## Informacje

Zadania, które zostały już rozwiązane, mają kółka obok swych numerów zamalowane na czarno.

Jeśli w zadaniu występują podpunkty (a), (b), itd. (a nie (i), (ii), itd.), każdy podpunkt tego zadania to osobne zadanie.

## Zestaw 1

1.1.● (3) Rozwiązać równanie $|x-1|+|x+1|=2$.

1.2.● (4) Dla podanych ciągów znaleźć najmniejszą liczbę całkowitą $N>0$, taką że ciąg $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ jest monotoniczny.

- (a)● $a_n = n^2 - 2024n + 2025$
- (b)● $a_n = \frac{1}{2n-9}$
- (c)● $a_n = \frac{n-3}{n+2}$
- (d)● $a_n = \frac{n^2+n+1}{3n-8}$

1.3.● (3) Uzasadnić, że dla dowolnego niepustego zbioru $A \subset \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $\inf(A) \leqslant \sup(A)$. Kiedy w tej nierówności zachodzi równość?

1.4.● (4) Wykazać, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \in \mathbb{R}$ zachodzą równości $\sup\{q \in \mathbb{Q}\colon\ q < x\} = x = \inf\{q \in \mathbb{Q}\colon\ q > x\}$.

1.5.○ (4) Wszystkie zbiory występujące w poniższych podpunktach są niepustymi podzbiorami zbioru $\mathbb{R}$. Wykazać, że:

- (a)○ $\sup(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \max(\sup(A_1), \ldots, \sup(A_n))$
- (b)○ $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$, gdzie $A+B \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} |\ \exists a \in A,\ \exists b \in B\colon\ x = a+b\}$
- (c)○ $\sup(-A) = -\inf(A)$, gdzie $-A \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}\colon\ -x \in A\}$
- (d)○ Jeśli $A \subset B$, to $\inf(B) \leqslant \inf(A)$ oraz $\sup(A) \leqslant \sup(B)$.

1.6.● (5) Wykazać, że dla dowolnych dwóch niepustych zbiorów $A, B \subset (0,\infty)$ zachodzą wzory

$$\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B) \qquad \text{oraz} \qquad \inf(A \cdot B) = \inf(A) \cdot \inf(B),$$

gdzie $A \cdot B = \{x \in \mathbb{R} |\ \exists a \in A,\ \exists b \in B\colon\ x = ab\}$. Podać przykład dwóch niepustych zbiorów $A, B \subset \mathbb{R}$, dla których żadna z powyższych dwóch równości nie zachodzi.

1.7.○ (4) Niech $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ będą dwoma funkcjami określonymi na niepustym zbiorze $X$. Wykazać, że wtedy $\sup(f+g)(X) \leqslant \sup f(X) + \sup g(X)$. Podać przykład świadczący o tym, że w tej nierówności może nie być równości. (Tutaj $f(X) = \{t \in \mathbb{R} |\ \exists x \in X\colon\ f(x) = t\}$).

1.8*.○ (5) Wykazać, że $\sup\{\sin(n)\colon\ n \in \mathbb{N}\} = 1$.

1.9.● (4) Wykazać, że między dowolnymi dwoma różnymi liczbami rzeczywistymi istnieje liczba niewymierna.

1.10.● (4) Wykazać, że zbiór wszystkich liczb postaci $q+w\sqrt{2}$, gdzie liczby $q$ i $w$ są wymierne, jest ciałem (tzn. jest zamknięty na dodawanie, odejmowanie, mnożenie oraz dzielenie przez liczbę niezerową; i zawiera wszystkie liczby wynmierne).

1.11.○ (4) Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie bijekcją ściśle malejącą. Wykazać, że wtedy dla dowolnego niepustego ograniczonego zbioru $A \subset \mathbb{R}$ zachodzą związki $\sup f(A) = f(\inf(A))$ oraz $\inf f(A) = f(\sup(A))$.

## Zestaw 2

2.1.○ (3) Obliczyć granice poniższych ciągów lub uzasadnić, że dany ciąg nie ma granicy w $[-\infty, \infty]$.

(a)○ $a_n = \frac{3n^2-2n+5}{2n^2+2n+1}$

(b)○ $a_n = \frac{2n^2+3n+7}{n^3-n^2-1}$

(c)○ $a_n = \frac{-2n^3+2024n^2+2025n+6}{n^2-n+1}$

(d)○ $a_n = \sqrt{n+6} + 3\sqrt{n^3+2}$

(e)○ $a_n = -\sqrt[3]{n^2+2} - \sqrt{n+3}$

(f)○ $a_n = (-1)^n + n$

(g)○ $a_n = \frac{1+2+3+\ldots+n}{3+5+7+\ldots+(2n-1)}$

(h)○ $a_n = \frac{(-2)^{n-1}+2\cdot(-4)^{n+3}-3\cdot 3^n}{(-5)^n}$

(i)● $a_n = 6 \cdot 2^n + (-3)^n$

(j)○ $a_n = \left(\frac{2n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)^n$

(k)○ $a_n = (-1)^n + \frac{n-1}{n+2}$

(l)○ $a_n = \sqrt[n]{\frac{2}{3}n^4 - 3n^3 + 3}$

(m)○ $a_n = \sqrt[n^3+n+2]{n^2+n-1}$

(n)○ $a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{n-1}{n+2}$

(o)○ $a_n = \cos(\frac{n\pi}{4})$

(p)○ $a_n = \left(\frac{n^2+n+4}{3n^2-n+1}\right)^n$

2.2.○ (4) Obliczyć granice poniższych ciągów lub uzasadnić, że dany ciąg nie ma granicy w $[-\infty, \infty]$.

(a)● $a_n = \sqrt{2n^2-n} - \sqrt{n^2+n+1}$

(b)○ $a_n = \sqrt{2n^2+2n-1} - \sqrt{2n^2-n-2}$

(c)● $a_n = \sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt[3]{n^3-1}$

(d)● $a_n = \frac{\sqrt{n^2+n+2}+\sqrt{2n^2+3n+1}}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+n+2}}$

(e)● $a_n = \sqrt[n]{2024 \cdot 2^n + (0,1)^{2024} \cdot 3^n}$

(f)○ $a_n = \frac{\sqrt{n^2+n+2}-\sqrt{n^2+n-2}}{\sqrt{2n^2-n+1}-\sqrt{2n^2-2n+3}}$

(g)● $a_n = \sqrt[n]{n^n+n+1}$

(h)● $a_n = \sqrt[n^2]{n^{n^3} + n + 1}$

(i)● $a_n = \frac{\sin^n(n)}{n}$

(j)○ $a_n = \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}$

(k)● $a_n = \frac{\sin^2(2^{-n})}{\sin(4^{-n})}$

(l)● $a_n = \frac{n}{2^n}$

(m)● $a_n = \frac{\text{suma wszystkich dodatnich dzielników liczby } n}{n}$

(n)● $a_n = \frac{(p^2-p)n^2+pn+1}{n+2}$ (odpowiedź podać w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$)

2.3.○ (5) Obliczyć granice poniższych ciągów lub uzasadnić, że dany ciąg nie ma granicy w $[-\infty, \infty]$.

(a)● $a_n = \left(\frac{n^2+n+2}{n^2-n+1}\right)^n$

(b)● $a_n = \left(\frac{3n-2}{3n+1}\right)^n$

(c)● $a_n = \frac{\sqrt{n+\sqrt{n+1}+1}-\sqrt{n-\sqrt{n-1}-1}}{\sqrt{2n+2\sqrt{n+2}+1}-\sqrt{2n-2\sqrt{n}+3}}$

(d)○ $a_n = \frac{\sqrt{n+\sqrt{n+1}+1}-\sqrt{2n-\sqrt{n-1}-1}}{\sqrt{2n+2\sqrt{n+2}+1}-\sqrt{2n-2\sqrt{n}+3}}$

(e)● $a_n = \sqrt[n]{n^{\sqrt{n}} + n}$

(f)● $a_n = \left(\frac{2^n+3^n}{3^n+2^{n+1}}\right)^{(1{,}5)^n}$

(g*)● $a_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

(h)● $a_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{n}$

(i)● $a_n = \left(\frac{n^3+n+1}{n^3+1}\right)^n$

(j)○ $a_n = \sin(n)$

(k)○ $a_n = (\cos(\frac{1}{n}))^{\operatorname{ctg}(\frac{1}{n})}$

2.4.● (5) Rozstrzygnąć, które z poniższych ciągów, zadanych rekurencyjnie, mają granicę liczbową (odpowiedź uzasadnić). Wyznaczyć granicę tych ciągów, które okażą się zbieżne w $\mathbb{R}$. W tych podpunktach, w których występują parametry, odpowiedź podać w zależności od ich wartości. Wszystkie parametry mogą przyjmować dowolną wartość rzeczywistą.

(a)● $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_n = \frac{a_{n-1}^2 + a_{n-1}}{2}$

(b)● $a_0 = 1$, $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}$

(c)● $a_0 = 1$, $a_n = \frac{2n+3}{n+1} a_{n-1} - 1$

(d)● $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{3}$ $(n > 1)$

(e)● $a_0 = p$, $a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 1}{2}$

(f)● $a_0 = p$, $a_n = a_{n-1}^2 + 1$

(g)● $a_0 = \alpha$, $a_n = \frac{a_{n-1}+\beta}{2}$

## Zestaw 3

3.1.● (3) Zbadać zbieżność szeregu, tzn. rozstrzygnąć, czy jest zbieżny bezwzględnie lub tylko warunkowo, czy jest rozbieżny (warunkowo).

(a)● $\sum_n \frac{n^2-3n+2}{n^3-n-6}$

(b)● $\sum_n \frac{n+4}{n^3-2n-1000}$

(c)● $\sum_n \frac{\sqrt{n^2+2}+\sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt{n^4+1}}$

(d)● $\sum_n \frac{n}{2^n}$

(e)● $\sum_n \frac{10^{2024n}}{n!}$

(f)● $\sum_n \frac{2^n+3^n+5^n}{3^n+4^n+6^n}$

(g)● $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^p}$ (gdzie $p \in \mathbb{R}$ to parametr)

3.2.○ (4) Zbadać zbieżność szeregu, tzn. rozstrzygnąć, czy jest zbieżny bezwzględnie lub tylko warunkowo, czy jest rozbieżny (warunkowo).

(a)○ $\sum_n \frac{\sqrt{n^6+n+1}-\sqrt{n^6-n-1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}$

(b)○ $\sum_n \frac{(-1)^n}{n\log^p n}$ (gdzie $p \in \mathbb{R}$ to parametr)

(c)○ $\sum_n (1-\cos(\frac{\pi}{n}))$

(d)● $\sum_n \frac{16^n}{\binom{4n}{2n}}$

(e)○ $\sum_n \frac{\log(n)}{n^p}$ (gdzie $p \in \mathbb{R}$ to parametr)

(f)● $\sum_n \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$

(g)○ $\sum_n (\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$

(h)○ $\sum_n (\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2-1})$

3.3.○ (5) Zbadać zbieżność szeregu, tzn. rozstrzygnąć, czy jest zbieżny bezwzględnie lub tylko warunkowo, czy jest rozbieżny (warunkowo).

(a)○ $\sum_n \frac{27^n}{4^n\binom{3n}{n}}$

(b*)● $\sum_n \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$

(c)● $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ gdzie $a_n = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^n}$

(d)● $\sum_n 2^{-\sqrt{n}}$

(e)● $\sum_n (\sqrt[n]{n}-1)$

(f)● $\sum_n \frac{(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}}{n}$

3.4.○ (5) Wyznaczyć sumę podanego szeregu.

(a)● $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

(b)● $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

(c*)○ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n+1}{(n^2+n+1)(n^2+3n+3)}$

## Zestaw 4

4.1.○ (3) Wyznaczyć dziedzinę podanych funkcji i zbadać ich ciągłość, tj. wskazać wszystkie punkty nieciągłości (o ile są takowe).

(a)● $f(x) = \begin{cases} x^3 - x - 1 & \text{gdy } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \frac{1}{2x+1} & \text{gdy } -1 \leqslant x < 0 \\ \frac{1}{x} + 1 & \text{gdy } x < -1 \\ \cos(\pi x^2) & \text{gdy } x > 1 \end{cases}$

(b)● $f(x) = \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor & \text{gdy } -1 < x \leqslant 1 \\ \log_2(-x) & \text{gdy } x \leqslant -1 \\ 3^x & \text{gdy } x \geqslant 2 \end{cases}$

(c)○ $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{gdy } x < -2 \\ 5 & \text{gdy } x = -2 \\ 1 - 2x & \text{gdy } -2 < x < 1 \\ x^2 + 2 & \text{gdy } x > 1 \end{cases}$

4.2.○ (3) W zależności od parametrów wyznaczyć dziedzinę podanych funkcji, oraz wskazać wszystkie wartości parametrów, dla których są one ciągłe (tzn. są ciągłe w każdym punkcie swojej dziedziny).

(a)○ $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{gdy } x < 0 \\ 1 & \text{gdy } x = 0 \\ \frac{\sin(ax)}{x} & \text{gdy } x > 0 \end{cases}$

(b)○ $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax - 1 & \text{gdy } x < -1 \\ (x-a)^2 - 1 & \text{gdy } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -3ax & \text{gdy } x > 1 \end{cases}$

(c)○ $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + a^2} & \text{gdy } x < 0 \\ a^2 e^x + \frac{x^2+ax+1}{x^2-5x+4} & \text{gdy } x \geqslant 0 \end{cases}$

4.3.○ (4) Wyznaczyć dziedzinę podanych funkcji i zbadać ich ciągłość, tj. wskazać wszystkie punkty nieciągłości (o ile są takowe).

(a)● $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{gdy } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ x & \text{gdy } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

(b)○ $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 3 & \text{gdy } x \in (0, \infty) \setminus \mathbb{Q} \\ \ln(x+1) & \text{gdy } x \in (-\infty, 0) \setminus \mathbb{Q} \\ |x| & \text{gdy } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

(c)● $f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x) & \text{gdy } \sin(\pi x) > 0 \\ -1 & \text{gdy } \sin(\pi x) \leqslant 0 \end{cases}$

4.4.○ (4) W zależności od parametrów wyznaczyć dziedzinę podanych funkcji, oraz wskazać wszystkie wartości parametrów, dla których są one ciągłe.

(a)● $f(x) = \begin{cases} (a^2)^{x+1} & \text{gdy } x < 0 \\ (x+1)^{a^2} & \text{gdy } x \geqslant 0 \end{cases}$

(b)● $f(x) = \begin{cases} \sin(\pi a x) & \text{gdy } x \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ \frac{\lfloor x \rfloor^a}{x} & \text{gdy } x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{cases}$

(c)● $f(x) = \begin{cases} x^{\lfloor a \rfloor} & \text{gdy } x < 0 \\ 6a^2 - 5a + 2 & \text{gdy } x = 0 \\ x^a + 3a & \text{gdy } x > 0 \end{cases}$

4.5.○ (5) Wyznaczyć dziedzinę podanych funkcji i zbadać ich ciągłość, tj. wskazać wszystkie punkty nieciągłości (o ile są takowe).

(a)● $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 0 & \text{gdy } x = 0 \\ \frac{(-1)^p}{q} & \text{gdy } x = \frac{p}{q},\ \text{gdzie } p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\ q \in \mathbb{N}_1 \text{ i ułamek jest nieskaracalny} \end{cases}$

(b)○ $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(\frac{\pi}{2} \lfloor x \rfloor) & \text{gdy } \frac{\lfloor x \rfloor}{2} \in \mathbb{Z} \\ x^2 \cos(\frac{\pi}{2} \lfloor x - 1 \rfloor) & \text{gdy } \frac{\lfloor x \rfloor}{2} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

(c)○ $f(x) = x^{\lfloor x+1 \rfloor}$

4.6.○ (5) W zależności od parametrów wyznaczyć dziedzinę podanych funkcji, oraz wskazać wszystkie wartości parametrów, dla których są one ciągłe.

(a)● $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x}{x-a} & \text{gdy } 0 < x \leqslant 1 \\ x + 1 + a & \text{gdy } x \leqslant 0 \\ x^2 - ax & \text{gdy } x > 1 \end{cases}$

(b)● $f(x) = \lim_{n\to\infty} [(x^2 - x - 1)^2]^{na}$

(c*)○ $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 + n^2 x^2}$

## Wzory na pochodną

$\sqrt[\triangle]{\square} = (\square)^{\frac{1}{\triangle}}$, $\quad (\square)^{\triangle} = e^{(\triangle)\cdot\ln(\square)}$, $\quad \log_{\triangle}(\square) = \frac{\ln(\square)}{\ln(\triangle)}$ $\quad (e \approx 2,7182818284\ldots)$

- $((\square) \pm (\triangle))' = (\square)' \pm (\triangle)'$, $\quad (a \cdot (\square))' = a \cdot (\square)'$ $\quad$ ($a$ — stała)
- $((\square) \cdot (\triangle))' = (\square)' \cdot (\triangle) + (\square) \cdot (\triangle)'$
- $\left(\frac{\square}{\triangle}\right)' = \frac{(\square)'\cdot(\triangle)-(\square)\cdot(\triangle)'}{(\triangle)^2}$
- $(a)' = 0 = (x^0)'$, $\quad (x)' = 1$, $\quad (x^a)' = a \cdot x^{a-1}$ $\quad$ ($a$ — stała)
- $((\square)^a)' = a \cdot (\square)^{a-1} \cdot (\square)'$
- $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
- $(\sqrt{\square})' = \frac{(\square)'}{2\sqrt{\square}}$, $\quad \left(\frac{1}{\square}\right)' = -\frac{(\square)'}{(\square)^2}$
- $(e^x)' = e^x$, $\quad (a^x)' = a^x \cdot \ln a$ $\quad$ ($a$ — stała dodatnia)
- $(e^{\square})' = e^{\square} \cdot (\square)'$, $\quad (a^{\square})' = a^{\square} \cdot \ln a \cdot (\square)'$ $\quad$ ($a$ — stała dodatnia)
- $(\ln x)' = \frac{1}{x} = (\ln|x|)'$, $\quad (\log_a x)' = \frac{1}{x\cdot\ln a} = (\log_a|x|)'$ $\quad$ ($a$ — stała dodatnia różna od 1)
- $(\ln(\square))' = \frac{(\square)'}{\square} = (\ln|\square|)'$, $\quad (\log_a(\square))' = \frac{(\square)'}{(\square)\cdot\ln a} = (\log_a|\square|)'$ $\quad$ ($a$ — stała dodatnia $\neq 1$)
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\sin(\square))' = \cos(\square) \cdot (\square)'$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\cos(\square))' = -\sin(\square) \cdot (\square)'$
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $(\operatorname{tg}(\square))' = \frac{(\square)'}{\cos^2(\square)}$
- $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
- $(\operatorname{ctg}(\square))' = -\frac{(\square)'}{\sin^2(\square)}$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arcsin(\square))' = \frac{(\square)'}{\sqrt{1-(\square)^2}}$
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos(\square))' = -\frac{(\square)'}{\sqrt{1-(\square)^2}}$
- $(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(\operatorname{arc\,tg}(\square))' = \frac{(\square)'}{1+(\square)^2}$
- $(\operatorname{arc\,ctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
- $(\operatorname{arc\,ctg}(\square))' = -\frac{(\square)'}{1+(\square)^2}$

## Zestaw 5

5.1.○ (3) Obliczyć pochodne podanych funkcji i porównać dziedziny danej funkcji i jej pochodnej.

(a)● $\sqrt{x^2-1}$

(b)● $x\sin(x)\cos(x^2)$

(c)○ $\frac{x^2\ln|x|-x}{x+1}$

(d)○ $(x+1)^{2024}(x-2)^{2025}$

(e)○ $\operatorname{tg}^2(x)\ln^3|x|$

(f)○ $\frac{\arcsin x}{\arccos x}$

(g)○ $\frac{\sqrt[3]{x-1}+1}{\sqrt[4]{(x-1)^3}}$

5.2.● (4) Obliczyć pochodne podanych funkcji i porównać dziedziny danej funkcji i jej pochodnej.

(a)● $\left(\frac{x^2-1}{x+2}\right)^{\ln(x+5)}$

(b)● $x^x$

(c)● $x^{\frac{1}{x}}$

(d)● $\log_x(x^2+1)$

(e)● $\log_{x^2+2}(x^2+4)$

5.3.○ (5) Obliczyć pochodne podanych funkcji i porównać dziedziny danej funkcji i jej pochodnej.

(a)● $x|x|$

(b)● $\sqrt[3]{(x-1)^4}$

(c)● $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{gdy } x\geqslant 0\\ x^3+x+1 & \text{gdy } x<0\end{cases}$

(d)● $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{gdy } x\neq 0\\ 0 & \text{gdy } x=0\end{cases}$

(e)○ $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{gdy } x\neq 0\\ 0 & \text{gdy } x=0\end{cases}$

(f)● $f(x)=\begin{cases} |x|^x & \text{gdy } x\neq 0\\ 0 & \text{gdy } x=0\end{cases}$

(g)● $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{gdy } x\geqslant 0\\ x & \text{gdy } x<0\end{cases}$

# Zestaw 6

6.1.○ (3) Wyznaczyć dziedzinę, wszystkie ekstrema lokalne oraz maksymalne przedziały monotoniczności (spośród otwartych, domkniętych i otwarto-domkniętych) podanych funkcji.

(a)○ $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

(b)○ $f(x) = x^4 + 4x^3 - 18x^2 - 108x - 1$

(c)● $f(x) = x^5 - 15x^4 + 60x^3 - 7$

(d)● $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

(e)○ $f(x) = x^2 e^x$

(f)● $f(x) = e^{2x} - e^x$

(g)● $f(x) = \frac{\ln|x|}{x}$

6.2.○ (4) Wyznaczyć dziedzinę, wszystkie ekstrema lokalne oraz maksymalne przedziały monotoniczności (spośród otwartych, domkniętych i otwarto-domkniętych) podanych funkcji.

(a)○ $f(x) = x \sin x + \cos x$

(b)○ $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x + 2}$

(c)● $f(x) = e^x \sin x$

(d)● $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 5x - \frac{1}{2}$

(e)○ $f(x) = \sqrt{x^2+1} - 2\sqrt{x+1}$

6.3.○ (5) Wyznaczyć dziedzinę, wszystkie ekstrema lokalne oraz maksymalne przedziały monotoniczności (spośród otwartych, domkniętych i otwarto-domkniętych) podanych funkcji.

(a)● $f(x) = \sqrt{|x^2 - 1|}$

(b)○ $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+x^2-3x-2}{x+2} & \text{gdy } x \neq -2 \\ a & \text{gdy } x = -2 \end{cases}$ (odpowiedź podać w zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$)

(c)○ $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{gdy } x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\} \\ 1 & \text{gdy } x = 0 \end{cases}$

(d)○ $f(x) = 6 \sin x - 6x + x^3$

## Zestaw 7

1.○ Wyznaczyć liczby wymierne, które przybliżają podane liczby z dokładnością $0,01$.

(a)● (3) $\sin 1$

(b)○ (3) $\sqrt{5}$

(c)● (4) $e$

(d)● (5) $\ln(2)$

(e*)● (5) $\pi$

2.○ Wyznaczyć wszystkie asymptoty (tj. pionowe, poziome, ukośne) podanych funkcji.

(a)● (3) $\frac{x}{x^2+1}$

(b)○ (3) $\frac{x^2}{x-1}$

(c)● (4) $\frac{x^3-3x^2+3x-2}{x^2-3x+2}$

(d)○ (4) $x \operatorname{arc\,tg} x$

(e)○ (4) $xe^{1/x}$

3.○ Wyznaczyć przedziały wypukłości (oraz wklęsłości) i punkty przegięcia podanych funkcji.

(a)● (3) $\frac{x}{x^2+1}$

(b)○ (3) $\frac{x^2}{x-1}$

(c)● (3) $\frac{1}{4}x^4 - x^3 - 3x^2 - 2x$

(d)○ (3) $\operatorname{arc\,tg} x$

(e)○ (4) $x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

4.○ Zbadać parzystość (i nieparzystość) podanych funkcji.

(a)○ (3) $\frac{x}{x^2+1}$

(b)○ (3) $\frac{x^2-x}{x-1}$

(c)○ (4) $\frac{1-e^x}{1+e^x}$

(d)● (5) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

(e)○ (5) $\frac{x}{e^x-1} + \frac{1}{2}x$

**Przebieg zmienności funkcji**
* punkty opcjonalne (zależne od poziomu komplikacji)
** punkty nadobowiązkowe (niewymagane)

**1.** Dziedzina funkcji i punkty jej nieciągłości.

**1a**.** Parzystość (i nieparzystość) funkcji, miejsca zerowe i punkty wspólne z osią Y.

**2.** Wartości funkcji w tych krańcach dziedziny, które do niej należą, oraz w punktach nieciągłości.

**3.** Granice funkcji w tych krańcach dziedziny, które do niej nie należą, oraz w punktach nieciągłości.

**4.** Asymptoty.

**5.** Pochodna i jej dziedzina.

**5a**.** Granice pochodnej w punktach dziedziny wyjściowej funkcji, które nie należą do dziedziny pochodnej, oraz w punktach nieciągłości pochodnej.

**6.** Miejsca zerowe i znak pochodnej.

**7.** Tabelka monotoniczności (i sklejanie w niej) z wartościami funkcji w ekstremach.

**8*.** Druga pochodna i jej dziedzina.

**8a*.** Miejsca zerowe i znak drugiej pochodnej.

**8b*.** Tabelka wypukłości.

**9.** Tabelka końcowa.

**10.** Wykres funkcji

Przeprowadzić przebieg zmienności podanych funkcji.

## Zestaw 8

8.1.○ (3) $x^3 + 3x^2 - 9x + 1$

8.2.○ (3) $\frac{1}{4}x^4 + x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 5x - \frac{7}{4}$

8.3.○ (3) $\frac{1}{4}x^4 + x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 11x - \frac{19}{4}$

8.4.○ (4) $\frac{x}{x^2+1}$

8.5.● (4) $\frac{x^2+1}{x}$

8.6.● (4) $\frac{x}{x^2-1}$

8.7.● (5) $\frac{\ln|x|}{x}$

8.8.● (5) $xe^{1/x}$

8.9.● (5) $x \ln|x|$

# Zestaw 9

1.○ Obliczyć poniższe całki nieoznaczone.

(a)○ (3) $\int (2x-4)^{1000}\,\mathrm{d}x$

(b)○ (3) $\int e^{2x-5}\,\mathrm{d}x$

(c)○ (3) $\int \cos(4x+2)\,\mathrm{d}x$

(d)○ (3) $\int \frac{x^3-1}{x-1}\,\mathrm{d}x$

(e)○ (3) $\int \frac{x\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}+1}{x\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x$

(f)○ (3) $\int x^3\sin(2x)\,\mathrm{d}x$

(g)○ (3) $\int \frac{x^2-1}{e^{2x}}\,\mathrm{d}x$

(h)○ (3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4}$

(i)○ (4) $\int \operatorname{ctg} x\,\mathrm{d}x$

(j)○ (4) $\int \operatorname{arc\,tg} x\,\mathrm{d}x$

(k)○ (4) $\int \arcsin x\,\mathrm{d}x$

(l)○ (4) $\int x\sqrt{x^2-4}\,\mathrm{d}x$

(m)○ (4) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+3}}\,\mathrm{d}x$

(n)○ (4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$

(o)○ (4) $\int e^{2x-3}\cos(3x+2)\,\mathrm{d}x$

(p)○ (4) $\int \frac{x^4-2x^3+2x^2+2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

(q)○ (5) $\int x^2e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$

(r)○ (5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$

(s)○ (5) $\int \frac{x^3-x^2+x+2}{x^2-2x+1}$

(t)○ (5) $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

(u)○ (5) $\int \sqrt{2-2x-x^2}\,\mathrm{d}x$

# Zestaw 10

**1.** ○ Obliczyć poniższe całki nieoznaczone.

- (a)○ (3) $\int \frac{x+1}{x^3-x^2}\,\mathrm{d}x$
- (b)○ (3) $\int \frac{1}{x^4+x^3}\,\mathrm{d}x$
- (c)○ (3) $\int \frac{x^3+1}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$
- (d)○ (4) $\int \frac{x+2}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$
- (e)○ (4) $\int \frac{1}{(2x-4)(x^2-x-2)}\,\mathrm{d}x$
- (f)○ (4) $\int \frac{1}{x^4+4}\,\mathrm{d}x$
- (g)○ (5) $\int \frac{\sin x - 2\cos x}{2+\sin x}\,\mathrm{d}x$
- (h)○ (5) $\int \frac{\cos(2x)}{1+(\sin x+\cos x)^2}\,\mathrm{d}x$
- (i)○ (5) $\int \sqrt{x^2+4}\,\mathrm{d}x$

**2.** ○ Obliczyć poniższe całki oznaczone.

- (a)○ (3) $\int_0^{\pi} x^2 \sin x\,\mathrm{d}x$
- (b)○ (3) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
- (c)○ (3) $\int_0^{4} \frac{x-1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x$
- (d)○ (3) $\int_1^{e} \ln|x|\,\mathrm{d}x$
- (e)○ (4) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$
- (f)○ (4) $\int_0^{\pi} \sin^6 x\,\mathrm{d}x$
- (g)○ (5) $\int_0^{\frac{1}{2}} x \arcsin x\,\mathrm{d}x$
- (h)○ (5) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \operatorname{ctg} x \cdot e^{-(x-\frac{\pi}{2})^2}\,\mathrm{d}x$

**3.** ○ Obliczyć pola obszarów ograniczonych poniższymi krzywymi.

- (a)○ (3) $y=1, \quad y=4-x^2$
- (b)○ (3) $y=x^2-2, \quad y=2-x^2$
- (c)○ (3) $y=x^2-x-1, \quad y=x+2$
- (d)○ (4) $y=\sin x, \quad y=\cos x, \quad x=-\frac{\pi}{2}, \quad x=0$
- (e)○ (4) $y=\ln x, \quad y=\frac{x-1}{e-1}$
- (f)○ (4) $x=y^2, \quad y=x^2$
- (g)○ (5) $x^2+y^2=1, \quad y \geqslant x^2$
- (h)○ (5) $x^2+y^2=4$ [nie używać wzoru na pole koła!]