niezmienniczą, to funkcja* $q_d\colon G\ni x\mapsto d(x,e_G)\in\mathbb{R}_+$ *jest [pół]waluacją.*

(B2) *Funkcje* $d_p^\ell, d_p^r\colon G\times G\to\mathbb{R}_+$ *określone wzorami* $d_p^\ell(x,y)=p(x^{-1}y)$ *oraz* $d_p^r(x,y)=p(xy^{-1})$ *są pseudometrykami (metrykami, jeśli p jest waluacją) na G, przy czym pseudometryka d_p^ℓ jest lewo-, a d_p^r prawo-niezmiennicza.*

(B3) *Przypisanie* $d\mapsto q_d$ *ustala wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między bi-niezmienniczymi [pseudo]metrykami a symetrycznymi [pół]waluacjami na G.*

(B4) *Przypisania* $p\mapsto d_p^\ell$ *oraz* $p\mapsto d_p^r$ *ustalają wzajemnie jednoznaczńa odpowiedniość między [pół]waluacjami a, odpowiednio, lewo- i prawo-niezmienniczymi [pseudo]metrykami na G.*

(B5) *Przypisanie* $d\mapsto\hat d$, *gdzie* $\hat d(x,y)\overset{\text{def}}{=}d(x^{-1},y^{-1})$, *ustala wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między lewo- a prawo-niezmienniczymi [pseudo]metrykami na G. W szczególności, pseudometryka lewo-niezmiennicza d jest bi-niezmiennicza wtedy i tylko wtedy, gdy* $d(x^{-1},y^{-1})=d(x,y)$ *dla wszelkich* $x,y\in G$.

(C1) *Jeśli d jest metryką lewo- lub prawo-niezmienniczą, to (G,d) jest grupą topologiczną wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek:*

(19:2)
$$\lim_{n\to\infty}d(x_n,e_G)=0\implies\forall y\in G\colon\ \lim_{n\to\infty}d(yx_ny^{-1},e_G)=0.$$

W szczególności, jeśli d jest metryką bi-niezmienniczą, to (G,d) jest grupą topologiczną.

(C2) *Jeśli d jest metryką lewo- lub prawo-niezmienniczą, to (G,d) jest grupą topologiczną wtedy i tylko wtedy, gdy metryki d i $\hat d$ są równoważne.*

(D) *Niech (G,τ) będzie grupą topologiczną.*

(D1) *Funkcja* $G\ni x\mapsto x^{-1}\in G$ *jest homeomorfizmem.*

(D2) *Dla dowolnego elementu $g\in G$ funkcje* $G\ni x\mapsto gx\in G$ *oraz* $G\ni x\mapsto xg\in G$ *są homeomorfizmami.*

(D3) *Dla dowolnego elementu $g\in G$ funkcja* $G\ni x\mapsto gxg^{-1}\in G$ *jest automorfizmem grupy topologicznej G.*

(D4) *Dla dowolnego zbioru $A\subset G$ i zbioru otwartego $U\subset G$ zbiory U^{-1}, AU i UA są otwarte.*

(D5) *Dla dowolnego e-otoczenia U grupy G i dowolnej liczby całkowitej $n>0$ istnieje symetryczne e-otoczenie V, takie że $V^n\subset U$.*

(D6) *Dla dowolnego zbioru $A\subset G$ i e-otoczenia U, $\bar A\subset AU\cap UA$. Ponadto,*

$$\bar A=\bigcap\{UAU\colon\ U \text{ to otwarte symetryczne e-otoczenie}\}.$$

(D7) *Homomorfizm $u\colon G\to H$ między grupami topologicznymi jest ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągły w jednym (dowolnym) punkcie.*

(D8) *Homomorfizm $u\colon G\to H$ między grupami topologicznymi jest odwzorowaniem otwartym wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $u(V)$ ma niepuste wnętrze dla dowolnego e-otoczenia $V\subset G$.*

(D9) *Podgrupa grupy G o niepustym wnętrzu jest zbiorem otwarto-domkniętym.*

(D10) *Domknięcie dowolnej podgrupy grupy G jest podgrupą.*

(D11) *Przestrzeń G jest T_0 wtedy i tylko wtedy, gdy jest T_3.*

(D12) *G jest przestrzenią lokalnie zwartą wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje w niej zwarte e-otoczenie.*

(D13) *Jeśli G jest grupą lokalnie zwartą T_2, to G jest przestrzenią parazwartą.*

(D14) *Jeśli d jest lewo- lub prawo-niezmienniczą pseudometryką na G, to d jest funkcją ciągłą (w topologii $\tau\times\tau$) wtedy i tylko wtedy, gdy półwaluacja q_d jest ciągła (w topologii τ) w punkcie e_G. Podobnie, półwaluacja p jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągła w e_G.*

(D15) *Funkcja p jest waluacją, taką że metryka d_p^ℓ jest zgodna z topologią grupy G, wtedy i tylko wtedy, gdy p jest waluacją ciągłą w punkcie e_G w topologii grupy G i spełnia warunek:*

$$\lim_{n\to\infty}p(x_n)=0\implies x_n\xrightarrow{\tau}e_G.$$

Dowód. Dowody punktów (A), (B1)–(B5) oraz fragmentów punktu (D) pominiętych poniżej pozostawiamy jako ćwiczenie.

(C1): Wystarczy pokazać, że jeśli metryka lewo-niezmiennicza d spełnia warunek (19:2), to (G,d) jest grupą topologiczną (dla metryk prawo-niezmienniczych dowód jest analogiczny). W tym celu ustalamy dwa ciągi $(x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty} \subset G$, zbieżne do, odpowiednio, $x, y \in G$. Oznacza to, że $d(x^{-1}x_n, e_G) = d(x_n, x) \to 0$ i podobnie $d(y^{-1}y_n, e_G) \to 0$ przy $n \to \infty$. Pytamy, czy ciąg $\big(x_n y_n^{-1}\big)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do xy^{-1}. W tym celu szacujemy (przy przejściu z etykietą „(ℓ)" nad znakiem równości korzystami z lewostronnej niezmienniczości):

$$d(x_n y_n^{-1}, xy^{-1}) \leqslant d(x_n y_n^{-1}, x_n y^{-1}) + d(x_n y^{-1}, xy^{-1}) \overset{(\ell)}{=} d(e_G, y(y^{-1}y_n)y^{-1}) + d(y(x^{-1}x_n)y^{-1}, e_G) \to 0 \ (n \to \infty),$$

gdzie ostatnie przejście wynika z (19:2).

(C2): Jeśli (G,d) jest grupą topologiczną, to funkcja $(G,d) \ni x \mapsto x^{-1} \in (G,d)$ jest homeomorfizmem, co implikuje, że metryka $\hat{d}$ jest równoważna metryce d. Odwrotnie, załóżmy, że obie te metryki są równoważne. Wystarczy pokazać (19:2). Powiedzmy, że metryka d jest lewo-niezmiennicza (przy prawo-niezmienniczości dowód jest analogiczny). Wtedy $d(yx_n y^{-1}, e_G) = d(x_n y^{-1}, y^{-1})$, co implikuje, że:

$$yx_n y^{-1} \xrightarrow{d} e_G \iff x_n y^{-1} \xrightarrow{d} y^{-1}.$$

Z równoważności ww. metryk mamy:

$$x_n y^{-1} \xrightarrow{d} y^{-1} \iff x_n y^{-1} \xrightarrow{\hat{d}} y^{-1}.$$

Ale metryka $\hat{d}$ jest prawo-niezmiennicza, więc $\hat{d}(x_n y^{-1}, y^{-1}) = \hat{d}(x_n, e_G)$, co daje:

$$x_n y^{-1} \xrightarrow{\hat{d}} y^{-1} \iff x_n \xrightarrow{\hat{d}} e_G.$$

Na koniec (ponownie z równoważności metryk) zauważmy, że:

$$x_n \xrightarrow{\hat{d}} e_G \iff x_n \xrightarrow{d} e_G.$$

Łącząc wszystkie powyższe równoważności, otrzymujemy (19:2).

(D4): Teza wynika z (D1) i (D2) oraz wzorów $AU = \bigcup_{a\in A} aU$ i $UA = \bigcup_{a \in A} Ua$.

(D5): Z ciągłości funkcji $G \times \ldots \times G \ni (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \in G$ w $(e_G, \ldots, e_G)$ wynika, że istnieją e-otoczenia $W_1, \ldots, W_n$, takie że $W_1 \cdot \ldots \cdot W_n \subset U$. Wtedy jako szukany zbiór V wystarczy podstawić zbiór $E \cap E^{-1}$, gdzie $E \overset{\text{def}}{=} W_1 \cap \ldots \cap W_n$.

(D6): Najpierw pokażemy pierwszą inkluzję tego punktu. Niech $b \in \bar{A}$. Wtedy zbiór bU^{-1} jest otoczeniem punktu b i w takim razie istnieją punkty $a \in A$ oraz $u \in U$, takie że $a = bu^{-1}$. Tym samym $b = au \in AU$. Analogicznie pokazujemy, że $b \in UA$, co dowodzi, że $\bar{A} \subset AU \cap UA$. Z tej inkluzji wynika, że

$$\bar{A} \subset C \overset{\text{def}}{=} \bigcap \{UAU\colon\ U \text{to otwarte symetryczne } e\text{-otoczenie}\}.$$

Aby uzasadnić przeciwną inkluzję, ustalmy $b \in C$ i niech W będzie otoczeniem punktu b. Z ciągłości funkcji $G \times G \ni (x,y) \mapsto xby \in G$ w punkcie (e_G, e_G) wynika, że istnieje otwarte symetryczne e-otoczenie U, takie że $UbU \subset W$. Ponieważ $b \in C$, także $b \in UAU = U^{-1}AU^{-1}$, czyli $b = u^{-1}av^{-1}$ dla pewnych $u, v \in U$ oraz $a \in A$. A wtedy $a = ubv$, czyli $a \in A \cap UbU \subset A \cap W$. Tym samym pokazaliśmy, że zbiór A przecina niepusto dowolne otoczenie punktu b, czyli $b \in \bar{A}$.

(D8): Załóżmy, że homomorfizm u ma tę własność, że zbiór $u(V)$ ma niepuste wnętrze dla dowolnego e-otoczenia V w G. Pokażmy, że przy powyższych oznaczeniach zbiór $u(V)$ jest wtedy e-otoczeniem. Istotnie, istnieje symetryczne e-otoczenie E w G, takie że $E^2 \subset V$. Zgodnie z naszym założeniem, istnieje niepusty zbiór otwarty D w H, taki że $D \subset u(E)$. A wtedy $e_H \in D \cdot D^{-1} \subset u(E) \cdot [u(E)]^{-1} = u(E \cdot E^{-1}) = u(E^2) \subset u(V)$ oraz zbiór $D \cdot D^{-1}$ jest otwarty.

Teraz ustalmy zbiór otwarty W w G. Nasze zadanie to pokazać, że zbiór $u(W)$ jest otwarty. Niech więc $y \in u(W)$. Wtedy $y = u(x)$ dla pewnego punktu $x \in W$. Zbiór $x^{-1}W$ jest e-otoczeniem. W takim razie z pierwszej części dowodu wynika, że zbiór $u(x^{-1}W) = y^{-1}u(W)$ jest e-otoczeniem — a to jest równoważne temu, że $u(W)$ jest otoczeniem punktu y (dzięki (D2)).

(D9): Niech H będzie podgrupą grupy G o niepustym wnętrzu, powiedzmy U. Skoro $H = HU$, punkt (D4) pokazuje, że zbiór H jest otwarty. Jednocześnie $G \setminus H = (G \setminus H) \cdot H$, więc również z (D4) wynika, że zbiór $G \setminus H$ jest otwarty.

(D10): Niech H będzie podgrupą grupy G. Zauważmy, że zbiór

$$\{(x,y) \in G \times G\colon\ xy^{-1} \in \bar{H}\}$$

jest domknięty i zawiera zbiór $H \times H$. W takim razie zawiera także zbiór $\bar{H} \times \bar{H}$ (zob. Tw. 10.10, str. 57), czyli $\bar{H} \times \bar{H} \subset \bar{H}$.

(D11): Załóżmy, że G jest T_0-przestrzenią. Niech $x, y \in G$ będą dwoma różnymi punktami. Wtedy istnieje zbiór otwarty V, taki że $V \cap \{x, y\}$ jest zbiorem jednoelementowym, powiedzmy zawiera x. Wtedy zbiór $U \stackrel{\text{def}}{=} xV^{-1}y$ jest otwarty i $U \cap \{x, y\} = \{y\}$, co pokazuje, że G jest T_1-przestrzenią. Z kolei jeśli $A \subset G$ jest zbiorem domkniętym i $a \in G \setminus A$, wtedy z (D6) wynika istnienie otwartego symetrycznego e-otoczenia V, takiego że $a \notin UAU$. Ostatni związek jest równoważny temu, że $Ua \cap AU = \varnothing$ (gdyż $U = U^{-1}$). Otrzymaliśmy więc dwa rozłączne otwarte nadzbiory Ua i AU zbiorów $\{a\}$ i A.

(D13): Z (D11) już wiemy, że G jest przestrzenią T_3. Ustalmy zwarte symetryczne e-otoczenie K w G. Niech H oznacza grupę generowaną przez zbiór K. Wtedy:

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} K^n,$$

co pokazuje, że H jest przestrzenią σ-zwartą. Ponadto, $K \subset H$, więc z (D9) wynika, że H jest zbiorem otwarto-domkniętym. Z Obs. 15.13 (str. 87) oraz Tw. 15.14 (str. 88) wnioskujemy, że H jest przestrzenią parazwartą. Ponieważ każda grupa jest sumą parami rozłącznych warstw lewostronnych swojej podgrupy, grupę G możemy przedstawić w postaci $G = \bigcup_{f \in F} fH$, gdzie $F \subset G$ jest tak dobranym zbiorem, że zbiory fH ($f \in F$) są parami rozłączne. Zauważmy, że każdy ze zbiorów fH jest otwarty w G oraz przestrzenią homeomorficzną z H, więc parazwartą. Niech $\{U_s\}_{s \in S}$ będzie pokryciem otwartym przestrzeni G. Dla dowolnego punktu $f \in F$, w pokrycie $\{fH \cap U_s\}_{s \in S}$ przestrzeni fH wpisujemy pokrycie $\{V_{f,t}\}_{t \in T_f}$ otwarte w fH (więc także i w G) oraz lokalnie skończone w fH. Z uwagi na to, że zbiory fH są parami rozłączne i otwarto-domknięte w G, rodzina $\{V_{f,t}\colon\ f \in F,\ t \in T_f\}$ jest lokalnie skończona w G i jest pokryciem otwartym tej przestrzeni wpisanym w pokrycie $\{U_s\}_{s \in S}$.

(D14): Ponieważ $q_{d_p^r} = p$, wystarczy udowodnić tezę dla pseudometryk. Jak zwykle, ograniczymy się do lewo-niezmienniczych pseudometryk. Dla $(a, b), x, y) \in G \times G$ mamy $|d(x, y) - d(a, b)| \leqslant d(x, a) + d(y, b) = q_d(a^{-1}x) + q_d(b^{-1}y)$, co pokazuje, że jeśli półwaluacja q_d jest ciągła w e_G i U jest takim e-otoczeniem, że $q(U) \subset [0, \frac{\varepsilon}{2})$, to dla $x \in aU$ i $y \in bU$ spełniona jest nierówność $|d(x, y) - d(a, b)| < \varepsilon$, czyli funkcja d jest ciągła. Implikacja przeciwna jest natychmiastowa.

(D15): Wystarczy wykazać wystarczalność podanych warunków. Z (D14) wynika, że d_p^ℓ jest ciągłą metryką i tym samym $\mathrm{id}_G\colon (G, \tau) \to (G, d_p^\ell)$ jest funkcją ciągłą. By wykazać, że funkcja odwrotna także jest ciągła, rozważmy dowolny ciąg $(x_n)_{n=1}^\infty$ zbieżny w metryce d_p^ℓ do punktu a. Wtedy $\lim_{n\to\infty} p(a^{-1}x_n) = 0$, więc z założenia w (D15) wynika, że $a^{-1}x_n \xrightarrow{\tau} e_G$. W konsekwencji (dzięki (D2)), $x_n \xrightarrow{\tau} a$, co kończy dowód. $\square$

19.6 ***Uwaga.***
Jak zobaczyliśmy w Obs. 19.5, każda metryka bi-niezmiennicza na grupie wyznacza topologię grupy topologicznej. Istnieją przykłady metryk lewo-niezmienniczych na grupie, które **nie** prowadzą do grup topologicznych.

Obs. 19.5 pokazuje, m.in., że zamiast rozpatrywać [pseudo]metryki lewo- lub prawo-niezmiennicze na grupach (które są funkcjami dwóch zmiennych) można ograniczyć się do [pół]waluacji (a więc funkcji jednej zmiennej). Jest to częsta praktyka i my będziemy tak czynić w niniejszym skrypcie. Należy przy tym pamiętać, że waluacja p na grupie G zadaje strukturę grupy topologicznej wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek:

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n) = 0 \implies \forall y \in G\colon\ \lim_{n\to\infty} p(yx_ny^{-1}) = 0. \tag{19:3}$$

(por. (19:2)).

Dla pseudometryki p na grupie G i liczby $r \in (0, \infty)$ określamy *kulę otwartą* o promieniu r (i środku w e_G) jako:

$$B_p(r) \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in G\colon\ p(g) < r\}.$$

Wykażemy teraz niezwykle ważne w zastosowaniach

19.7 Twierdzenie. (Twierdzenie Markowa)
Dla dowolnego ciągu $U_1, U_2, \ldots$ e-otoczeń grupy topologicznej G i dowolnego ciągu liczb dodatnich $r_1, r_2, \ldots$ zbieżnego do zera istnieje ciągła półwaluacja $p\colon G \to \mathbb{R}_+$, taka że:

$$\forall n > 0\colon\ B_p(r_n) \subset U_n$$

oraz $p(G) \subset [0, \sup_{n>0} r_n]$.

W dowodzie powyższego rezultatu wykorzystamy poniższy lemat, który sam w sobie jest przydatnym narzędziem do konstrukcji metryk.

19.8 Lemat.
Niech X będzie niepustym zbiorem, a $\alpha\colon X\times X\to\mathbb{R}_+$ funkcją spełniającą następujące warunki dla wszelkich $x,y,z,w\in X$:

(Q1) $\alpha(x,x)=0$;

(Q2) $\alpha(y,x)=\alpha(x,y)$;

(Q3) $\alpha(x,w)\leqslant 2\max(\alpha(x,y),\alpha(y,z),\alpha(z,w))$.

Niech funkcja $\varrho\colon X\times X\to\mathbb{R}_+$ będzie dana wzorem:

$$\varrho(a,b)\overset{\text{def}}{=}\inf\left\{\sum_{k=1}^{n}\alpha(x_{k-1},x_k)\colon\ n>0,\ x_0,\dots,x_n\in X,\ x_0=a,\ x_n=b\right\}.$$

Wtedy ϱ jest pseudometryką na X, taką że:

$$\forall x,y\in X\colon\ \frac{1}{2}\alpha(x,y)\leqslant\varrho(x,y)\leqslant\alpha(x,y). \tag{19:4}$$

Dowód. Na potrzeby tego dowodu, (dowolne) skończone układy punktów z X postaci $x_0,\dots,x_n$ będziemy nazywać *ścieżkami od x_0 do x_n*. Liczbę $\sum_{k=1}^{n}\alpha(x_{k-1},x_k)$ będziemy nazywać *długością* takiej ścieżki, a liczbę n jej *rozmiarem*.

Jest jasne, że $\varrho\geqslant 0$ oraz że $\varrho\leqslant\alpha$ (bo a,b to ścieżka od a do b), a stąd $\varrho(x,x)=0$ dla $x,y\in X$. Równie łatwo sprawdzamy, że ϱ jest funkcją symetryczną (jeśli bowiem $x_0,\dots,x_n$ to ścieżka od a do b, to $x_n,\dots,x_0$ to ścieżka od b do a o tej samej długości) spełniającą nierówność trójkąta (gdyż „złączenie” ścieżki od a do b ze ścieżką od b do c jest ścieżką od a do c o długości równej sumie długości tych dwóch ścieżek). Tym samym ϱ to pseudometryka i wystarczy pokazać, że $\varrho\geqslant\frac{1}{2}\alpha$. Nierówność ta jest równoważna następującej:

$$\forall x_0,\dots,x_n\in X\colon\ \sum_{k=1}^{n}\alpha(x_{k-1},x_k)\geqslant\frac{1}{2}\alpha(x_0,x_n). \tag{19:5}$$

Powyższą nierówność wykażemy indukcją względem rozmiaru n ścieżki. Dla $n=1$ jest ona natychmiastowa.

Załóżmy, że dla pewnej liczby $n>1$ nierówność (19:5) jest prawdziwa dla wszystkich ścieżek o rozmiarze mniejszym od n. Rozważmy dowolną ścieżkę o rozmiarze n, powiedzmy $x_0,\dots,x_n$, i dla uproszczenia oznaczmy $p\overset{\text{def}}{=}\sum_{k=1}^{n}\alpha(x_{k-1},x_k)$. Rozważamy 2 przypadki:

Przypadek 1: $\alpha(x_0,x_1)\geqslant\frac{1}{2}p$ lub $\alpha(x_{n-1},x_n)\geqslant\frac{1}{2}p$.

Zastępując ewentualnie ścieżkę $x_0,\dots,x_n$ przez $x_n,\dots,x_0$, drugi z powyższych warunków sprowadzamy do pierwszego (z zastosowaniem (Q2)). Tym samym możemy założyć, bez straty ogólności, że $\alpha(x_0,x_1)\geqslant\frac{1}{2}p$. Wtedy $\frac{1}{2}p=p-\frac{1}{2}p\geqslant p-\alpha(x_0,x_1)=\sum_{k=2}^{n}\alpha(x_{k-1},x_k)\geqslant\frac{1}{2}\alpha(x_1,x_n)$, przy czym ostatnia nierówność wynika z założenia indukcyjnego zastosowanego do ścieżki $x_1,\dots,x_n$. Tak więc $\alpha(x_1,x_n)\leqslant p$ oraz $\alpha(x_0,x_1)\leqslant p$. Podstawiając $x=x_0,y=x_0,z=x_1,w=x_n$ do (Q3), uwzględniając (Q1) otrzymujemy $\alpha(x_0,x_n)\leqslant 2p$, co jest równoważne (19:5).

Przypadek 2: $\alpha(x_0,x_1)<\frac{1}{2}p$ oraz $\alpha(x_{n-1},x_n)<\frac{1}{2}p$.

Wtedy $n>2$ i $p>0$. Oznaczmy przez $r>0$ największą liczbę z zestawu $\{1,\dots,n\}$, taką że

$$\sum_{k=1}^{r}\alpha(x_{k-1},x_k)\leqslant\frac{1}{2}p. \tag{19:6}$$

Zauważmy, że $1\leqslant r\leqslant n-2$, gdyż $\sum_{k=1}^{n-1}\alpha(x_{k-1},x_k)=p-\alpha(x_{n-1},x_n)>\frac{1}{2}p$. Z maksymalności r wynika, że $\sum_{k=1}^{r+1}\alpha(x_{k-1},x_k)>\frac{1}{2}p$ i w konsekwencji

$$\sum_{k=r+2}^{n}\alpha(x_{k-1},x_k)<\frac{1}{2}p \tag{19:7}$$

(jako że lewe strony obu tych nierówności sumują się do p). Stosując założenie indukcyjne do ścieżek $x_0,\dots,x_r$ oraz $x_{r+1},\dots,x_n$, otrzymujemy nierówności $\frac{1}{2}\alpha(x_0,x_r)\leqslant\sum_{k=1}^{r}\alpha(x_{k-1},x_k)$ oraz $\frac{1}{2}\alpha(x_{r+1},x_n)\leqslant\sum_{k=r+2}^{n}\alpha(x_{k-1},x_k)$, które w połączeniu z (19:6) i, odpowiednio, (19:7) dają $\alpha(x_0,x_r)\leqslant p$ i $\alpha(x_{r+1},x_n)\leqslant p$. Oczywiście także $\alpha(x_r,x_{r+1})\leqslant p$, więc warunek (Q3) zastosowany do $x=x_0,y=x_r,z=x_{r+1},w=x_n$ daje ostatecznie $\alpha(x_0,x_n)\leqslant 2p$, co kończy cały dowód. $\square$

19.9 Wniosek.
Niech $\gamma\colon G \to \mathbb{R}_+$ będzie dowolną funkcją na grupie $(G, \cdot)$, która spełnia następujące warunki dla wszelkich $x, y, z \in G$:

(GQ1) $\gamma(x) = 0$;

(GQ2) $\gamma(x^{-1}) = \gamma(x)$;

(GQ3) $\gamma(xyz) \leqslant 2\max(\gamma(x), \gamma(y), \gamma(z))$.

Wtedy istnieje półwaluacja $p\colon G \to \mathbb{R}_+$, taka że

$$\forall x \in G\colon\ \frac{1}{2}\gamma(x) \leqslant p(x) \leqslant \gamma(x). \tag{19:8}$$

Dowód. Niech funkcja $\alpha\colon G \times G \to \mathbb{R}_+$ będzie dana wzorem $\alpha(x, y) \overset{\text{def}}{=} \gamma(x^{-1}, y)$. Zauważmy, że wtedy

$$\forall x, y, a \in G\colon\ \alpha(ax, ay) = \alpha(x, y) \tag{19:9}$$

oraz spełnione są warunki (Q1)–(Q3) Lem. 19.8. Istotnie, wystarczy sprawdzić jedynie (Q3). Dla $x, y, z, w \in G$ mamy: $\alpha(x, w) = \gamma(x^{-1}y \cdot y^{-1}z \cdot z^{-1}w) \overset{(GQ3)}{\leqslant} 2\max(\gamma(x^{-1}y), \gamma(y^{-1}z), \gamma(z^{-1}w)) = 2\max(\alpha(x, y), \alpha(y, z), \alpha(z, w))$. Niech teraz ϱ będzie funkcją z wypowiedzi przywołanego lematu. Wiemy, że jest to pseudometryka spełniająca (19:4). Ponadto, z samej definicji tej funkcji oraz z (19:9) wynika, że ϱ jest pseudometryką lewo-niezmienniczą. W takim razie funkcja $p \overset{\text{def}}{=} q_\varrho$ jest półwaluacją na G. Zachodzi przy tym (19:8) (dzięki (19:4)). □

Z pomocą powyższego wniosku wykażemy najpierw szczególny przypadek Twierdzenia Markowa:

19.10 Lemat. (Klasyczne Twierdzenie Markowa)
Dla dowolnego e-otoczenia V grupy topologicznej G istnieje ciągła półwaluacja $p\colon G \to [0, 1]$, taka że $B_p(1) \subset V$.

Dowód. Możemy założyć, że $V \neq G$. Rozpoczynając od $U_0 \overset{\text{def}}{=} G$ oraz $U_1 \overset{\text{def}}{=} \operatorname{int}(V \cap V^{-1})$ i stosując wielokrotnie własność (D5) z Obs. 19.5, indukcyjnie konstruujemy otwarte symetryczne e-otoczenia U_n, takie że $U_n^3 \subset U_{n-1}$. Niech dodatkowo $U_\infty \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. (Zauważmy, że $U_k \subset U_j$, gdy $0 \leqslant j \leqslant k \leqslant \infty$). Określamy funkcję $\gamma\colon G \to [0, 1]$ wzorem:

$$\gamma(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & x \in U_\infty \\ \min\{2^{-n}\colon\ n \geqslant 0,\ x \in U_n\} & x \notin U_\infty \end{cases}.$$

Ponieważ zbiory U_k są symetryczne, funkcja γ spełnia warunki (GQ1) i (GQ2) z Wn. 19.9. Pokażemy teraz, że także warunek (GQ3) jest spełniony. W tym celu ustalmy $x, y, z \in G$ i zauważmy, że:

$$\forall w \in G\colon\ \gamma(w) = \inf\{2^{-n}\colon\ n \in \mathbb{N}_0,\ x \in U_n\}.$$

Niech teraz $j, k, m \in \mathbb{N}_0$ będą takie, że $x \in U_j$, $y \in U_k$ oraz $z \in U_m$. Oznaczmy $n \overset{\text{def}}{=} \min(j, k, l)$. Jeśli $n > 0$, wtedy na pewno $\gamma(xyz) \leqslant 2 = 2^{1-n}$. A gdy $n > 0$, wtedy $xyz \in U_jU_kU_m \subset U_n^3 \subset U_{n-1}$, co daje $\gamma(xyz) \leqslant 2^{1-n} = 2\max(2^{-j}, 2^{-k}, 2^{-m})$. Tym samym w obu przypadkach zachodzi

$$\gamma(xyz) \leqslant 2\max(2^{-j}, 2^{-k}, 2^{-m}).$$

Przechodząc w powyższej nierówności do infimum po (j, k, m), takich że $x \in U_j$, $y \in U_k$ i $z \in U_m$, otrzymujemy nierówność z (GQ3). Tak więc Wn. 19.9 zapewnia nam istnienie półwaluacji $q\colon G \to \mathbb{R}_+$, takiej że $\frac{1}{2}\gamma \leqslant q \leqslant \gamma$. Oznacza to w szczególności, że $U_n \subset B_q(2^{1-n})$ dla $n < \infty$[*23)], co dowodzi ciągłości funkcji q (dzięki warunkowi (D14) z Obs. 19.5). Co więcej, $B_q(\frac{1}{2}) \subset U_1 \subset V$[*24)]. Tym samym $p \overset{\text{def}}{=} \min(2q, 1)$ jest szukaną półwaluacją. □

Dowód Tw. 19.7. Dla dowolnego indeksu $n > 0$, z Lem. 19.10 dobieramy ciągłą półwaluację $q_n\colon G \to [0, 1]$, taką że $B_{q_n}(1) \subset U_n$. Określamy szukaną półwaluację wzorem:

$$p(x) \overset{\text{def}}{=} \sup_{n>0} r_n q_n(x) \quad \in [0, \sup_{n>0} r_n].$$

[*23)] Bo: $x \in U_n$, to $q(x) \leqslant \gamma(x) \leqslant 2^{-n} < 2^{1-n}$.
[*24)] Bo: $q(x) < \frac{1}{2}$, to $\gamma(x) \leqslant 2q(x) < 1$, co oznacza, że $x \notin U_0 \setminus U_1$, czyli $x \in U_1$.

Elementarnie sprawdzamy, że p to półwaluacja (ćwiczenie). Widać też, że $B_p(r_n) \subset B_{q_n}(1)$, więc $B_p(r_n) \subset U_n$ dla $n > 0$. Pozostaje sprawdzić ciągłość funkcji p. Na mocy warunku (D14) wystarczy sprawdzić, że jest to funkcja ciągła w e_G. W tym celu ustalmy $\varepsilon > 0$ i dobierzmy indeks $N > 0$, taki że $r_n < \varepsilon/2$ dla $n > N$. Dla $n = 1, \ldots, N$ niech V_n będzie takim e-otoczeniem, że $V_n \subset B_{q_n}(\varepsilon/r_n)$. Wtedy zbiór $W \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{n=1}^{N} V_n$ jest e-otoczeniem zawartym w $B_p(\varepsilon)$. Istotnie, jeśli $x \in W$, to $r_n q_n(x) < \varepsilon$ dla $n = 1, \ldots, N$ oraz $r_n q_n(x) \leqslant r_n \leqslant \varepsilon/2$ dla $n > N$, więc $p(x) < \varepsilon$ — i teza. □

19.11 Wniosek.
Każda grupa topologiczna T_0 jest $T_{3\frac{1}{2}}$.

Dowód. Niech G będzie grupą topologiczną T_0, $A = \bar{A} \subset G$ oraz $a \in G \setminus A$. Wtedy zbiór $U \overset{\text{def}}{=} G \setminus a^{-1}A$ jest e-otoczeniem, więc z Klasycznego Twierdzenia Markowa wynika istnienie ciągłej półwaluacji $p\colon G \to [0,1]$, takiej że $B_p(1) \subset U$. Wtedy funkcja $u\colon G \ni x \mapsto p(a^{-1}x) \in [0,1]$ jest ciągła, znika w a i jest stale równa 1 na zbiorze A (bo poza zbiorem U funkcja p jest stale równa 1). □

Twierdzenie Markowa ma jeszcze jedną, zaskakującą, konsekwencję:

19.12 Twierdzenie. (Twierdzenie Birkhoffa-Kakutaniego)
Grupa topologiczna jest metryzowalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest T_0 i spełnia I A.P.

Co więcej, jeśli grupa topologiczna jest metryzowalna, jej topologia pochodzi od pewnej metryki lewo-niezmienniczej.

Dowód. Wystarczy wykazać, że topologia grupy topologicznej G, która jest T_0-przestrzenią spełniającą I A.P., jest wyznaczona przez pewną metrykę lewo-niezmienniczą. W tym celu ustalamy bazę otwartych e-otoczeń $V_1, V_2, \ldots$ grupy G. Ponieważ G jest T_3,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \{e_G\}. \tag{19:10}$$

Na podstawie Tw. 19.7 istnieje ciągła półwaluacja p na G, taka że

$$B_p(2^{-n}) \subset V_n \tag{19:11}$$

dla wszelkich $n > 0$. W konsekwencji, p jest waluacją (dzięki (19:10)). Aby zakończyć dowód, wystarczy pokazać, że funkcja p spełnia implikację z punktu (D15) Obs. 19.5. A to wynika natychmiast z (19:11): jeśli ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset G$ jest taki, że $\lim_{n\to\infty} p(x_n) = 0$, to dla dowolnie zadanej liczby $k > 0$ znajdziemy indeks $N > 0$, taki że $p(x_n) < 2^{-k}$ dla $n > N$. W konsekwencji, dla takichż n, $x_n \in V_k$, czyli $x_n \to e_G$ w pierwotnej topologii grupy G, gdyż zbiory $V_1, V_2, \ldots$ tworzą bazę e-otoczeń. □

Operacja tworzenia struktury ilorazowej (względem pewnej relacji równoważności) jest szczególnie ważna w kontekście struktur algebraicznych. Grupy, w tym topologiczne, stanowią najprostszy ich przykład. W szczególności, każda podgrupa H grupy topologicznej G wyznacza dwie przestrzenie (ilorazowe): warstw lewostronnych oraz prawostronnych. Możemy więc mówić o topologii ilorazowej na tych przestrzeniach. Szczególnie ważna jest sytuacja, gdy obie te przestrzenie ilorazowe się pokrywają — ma to miejsce dokładnie wtedy, gdy przestrzeń ilorazowa posiada naturalną strukturę grupy; czyli wtedy, gdy grupa H jest podgrupą normalną grupy G. Poniżej omawiamy elementarz dotyczący ilorazowych grup topologicznych.

19.13 Twierdzenie.
Niech G będzie grupą topologiczną, H jej podgrupą normalną, a $\pi\colon G \to G/H$ rzutowaniem kanonicznym.

(a) *Grupa ilorazowa G/H jest T_0 wtedy i tylko wtedy, gdy H jest zbiorem domkniętym.*

(b) *Homomorfizm π jest odwzorowaniem otwartym.*

(c) *Jeśli $u\colon G \to M$ jest homomorfizmem grup topologicznych, takim że $H \subset \ker(u)$, to istnieje dokładnie jeden ciągły homomorfizm $\tilde{u}\colon G/H \to M$, taki że $u = \tilde{u} \circ \pi$. Ponadto:*

- $\ker(\tilde{u}) = \pi(\ker(u))$ *oraz* $\operatorname{im}(\tilde{u}) = \operatorname{im}(u)$;

- *odwzorowanie $\tilde{u}$ jest otwarte wtedy i tylko wtedy, gdy odwzorowanie u jest takież;*
- *$\tilde{u}$ jest izomorfizmem grup topologicznych wtedy i tylko wtedy, gdy $H = \ker(u)$ oraz u jest otwartym epimorfizmem.*

(d) *Jeśli grupa G jest [lokalnie] zwarta T_2, a H jest podgrupą domkniętą, wtedy także grupa G/H jest [lokalnie] zwarta T_2.*

Dowód. Dla uproszczenia oznaczmy $K \stackrel{\text{def}}{=} G/H$.

(a): Z Obs. 19.5 wiemy, że: K jest $T_0 \iff K$ jest $T_1 \iff \{e_K\}$ jest zbiorem domkniętym (bo translacje to homeomorfizmy) $\iff H = \pi^{-1}(\{e_K\})$ jest zbiorem domkniętym w G.

(b): Dla dowolnego zbioru otwartego $U \subset G$ zachodzi równoważność: $\pi(U)$ jest zbiorem otwartym w $K \iff \pi^{-1}(\pi(U))$ jest zbiorem otwartym w G. Ale $\pi^{-1}(\pi(U)) = H \cdot U$, a zbiory tej postaci są otwarte.

(d): Ponieważ w klasie grup topologicznych aksjomaty T_0 i T_2 są równoważne, z (a) wiemy, że grupa K jest T_2. Ponadto, z (b) wynika, że jeśli $C \subset G$ jest zbiorem zwartym o niepustym wnętrzu, to także zbiór $\pi(C)$ jest zwarty i ma niepuste wnętrze w K. Stąd [lokalna] zwartość grupy G implikuje [lokalną] zwartość grupy K.

(c): Z podstawowego twierdzenia o epimorfizmie (zastosowanego do homomorfizmu $u\colon G \to u(G)$) wynika istnienie homomorfizmu $\tilde{u}\colon K \to M$, takiego że $u = \tilde{u} \circ \pi$. Z tego wzoru i z suriektywności funkcji π wynika, że odwzorowanie $\tilde{u}$ jest jednoznaczne oraz że $\operatorname{im}(u) = \operatorname{im}(\tilde{u})$. Ponadto, dla $x \in G$ mamy: $\tilde{u}(\pi(x)) = e_K \iff u(x) = e_K \iff x \in \ker(u)$, co uzasadnia, że $\ker(\tilde{u}) = \pi(\ker(u))$. Z Obs. 19.2 wnosimy, że $\tilde{u}$ jest funkcją ciągłą. Dalej, jeśli $\tilde{u}$ jest odwzorowaniem otwartym, to u, jako złożenie dwóch odwzorowań otwartych, także jest odwzorowaniem otwartym. Odwrotnie, jeśli u to odwzorowanie otwarte, to dla dowolnego zbioru otwartego $V \subset K$ zachodzi równość $V = \pi(\pi^{-1}(V))$, więc $\tilde{u}(V) = (\tilde{u} \circ \pi)(\pi^{-1}(V)) = u(\pi^{-1}(V))$, czyli zbiór $\tilde{u}(V)$ jest otwarty. Na koniec zauważmy, że $\tilde{u}$ jest izomorfizmem grup topologicznych wtedy i tylko wtedy, gdy jest to otwarta bijekcja. Z powyższych rozumowań wynika, że:

- $\ker(\tilde{u}) = \{e_K\} \iff \pi(\ker(u)) = \{e_K\} \iff \ker(u) \subset H \iff \ker(u) = H$ (bo $H \subset \ker(u)$);
- $\operatorname{im}(\tilde{u}) = M \iff u(G) = M$,

co w połączeniu z charakteryzacją otwartości odwzorowania $\tilde{u}$ kończy dowód. □

Punkt (c) powyższego twierdzenia świadczy o tym, że w kategorii grup topologicznych otwarte homomorfizmy są szczególnie ważne. Dlatego twierdzenia o „automatycznej” otwartości homomorfizmów są cenne. Poniżej podajemy jedno z nich. To, co zasługuje w nim na szczególną uwagę, to krótkość i prostota dowodu.

19.14 Twierdzenie.
Jeśli $u\colon G \to H$ jest epimorfizmem lokalnie zwartych grup topologicznych T_2 i grupa G jest σ-zwarta, to u jest odwzorowaniem otwartym.

Jak zobaczymy w dowodzie, grupa H nawet nie musi być lokalnie zwarta — wystarczy, że jest T_2 i zachodzi dla niej twierdzenie Baire'a (i wtedy, w sytuacji z powyższego twierdzenia automatycznie będzie to grupa lokalnie zwarta).

Dowód. Zgodnie z Obs. 19.5, wystarczy pokazać, że dla dowolnego e-otoczenia V grupy G zbiór $u(V)$ ma niepuste wnętrze. W tym celu dobieramy zwarte e-otoczenie K, takie że $K \subset V$. Z σ-zwartości grupy G wynika, że istnieje ciąg $(g_n)_{n=1}^{\infty}$, taki że $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} g_n \operatorname{int}(K)$. Wtedy tym bardziej $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} u(g_n)u(K)$. Zbiory $u(g_n)u(K)$ są domknięte (jako zwarte w T_2), więc z Tw. 13.14 (str. 79) wynika, że $\operatorname{int}(u(g_N)u(K)) \neq \varnothing$ dla pewnego indeksu N. Ale $\operatorname{int}(u(g_N)u(K)) = u(g_N)\operatorname{int}(u(K))$, więc zbiór $u(V) \supset u(K)$ ma niepuste wnętrze. □

19.15 ***Uwaga****.*
Oprócz grup lokalnie zwartych, szczególnie ważne w matematyce są tzw. grupy *polskie*, czyli ośrodkowe i metryzowalne w sposób zupełny grupy topologiczne. Dla takich grup zachodzi analogon Tw. 19.14 (jednakże jego dowód jest trudniejszy):

> *Ciągły epimorfizm między grupami polskimi jest odwzorowaniem otwartym.*

19.16 Przykład.

(A) $(\mathbb{C},+),(\mathbb{R},+),(\mathbb{Q},+)$ to grupy topologiczne. Tylko pierwsze dwie z nich są lokalnie zwarte. Podobnie, $(\mathbb{C}_*,\cdot),(\mathbb{R}_*,\cdot),(\mathbb{Q}_*,\cdot)$, gdzie $\mathbb{K}_* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{K}\setminus\{0\}$, to grupy topologiczne, z których tylko dwie pierwsze są lokalnie zwarte. $(\mathbb{T},\cdot)$ to zwarta grupa topologiczna.

(B) Niech $\mathbb{K}$ oznacza jedno z ciał $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$. Dla $n>0$ zbiór $M_n(\mathbb{K})$ macierzy kwadratowych stopnia n o wyrazach w $\mathbb{K}$ możemy w naturalny sposób utożsamić z przestrzenią $\mathbb{K}^n$. Jej podzbiór $GL_n(\mathbb{K})$ złożony z macierzy odwracalnych jest grupą z elementem neutralnym $I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$. Ze wzorów na mnożenie macierzy, na wyznacznik oraz na macierz odwrotną wnioskujemy, że $GL_n(\mathbb{K})$ jest grupą topologiczną. Ponadto, jest to zbiór otwarty w $M_n(\mathbb{K})$, gdyż wyznacznik jest funkcją ciągłą oraz $GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K})\colon\ \det(A)\neq 0\}$. Tym samym $GL_n(\mathbb{K})$ to grupa lokalnie zwarta.

Dowodzi się, że:

- grupa $GL_n(\mathbb{C})$ jest spójna dla wszelkich $n>0$, a jednospójna dla $n>1$;
- grupa $GL_n(\mathbb{R})$ ma 2 składowe dla wszelkich $n>0$ oraz

$$\pi_1(GL_n(\mathbb{R}),I) \cong \begin{cases} 0 & n=1 \\ \mathbb{Z} & n=2 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & n>2 \end{cases}.$$

(C) Dla $A\in M_n(\mathbb{C})$ niech A^t oznacza macierz transponowaną, $\bar{A}$ macierz, która powstała z macierzy A przez sprzężenie jej wyrazów, i niech $A^* \stackrel{\text{def}}{=} \bar{A}^t$. Niech

$$U_n \stackrel{\text{def}}{=} \{A\in M_n(\mathbb{C})\colon\ A^*A = I\}$$

oraz

$$O_n \stackrel{\text{def}}{=} \{A\in M_n(\mathbb{R})\colon\ A^tA = I\}.$$

U_n to *grupa macierzy unitarnych stopnia n*, a O_n to *grupa macierzy ortogonalnych stopnia n*. Stosunkowo łatwo dowodzi, się, że są to grupy zwarte i że $U_1\cong\mathbb{T}$ oraz $O_1\cong\{-1,1\}$. Znacznie trudniejsze w dowodzie są następujące własności dla $n>1$:

- grupa U_n jest spójną rozmaitością i $\pi_1(U_n)\cong\mathbb{Z}$;
- grupa O_n jest rozmaitością o dwóch składowych i $\pi_1(O_2)\cong\mathbb{Z}$ oraz $\pi_1(O_n)\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dla $n>2$.

(D) W kontekście grup macierzy dopisanie do symbolu grupy przedrostka w postaci wielkiej litery „S" oznacza ograniczenie się do macierzy o wyznaczniku 1. I tak:

- $SL_n(\mathbb{K}) \stackrel{\text{def}}{=} \{A\in M_n(\mathbb{K})\colon\ \det(A)=1\}$ $(\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C})$;
- $SU_n \stackrel{\text{def}}{=} \{A\in U_n\colon\ \det(A)=1\}$;
- $SO_n \stackrel{\text{def}}{=} \{A\in O_n\colon\ \det(A)=1\}$.

Nazwy powyższych grup powstają przez dodanie przymiotnika „specjalna". I tak: $SL_n(\mathbb{C})$ (odp. $SL_n(\mathbb{R})$) to *specjalna grupa macierzy zespolonych* (odp. *rzeczywistych*), SU_n to *specjalna grupa macierzy unitarnych*, a SO_n to *specjalna grupa macierzy ortogonalnych*. Oczywiście wszystkie te grupy dla $n=1$ są trywialne. Dowodzi się, że dla $n>1$ wszystkie te grupy to spójne rozmaitości (SO_n to składowa grupy O_n) oraz:

- grupy $SL_n(\mathbb{C})$ oraz SU_n są jednospójne (przestrzeń SU_2 jest homeomorficzna ze sferą $\mathbb{S}^3$);
- grupy topologiczne SO_2 i $\mathbb{T}$ są izomorficzne; $\pi_1(SL_2(\mathbb{R}))\cong\mathbb{Z}$;
- $\pi_1(SL_n(\mathbb{R}))\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\cong\pi_1(SO_n)$ dla $n>2$.

(E) Dla $n>0$ grupę *symplektyczną* Sp_n (czasem oznaczaną także przez Sp_{2n}) definiuje się jako zbiór macierzy $W\in U_{2n}$ postaci $W = \begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}$. Dowodzi się, że $Sp_n\subset SU_{2n}$ oraz że Sp_n to jednospójna zwarta rozmaitość. Ponadto, dość łatwo pokazuje się, że grupy topologiczne Sp_1 i SU_2 są (w naturalny sposób) izomorficzne.

Wprowadzone powyżej grupy SO_n, SU_n oraz Sp_n można opisać w zunifikowany sposób (przy czym zamiast grupy Sp_n otrzymamy grupę w naturalny sposób z nią izomorficzną): są to grupy wszystkich macierzy stopnia n (o wyznaczniku 1, gdy mowa o SO_n i SU_n) o wyrazach, odpowiednio, w $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ i $\mathbb{K}=\mathbb{H}$ (gdzie $\mathbb{H}$ to „nieprzemienne ciało" kwaternionów), które traktowane jako odwzorowania $\mathbb{K}$-liniowe na $\mathbb{K}^n$ zachowują pewien standardowy „iloczyn skalarny" o wyrazach w $\mathbb{K}$.

(F) Dla dowolnej grupy G oznaczmy przez $Z(G)$ *centrum* grupy G, tj.: element $g \in G$ należy do $Z(G)$, gdy $gx = xg$ dla wszelkich $x \in G$. Jak łatwo się przekonać, centrum grupy topologicznej T_0 jest domkniętą podgrupą normalną.

W kontekście grup macierzowych dopisanie do symbolu grupy G, której centrum jest grupą dyskretną, przedrostka w postaci wielkiej litery „P" oznacza przejście do grupy ilorazowej $G/Z(G)$. Mówimy wtedy o grupach rzutowych. W ten sposób powstają klasyczne grupy rzutowe: $PSL_n(\mathbb{C})$, $PSL_n(\mathbb{R})$, PSU_n, PSO_n (bez PSO_2, gdyż SO_2 to grupa przemienna) i PSp_n (wszystkie występujące tutaj grupy, z których wyprodukowano grupy rzutowe, mają dyskretne centra). Zauważmy przy tym, że dla $n = 1$ wszystkie te grupy poza PSp_1 to grupy trywialne. Wszystkie pozostałe grupy rzutowe to spójne rozmaitości, z których jedynie $PSL_n(\mathbb{C})$ i $PSL_n(\mathbb{R})$ nie są zwarte. Zachodzą także następujące, dalece nietrywialne związki:

- $PSp_1 \cong PSU_2 \cong PSO_3$;
- $PSp_2 \cong PSO_5$;
- $PSU_4 \cong PSO_6$;
- $PSO_4 \cong PSU_2 \times PSU_2$.

Tym samym, jeśli chodzi o zwarte klasyczne grupy rzutowe, można ograniczyć się do grup: PSO_n ($n \geqslant 7$), PSU_n ($n \geqslant 3$) i PSp_n ($n \geqslant 1$). Wszystkie wymienione tutaj (w poprzednim zdaniu) grupy mają jedną wspólną cechę: są *topologicznie proste*, tzn. są nietrywialne i mają tylko 2 domknięte podgrupy normalne. Dowód tej własności jest trudny.

19.17 Przykład.
Niech (X, d) będzie niepustą przestrzenią metryczną.

(A) *Grupa izometrii* przestrzeni (X, d) to grupa $\mathrm{Iso}(X, d)$, której elementami są wszystkie (bijektywne) izometrie przestrzeni (X, d), z działaniem składania. Grupa ta, wyposażona w topologię zbieżności punktowej (czyli topologię indukowaną z topologii produktowej przestrzeni X^X), jest grupą topologiczną (ćwiczenie).

(B) Załóżmy, że przestrzeń X jest zwarta. Dla funkcji $f, g \in C(X, X)$ określamy odległość jednostajną jako:

$$D(f, g) \overset{\text{def}}{=} \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)).$$

Zbiór $\mathrm{Homeo}(X)$ wszystkich (bijektywnych) homeomorfizmów przestrzeni X jest grupą przekształceń. Wyposażony w metrykę

$$\varrho(u, v) \overset{\text{def}}{=} D(u, v) + D(u^{-1}, v^{-1}) \qquad (u, v \in \mathrm{Homeo}(X))$$

staje się grupą topologiczną (ćwiczenie). Dowodzi się, że powyższa metryka ϱ, która w wielu przypadkach nie jest ani lewo-, ani prawo-niezmiennicza, jest (zawsze — dla zwartej przestrzeni X) zupełna, a topologia grupy $\mathrm{Homeo}(X)$ nie zależy od wyboru metryki d na X zgodnej z topologią. Mimo to na tej grupie może nie istnieć zupełna metryka lewo-niezmiennicza zgodna z topologią. Jest tak np. gdy $X = [0, 1]$ (ćwiczenie).

19.18 ***Uwaga.***
Przypomnijmy, że grupa (bez topologii) jest *prosta*, gdy zawiera dokładnie dwie podgrupy normalne (trywialną i pełną). W analogiczny sposób definiuje się proste grupy topologiczne: grupa topologiczna T_2 jest *prosta*, jeśli zawiera dokładnie dwie **domknięte** podgrupy normalne. Klasyfikacja zwartych grup prostych to jedna z najbarwniejszych kart matematyki i zarazem jeden z najtrudniejszych problemów, które obecnie uważa się za rozwiązane. Oto kilka informacji na ten temat:

- Każda zwarta grupa prosta albo jest prostą grupą skończoną, albo jest spójną grupą *Lie*, tzn. jest (gładką) rozmaitością topologiczną.
- Każda zwarta grupa prosta jest grupą prostą (tzn. ma tylko dwie podgrupy normalne niekoniecznie domknięte).
- Spójne zwarte grupy proste zostały sklasyfikowane przez Wilhelma Killinga i Élie Cartana na przełomie XIX i XX wieku. Ta część klasyfikacji nie wzbudza żadnych „obaw" — jest klarowna i istnieje wiele kompletnych dowodów.

- Klasyfkację prostych grup skończonych uznano za zakończoną ok. 1983 roku. Mimo to jeszcze w 2008 roku pojawiły się poprawki od dawna istniejących dowodów. Wkład w klasyfikację miało kilkuset matematyków, a łączna liczba stron spisanych dowodów wyraża się w tysiącach. Do dziś nie istnieje pozycja książkowa, która omawiałaby ten temat w sposób wyczerpujący. Z tego względu raczej przyjmuje się „na wiarę", że klasyfikacja jest ukończona, niż bezkrytycznie stwierdza, że znamy już wszystkie skończone grupy proste.

- To, co po dziś dzień fascynuje wielu matematyków, to niezwykle skromna liczba (5) tzw. *wyjątkowych* prostych spójnych grup zwartych. Przymiotnik „wyjątkowe" (ang. *exceptional*) wiąże się z tym, że wszystkie pozostałe spójne zwarte grupy proste tworzą 3 ciągi klasycznych grup prostych: PSO_n ($n \geqslant 7$), PSU_n ($n \geqslant 3$) i PSp_n ($n \geqslant 1$) (por. Prz. 19.16). Każdy z tych ciągów związany jest z jedną z trzech skończenie wymiarowych algebr z dzieleniem nad ciałem $\mathbb{R}$ (w których elementy z $\mathbb{R}$ są centralne). (Zgodnie z twierdzeniem Frobeniusa, są tylko 3 takie algebry: ciała $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ oraz „nieprzemienne ciało" kwaternionów $\mathbb{H}$). Więcej szczegółów: `https://en.wikipedia.org/wiki/Simple_Lie_group#Compact`.

- Istnieją tylko trzy jednospójne zwarte grupy proste. Wszystkie one należą do wyjątkowych grup Liego i mają wymiary (jako rozmaitości): 14, 52, 248. (Dwie pozostałe wyjątkowe proste grupy Liego mają wymiary 78 i 133; ich grupy podstawowe to grupy cykliczne rzędu, odpowiednio, 3 i 2).

- Na liście skończonych grup prostych także występuje kilka ciągów klasycznych grup. Oprócz nich pojawiają się tzw. grupy wyjątkowe (ang. *exceptional*) oraz sporadyczne (ang. *sporadic*; jedni autorzy mówią o 26 grupach sporadycznych, inni o 27). Więcej szczegółów:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Classification_of_finite_simple_groups`
oraz: Robert A. Wilson, *The Finite Simple Groups*, Springer-Verlag, London, 2009.

20 Dodatek: słowniczek polsko-angielski

aksjomat oddzielania = a *separation axiom*

baza (topologii) = a *basis* or a *base*

baza otoczeń = a *neighbo(u)rhood basis*

całkowicie niespójna (o przestrzeni) = *totally disconnected*

całkowicie ograniczona (o przestrzeni) = *totally bounded*

całkowicie regularna = a *completely regular*

charakter gęstości (przestrzeni) = the *density character*

charakter punktowy (przestrzeni) = the *point character*

charakter w punkcie (przestrzeni) = the *character at a/the point*

ciąg („zwykły") = a *sequence*

Cauchy'ego (o ciągu) = *fundamental* or *Cauchy*

ciąg uogólniony = a *net*

ciągła funkcja = a *continuous function* or a *map*

ciągła w punkcie (o funkcji) = a *continuous at a/the point*

ciągowo domknięty (o zbiorze) = *sequentially closed*

ciągowo zwarta (o przestrzeni) = *sequentially compact*

brzeg = the *boundary*

brzegowy (o zbiorze) = *boundary*

domknięcie = the *closure*

ciężar topologiczny = the *topological weight*

domknięty (o zbiorze, kuli lub odwzorowaniu) = *closed*

doskonale normalna (o przestrzeni) = *perfectly normal*

droga (od punktu a do b) = a *curve (from a to b)*

drogowo spójna (o przestrzeni) = *pathwise connected*

drugiej kategorii Baire'a (o zbiorze) = *non-meagre* or *non-meager* or *of second (Baire) category*

dylatacja = a *dilation*

dylatacyjne (o odzworowaniu) = *dilational*

dyskretny (o metryce, topologii, rodzinie lub podzbiorze) = *discrete*

dziedziczna (o własności) = *hereditary*

dziedzicznie niespójna (o przestrzeni) = *hereditary disconnected*

dziedzicznie normalna (o przestrzeni) = *hereditary normal*

ekstremalnie niespójna (o przestrzeni) = *extremally disconnected*

euklidesowa (o metryce lub topologii) = *Euclidean*

filtr = a *filter*

funkcja lipschitzowska = a *Lipschitz function/map/mapping*

gęsty (o zbiorze) = *dense*

granica = the *limit*

grupa podstawowa = the *fundamental group*

Hausdorffa [przestrzeń] = a *Hausdorff* [*space*]

homeomorfizm = a *homeomorphism*

homotopia = a *homotopy*

homotopijne (o odzworowaniach) = *homotopic*

ilorazowa (topologia) = *quotient*

indukowana (o metryce lub topologii) = *induced*

izometria = an *isometry*

izometryczne (o odzworowaniu lub przestrzeniach metrycznych) = *isometric*

jednopunktowe (o uzwarceniu) = *one-point*

jednorodna (o normie) = *absolutely homogeneous*

jednospójna (o przestrzeni) = *simply connected*

jednostajnie (o zbieżności lub ciągłości) = *uniformly*

kontinuum = a *continuum*

kontinuum peanowskie = a *Peano continuum*

kostka Hilberta = the *Hilbert cube*

kostka Tichonowa = a *Tychonoff/Tikhonov cube*

k-przestrzeń = a/the *k-space*

krzywa = a *curve*

kula = a/the *ball*

liczba Lebesgue'a (pokrycia) = a *Lebesgue number*

lokalnie = *locally*

lokalnie skończona (o rodzinie zbiorów) = *locally finite*

łuk (od a do b) = an *arc (from a to b)*

łukowo spójna (o przestrzeni) = *arcwise connected*

metryczna (o przestrzeni) = *metric*

metryka = a *metric*

metryzowalna (o przestrzeni) = *metrizable*

metryzowalna w sposób zupełny (o przestrzeni) = *completely metrizable* or *complete-metrizable*

mocno zerowymiarowa (o przestrzeni) = *strongly zero-dimensional*

narost (uzwarcenia) = the *remainder*

niearchimedesowa (o metryce) = *non-Archimedean*

nieoddalająca (o funkcji) = *non-expansive*

nierówność trójkąta = the *triangle inequality*

nigdziegęsty (o zbiorze) = *nowhere dense*

normalna (o przestrzeni) = *normal*

odległość = the *distance*

odległość od zbioru (jako funkcja) = the *distance from a/the set* odwzorowanie/przekształcenie/funkcja = a *mapping/transformation/function*

ograniczona (o przestrzeni) = *bounded*

ośrodkowa (o przestrzeni) = *separable*

otoczenie = a *neighbo(u)rhood*

otwarto-domknięty (o zbiorze) = *clopen*

otwarty (o zbiorze, kuli lub odwzorowaniu) = *open*

oznaczona (o metryce lub normie) = *point-separating*

parazwarta (o przestrzeni) = *paracompact*

pełny układ otoczeń = a *full system of neighbo(u)rhood bases*

pętla = a *loop*

pierwszej kategorii Baire'a (o zbiorze) = *meagre* or *meager* or *of first* (*Baire*) *category*

płaszczyzna Niemyckiego = the *Niemytzki plane*

podciąg („zwykły") = a *subsequence*

podciąg uogólniony = a *subnet*

podpokrycie = a *subcover*

pokrycie = a *cover*

porównywalne (o metrykach) = *Lipschitz-equivalent*

półporządek = a *pre-order*

produktowa (o topologii lub własności) = *product*

prosta Sorgenfreya = the *Sorgenfrey line* or the *arrow*

punkt skupienia = a *limit/cluster point*

punktowo skończona (o rodzinie zbiorów) = *pointwise finite*

regularna (o przestrzeni) = *regular*

retrakcja = a *retraction*

retrakt = a *retract*

rezydualny (o zbiorze) = *co-meagre* or *co-meager* or *residual*

rogata sfera Alexandera = the *Alexander horned sphere*

rozgraniczone (o dwóch zbiorach) = *separated*

rozmaitość = a *manifold*

rozmaitość n-wymiarowa = an n*-fold*

rozmaitość dwuwymiarowa = a *surface* or a *twofold*

rozmaitość trójwymiarowa = a *threefold*

rozproszona (o przestrzeni) = *scattered*

równoważne (o metrykach) = *equivalent*

scentrowana (o rodzinie zbiorów) = *centred*

ε-sieć = a ε*-net*

skierowany [w górę] (o zbiorze) = *[upward] directed*

skierowana w dół (o rodzinie zbiorów) = *downward directed* składowa = the (*connected*) *component*

składowa drogowa = the *arc-component*

spełnia I/II A.P. (o przestrzeni) = *is first/second countable*

spójna (o przestrzeni); spójność = *connected*; *connectedness* or *connectivity*

stała Lipschitza (odwzorowania) = the *Lipschitz constant*

symetryczna (o metryce) = *symmetric*

sympleks = a *simplex*

ściągalna (o przestrzeni) = *contractible*

średnica (przestrzeni metrycznej) = the *diameter*

topologia = a *topology*

topologia normy = the *norm topology*

topologia strzałki = the *lower limit topology* or the *right half-open interval topology*

topologiczna (o przestrzeni) = *topological*

triangulacja = a *triangulation*

triangulacja barycentryczna = the *barycentric triangulation* or *barycentric subdivision*

ultrafiltr = an *ultrafilter*

ultrametryczna (o przestrzeni) = *ultrametric*

ultrametryka = an *ultrametric*

uzupełnienie (przestrzeni metrycznej) = the *completion*

uzwarcenie = a *compactification*

uzwarcenie Aleksandrowa = the *Alexandroff/Alexandrov compactification*

warunek Lipschitza = the *Lipschitz condition*

warunek pokryciowy = the *finite subcover condition*

właściwe (o odzworowaniu) = *proper*

wnętrze = the *interior*

wpisana w . . . (o rodzinie zbiorów) = *inscribed into*

zamknięta (o rozmaitości) = *closed*

zanurzenie/włożenie = an *embedding*

zbiega/zbieżny (o ciągu uogólnionym) = *converges/convergent*

zerowymiarowa (o przestrzeni) = *zero-dimensional*

zbiór typu $\mathscr{F}_\sigma/\mathscr{G}_\delta$ = a $\mathscr{F}_\sigma$-set/$\mathscr{G}_\delta$-set

zgodna (z topologią — o metryce) = *compatible*

zupełna (o metryce) = *complete*

zwarta (o przestrzeni) = *compact*