

Informacje

Zadania, które zostały już rozwiązane, mają kółka obok swych numerów zamalowane na czarno.

Jeśli w zadaniu występują podpunkty (a), (b), itd. (a nie (i), (ii), itd.), każdy podpunkt tego zadania to osobne zadanie.

W rozwiązaniu Zadania X można korzystać z Zadania Y (nawet, jeśli Zadanie Y nie zostało jeszcze rozwiązane!), jeśli Zadanie Y występuje w tym zbiorze zadań wcześniej niż Zadanie X.

Zestaw 1

- 1.1.○ (3) Program komputerowy wykonuje n^2 operacji (czas wykonania każdej z nich jest taki sam), dla danych wejściowych o rozmiarze n . O ile procent wzrośnie czas działania programu, jeśli rozmiar danych wejściowych n zwiększymy o 10%?
- 1.2.○ (3) Obliczyć sumę wszystkich współczynników wielomianu $W(x) = (3x^2 - 2x - 2)^{2026}$.
- 1.3.○ (4) Załóżmy, że jest to fizycznie możliwe, by kartkę papieru o grubości 0,1 mm złożyć na pół 50 razy z rzędu. Oszacować, jak gruba będzie warstwa papieru po ostatnim złożeniu. Czy grubość ta przewyższy odległość z Ziemi do Księżyca (ok. 384 000 km)?
- 1.4.● (4) Czy dodatnia liczba niewymierna podniesiona do potęgi niewymiernej może dać wynik wymierny? Odpowiedź uzasadnić.
- 1.5.● (4) Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych (x, y) , które spełniają równanie $xy + 3x - 2y = 13$.
- 1.6.○ (4) Suma pierwszych n wyrazów pewnego ciągu dana jest wzorem $S_n = 3n^2 + 2n + 1$. Wyznaczyć wzór na n -ty wyraz tego ciągu. Czy ciąg ten jest arytmetyczny?
- 1.7.○ (4) Znaleźć wzór ogólny (możliwie najprostszej postaci) na n -ty wyraz ciągu zdefiniowanego rekurencyjnie: $a_1 = 7$ oraz $a_{n+1} = 2a_n + 1$ dla $n \geq 1$.
- 1.8.● (4) Wiedząc, że $x \in \mathbb{R}$ jest liczbą niezerową oraz $x + \frac{1}{x} = a$, przedstawić $x^2 + \frac{1}{x^2}$ oraz $x^3 + \frac{1}{x^3}$ jako wzory, w których jedynym parametrem jest a .
- 1.9.○ (4) Określić liczbę rozwiązań równania $x^2 - 4|x| + 3 = k$ w zależności od wartości parametru rzeczywistego k .
- 1.10.● (4) Uzasadnić, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność $(x + y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \geq 4$.
- 1.11.○ (4) Udowodnić, że jeśli $a, b > 0$, to zachodzi nierówność $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Kiedy zachodzi równość?
- 1.12.○ (4) Drut o długości 100 cm należy rozciąć na dwie części. Z jednej tworzymy kwadrat (same jego boki), a z drugiej okrąg ograniczający koło. W jakim stosunku należy podzielić drut, aby suma pól obu uzyskanych figur (kwadratu i koła) była jak najmniejsza?
- 1.13.● (5) Ile łącznie cyfr w zapisie dziesiętnym mają liczby 2^{100} oraz 5^{100} ?
- 1.14.● (5) Przedstawić wyrażenie $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$ w najprostszej postaci.
- 1.15.○ (5) Znaleźć wszystkie dodatnie liczby całkowite mniejsze niż 15 000, które przy dzieleniu przez 17 dają resztę 3, przy dzieleniu przez 29 dają resztę 20, a przy dzieleniu przez 31 dają resztę 7.

1.16.● (3) Rozwiązać równanie $|x - 1| + |x + 1| = 2$.

1.17.○ (4) Dla podanych ciągów znaleźć najmniejszą liczbę całkowitą $N > 0$, taką że ciąg $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ jest ściśle monotoniczny.

(a)○ $a_n = n^2 - 2024n + 2025$

(b)○ $a_n = \frac{1}{2n-9}$

(c)○ $a_n = \frac{n-3}{n+2}$

(d)○ $a_n = \frac{n^2+n+1}{3n-8}$

(e)○ $a_n = \frac{17^n}{n!}$

(f)○ $a_n = (-1)^n + \frac{n^2}{2025}$

(g)○ $a_n = \sqrt{n^2 + 10} - n$

(h)○ $a_n = \frac{2^n}{n}$

(i)○ $a_n = \frac{n^3}{2^n}$

1.18.○ (4) Wykazać, że między dowolnymi dwoma różnymi liczbami rzeczywistymi istnieje liczba niewymierna.

1.19.○ (4) Wykazać, że zbiór wszystkich liczb postaci $q + w\sqrt{2}$, gdzie liczby q i w są wymierne, jest *ciałem* (tzn. jest zamknięty na dodawanie, odejmowanie, mnożenie oraz dzielenie przez liczbę niezerową; i zawiera wszystkie liczby wymierne).

1.20.○ (5) Wykazać, że dla dowolnego ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ liczb rzeczywistych istnieje ściśle rosnący ciąg $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ całkowitych liczb dodatnich, taki że ciąg $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ jest albo stały, albo ściśle rosnący, albo ściśle malejący.

1.21.○ (3) Wykazać, że $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$ dla wszelkich nieujemnych liczb rzeczywistych x i y .

1.22.○ (4) Wykazać, że $\sqrt[p]{x+y} \leq \sqrt[p]{x} + \sqrt[p]{y}$ oraz $(x+y)^p \geq x^p + y^p$ dla wszelkich nieujemnych liczb rzeczywistych x i y oraz dowolnej liczby całkowitej $p > 1$.

1.23*.● (5) Wykazać, że $(x+y)^q \leq x^q + y^q$ oraz $(x+y)^p \geq x^p + y^p$ dla wszelkich nieujemnych liczb rzeczywistych x i y oraz dowolnych liczb rzeczywistych $p \geq 1$ i $q \in (0, 1]$.

1.24.○ (3) Wykazać, że jeśli $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ściśle rosnącym (odpowiednio: ściśle malejącym) ciągiem liczb dodatnich, to ciąg $(1/a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ściśle malejący (odp. ściśle rosnący). Podać przykład (ciągu o wyrazach niezerowych) świadczący o tym, że założenie, że wszystkie wyrazy są dodatnie, jest istotne.

1.25.○ (5) Czy istnieje ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ liczb rzeczywistych, który ma wszystkie poniższe własności?

- Ciąg $(|x_{n+1} - x_n|)_{n=1}^{\infty}$ jest ściśle malejący.
- Dla dowolnej liczby całkowitej $N > 0$ istnieje taki indeks n , że $|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{N}$.
- Dla dowolnej liczby całkowitej $N > 0$ istnieją takie indeksy k i ℓ , że $x_k \geq N$ oraz $x_\ell \leq -N$.

- 1.26. ☐ (3) O każdym z poniższych zbiorów rozemnać, czy jest to zbiór ograniczony od góry lub od dołu:
 $A = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, 0 < a < |b|\}; \quad B = \{\frac{b}{a} : a, b \in \mathbb{Z}, 0 < a < b < 2^a\};$
 $C = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, 0 < -b < a\}; \quad D = \{\frac{b}{a} : a, b \in \mathbb{Z}, 0 < |a| < b\}.$

Kilka zadań „ponadprogramowych”, tylko dla chętnych:

- 1.27. ☐ (3) Uzasadnić, że dla dowolnego niepustego zbioru $A \subset \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $\inf(A) \leq \sup(A)$. Kiedy w tej nierówności zachodzi równość?

- 1.28. ☐ (4) Wykazać, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \in \mathbb{R}$ zachodzą równości $\sup\{q \in \mathbb{Q} : q < x\} = x = \inf\{q \in \mathbb{Q} : q > x\}.$

- 1.29. ☐ (4) Wszystkie zbiory występujące w poniższych podpunktach są niepustymi podzbiorami zbioru $\mathbb{R}$. Wykazać, że:

(a) ☐ $\sup(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \max(\sup(A_1), \dots, \sup(A_n))$

(b) ☐ $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$, gdzie $A + B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A, \exists b \in B : x = a + b\}$

(c) ☐ $\sup(-A) = -\inf(A)$, gdzie $-A \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$

(d) ☐ Jeśli $A \subset B$, to $\inf(B) \leq \inf(A)$ oraz $\sup(A) \leq \sup(B)$.

- 1.30. ☒ (5) Wykazać, że dla dowolnych dwóch niepustych zbiorów $A, B \subset (0, \infty)$ zachodzą wzory

$$\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B) \quad \text{oraz} \quad \inf(A \cdot B) = \inf(A) \cdot \inf(B),$$

gdzie $A \cdot B = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A, \exists b \in B : x = ab\}$. Podać przykład dwóch niepustych zbiorów $A, B \subset \mathbb{R}$, dla których żadna z powyższych dwóch równości nie zachodzi.

- 1.31. ☐ (4) Niech $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ będą dwoma funkcjami określonymi na niepustym zbiorze X . Wykazać, że wtedy $\sup(f + g)(X) \leq \sup f(X) + \sup g(X)$. Podać przykład świadczący o tym, że w tej nierówności może nie być równości. (Tutaj $f(X) = \{t \in \mathbb{R} \mid \exists x \in X : f(x) = t\}$).

- 1.32*. ☐ (5) Wykazać, że $\sup\{\sin(n) : n \in \mathbb{N}\} = 1$.

- 1.33. ☐ (4) Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie bijekcją ściśle malejącą. Wykazać, że wtedy dla dowolnego niepustego ograniczonego zbioru $A \subset \mathbb{R}$ zachodzą związki $\sup f(A) = f(\inf(A))$ oraz $\inf f(A) = f(\sup(A))$.

Zestaw 2

2.1.○ (3) Obliczyć granice poniższych ciągów lub uzasadnić, że dany ciąg nie ma granicy w $[-\infty, \infty]$.

(a)○ $a_n = \frac{3n^2 - 2n + 5}{2n^2 + 2n + 1}$

(b)○ $a_n = \frac{2n^2 + 3n + 7}{n^3 - n^2 - 1}$

(c)○ $a_n = \frac{-2n^3 + 2024n^2 + 2025n + 6}{n^2 - n + 1}$

(d)○ $a_n = \sqrt{n+6} + 3\sqrt{n^3+2}$

(e)○ $a_n = -\sqrt[3]{n^2+2} - \sqrt{n+3}$

(f)○ $a_n = (-1)^n + n$

(g)○ $a_n = \frac{1+2+3+\dots+n}{3+5+7+\dots+(2n-1)}$

(h)○ $a_n = \frac{(-2)^{n-1} + 2 \cdot (-4)^{n+3} - 3 \cdot 3^n}{(-5)^n}$

(i)○ $a_n = 6 \cdot 2^n + (-3)^n$

(j)○ $a_n = \left(\frac{2n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)^n$

(k)○ $a_n = (-1)^n + \frac{n-1}{n+2}$

(l)○ $a_n = \sqrt[n]{\frac{2}{3}n^4 - 3n^3 + 3}$

(m)○ $a_n = \sqrt[n^3+n+2]{n^2+n-1}$

(n)○ $a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{n-1}{n+2}$

(o)○ $a_n = \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

(p)○ $a_n = \left(\frac{n^2+n+4}{3n^2-n+1}\right)^n$

2.2.○ (4) Obliczyć granice poniższych ciągów lub uzasadnić, że dany ciąg nie ma granicy w $[-\infty, \infty]$.

(a)○ $a_n = \sqrt{2n^2 - n} - \sqrt{n^2 + n + 1}$

(b)○ $a_n = \sqrt{2n^2 + 2n - 1} - \sqrt{2n^2 - n - 2}$

(c)○ $a_n = \sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt[3]{n^3 - 1}$

(d)○ $a_n = \frac{\sqrt{n^2+n+2} + \sqrt{2n^2+3n+1}}{\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+n+2}}$

(e)○ $a_n = \sqrt[n]{2024 \cdot 2^n + (0,1)^{2024} \cdot 3^n}$

(f)○ $a_n = \frac{\sqrt{n^2+n+2} - \sqrt{n^2+n-2}}{\sqrt{2n^2-n+1} - \sqrt{2n^2-2n+3}}$

(g)○ $a_n = \sqrt[n]{n^n + n + 1}$

(h)○ $a_n = \sqrt[n^2]{n^{n^3} + n + 1}$

(i)○ $a_n = \frac{\sin^n(n)}{n}$

(j)○ $a_n = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3}$

(k)○ $a_n = \frac{\sin^2(2^{-n})}{\sin(4^{-n})}$

$$(l) \bigcirc a_n = \frac{n}{2^n}$$

$$(m) \bigcirc a_n = \frac{\text{suma wszystkich dodatnich dzielników liczby } n}{n}$$

$$(n) \bigcirc a_n = \frac{(p^2-p)n^2+pn+1}{n+2} \text{ (odpowiedź podać w zależności od parametru } p \in \mathbb{R})$$

2.3. $\bigcirc$ (5) Obliczyć granice poniższych ciągów lub uzasadnić, że dany ciąg nie ma granicy w $[-\infty, \infty]$.

$$(a) \bigcirc a_n = \left(\frac{n^2+n+2}{n^2-n+1} \right)^n$$

$$(b) \bigcirc a_n = \left(\frac{3n-2}{3n+1} \right)^n$$

$$(c) \bigcirc a_n = \frac{\sqrt{n+\sqrt{n+1}+1}-\sqrt{n-\sqrt{n-1}-1}}{\sqrt{2n+2\sqrt{n+2}+1}-\sqrt{2n-2\sqrt{n}+3}}$$

$$(d) \bigcirc a_n = \frac{\sqrt{n+\sqrt{n+1}+1}-\sqrt{2n-\sqrt{n-1}-1}}{\sqrt{2n+2\sqrt{n+2}+1}-\sqrt{2n-2\sqrt{n}+3}}$$

$$(e) \bigcirc a_n = \sqrt[n]{n\sqrt{n}+n}$$

$$(f) \bigcirc a_n = \left(\frac{2^n+3^n}{3^n+2^{n+1}} \right)^{(1,5)^n}$$

$$(g^*) \bigcirc a_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

$$(h) \bigcirc a_n = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{n}$$

$$(i) \bigcirc a_n = \left(\frac{n^3+n+1}{n^3+1} \right)^n$$

$$(j^*) \bigcirc a_n = \sin(n)$$

$$(k) \bigcirc a_n = \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) \right)^{\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{n}\right)}$$

2.4. $\bigcirc$ (5) Rozstrzygnąć, które z poniższych ciągów, zadanych rekurencyjnie, mają granicę liczbową (odpowiedź uzasadnić). Wyznaczyć granicę tych ciągów, które okażą się zbieżne w $\mathbb{R}$. W tych podpunktach, w których występują parametry, odpowiedź podać w zależności od ich wartości. Wszystkie parametry mogą przyjmować dowolną wartość rzeczywistą.

$$(a) \bigcirc a_0 = \frac{1}{2}, a_n = \frac{a_{n-1}^2 + a_{n-1}}{2}$$

$$(b) \bigcirc a_0 = 1, a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}$$

$$(c) \bigcirc a_0 = 1, a_n = \frac{2n+3}{n+1}a_{n-1} - 1$$

$$(d) \bigcirc a_0 = 1, a_1 = 2, a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{3} \quad (n > 1)$$

$$(e) \bigcirc a_0 = p, a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 1}{2}$$

$$(f) \bigcirc a_0 = p, a_n = a_{n-1}^2 + 1$$

$$(g) \bigcirc a_0 = 2, a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$$

$$(h) \bigcirc a_0 = \alpha, a_n = \frac{a_{n-1} + \beta}{2}$$

$$(i) \bigcirc a_0 = 0,2026, a_n = \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{1}{a_{n-1}}$$

$$(j^*) \bigcirc a_0 = 1, a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}$$

Zestaw 3

3.1.○ (3) Zbadać zbieżność szeregu, tzn. rozstrzygnąć, czy jest zbieżny bezwzględnie lub tylko warunkowo, czy jest rozbieżny (warunkowo).

(a)○ $\sum_n \frac{n^2-3n+2}{n^3-n-6}$

(b)○ $\sum_n \frac{n+4}{n^3-2n-1000}$

(c)○ $\sum_n \frac{\sqrt{n^2+2}+\sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt{n^4+1}}$

(d)○ $\sum_n \frac{n}{2^n}$

(e)○ $\sum_n \frac{10^{2024n}}{n!}$

(f)○ $\sum_n \frac{2^n+3^n+5^n}{3^n+4^n+6^n}$

(g)○ $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^p}$ (gdzie $p \in \mathbb{R}$ to parametr)

3.2.○ (4) Zbadać zbieżność szeregu, tzn. rozstrzygnąć, czy jest zbieżny bezwzględnie lub tylko warunkowo, czy jest rozbieżny (warunkowo).

(a)○ $\sum_n \frac{\sqrt{n^6+n+1}-\sqrt{n^6-n-1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}$

(b)○ $\sum_n \frac{(-1)^n}{n \log^p n}$ (gdzie $p \in [0, \infty)$ to parametr)

(c)○ $\sum_n (1 - \cos(\frac{\pi}{n}))$

(d)○ $\sum_n \frac{16^n}{\binom{4n}{2n}}$

(e)○ $\sum_n \frac{\log(n)}{n^p}$ (gdzie $p \in \mathbb{R}$ to parametr)

(f)○ $\sum_n \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$

(g)○ $\sum_n (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})$

(h)○ $\sum_n (\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2-1})$

3.3.○ (5) Zbadać zbieżność szeregu, tzn. rozstrzygnąć, czy jest zbieżny bezwzględnie lub tylko warunkowo, czy jest rozbieżny (warunkowo).

(a)○ $\sum_n \frac{27^n}{4^n \binom{3n}{n}}$

(b*)○ $\sum_n \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$

(c)○ $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ gdzie $a_n = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^n}$

(d)○ $\sum_n 2^{-\sqrt{n}}$

(e)○ $\sum_n (\sqrt[n]{n} - 1)$

(f)○ $\sum_n \frac{(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}}{n}$

3.4.○ (5) Wyznaczyć sumę podanego szeregu.

(a)○ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

$$(b) \bigcirc \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

$$(c^*) \bigcirc \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n+1}{(n^2+n+1)(n^2+3n+3)}$$

3.5. $\bigcirc$ (3) Wyznaczyć obszar zbieżności poniższych szeregów potęgowych i zbadać rodzaj zbieżności w każdym punkcie tego obszaru. (Nie stosować wzoru Stirlinga!).

$$(a) \bigcirc \sum_n \frac{x^n}{n^2}$$

$$(b) \bigcirc \sum_n \frac{x^{n+1}}{2^n+3^n}$$

$$(c) \bigcirc \sum_n n!(x+4)^{n+2025}$$

$$(d) \bigcirc \sum_n (-1)^{n-1} \sqrt{n} (x-2)^{n+2025}$$

$$(e) \bigcirc \sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} (x+2)^n$$

$$(f) \bigcirc \sum_n \frac{(-1)^n}{n^n} (x-4)^{n+4}$$

3.6. $\bigcirc$ (4) Wyznaczyć obszar zbieżności poniższych szeregów potęgowych i zbadać rodzaj zbieżności w każdym punkcie tego obszaru. (Nie stosować wzoru Stirlinga!).

$$(a) \bigcirc \sum_n \frac{x^{2n}}{2^n}$$

$$(b) \bigcirc \sum_n \frac{(x-1)^{3n-1}}{3^n+n^2+1}$$

$$(c) \bigcirc \sum_n n! \left(\frac{x}{n}\right)^n$$

$$(d) \bigcirc \sum_n \left(\sin \frac{\pi}{n^2}\right) x^n$$

$$(e) \bigcirc \sum_n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) (x-2025)^n$$

3.7. $\bigcirc$ (5) Wyznaczyć obszar zbieżności poniższych szeregów potęgowych i zbadać rodzaj zbieżności w każdym punkcie tego obszaru. (Nie stosować wzoru Stirlinga!).

$$(a) \bigcirc \sum_n \frac{x^{n^2}}{n!}$$

$$(b) \bigcirc \sum_n (-1)^{n(n+1)/2} \cdot \frac{x^n}{n}$$

$$(c) \bigcirc \sum_n \left(\sin \frac{\pi}{n^2+n+1}\right) x^{n^2+n+1}$$

$$(d) \bigcirc \sum_n \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(n-k+1)}\right) x^n$$

$$(e^*) \bigcirc \sum_n [(3 + \cos(n\pi))x]^n$$