

Informacje

Zadania, które zostały już rozwiązane, mają kółka obok swych numerów zamalowane na czarno.

Jeśli w zadaniu występują podpunkty (a), (b), itd. (a nie (i), (ii), itd.), każdy podpunkt tego zadania to osobne zadanie.

W rozwiązaniu Zadania X można korzystać z Zadania Y (nawet, jeśli Zadanie Y nie zostało jeszcze rozwiązane!), jeśli Zadanie Y występuje w tym zbiorze zadań wcześniej niż Zadanie X.

Zestaw 1

- 1.1.● (3) Rozwiązać równanie $|x - 1| + |x + 1| = 2$.
- 1.2.○ (4) Dla podanych ciągów znaleźć najmniejszą liczbę całkowitą $N > 0$, taką że ciąg $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ jest ściśle monotoniczny.
- (a)○ $a_n = n^2 - 2024n + 2025$
- (b)○ $a_n = \frac{1}{2n-9}$
- (c)● $a_n = \frac{n-3}{n+2}$
- (d)○ $a_n = \frac{n^2+n+1}{3n-8}$
- (e)○ $a_n = (-1)^n + \frac{n^2}{2025}$
- (f)● $a_n = \frac{2^n}{n}$
- 1.3.● (4) Wykazać, że między dowolnymi dwoma różnymi liczbami rzeczywistymi istnieje liczba niewymierna.
- 1.4.● (4) Wykazać, że zbiór wszystkich liczb postaci $q + w\sqrt{2}$, gdzie liczby q i w są wymierne, jest *ciałem* (tzn. jest zamknięty na dodawanie, odejmowanie, mnożenie oraz dzielenie przez liczbę niezerową; i zawiera wszystkie liczby wymierne).
- 1.5.○ (5) Wykazać, że dla dowolnego ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ liczb rzeczywistych istnieje ściśle rosnący ciąg $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ całkowitych liczb dodatnich, taki że ciąg $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ jest albo stały, albo ściśle rosnący, albo ściśle malejący.
- 1.6.● (3) Wykazać, że $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$ dla wszelkich nieujemnych liczb rzeczywistych x i y .
- 1.7.● (4) Wykazać, że $\sqrt[p]{x+y} \leq \sqrt[p]{x} + \sqrt[p]{y}$ oraz $(x+y)^p \geq x^p + y^p$ dla wszelkich nieujemnych liczb rzeczywistych x i y oraz dowolnej liczby całkowitej $p > 1$.
- 1.8*.● (5) Wykazać, że $(x+y)^q \leq x^q + y^q$ oraz $(x+y)^p \geq x^p + y^p$ dla wszelkich nieujemnych liczb rzeczywistych x i y oraz dowolnych liczb rzeczywistych $p \geq 1$ i $q \in (0, 1]$.
- 1.9.○ (3) Wykazać, że jeśli $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ściśle rosnącym (odpowiednio: ściśle malejącym) ciągiem liczb dodatnich, to ciąg $(1/a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ściśle malejący (odp. ściśle rosnący). Podać przykład (ciągu o wyrazach niezerowych) świadczący o tym, że założenie, że wszystkie wyrazy są dodatnie, jest istotne.
- 1.10.○ (5) Czy istnieje ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ liczb rzeczywistych, który ma wszystkie poniższe własności?
- Ciąg $(|x_{n+1} - x_n|)_{n=1}^{\infty}$ jest ściśle malejący.

- Dla dowolnej liczby całkowitej $N > 0$ istnieje taki indeks n , że $|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{N}$.
- Dla dowolnej liczby całkowitej $N > 0$ istnieją takie indeksy k i ℓ , że $x_k \geq N$ oraz $x_\ell \leq -N$.

1.11.○ (3) O każdym z poniższych zbiorów rozemnać, czy jest to zbiór ograniczony od góry lub od dołu:
 $A = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, 0 < a < |b|\}; \quad B = \{\frac{b}{a} : a, b \in \mathbb{Z}, 0 < a < b < 2^a\};$
 $C = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, 0 < -b < a\}; \quad D = \{\frac{b}{a} : a, b \in \mathbb{Z}, 0 < |a| < b\}.$

Kilka zadań „ponadprogramowych”, tylko dla chętnych:

1.12.○ (3) Uzasadnić, że dla dowolnego niepustego zbioru $A \subset \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $\inf(A) \leq \sup(A)$. Kiedy w tej nierówności zachodzi równość?

1.13.○ (4) Wykazać, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \in \mathbb{R}$ zachodzą równości $\sup\{q \in \mathbb{Q} : q < x\} = x = \inf\{q \in \mathbb{Q} : q > x\}$.

1.14.○ (4) Wszystkie zbiory występujące w poniższych podpunktach są niepustymi podzbiórmi zbioru $\mathbb{R}$. Wykazać, że:

(a)○ $\sup(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \max(\sup(A_1), \dots, \sup(A_n))$

(b)○ $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$, gdzie $A + B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A, \exists b \in B : x = a + b\}$

(c)○ $\sup(-A) = -\inf(A)$, gdzie $-A \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$

(d)○ Jeśli $A \subset B$, to $\inf(B) \leq \inf(A)$ oraz $\sup(A) \leq \sup(B)$.

1.15.○ (5) Wykazać, że dla dowolnych dwóch niepustych zbiorów $A, B \subset (0, \infty)$ zachodzą wzory

$$\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B) \quad \text{oraz} \quad \inf(A \cdot B) = \inf(A) \cdot \inf(B),$$

gdzie $A \cdot B = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A, \exists b \in B : x = ab\}$. Podać przykład dwóch niepustych zbiorów $A, B \subset \mathbb{R}$, dla których żadna z powyższych dwóch równości nie zachodzi.

1.16.○ (4) Niech $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ będą dwoma funkcjami określonymi na niepustym zbiorze X . Wykazać, że wtedy $\sup(f + g)(X) \leq \sup f(X) + \sup g(X)$. Podać przykład świadczący o tym, że w tej nierówności może nie być równości. (Tutaj $f(X) = \{t \in \mathbb{R} \mid \exists x \in X : f(x) = t\}$).

1.17*.○ (5) Wykazać, że $\sup\{\sin(n) : n \in \mathbb{N}\} = 1$.

1.18.○ (4) Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie bijekcją ściśle malejącą. Wykazać, że wtedy dla dowolnego niepustego ograniczonego zbioru $A \subset \mathbb{R}$ zachodzą związki $\sup f(A) = f(\inf(A))$ oraz $\inf f(A) = f(\sup(A))$.

Zestaw 2

2.1.○ (3) Obliczyć granice poniższych ciągów lub uzasadnić, że dany ciąg nie ma granicy w $[-\infty, \infty]$.

(a)○ $a_n = \frac{3n^2 - 2n + 5}{2n^2 + 2n + 1}$

(b)○ $a_n = \frac{2n^2 + 3n + 7}{n^3 - n^2 - 1}$

(c)○ $a_n = \frac{-2n^3 + 2024n^2 + 2025n + 6}{n^2 - n + 1}$

(d)○ $a_n = \sqrt{n+6} + 3\sqrt{n^3+2}$

(e)○ $a_n = -\sqrt[3]{n^2+2} - \sqrt{n+3}$

(f)○ $a_n = (-1)^n + n$

(g)○ $a_n = \frac{1+2+3+\dots+n}{3+5+7+\dots+(2n-1)}$

(h)○ $a_n = \frac{(-2)^{n-1} + 2 \cdot (-4)^{n+3} - 3 \cdot 3^n}{(-5)^n}$

(i)○ $a_n = 6 \cdot 2^n + (-3)^n$

(j)○ $a_n = \left(\frac{2n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)^n$

(k)○ $a_n = (-1)^n + \frac{n-1}{n+2}$

(l)○ $a_n = \sqrt[n]{\frac{2}{3}n^4 - 3n^3 + 3}$

(m)○ $a_n = \sqrt[n^3+n+2]{n^2+n-1}$

(n)○ $a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{n-1}{n+2}$

(o)○ $a_n = \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

(p)○ $a_n = \left(\frac{n^2+n+4}{3n^2-n+1}\right)^n$

2.2.○ (4) Obliczyć granice poniższych ciągów lub uzasadnić, że dany ciąg nie ma granicy w $[-\infty, \infty]$.

(a)● $a_n = \sqrt{2n^2 - n} - \sqrt{n^2 + n + 1}$

(b)● $a_n = \sqrt{2n^2 + 2n - 1} - \sqrt{2n^2 - n - 2}$

(c)● $a_n = \sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt[3]{n^3 - 1}$

(d)● $a_n = \frac{\sqrt{n^2+n+2} + \sqrt{2n^2+3n+1}}{\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+n+2}}$

(e)○ $a_n = \sqrt[n]{2024 \cdot 2^n + (0,1)^{2024} \cdot 3^n}$

(f)○ $a_n = \frac{\sqrt{n^2+n+2} - \sqrt{n^2+n-2}}{\sqrt{2n^2-n+1} - \sqrt{2n^2-2n+3}}$

(g)● $a_n = \sqrt[n]{n^n + n + 1}$

(h)○ $a_n = \sqrt[n^2]{n^{n^3} + n + 1}$

(i)○ $a_n = \frac{\sin^n(n)}{n}$

(j)● $a_n = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3}$

(k)○ $a_n = \frac{\sin^2(2^{-n})}{\sin(4^{-n})}$

$$(l) \circ a_n = \frac{n}{2^n}$$

$$(m) \circ a_n = \frac{\text{suma wszystkich dodatnich dzielników liczby } n}{n}$$

$$(n) \circ a_n = \frac{(p^2-p)n^2+pn+1}{n+2} \text{ (odpowiedź podać w zależności od parametru } p \in \mathbb{R})$$

2.3. $\circ$ (5) Obliczyć granice poniższych ciągów lub uzasadnić, że dany ciąg nie ma granicy w $[-\infty, \infty]$.

$$(a) \bullet a_n = \left(\frac{n^2+n+2}{n^2-n+1}\right)^n$$

$$(b) \bullet a_n = \left(\frac{3n-2}{3n+1}\right)^n$$

$$(c) \bullet a_n = \frac{\sqrt{n+\sqrt{n+1}+1}-\sqrt{n-\sqrt{n-1}-1}}{\sqrt{2n+2\sqrt{n+2}+1}-\sqrt{2n-2\sqrt{n}+3}}$$

$$(d) \circ a_n = \frac{\sqrt{n+\sqrt{n+1}+1}-\sqrt{2n-\sqrt{n-1}-1}}{\sqrt{2n+2\sqrt{n+2}+1}-\sqrt{2n-2\sqrt{n}+3}}$$

$$(e) \circ a_n = \sqrt[n]{n\sqrt{n}+n}$$

$$(f) \circ a_n = \left(\frac{2^n+3^n}{3^n+2^{n+1}}\right)^{(1,5)^n}$$

$$(g^*) \bullet a_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

$$(h) \circ a_n = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{n}$$

$$(i) \bullet a_n = \left(\frac{n^3+n+1}{n^3+1}\right)^n$$

$$(j^*) \bullet a_n = \sin(n)$$

$$(k) \circ a_n = \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{n}\right)}$$

2.4. $\circ$ (5) Rozstrzygnąć, które z poniższych ciągów, zadanych rekurencyjnie, mają granicę liczbową (odpowiedź uzasadnić). Wyznaczyć granicę tych ciągów, które okażą się zbieżne w $\mathbb{R}$. W tych podpunktach, w których występują parametry, odpowiedź podać w zależności od ich wartości. Wszystkie parametry mogą przyjmować dowolną wartość rzeczywistą.

$$(a) \bullet a_0 = \frac{1}{2}, a_n = \frac{a_{n-1}^2 + a_{n-1}}{2}$$

$$(b) \circ a_0 = 1, a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}$$

$$(c) \bullet a_0 = 1, a_n = \frac{2n+3}{n+1}a_{n-1} - 1$$

$$(d) \circ a_0 = 1, a_1 = 2, a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{3} \quad (n > 1)$$

$$(e) \circ a_0 = p, a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 1}{2}$$

$$(f) \circ a_0 = p, a_n = a_{n-1}^2 + 1$$

$$(g) \circ a_0 = \alpha, a_n = \frac{a_{n-1} + \beta}{2}$$

Zestaw 3

3.1.○ (3) Zbadać zbieżność szeregu, tzn. rozstrzygnąć, czy jest zbieżny bezwzględnie lub tylko warunkowo, czy jest rozbieżny (warunkowo).

(a)○ $\sum_n \frac{n^2-3n+2}{n^3-n-6}$

(b)○ $\sum_n \frac{n+4}{n^3-2n-1000}$

(c)○ $\sum_n \frac{\sqrt{n^2+2}+\sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt{n^4+1}}$

(d)○ $\sum_n \frac{n}{2^n}$

(e)○ $\sum_n \frac{10^{2024n}}{n!}$

(f)○ $\sum_n \frac{2^n+3^n+5^n}{3^n+4^n+6^n}$

(g)○ $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^p}$ (gdzie $p \in \mathbb{R}$ to parametr)

3.2.○ (4) Zbadać zbieżność szeregu, tzn. rozstrzygnąć, czy jest zbieżny bezwzględnie lub tylko warunkowo, czy jest rozbieżny (warunkowo).

(a)● $\sum_n \frac{\sqrt{n^6+n+1}-\sqrt{n^6-n-1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}$

(b)● $\sum_n \frac{(-1)^n}{n \log^p n}$ (gdzie $p \in [0, \infty)$ to parametr)

(c)○ $\sum_n (1 - \cos(\frac{\pi}{n}))$

(d)● $\sum_n \frac{16^n}{\binom{4n}{2n}}$

(e)○ $\sum_n \frac{\log(n)}{n^p}$ (gdzie $p \in \mathbb{R}$ to parametr)

(f)● $\sum_n \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$

(g)● $\sum_n (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})$

(h)○ $\sum_n (\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2-1})$

3.3.○ (5) Zbadać zbieżność szeregu, tzn. rozstrzygnąć, czy jest zbieżny bezwzględnie lub tylko warunkowo, czy jest rozbieżny (warunkowo).

(a)● $\sum_n \frac{27^n}{4^n \binom{3n}{n}}$

(b*)● $\sum_n \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$

(c)○ $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ gdzie $a_n = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^n}$

(d)○ $\sum_n 2^{-\sqrt{n}}$

(e)○ $\sum_n (\sqrt[n]{n} - 1)$

(f)○ $\sum_n \frac{(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}}{n}$

3.4.● (5) Wyznaczyć sumę podanego szeregu.

(a)● $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

$$(b) \bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

$$(c^*) \bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n+1}{(n^2+n+1)(n^2+3n+3)}$$

3.5.○ (3) Wyznaczyć obszar zbieżności poniższych szeregów potęgowych i zbadać rodzaj zbieżności w każdym punkcie tego obszaru. (Nie stosować wzoru Stirlinga!).

$$(a) \circ \sum_n \frac{x^n}{n^2}$$

$$(b) \circ \sum_n \frac{x^{n+1}}{2^n+3^n}$$

$$(c) \circ \sum_n n!(x+4)^{n+2025}$$

$$(d) \circ \sum_n (-1)^{n-1} \sqrt{n} (x-2)^{n+2025}$$

$$(e) \bullet \sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} (x+2)^n$$

$$(f) \circ \sum_n \frac{(-1)^n}{n^n} (x-4)^{n+4}$$

3.6.○ (4) Wyznaczyć obszar zbieżności poniższych szeregów potęgowych i zbadać rodzaj zbieżności w każdym punkcie tego obszaru. (Nie stosować wzoru Stirlinga!).

$$(a) \bullet \sum_n \frac{x^{2n}}{2^n}$$

$$(b) \circ \sum_n \frac{(x-1)^{3n-1}}{3^n+n^2+1}$$

$$(c) \bullet \sum_n n! \left(\frac{x}{n}\right)^n$$

$$(d) \circ \sum_n \left(\sin \frac{\pi}{n^2}\right) x^n$$

$$(e) \circ \sum_n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) (x-2025)^n$$

3.7.○ (5) Wyznaczyć obszar zbieżności poniższych szeregów potęgowych i zbadać rodzaj zbieżności w każdym punkcie tego obszaru. (Nie stosować wzoru Stirlinga!).

$$(a) \bullet \sum_n \frac{x^{n^2}}{n!}$$

$$(b) \circ \sum_n (-1)^{n(n+1)/2} \cdot \frac{x^n}{n}$$

$$(c) \circ \sum_n \left(\sin \frac{\pi}{n^2+n+1}\right) x^{n^2+n+1}$$

$$(d) \circ \sum_n \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(n-k+1)}\right) x^n$$

$$(e^*) \circ \sum_n [(3 + \cos(n\pi))x]^n$$

Zestaw 4

4.1.○ (3) Wyznaczyć dziedzinę podanych funkcji i zbadać ich ciągłość, tj. wskazać wszystkie punkty nieciągłości (o ile są takowe).

$$(a) \bigcirc \quad f(x) = \begin{cases} x^3 - x - 1 & \text{gdy } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2x+1} & \text{gdy } -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{x} + 1 & \text{gdy } x < -1 \\ \cos(\pi x^2) & \text{gdy } x > 1 \end{cases}$$

$$(b) \bigcirc \quad f(x) = \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor & \text{gdy } -1 < x \leq 1 \\ \log_2(-x) & \text{gdy } x \leq -1 \\ 3^x & \text{gdy } x \geq 2 \end{cases}$$

$$(c) \bigcirc \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{gdy } x < -2 \\ 5 & \text{gdy } x = -2 \\ 1 - 2x & \text{gdy } -2 < x < 1 \\ x^2 + 2 & \text{gdy } x > 1 \end{cases}$$

4.2.○ (3) W zależności od parametrów wyznaczyć dziedzinę podanych funkcji, oraz wskazać wszystkie wartości parametrów, dla których są one ciągłe (tzn. są ciągłe w każdym punkcie swojej dziedziny).

$$(a) \bigcirc \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{gdy } x < 0 \\ 1 & \text{gdy } x = 0 \\ \frac{\sin(ax)}{x} & \text{gdy } x > 0 \end{cases}$$

$$(b) \bigcirc \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - ax - 1 & \text{gdy } x < -1 \\ (x - a)^2 - 1 & \text{gdy } -1 \leq x \leq 1 \\ -3ax & \text{gdy } x > 1 \end{cases}$$

$$(c) \bigcirc \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + a^2} & \text{gdy } x < 0 \\ a^2 e^x + \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 - 5x + 4} & \text{gdy } x \geq 0 \end{cases}$$

4.3.○ (4) Wyznaczyć dziedzinę podanych funkcji i zbadać ich ciągłość, tj. wskazać wszystkie punkty nieciągłości (o ile są takowe).

$$(a) \bullet \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{gdy } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ x & \text{gdy } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$(b) \bigcirc \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 3 & \text{gdy } x \in (0, \infty) \setminus \mathbb{Q} \\ \ln(x + 1) & \text{gdy } x \in (-\infty, 0) \setminus \mathbb{Q} \\ |x| & \text{gdy } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$(c) \bigcirc \quad f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x) & \text{gdy } \sin(\pi x) > 0 \\ -1 & \text{gdy } \sin(\pi x) \leq 0 \end{cases}$$

4.4.○ (4) W zależności od parametrów wyznaczyć dziedzinę podanych funkcji, oraz wskazać wszystkie wartości parametrów, dla których są one ciągłe.

$$(a) \bullet \quad f(x) = \begin{cases} (a^2)^{x+1} & \text{gdy } x < 0 \\ (x + 1)^{a^2} & \text{gdy } x \geq 0 \end{cases}$$

$$(b) \bigcirc \quad f(x) = \begin{cases} \sin(\pi ax) & \text{gdy } x \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ \frac{|x|^a}{x} & \text{gdy } x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{cases}$$

$$(c) \bigcirc \quad f(x) = \begin{cases} x^{\lfloor a \rfloor} & \text{gdy } x < 0 \\ 6a^2 - 5a + 2 & \text{gdy } x = 0 \\ x^a + 3a & \text{gdy } x > 0 \end{cases}$$

4.5. $\bigcirc$ (5) Wyznaczyć dziedzinę podanych funkcji i zbadać ich ciągłość, tj. wskazać wszystkie punkty nieciągłości (o ile są takowe).

$$(a) \bullet \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 0 & \text{gdy } x = 0 \\ \frac{(-1)^p}{q} & \text{gdy } x = \frac{p}{q}, \text{ gdzie } p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, q \in \mathbb{N}_1 \text{ i ułamek jest nieskaraczalny} \end{cases}$$

$$(b) \bigcirc \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(\frac{\pi}{2} \lfloor x \rfloor) & \text{gdy } \frac{\lfloor x \rfloor}{2} \in \mathbb{Z} \\ x^2 \cos(\frac{\pi}{2} \lfloor x - 1 \rfloor) & \text{gdy } \frac{\lfloor x \rfloor}{2} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$(c) \bullet \quad f(x) = x^{\lfloor x+1 \rfloor}$$

4.6. $\bigcirc$ (5) W zależności od parametrów wyznaczyć dziedzinę podanych funkcji, oraz wskazać wszystkie wartości parametrów, dla których są one ciągłe.

$$(a) \bullet \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x}{x-a} & \text{gdy } 0 < x \leq 1 \\ x+1+a & \text{gdy } x \leq 0 \\ x^2 - ax & \text{gdy } x > 1 \end{cases}$$

$$(b) \bullet \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [(x^2 - x - 1)^2]^{na}$$

$$(c^*) \bigcirc \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 + n^2 x^2}$$

Wzory na pochodną

$$\sqrt[\Delta]{\square} = (\square)^{\frac{1}{\Delta}}, \quad (\square)^{\Delta} = e^{(\Delta) \cdot \ln(\square)}, \quad \log_{\Delta}(\square) = \frac{\ln(\square)}{\ln(\Delta)} \quad (e \approx 2,7182818284\dots)$$

- $((\square) \pm (\Delta))' = (\square)' \pm (\Delta)', \quad (a \cdot (\square))' = a \cdot (\square)' \quad (a — stała)$
- $((\square) \cdot (\Delta))' = (\square)' \cdot (\Delta) + (\square) \cdot (\Delta)'$
- $\left(\frac{\square}{\Delta}\right)' = \frac{(\square)' \cdot (\Delta) - (\square) \cdot (\Delta)'}{(\Delta)^2}$
- $(a)' = 0 = (x^0)', \quad (x)' = 1, \quad (x^a)' = a \cdot x^{a-1} \quad (a — stała)$
- $((\square)^a)' = a \cdot (\square)^{a-1} \cdot (\square)'$
- $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
- $(\sqrt{\square})' = \frac{(\square)'}{2\sqrt{\square}}, \quad \left(\frac{1}{\square}\right)' = -\frac{(\square)'}{(\square)^2}$
- $(e^x)' = e^x, \quad (a^x)' = a^x \cdot \ln a \quad (a — stała dodatnia)$
- $(e^{\square})' = e^{\square} \cdot (\square)', \quad (a^{\square})' = a^{\square} \cdot \ln a \cdot (\square)' \quad (a — stała dodatnia)$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x} = (\ln |x|)', \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} = (\log_a |x|)' \quad (a — stała dodatnia różna od 1)$
- $(\ln(\square))' = \frac{(\square)'}{\square} = (\ln |\square|)', \quad (\log_a(\square))' = \frac{(\square)'}{(\square) \cdot \ln a} = (\log_a |\square|)' \quad (a — stała dodatnia \neq 1)$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\sin(\square))' = \cos(\square) \cdot (\square)'$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\cos(\square))' = -\sin(\square) \cdot (\square)'$
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $(\operatorname{tg}(\square))' = \frac{(\square)'}{\cos^2(\square)}$
- $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
- $(\operatorname{ctg}(\square))' = -\frac{(\square)'}{\sin^2(\square)}$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arcsin(\square))' = \frac{(\square)'}{\sqrt{1-(\square)^2}}$
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos(\square))' = -\frac{(\square)'}{\sqrt{1-(\square)^2}}$
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(\operatorname{arctg}(\square))' = \frac{(\square)'}{1+(\square)^2}$
- $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
- $(\operatorname{arcctg}(\square))' = -\frac{(\square)'}{1+(\square)^2}$

Zestaw 5

5.1.○ (3) Obliczyć pochodne podanych funkcji i porównać dziedziny danej funkcji i jej pochodnej.

(a)○ $\sqrt{x^2 - 1}$

(b)○ $x \sin(x) \cos(x^2)$

(c)○ $\frac{x^2 \ln|x| - x}{x+1}$

(d)○ $(x+1)^{2024}(x-2)^{2025}$

(e)○ $\operatorname{tg}^2(x) \ln^3|x|$

(f)○ $\frac{\arcsin x}{\arccos x}$

(g)○ $\frac{\sqrt[3]{x-1}+1}{\sqrt[4]{(x-1)^3}}$

5.2.○ (4) Obliczyć pochodne podanych funkcji i porównać dziedziny danej funkcji i jej pochodnej.

(a)● $\left(\frac{x^2-1}{x+2}\right)^{\ln(x+5)}$

(b)● x^x

(c)● $x^{\frac{1}{x}}$

(d)○ $\log_x(x^2 + 1)$

(e)● $\log_{x^2+2}(x^2 + 4)$

5.3.○ (5) Obliczyć pochodne podanych funkcji i porównać dziedziny danej funkcji i jej pochodnej.

(a)● $|x|\sqrt{|x|}$

(b)● $\sqrt[3]{(x-1)^4}$

(c)● $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{gdy } x \geq 0 \\ x^3 + x + 1 & \text{gdy } x < 0 \end{cases}$

(d)● $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{gdy } x \neq 0 \\ 0 & \text{gdy } x = 0 \end{cases}$

(e)○ $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{gdy } x \neq 0 \\ 0 & \text{gdy } x = 0 \end{cases}$

(f)○ $f(x) = \begin{cases} |x|^x & \text{gdy } x \neq 0 \\ 0 & \text{gdy } x = 0 \end{cases}$

(g)● $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{gdy } x \geq 0 \\ x & \text{gdy } x < 0 \end{cases}$

Zestaw 6

6.1.○ (3) Wyznaczyć dziedzinę, wszystkie ekstrema lokalne oraz maksymalne przedziały monotoniczności (spośród otwartych, domkniętych i otwarto-domkniętych) podanych funkcji.

(a)○ $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

(b)○ $f(x) = x^4 + 4x^3 - 18x^2 - 108x - 1$

(c)○ $f(x) = x^5 - 15x^4 + 60x^3 - 7$

(d)○ $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

(e)● $f(x) = x^2 e^x$

(f)○ $f(x) = e^{2x} - e^x$

(g)○ $f(x) = \frac{\ln|x|}{x}$

6.2.○ (4) Wyznaczyć dziedzinę, wszystkie ekstrema lokalne oraz maksymalne przedziały monotoniczności (spośród otwartych, domkniętych i otwarto-domkniętych) podanych funkcji.

(a)○ $f(x) = x \sin x + \cos x$

(b)○ $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x + 2}$

(c)● $f(x) = e^x \sin x$

(d)○ $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 5x - \frac{1}{2}$

(e)● $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - 2\sqrt{x + 1}$

6.3.○ (5) Wyznaczyć dziedzinę, wszystkie ekstrema lokalne oraz maksymalne przedziały monotoniczności (spośród otwartych, domkniętych i otwarto-domkniętych) podanych funkcji.

(a)● $f(x) = \sqrt{|x^2 - 1|}$

(b)○ $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + x^2 - 3x - 2}{x + 2} & \text{gdy } x \neq -2 \\ a & \text{gdy } x = -2 \end{cases} \quad (\text{odpowiedź podać w zależności od parametru } a \in \mathbb{R})$

(c)○ $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{gdy } x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\} \\ 1 & \text{gdy } x = 0 \end{cases}$

(d)○ $f(x) = 6 \sin x - 6x + x^3$

Zestaw 7

7.1.○ Wyznaczyć liczby wymierne, które przybliżają podane liczby z dokładnością 0,01.

(a)● (3) $\sin 1$

(b)● (3) $\sqrt{5}$

(c)● (4) e

(d)○ (5) $\ln(2)$

(e*)○ (5) π

7.2.○ Wyznaczyć wszystkie asymptoty (tj. pionowe, poziome, ukośne) podanych funkcji.

(a)○ (3) $\frac{x}{x^2+1}$

(b)○ (3) $\frac{x^2}{x-1}$

(c)● (4) $\frac{x^3-3x^2+3x-2}{x^2-3x+2}$

(d)○ (4) $x \operatorname{arctg} x$

(e)● (4) $xe^{1/x}$

7.3.○ Wyznaczyć przedziały wypukłości (oraz wklęsłości) i punkty przegięcia podanych funkcji.

(a)○ (3) $\frac{x}{x^2+1}$

(b)○ (3) $\frac{x^2}{x-1}$

(c)○ (3) $\frac{1}{4}x^4 - x^3 - 3x^2 - 2x$

(d)● (3) $\operatorname{arctg} x$

(e)● (4) $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$

7.4.○ Zbadać parzystość (i nieparzystość) podanych funkcji.

(a)○ (3) $\frac{x}{x^2+1}$

(b)○ (3) $\frac{x^2-x}{x-1}$

(c)○ (4) $\frac{1-e^x}{1+e^x}$

(d)● (5) $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$

(e)● (5) $\frac{x}{e^x-1} + \frac{1}{2}x$

Przebieg zmienności funkcji

* punkty opcjonalne (zależne od poziomu komplikacji)

** punkty nadobowiązkowe (niewymagane)

1. Dziedzina funkcji i punkty jej nieciągłości.

1a**. Parzystość (i nieparzystość) funkcji, miejsca zerowe i punkty wspólne z osią Y.

2. Wartości funkcji w tych krańcach dziedziny, które do niej należą, oraz w punktach nieciągłości.

3. Granice funkcji w tych krańcach dziedziny, które do niej nie należą, oraz w punktach nieciągłości.

4. Asymptoty.

5. Pochodna i jej dziedzina.

5a**. Granice pochodnej w punktach dziedziny wyjściowej funkcji, które nie należą do dziedziny pochodnej, oraz w punktach nieciągłości pochodnej.

6. Miejsca zerowe i znak pochodnej.

7. Tabelka monotoniczności (i sklepanie w niej) z wartościami funkcji w ekstremach.

8*. Druga pochodna i jej dziedzina.

8a*. Miejsca zerowe i znak drugiej pochodnej.

8b*. Tabelka wypukłości.

9. Tabelka końcowa.

10. Wykres funkcji.

Przeprowadzić przebieg zmienności podanych funkcji.

Zestaw 8

8.1.○ (3) $x^3 + 3x^2 - 9x + 1$

8.2.○ (3) $\frac{1}{4}x^4 + x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 5x - \frac{7}{4}$

8.3.○ (3) $\frac{1}{4}x^4 + x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 11x - \frac{19}{4}$

8.4.○ (4) $\frac{x}{x^2+1}$

8.5.○ (4) $\frac{x^2+1}{x}$

8.6.○ (4) $\frac{x}{x^2-1}$

8.7.● (5) $\frac{\ln|x|}{x}$

8.8.○ (5) $xe^{1/x}$

8.9.● (5) $x \ln|x|$

Zestaw 9

9.1.○ Obliczyć poniższe całki nieoznaczone.

(a)● (3) $\int (2x - 4)^{1000} dx$

(b)● (3) $\int e^{2x-5} dx$

(c)● (3) $\int \cos(4x + 2) dx$

(d)○ (3) $\int \frac{x^3-1}{x-1} dx$

(e)○ (3) $\int \frac{x\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}+1}{x\sqrt[4]{x}} dx$

(f)○ (3) $\int x^3 \sin(2x) dx$

(g)○ (3) $\int \frac{x^2-1}{e^{2x}} dx$

(h)○ (3) $\int \frac{dx}{x^2+4}$

(i)○ (4) $\int \operatorname{ctg} x dx$

(j)○ (4) $\int \operatorname{arctg} x dx$

(k)○ (4) $\int \arcsin x dx$

(l)○ (4) $\int x\sqrt{x^2-4} dx$

(m)○ (4) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+3}} dx$

(n)● (4) $\int \frac{dx}{x \ln x}$

(o)○ (4) $\int e^{2x-3} \cos(3x+2) dx$

(p)○ (5) $\int \frac{x^4-2x^3+2x^2+2}{x^2+1} dx$

(q)● (5) $\int x^2 e^{-x} \sin x dx$

(r)○ (5) $\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$

(s)● (5) $\int \frac{x^3-x^2+x+2}{x^2-2x+1} dx$

(t)○ (5) $\int \sqrt{1+x^2} dx$

(u)○ (5) $\int \sqrt{2-2x-x^2} dx$

Zestaw 10

10.1.○ Obliczyć poniższe całki nieoznaczone.

(a)○ (3) $\int \frac{x+1}{x^3-x^2} dx$

(b)● (3) $\int \frac{1}{x^4+x^3} dx$

(c)○ (3) $\int \frac{x^3+1}{x^2-4} dx$

(d)○ (4) $\int \frac{x+2}{x^3-1} dx$

(e)○ (4) $\int \frac{1}{(2x-4)(x^2-x-2)} dx$

(f)○ (4) $\int \frac{1}{x^4+4} dx$

(g)○ (5) $\int \frac{\sin x - 2 \cos x}{2 + \sin x} dx$

(h)● (5) $\int \frac{\cos(2x)}{1 + (\sin x + \cos x)^2} dx$

(i)○ (5) $\int \sqrt{x^2 + 4} dx$

10.2.○ Obliczyć poniższe całki oznaczone.

(a)○ (3) $\int_0^\pi x^2 \sin x dx$

(b)○ (3) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx$

(c)○ (3) $\int_1^4 \frac{x-1}{x^2+x} dx$

(d)○ (3) $\int_1^e \ln |x| dx$

(e)● (4) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{tg} x dx$

(f)○ (4) $\int_0^\pi \sin^6 x dx$

(g)○ (5) $\int_0^{\frac{1}{2}} x \arcsin x dx$

(h)○ (5) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \operatorname{ctg} x \cdot e^{-(x-\frac{\pi}{2})^2} dx$

10.3.○ Obliczyć pola obszarów ograniczonych poniższymi krzywymi.

(a)○ (3) $y = 1, \quad y = 4 - x^2$

(b)○ (3) $y = x^2 - 2, \quad y = 2 - x^2$

(c)○ (3) $y = x^2 - x - 1, \quad y = x + 2$

(d)○ (4) $y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad x = -\pi, \quad x = 0$

(e)○ (4) $y = \ln x, \quad y = \frac{x-1}{e-1}$

(f)○ (4) $x = y^2, \quad y = x^2$

(g)○ (5) $x^2 + y^2 = 1, \quad y \geq x^2$

(h)○ (5) $x^2 + y^2 = 4$ [nie używać wzoru na pole koła!]

Zestaw 11

11.1.○ Obliczyć poniższe całki niewłaściwe lub stwierdzić, że nie są one zbieżne.

(a)○ (3) $\int_0^\infty x^2 e^{-x} dx$

(b)○ (3) $\int_{-\infty}^0 x e^{2x} dx$

(c)○ (3) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx$

(d)○ (4) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$

(e)○ (4) $\int_{-\infty}^\infty e^{-|x|} dx$

(f)○ (4) $\int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-|x|^3} dx$

11.2.○ Wykazać, że poniższe funkcje są nieciągłe w punkcie $(0, 0)$, jeśli wiadomo, że $f(0, 0) = 0$. Poniższe wzory podają wartość funkcji dla $(x, y) \neq (0, 0)$.

(a)○ (3) $f(x, y) = \frac{x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2}$

(b)○ (4) $f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^4 + y^4}$

(c)○ (4) $f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^4 + y^6}$

(d)○ (5) $f(x, y) = \frac{x^4 y + x y^8 + x^2 y^3 + x^3 y^2}{(x^2 + y^4)^2}$

(e)○ (5) $f(x, y) = \frac{x^3 y - x y^3}{x^6 + x^4 + y^4 + y^6}$

11.3.○ (5) Wyznaczyć wartość parametru $a \in \mathbb{R}$, dla której poniższe funkcje (określone tylko dla $(x, y) \neq (0, 0)$) stają się ciągłe, gdy $f(0, 0) = a$.

(a)○ $f(x, y) = \frac{x^4 y + x y^8 + x^3 y^3}{(x^2 + y^4)^2}$

(b)○ $f(x, y) = \frac{x^4 + 2x^3 y^2 + 2x^2 y^3 + y^4}{x^4 + y^4}$

(c)○ $f(x, y) = \frac{x^3 y + x y^3 - x^4 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}$

Zestaw 12

12.1.○ (3) Podać warunki opisujące dziedzinę i obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu podanych funkcji.

(a)○ $f(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - \operatorname{arctg}(x/y)$

(b)○ $g(u, v) = \frac{u^2v - 2uv^2}{u^4 + v^4}$

(c)○ $h(x, y, z) = x^{y^z}$

12.2.○ Dla poniższych funkcji wyznaczyć wszystkie punkty podejrzane o ekstremum i rozpoznać maksima i minima wśród tych punktów, wobec których działa kryterium macierzowe.

(a)○ (3) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

(b)○ (4) $f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2 + x - y + 1$

(c)○ (4) $f(x, y) = 2x^2 - 2xy + y^2 - 2y + 3$

(d)○ (4) $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4xy + 3xz - 2yz - x + 2y - 7z - 4$

(e)○ (5) $f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 3y - 2x$

(f)○ (5) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xyz$

12.3.○ Obliczyć poniższe całki.

(a)○ (3) $\iint_D (x^2y + xy^4 - xy) \, dx \, dy$, gdzie $D = [0, 1] \times [2, 3]$

(b)○ (4) $\iint_D \frac{x^2+1}{y^2+1} \, dx \, dy$, gdzie $D = [0, 1] \times [0, 1]$

(c)○ (5) $\iint_D \frac{x \, dx \, dy}{x^2+y^2}$, gdzie $D = [1, \sqrt{3}] \times [-1, 1]$

Zestaw 13

13.1.○ Obliczyć podane całki po obszarze D ograniczonym podanymi krzywymi.

(a)○ (4) $\iint_D (x^3 - xy^2) dx dy, \quad D: x = 0, y = 0, x + y = 1$

(b)○ (4) $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \quad D: xy = 1, x + y = \frac{5}{2}$

(c)○ (4) $\iint_D x^2 y dx dy, \quad D: y = 1 - x^2, y = -3$

(d)○ (5) $\iint_D (x^2 + xy + y^2) dx dy, \quad D: x^2 + y^2 = 25, y = \frac{1}{3}x^2 + 1, y = -\frac{1}{8}x^2 - 1$

(e)○ (5) $\iint_D (x + 1)^{10} dx dy, \quad D: y = x^2 - 1, x - y + 1 = 0, x + y - 1 = 0$

(f)○ (5) $\iint_D \sin^{2025}(x + y) dx dy, \quad D: y = x - 9, y = 9 - x, y = x + 9, y = -9 - x$

13.2.○ Obliczyć podane całki z użyciem współrzędnych biegunowych.

(a)○ (3) $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \quad D: x^2 + y^2 = 4$

(b)○ (4) $\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy, \quad D: x^2 + y^2 = 9$

(c)○ (4) $\iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \quad D: x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0$

(d)○ (5) $\iint_D (x + y) dx dy, \quad D: (x - 1)^2 + y^2 = 1$

(e)○ (5) $\iint_D x dx dy, \quad D: (x - 1)^2 + y^2 = 1, x \geq 1$

13.3.○ Obliczyć długość poniższych krzywych.

(a)○ (3) $\gamma(t) = (\sin t, -\cos t), \quad t \in [0, 1]$

(b)○ (3) $\gamma(t) = (t - \frac{1}{3}t^3, \frac{1}{2}t^2, \frac{\sqrt{3}}{2}t^2), \quad t \in [0, 1]$

(c)○ (4) $y = x\sqrt{x}, \quad x \in [0, 1]$

(d)○ (4) $y = \ln \cos x, \quad x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

(e)○ (5) $y = \frac{1}{2}x^2, \quad x \in [0, 1]$

(f)○ (5) $y = \ln x, \quad x \in [1, 2]$