Informacje

Zadania, które zostały już rozwiązane, mają kółka obok swych numerów zamalowane na czarno.

Jeśli w zadaniu występują podpunkty (a), (b), itd. (a nie (i), (ii), itd.), każdy podpunkt tego zadania to osobne zadanie.

W rozwiązaniu Zadania X można korzystać z Zadania Y (nawet, jeśli Zadanie Y nie zostało jeszcze rozwiązane!), jeśli Zadanie Y występuje w tym zbiorze zadań wcześniej niż Zadanie X.

Zestaw 1

1.1.○ (3) Program komputerowy wykonuje n^2 operacji (czas wykonania każdej z nich jest taki sam), dla danych wejściowych o rozmiarze n. O ile procent wzrośnie czas działania programu, jeśli rozmiar danych wejściowych n zwiększymy o 10%?

1.2.○ (3) Obliczyć sumę wszystkich współczynników wielomianu $W(x) = (3x^2 - 2x - 2)^{2026}$.

1.3.○ (4) Załóżmy, że jest to fizycznie możliwe, by kartkę papieru o grubości 0,1 mm złożyć na pół 50 razy z rzędu. Oszacować, jak gruba będzie warstwa papieru po ostatnim złożeniu. Czy grubość ta przewyższy odległość z Ziemi do Księżyca (ok. 384 000 km)?

1.4.○ (4) Czy dodatnia liczba niewymierna podniesiona do potęgi niewymiernej może dać wynik wymierny? Odpowiedź uzasadnić.

1.5.○ (4) Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych (x, y), które spełniają równanie $xy + 3x - 2y = 13$.

1.6.● (4) Suma pierwszych n wyrazów pewnego ciągu dana jest wzorem $S_n = 3n^2 + 2n + 1$. Wyznaczyć wzór na n-ty wyraz tego ciągu. Czy ciąg ten jest arytmetyczny?

1.7.○ (4) Znaleźć wzór ogólny (możliwie najprostszej postaci) na n-ty wyraz ciągu zdefiniowanego rekurencyjnie: $a_1 = 7$ oraz $a_{n+1} = 2a_n + 1$ dla $n \geq 1$.

1.8.● (4) Wiedząc, że $x \in \mathbb{R}$ jest liczbą niezerową oraz $x + \frac{1}{x} = a$, przedstawić $x^2 + \frac{1}{x^2}$ oraz $x^3 + \frac{1}{x^3}$ jako wzory, w których jedynym parametrem jest a.

1.9.● (4) Określić liczbę rozwiązań równania $x^2 - 4|x| + 3 = k$ w zależności od wartości parametru rzeczywistego k.

1.10.● (4) Uzasadnić, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność $(x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4$.

1.11.● (4) Udowodnić, że jeśli $a, b > 0$, to zachodzi nierówność $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Kiedy zachodzi równość?

1.12.○ (4) Drut o długości 100 cm należy rozciąć na dwie części. Z jednej tworzymy kwadrat (same jego boki), a z drugiej okrąg ograniczający koło. W jakim stosunku należy podzielić drut, aby suma pól obu uzyskanych figur (kwadratu i koła) była jak najmniejsza?

1.13.○ (5) Ile łącznie cyfr w zapisie dziesiętnym mają liczby 2^{100} oraz 5^{100}?

1.14.● (5) Przedstawić wyrażenie $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$ w najprostszej postaci.

1.15.○ (5) Znaleźć wszystkie dodatnie liczby całkowite mniejsze niż 15 000, które przy dzieleniu przez 17 dają resztę 3, przy dzieleniu przez 29 dają resztę 20, a przy dzieleniu przez 31 dają resztę 7.

© Piotr Niemiec

1.16.○ (3) Rozwiązać równanie $|x-1|+|x+1|=2$.

1.17.○ (4) Dla podanych ciągów znaleźć najmniejszą liczbę całkowitą $N>0$, taką że ciąg $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ jest ściśle monotoniczny.

(a)● $a_n = n^2 - 2024n + 2025$

(b)○ $a_n = \frac{1}{2n-9}$

(c)○ $a_n = \frac{n-3}{n+2}$

(d)○ $a_n = \frac{n^2+n+1}{3n-8}$

(e)○ $a_n = \frac{17^n}{n!}$

(f)○ $a_n = (-1)^n + \frac{n^2}{2025}$

(g)○ $a_n = \sqrt{n^2+10} - n$

(h)○ $a_n = \frac{2^n}{n}$

(i)○ $a_n = \frac{n^3}{2^n}$

1.18.○ (4) Wykazać, że między dowolnymi dwoma różnymi liczbami rzeczywistymi istnieje liczba niewymierna.

1.19.○ (4) Wykazać, że zbiór wszystkich liczb postaci $q+w\sqrt{2}$, gdzie liczby q i w są wymierne, jest *ciałem* (tzn. jest zamknięty na dodawanie, odejmowanie, mnożenie oraz dzielenie przez liczbę niezerową; i zawiera wszystkie liczby wymierne).

1.20.○ (5) Wykazać, że dla dowolnego ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ liczb rzeczywistych istnieje ściśle rosnący ciąg $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ całkowitych liczb dodatnich, taki że ciąg $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ jest albo stały, albo ściśle rosnący, albo ściśle malejący.

1.21.○ (3) Wykazać, że $\sqrt{x+y} \le \sqrt{x} + \sqrt{y}$ dla wszelkich nieujemnych liczb rzeczywistych x i y.

1.22.○ (4) Wykazać, że $\sqrt[p]{x+y} \le \sqrt[p]{x} + \sqrt[p]{y}$ oraz $(x+y)^p \ge x^p + y^p$ dla wszelkich nieujemnych liczb rzeczywistych x i y oraz dowolnej liczby całkowitej $p>1$.

1.23*.● (5) Wykazać, że $(x+y)^q \le x^q + y^q$ oraz $(x+y)^p \ge x^p + y^p$ dla wszelkich nieujemnych liczb rzeczywistych x i y oraz dowolnych liczb rzeczywistych $p \ge 1$ i $q \in (0,1]$.

1.24.○ (3) Wykazać, że jeśli $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ściśle rosnącym (odpowiednio: ściśle malejącym) ciągiem liczb dodatnich, to ciąg $(1/a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ściśle malejący (odp. ściśle rosnący). Podać przykład (ciągu o wyrazach niezerowych) świadczący o tym, że założenie, że wszystkie wyrazy są dodatnie, jest istotne.

1.25.○ (5) Czy istnieje ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ liczb rzeczywistych, który ma wszystkie poniższe własności?

- Ciąg $(|x_{n+1}-x_n|)_{n=1}^{\infty}$ jest ściśle malejący.
- Dla dowolnej liczby całkowitej $N>0$ istnieje taki indeks n, że $|x_{n+1}-x_n| \le \frac{1}{N}$.
- Dla dowolnej liczby całkowitej $N>0$ istnieją takie indeksy k i ℓ, że $x_k \ge N$ oraz $x_\ell \le -N$.

© Piotr Niemiec

1.26.○ (3) O każdym z poniższych zbiorów rozeznać, czy jest to zbiór ograniczony od góry lub od dołu:
$A = \{\frac{a}{b}\colon\ a, b \in \mathbb{Z},\ 0 < a < |b|\}$; $B = \{\frac{b}{a}\colon\ a, b \in \mathbb{Z},\ 0 < a < b < 2^a\}$;
$C = \{\frac{a}{b}\colon\ a, b \in \mathbb{Z},\ 0 < -b < a\}$; $D = \{\frac{b}{a}\colon\ a, b \in \mathbb{Z},\ 0 < |a| < b\}$.

Kilka zadań „ponadprogramowych”, tylko dla chętnych:

1.27.○ (3) Uzasadnić, że dla dowolnego niepustego zbioru $A \subset \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $\inf(A) \leq \sup(A)$. Kiedy w tej nierówności zachodzi równość?

1.28.● (4) Wykazać, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \in \mathbb{R}$ zachodzą równości $\sup\{q \in \mathbb{Q}\colon\ q < x\} = x = \inf\{q \in \mathbb{Q}\colon\ q > x\}$.

1.29.○ (4) Wszystkie zbiory wsytępujące w poniższych podpunktach są niepustymi podzbiorami zbioru $\mathbb{R}$. Wykazać, że:

(a)○ $\sup(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \max(\sup(A_1), \ldots, \sup(A_n))$

(b)○ $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$, gdzie $A + B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} |\ \exists a \in A,\ \exists b \in B\colon\ x = a + b\}$

(c)○ $\sup(-A) = -\inf(A)$, gdzie $-A \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}\colon\ -x \in A\}$

(d)○ Jeśli $A \subset B$, to $\inf(B) \leq \inf(A)$ oraz $\sup(A) \leq \sup(B)$.

1.30.○ (5) Wykazać, że dla dowolnych dwóch niepustych zbiorów $A, B \subset (0, \infty)$ zachodzą wzory

$$\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B) \qquad \text{oraz} \qquad \inf(A \cdot B) = \inf(A) \cdot \inf(B),$$

gdzie $A \cdot B = \{x \in \mathbb{R} |\ \exists a \in A,\ \exists b \in B\colon\ x = ab\}$. Podać przykład dwóch niepustych zbiorów $A, B \subset \mathbb{R}$, dla których żadna z powyższych dwóch równości nie zachodzi.

1.31.○ (4) Niech $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ będą dwoma funkcjami określonymi na niepustym zbiorze X. Wykazać, że wtedy $\sup(f + g)(X) \leq \sup f(X) + \sup g(X)$. Podać przykład świadczący o tym, że w tej nierówności może nie być równości. (Tutaj $f(X) = \{t \in \mathbb{R} |\ \exists x \in X\colon\ f(x) = t\}$).

1.32*.○ (5) Wykazać, że $\sup\{\sin(n)\colon\ n \in \mathbb{N}\} = 1$.

1.33.○ (4) Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie bijekcją ściśle malejącą. Wykazać, że wtedy dla dowolnego niepustego ograniczonego zbioru $A \subset \mathbb{R}$ zachodzą związki $\sup f(A) = f(\inf(A))$ oraz $\inf f(A) = f(\sup(A))$.

© Piotr Niemiec

Zestaw 2

2.1.○ (3) Obliczyć granice poniższych ciągów lub uzasadnić, że dany ciąg nie ma granicy w $[-\infty, \infty]$.

(a)○ $a_n = \frac{3n^2-2n+5}{2n^2+2n+1}$

(b)○ $a_n = \frac{2n^2+3n+7}{n^3-n^2-1}$

(c)○ $a_n = \frac{-2n^3+2024n^2+2025n+6}{n^2-n+1}$

(d)○ $a_n = \sqrt{n+6} + 3\sqrt{n^3+2}$

(e)○ $a_n = -\sqrt[3]{n^2+2} - \sqrt{n+3}$

(f)○ $a_n = (-1)^n + n$

(g)○ $a_n = \frac{1+2+3+\ldots+n}{3+5+7+\ldots+(2n-1)}$

(h)○ $a_n = \frac{(-2)^{n-1}+2\cdot(-4)^{n+3}-3\cdot 3^n}{(-5)^n}$

(i)○ $a_n = 6 \cdot 2^n + (-3)^n$

(j)○ $a_n = \left(\frac{2n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)^n$

(k)○ $a_n = (-1)^n + \frac{n-1}{n+2}$

(l)○ $a_n = \sqrt[n]{\frac{2}{3}n^4 - 3n^3 + 3}$

(m)○ $a_n = \sqrt[n^3+n+2]{n^2+n-1}$

(n)○ $a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{n-1}{n+2}$

(o)○ $a_n = \cos(\frac{n\pi}{4})$

(p)○ $a_n = \left(\frac{n^2+n+4}{3n^2-n+1}\right)^n$

2.2.○ (4) Obliczyć granice poniższych ciągów lub uzasadnić, że dany ciąg nie ma granicy w $[-\infty, \infty]$.

(a)○ $a_n = \sqrt{2n^2-n} - \sqrt{n^2+n+1}$

(b)○ $a_n = \sqrt{2n^2+2n-1} - \sqrt{2n^2-n-2}$

(c)○ $a_n = \sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt[3]{n^3-1}$

(d)○ $a_n = \frac{\sqrt{n^2+n+2}+\sqrt{2n^2+3n+1}}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+n+2}}$

(e)○ $a_n = \sqrt[n]{2024 \cdot 2^n + (0,1)^{2024} \cdot 3^n}$

(f)○ $a_n = \frac{\sqrt{n^2+n+2}-\sqrt{n^2+n-2}}{\sqrt{2n^2-n+1}-\sqrt{2n^2-2n+3}}$

(g)○ $a_n = \sqrt[n]{n^n+n+1}$

(h)○ $a_n = \sqrt[n^2]{n^{n^3}+n+1}$

(i)○ $a_n = \frac{\sin^n(n)}{n}$

(j)○ $a_n = \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}$

(k)○ $a_n = \frac{\sin^2(2^{-n})}{\sin(4^{-n})}$

© Piotr Niemiec

(l)○ $a_n = \frac{n}{2^n}$

(m)○ $a_n = \frac{\text{suma wszystkich dodatnich dzielników liczby } n}{n}$

(n)○ $a_n = \frac{(p^2-p)n^2+pn+1}{n+2}$ (odpowiedź podać w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$)

2.3.○ (5) Obliczyć granice poniższych ciągów lub uzasadnić, że dany ciąg nie ma granicy w $[-\infty, \infty]$.

(a)○ $a_n = \left(\frac{n^2+n+2}{n^2-n+1}\right)^n$

(b)○ $a_n = \left(\frac{3n-2}{3n+1}\right)^n$

(c)○ $a_n = \frac{\sqrt{n+\sqrt{n+1}+1}-\sqrt{n-\sqrt{n-1}-1}}{\sqrt{2n+2\sqrt{n+2}+1}-\sqrt{2n-2\sqrt{n}+3}}$

(d)○ $a_n = \frac{\sqrt{n+\sqrt{n+1}+1}-\sqrt{2n-\sqrt{n-1}-1}}{\sqrt{2n+2\sqrt{n+2}+1}-\sqrt{2n-2\sqrt{n}+3}}$

(e)○ $a_n = \sqrt[n]{n^{\sqrt{n}}+n}$

(f)○ $a_n = \left(\frac{2^n+3^n}{3^n+2^{n+1}}\right)^{(1,5)^n}$

(g*)○ $a_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

(h)○ $a_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{n}$

(i)○ $a_n = \left(\frac{n^3+n+1}{n^3+1}\right)^n$

(j*)○ $a_n = \sin(n)$

(k)○ $a_n = (\cos(\frac{1}{n}))^{\operatorname{ctg}(\frac{1}{n})}$

2.4.○ (5) Rozstrzygnąć, które z poniższych ciągów, zadanych rekurencyjnie, mają granicę liczbową (odpowiedź uzasadnić). Wyznaczyć granicę tych ciągów, które okażą się zbieżne w $\mathbb{R}$. W tych podpunktach, w których występują parametry, odpowiedź podać w zależności od ich wartości. Wszystkie parametry mogą przyjmować dowolną wartość rzeczywistą.

(a)○ $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_n = \frac{a_{n-1}^2+a_{n-1}}{2}$

(b)○ $a_0 = 1$, $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}$

(c)○ $a_0 = 1$, $a_n = \frac{2n+3}{n+1}a_{n-1} - 1$

(d)○ $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{3}$ $(n > 1)$

(e)○ $a_0 = p$, $a_n = \frac{a_{n-1}^2+1}{2}$

(f)○ $a_0 = p$, $a_n = a_{n-1}^2 + 1$

(g)○ $a_0 = 2$, $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$

(h)○ $a_0 = \alpha$, $a_n = \frac{a_{n-1}+\beta}{2}$

(i)○ $a_0 = 0{,}2026$, $a_n = \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{1}{a_{n-1}}$

(j*)○ $a_0 = 1$, $a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}$

© Piotr Niemiec

Zestaw 3

3.1.○ (3) Zbadać zbieżność szeregu, tzn. rozstrzygnąć, czy jest zbieżny bezwzględnie lub tylko warunkowo, czy jest rozbieżny (warunkowo).

(a)○ $\sum_n \frac{n^2-3n+2}{n^3-n-6}$

(b)○ $\sum_n \frac{n+4}{n^3-2n-1000}$

(c)○ $\sum_n \frac{\sqrt{n^2+2}+\sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt{n^4+1}}$

(d)○ $\sum_n \frac{n}{2^n}$

(e)○ $\sum_n \frac{10^{2024n}}{n!}$

(f)○ $\sum_n \frac{2^n+3^n+5^n}{3^n+4^n+6^n}$

(g)○ $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^p}$ (gdzie $p \in \mathbb{R}$ to parametr)

3.2.○ (4) Zbadać zbieżność szeregu, tzn. rozstrzygnąć, czy jest zbieżny bezwzględnie lub tylko warunkowo, czy jest rozbieżny (warunkowo).

(a)○ $\sum_n \frac{\sqrt{n^6+n+1}-\sqrt{n^6-n-1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}$

(b)○ $\sum_n \frac{(-1)^n}{n\log^p n}$ (gdzie $p \in [0,\infty)$ to parametr)

(c)○ $\sum_n (1-\cos(\frac{\pi}{n}))$

(d)○ $\sum_n \frac{16^n}{\binom{4n}{2n}}$

(e)○ $\sum_n \frac{\log(n)}{n^p}$ (gdzie $p \in \mathbb{R}$ to parametr)

(f)○ $\sum_n \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$

(g)○ $\sum_n (\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$

(h)○ $\sum_n (\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2-1})$

3.3.○ (5) Zbadać zbieżność szeregu, tzn. rozstrzygnąć, czy jest zbieżny bezwzględnie lub tylko warunkowo, czy jest rozbieżny (warunkowo).

(a)○ $\sum_n \frac{27^n}{4^n\binom{3n}{n}}$

(b*)○ $\sum_n \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$

(c)○ $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ gdzie $a_n = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^n}$

(d)○ $\sum_n 2^{-\sqrt{n}}$

(e)○ $\sum_n (\sqrt[n]{n}-1)$

(f)○ $\sum_n \frac{(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}}{n}$

3.4.○ (5) Wyznaczyć sumę podanego szeregu.

(a)○ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

© Piotr Niemiec

(b)○ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

(c*)○ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n+1}{(n^2+n+1)(n^2+3n+3)}$

3.5.○ (3) Wyznaczyć obszar zbieżności poniższych szeregów potęgowych i zbadać rodzaj zbieżności w każdym punkcie tego obszaru. (Nie stosować wzoru Stirlinga!).

(a)○ $\sum_n \frac{x^n}{n^2}$

(b)○ $\sum_n \frac{x^{n+1}}{2^n+3^n}$

(c)○ $\sum_n n!(x+4)^{n+2025}$

(d)○ $\sum_n (-1)^{n-1}\sqrt{n}(x-2)^{n+2025}$

(e)○ $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}(x+2)^n$

(f)○ $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^n}(x-4)^{n+4}$

3.6.○ (4) Wyznaczyć obszar zbieżności poniższych szeregów potęgowych i zbadać rodzaj zbieżności w każdym punkcie tego obszaru. (Nie stosować wzoru Stirlinga!).

(a)○ $\sum_n \frac{x^{2n}}{2^n}$

(b)○ $\sum_n \frac{(x-1)^{3n-1}}{3^n+n^2+1}$

(c)○ $\sum_n n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$

(d)○ $\sum_n (\sin\frac{\pi}{n^2})x^n$

(e)○ $\sum_n (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(x-2025)^n$

3.7.○ (5) Wyznaczyć obszar zbieżności poniższych szeregów potęgowych i zbadać rodzaj zbieżności w każdym punkcie tego obszaru. (Nie stosować wzoru Stirlinga!).

(a)○ $\sum_n \frac{x^{n^2}}{n!}$

(b)○ $\sum_n (-1)^{n(n+1)/2} \cdot \frac{x^n}{n}$

(c)○ $\sum_n (\sin\frac{\pi}{n^2+n+1})x^{n^2+n+1}$

(d)○ $\sum_n \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(n-k+1)}\right)x^n$

(e*)○ $\sum_n [(3+\cos(n\pi))x]^n$

© Piotr Niemiec