Spis treści

1 Podstawowe oznaczenia i konwencje . . . 1
2 Podstawowe własności zbioru liczb rzeczywistych . . . 2
3 Ciągi . . . 6
4 Operacje na granicach . . . 10
5 Szeregi . . . 16
6 Granica i ciągłość funkcji jednej zmiennej . . . 21
7 Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej . . . 29
7.1 Wypukłość i wklęsłość . . . 37
7.2 Asymptoty funkcji . . . 39
8 Rachunek całkowy funkcji jednej zmiennej . . . 40
8.1 Funkcja pierwotna i całka nieoznaczona . . . 40
8.2 Całka funkcji wymiernej . . . 43
8.3 Całka oznaczona (Riemanna) . . . 49
8.4 Całka niewłaściwa . . . 54
9 Funkcje wielu zmiennych . . . 57
9.1 Granica i ciągłość . . . 58
9.2 Pochodne cząstkowe i różniczkowalność . . . 60
9.3 Ekstrema lokalne . . . 65
9.4 Całka Riemanna . . . 69

1 Podstawowe oznaczenia i konwencje

W matematyce istnieje kilka symboli, które mają specjalne, **zarezerwowane** znaczenie. Poniżej wymieniamy najważniejsze z nich:

- $\mathbb{R}$ = zbiór wszystkich liczb **rzeczywistych** (np. π; $\sqrt[5]{2}$ lub np. $-12,123456789101112131415 16\ldots$).
- $\mathbb{Q}$ = zbiór wszystkich liczb **wymiernych** (tj. liczb przedstawialnych jako iloraz dwóch liczb całkowitych).
- $\mathbb{Z}$ = zbiór wszystkich liczb **całkowitych** (tj. $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$).
- $\mathbb{N}$ = zbiór wszystkich liczb **naturalnych**; istnieją dwie „szkoły" rozumienia tego zbioru: dla jednych matematyków $\mathbb{N}$ składa się z wszystkich **nieujemnych** liczb całkowitych (czyli $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$), dla drugich 0 nie należy do $\mathbb{N}$ (czyli $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$); **na tym kursie $0 \in \mathbb{N}$**.
- [$\mathbb{C}$ = zbiór wszystkich liczb **zespolonych** (aczkolwiek na tym kursie liczby zespolone będą pojawiać się sporadycznie, bardziej jako dodatkowe informacje niż wiodący wątek wykładu)].

Wszystkie te zbiory zawsze rozważane są z ich **naturalnymi** „właściwościami", tzn. z działaniami algebraicznymi i porządkiem liczb (wzmianka o porządku nie dotyczy zbioru $\mathbb{C}$). Dla zbioru wszystkich liczb niewymiernych nie będziemy stosować żadnego szczególnego oznaczenia — zbiór ten po prostu oznacza się przez $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (co jest powszechną praktyką w międzynarodowej matematyce).

Przyjmujemy ponadto oznaczenia:

- Przedziały domknięte w $\mathbb{R}$ będziemy oznaczać nawiasami kwadratowymi, np. $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \colon\ 0 \leq x \leq 1\}$ oraz $(0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \colon\ 0 < x \leq 1\}$.
- $\mathbb{N}_1 = \mathbb{N} \setminus \{0\}$; $\quad \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.
- $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} = [-\infty, \infty]$.

Dalsze konwencje obowiązujące na tym przedmiocie:

- Słowa *funkcja*, *odwzorowanie*, *przekształcenie* uznajemy za synonimy.

- Kwantyfikatory będą oznaczane międzynarodowymi symbolami:
  $\forall$ = „dla każdego” (kwantyfikator ogólny),
  $\exists$ = „istnieje” (kwantyfikator egzystencjalny).

- Dodatnia nieskończoność będzie oznaczana zarówno przez „∞”, jak i przez „$+\infty$”.

- Potęgowanie o dodatnim wykładniku niecałkowitym dopuszczalne jest tylko wtedy, gdy podstawa jest liczbą nieujemną, a potęgowanie o ujemnym wykładniku niecałkowitym dopuszczalne jest tylko wtedy, gdy podstawa jest liczbą dodatnią. Pierwiastek n-tego stopnia utożsamiamy z potęgą o wykładniku $\frac{1}{n}$. Jedynym odstępstwem od tej reguły jest konwencja, że $0^0 = 1$, dopuszczalna tylko tam, gdzie zostanie to wprost napisane.

2 Podstawowe własności zbioru liczb rzeczywistych

Zbiór $\mathbb{R}$ jest zbiorem o bogatej strukturze: z jednej strony jest to *ciało* (czyli zbiór z wyróżnionymi działaniami algebraicznymi „$+$” i „$\cdot$” o specjalnych własnościach); z drugiej strony zbiór *liniowo uporządkowany* z *ciągłym* porządkiem (zob. akapit pod Tw. 2.3 poniżej); jest to także *przestrzeń metryczna* (zob. Def. 2.6 poniżej), w której odległość zdefiniowana jest w bardzo naturalny, intuicyjny sposób. W niniejszym krótkim rozdziale przyjrzymy się bliżej liczbom rzeczywistym z tych trzech perspektyw.

Jako że pojęcie ciała ma nieco skomplikowaną (i przydługawą) formalną definicję, zamiast ją tutaj przytoczyć, przypomnimy w miarę oczywiste własności algebraiczne zbioru $\mathbb{R}$, które poznaliśmy już w szkole podstawowej (a pozostałe, które pominiemy, są tak oczywiste, że wypisanie ich tutaj mogłoby przynieść więcej szkód niż korzyści; wszystkie razem implikują, że $\mathbb{R}$ to ciało liczbowe). W uproszczeniu, ciało to zbiór z dodawaniem i mnożeniem, w którym oba działania są przemienne (tzn. wynik nie zależy od kolejności wyrazów), wszystkie liczby możemy odejmować, a ponadto możemy dzielić przez liczby niezerowe. $\mathbb{R}$ to wyjątkowo „porządne” ciało — możliwość potęgowania liczb dodatnich do dowolnego wykładnika rzeczywistego to własność niemalże unikatowa (wśród ciał uporządkowanych). Przypomnijmy także, że również $\mathbb{Q}$ jest ciałem (ale nie jest ono zamknięte na potęgowanie o podstawie dodatniej).

Zarówno $\mathbb{R}$, jak i $\mathbb{Q}$ są ciałami *uporządkowanymi*. Termin ten oznacza nie tylko tyle, że zbiór jest ciałem liczbowym, w którym liczby możemy porównywać, ale także że zachodzą związki między strukturą porządkową a algebraiczną (zob. punkty (f) i (g), a także (h), w poniższej obserwacji). Podstawowe własności porządku na $\mathbb{R}$ zebrane są poniżej.

2.1 Obserwacja.
Relacja porządku na $\mathbb{R}$ ma następujące własności:

(a) [**zwrotność**] $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ x \le x$;

(b) [**słaba antysymetria**] $x \le y \ \wedge\ y \le x \implies y = x$;

(c) [**przechodniość**] $x \le y \ \wedge\ y \le z \implies x \le z$;

(d) [**liniowość/spójność**] $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ x \le y \ \vee\ y \le x$;

(e) [**gęstość**] $x < z \implies \exists y \in \mathbb{R}\colon\ x < y < z$;
a nawet mocniej: $x < z \implies \exists y \in \mathbb{Q}\colon\ x < y < z$;

(f) [**zgodność z dodawaniem**] $x < y$ [odp. $x \le y$] $\implies \forall z \in \mathbb{R}\colon\ x + z < y + z$ [odp. $x + z \le y + z$];

(g) [**zgodność z mnożeniem**] $x < y$ [odp. $x \le y$] $\implies \forall z > 0\colon\ xz < yz$ [odp. $xz \le yz$];

(h) [**archimedesowskość**] $\forall x > 0,\ y > 0\ \exists n \in \mathbb{N}\colon\ y < nx$;

(i) $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ -\infty < x < \infty$.

Wzmocnioną wersję punktu (e) powyżej nazywa się *porządkową gęstością liczb wymiernych w liczbach rzeczywistych*.

Najważniejsza własność porządkowa zbioru $\mathbb{R}$, która stanowi fundament dla całej analizy matematycznej, jest związana z istnieniem porządkowych krańców podzbiorów prostej. Precyzyjnie te pojęcia wprowadzamy poniżej.

2.2 Definicja.
Powiemy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest:

- *ograniczony od góry*, gdy $A \subset (-\infty, c]$ dla pewnej stałej $c \in \mathbb{R}$ (równoważnie: $a \le c$ dla wszelkich $a \in A$ i pewnej stałej $c \in \mathbb{R}$);

© Piotr Niemiec

- *ograniczony od dołu*, gdy $A \subset [c, \infty)$ dla pewnej stałej $c \in \mathbb{R}$ (równoważnie: $a \geq c$ dla wszelkich $a \in A$ i pewnej stałej $c \in \mathbb{R}$);
- *porządkowo ograniczony* (lub krótko: *ograniczony*), gdy A jest ograniczony i od góry, i od dołu (równoważnie: $A \subset [m, M]$ dla pewnych stałych rzeczywistych m i M, takich że $m < M$).

Dla niepustego zbioru $A \subset \mathbb{R}$ definiujemy

- *kres górny* (*supremum*) zbioru A, oznaczany przez $\sup A$, jako wielkość $R \in \bar{\mathbb{R}}$, taką że $A \subset (-\infty, R]$ oraz $A \not\subset (-\infty, r]$ dla żadnej liczby $r < R$;
- *kres dolny* (*infimum*) zbioru A, oznaczany przez $\inf A$, jako wielkość $L \in \bar{\mathbb{R}}$, taką że $A \subset [L, \infty)$ oraz $A \not\subset [\ell, \infty)$ dla żadnej liczby $\ell > L$.

Zachodzi bardzo ważne

2.3 Twierdzenie.
Dowolny niepusty zbiór $A \subset \mathbb{R}$ ma kres górny oraz kres dolny. Ponadto:

- $\sup A \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *oraz:* $\sup A \in \mathbb{R}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy A jest zbiorem ograniczonym od góry;*
- $\inf A \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *oraz:* $\inf A \in \mathbb{R}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy A jest zbiorem ograniczonym od dołu.*

Własność sformułowana w powyższym twierdzeniu nazywana jest *porządkową zupełnością*. Niebawem poznamy także metryczną zupełność, która w przypadku przestrzeni $\mathbb{R}$ jest konsekwencją porządkowej.

Porządkowa zupełność w połączeniu z porządkową gęstością (zob. punkt (e) Obs. 2.1) oznacza, że struktura porządkowa „nie ma dziur" (por. z $[0,1] \cup [2,3]$ lub z $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, lub z $\mathbb{Q}$). Z tego względu takie struktury nazywa się *porządkowo ciągłymi*. Tym samym porządek na $\mathbb{R}$ jest *ciągły*.

Podamy teraz użyteczne kryteria na kresy górny i dolny.

2.4 Obserwacja.
Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem niepustym.

(a) *Wielkość $R \in \bar{\mathbb{R}}$ jest równa* $\sup A$ *wtedy i tylko wtedy, gdy:*

- $\forall a \in A\colon\ a \leq R$; *oraz*
- $\forall r < R\ \exists a \in A\colon a > r$.

(b) *Wielkość $L \in \bar{\mathbb{R}}$ jest równa* $\inf A$ *wtedy i tylko wtedy, gdy:*

- $\forall a \in A\colon\ a \geq L$; *oraz*
- $\forall \ell > L\ \exists a \in A\colon a < \ell$.

2.5 ***Uwaga.***
Kres górny to „prawy kraniec" zbioru, a kres dolny to jego „lewy kraniec". Dowolny z tych krańców może, ale nie musi należeć do zbioru (np.: $\inf[0,1] = \inf(0,1] = \inf(0,1) = \inf[0,1) = 0$ oraz $\sup[0,1] = \sup(0,1] = \sup(0,1) = \sup[0,1) = 1$). Dla dowolnego niepustego zbioru $A \subset \mathbb{R}$ zachodzi inkluzja $A \subset [\inf A, \sup A]$.

Warunki podane w Obs. 2.4 mają także sens dla zbioru pustego. Co więcej, zbiór pusty — zgodnie z tymi warunkami — także ma kres górny i kres dolny. Jednakże $\inf \varnothing = \infty$ oraz $\sup \varnothing = -\infty$, więc $\sup \varnothing < \inf \varnothing$ [!], co należy uważać za patologię, a może nawet za paradoks (*lewy kraniec zbioru pustego jest bardziej na prawo niż jego prawy kraniec*...!?). Z tego powodu na tym kursie nie wolno posługiwać się kresami zbioru pustego. Każdorazowe użycie kresu zbioru, który jest pusty, będzie traktowane jako błąd. (Jeśli chcemy napisać „$\sup A$" lub „$\inf A$", najpierw należy uzasadnić/sprawdzić/upewnić się, że $A \neq \varnothing$).

Choć, jak wspomniano, Tw. 2.3 jest fundamentem dla całej analizy matematycznej, kresy górny i dolny dla niematematyka zazwyczaj stanowią trudne (abstrakcyjne) pojęcia. Aby niniejszy kurs uczynić jak najbardziej przyswajalnym,

© Piotr Niemiec

pojęciami tymi posłużymy się tylko dwa razy (pierwszy raz w wypowiedzi Tw. 3.11, str. 8, a drugi w odpowiedniku tego rezultatu dla funkcji — zob. punkt (A) Tw. 6.18, str. 28).

Omówimy teraz pokrótce podstawowe koncepcje związane z mierzeniem odległości.

2.6 Definicja.
Metryka na zbiorze X to dowolna funkcja $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ spełniająca wszystkie poniższe warunki dla dowolnych punktów $x, y, z \in X$:

(M0) $0 \leq d(x,y) < \infty$;

(M1) **[oznaczoność]** $d(x,y) = 0 \iff x = y$;

(M2) **[symetria]** $d(y,x) = d(x,y)$;

(M3) **[nierówność trójkąta]** $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Jeśli d jest metryką na zbiorze X, parę (X,d) nazywamy *przestrzenią metryczną*, a liczbę $d(x,y)$ (gdzie $x, y \in X$) nazywamy *odległością* punktu x od y.

W każdej przestrzeni metrycznej możemy mówić o kulach i sferach. Należy jednak pamiętać, że zbiory te (dla rozmaitych wymyślnych metryk) mogą wcale nie być „podobne" do kul ani do sfer (na płaszczyźnie mogą to być np. kwadraty). Precyzyjne definicje tych pojęć znajdują się poniżej.

2.7 Definicja.
Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną, s punktem zbioru X, a r dowolną dodatnią liczbą rzeczywistą. *Kulą otwartą* (lub krótko: *kulą*) *o środku w s i promieniu r* nazywamy zbiór

$$B(s,r) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X\colon\ d(s,x) < r\}.$$

Podobnie, *kulą domkniętą o środku w s i promieniu r* nazywamy zbiór

$$\bar{B}(s,r) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X\colon\ d(s,x) \leq r\}.$$

Z kolei *sferą o środku w s i promieniu r* nazywamy zbiór

$$S(s,r) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X\colon\ d(s,x) = r\}.$$

(Tak więc $S(s,r) = \bar{B}(s,r) \setminus B(s,r)$).

Z pomocą kul można definiuje się niezwykle ważne w analizie matematycznej (a także topologii i innych działach matematyki) pojęcia *otoczenia* oraz *zbioru otwartego*:

2.8 Definicja.
Mówimy, że zbiór $A \subset X$ jest *otoczeniem* punktu $a \in X$ w przestrzeni metrycznej (X,d), gdy:

$$\exists r > 0\colon\ B(a,r) \subset A.$$

Zbiór $U \subset X$ jest *otwarty* w przestrzeni metrycznej (X,d) (lub: zbiór U jest *otwarty względem metryki d* na X), gdy jest otoczeniem każdego swojego punktu. Symbolicznie:

$$U \text{ jest zbiorem otwartym} \iff \forall a \in U\ \exists r > 0\colon\ B(a,r) \subset U.$$

2.9 ***Uwaga.***
Obok zbiorów otwartych definiuje się także *zbiory domknięte* jako te, których dopełnienia (w całej przestrzeni) są zbiorami otwartymi. (Tzn.: zbiór $F \subset X$ jest *domknięty* w przestrzeni metrycznej (X,d), gdy zbiór $X \setminus F$ jest otwarty). W niniejszym kursie nie będziemy posługiwać się takimi zbiorami, dlatego czynimy jedynie krótką,

© Piotr Niemiec

peryferyjną wzmiankę o nich. Czytelników zainteresowanych tym pojęciem (lub innymi topologicznymi) odsyłamy do dowolnego podręcznika z topologii.

Najważniejsze przestrzenie metryczne, z jakimi ma się do czynienia w analizie matematycznej, to tzw. przestrzenie *euklidesowe* (które poznamy dopiero w rozdziale 9) i ich podzbiory. Najprostszym przykładem takiej przestrzeni jest prosta rzeczywista (czyli zbiór $\mathbb{R}$), na której skupimy się w kilku najbliższych rozdziałach. Funkcja odległości na $\mathbb{R}$ jest dana niezwykle prostym wzorem, poznanym w szkole:

2.10 Definicja.
Funkcja $d_e\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dana wzorem

$$d_e(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} |x-y|$$

jest metryką na $\mathbb{R}$. Nazywa się ją metryką *euklidesową* lub *naturalną* (na prostej).

2.11 Przykład.
Jak nietrudno się przekonać, w przestrzeni $\mathbb{R}$ z metryką euklidesową kule otwarte [domknięte] to po prostu przedziały otwarte [domknięte], a sfery to zbiory dwuelementowe:

$$B(a,r)=(a-r,a+r),\quad \bar{B}(a,r)=[a-r,a+r],\quad S(a,r)=\{a-r,a+r\}\qquad (a\in\mathbb{R},\ r>0).$$

Można przy tym pokazać, że każdy (niepusty) ograniczony przedział otwarty jest pewną kulą otwartą i, podobnie, każdy (niezdegenerowany) ograniczony przedział domknięty jest pewną kulą domkniętą (a stąd każdy zbiór dwuelementowy w $\mathbb{R}$ jest pewną sferą).

Dowodzi się także, że każdy niepusty zbiór otwarty w $\mathbb{R}$ jest sumą mnogościową parami rozłącznych przedziałów otwartych (niekoniecznie ograniczonych). Dla nas jednak najważniejszymi zbiorami otwartymi w $\mathbb{R}$ będą pojedyncze przedziały otwarte.

2.12 Przykład.
Mniej „intuicyjnie” wyglądają kule w zbiorze $[0,1]$ (rozważanym wciąż z metryką naturalną) — w tym przypadku $B(a,r)=(a-r,a+r)\cap[0,1]$ (dla wszelkich $a\in[0,1]$ oraz $r>0$), więc np. $B(0,\frac{1}{2})=[0,\frac{1}{2})$ oraz $B(\frac{1}{3},\frac{1}{2})=[0,\frac{5}{6})$.

W przestrzeniach metrycznych także możemy mówić o ograniczoności podzbiorów:

2.13 Definicja.
Podzbiór A przestrzeni metrycznej (X,d) nazywamy (*metrycznie*) *ograniczonym* (lub precyzyjniej: *ograniczonym względem metryki* d), gdy istnieje liczba M, taka że $d(x,y)\le M$ dla wszelkich $x,y\in A$.

Równoważnie, A jest zbiorem ograniczonym w **niepustej** przestrzeni metrycznej (X,d), gdy istnieją punkt $a\in X$ oraz promień $r>0$, takie że $A\subset\bar{B}(a,r)$.

W przypadku prostej rzeczywistej możemy mówić o podzbiorach porządkowo lub metrycznie ograniczonych. Szczęśliwie, obie te własności są równoważne, i dlatego możemy mówić krótko o *ograniczoności* zbiorów, bez ryzyka nieporozumienia.

2.14 Obserwacja.
Podzbiór zbioru $\mathbb{R}$ jest porządkowo ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy jest metrycznie ograniczony.

Jak zobaczymy w dalszych rozdziałach, metryka przydaje się do sformalizowania intuicji „zbliżania się” liczb do pewnej liczby — a więc do wprowadzenia pojęcia granicy. Chociaż pojęcie to określimy najpierw dla ciągów, a potem dla funkcji, zasadnicza koncepcja w obu przypadkach będzie taka sama.

© Piotr Niemiec

3 Ciągi

3.1 Definicja.
Ciąg o wyrazach w zbiorze X to dowolna funkcja z $\mathbb{N}_1$ (lub z $\mathbb{N}$) w X. Ogólniej, *ciągiem* nazywa się również każdą funkcję zdefiniowaną na nieskończonym podzbiorze zbioru $\mathbb{Z}$.

Można też mówić o *ciągach skończonych*, czyli funkcjach określonych na skończonych podzbiorach zbioru $\mathbb{Z}$.

Dla ciągów stosuje się uproszczoną notację: zamiast pisać „$f\colon A \to X$" (gdzie $A \subset \mathbb{Z}$) oraz „$f(n)$" (dla $n \in A$), piszemy na ogół (odpowiednio) „$(a_n)_{n\in A}$" oraz a_n (tzn. $a_n = f(n)$). Gdy $A = \mathbb{N}_1$ [odp. $A = \mathbb{N}$], piszemy również $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ [odp. $(a_n)_{n=0}^{\infty}$].

Aby skrótowo wyrazić myśl, że ciąg ma wyrazy w zbiorze X, będziemy stosować powszechnie stosowaną uproszczoną notację z użyciem znaku inkluzji: $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ (i podobnie $(a_n)_{n\in A} \subset X$). Należy jednak pamiętać, że ciąg o wyrazach w X nie jest podzbiorem zbioru X.

Gdy zbiór indeksów $A \subset \mathbb{Z}$ ciągu $(a_n)_{n\in A}$ zawiera nieskończenie wiele liczb dodatnich, możemy mówić o podciągach tego ciągu: *podciąg* ciągu $(a_n)_{n\in A}$ to dowolny ciąg, który powstał z ciągu $(a_n)_{n\in A}$ przez pominięcie pewnych wyrazów tego ciągu, ale w taki sposób, że wśród pozostałych indeksów wciąż pozostało nieskończenie wiele liczb dodatnich. Bardziej formalnie, podciąg ciągu $(a_n)_{n\in A}$ ma postać $(a_n)_{n\in B}$, gdzie zbiór $B \subset A$ zawiera nieskończenie wiele liczb dodatnich. W przypadku klasycznym, tzn. gdy $A = \mathbb{N}$ lub $A = \mathbb{N}_1$, podciąg ciągu $(a_n)_{n\in A}$ można również zapisać jako $(a_{m_n})_{n=1}^{\infty}$, gdzie $0 \le m_1 < m_2 < m_3 < \dots$ to liczby całkowite (dodatnie, gdy $A = \mathbb{N}_1$).

Przejdziemy teraz do zasadniczej koncepcji analizy matematycznej, jaką jest pojęcie granicy. Chociaż będą nas interesować wyłącznie ciągi o wyrazach rzeczywistych (a później o wyrazach w przestrzeni euklidesowej), poniżej wprowadzamy to pojęcie w dowolnych przestrzeni metrycznych — gdyż przejście do kontekstu ogólnego nie wymaga żadnych dodatkowych przygotowań, a lepiej oddaje kluczową ideę.

3.2 Definicja.
Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ o wyrazach w przestrzeni metrycznej (X, d) jest *zbieżny* do punktu $g \in X$ (lub: *zbiega* do g; *dąży* do g; ma *granicę* równą g), gdy:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0\ \forall n \ge N\colon\ d(a_n, g) \le \varepsilon. \tag{lim}$$

Innymi słowy, punkty $a_1, a_2, \dots$ zbiegają do g, gdy wraz ze wzrostem indeksu ich odległości od puntu g stają się dowolnie małe (tzn. dowolnie bliskie liczbie 0).

To, że granicą ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest punkt g, można zapisać symbolicznie na kilka sposobów. Tutaj podamy dwa najczęściej spotykane: $a_n \to g\ (n \to \infty)$ oraz $\lim_{n\to\infty} a_n = g$.

Podobnie, jeśli zbiór $A \subset \mathbb{Z}$ zawiera nieskończenie wiele liczb dodatnich, mówimy, że ciąg $(x_n)_{n\in A}$ zbiega do g, gdy:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0\ \forall n \in A,\ n \ge N\colon\ d(x_n, g) \le \varepsilon,$$

co zapisujemy symbolicznie $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ n\in A}} x_n = g$ (lub $x_n \to g\ (A \ni n \to \infty)$).

Powyższa definicja nie obejmuje przypadku, gdy granicą ciągu liczbowego ma być jedna z nieskończoności (dlatego że nie wprowadziliśmy metryki na zbiorze $\bar{\mathbb{R}}$; da się to zrobić, ale żadnej metryki na $\bar{\mathbb{R}}$ nie można nazwać *naturalną*). Ponieważ obie nieskończoności nie leżą w przestrzeni, która stanowi główny przedmiot naszych badań (tzn. nie leżą w $\mathbb{R}$), ciągi, których granicami jest jedna z nieskończoności, nie nazywa się *zbieżnymi*:

3.3 Definicja.
Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ jest *rozbieżny* do ∞ (odpowiednio: do $-\infty$) lub że *granicą* ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ∞ (odp.: $-\infty$), gdy spełniony jest warunek:

$$\forall M > 0\ \exists N > 0\ \forall n \ge N\colon\ a_n \ge M$$

(odp.: $\forall M > 0\ \exists N > 0\ \forall n \ge N\colon\ a_n \le -M$). Podobnie jak w przypadku granic liczbowych, własność, że ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest rozbieżny do ∞ (odp.: do $-\infty$), zapisujemy symbolicznie tak: $a_n \to \infty\ (n \to \infty)$ lub $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ (odp.: $a_n \to -\infty\ (n \to \infty)$ lub $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$).

Analogicznie definiujemy ciągi rozbieżne do którejś nieskończoności indeksowane podzbiorami zbioru $\mathbb{Z}$ zawierającymi nieskończenie wiele liczb dodatnich.

© Piotr Niemiec

3.4 Obserwacja.
Ciąg w przestrzeni metrycznej może mieć co najwyżej jedną granicę. Podobnie, dowolny ciąg liczbowy ma co najwyżej jedną granicę w $\bar{\mathbb{R}}$.

Jeśli ciąg ma granicę, to każdy jego podciąg ma tę samą granicę. Odwrotnie, jeśli każdy podciąg ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *zawiera podciąg, którego granicą jest* g, *to* $\lim_{n\to\infty} x_n = g$.

3.5 Przykład.
Sprawdzanie, na podstawie Def. 3.2, że granicą konkretnego ciągu liczbowego jest konkretna liczba, nie jest tak proste, jak używanie gotowych wzorów (które poznamy w następnym rozdziale). Aby to zilustrować, pokażemy, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-5} = 0.$$

Powyższy wzór dowodzimy w oparciu o warunek (lim). Niech więc ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Szukamy dodatniej liczby całkowitej $N > 0$, by $|a_n - 0| \leq \varepsilon$ dla wszelkich $n \geq N$. Ponieważ początkowe wyrazy ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ są ujemne, dla uproszczenia zakładamy, że poszukiwany indeks N spełnia warunek $N \geq 3$. Wtedy, dla $n \geq N$ mamy $a_n > 0$, a więc $|a_n - 0| \leq \varepsilon$ wtedy i tylko wtedy, gdy $2n - 5 \geq \frac{1}{\varepsilon}$, co z kolei jest równoważne temu, że $n \geq \frac{5}{2} + \frac{1}{2\varepsilon}$. Aby ta ostatnia nierówność była prawdziwa dla wszystkich indeksów $n \geq N$, wystarczy, że indeks N spełnia tę nierówność. Tym samym wystarczy N zdefiniować jako (np.) *sufit* z liczby $c \stackrel{\text{def}}{=} \frac{5}{2} + \frac{1}{2\varepsilon}$, czyli najmniejszą liczbę całkowitą, która jest większa lub równa liczbie c. Wskazanie liczby N kończy dowód. Zauważmy, że wartość parametru N, jaką tutaj wskazaliśmy, nie jest konkretna, lecz zależy od liczby ε — jest to powszechna właściwość dowodów, że granicą jakiegoś (ściśle konkretnego!) ciągu jest (ściśle konkretna!) wielkość.

Więcej przykładów zbieżnych ciągów liczbowych (oraz rozbieżnych do nieskończoności) poznamy w następnym rozdziale.

Ciągi, które nie mają [żadnej] granicy, nazywa się *rozbieżnymi*. Z tego względu w przypadku ciągów rzeczywistych mamy dwa rodzaje ciągów rozbieżnych: mogą one mieć granicę *niewłaściwą* (czyli ze zbioru $\{-\infty, \infty\}$) lub nie mieć granicy.

Dokładne wyznaczenie granicy zbieżnego ciągu nierzadko jest trudnym czy wręcz niewykonalnym zadaniem. Często też jest tak, że wartość granicy nie ma znaczenia — cenniejsza jest wiedza o tym, że ciąg jest zbieżny. Najogólniejszym teoretycznym kryterium na zbieżność ciągu (ale nie na rozbieżność do którejś nieskończoności!) jest tzw. warunek *Cauchy'ego*:

3.6 Definicja.
Ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ o wyrazach w przestrzeni metrycznej (X, d) nazywany jest ciągiem *Cauchy'ego* [lub ciągiem *fundamentalnym*] (względem metryki d), gdy spełnia następujący warunek *Cauchy'ego*:

(cC) $$\forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0\ \forall n \geq N,\ m \geq N\colon\ d(x_n, x_m) \leq \varepsilon.$$

Metrykę d (i podobnie, przestrzeń metryczną (X, d)) nazywamy *zupełną*, jeśli każdy ciąg Cauchy'ego w (X, d) ma granicę (w X).

Zauważmy, że, aby sprawdzić, czy dany ciąg jest ciągiem Cauchy'ego, wystarczy szacować odległości jego wyrazów. Z tego powodu warunek (cC) jest własnością wewnętrzną ciągu (w przeciwieństwie do jego zbieżności, która na ogół jest własnością zewnętrzną — tzn. oprócz samego ciągu musimy wiedzieć, w jakiej przestrzeni metryczej rzecz się rozgrywa). Mimo to w zupełnych przestrzeniach metrycznych obie te własności (tj. (cC) oraz zbieżność) są równoważne (zob. punkt (B) poniżej).

3.7 Obserwacja.

(A) *Ciąg zbieżny w przestrzeni metrycznej jest w niej ciągiem Cauchy'ego.*

(B) *Ciąg o wyrazach w* ***zupełnej*** *przestrzeni metrycznej jest w niej zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągiem Cauchy'ego.*

© Piotr Niemiec

(C) *Ciąg Cauchy'ego w przestrzeni metrycznej jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy posiada podciąg zbieżny, wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego podciąg jest zbieżny.*

(D) *Ciąg liczbowy rozbieżny do którejś nieskończoności nie jest ciągiem Cauchy'ego.*

(E) *Zbiór wyrazów ciągu Cauchy'ego jest metrycznie ograniczony.*

Poniższa własność, bardzo ważna w analizie matematycznej, jest konsekwencją porządkowej zupełności zbioru $\mathbb{R}$:

3.8 Twierdzenie.
Prosta rzeczywista to zupełna przestrzeń metryczna. Precyzyjnie: metryka naturalna na $\mathbb{R}$ jest zupełna.

Wśród ciągów liczbowych ważną rolę odgrywają ciągi monotoniczne.

3.9 Definicja.
Ciąg liczbowy $(a_n)_{n\in A}$ nazywamy:

- *ściśle rosnącym* (lub krótko: *rosnącym*), gdy: $\forall n, m \in A,\ n < m\colon\ a_n < a_m$;
- *ściśle malejącym* (lub krótko: *malejącym*), gdy: $\forall n, m \in A,\ n < m\colon\ a_n > a_m$;
- *stałym*, gdy: $\forall n, m \in A,\ n < m\colon\ a_n = a_m$;
- *słabo rosnącym*, gdy: $\forall n, m \in A,\ n < m\colon\ a_n \leq a_m$;
- *słabo malejącym*, gdy: $\forall n, m \in A,\ n < m\colon\ a_n \geq a_m$;
- *ściśle monotonicznym*, gdy jest ściśle rosnący lub ściśle malejący, lub stały;
- *słabo monotonicznym* (lub krótko: *monotonicznym*), gdy jest słabo rosnący lub słabo malejący.

Uwaga: Nierzadko ciągi słabo rosnące (odp. słabo malejące) nazywane są *niemalejącymi* (odp. *nierosnącymi*). Na tym kursie nie będziemy używać tych alternatywnych terminów.

3.10 Uwaga.
Stosując indukcję, łatwo dowodzi się, że ciąg liczbowy $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ściśle rosnący (odp. ściśle malejący; stały; słabo rosnący; słabo malejący), gdy $x_n < x_{n+1}$ (odp. $x_n > x_{n+1}$; $x_n = x_{n+1}$; $x_n \leq x_{n+1}$; $x_n \geq x_{n+1}$) dla dowolnego indeksu n. Te same kryteria obowiązują dla ciągów indeksowanych zbiorem $\mathbb{N}$.

Tw. 3.8 jest konsekwencją poniższego, które również jest konsekwencją Tw. 2.3 (str. 3).

3.11 Twierdzenie. (Twierdzenie o granicy ciągu monotonicznego)
Każdy ciąg słabo monotoniczny ma granicę w $\bar{\mathbb{R}}$. Dokładniej, dla ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ zachodzą następujące własności:

(a) *Jeśli ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest słabo rosnący, wtedy $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\colon\ n > 0\}$.*

(b) *Jeśli ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest słabo rosnący i ograniczony od góry, wtedy jest zbieżny do liczby.*

(c) *Jeśli ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest słabo malejący, wtedy $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\colon\ n > 0\}$.*

(d) *Jeśli ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest słabo malejący i ograniczony od dołu, wtedy jest zbieżny do liczby.*

Następujące własności mają liczne zastosowania nie tylko w teoretycznych rozważaniach, lecz także w praktyce liczenia granic:

© Piotr Niemiec

3.12 Twierdzenie.
Poniżej $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ *to ciągi liczbowe, a* g *i* h *to wielkości ze zbioru* $\bar{\mathbb{R}}$.

(A) (**Twierdzenie o trzech ciągach**) *Jeśli* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g$ *oraz istnieje indeks* $N > 0$, *taki że* $a_n \leq b_n \leq c_n$ *dla wszelkich* $n \geq N$, *to także* $\lim_{n\to\infty} b_n = g$.

(B) (**Twierdzenie o trzech ciągach II**) *Jeśli* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ *oraz istnieje indeks* $N > 0$, *taki że* $a_n \leq b_n$ *dla wszelkich* $n \geq N$, *to także* $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.

(C) (**Twierdzenie o trzech ciągach III**) *Jeśli* $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ *oraz istnieje indeks* $N > 0$, *taki że* $a_n \leq b_n$ *dla wszelkich* $n \geq N$, *to także* $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

(D) *Jeśli* $\lim_{n\to\infty} a_n = g$ *i* $\lim_{n\to\infty} b_n = h$ *oraz istnieje indeks* $N > 0$, *taki że* $a_n \leq b_n$ *dla wszelkich* $n \geq N$, *to* $g \leq h$.

(E) *Jeśli* $\lim_{n\to\infty} a_n = g$ *i* $\lim_{n\to\infty} b_n = h$ *oraz* $g < h$, *to istnieje indeks* $N > 0$, *taki że* $a_n < b_n$ *dla wszelkich* $n \geq N$.

Jeśli jakaś własność (np. nierówności między wyrazami ciągów pojawiające się w punktach (D) i (E) w powyższym rezultacie) zachodzi dla wszystkich liczb naturalnych $n \geq N$ (gdzie N to pewna stała dodatnia), skrótowo mówi się, że owa własność zachodzi *dla dostatecznie dużych* n lub *od pewnego momentu*.

Poniższy wniosek przyda się w następnym rozdziale.

3.13 Wniosek.
Jeśli ciąg liczbowy $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *ma granicę, która jest różna od* 0, *to* $a_n \neq 0$ *dla dostatecznie dużych indeksów* n.

Podamy teraz ważne w zastosowaniach kryterium na nieistnienie granicy ciągu liczbowego (w $\bar{\mathbb{R}}$):

3.14 Twierdzenie.
Ciąg liczbowy nie ma granicy w $\bar{\mathbb{R}}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją dwa jego podciągi, które* ***mają*** *różne granice w* $\bar{\mathbb{R}}$.

3.15 Przykład.
Ciąg $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ nie ma granicy w $\bar{\mathbb{R}}$, gdyż $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{2n}) = 1$ oraz $\lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = \lim_{n\to\infty}(-1 + \frac{1}{2n-1}) = -1$ i obie te granice są różne.

Podobnie można pokazać, że np. ciąg $y_n = (-2)^n$ nie ma granicy w $\bar{\mathbb{R}}$. A czy ciąg $z_n = (-2)^{-n}$ ma granicę...?

Oprócz ciągów monotonicznych, innym ważnym rodzajem ciągów są ciągi zadane rekurencyjnie:

3.16 Definicja.
O ciągu liczbowym $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ mówimy, że jest zadany (opisany itp.) *rekurencyjnie*, jeśli dla dostatecznie dużych indeksów n, we wzorze na a_n pojawiają się niektóre wcześniejsze wyrazy tego ciągu:

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, \ldots, a_1, n)$$

(gdzie f to pewna funkcja mogąca przyjmować zmienną liczbę argumentów). W praktyce ciągi zadane rekurencyjnie opisuje funkcja o ustalonej liczbie argumentów, tzn. $a_n = g(a_{n-1}, \ldots, a_{n-r}, n)$ dla wszystkich dostatecznie dużych indeksów $n > r$, gdzie r to pewna dodatnia stała całkowita.

Badanie ciągów zadanych rekurencyjnie (tzn. rozstrzyganie, czy np. są to ciągi od pewnego momentu monotoniczne lub czy ciągi te mają granicę) na ogół jest znacznie trudniejsze niż badanie ciągów zadanych wzorem ogólnym (tzn. takim, którego jedyną zmienną jest indeks=numer wyrazu ciągu). Niemniej jednak ciągi zadane rekurencyjnie często

© Piotr Niemiec

opisują pewne zjawiska lub zliczają obiekty o pewnych właściwościach — jak to niejednokrotnie ma miejsce np. w kombinatoryce. Ciekawym (aczkolwiek często niewykonalnym) zadaniem jest wyznaczanie wzoru ogólnego ciągu zadanego rekurencyjnie.

3.17 Przykład.
Jednym z najbardziej znanych ciągów, który oryginalnie był zadany rekurencyjnie, jest *ciąg Fibonacciego* $(F_n)_{n=0}^{\infty}$, określony następująco:

$$F_n = \begin{cases} 1 & \text{gdy } n \in \{0,1\} \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{gdy } n > 1 \end{cases}.$$

O ile sprawdzenie, że ciąg ten jest ściśle rosnący od $n = 1$ (i tym samym $\lim_{n\to\infty} F_n = \infty$ [dlaczego?]), nie sprawia żadnej trudności, o tyle wyznaczenie wzoru ogólnego na F_n (co jest wykonalne, i stanowi dość klasyczny problem) wymaga znacznie większej inwencji, zwłaszcza w sytuacji, gdy nie znamy tego wzoru (i nie mamy wyczucia, jakiego typu postaci się spodziewać). Wyprowadzenie tego wzoru pozostawiamy zainteresowanym Czytelnikom jako wyzwanie. (W przypadku niepowodzenia, rozwiązanie tego problemu można bez większego wysiłku znaleźć w Internecie).

3.18 Przykład.
Załóżmy, że ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia od pewnego momentu rekurencję:

$$a_n = a_{n-1}^2 + 1. \tag{3:1}$$

Pokażemy, że ciąg ten nie może być zbieżny (dokładniej: nawet jeśli ciąg ten ma granicę, to nie jest ona liczbą). Poniższy argument jest powszechnie stosowaną metodą do rozpoznawania, jaką liczbową wartość może mieć granica ciągu zadanego rekurencyjnie, jeśli tylko ów ciąg jest zbieżny.

Załóżmy, dla dowodu nie wprost, że $\lim_{n\to\infty} a_n = g$, przy czym $g \in \mathbb{R}$. Korzystając np. ze wzorów z następnego rozdziału, nietrudno sprawdzić, że wtedy $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = g^2$. Ale zawsze (o ile tylko jedna ze stron równości jest określona) zachodzi równość $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_{n-1}$. Tak więc:

$$g = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (a_{n-1}^2 + 1) = g^2 + 1,$$

czyli $g^2 - g + 1 = 0$. Jednak to równanie kwadratowe nie ma pierwiastków rzeczywistych, więc g nie może być liczbą, co kończy dowód postulowanej przez nas własności.

Jak nietrudno się przekonać, powyższy ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ma granicę równą ∞. Istotnie, dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $a_n \geq 1$, skąd w miarę łatwo pokazać — stosując indukcję (i używając (3:1)) — że od pewnego momentu $a_n \geq n - r$ (gdzie r to pewna dodatnia stała całkowita), a zatem (z Twierdzenia o 3 ciągach) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

3.19 Uwaga.
Dość łatwo dowodzi się, że dla dowolnego niepustego zbioru $A \subset \mathbb{R}$ istnieją dwa ciągi: słabo malejący $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$ oraz słabo rosnący $(b_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$, takie że $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf A$ oraz $\lim_{n\to\infty} b_n = \sup A$. Własności te często przydają się w teoretycznych rozważaniach.

Dowodzi się również, że każdy ciąg liczbowy ma podciąg, który jest ściśle monotoniczny.

4 Operacje na granicach

Jak wynika z samej definicji granicy ciągu, przy wyznaczaniu granicy istotne są tylko wyrazy ciągu o dostatecznie dużych indeksach. W szczególności, początkowe wyrazy ciągu nie mają w tej materii znaczenia. Oznacza to, że jeśli w pewnym ciągu zmienimy (w sposób całkowicie dowolny!) **skończenie wiele** (dowolnie wybranych) jego wyrazów, to zbieżność oryginalnego ciągu jest równoważna zbieżności nowego ciągu, a w przypadku, gdy jeden z tych ciągów ma granicę, granicą drugiego jest ta sama wielkość.

Podczas wyznaczania granic ciągów opisanych konkretnym (jawnym) wzorem, powszechną praktyką jest, że pewne części wzoru (np. składniki sumy; czynniki iloczynu; licznik lub mianownik ułamka; podstawę lub wykładnik potęgi; itp.) zastępuje się ich granicami (o ile istnieją). Nie zawsze jednak jest to właściwa metoda postępowania. Dlatego

© Piotr Niemiec

warto znać prawa, jakie obowiązują w „świecie" granic. Niniejszy rozdział ma stanowić katalog podstawowych wzorów i metod, jakimi można się posługiwać (z rozwagą!) podczas liczenia granic.

4.1 Obserwacja.
Załóżmy, że ciągi $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ i $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ są zbieżne do liczb, odpowiednio, g i h. Wtedy:

(a) *dla dowolnych liczb $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ciąg $(\alpha a_n + \beta b_n)_{n=1}^{\infty}$ (odp. $(\alpha a_n - \beta b_n)_{n=1}^{\infty}$; $(a_n b_n)_{n=1}^{\infty}$) jest zbieżny do $\alpha g + \beta h$ (odp. do $\alpha g - \beta h$; do gh);*

(b) *jeśli $h \neq 0$, to ciąg $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ (od pewnego momentu ma sens oraz) jest zbieżny do $\frac{g}{h}$;*

(c) *jeśli zachodzi jeden z poniższych warunków:*

- *$g > 0$; lub*
- *od pewnego momentu $b_n \in \mathbb{N}_1$; lub*
- *$g \neq 0$ i od pewnego momentu $b_n \in \mathbb{Z}$,*

to ciąg $\left(a_n^{b_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ (od pewnego momentu ma sens oraz) jest zbieżny do g^h.

Własność operacji granicy wyrażona w powyższej obserwacji podsuwa ogólny pomysł na metodę postępowania przy liczeniu granic ciągów, których wzory są bardziej złożone: gdy ciąg (który dalej nazwiemy *głównym*), którego granicę chcemy wyznaczyć, jest sumą, różnicą, iloczynem, ilorazem lub potęgą dwóch innych ciągów (które w dalszym ciągu tej opowieści nazwiemy ciągami *składowymi* głównego ciągu), które mają granice i są one nam znane, pierwszy test, jaki powinno się wykonać, to sprawdzenie, jaki napis zobaczymy, gdy zamiast tych ciągów składowych napiszemy ich granice — bez względu na to, czy są to liczby, czy nieskończoności, oraz bez względu na to, czy działanie, które zobaczymy, jest wykonalne (może to być np. „$\frac{1}{0}$"). Taki napis ma charakter nieformalny i zazwyczaj notuje się go nad znakiem równości przy przekształcaniu wyrażeń, których granice próbujemy wyznaczyć. Okazuje się, że wśród wszystkich potencjalnie możliwych napisów, jakie mogą się w tej sytuacji pojawić, tylko kilka nie zawęża zakresu możliwych odpowiedzi na pytanie, jaka jest granica głównego ciągu (o ile ona istnieje), do jedynie skończenie wielu możliwości. Każdy napis (reprezentujący jedno z 5 podstawowych działań na dwóch wielkościach ze zbioru $\bar{\mathbb{R}}$), który może w odpowiedzi dać dowolną wielkość z pewnego niezdegenerowanego przedziału (zależną od ciągów składowych), nazywamy ***symbolem nieoznaczonym***. Okazuje się, że jeśli podczas próby liczenia granicy ciągu natrafimy po drodze na symbol nieoznaczony, taki ciąg może nie mieć granicy. A nawet jeśli ją ma, sama postać tego symbolu nie daje nam żadnej przesłanki, jaką wielkością może być granica. Dla kontrastu: jeśli podczas liczenia granicy głównego ciągu, po zastąpieniu ciągów składowych ich granicami zobaczymy napis, który nie jest symbolem nieoznaczonym, to albo od razu wiadomo, że ciąg ma granicę (i wtedy znamy jej wartość), albo mamy do czynienia z jednym z zaledwie kilku przypadków, w których mamy tylko dwie możliwości:

- albo ciąg główny, powiedzmy $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, nie ma granicy, ale $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$; taką sytuację często odnotowuje się, pisząc: $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ — należy jednak pamiętać, że ten zapis ma charakter umowny: chociaż po lewej stronie znaku równości pojawia się lim, ciąg nie ma granicy (!);
- albo ciąg główny ma granicę g i $g \in \{-\infty, \infty\}$.

Zazwyczaj w tych wyjątkowych przypadkach rozpoznanie, czy ciąg główny ma granicę, oraz jej wyznaczenie (gdy ów ciąg ma granicę), odbywa się przez zbadanie znaków wyrazów ciągów składowych — zwykle jest to szybko weryfikowalne i granicę wyznacza się zaraz po znaku równości, nad którym pojawia się ów napis.

Jak wynika z powyższych opisów, symbole nieoznaczone to jedyne nieformalne napisy, które niosą ze sobą informację, że granicę ciągu trzeba wyznaczyć w mniej standardowy sposób — zazwyczaj odbywa się to przez przekształcanie wzoru głównego ciągu lub przez zastosowanie gotowego wzoru z katalogu granic (konkretnych ciągów). Poniżej wypisujemy listę wszystkich symboli nieoznaczonych. Tam, gdzie pojawia się symbol „$\pm\infty$", również analogiczny napis z konkretnym (dowolnie wybranym) znakiem w miejscu „$\pm$" jest symbolem nieoznaczonym.

4.2 Twierdzenie.
Przy liczeniu granic ciągów liczbowych, w zakresie podstawowych działań na liczbach, jest tylko 7 symboli nieoznaczonych i są to:

- *ilorazowe:* $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$, $\frac{\pm\boldsymbol{\infty}}{\pm\boldsymbol{\infty}}$,
- *iloczynowy:* $\mathbf{0} \cdot (\pm\boldsymbol{\infty}) = \pm\boldsymbol{\infty} \cdot \mathbf{0}$,

© Piotr Niemiec

- *potęgowe:* $\mathbf{0^0}$, $\boldsymbol{\infty^0}$, $\mathbf{1^{\pm\infty}}$,
- *różnicowy:* $\boldsymbol{\infty - \infty = -\infty + \infty}$.

Pozostałe symbole nieoznaczone to: $\mathbf{\sin(\pm\infty)}$, $\mathbf{\cos(\pm\infty)}$, $\mathbf{\operatorname{tg}(\pm\infty)}$, $\mathbf{\operatorname{ctg}(\pm\infty)}$.

4.3 ***Uwaga.***
Jeśli chcielibyśmy być w 100% skrupulatni, do listy symboli nieoznaczonych należałoby jeszcze dorzucić symbol potęgowy postaci $\mathbf{(\pm 1)^{\pm\infty}}$ oraz symbole logarytmiczne: $\mathbf{\log_0(0)}$, $\mathbf{\log_0(\infty)}$, $\mathbf{\log_1(1)}$, $\mathbf{\log_\infty(0)}$, $\mathbf{\log_\infty(\infty)}$. Pierwszy z nich (potęgowy) może zaistnieć tylko w sytuacjach potęg, których wykładnik jest całkowity, a podstawa ujemna. W praktyce takie ciągi zdarzają się rzadko (poza wyrażeniami postaci „$(-1)^n$" lub potęgami liczby -1 o innych wykładnikach całkowitych). Z uwagi na to, że symbol ten zawsze redukuje się do napisu postaci $\pm(1^{\pm\infty})$, można go postrzegać jako „złośliwy" wariant symbolu „$\mathbf{1^\infty}$". Wszystkie symbole logarytmiczne (wymienione powyżej) redukują się do ilorazowych symboli nieoznaczonych, przez zastosowanie wzoru na zamianę podstawy logarytmu, znanego ze szkoły średniej: $\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$. Każde wyrażenie, w którym występuje logarytm, w którego podstawie występuje zmienna, powinno być zamienione (za pomocą tego wzoru) na logarytm o stałej podstawie. W profesjonalnej analizie matematycznej znaczenie ma wyłącznie logarytm *naturalny*, tj. funkcja logarytmiczna o podstawie $\mathrm{e} = 2,7182818284\ldots$ (jest to liczba niewymierna). Bliżej tej liczbie przyjrzymy się nieco później (jeszcze w tym rozdziale).

Z uwagi na to, że na ogół zbieżne ciągi liczbowe są od pewnego momentu większe (lub od pewnego momentu mniejsze) od swojej granicy, w nieformalnych symbolach działań na granicach stosuje się także notację „g^+" (i „g^-") [gdzie $g \in \mathbb{R}$], która oznacza, że stosowny ciąg zbiega do g i jego wyrazy są od pewnego momentu większe od g (odp. mniejsze od g). Dla przykładu, licząc granicę ciągu $x_n = \frac{(\frac{1}{n})^{-n^2}}{(-\frac{1}{n+1})^{n^2}}$, nad znakiem równości możemy napisać $\frac{(0^+)^{-\infty}}{(0^-)^{\infty}}$, gdyż:

- podstawa potęgi w liczniku (czyli $\frac{1}{n}$) dąży do 0 i jest większa od 0;
- wykładnik potęgi w liczniku (czyli $-n^2$) dąży do $-\infty$;
- podstawa potęgi w mianowniku (czyli $-\frac{1}{n+1}$) dąży do 0 i jest mniejsza od 0;
- wykładnik potęgi w mianowniku (czyli n^2) dąży do ∞.

W praktyce moglibyśmy to zapisać tak:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{1}{n})^{-n^2}}{(-\frac{1}{n+1})^{n^2}} \overset{\frac{(0^+)^{-\infty}}{(0^-)^{\infty}}}{=} \ldots$$

W praktyce zapisów postaci g^+ oraz g^- we wzorach na wynik granicy (a więc nie pod operatorem „lim") używa się tylko dla $g = 0$. My jednak w poniższej tabelce używamy także 1^+ oraz 1^-.

Poniżej dla każdego symbolu nieoznaczonego podajemy przedział, do którego musi wpaść granica, o ile granica ta istnieje. (W przypadku symbolu $\mathbf{0^0}$, ograniczamy się wyłącznie do jego wersji $\mathbf{(0^+)^0}$ — zgodnie z przyjętym na wstępie kursu ograniczeniem potęgowania).

Symbol	Zakres granicy
$\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$, $\frac{\pm\boldsymbol{\infty}}{\pm\boldsymbol{\infty}}$, $\pm\boldsymbol{\infty}\cdot\mathbf{0}$, $\boldsymbol{\infty-\infty}$, $\mathbf{\operatorname{tg}(\pm\infty)}$, $\mathbf{\operatorname{ctg}(\pm\infty)}$	$[-\infty,\infty]$
$\frac{\mathbf{0^+}}{\mathbf{0^+}}$, $\frac{\mathbf{0^-}}{\mathbf{0^-}}$, $\frac{\boldsymbol{\infty}}{\boldsymbol{\infty}}$, $\frac{-\boldsymbol{\infty}}{-\boldsymbol{\infty}}$, $\boldsymbol{\infty}\cdot\mathbf{0^+}$, $-\boldsymbol{\infty}\cdot\mathbf{0^-}$	$[0,\infty]$
$\frac{\mathbf{0^+}}{\mathbf{0^-}}$, $\frac{\mathbf{0^-}}{\mathbf{0^+}}$, $\frac{+\boldsymbol{\infty}}{-\boldsymbol{\infty}}$, $\frac{-\boldsymbol{\infty}}{+\boldsymbol{\infty}}$, $\boldsymbol{\infty}\cdot\mathbf{0^-}$, $-\boldsymbol{\infty}\cdot\mathbf{0^+}$	$[-\infty,0]$
$\mathbf{0^0}$, $\mathbf{1^{\pm\infty}}$, $\boldsymbol{\infty^0}$	$[0,\infty]$
$\mathbf{0^{0^-}}$, $\mathbf{(1^+)^\infty}$, $\mathbf{(1^-)^{-\infty}}$, $\boldsymbol{\infty^{0^+}}$	$[1,\infty]$
$\mathbf{0^{0^+}}$, $\mathbf{(1^+)^{-\infty}}$, $\mathbf{(1^-)^\infty}$, $\boldsymbol{\infty^{0^-}}$	$[0,1]$
$\mathbf{\sin(\pm\infty)}$, $\mathbf{\cos(\pm\infty)}$	$[-1,1]$

Podamy teraz kilka ważnych przykładów, które przydają się przy liczeniu granic. Każdy z nich związany jest z jednym z podstawowych 7 symboli nieoznaczonych.

© Piotr Niemiec

Dla uproszczenia wypowiedzi najbliższego twierdzenia, funkcję $x \mapsto f(x)$ nazwiemy *typu wielomianowego*, jeśli we wzorze funkcji f występuje skończenie wiele składników i każdy z nich jest albo stałą (tzn. nie ma w nim litery x), albo ma postać $c\cdot x^p$, gdzie c i p to stałe rzeczywiste oraz $p>0$. Tak więc funkcję taką można zapisać jednoznacznie w postaci $f(x)=a_0+a_1x^{p_1}+a_2x^{p_2}+\ldots+a_rx^{p_r}$, gdzie $a_0\in\mathbb{R}$, $r\in\mathbb{N}$, $a_1,a_2,\ldots,a_r\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ oraz $0<p_1<p_2<\ldots<p_r$. Jeśli $r>0$ (czyli funkcja nie jest stała), wykładnik p_r nazywamy *stopniem* funkcji f, a współczynnik a_r nazywamy jej *współczynnikiem wiodącym*. Z kolei gdy $r=0$ (czyli gdy f jest funkcją stale równą a_0), przyjmujemy, że f ma stopień 0, a stałą a_0 nazywamy *współczynnikiem wiodącym* funkcji f. Np.: funkcja $f(x)=2x^{2\sqrt{3}}-4x^{3\sqrt{2}}-7x^2+x^{3/2}-1$ ma stopień $3\sqrt{2}$ oraz współczynnik wiodący równy -4.

Zachęcamy Czytelników do udowodnienia punktów (a) i (b) poniższego twierdzenia.

4.4 Twierdzenie.

(a) *Ciąg geometryczny postaci $g_n=aq^n$ (gdzie $a,q\in\mathbb{R}$) ma granicę (w $\bar{\mathbb{R}}$) wtedy i tylko wtedy, gdy $a=0$ lub $q\in(-1,\infty)$. Dokładniej:*

$$\lim_{n\to\infty} aq^n=\begin{cases}0 & \text{gdy } |q|<1 \text{ lub } a=0\\ a & \text{gdy } q=1\\ \infty & \text{gdy } q>1 \text{ i } a>0\\ -\infty & \text{gdy } q>1 \text{ i } a<0\\ \pm a & \text{gdy } q=-1 \text{ i } a\neq 0 \text{ (brak granicy)}\\ \pm\infty & \text{gdy } q<-1 \text{ i } a\neq 0 \text{ (brak granicy)}\end{cases}.$$

(b) *Jeśli f i g to funkcje typu wielomianowego stopni, odpowiednio, p i q, a α i β to ich współczynniki wiodące, przy czym $\beta\neq 0$, wtedy:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\begin{cases}\frac{\alpha}{\beta} & \text{gdy } p=q\\ 0 & \text{gdy } p<q\\ \infty & \text{gdy } p>q \text{ i } \alpha\beta>0\\ -\infty & \text{gdy } p>q \text{ i } \alpha\beta<0.\end{cases}.$$

(c) *Ciąg $e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ jest ściśle rosnący i zbieżny do liczby niewymiernej* $\mathrm{e}=2,7182818284\ldots$ *Ogólniej, jeśli ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ma wyrazy od pewnego momentu niezerowe oraz $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, wtedy*

$$\lim_{n\to\infty}(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}}=\mathrm{e}.$$

(d) *Jeśli $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ma wyrazy od pewnego momentu niezerowe oraz $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, wtedy*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin a_n}{a_n}=1.$$

(e) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

O ile powyższe wzory można udowodnić stosunkowo szybko i w sposób elementarny, dowód poniższego wzoru jest bardzo trudny (zwłaszcza uzasadnienie występowania stałej 2π tamże):

4.5 Twierdzenie. (Wzór Stirlinga)

$$\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}\to 1 \quad (n\to\infty).$$

*4.6 **Uwaga.***
Wzór Stirlinga to ważne w praktycznych zastosowaniach narzędzie do obliczania granic ciągów, a zwłaszcza do rozstrzygania o zbieżności szeregu (szeregi będą tematem następnego rozdziału). Stosuje się go w ten sposób, że tam, gdzie pojawia się silnia, zastępuje się ją mianownikiem wyrażenia ze wzoru Stirlinga. Tę technikę należy jednak stosować z rozwagą, gdyż łatwo o jej nieprawidłowe użycie (i w efekcie błędne wnioski). Dla przykładu,

© Piotr Niemiec

wyrażenia $n!$ **nie można** zastąpić przez $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ przy próbie wyznaczenia granic ciągów: $a_n = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n - n!$ oraz $b_n = \left(\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}\right)^n$. Co do zasady, wyrażenie $n!$ powinno być czynnikiem (a nie składnikiem) wzoru oraz możemy zastąpić stałą liczbę (tzn. niezależną od n) takich czynników.

Podamy teraz przykłady świadczące o tym, że wzory skróconego mnożenia przydają się do liczenia granic.

4.7 Przykład.

(A) Aby obliczyć $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n+2}-\sqrt{n^2-n+4})$, zastosujmy znany ze szkoły średniej wzór $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$, który dla liczb dodatnich a i b można przekształcić do $a-b = \frac{a^2-b^2}{a+b}$. Jeśli teraz za a i b podstawimy odpowiednie pierwiastki występujące w wyrażeniu, którego granicę chcemy obliczyć, otrzymamy:

$$\sqrt{n^2+2n+2}-\sqrt{n^2-n+4} = \frac{(n^2+2n+2)-(n^2-n+4)}{\sqrt{n^2+2n+2}+\sqrt{n^2-n+4}} = \frac{3n-2}{n\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}+n\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}}}$$
$$= \frac{3-\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}}} \to \frac{3}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{3}{2} \quad (n\to\infty).$$

(B) Teraz znajdziemy granicę ciągu $x_n = \sqrt[3]{n^3+n^2}-n$. Tym razem przyda się wzór $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$, który dla dodatnich liczb a i b można przekształcić do $a-b = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$. Tak więc:

$$\sqrt[3]{n^3+n^2}-n = \frac{(n^3+n^2)-n^3}{(\sqrt[3]{n^3+n^2})^2+n\sqrt[3]{n^3+n^2}+n^2} = \frac{n^2}{n^2\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}\right)^2+n^2\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+n^2}$$
$$= \frac{1}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+1}$$

i tym samym $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{(\sqrt[3]{1})^2+\sqrt[3]{1}+1} = \frac{1}{3}$.

W powyższym przykładzie pozbywaliśmy się pierwiastków, stosując odpowiednie wzory skróconego mnożenia. Gdy stopień pierwiastka się zmienia wraz z indeksem wyrazu ciągu, często przydaje się Twierdzenie o 3 ciągach, co ilustruje poniższy przykład.

4.8 Przykład.

(A) Wyznaczymy granicę ciągu $x_n = \sqrt[n]{2^n+3^n+4^n}$. W tym celu stosujemy dwa proste szacowania: z jednej strony $x_n \geq \sqrt[n]{4^n} = 4$; z drugiej strony $x_n \leq \sqrt[n]{4^n+4^n+4^n} = 4\sqrt[n]{3}$, czyli:

$$4 \leq x_n \leq 4\cdot 3^{\frac{1}{n}}.$$

Traktując liczbę 4 występującą po skrajnej lewej stronie powyższych nierówności jak ciąg stały, widzimy, że jej granicą jest liczba 4. Zarazem wyrażenie występujące po skrajnej prawej stronie również ma granicę 4, gdyż $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ oraz 3^0 nie jest symbolem nieoznaczonym, lecz ma wartość 1. W takim razie także $\lim_{n\to\infty} x_n = 4$ (dzięki Twierdzeniu o 3 ciągach).

(B) Wyznaczymy granicę ciągu $y_n = \sqrt[n]{n^{2000}+n+1}$. Jak poprzednio, wykonujemy dwa proste szacowania:

$$1 \leq y_n \leq \sqrt[n]{3\cdot n^{2000}} = 3^{\frac{1}{n}}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^{2000}.$$

Na podstawie punktu (e) Tw. 4.4 oraz rozumowania przedstawionego w przykładzie (A) wnioskujemy, że

$$\lim_{n\to\infty} 3^{\frac{1}{n}}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^{2000} = 1$$

i dlatego, ponownie dzięki Twierdzeniu o 3 ciągach, $\lim_{n\to\infty} y_n = 1$.

© Piotr Niemiec

Jeśli w powyższym przykładzie niektóre składniki wielomianu pod pierwiastkiem będą mieć współczynniki ujemne, szacowanie będzie bardziej subtelne, ale wciąż konkluzja będzie taka sama: jakikolwiek wielomian (o dodatnim współczynniku wiodącym) wstawimy pod pierwiastek n-tego stopnia, granica powstałego w ten sposób ciągu zawsze będzie równa 1. Szczegóły dowodowe pozostawiamy zainteresowanym Czytelnikom jako ćwiczenie.

Podamy teraz pełną listę wzorów do wyznaczania granic na podstawie nieformalnych napisów, które **nie są** symbolami nieoznaczonymi. Należy przy tym pamiętać, że tam, gdzie podana wartość to $\pm\infty$, granica może nie istnieć, ale wartość bezwzględna wyrażenia, którego granicę obliczamy, zbiega do ∞. Tym samym, jeśli w tym przypadku zadana granica istnieje, to jest niewłaściwa.

Litera a poniżej oznacza liczbę rzeczywistą. Oprócz 5 podstawowych działań, zamieszczamy także wartości na krańcach dziedziny podstawowych funkcji elementarnych (funkcje arc tg oraz arc ctg zostaną wprowadzone w dalszych rozdziałach tego skryptu). Dla kompletności poniższej tabelki, przypominamy, że $\sqrt[k]{\square} = (\square)^{\frac{1}{k}}$ (więc, w szczególności, $\sqrt[k]{\infty} = \infty$, zgodnie ze wzorami poniżej).

Symbol	**Wartość**
$\pm\boldsymbol{a} + \infty$, $\infty \pm \boldsymbol{a}$, $\infty + \infty$, $\infty - (-\infty)$	$+\infty$
$\boldsymbol{a} - \infty$, $-\infty \pm \boldsymbol{a}$, $-\infty - \infty$, $-\infty + (-\infty)$	$-\infty$
$\boldsymbol{a} \cdot \infty$ $[a > 0]$, $\infty \cdot \boldsymbol{a}$ $[a > 0]$, $\infty \cdot \infty$, $\boldsymbol{a} \cdot (-\infty)$ $[a < 0]$, $-\infty \cdot \boldsymbol{a}$ $[a < 0]$, $-\infty \cdot (-\infty)$	$+\infty$
$\boldsymbol{a} \cdot \infty$ $[a < 0]$, $\infty \cdot \boldsymbol{a}$ $[a < 0]$, $\infty \cdot (-\infty)$, $\boldsymbol{a} \cdot (-\infty)$ $[a > 0]$, $-\infty \cdot \boldsymbol{a}$ $[a > 0]$, $-\infty \cdot \infty$	$-\infty$
$\frac{\boldsymbol{a}}{\pm\infty}$	0
$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{0}}$ $[a \neq 0]$, $\frac{\pm\infty}{\boldsymbol{a}}$, $\frac{\infty}{\boldsymbol{0}}$, $\frac{-\infty}{\boldsymbol{0}}$	$\pm\infty$
$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{0^+}}$ $[a > 0]$, $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{0^-}}$ $[a < 0]$, $\frac{\infty}{\boldsymbol{a}}$ $[a > 0]$, $\frac{\infty}{\boldsymbol{0^+}}$, $\frac{-\infty}{\boldsymbol{a}}$ $[a < 0]$, $\frac{-\infty}{\boldsymbol{0^-}}$	$+\infty$
$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{0^+}}$ $[a < 0]$, $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{0^-}}$ $[a > 0]$, $\frac{\infty}{\boldsymbol{a}}$ $[a < 0]$, $\frac{\infty}{\boldsymbol{0^-}}$, $\frac{-\infty}{\boldsymbol{a}}$ $[a > 0]$, $\frac{-\infty}{\boldsymbol{0^+}}$	$-\infty$
$\boldsymbol{a}^{\infty}$ $[\lvert a\rvert < 1]$, $\boldsymbol{a}^{-\infty}$ $[\lvert a\rvert > 1]$, $(\pm\infty)^{\boldsymbol{a}}$ $[a < 0]$, $(\pm\infty)^{-\infty}$	0
$\boldsymbol{a}^{-\infty}$ $[0 < a < 1]$, $\boldsymbol{a}^{\infty}$ $[a > 1]$, $(\boldsymbol{0^+})^{\boldsymbol{a}}$ $[a < 0]$, $(\boldsymbol{0^+})^{-\infty}$, $\infty^{\boldsymbol{a}}$ $[a > 0]$, ∞^{∞}	$+\infty$
$\boldsymbol{0}^{\boldsymbol{a}}$ $[a \in -2\mathbb{N}_1]$, $(\boldsymbol{0^-})^{\boldsymbol{a}}$ $[a \in -2\mathbb{N}_1]$, $(-\infty)^{\boldsymbol{a}}$ $[a \in 2\mathbb{N}]$, $(\pm\infty)^{\boldsymbol{a}}$ $[a \in 2\mathbb{N}]$	$+\infty$
$(\boldsymbol{0^-})^{\boldsymbol{a}}$ $[a \in -2\mathbb{N} - 1]$, $(-\infty)^{\boldsymbol{a}}$ $[a \in 2\mathbb{N} + 1]$	$-\infty$
$\boldsymbol{a}^{-\infty}$ $[-1 < a < 0]$, $\boldsymbol{a}^{\infty}$ $[a < -1]$, $\boldsymbol{0}^{\boldsymbol{a}}$ $[a < 0]$, $(\boldsymbol{0^-})^{\boldsymbol{a}}$ $[a < 0]$, $\boldsymbol{0}^{-\infty}$, $(\boldsymbol{0^-})^{-\infty}$, $(-\infty)^{\boldsymbol{a}}$ $[a > 0]$, $(-\infty)^{\infty}$	$\pm\infty$
$\boldsymbol{\ln 0}$, $\boldsymbol{\log_a 0}$ $[a > 1]$, $\boldsymbol{\log_a \infty}$ $[0 < a < 1]$	$-\infty$
$\boldsymbol{\ln \infty}$, $\boldsymbol{\log_a \infty}$ $[a > 1]$, $\boldsymbol{\log_a 0}$ $[0 < a < 1]$	$+\infty$
$\boldsymbol{\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2} + k\pi)}$ $[k \in \mathbb{Z}]$, $\boldsymbol{\mathrm{ctg}(k\pi)}$ $[k \in \mathbb{Z}]$	$\pm\infty$
$\boldsymbol{\mathrm{tg}((\frac{\pi}{2} + k\pi)^-)}$ $[k \in \mathbb{Z}]$, $\boldsymbol{\mathrm{ctg}((k\pi)^+)}$ $[k \in \mathbb{Z}]$	$+\infty$
$\boldsymbol{\mathrm{tg}((\frac{\pi}{2} + k\pi)^+)}$ $[k \in \mathbb{Z}]$, $\boldsymbol{\mathrm{ctg}((k\pi)^-)}$ $[k \in \mathbb{Z}]$	$-\infty$
$\boldsymbol{\mathrm{arc\,tg}\,\infty}$	$\frac{\pi}{2}$
$\boldsymbol{\mathrm{arc\,tg}(-\infty)}$	$-\frac{\pi}{2}$
$\boldsymbol{\mathrm{arc\,ctg}\,\infty}$	0
$\boldsymbol{\mathrm{arc\,ctg}(-\infty)}$	π

4.9 ***Uwaga.***
W dalszej części niniejszego skryptu poznamy regułę de l'Hospitala. Jest to jedna z najważniejszych metod liczenia granic w przypadku natknięcia się na jeden z ilorazowych symboli nieoznaczonych. Jeśli regułę tę chcielibyśmy zastosować do ciągów (a nie funkcji określonych na przedziałach), należy pamiętać, że przed jej użyciem należy zamiast danego ciągu wprowadzić stosowną funkcję (powstałą ze wzoru tegoż ciągu przez zastąpienie litery indeksu literą zmiennej rzeczywistej, np. x) i zamiast liczyć jego granicę, należy wyznaczyć granicę tej funkcji, a na koniec jako wniosek odnotować, że znaleziona wielkość jest także granicą ciągu.

© Piotr Niemiec

Na zakończenie rozdziału podamy jeszcze jedno ciekawe prawo matematyczne, które przydaje się zwłaszcza w kontekście badania zbieżności szeregów:

4.10 Twierdzenie.
Jeśli $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *jest ciągiem liczbowym o wyrazach dodatnich, takim że ciąg* $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ *ma granicę* (*w* $\bar{\mathbb{R}}$), *to także ciąg* $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ *ma granicę, oraz* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

5 Szeregi

5.1 Definicja.
Jeśli $a_1, \ldots, a_n$ to dowolne liczby rzeczywiste (a $n \in \mathbb{N}_1$), symbolem $\sum_{k=1}^{n} a_k$ oznaczamy sumę wszystkich liczb $a_1, \ldots, a_n$, czyli $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$. Użyta tu zmienna k (na oznaczenie indeksu) ma charakter czysto pomocniczy i może być zastąpiona dowolnym innym *bezkolizyjnym* symbolem (w tym przykładzie symbol ten nie może zawierać litery a oraz n jako pełne „słowa"), tak więc $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{\gamma_\alpha^\beta=1}^{n} a_{\gamma_\alpha^\beta}$.

Ogólniej, jeśli I jest dowolnym niepustym zbiorem skończonym, powiedzmy $I = \{j_1, \ldots, j_r\}$ (przy czym elementy $j_1, \ldots, j_r$ są różne), i dla dowolnego elementu $s \in I$ mamy określoną liczbę $b_s \in \mathbb{R}$, określamy $\sum_{s\in I} b_s$ jako $\sum_{k=1}^{r} b_{j_k}$. Wynik tej sumy nie zależy od sposobu ponumerowania elementów zbioru I, gdyż dodawanie jest działaniem przemiennym. (Jak w poprzednim akapicie, użyta tu zmienna s pod znakiem sumy $\sum$ ma charakter pomocniczy i może zostać zastąpiona innym symbolem: $\sum_{s\in I} b_s = \sum_{t\in I} b_t$. Dla kontrastu, zmienna I oznaczająca zbiór indeksów nie ma charakteru czysto pomocniczego i na ogół $\sum_{s\in I} b_s$ oraz $\sum_{s\in J} b_s$ oznaczają różne sumy. Ta konwencja zamiany litery indeksu na dowolny bezkolizyjny symbol obowiązuje także przy sumach nieskończonych, czyli szeregach).

Dodatkowo, przyjmuje się (umownie), że dla $I = \varnothing$, $\sum_{s\in I} b_s = 0$. Tym samym np. $\sum_{j=1}^{0} a_j = 0 = \sum_{n=100}^{3} b_n$ (bez względu na to, jakim wzorem zadano składniki sum).

Jak pokazuje poniższa definicja, szereg to szczególnej postaci ciąg.

5.2 Definicja.
Szereg to ciąg postaci $(\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n=1}^{\infty}$, gdzie $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ jest dowolnym ciągiem liczbowym. Wyrazy a_k nazywamy składnikami szeregu. Jeśli ciąg $(\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n=1}^{\infty}$ ma granicę, nazywamy ją *sumą szeregu* i oznaczamy symbolem $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Jeśli suma szeregu istnieje i jest liczbą, o szeregu mówimy, że jest *zbieżny warunkowo* (rzadziej: *zbieżny*). W przeciwnym przypadku mówimy, że szereg jest *rozbieżny*.

Uwaga: Symbol $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jest powszechnie używany także w przypadku, gdy pytamy, czy odpowiedni szereg ma granicę. W wypowiedziach związanych ze zbieżnością szeregu (lub istnieniem granicy), napis $(\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n=1}^{\infty}$ zastępuje się przez $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ i pisze się, np.: szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jest zbieżny (lub: rozbieżny do nieskończoności; lub: rozbieżny).

Startowa wartość indeksu szeregu może być dowolną liczbą całkowitą. Tym samym następujące symbole również oznaczają szeregi, a zapis pod znakiem sumy informuje nas, jaki zakres liczb przebiega pomocnicza zmienna oznaczająca numer indeksu: $\sum_{n=2025}^{\infty} a_n$ oraz $\sum_{m=-2025}^{\infty} b_m$.

5.3 Obserwacja.
Jeśli od pewnego momentu $a_n \geq 0$ (*odp. od pewnego momentu* $a_n \leq 0$), *wtedy szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ma granicę, która należy do zbioru* $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (*odp. do zbioru* $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$).

W związku z powyższą obserwacją, dla szeregów, których składniki są od pewnego momentu nieujemne, powszechnie przyjętą notacją na oznaczenie, że ów szereg jest zbieżny, jest zapis w postaci nierówności $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Warto w tym miejscu podkreślić, że taki zapis (na oznaczenie, że szereg jest zbieżny) jest dopuszczalny wyłącznie w tym przypadku (tzn. wtedy, gdy składniki są od pewnego momentu nieujemne).

Chociaż zbieżność ciągu to jego ważna własność, w przypadku szeregów cenniejsza jest inna, mocniejsza własność:

© Piotr Niemiec

5.4 Definicja.
Mówimy, że szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jest *zbieżny bezwzględnie* (lub *bezwarunkowo*), gdy zbieżny jest szereg $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

O tym, że jest to mocniejsza własność, świadczy poniższy punkt (A):

5.5 Twierdzenie.
Niech $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ *oraz* $(b_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$.

(A) *Jeśli szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny bezwzględnie, to jest zbieżny warunkowo. W szczególności, jeśli szereg ten nie jest zbieżny warunkowo, to nie jest zbieżny bezwzględnie.*

(B) *Jeśli wyrazy ciągu* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *są od pewnego momentu nieujemne lub od pewnego momentu niedodatnie, to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny warunkowo wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny bezwzględnie.*

(C) *Dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych* p *i* q*: szereg* $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny warunkowo (odp. bezwzględnie) wtedy i tylko wtedy, gdy szereg* $\sum_{n=q}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny warunkowo (odp. bezwzględnie).*

(D) *Jeśli szeregi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *mają granice, odpowiednio,* g *oraz* h*, a* α *i* β *to takie liczby, że napis* $\alpha \cdot g + \beta \cdot h$ *nie zawiera symbolu nieoznaczonego i sam nie redukuje się do takiego symbolu, to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ *ma granicę, i jest ona równa* $\alpha g + \beta h$.

(E) (***Kryterium porównawcze***) *Jeśli od pewnego momentu* $|a_n| \leq b_n$ *oraz* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$*, to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny bezwzględnie. Odwrotnie, jeśli od pewnego momentu* $0 \leq a_n \leq b_n$ *i* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$*, to także* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.

(F) (***Warunek konieczny na zbieżność szeregu***) *Jeśli szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny, to* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(G) (***Szereg geometryczny***) *Jeśli* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *jest ciągiem geometrycznym o ilorazie* q*, to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny bezwzględnie wtedy i tylko wtedy, gdy* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$*, wtedy i tylko wtedy, gdy szereg ten jest zbieżny warunkowo, wtedy i tylko wtedy, gdy* $a_1 = 0$ *lub* $|q| < 1$*. Ponadto:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{gdy } a_1 = 0 \\ \frac{a_1}{1-q} & \text{gdy } |q| < 1 \\ +\infty & \text{gdy } a_1 > 0 \text{ i } q \geq 1 \\ -\infty & \text{gdy } a_1 < 0 \text{ i } q \geq 1 \\ \text{nie istnieje} & \text{gdy } a_1 \neq 0 \text{ i } q \leq -1 \end{cases} .$$

(H) *Jeśli ciąg* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *jest od pewnego momentu monotoniczny, to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ma granicę (w* $\bar{\mathbb{R}}$*).*

Punkt (C) powyższego twierdzenia orzeka, że zbieżność (warunkowa lub bezwzględna) szeregu nie zależy od wartości indeksu startowego. Z tego powodu w sytuacjach, gdy nie pytamy o wartość sumy szeregu, a jedynie o jej istnienie, zamiast $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ będziemy często pisać skrótowo $\sum_n a_n$. Z tych samych powodów będziemy pomijać zakres indeksów samego ciągu składników i zamiast pisać np. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, będziemy pisać skrótowo $(a_n)_n$.
Podamy teraz szereg kluczowych kryteriów na zbieżność bezwzględną szeregów.

5.6 Twierdzenie.
Niech $(a_n)_n \subset \mathbb{R}$ *i* $(b_n)_n \subset \mathbb{R}$.

(A) (***Kryterium d'Alemberta***) *Załóżmy, że* $a_n \neq 0$ *od pewnego momentu oraz* $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = g \in [0, \infty]$*. Jeśli* $g < 1$*, to szereg* $\sum_n a_n$ *jest zbieżny bezwzględnie; a jeżeli* $g > 1$*, to szereg ten nie jest zbieżny warunkowo.*

(B) (***Kryterium Cauchy'ego***) *Załóżmy, że* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g \in [0, \infty]$*. Jeśli* $g < 1$*, to szereg* $\sum_n a_n$ *jest zbieżny bezwzględnie; a jeżeli* $g > 1$*, to szereg ten nie jest zbieżny warunkowo.*

(C) (***Kryterium asymptotyczne***) *Załóżmy, że od pewnego momentu* $b_n > 0$ *oraz że* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = g \in \bar{\mathbb{R}}$.

- *Jeśli* $g \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*, to* $\sum_n a_n$ *jest zbieżny bezwzględnie wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny warunkowo, wtedy i tylko wtedy, gdy* $\sum_n b_n < \infty$.

© Piotr Niemiec

- *Jeśli $g \in \mathbb{R}$ i $\sum_n b_n < \infty$, to szereg $\sum_n a_n$ jest zbieżny bezwzględnie.*
- *Jeśli $g \neq 0$ i $\sum_n b_n = \infty$, to szereg $\sum_n a_n$ nie jest zbieżny warunkowo.*

(D) (***Kryterium 2^k***) *Jeśli $(a_n)_n$ jest od pewnego momentu monotoniczny, to szereg $\sum_n a_n$ jest zbieżny bezwzględnie wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny warunkowo, wtedy i tylko wtedy, gdy szereg $\sum_n 2^n a_{2^n}$ jest zbieżny.*

(E) (***Szereg harmoniczny***) *Dla $\alpha \in \mathbb{R}$, szereg $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha > 1$.*

5.7 Przykład.
Stosując kryterium 2^k, uzasadnijmy punkt (E) powyższego twierdzenia. Jako że ciąg $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ (gdzie α jest ustaloną stałą rzeczywistą) ma wyrazy dodatnie, szereg $\sum_n a_n$ ma sumę, a jego zbieżność warunkowa jest równoważna bezwzględnej.

Najpierw rozważmy dwa proste przypadki: jeśli $\alpha < 0$, to $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$; a jeżeli $\alpha = 0$, to $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ — więc w obu tych przypadkach nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu, czyli $\sum_n a_n = \infty$ dla takich wartości α.

Pozostaje rozważyć najważniejszy przypadek — gdy $\alpha > 0$. (Już teraz odnotujmy, że poniższy dowód działa dla dowolnej wartości α — tyle że użyty tutaj argument jest znacznie bardziej subtelny niż użyty powyżej warunek konieczny zbieżności szeregu). Łatwo sprawdzić, że w tej sytuacji ciąg $(a_n)_n$ jest malejący (w przypadku dowolnej wartości α ciąg ten jest ściśle monotoniczny). W takim razie z kryterium 2^k wynika, że szereg $\sum_n a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg $\sum_n 2^n a_{2^n}$. Ale sumę tego drugiego szeregu możemy wyznaczyć dokładnie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2^{\alpha n}} = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{1-\alpha})^n = \begin{cases} \frac{1}{1-2^{1-\alpha}} & \text{gdy } 2^{1-\alpha} < 1 \\ \infty & \text{gdy } 2^{1-\alpha} \geq 1 \end{cases},$$

więc rzeczywiście interesujący nas szereg jest zbieżny dokładnie wtedy, gdy $\alpha > 1$.

*5.8 **Uwaga.***
Leonhard Euler podał dokładne wzory na sumy szeregów harmonicznych o dowolnym dodatnim wykładniku parzystym. Wynika z nich, że liczba $\frac{1}{\pi^p}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ jest wymierna dla dowolnej dodatniej liczby parzystej $p \in \mathbb{Z}$. W szczególności:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Dla kontrastu, o liczbie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, zwanej stałą Apéry'ego, wiadomo jedynie tyle, że jest liczbą niewymierną (stan na październik 2026).

W zakresie zbieżności warunkowej szeregów ograniczymy się jedynie do poniższego kryterium.

5.9 Twierdzenie. (Kryterium Leibniza)
Jeśli ciąg $(a_n)_n$ jest od pewnego momentu monotoniczny, to:

$$\text{szereg } \sum_n (-1)^n a_n \text{ jest zbieżny warunkowo} \iff \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

*5.10 **Uwaga.***
Ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, którego wyrazy na przemian zmieniają znaki, tj. taki że $a_n \leq 0$ dla parzystych indeksów n i $a_n \geq 0$ dla nieparzystych n lub odwrotnie (czyli $a_n \geq 0$ dla parzystych indeksów n i $a_n \leq 0$ dla nieparzystych n), nazywany jest ciągiem *naprzemiennym*. Łatwo pokazać, że każdy taki ciąg ma postać $a_n = (-1)^n b_n$ (dla wszelkich n) lub $a_n = (-1)^{n-1} b_n$, gdzie $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem o wyrazach nieujemnych. Kryterium Leibniza podaje warunki na zbieżność warunkową szeregu, któego składniki tworzą ciąg naprzemienny. Z tego też powodu używa się w takich przypadkach skrótowej nazwy *szereg naprzemienny*.

© Piotr Niemiec

Poniższa własność wydaje się dość intuicyjna (z uwagi na to, że dodawanie jest przemienne). Prawdopodobnie bardziej zaskakujące jest to, że podane poniżej założenia są konieczne (zob. uwagę pod twierdzeniem).

5.11 Twierdzenie.
Jeśli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie lub jego składniki są od pewnego momentu nieujemne (lub od pewnego momentu niedodatnie), to suma tego szeregu nie zależy od porządku jego składników. Dokładniej: jeśli przy powyższych założeniach $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest dowolną bijekcją, to także szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)}$ ma granicę; oraz $\sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

*5.12 **Uwaga**.*
Słynny XIX-wieczny matematyk, Bernhard Riemann wykazał, że jeśli szereg jest zbieżny warunkowo, ale nie bezwzględnie, to można tak poprzestawiać jego wyrazy, by nowo powstały szereg był zbieżny do dowolnie zadanej odgórnie liczby rzeczywistej; można także tak je poprzestawiać, by powstały szereg: (a) był rozbieżny do ∞; (b) był rozbieżny do $-\infty$; (c) nie miał granicy.

Czasem do wyliczenia sumy szeregu lub rozstrzygnięcia jego zbieżności przydaje się grupowanie (w nawiasy) pewnych jego składników. Co może się wydać na pierwszy rzut oka zaskakujące, nie zawsze możemy robić to w sposób zupełnie dowolny — o czym świadczy poniższy przykład.

5.13 Przykład.
Niech $a_n = (-1)^n$. Jako że $|a_n| = 1$, ciąg ten nie jest zbieżny do 0, więc szereg $\sum_n a_n$ nie jest zbieżny nawet warunkowo. Gdybyśmy jednak tego nie zauważyli i nierozważnie przystąpili do grupowania wyrazów, otrzymalibyśmy dwa fałszywe wyniki:

$$(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6) + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots = 0$$

lub

$$a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + (a_6 + a_7) + \ldots = -1 + 0 + 0 + 0 + \ldots = -1.$$

Poniżej opisujemy dwie najważniejsze sytuacje, w których nawiasowanie jest bezpieczne i nie prowadzi do fałszywych konkluzji (jak w powyższym przykładzie).

5.14 Twierdzenie.
Niech $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$.

(a) *Jeśli szereg $\sum_n a_n$ jest zbieżny bezwzględnie lub wyrazy ciągu $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ są od pewnego momentu nieujemne lub od pewnego momentu niedodatnie, to składniki $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ można grupować bez ograniczeń: jeśli zbiory $I_1, I_2, I_3, \ldots \subset \mathbb{N}$ są parami rozłączne i ich suma pokrywa się z $\mathbb{N}$, to:*

$$\sum_n \Big(\sum_{k \in I_n} a_k \Big) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

przy czym jeśli któraś z sum $\sum_{k \in I_n} a_k$ jest niewłaściwa, to jej wartość uznajemy za wartość lewej strony.

(b) *Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, a liczby całkowite $0 = k_0 < k_1 < k_2 < \ldots$ spełniają warunek $k_n - k_{n-1} \leq M$ (gdzie M jest pewną stałą liczbową, a n jest dowolnym indeksem dodatnim), to szereg $\sum_n a_n$ ma granicę wtedy i tylko wtedy, gdy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{j=k_{n-1}}^{k_n - 1} a_j)$ ma granicę; ponadto, obie te granice są równe (o ile istnieją).*

Podamy teraz przykład ilustrujący użyteczność grupowania składników szeregu.

5.15 Przykład.
Obliczmy sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2025^n}$. W tym celu zauważmy, że $\frac{n}{2025^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2025^n}$, co oznacza, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2025^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2025^n} \big)$. W szeregu po prawej stronie występują składniki postaci $\frac{1}{2025^n}$, przy czym taki składnik

© Piotr Niemiec

pojawia się dokładnie n razy. W tymże szeregu (po prawej stronie) już pojawia się pewne grupowanie składników. Zgodnie z punktem (a) Tw. 5.14, możemy te składniki grupować w dowolny sposób. Zróbmy to więc tak: do nawiasu nr 1 wrzućmy po jednym składniku $\frac{1}{2025^n}$ (przy czym $n \geq 1$); do drugiego po jednym takim składniku, ale tylko dla $n \geq 2$; do trzeciego po jednym takimż, ale tylko dla $n \geq 3$; itd.: do nawiasu nr k wrzucamy po jednym składniku $\frac{1}{2025^n}$, przy czym $n \geq k$. Zauważmy, że w ten sposób składnik postaci $\frac{1}{2025^n}$ pojawi się tylko i wyłącznie w nawiasach o numerze ze zbioru $\{1, \ldots, n\}$ — a więc łącznie w całej sumie wystąpi dokładnie n razy (czyli tyle, ile trzeba). Zatem:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2025^n}\Big) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{2025^n}\Big) \overset{(*)}{=} \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2025^{-k}}{1-\frac{1}{2025}} = \frac{2025}{2024}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2025^k} \overset{(*)}{=} \frac{2025}{2024}\cdot\frac{2025^{-1}}{1-\frac{1}{2025}} = \frac{2025}{2024^2},$$

przy czym w miejscach oznaczonych $(*)$ zastosowaliśmy wzór na sumę szeregu geometrycznego.

Bardziej wszechstronną (i zarazem wygodną) metodę wyznaczania dokładnych wartości sum pewnych szeregów (których przykładem jest szereg zbadany powyżej) poznamy w kolejnych rozdziałach. Będzie ona polegać na zastosowaniu podstawowych własności tzw. szeregów potęgowych, których definicję przedstawiamy poniżej.

5.16 Definicja.
Szereg *potęgowy* to szereg postaci

$$\sum_n a_n(x-x_o)^n, \tag{5:1}$$

gdzie $x_o, a_n \in \mathbb{R}$, x to zmienna (parametr) tego szeregu, a indeksy n nie mogą być ujemne; przyjmuje się tutaj konwencję, że $(x-x_o)^0 = 1$ także dla $x = x_o$ (czyli w tym kontekście: $0^0 = 1$). Liczbę x_o nazywamy środkiem szeregu potęgowego (5:1). *Obszar zbieżności* tego szeregu to zbiór I wszystkich liczb $x \in \mathbb{R}$, dla których jest on zbieżny warunkowo. *Promień zbieżności* szeregu (5:1) to wielkość $R \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\beta-\alpha) \in [0,\infty]$, gdzie $\alpha, \beta \in \bar{\mathbb{R}}$ są takie, że $\alpha \leq \beta$ oraz:

$$(\alpha,\beta) \subset I \subset [\alpha,\beta]$$

(przy czym przyjmujemy, że $(\alpha,\alpha) = \varnothing$ oraz $[\alpha,\alpha] = \{\alpha\}$).

Kluczowe własności zdefiniowanych powyżej pojęć zebrane są w poniższym twierdzeniu.

5.17 Twierdzenie.
Niech $\sum_n a_n(x-x_o)^n$ będzie dowolnym szeregiem potęgowym, I jego obszarem zbieżności, a R promieniem zbieżności. Wtedy:

(a) *Zbiór I jest albo singletonem $\{x_o\}$, albo niezdegenerowanym przedziałem w $\mathbb{R}$.*

(b) *Jeśli $R = \infty$, to $I = \mathbb{R}$. Jeśli $R = 0$, to $I = \{x_o\}$. A gdy $0 < R < \infty$, zachodzą inkluzje: $(x_o - R, x_o + R) \subset I \subset [x_o - R, x_o + R]$.*

(c) *Dla dowolnej liczby $x \in (x_o - R, x_o + R) \cup \{x_o\}$ szereg $\sum_n a_n(x-x_o)^n$ jest zbieżny bezwzględnie.*

(d) *Jeśli wyrazy ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ są od pewnego momentu niezerowe oraz ciąg $\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}\right)_{n=1}^{\infty}$ ma granicę w $\bar{\mathbb{R}}$, to $R = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.*

(e) *Jeśli podciąg ciągu $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n=1}^{\infty}$ złożony tylko z niezerowych jego wyrazów ma granicę w $\bar{\mathbb{R}}$, równą g, to $R = \frac{1}{g}$ (z konwencjami: $\frac{1}{0} = \infty$ oraz $\frac{1}{\infty} = 0$).*

5.18 Przykład.
W typowych zadaniach z szeregami potęgowymi należy wyznaczyć ich obszar zbieżności oraz zbadać rodzaj zbieżności w każdym punkcie tego obszaru. Powyższe twierdzenie pokazuje, że zadanie takie składa się z dwóch etapów:

© Piotr Niemiec

najpierw należy wyznaczyć promień zbieżności; a potem — ale tylko wtedy, gdy ów promień jest dodatnią liczbą rzeczywistą — należy zbadać, czy szereg jest zbieżny warunkowo lub bezwzględnie na krańcach przedziału wyznaczonego przez ten promień. Poniżej prezentujemy przykład ilustrujący kłopoty, jakie można napotkać w tego typu zadaniach.

Rozważmy szereg potęgowy postaci $\sum_n \frac{(x-2)^{n^2}}{n}$. W tej sytuacji

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{gdy } n = k^2 \\ 0 & \text{gdy w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

(Przyjęcie, że $a_n = \frac{1}{n}$ to błąd! Decyduje wykładnik przy $x-2$). Ponieważ nieskończenie wiele wyrazów ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ się zeruje, możemy jedynie zastosować punkt (e) Tw. 5.17. W tym celu liczymy granicę:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k^2]{a_{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\left(\sqrt[k]{k}\right)^{\frac{1}{k}}} = \frac{1}{1^0} = 1$$

i tym samym (zgodnie z przywołanym kryterium) $R = 1$. Zatem obszar zbieżności I zadanego szeregu spełnia inkluzje $(2-1, 2+1) \subset I \subset [2-1, 2+1]$. Ponadto wiemy, że dla $x \in (1,3)$ szereg ten jest zbieżny bezwzględnie. Pozostaje sprawdzić rodzaj zbieżności na krańcach tego przedziału, czyli w punktach 1 i 3. Zacznijmy od $x = 3$: zadany szereg w tym punkcie ma postać $\sum_n \frac{1}{n}$, więc jest rozbieżny (jako szereg harmoniczny o wykładniku 1). Z kolei dla $x = 1$ szereg ten przyjmuje postać $\sum_n \frac{(-1)^{n^2}}{n} = \sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ i z kryterium Leibniza jest zbieżny warunkowo. Szereg ten nie jest zbieżny bezwzględnie (bo $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$). Tym samym obszar zbieżności zadanego szeregu to przedział $[1,3)$, a na krańcu zbieżność jest (tylko) warunkowa.

6 Granica i ciągłość funkcji jednej zmiennej

Chociaż w tym rozdziale interesować nas będą wyłącznie funkcje jednej zmiennej rzeczywistej, ciągłość funkcji określimy dla odwzorowań między dowolnymi przestrzeniami metrycznymi — by nie przyciemnić zasadniczej idei stojącej za pojęciem ciągłości.

6.1 Definicja.
Niech:

- (X, d) oraz (Y, ϱ) będą dowolnymi przestrzeniami metrycznymi;
- A będzie podzbiorem przestrzeni X;
- $f\colon A \to Y$ będzie dowolną funkcją;
- a będzie dowolnym punktem zbioru A.

Mówimy, że funkcja f jest *ciągła w punkcie* a (względem d i ϱ), gdy:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A\colon\ (d(x,a) < \delta \implies \varrho(f(x), f(a)) \leq \varepsilon),$$

czyli: jeśli argumenty zbliżają się do punktu a, to wartości funkcji f zbliżają się do jej wartości w punkcie a. Jeśli funkcja f nie jest ciągła w punkcie a, mówimy, że jest nieciągła w a.

Funkcję nazywamy *ciągłą* (względem d i ϱ), gdy jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny. Innymi słowy, $f\colon A \to Y$ jest funkcją ciągłą wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall a \in A\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A\colon\ (d(x,a) < \delta \implies \varrho(f(x), f(a)) \leq \varepsilon).$$

Jeśli w powyższym warunku parametr δ można dobrać w sposób niezależny do punktu a (a więc zależny jedynie od parametru ε), funkcję f nazywamy *jednostajnie ciągłą* (względem d i ϱ). Tak więc, f jest jednostajnie ciągła, gdy:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in A\colon\ (d(x,y) < \delta \implies \varrho(f(x), f(y)) \leq \varepsilon).$$

Funkcję nieciągłą w chociaż jednym punkcie swojej dziedziny nazywamy nieciągłą.

Jak pokazuje poniższe twierdzenie, ciągłość jest pospolitą własnością funkcji (jednej zmiennej!), jakie pojawiają się

© Piotr Niemiec

w podstawowych rozważaniach.

6.2 Twierdzenie.
Jeśli funkcja, która jako swój jedyny argument przyjmuje liczby rzeczywiste, zadana jest jednym wzorem, w którym występuje tylko skończenie wiele operacji oraz nie występują inne operacje niż: 5 podstawowych działań algebraicznych, pierwiastkowanie, wartość bezwzględna, funkcje trygonometryczne, logarytmy i funkcje cyklometryczne[*1)], *to funkcja ta jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny.*

Na funkcjach ciągłych można także wykonywać podstawowe operacje bez utraty ciągłości:

6.3 Obserwacja.
Załóżmy, że f i g to funkcje, a a to pewien punkt. Dziedziny funkcji wymienionych poniżej wyznacza się zgodnie z zasadami.

(A) *Jeśli f i g mają wartości rzeczywiste i są ciągłe w punkcie a, to także następujące funkcje są ciągłe w punkcie a: $x \mapsto f(x) + g(x)$; $x \mapsto f(x) - g(x)$; $x \mapsto cf(x)$ (gdzie $c \in \mathbb{R}$ to dowolna stała); $x \mapsto f(x)g(x)$; oraz: $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$, o ile $g(a) \neq 0$; $x \mapsto f(x)^{g(x)}$, o ile $f(a) > 0$.*

(B) *Jeśli funkcja f jest ciągła w a, a funkcja g jest określona i ciągła w punkcie $f(a)$, to złożenie $g \circ f$ (czyli funkcja $x \mapsto g(f(x))$) jest ciągłe w punkcie a.*

(C) *Jeśli f i g mają wartości rzeczywiste i są ciągłe, to także następujące funkcje są ciągłe: $f + g$; $f - g$; cf (gdzie $c \in \mathbb{R}$ to dowolna stała); fg; $\frac{f}{g}$ (o ile funkcja g nie jest stale równa 0); oraz f^g (przy czym wszystkie argumenty x z dziedziny tej funkcji spełniają nierówność $f(x) > 0$).*

(D) *Jeśli f i g to funkcje ciągłe, to złożenie $g \circ f$ jest funkcją ciągłą, o ile ma sens.*

6.4 Przykład.
Jedną z najważniejszych nieciągłych funkcji w matematyce jest tzw. *podłoga* (lub *funkcja podłogi*), której dziedziną jest zbiór $\mathbb{R}$, a zbiorem wartości jest zbiór $\mathbb{Z}$, natomiast jej wartość w punkcie $x \in \mathbb{R}$ tradycyjnie oznaczana jest przez $\lfloor x \rfloor$ i jest to największa liczba całkowita nie większa od x:

$$\lfloor x \rfloor = \max(\mathbb{Z} \cap (-\infty, x])$$

(np.: $\lfloor 1,234 \rfloor = 1$, $\lfloor -1,234 \rfloor = -2$ oraz $\lfloor k \rfloor = k$ dla $k \in \mathbb{Z}$). Łatwo sprawdzić, że podłoga jest ciągła w każdym punkcie będącym liczbą niecałkowitą, natomiast jest nieciągła w argumentach całkowitych.

Innym przykładem funkcji nieciągłej jest funkcja *signum*, czyli funkcja $\operatorname{sgn}\colon \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$, przypisująca liczbie jej „znak”, czyli:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x > 0 \\ -1 & \text{gdy } x < 0 \\ 0 & \text{gdy } x = 0 \end{cases}.$$

Łatwo sprawdzić, że funkcja signum jest nieciągła tylko w zerze.

Ciągłość ma fundamentalne znaczenie przy liczeniu granic, o czym świadczy poniższy rezultat:

6.5 Twierdzenie.
Niech $f\colon A \to Y$ będzie funkcją między przestrzeniami metrycznymi, a z dowolnym punktem zbioru A.

(a) *Jeśli f jest funkcją ciągłą w punkcie z, a ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$ jest zbieżny do z, to $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(z)$.*

(b) *Funkcja f jest nieciągła w punkcie z wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A \setminus \{z\}$, taki że:*

$$x_n \to z \ (n \to \infty) \qquad \text{oraz} \qquad f(x_n) \not\to f(z) \ (n \to \infty).$$

[*1)] Poznamy je w tym rozdziale.

© Piotr Niemiec

(c) *Jeśli $Y \subset \mathbb{R}$, to funkcja f jest nieciągła w punkcie z wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A \setminus \{z\}$, taki że $\lim_{n\to\infty} x_n = z$, a ciąg $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ ma granicę (w $\bar{\mathbb{R}}$) i $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(z)$.*

Podamy teraz trzy ważne własności funkcji ciągłych:

6.6 Twierdzenie.
Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie dowolnym przedziałem, a $f\colon I \to \mathbb{R}$ funkcją ciągłą.

(A) (**Twierdzenie Weierstrassa o kresach**) *Jeśli $I = [a,b]$, gdzie $-\infty < a < b < \infty$, to istnieją punkty $m_*, m^* \in I$, takie że:*

$$\forall x \in I\colon \quad f(m_*) \leq f(x) \leq f(m^*).$$

(B) (**Własność Darboux**) *Dla dowolnych punktów $a, b \in I$, takich że $a < b$, oraz liczby $t \in \mathbb{R}$, takiej że $f(a) < t < f(b)$ lub $f(b) < t < f(a)$, istnieje punkt $c \in (a,b)$, dla którego $f(c) = t$.*

(C) (**Twierdzenie o ciągłości funkcji odwrotnej**) *Jeśli funkcja f jest różnowartościowa, to jest ściśle rosnąca lub ściśle malejąca oraz: zbiór $J = \{f(x)\colon\ x \in I\}$ jest przedziałem, a funkcja odwrotna $g = f^{-1}\colon J \to \mathbb{R}$ (tzn.: $g(x) = y \iff y \in I$ i $f(y) = x$) jest ciągła.*

Nietrudno sprawdzić, że:

- zawężając rozważania jedynie do zbioru liczb dodatnich, funkcją odwrotną do funkcji potęgowej (o wykładniku różnym od zera) jest również funkcja potęgowa;
- funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej [o podstawie różnej od 1] jest funkcja logarytmiczna o tej samej podstawie (i odwrotnie).

Jako że najważniejszą funkcją wykładniczą jest ta o podstawie e, funkcję do niej odwrotną nazywamy logarytmem *naturalnym*, którą oznaczać będziemy przez ln lub log (tak więc $\ln x = \log x = \log_{\mathrm{e}} x$).

Obok powyższych rodzajów funkcji ważne znaczenie mają także funkcje trygonometryczne. Chociaż żadna z nich nie jest różnowartościowa (bo są to funkcje okresowe), można rozważać funkcje odwrotne do zawężeń tych funkcji. W ten sposób powstają funkcje cyklometryczne, zdefiniowane poniżej.

6.7 Definicja.
Funkcje *cyklometryczne* to 4 funkcje: arcsin (`arkus sinus`), arccos (`arkus kosinus`), arctg (`arkus tangens`) i arcctg (`arkus kotangens`), zdefiniowane następująco:

- $\arcsin\colon [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ oraz:
$$\arcsin x = y \iff y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ i } \sin y = x;$$
- $\arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi]$ oraz:
$$\arccos x = y \iff y \in [0,\pi] \text{ i } \cos y = x;$$
- $\operatorname{arctg}\colon \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ oraz:
$$\operatorname{arctg} x = y \iff y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ i } \operatorname{tg} y = x;$$
- $\operatorname{arcctg}\colon \mathbb{R} \to (0,\pi)$ oraz:
$$\operatorname{arcctg} x = y \iff y \in (0,\pi) \text{ i } \operatorname{ctg} y = x.$$

Łatwo sprawdzić, że funkcje arcsin i arctg są ściśle rosnące i nieparzyste, a funkcje arccos i arcctg są ściśle malejące.

Z twierdzenia o funkcji odwrotnej wynika, że funkcje cyklometryczne są ciągłe.
Podobnie jak dla ciągów, określa się granicę funkcji w punkcie:

© Piotr Niemiec

6.8 Definicja.
Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną, A jej podzbiorem, a b dowolnym jej punktem. Mówimy, że punkt b jest punktem *skupienia* zbioru A, gdy:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A \setminus \{b\}\colon\ d(a,b) \leq \varepsilon.$$

Innymi słowy, b jest punktem skupienia zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg o wyrazach w $A \setminus \{b\}$ zbieżny do b.

Jeśli $b \in A$ oraz b nie jest punktem skupienia zbioru A, to b nazywamy punktem *izolowanym* zbioru A.

Dla funkcji $f\colon B \to Y$, gdzie $A \subset B \subset X$, a (Y,ϱ) to przestrzeń metryczna, i punktu $b \in X$, który jest punktem skupienia zbioru A, powiemy, że funkcja f *ma granicę w punkcie b wzdłuż A równą $g \in Y$* (lub że $f(x)$ *zbiega/dąży do g przy argumencie x dążącym po zbiorze A do b*), gdy:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall a \in A \setminus \{b\}\colon\ (d(a,b) < \delta \implies d(f(a),g) \leq \varepsilon).$$

Gdy $A = B$, w powyższym nazewnictwie możemy pominąć zwroty „wzdłuż A" oraz „po zbiorze A". Istnienie granicy zapisujemy symbolicznie: $f(x) \to g\ (A \ni x \to b)$ lub $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x\in A}} f(x) = g$; lub krócej (tylko gdy zbiór A to pełna dziedzina funkcji f!): $f(x) \to g\ (x \to b)$; $\lim_{x\to b} f(x) = g$. Gdy funkcja f nie ma granicy w punkcie b lub gdy granica ta istnieje, ale jest różna od g, piszemy $f(x) \not\to g\ (A \ni x \to b)$ (lub $f(x) \not\to g\ (x \to b)$).

W przypadku, gdy dziedzina funkcji jest podzbiorem $\mathbb{R}$, możemy mówić o granicach jednostronnych w danym punkcie. Aby skompletować wszystkie możliwe przypadki związane z istnieniem granic w kontekście przestrzeni $\bar{\mathbb{R}}$, poniżej podajemy także warunki na zbieżność w nieskończonościach lub do nieskończoności.

6.9 Definicja.
Powiemy, że liczba $b \in \mathbb{R}$ jest *lewostronnym punktem skupienia* zbioru $A \subset \mathbb{R}$, gdy:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A\colon\ b - \varepsilon < a < b.$$

Innymi słowy: b jest lewostronnym punktem skupienia zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ściśle rosnący ciąg o wyrazach w A zbieżny do b. Podobnie, powiemy, że liczba b jest *prawostronnym punktem skupienia* zbioru A, gdy:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A\colon\ b < a < b + \varepsilon.$$

Inaczej: b jest prawostronnym punktem skupienia zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ściśle malejący ciąg o wyrazach w A zbieżny do b.

Wielkość ∞ (odp. $-\infty$) nazwiemy *punktem skupienia* zbioru A, gdy zbiór ten jest nieograniczony od góry (odp. od dołu). Zachodzi analogiczna (do wymienionych powyżej) własności: ∞ (odp. $-\infty$) jest punktem skupienia zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ściśle rosnący (odp. ściśle malejący) ciąg o wyrazach w A, którego granicą jest ta wielkość.

Niech $f\colon B \to Y$ oraz $A \subset B \subset X$, gdzie (X,d) oraz (Y,ϱ) to przestrzenie metryczne.

- Jeśli $B \subset \mathbb{R}$ oraz $b \in \mathbb{R}$ jest lewostronnym punktem skupienia zbioru A, to mówimy, że f ma *lewostronną granicę* w b (wzdłuż A) równą $g \in Y$, gdy:

  $$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (b-\delta, b) \cap A\colon\ \varrho(f(x),g) \leq \varepsilon.$$

  Gdy powyższy warunek jest spełniony, piszemy $f(x) \to g\ (A \ni x \to b^-)$ lub $\lim\limits_{\substack{x\to b^-\\ x\in A}} f(x) = g$.

- Jeśli $B \subset \mathbb{R}$ oraz $b \in \mathbb{R}$ jest prawostronnym punktem skupienia zbioru A, to mówimy, że f ma *prawostronną granicę* w b (wzdłuż A) równą $g \in Y$, gdy:

  $$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (b, b+\delta) \cap A\colon\ \varrho(f(x),g) \leq \varepsilon.$$

  Gdy powyższy warunek jest spełniony, piszemy $f(x) \to g\ (A \ni x \to b^+)$ lub $\lim\limits_{\substack{x\to b^+\\ x\in A}} f(x) = g$.

- Jeśli b jest punktem skupienia zbioru A, a $Y \subset \mathbb{R}$, to mówimy, że f ma *granicę w punkcie b (wzdłuż A) równą ∞* (lub: $f(x)$ *dąży do ∞ przy argumencie x dążącym po zbiorze A do b*), co zapisujemy symbolicznie $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x\in A}} f(x) = \infty$ lub $f(x) \to \infty\ (A \ni x \to b)$, gdy:

  $$\forall M > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A \setminus \{b\}\colon\ (d(x,b) < \delta \implies f(x) \geq M).$$

© Piotr Niemiec

- Jeśli b jest punktem skupienia zbioru A, a $Y \subset \mathbb{R}$, to mówimy, że f ma *granicę w punkcie b (wzdłuż A) równą* $-\infty$ (lub: $f(x)$ *dąży do* $-\infty$ *przy argumencie x dążącym po zbiorze A do b*), co zapisujemy symbolicznie $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x\in A}} f(x) = -\infty$ lub $f(x) \to -\infty$ $(A \ni x \to b)$, gdy:
$$\forall M > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A \setminus \{b\}\colon\ (d(x,b) < \delta \implies f(x) \leq -M).$$
- Jeśli $B \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$ oraz b jest lewostronnym punktem skupienia zbioru A, to mówimy, że f ma *lewostronną granicę w b (wzdłuż A) równą* ∞, co zapisujemy symbolicznie $\lim\limits_{\substack{x\to b^-\\ x\in A}} f(x) = \infty$ lub $f(x) \to \infty$ $(A \ni x \to b^-)$, gdy:
$$\forall M > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (b-\delta, b) \cap A\colon\ f(x) \geq M.$$
- Jeśli $B \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$ oraz b jest prawostronnym punktem skupienia zbioru A, to mówimy, że f ma *prawostronną granicę w b (wzdłuż A) równą* ∞, co zapisujemy symbolicznie $\lim\limits_{\substack{x\to b^+\\ x\in A}} f(x) = \infty$ lub $f(x) \to \infty$ $(A \ni x \to b^+)$, gdy:
$$\forall M > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (b, b+\delta) \cap A\colon\ f(x) \geq M.$$
- Jeśli $B \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$ oraz b jest lewostronnym punktem skupienia zbioru A, to mówimy, że f ma *lewostronną granicę w b (wzdłuż A) równą* $-\infty$, co zapisujemy symbolicznie $\lim\limits_{\substack{x\to b^-\\ x\in A}} f(x) = -\infty$ lub $f(x) \to -\infty$ $(A \ni x \to b^-)$, gdy:
$$\forall M > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (b-\delta, b) \cap A\colon\ f(x) \leq -M.$$
- Jeśli $B \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$ oraz b jest prawostronnym punktem skupienia zbioru A, to mówimy, że f ma *prawostronną granicę w b (wzdłuż A) równą* $-\infty$, co zapisujemy symbolicznie $\lim\limits_{\substack{x\to b^+\\ x\in A}} f(x) = -\infty$ lub $f(x) \to -\infty$ $(A \ni x \to b^+)$, gdy:
$$\forall M > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (b, b+\delta) \cap A\colon\ f(x) \leq -M.$$
- Jeśli $B \subset \mathbb{R}$ i A jest zbiorem nieograniczonym od góry, to mówimy, że f ma *granicę w ∞ (wzdłuż A) równą $g \in Y$* (lub: $f(x)$ *zbiega/dąży do g przy argumencie x dążącym po zbiorze A do ∞*), co zapisujemy symbolicznie $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ x\in A}} f(x) = g$ lub $f(x) \to g$ $(A \ni x \to \infty)$, gdy:
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0\ \forall x \in (M, \infty) \cap A\colon\ \varrho(f(x), g) \leq \varepsilon.$$
- Jeśli $B \subset \mathbb{R}$ i A jest zbiorem nieograniczonym od dołu, to mówimy, że f ma *granicę w $-\infty$ (wzdłuż A) równą $g \in Y$* (lub: $f(x)$ *zbiega/dąży do g przy argumencie x dążącym po zbiorze A do $-\infty$*), co zapisujemy symbolicznie $\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\ x\in A}} f(x) = g$ lub $f(x) \to g$ $(A \ni x \to -\infty)$, gdy:
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0\ \forall x \in (-\infty, -M) \cap A\colon\ \varrho(f(x), g) \leq \varepsilon.$$
- Jeśli $B \subset \mathbb{R}$ i $Y \subset \mathbb{R}$, a A jest zbiorem nieograniczonym od góry, to mówimy, że f ma *granicę w ∞ (wzdłuż A) równą* ∞ (lub: $f(x)$ *dąży do ∞ przy argumencie x dążącym po zbiorze A do ∞*), co zapisujemy symbolicznie $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ x\in A}} f(x) = \infty$ lub $f(x) \to \infty$ $(A \ni x \to \infty)$, gdy:
$$\forall C > 0\ \exists M > 0\ \forall x \in (M, \infty) \cap A\colon\ f(x) \geq C.$$
- Jeśli $B \subset \mathbb{R}$ i $Y \subset \mathbb{R}$, a A jest zbiorem nieograniczonym od góry, to mówimy, że f ma *granicę w ∞ (wzdłuż A) równą* $-\infty$ (lub: $f(x)$ *dąży do $-\infty$ przy argumencie x dążącym po zbiorze A do ∞*), co zapisujemy symbolicznie $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ x\in A}} f(x) = -\infty$ lub $f(x) \to -\infty$ $(A \ni x \to \infty)$, gdy:
$$\forall C > 0\ \exists M > 0\ \forall x \in (M, \infty) \cap A\colon\ f(x) \leq -C.$$
- Jeśli $B \subset \mathbb{R}$ i $Y \subset \mathbb{R}$, a A jest zbiorem nieograniczonym od dołu, to mówimy, że f ma *granicę w $-\infty$ (wzdłuż A) równą* ∞ (lub: $f(x)$ *dąży do ∞ przy argumencie x dążącym po zbiorze A do $-\infty$*), co zapisujemy symbolicznie $\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\ x\in A}} f(x) = \infty$ lub $f(x) \to \infty$ $(A \ni x \to -\infty)$, gdy:
$$\forall C > 0\ \exists M > 0\ \forall x \in (-\infty, -M) \cap A\colon\ f(x) \geq C.$$
- Jeśli $B \subset \mathbb{R}$ i $Y \subset \mathbb{R}$, a A jest zbiorem nieograniczonym od dołu, to mówimy, że f ma *granicę w $-\infty$ (wzdłuż A) równą* $-\infty$ (lub: $f(x)$ *dąży do $-\infty$ przy argumencie x dążącym po zbiorze A do $-\infty$*), co zapisujemy symbolicznie $\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\ x\in A}} f(x) = -\infty$ lub $f(x) \to -\infty$ $(A \ni x \to -\infty)$, gdy:
$$\forall C > 0\ \exists M > 0\ \forall x \in (-\infty, -M) \cap A\colon\ f(x) \leq -C.$$

Jak zwykle, w przypadku, gdy $A = B$, możemy pomijać napisy $x \in A$ (pod operatorem lim) oraz $A \ni$.

© Piotr Niemiec

6.10 Obserwacja.
W każdym z powyżej omówionych przypadków, funkcja może mieć co najwyżej jedną granicę przy argumencie zbiegającym po danym zbiorze do ustalonej wielkości. Podobnie, funkcja określona na podzbiorze zbioru $\mathbb{R}$ w każdym lewostronnym (odp. prawostronnym) punkcie skupienia ustalonego podzbioru dziedziny może mieć co najwyżej jedną granicę lewostronną (odp. prawostronną), gdy argument porusza się po tym podzbiorze.

*6.11 **Uwaga.***
Jak nietrudno się przekonać, zachodzi następująca własność, dzięki której nie ma mowy o dwuznaczności pojęcia granicy: Jeśli $f\colon A \to B$ jest funkcją, której dziedzina A jest podzbiorem zbioru $\mathbb{Z}$ zawierającym nieskończenie wiele liczb dodatnich, a B to przestrzeń metryczna, oraz $a_n = f(n)$, to ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ma granicę (np. $\pm\infty$) wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f ma granicę w ∞, oraz $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to\infty} f(x)$ (o ile granice istnieją).

Poniższe twierdzenie ma liczne zastosowania praktyczne.

6.12 Twierdzenie.
Niech $f\colon A \to X$ będzie dowolną funkcją, gdzie $A \subset \mathbb{R}$, a X to przestrzeń metryczna, i niech a będzie dowolnym punktem zbioru A.

(a) *Jeśli a jest zarówno lewo-, jak i prawostronnym punktem skupienia zbioru A, to funkcja f jest ciągła w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją obie granice wymienione poniżej oraz zachodzą równości:*

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x\to a^+} f(x).$$

(b) *Jeśli a jest lewostronnym punktem skupienia zbioru A, ale nie prawostronnym, to funkcja f jest ciągła w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje poniższa granica oraz zachodzi równość:*

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a).$$

(c) *Jeśli a jest prawostronnym punktem skupienia zbioru A, ale nie lewostronnym, to funkcja f jest ciągła w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje poniższa granica oraz zachodzi równość:*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a).$$

(d) *Jeśli a jest punktem izolowanym zbioru A, to funkcja f jest ciągła w punkcie a.*

(e) *Funkcja f jest ciągła w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $\varepsilon > 0$, taka że zawężenie funkcji f do zbioru $A \cap (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ jest funkcją ciągłą w punkcie a.*

W związku z powyższymi kryteriami na ciągłość, użyteczne stają się także pojęcia ciągłości jednostronnej:

6.13 Definicja.
Mówimy, że funkcja $f\colon A \to X$, gdzie $A \subset \mathbb{R}$, a X to przestrzeń metryczna, jest *lewostronnie ciągła* (odp. *prawostronnie ciągła*) w punkcie $a \in A$, który jest lewostronnym (odp. prawostronnym) punktem skupienia tego zbioru, jeśli $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$ (odp. $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$). Funkcję f nazywamy *lewostronnie ciągłą* (odp. *prawostronnie ciągłą*), gdy jest lewostronnie (odp. prawostronnie) ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny, który jest jej lewostronnym (odp. prawostronnym) punktem skupienia.

6.14 Przykład.
Podłoga jest funkcją prawostronnie ciągłą, ale nie lewostronnie. Natomiast funkcja signum nie jest ani lewo-, ani prawostronnie ciągła w zerze.

© Piotr Niemiec

Podamy teraz dwa proste przykłady na testowanie ciągłości funkcji.

6.15 Przykład.
Sprawdźmy, w jakich punktach ciągłe są podane poniżej funkcje.

(A) Rozpocznijmy od typowego przykładu, z nietypowo podziurawioną dziedziną:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{gdy } x < 0 \\ x - 1 & \text{gdy } 0 \leq x \leq 1 \\ x + 1 & \text{gdy } x \in \{2, 3\} \\ x^2 - 4 & \text{gdy } 3 < x \leq 4 \\ 11 & \text{gdy } x > 4 \end{cases}.$$

Rozpocznijmy od tego, że — na podstawie powyższego wzoru — dziedziną funkcji f jest zbiór $A = (-\infty, 1] \cup \{2\} \cup [3, \infty)$. Widzimy więc, że liczba 2 jest punktem izolowanym zbioru A, zatem funkcja f jest ciągła w tym punkcie. Dalej, w każdym ze zbiorów $A \cap (-\infty, 0)$, $A \cap (0, 2)$, $A \cap (3, 4)$ oraz $A \cap (4, \infty)$ [dziedzinę przecinać koniecznie z przedziałami obustronnie otwartymi!] funkcja f jest dana jednym wzorem, który określa funkcję ciągłą w całej swej dziedzinie ($f(x)$ jest równe w tych zbiorach, odpowiednio, $x^2 - 1$; $x - 1$; $x^2 - 4$ oraz 11), więc z punktu (e) Tw. 6.12 wynika, że jest ona ciągła w każdym punkcie każdego z tych zbiorów. Tym samym jedynymi punktami, w których funkcja f może być nieciągła, są liczby 0, 3 i 4, z których 3 jest tylko prawostronnym punktem skupienia. Stosujemy więc stosowne kryteria na sprawdzenie ciągłości w każdym z tych punktów:

- $f(0) = 0 - 1 = -1 = \lim_{x \to 0^+}(x - 1) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$ oraz $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-}(x^2 - 1) = 0^2 - 1 = -1 = f(0)$, czyli funkcja jest ciągła w 0;
- $f(3) = 3 + 1 = 4$ oraz $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+}(x^2 - 4) = 3^2 - 4 = 5 \neq f(3)$, więc funkcja nie jest ciągła w 3;
- $f(4) = 4^2 - 4 = 12 = \lim_{x \to 4^-}(x^2 - 4) = \lim_{x \to 4^-} f(x)$ oraz $\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} 11 = 11 \neq f(4)$, więc funkcja nie jest ciągła w 4 (w tym punkcie jest ciągła jedynie lewostronnie).

(B) Tym razem rozważmy bardziej patologiczny przykład. Dla uproszczenia, oznaczmy przez Q_2 zbiór złożony ze wszystkich liczb postaci $\frac{k}{2^n}$, gdzie $k, n \in \mathbb{Z}$. Przy pomocy tego zbioru wprowadzamy funkcję:

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{gdy } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ x^2 & \text{gdy } x \in Q_2 \\ 2x^3 & \text{gdy } x \in \mathbb{Q} \setminus Q_2 \end{cases}.$$

Dziedzina funkcji g to pełen zbiór $\mathbb{R}$, ale każdy punkt jest podejrzany o nieciągłość. Co ważne w tym przykładzie: każda liczba rzeczywista jest punktem skupienia każdego ze zbiorów $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, Q_2 oraz $\mathbb{Q} \setminus Q_2$ (tutaj darujemy sobie dowód tego stwierdzenia, gdyż nie to jest istotą tego przykładu). Zastanówmy się, jakie warunki musi spełniać punkt $a \in \mathbb{R}$, w którym fumkcja g jest ciągła: funkcja g musi mieć w nim tę samą granicę (równą $g(a)$), niezależnie od tego, po jakim zbiorze będzie poruszać się argument. Z tego względu obliczmy granice tej funkcji wzdłuż trzech ww. zbiorów:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \notin \mathbb{Q}}} g(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \notin \mathbb{Q}}} x = a$$
$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in Q_2}} g(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in Q_2}} x^2 = a^2$$
$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in \mathbb{Q} \setminus Q_2}} g(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in \mathbb{Q} \setminus Q_2}} 2x^3 = 2a^3.$$

Aby więc funkcja g mogła być ciągła w a, muszą zachodzić równości $a = a^2 = 2a^3$, co jest możliwe tylko dla $a = 0$. Zatem funkcja g jest nieciągła w każdym punkcie różnym od zera, a w zerze jest ciągła, gdyż $g(0) = 0 = \lim_{x \to 0} g(x)$. (Ostatnia granica istnieje, gdyż dziedzinę funkcji rozbiliśmy na skończenie wiele kawałków [trzy], wzdłuż których funkcja ta ma tę samą granicę [równą 0] przy argumencie dążącym do 0).

Metoda zastosowana w ostatnim przykładzie ma ogólny charakter:

© Piotr Niemiec

6.16 Twierdzenie.
*Jeśli dziedzina funkcji f jest sumą **skończenie wielu** zbiorów i wzdłuż każdego z tych zbiorów, których punktem skupienia jest ustalony punkt a, funkcja ta ma tę samą granicę g w a, to funkcja f ma granicę w a i jest nią g.*

Analogiczna własność do sformułowanej powyżej zachodzi również dla granic ciągów.

Wiele własności ciągów (związanych z ich granicami) przenosi się również na funkcje. W następnym twierdzeniu zbieramy najcenniejsze z nich. Wcześniej jednak, dla porządku, uogólnijmy pojęcia wprowadzone w Def. 3.9 (str. 8) na przypadek funkcji:

6.17 Definicja.
Powiemy, że funkcja $f\colon B \to \mathbb{R}$, gdzie $B \subset \mathbb{R}$, jest na zbiorze $A \subset B$:

- *ściśle rosnąca* (lub krótko: *rosnąca*), gdy: $\forall x, y \in A,\ x < y\colon\ f(x) < f(y)$;
- *ściśle malejąca* (lub krótko: *malejąca*), gdy: $\forall x, y \in A,\ x < y\colon\ f(x) > f(y)$;
- *stała*, gdy: $\forall x, y \in A\colon\ f(x) = f(y)$;
- *słabo rosnąca*, gdy: $\forall x, y \in A,\ x < y\colon\ f(x) \leq f(y)$;
- *słabo malejąca*, gdy: $\forall x, y \in A,\ x < y\colon\ f(x) \geq f(y)$;
- *ściśle monotoniczna*, gdy jest ściśle rosnąca lub ściśle malejąca, lub stała;
- *słabo monotoniczna* (lub krótko: *monotoniczna*), gdy jest słabo rosnąca lub słabo malejąca.

W przypadku, gdy A jest pełną dziedziną funkcji f, mówimy krótko, że funkcja f jest rosnąca, malejąca, monotoniczna itd. — gdy spełnia stosowny warunek spośród wymienionych powyżej.

O funkcji f powiemy, że jest *ograniczona* (odp. *ograniczona od góry*; *ograniczona od dołu*) na zbiorze A, gdy obraz zbioru A poprzez f (czyli zbiór $f(A) = \{f(x)\colon\ x \in A\}$) jest takimż zbiorem. Funkcja f jest ograniczona (od góry; od dołu), gdy zbiór jej wartości jest takiż.

6.18 Twierdzenie.

(A) (**Twierdzenie o granicy funkcji monotonicznej**) *Niech $f\colon A \to \mathbb{R}$, gdzie $A \subset \mathbb{R}$, i niech $a \in \bar{\mathbb{R}}$ będzie punktem skupienia*[*2)] *zbioru A. Jeśli $a = \infty$ lub a jest lewostronnym punktem skupienia zbioru A (odp. jeśli $a = -\infty$ lub a jest prawostronnym punktem skupienia zbioru A) oraz dla pewnej liczby $b < a$ (odp. $b > a$) funkcja f jest słabo monotoniczna na zbiorze $(b, a) \cap A$ (odp. na zbiorze $(a, b) \cap A$), to istnieje $\lim_{x \to a^-} f(x) \in \bar{\mathbb{R}}$ (odp. $\lim_{x \to a^+} f(x) \in \bar{\mathbb{R}}$). Dokładniej, przy powyższych założeniach zachodzą następujące własności:*

- *Jeśli $b < a$ (odp. $b > a$) i funkcja f jest słabo rosnąca na zbiorze $D \overset{\text{def}}{=} (b, a) \cap A$ (odp. słabo malejąca na zbiorze $D \overset{\text{def}}{=} (a, b) \cap A$), to granica $\lim_{x \to a^-} f(x)$ (odp. $\lim_{x \to a^+} f(x)$) jest równa $\sup f(D)$; granica ta jest liczbą wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f jest ograniczona od góry na zbiorze D.*
- *Jeśli $b < a$ (odp. $b > a$) i funkcja f jest słabo malejąca na zbiorze $D \overset{\text{def}}{=} (b, a) \cap A$ (odp. słabo rosnąca na zbiorze $D \overset{\text{def}}{=} (a, b) \cap A$), to granica $\lim_{x \to a^-} f(x)$ (odp. $\lim_{x \to a^+} f(x)$) jest równa $\inf f(D)$; granica ta jest liczbą wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f jest ograniczona od dołu na zbiorze D.*

(B) (**Twierdzenie o trzech funkcjach**) *Niech $f, g, h\colon A \to \mathbb{R}$ będą dowolnymi funkcjami określonymi na podzbiorze A przestrzeni metrycznej (X, d) i niech a będzie punktem skupienia zbioru A. Jeśli $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = c \in \bar{\mathbb{R}}$ oraz istnieje liczba $\varepsilon > 0$, taka że $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ dla wszelkich $x \in B(a, \varepsilon) \cap A \setminus \{a\}$, to także $\lim_{x \to a} g(x) = c$.*

(C) *Jeśli $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ to funkcje, takie że dla pewnego punktu a istnieją granice $\lim_{x \to a} f(x) = p$ i $\lim_{x \to a} g(x) = q$ w $\bar{\mathbb{R}}$ oraz dla pewnej liczby $\varepsilon > 0$ zachodzi nierówność $f(x) \leq g(x)$ dla wszelkich $x \in B(a, \varepsilon) \cap A \setminus \{a\}$, to $p \leq q$.*

(D) *Jeśli $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ to funkcje, takie że dla pewnego punktu a istnieją granice $\lim_{x \to a} f(x) = p$ i $\lim_{x \to a} g(x) = q$ w $\bar{\mathbb{R}}$ oraz $p < q$, to dla pewnej liczby $\varepsilon > 0$ zachodzi nierówność $f(x) < g(x)$ dla wszelkich $x \in B(a, \varepsilon) \cap A \setminus \{a\}$.*

© Piotr Niemiec

(E) *Jeśli $f\colon A \to \mathbb{R}$ to funkcja, taka że dla pewnego punktu a istnieje granica $\lim_{x\to a} f(x)$ w $\bar{\mathbb{R}}$ i granica ta jest różna od 0, to dla pewnej liczby $\varepsilon > 0$ zachodzi własność: $f(x) \neq 0$ dla wszelkich $x \in B(a,\varepsilon) \cap A \setminus \{a\}$.*

6.19 ***Uwaga.***
Powyższe twierdzenie o trzech funkcjach ma swój naturalny odpowiednik w przypadku, gdy $A \subset \mathbb{R}$, a punkt a jest jego lewo- lub prawostronnym punktem skupienia, lub gdy $a \in \{-\infty, \infty\}$. W wersji dla liczbowych jednostronnych punktów skupienia granice $\lim_{x\to a}$ zastępuje się przez $\lim_{x\to a^-}$ lub (odpowiednio) $\lim_{x\to a^+}$, natomiast zbiór $B(a,\varepsilon) \cap A \setminus \{a\}$ zastępuje się przez:

- gdy $a \in \mathbb{R}$ jest liczbowym lewostronnym punktem skupienia: $(a-\varepsilon, a) \cap A$ (tutaj ε jest, co do zasady, małą liczbą);
- gdy $a \in \mathbb{R}$ jest liczbowym prawostronnym punktem skupienia: $(a, a+\varepsilon) \cap A$ (jw.);
- gdy $a = \infty$: $(\varepsilon, \infty) \cap A$ (tutaj ε jest, co do zasady, dużą liczbą);
- gdy $a = -\infty$: $(-\infty, -\varepsilon) \cap A$ (jw.).

Podobnie, własności wymienione w punktach (C)–(E) Tw. 6.18 mają swe naturalne odpowiedniki dla granic jednostronnych (lub w nieskończonościach); modyfikacje są bardzo podobne do tych, które opisaliśmy powyżej. Szczegóły pozostawiamy jako ćwiczenie.

Również w kontekście granic funkcji można używać zwrotu *od pewnego momentu*, który w tym przypadku oznacza *dla wszystkich argumentów dostatecznie bliskich punktowi granicznemu*.

6.20 ***Uwaga.***
Powszechnie przyjętą praktyką jest stosowanie napisu $\lim_{x\to\pm\infty}$ w przypadku, gdy obie nieskończoności ($-\infty$ i ∞) są punktami skupienia zbioru, wzdłuż którego wyznaczamy granicę; i zarazem obie granice — $\lim_{x\to\infty}$ oraz $\lim_{x\to-\infty}$ — istnieją i są równe. Wówczas $\lim_{x\to\pm\infty}$ oznacza wspólną wartość obu tych granic.

7 Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej

Centralnym pojęciem rachunku różniczkowego jest pojęcie pochodnej funkcji:

7.1 Definicja.
Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie (niezdegenerowanym) przedziałem, a $f\colon I \to \mathbb{R}$ dowolną funkcją. *Iloraz różnicowy* funkcji f to wyrażenie postaci $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$, gdzie x i y to (dowolne) różne liczby ze zbioru I.

Dla liczby $a \in I$ **niebędącej** krańcem tego przedziału, powiemy, że funkcja f ma *pochodną w punkcie a* (lub że jest *różniczkowalna w punkcie a*), gdy istnieje granica $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ i jest ona liczbą. Granicę tę oznaczamy przez $f'(a)$ i nazywamy ją *pochodną funkcji f w punkcie a*.

Można także mówić o jednostronnej pochodnej w punkcie $a \in I$. Stosownie do kontekstu, stosuje się notacje:

$$f'_+(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \qquad f'_-(a) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

(o ile tylko powyższa granica istnieje). Wielkości $f'_+(a)$ i $f'_-(a)$ nazywamy *prawostronną* i (odpowiednio) *lewostronną pochodną funkcji f w punkcie a*. Dotyczy to w szczególności krańców przedziału (dla lewego krańca możemy mówić o pochodnej prawostronnej, a dla prawego o lewostronnej).

W analogiczny sposób określa się pochodną w punkcie (oraz pochodną jednostronną w punkcie) dla funkcji określonej na zbiorze będącym sumą (dowolnie wielu) otwartych przedziałów lub sumą skończenie wielu dowolnych (niezdegenerowanych) przedziałów. Jeśli A jest dowolnym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}$, o punkcie $a \in A$ powiemy, że jest:

- *punktem wewnętrznym* zbioru A, gdy istnieje liczba $\varepsilon > 0$, taka że $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset A$;

[*2)] Gdy $a \in \{-\infty, \infty\}$, granicę jednostronną, jaka pojawia się gdziekolwiek w wypowiedzi twierdzenia, należy zastąpić przez $\lim_{x\to a} f(x)$.

© Piotr Niemiec

- *punktem brzegowym* zbioru A, gdy nie jest punktem wewnętrznym tego zbioru.

Dla punktu wewnętrznego zbioru A możemy mówić o pochodnej w tym punkcie, a dla jego punktu brzegowego jedynie o pochodnej jednostronnej (o ile zbiór A jest sumą skończenie wielu przedziałów).

Mówimy, że funkcja $f\colon A \to \mathbb{R}$ (gdzie zbiór A jest sumą dowolnie wielu otwartych przedziałów lub sumą skończenie wielu dowolnych przedziałów) jest *różniczkowalna*, gdy jest różniczkowalna w każdym punkcie wewnętrznym zbioru A i ponadto gdy ma stosowną pochodną jednostronną (będącą liczbą) w każdym jego punkcie brzegowym. Gdy f jest funkcją różniczkowalną, poprawnie jest określona funkcja $f'\colon A \to \mathbb{R}$, którą nazywamy *pochodną* funkcji f.

Podamy teraz kilka podstawowych własności pochodnej.

7.2 Obserwacja.
Jeśli a jest punktem wewnętrznym zbioru A, to funkcja $f\colon A \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy f ma obie pochodne jednostronne w tym punkcie oraz $f'_+(a) = f'_-(a) \in \mathbb{R}$ (wtedy $f'(a) = f'_\pm(a)$).

7.3 Obserwacja. (Warunek konieczny na istnienie pochodnej)
Jeśli a jest punktem wewnętrznym zbioru A, a funkcja $f\colon A \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie a, to jest ciągła w punkcie a.

Podobnie, jeśli f ma pochodną lewostronną (odp. prawostronną) w punkcie a, która jest liczbą, to jest w tym punkcie lewostronnie (odp. prawostronnie) ciągła.

W szczególności, funkcja różniczkowalna jest ciągła.

7.4 Twierdzenie.
Jeśli f i g są funkcjami różniczkowalnymi w punkcie wewnętrznym a ich dziedzin, to również poniższe funkcje są różniczkowalne w punkcie a:

- (**liniowość różniczkowania**) $\alpha f + \beta g$, *gdzie* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *to dowolne stałe, przy czym:* $(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$;
- (**pochodna iloczynu**) fg, *przy czym:* $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;
- (**pochodna ilorazu**) $\frac{f}{g}$, *o ile* $g(a) \neq 0$, *przy czym:* $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.

Analogiczne wzory zachodzą dla pochodnych jednostronnych.

W szczególności:

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

dla dowolnego parametru $n \in \mathbb{N}_1$ (z konwencją, że $0^0 = 1$).

7.5 Przykład.

(A) Niech $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$ to stałe parametry. Policzmy pochodną funkcji f:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a(x+h)^2 + b(x+h) + c - ax^2 - bx - c}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{2axh + ah^2 + bh}{h} = \lim_{h\to 0} (2ax + b + ah) = 2ax + b.$$

Tym samym $(x^2)' = 2x$, $(x)' = 1$ oraz $(1)' = 0$.

(B) Sprawdźmy, w jakich punktach pochodną ma funkcja $g(x) = |x|$. Dla $x > 0$ również wartość $x + h$ jest od pewnego momentu dodatnia (przy $h \to 0$), więc $g'(x) = 1$ dla dodatnich x. Dla $x < 0$ z kolei wartość $x + h$

© Piotr Niemiec

jest od pewnego momentu ujemna (przy $h \to 0$), co daje $g'(x) = -1$ dla ujemnych x. Natomiast $g'(0)$ nie istnieje, gdyż: $g'_+(0) = 1$ oraz $g'_-(0) = -1$. Tym samym $g'(x)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $x \neq 0$, i wtedy $g'(x) = \operatorname{sgn} x = \frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x}$.

(C) A teraz sprawdźmy, czy funkcja $h(x) = x|x|$ jest różniczkowalna. Dla $x \neq 0$ możemy zastosować wzór na pochodną iloczynu, przyjmując $f(x) = x$ oraz $g(x) = |x|$ (zob. przykłady (A) i (B) powyżej): $h'(x) = (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 1 \cdot |x| + x \cdot \frac{|x|}{x} = 2|x|$. Natomiast dla $x = 0$ pochodną wyznaczamy ręcznie: $h'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{h|h|}{h} = \lim_{h\to 0} |h| = 0$, czyli także w tym przypadku $h'(0) = 2|0|$, co pokazuje, że funkcja h jest różniczkowalna oraz $h'(x) = 2|x|$ (dla wszelkich $x \in \mathbb{R}$).

7.6 Twierdzenie. (Pochodna funkcji złożonej)
Jeśli $h(x) = g(f(x))$, a punkt $a \in \mathbb{R}$ jest taki, że funkcja f ma pochodną w punkcie a, natomiast funkcja g ma pochodną w punkcie $f(a)$, to funkcja h ma pochodną w punkcie a oraz $h'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$. Innymi słowy:

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

7.7 Twierdzenie. (Pochodna funkcji odwrotnej)
Jeśli funkcja f jest różnowartościowa i ciągła oraz jest różniczkowalna w punkcie a, to jej funkcja odwrotna g jest różniczkowalna w punkcie $b \overset{\text{def}}{=} f(a)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(a) \neq 0$. Ponadto, $g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$, o ile $f'(a) \neq 0$. Innymi słowy:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

7.8 Przykład.

(A) (**Interpretacja geometryczna pochodnej**) Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie wewnętrznym a swojej dziedziny, to istnieje styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(a, f(a))$. Jej równanie ma wzór $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ (tak więc pochodna w punkcie a to współczynnik kierunkowy tej stycznej). Prosta ta może być postrzegana jako „granica" siecznych do wykresu funkcji f wyznaczonych przez ww. punkt oraz punkt $(b, f(b))$, gdzie argument $b \neq a$ coraz bardziej zbliża się do a.

(B) (**Interpretacja fizyczna pochodnej**) Jeśli $s(t)$ oznacza drogę, jaką pokonało pewne ciało po czasie t, to pochodna tej funkcji w punkcie t to prędkość tego ciała w chwili t: $v(t) = s'(t)$. Jeśli funkcja prędkości v jest różniczkowalna w punkcie t, to $v'(t)$ oznacza przyspieszenie obserwowanego ciała w chwili t.

Podstawowe wzory na pochodną zebrane są w poniższej tabeli. (Dla funkcji potęgowych o wykładniku wymiernym niecałkowitym oraz funkcji logarytmicznych i cyklometrycznych wzory te wyprowadza się z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej, a dla funkcji potęgowej o wykładniku niewymiernym korzysta się z twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej). W trzeciej kolumnie wymieniono wszystkie przypadki, gdy dziedzina pochodnej jest istotnie mniejsza od dziedziny wyjściowej funkcji. Przy wyznaczeniu pochodnych funkcji wykładniczych oraz trygonometrycznych używa się następujących dwóch (klasycznych) wzorów:

- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$; oraz
- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

(Wyprzedzając nieco materiał tego skryptu, warto już teraz podkreślić, że wzory te **nie są** konsekwencją reguły de l'Hospitala [zob. Tw. 7.15], gdyż aby wyznaczyć pochodne funkcji wykładniczych oraz trygonometrycznych, najpierw trzeba obliczyć te właśnie granice. W nowoczesnej analizie funkcję wykładniczą o podstawie e oraz funkcje sin i cos *definiuje się* szeregami podanymi w Tw. 7.26, dla których powyższe granice łatwo wyznaczyć. Badając w ten sposób wprowadzone funkcje, sprawdza się, że pierwsza z nich jest wykładnicza, a pozostałe dwie to funkcje znane z geometrii).

© Piotr Niemiec

$f(x)$	$f'(x)$	Uwagi
c	0	$c \in \mathbb{R}$ stała
x^p	px^{p-1}	$p \in \mathbb{R},\ 0^0 = 1$ $p \in (0,1) \implies x \neq 0$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \neq 0$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	
a^x	$a^x \ln a$	$a > 0$
e^x	e^x	$\mathrm{e} = 2,7182818284\ldots$
$\ln\lvert x\rvert,\ \ln x$	$\frac{1}{x}$	
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$a > 0,\ a \neq 1$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	
$\operatorname{arcsin} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \notin \{-1,1\}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \notin \{-1,1\}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	
$\lvert x\rvert$	$\frac{x}{\lvert x\rvert} = \operatorname{sgn} x$	$x \neq 0$

7.9 Przykład.
Pokażemy teraz, jak obliczać pochodną z funkcji, w której wzorze występuje potęga z argumentem funkcji zarówno w jej podstawie, jak i w wykładniku. Dla przykładu, rozważmy funkcję $h(x) = (x+1)^{x^2+1}$. W sytuacji, gdy i podstawa, i wykładnik potęgi zależą od argumentu, założenia, jakie wymusza sama ta potęga, to dodatniość podstawy. Tym samym dziedziną naszej funkcji jest zbiór $D = (-1, \infty)$. Aby wyznaczyć $h'(x)$, zauważamy, że $h(x) = \mathrm{e}^{(x^2+1)\ln(x+1)}$, więc z twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej otrzymujemy:

$$h'(x) = \left(\mathrm{e}^{(x^2+1)\ln(x+1)}\right)' = \mathrm{e}^{(x^2+1)\ln(x+1)} \cdot ((x^2+1)\ln(x+1))' = h(x) \cdot \left(2x\ln(x+1) + (x^2+1)\cdot\frac{1}{x+1}\right)$$

i pozostaje już tylko kosmetyka otrzymanego wzoru, co pozostawiamy Czytelnikowi. (Dziedzina pochodnej jest identyczna z dziedziną funkcji h).

7.10 Twierdzenie.
Niech A będzie dowolnym podzbiorem zbioru $\mathbb{R}$, liczby $a, b \in \mathbb{R}$ będą takie, że $a < b$ i $[a,b] \subset A$, i niech $f\colon A \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją, która jest prawostronnie ciągła w punkcie a, lewostronnie ciągła w b oraz różniczkowalna w każdym punkcie przedziału (a,b).

(a) (***Twierdzenie Rolle'a***) *Jeśli $f(a) = f(b)$, to istnieje punkt $c \in (a,b)$, taki że $f'(c) = 0$.*

(b) (***Twierdzenie Lagrange'a; Twierdzenie o wartości średniej***) *Istnieje liczba $c \in (a,b)$, taka że $f'(c) = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}$.*

(c) *Funkcja f jest słabo rosnąca (odp. słabo malejąca) w przedziale $[a,b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(x) \geq 0$ (odp. $f'(x) \leq 0$) dla wszelkich $x \in (a,b)$.*

(d) *Funkcja f jest stała w przedziale $[a,b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(x) = 0$ dla wszelkich $x \in (a,b)$.*

(e) *Funkcja f jest ściśle rosnąca (odp. ściśle malejąca) w przedziale $[a,b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(x) \geq 0$ (odp. $f'(x) \leq 0$) dla wszelkich $x \in (a,b)$ oraz zbiór $\{x \in (a,b)\colon\ f'(x) = 0\}$ nie zawiera żadnego niezdegenerowanego przedziału.*

© Piotr Niemiec

Poniższa konsekwencja punktu (d) Tw. 7.10 będzie mieć fundamentalne znaczenie dla rachunku całkowego.

7.11 Wniosek.
Jeśli f i g to funkcje różniczkowalne w przedziale I oraz $f'(x) = g'(x)$ dla wszelkich $x \in I$, to $f(x) = g(x) + c$, gdzie $c \in \mathbb{R}$ to pewna stała.

Jak pokazuje Tw. 7.10, rachunek różniczkowy przydaje się do wyznaczenia przedziałów monotoniczności funkcji. Innym zagadnieniem, do którego również świetnie się nadaje, jest wyznaczanie wartości największej i najmniejszej funkcji lub — ogólniej — jej ekstremów.

7.12 Definicja.
Niech f będzie funkcją, której dziedzina zawiera przedział otwarty I. Punkt $a \in I$ nazywamy [*silnym*] *maksimum lokalnym* (odp. [*silnym*] *minimum lokalnym*) funkcji f, jeśli istnieje liczba $\varepsilon > 0$, taka że $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset I$ oraz:

$$\forall x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \setminus \{a\}\colon \ f(x) < f(a) \qquad (\text{odp. } \forall x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \setminus \{a\}\colon \ f(x) > f(a)).$$

Jeśli powyższy warunek zachodzi z nierównością słabą (czyli „$\leq$” zamiast „$<$” lub „$\geq$” zamiast „$>$”), punkt a nazywamy *słabym maksimum lokalnym* (odp. *słabym minimum lokalnym*) funkcji f. Gdy stosowna nierówność zachodzi dla wszelkich $x \neq a$ z dziedziny funkcji f, w powyższym nazewnictwie przymiotnik *lokalne* można zastąpić słowem *globalne*.

[*Silne/słabe*] *ekstremum lokalne/globalne* funkcji to takież maksimum lub minimum. Oczywiście silne ekstremum jest słabym, ale nie odwrotnie.

7.13 Twierdzenie.

(a) (***Warunek konieczny do bycia ekstremum***) *Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie wewnętrznym a swojej dziedziny i ma w tym punkcie słabe ekstremum lokalne, to $f'(a) = 0$.*

(b) (***Warunek wystarczający do bycia maksimum***) *Jeśli funkcja f jest ciągła w punkcie wewnętrznym a swojej dziedziny oraz różniczkowalna w pobliżu tego punktu we wszystkich punktach $x \neq a$ oraz $f'(x) > 0$ dla $x < a$ i $f'(x) < 0$ dla $x > a$ (odp. $f'(x) \geq 0$ dla $x < a$ i $f'(x) \leq 0$ dla $x > a$) w pobliżu punktu a, to f ma maksimum lokalne (odp. słabe maksimum lokalne) w punkcie a.*

(c) (***Warunek wystarczający do bycia minimum***) *Jeśli funkcja f jest ciągła w punkcie wewnętrznym a swojej dziedziny oraz różniczkowalna w pobliżu tego punktu we wszystkich punktach $x \neq a$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x < a$ i $f'(x) > 0$ dla $x > a$ (odp. $f'(x) \leq 0$ dla $x < a$ i $f'(x) \geq 0$ dla $x > a$) w pobliżu punktu a, to f ma minimum lokalne (odp. słabe minimum lokalne) w punkcie a.*

Punkt krytyczny funkcji f to dowolny punkt wewnętrzny a jej dziedziny, w którym funkcja ta jest różniczkowalna i $f'(a) = 0$. Część (a) powyższego twierdzenia orzeka, że punkty „podejrzane” o ekstremum (czyli takie, w których funkcja może mieć słabe ekstremum lokalne) to jedynie te punkty wewnętrzne dziedziny funkcji, w których funkcja jest nieróżniczkowalna, oraz punkty krytyczne.

7.14 Przykład.
Wyznaczymy największą i najmniejszą wartość funkcji f określonej następująco: $f(1) = 1$ oraz $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x+x^2-x^3}}$ dla takich $x \neq 1$, w których ów wzór ma sens. Przede wszystkim zacznijmy od wyznaczenia dziedziny tej funkcji. Podany wzór wymusza warunki: $1 - x^2 \geq 0$ oraz $x^3 - x^2 + x - 1 < 0$ (lub, równoważnie, $(x^2+1)(x-1) < 0$), czyli $x \in [-1,1] \cap (-\infty, 1) = [-1, 1)$. Tym samym dziedzina funkcji f to zbiór $D = [-1, 1]$. Aby upewnić się, czy może być tak, że wartość najmniejsza lub największa tej funkcji nie istnieje, sprawdźmy ciągłość funkcji f. Jako że na zbiorze $D \cap (-\infty, 1)$ funkcja jest dana wzorem ciągłym, trzeba jedynie sprawdzić ciągłość w punkcie 1. W tym celu uprośćmy wzór funkcji: $f(x) = \sqrt{\frac{(1-x)(1+x)}{(1-x)(1+x^2)}} = \sqrt{\frac{1+x}{1+x^2}}$ (dla $x \in D \setminus \{1\}$). W takim razie:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \sqrt{\frac{1+x}{1+x^2}} = 1 = f(1),$$

© Piotr Niemiec

czyli funkcja f jest ciągła. Tym samym funkcja ta wyraża się pojedynczym wzorem: $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1+x^2}}$ (dla wszelkich $x \in D$). Z punktu (a) Tw. 6.6 (str. 23) wnioskujemy, że funkcja ta osiąga zarówno wartość najmniejszą, jak i największą. Jako że (jak łatwo sprawdzić) funkcja f jest różniczkowalna w $(-1,1)$, Tw. 7.13 implikuje, że jeśli $p \in D$ jest argumentem, w którym f osiąga wartość (globalnie) największą lub najmmniejszą, to albo p jest krańcem dziedziny, albo pochodna funkcji f w punkcie p się zeruje. Zatem wystarczy znaleźć wszystkie punkty krytyczne funkcji f oraz sprawdzić jej wartości we wszystkich tych punktach oraz na krańcach dziedziny.

Aby wyznaczyć punkty krytyczne, obliczamy pochodną funkcji (dla $x \in (-1,1)$), po czym przyrównujemy ją do zera:

$$f'(x) = \frac{\frac{(1+x^2)-2(1+x)x}{(1+x^2)^2}}{2\sqrt{\frac{1+x}{1+x^2}}} = \frac{1-2x-x^2}{2(1+x^2)^2 f(x)},$$

więc: $f'(x) = 0 \iff x^2 + 2x - 1 = 0$ oraz $x \in (-1,1)$. To równanie kwadratowe ma tylko jedno rozwiązanie w podanym przedziale: $x_o = \sqrt{2}-1$. Tym samym funkcja f ma tylko jeden punkt krytyczny. Pozostaje wyznaczyć wartości na krańcach przedziału oraz w x_o: $f(-1) = 0$, $f(1) = 1$ oraz

$$f(\sqrt{2}-1) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{1+(\sqrt{2}-1)^2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}} \quad > 1.$$

Tak więc wartość najmniejsza funkcji f to 0, a największa to wartość f w punkcie x_o.

Podamy teraz jedno z najpotężniejszych narzędzi do liczenia granic (zarówno funkcji, jak i ciągów):

7.15 Twierdzenie. (Reguła de l'Hospitala)
Niech f i g będą funkcjami różniczkowalnymi w przedziale otwartym I, a wielkość $a \in \bar{\mathbb{R}}$ będzie punktem skupienia tego przedziału. Załóżmy ponadto, że $g'(x) \neq 0$ dla wszystkich x w pobliżu punktu a oraz że istnieje (w $\mathbb{R}$) granica $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Jeśli obie granice $\lim_{x\to a} f(x)$ oraz $\lim_{x\to a} g(x)$ istnieją i są obie równe 0 lub obie są niewłaściwe, to istnieje granica $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ i zachodzi równość:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Analogiczna własność zachodzi dla jednostronnych punktów skupienia i granic jednostronnych.

7.16 Przykład.
Wyznaczmy granicę ciągu $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$. W tym celu rozważamy funkcję $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$, gdzie $x \in (-1,0)\cup(0,\infty)$. Zauważmy, że 0 jest punktem skupienia dziedziny funkcji f oraz że $f(x) = \mathrm{e}^{(\ln(1+x))/x}$. Aby wyliczyć $\lim_{x\to 0} f(x)$, wyznaczymy najpierw — korzystając z reguły de l'Hospitala — granicę samego wykładnika z ostatniego wzoru (bez trudu sprawdza się, że wszystkie założenia Tw. 7.15 są spełnione):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1.$$

Tym samym $\lim_{x\to 0} f(x) = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$. W takim razie, skoro f jest funkcją ciągłą oraz $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, otrzymujemy, że również $\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}) = \mathrm{e}$, ale $f(\frac{1}{n}) = a_n$, czyli ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dąży do e.

Szczególnym przykładem zastosowania reguły de l'Hospitala jest wygodne kryterium na istnienie pochodnej w punkcie:

7.17 Wniosek.
Jeśli f jest funkcją ciągłą w punkcie a i różniczkowalną w punktach $x < a$ (odp. $x > a$) oraz istnieje granica $\lim_{x\to a^-} f'(x)$ (odp. $\lim_{x\to a^+} f'(x)$), to w punkcie a funkcja f ma pochodną lewostronną (odp. prawostronną) oraz $f'_-(a) = \lim_{x\to a^-} f'(x)$ (odp. $f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} f'(x)$).

© Piotr Niemiec

W szczególności, jeśli a jest punktem wewnętrznym dziedziny funkcji f, funkcja f jest ciągła w punkcie a i różniczkowalna w punktach różnych od a w pobliżu a oraz istnieje ***liczbowa*** *granica $\lim_{x\to a} f'(x)$, to funkcja f jest różniczkowalna w punkcie a, a jej pochodna jest funkcją ciągłą w punkcie a.*

Omówimy teraz pochodne wyższych rzędów.

7.18 Definicja.
Mówimy, że funkcja f jest *dwukrotnie różniczkowalna w punkcie a*, gdy jest różniczkowalna w każdym punkcie pewnego przedziału otwartego zawierającego punkt a, a jej pochodna jest różniczkowalna w punkcie a. W tej sytuacji pochodną funkcji f' w punkcie a oznaczamy przez $f''(a)$ i nazywamy *drugą pochodną funkcji f w punkcie a*. O funkcji f powiemy, że jest *dwukrotnie różniczkowalna* w pewnym przedziale (lub, ogólniej, w zbiorze będącym sumą dowolnie wielu przedziałów otwartych), gdy jest dwukrotnie różniczkowalna w każdym punkcie tego zbioru. Mówimy wtedy o funkcji $x \mapsto f''(x)$, którą nazywamy *drugą pochodną* (lub: *pochodną drugiego rzędu*; *pochodną rzędu 2*) funkcji f.

Ogólniej, jeśli $n \geq 3$, o funkcji f powiemy, że jest *n-krotnie różniczkowalna w punkcie a*, gdy jest funkcją $(n-1)$-krotnie różniczkowalną w pewnym przedziale otwartym zawierającym punkt a, a jej pochodna rzędu $n-1$ jest różniczkowalna w punkcie a. Wtedy pochodną w punkcie a pochodnej rzędu $n-1$ funkcji f oznaczamy przez $f^{(n)}(a)$ i nazywamy *pochodną rzędu n funkcji f w punkcie a*. (Dla $n = 3$ można także pisać $f'''(a)$ zamiast $f^{(3)}(a)$. Podobnie, zamiast $f'(a)$ oraz $f''(a)$ można pisać, odpowiednio, $f^{(1)}(a)$ i $f^{(2)}(a)$). Jeśli funkcja f jest n-krotnie różniczkowalna w każdym punkcie pewnego przedziału otwartego, mówimy o niej, że jest *n-krotnie różniczkowalna* (w tym zbiorze), a funkcję $x \mapsto f^{(n)}(x)$ nazywamy *n-tą pochodną funkcji f* (lub: *pochodną rzędu n funkcji f*). Dodatkowo, dla uproszczenia, przyjmuje się, że $f^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} f$.

Mówimy, że funkcja jest *klasy C^k* (gdzie $k \in \mathbb{N}_1$), gdy jest to funkcja k-krotnie różniczkowalna, a jej pochodna rzędu k jest funkcją ciągłą. Jeśli funkcja ma pochodne wszystkich rzędów (czyli jest k-krotnie różniczkowalna dla wszelkich $k \in \mathbb{N}_1$), nazywamy ją funkcją *klasy C^∞* lub funkcją *gładką*.

7.19 Twierdzenie.
Wielomiany, funkcje potęgowe (dla wykładnika niecałkowitego na zbiorze liczb dodatnich, a dla wykładnika całkowitego na zbiorze liczb niezerowych), funkcje wykładnicze, logarytmiczne, trygonometryczne oraz cyklometryczne (na przedziałach otwartych) są funkcjami gładkimi. Suma, różnica, iloczyn, iloraz (tam, gdzie mianownik się nie zeruje) oraz potęga (tam, gdzie podstawa jest dodatnia) funkcji gładkich jest funkcją gładką.

7.20 Przykład.
Rozważmy funkcję $f(x) = x|x|$. Z punktu (C) Prz. 7.5 wiemy, że f jest funkcją różniczkowalną oraz $f'(x) = 2|x|$. Tym samym f jest funkcją klasy C^1, ale nie C^2 (bo f' nie ma pochodnej w 0). Łatwo sprawdzić, że zarazem funkcja ta jest gładka na zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Pochodne wyższych rzędów przydają się do testowania punktów krytycznych w celu rozstrzygnięcia, czy są w nich ekstrema lokalne:

7.21 Twierdzenie.
Jeśli f jest funkcją wielokrotnie różniczkowalną, a jest punktem wewnętrznym jej dziedziny, k oznacza najmniejszą liczbą całkowitą dodatnią, taką że $f^{(k)}(a) \neq 0$, przy czym f jest $k+1$-krotnie różniczkowalna, to

- *jeśli k jest liczbą nieparzystą, to f nie ma słabego ekstremum lokalnego w punkcie a;*
- *jeśli k jest liczbą parzystą i $f^{(k)}(a) > 0$, to f ma silne minimum lokalne w punkcie a;*
- *jeśli k jest liczbą parzystą i $f^{(k)}(a) < 0$, to f ma silne maksimum lokalne w punkcie a.*

Omówimy teraz klasyczny sposób przybliżania wartości funkcji za pomocą kolejnych jej pochodnych.

© Piotr Niemiec

7.22 Definicja.
Załóżmy, że f jest funkcją k-krotnie różniczkowalną w punkcie a (gdzie $k \in \mathbb{N}_1$). *Wielomianem Taylora stopnia k funkcji f w punkcie a* nazywamy funkcję $T_k = T_k(f,a)$ daną wzorem

$$T_k(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3 + \ldots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^k.$$

Resztą Peano rzędu k funkcji f w punkcie a nazywamy funkcję $R_k = R_k(f,a)$ daną wzorem $R_k(x) = f(x) - T_k(x)$.
Z samej definicji reszty Peano wynika, że:

$$f(x) = f(a) + \sum_{j=1}^{k} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j + R_k(x). \tag{7:1}$$

Powyższy wzór nazywany jest *wzorem Taylora (o środku w a)*. W przypadku, gdy $a = 0$, używa się także terminu *wzór Maclaurina*.

We wzorze Taylora kluczowe znaczenie ma następujące twierdzenie:

7.23 Twierdzenie. (Twierdzenie o wzorze Taylora)
Niech f będzie funkcją co najmniej $k+1$-krotnie różniczkowalną w przedziale otwartym I (gdzie $k \in \mathbb{N}_1$) i niech $a \in I$. Wtedy, dla $R_k = R_k(f,a)$:

(a) $\lim_{x\to a} \frac{R_k(x)}{(x-a)^k} = 0$;

(b) (***reszta Lagrange'a***) *dla każdego punktu $x \in I \setminus \{a\}$ istnieje punkt $c \in I$ leżący między a i x, taki że $R_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}$.*

7.24 Przykład.
Stosując wzór Taylora, wskażemy liczbę wymierną, która przybliża liczbę $\sqrt[3]{1024}$ z dokładnością do 0,00001. W tym celu wyznaczymy wielomian Taylora dla funkcji $f(x) = \sqrt[3]{x}$ o środku w $a = 1000$. Rozpoczynamy od wzorów dla kilku początkowych pochodnych oraz od wartości tych funkcji w punkcie a: $f(a) = 10$; $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$, więc $f'(a) = 1/300$; $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$, więc $f''(a) = -1/450000$; $f'''(x) = \frac{10}{27}x^{-8/3}$. Z Twierdzenia o wzorze Taylora dla $k = 2$ wynika, że dla $x = 1024$ istnieje punkt $c \in (1000, 1024)$, taki że reszta Peano R_2 ma wartość $R_2 = \frac{f'''(c)}{3!}(x-a)^3$, czyli

$$|R_2| = \frac{5}{81c^{8/3}} \cdot 24^3 \leq \frac{2560}{3 \cdot 1000^{8/3}} < \frac{854}{10^8} = 0,00000854 < 0,00001$$

i tym samym $|f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2| = |R_2| < 0,00001$, więc szukaną liczbą wymierną (tj. przybliżającą liczbę $\sqrt[3]{1024} = f(x)$) jest liczba $f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 = 10 + \frac{24}{300} - \frac{24^2}{900000} = 10 + \frac{8}{100} - \frac{64}{100000} = 10,07936$. Jeśli na kalkulatorze wykonamy $\sqrt[3]{1024}$, zobaczymy wynik $10,079683991589853181376848582 26\ldots$, a więc błąd przybliżenia rzeczywiście mieści się w oczekiwanym zakresie.

*7.25 **Uwaga.***
Chociaż przy ustalonym rzędzie k wielomian Taylora przybliża wartość danej funkcji — tym lepiej, im bliżej jest argument od środka wzoru Taylora — nierzadko jest tak, że *szereg Taylora* funkcji gładkiej f, czyli szereg postaci $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$, nie jest zbieżny do $f(x)$. Szereg ten może zarówno być rozbieżny, jak i zbieżny do innej wartości niż $f(x)$. Poniżej podajemy (bez dowodu) przykład funkcji, dla której ów szereg Taylora (o środku w zerze) jest zbieżny w każdym punkcie (tzn. dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \in \mathbb{R}$), ale tylko dla $x = 0$ jego suma pokrywa się z wartością tej funkcji w tym punkcie (szereg Taylora o środku w a zawsze dla argumentu $x = a$ zbiega do $f(a)$). Funkcje gładkie takie, że dla dowolnego punktu a dziedziny szereg Taylora o środku w a jest zbieżny w pewnym pobliżu punktu a do wartości danej funkcji, nazywa się *analitycznymi*. Wszystkie funkcje

© Piotr Niemiec

dane jednym wzorem, opisanym w Tw. 6.2 (str. 22), w którym nie występuje wartość bezwzględna, są funkcjami analitycznymi (o ile dziedzina jest wyznaczona w taki sposób, że wyrażenia pod pierwiastkami oraz podstawy potęg o wykładnikach niecałkowitych są dodatnie).

Określmy funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$ dla $x \neq 0$ oraz $f(0) = 0$. Dowodzi się (niezbyt trudno, ale mimo to tutaj dowód pomijamy), że f jest funkcją gładką, taką że $f^{(k)}(0) = 0$ dla dowolnego rzędu $k \geq 1$. Tym samym szereg Taylora tej funkcji o środku w zerze to szereg potęgowy postaci $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{0}{k!} x^k$, więc w każdym punkcie x jego suma to 0. A funkcja f zeruje się tylko w zerze.

Chociaż, jak wspomniano w powyższej uwadze, zbieżność szeregu Taylora funkcji gładkiej lokalnie do tej funkcji nie jest własnością przysługującą wszystkim funkcjom gładkim, przysługuje ona wszystkim typowym funkcjom, jakie rozważa się na podstawowym kursie analizy matematycznej. Mimo to wyznaczenie pełnego szeregu Taylora w wielu przypadkach jest zadaniem niezwykle trudnym, a często wręcz niewykonalnym. Poniżej podajemy pełne szeregi Taylora dla 5 funkcji.

7.26 Twierdzenie.
W każdym z poniższych przykładów wskazany szereg potęgowy jest szeregiem Taylora o środku w zerze podanej funkcji, zbieżnych do wartości tej funkcji w podanym obok zbiorze:

- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1,1)$;
- $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$;
- $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$;
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}$;
- $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \quad x \in (-1,1)$.

Poniższe twierdzenie przydaje się do wyznaczania dokładnych wartości sum pewnych szeregów zbieżnych.

7.27 Twierdzenie. (Twierdzenie o różniczkowaniu szeregu potęgowego)
Jeśli szereg potęgowy postaci $\sum_n a_n(x-x_o)^n$ ma dodatni promień zbieżności R, to funkcja $f\colon (x_o-R, x_o+R) \to \mathbb{R}$ zadana tym szeregiem, czyli $f(x) = \sum_n a_n(x-x_o)^n$ (dla $x \in (x_o-R, x_o+R)$), jest gładka i jej pochodna wyraża się wzorem:

$$f'(x) = \sum_n n a_n (x-x_o)^{n-1}.$$

7.28 Przykład.
Obliczymy sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2025^n}$ z Prz. 5.15 (str. 19) bardziej standardową metodą, tj. przez zastosowanie szeregów potęgowych. Aby to zrobić, wprowadźmy funkcję $f(x) = \frac{1}{1-x}$, określoną dla $x \in (-1,1)$. Zgodnie z Tw. 7.26, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$. W takim razie, z Tw. 7.27 wynika, że $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ dla $x \in (-1,1)$. Podstawiając do tego ostatniego wzoru $x = 1/2025$ i biorąc pod uwagę to, że $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, otrzymujemy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2025^n} = \frac{1}{2025} \sum_{n=1}^{\infty} n(1/2025)^{n-1} = \frac{1}{2025} f'(1/2025) = \frac{1}{2025} \cdot \frac{1}{(1-1/2025)^2} = \frac{2025}{2024^2}.$$

7.1 Wypukłość i wklęsłość

Aby narysować wykres funkcji zadanej konkretnym wzorem, musimy wiedzieć, w jakich przedziałach funkcja jest rosnąca, w jakich malejąca oraz w jakich punktach ma ekstrema lokalne. Te informacje nie są jednak wystarczające do tego, by rozeznać, jaki kształt ma krzywa (ilustrująca wykres danej funkcji) w konkretnych przedziałach. Dokładniej: w których miejscach jest ona „wypukła od góry” (jak parabola z ramionami w górę), a w których „wypukła od dołu” (jak parabola z ramionami w dół). Precyzyjnie takie cechy wykresu opisują pojęcia wypukłości i wklęsłości funkcji:

© Piotr Niemiec

7.29 Definicja.
Przypomnijmy, że podzbiór F płaszczyzny (figura płaska) jest *wypukły*, jeśli zawiera wszystkie punkty odcinków łączących dowolne pary punktów tego zbioru.

Mówimy, że funkcja $f\colon I \to \mathbb{R}$, określona **na przedziale** $I \subset \mathbb{R}$ jest *wypukła* (w zbiorze I), jeśli jej *nadwykres*, czyli zbiór $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in I,\ f(x) \le y\}$, jest zbiorem wypukłym. O funkcji f mówimy, że jest *wklęsła* (w zbiorze I), gdy jej *podwykres*, czyli zbiór $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in I,\ y \le f(x)\}$, jest zbiorem wypukłym.

Jeśli $a \in I$ jest takim punktem wewnętrznym przedziału I, że dla pewnej liczby $\varepsilon > 0$ funkcja ciągła f jest wypukła w zbiorze $(a-\varepsilon, a)$, a wklęsła w $(a, a+\varepsilon)$, lub odwrotnie (tj. funkcja f jest wklęsła w $(a-\varepsilon, a)$, a wypukła w $(a, a+\varepsilon)$), to punkt a nazywamy *punktem przegięcia* funkcji f.

Uwaga: Funkcja, której dziedziną nie jest przedział, nie jest ani wypukła, ani wklęsła. O punkcie przegięcia możemy mówić jedynie wtedy, gdy dana funkcja jest ciągła w owym punkcie.

7.30 Przykład.
Jeśli $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, to f jest funkcją wypukłą (w całym zbiorze $\mathbb{R}$) dla $a > 0$, a wklęsłą dla $a < 0$.

7.31 Uwaga.
Jeśli funkcja w pewnym przedziale jest wypukła, fragment jej wykresu odpowiadający temu przedziałowi powinno się rysować (o ile jest to odręczny rysunek), trzymając rękę nad wykresem; z kolei te części wykresu, które odpowiadają przedziałom, w których funkcja jest wklęsła, powinno się rysować, trzymając rękę pod wykresem. Zatem w punktach przegięcia układ ręki powinien zostać zmieniony, co w jakimś stopniu odzwierciedla nazwę tego punktu.

7.32 Twierdzenie.
Niech $f\colon I \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją określoną na przedziale I.

(A) *Funkcja f jest wypukła w I wtedy i tylko wtedy, gdy:*

$$\forall x, y \in I\ \forall t \in [0,1]\colon\ f((1-t)x + ty) \le (1-t)f(x) + tf(y).$$

(B) *Funkcja f jest wklęsła w I wtedy i tylko wtedy, gdy:*

$$\forall x, y \in I\ \forall t \in [0,1]\colon\ f((1-t)x + ty) \ge (1-t)f(x) + tf(y).$$

(C) *Funkcja f jest zarówno wypukła, jak i wklęsła wtedy i tylko wtedy, gdy jest funkcją stałą lub wielomianem stopnia 1.*

(D) *Jeśli funkcja f jest wypukła lub wklęsła, to jest ciągła w każdym punkcie wewnętrznym przedziału I.*

(E) *Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w każdym punkcie wewnętrznym przedziału I oraz ciągła w tych jego krańcach, które należą do I, to:*

- *funkcja f jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy f' jest funkcją słabo rosnącą;*
- *funkcja f jest wklęsła wtedy i tylko wtedy, gdy f' jest funkcją słabo malejącą.*

(F) *Jeśli funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalna w każdym punkcie wewnętrznym przedziału I oraz ciągła w tych jego krańcach, które należą do I, to:*

- *funkcja f jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy $f''(x) \ge 0$ dla wszelkich punktów wewnętrznych x przedziału I;*
- *funkcja f jest wklęsła wtedy i tylko wtedy, gdy $f''(x) \le 0$ dla wszelkich punktów wewnętrznych x przedziału I;*
- *jeśli punkt wewnętrzny a przedziału I jest punktem przegięcia funkcji f, to $f''(a) = 0$;*

© Piotr Niemiec

- *jeśli druga pochodna zmienia znak w pobliżu punktu wewnętrznego a przedziału I (tzn. jeśli w pobliżu a: $f''(x) > 0$ dla $x < a$ oraz $f''(x) < 0$ dla $x > a$ lub odwrotnie), to a jest punktem przegięcia funkcji f.*

(G) *Jeśli funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalna w pobliżu punktu wewnętrznego a przedziału I, z pominięciem tego punktu, i* ***zarazem różniczkowalna w punkcie a*** *oraz druga pochodna funkcji f jest nieujemna (odp. niedodatnia) w pobliżu punktu a [z pominięciem tego punktu], to funkcja f jest wypukła (odp. wklęsła) w pobliżu tego punktu [wliczając ten punkt].*

7.2 Asymptoty funkcji

Omówiliśmy już monotoniczność oraz wypukłość i wklęsłość funkcji. Do skompletowania podstawowych technik badania funkcji — które są wystarczające, by wykonać poglądowy rysunek przedstawiający jej wykres — brakuje nam jeszcze metod weryfikacji, jak funkcja zachowuje się na krańcach swojej dziedziny. Służą do tego tzw. *asymptoty*:

7.33 Definicja.
Niech $f\colon A \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją, gdzie $A \subset \mathbb{R}$ jest sumą dowolnie wielu przedziałów otwartych lub sumą skończenie wielu dowolnych przedziałów.

- Jeśli zbiór A jest nieograniczony od góry (odp. od dołu), powiemy, że prosta o równaniu $y = c$, gdzie $c \in \mathbb{R}$ [!], jest *prawostronną* (odp. *lewostronną*) *asymptotą poziomą funkcji f*, gdy $\lim_{x\to\infty} f(x) = c$ (odp. gdy $\lim_{x\to-\infty} f(x) = c$). Jeśli powyższa granica nie istnieje lub nie jest liczbą, mówimy, że funkcja f nie ma prawostronnej (odp. lewostronnej) asymptoty poziomej. Jeśli natomiast zbiór A jest nieograniczony i od góry, i od dołu, oraz $\lim_{x\to-\infty} f(x) = c = \lim_{x\to\infty} f(x)$, przy czym $c \in \mathbb{R}$, prostą o równaniu $y = c$ nazywamy *obustronną asymptotą poziomą funkcji f*.

- Jeśli zbiór A jest nieograniczony od góry (odp. od dołu) i istnieją <u>liczbowe</u> granice $m_+ \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ oraz $k_+ \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x\to\infty}(f(x) - m_+x)$ (odp. $m_- \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ oraz $k_- \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x\to-\infty}(f(x) - m_-x)$), to prostą o równaniu $y = m_+x + k_+$ (odp. $y = m_-x + k_-$) nazywamy *prawostronną* (odp. *lewostronną*) *asymptotą ukośną funkcji f*. W przypadku, gdy zbiór A jest nieograniczony i od góry, i od dołu, a powyższe stałe m_+, m_-, k_+, k_- są określone (liczbowe) oraz $m_+ = m_-$ i $k_+ = k_-$, prostą o równaniu $y = m_\pm x + k_\pm$ nazywamy *obustronną asymptotą ukośną funkcji f*. (Asymptota pozioma, jeśli istnieje, jest automatycznie ukośną po stosownej stronie). Jeśli jedna z granic definiujących stałe m_+ i k_+ (odp. m_- i k_-) nie istnieje lub jest nieskończona, mówimy, że funkcja f nie ma prawostronnej (odp. lewostronnej) asymptoty ukośnej.

- Jeśli a jest prawostronnym (odp. lewostronnym) punktem skupienia zbioru A oraz granica $\lim_{x\to a^+} f(x)$ (odp. $\lim_{x\to a^-} f(x)$) istnieje i jest nieskończona, prostą o równaniu $x = a$ nazywamy *prawostronną* (odp. *lewostronną*) *asymptotą pionową w punkcie a funkcji f*. W przypadku, gdy punkt a jest zarówno lewostronnym, jak i prawostronnym punktem skupienia zbioru A, i obie granice jednostronne funkcji f w punkcie a istnieją i obie są nieskończone [niekoniecznie muszą być równe!], to tę prostą nazywamy *obustronną asymptotą pionową w punkcie a funkcji f*. Gdy granica $\lim_{x\to a^+} f(x)$ (odp. $\lim_{x\to a^-} f(x)$) nie istnieje lub jest liczbą, mówimy, że funkcja f nie ma prawostronnej (odp. lewostronnej) asymptoty pionowej w punkcie a. Asymptot pionowych poszukuje się we wszystkich liczbowych krańcach dziedziny funkcji, które nie należą do dziedziny, oraz we wszystkich punktach nieciągłości tej funkcji.

Asymptota to prosta, która w pobliżu punktu granicznego (w którym wyznaczono ową asymptotę) dobrze przybliża wykres funkcji f. Dlatego w punktach, w których funkcja ma asymptotę pionową, po stosownej stronie wykres staje się coraz bardziej stromy i coraz bardziej przypomina prostą pionową. Podobnie, jeśli funkcja ma asymptotę ukośną, wykres tej funkcji w pobliżu stosownej nieskończoności coraz bardziej zbliża się do owej asymptoty (aczkolwiek może ją przecinać, nawet nieskończenie wiele razy!).

7.34 Przykład.
Wyznaczmy asymptoty funkcji f danej wzorem $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Rozpoczynamy od wyznaczenia dziedziny: jest nią zbiór $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ponieważ f jest funkcją ciągłą, asymptot poszukujemy jedynie w krańcach dziedziny, czyli w $\pm\infty$ oraz w zerze. Jako że $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ [dlaczego?], prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą obustronną (zauważmy, że wykres funkcji f przecina tę prostą w nieskończenie wielu punktach, gdyż funkcja ta ma nieskończenie wiele miejsc zerowych). Zarazem $\lim_{x\to0} f(x) = 1$ (co wynika np. ze wzoru na funkcję sin podanego w Tw. 7.26), więc funkcja f nie ma asymptoty pionowej w zerze ani lewo-, ani prawostronnej.

© Piotr Niemiec

Na zakończenie rozdziału podajemy schemat przeprowadzania przebiegu zmienności funkcji. Poniżej punkty oznaczone jedną gwiazdką mogą być w pewnych przykładach trudne do wykonania (i w takich przypadkach można je pominąć), a oznaczone dwoma gwiazdkami można zupełnie pomijać (aczkolwiek czasem warto je wykonać, bo mogą pomóc w dokładniejszym „zrozumieniu" funkcji).

Przypomnijmy, że funkcję $f\colon A \to \mathbb{R}$ nazywamy *parzystą* (odp. *nieparzystą*), gdy dla dowolnego punktu $a \in A$ zachodzi: $-a \in A$ oraz $f(-a) = f(a)$ (odp. oraz $f(-a) = -f(a)$). Wykres funkcji parzystej jest symetryczny względem osi Y, a wykres funkcji nieprzystej jest symetryczny względem początku układu współrzędnych.

Przebieg zmienności funkcji
* punkty opcjonalne (zależne od poziomu komplikacji)
** punkty nadobowiązkowe (niewymagane)

1. Dziedzina funkcji i punkty jej nieciągłości.

1a.** Parzystość (i nieparzystość) funkcji, miejsca zerowe i punkty wspólne z osią Y.

2. Wartości funkcji w tych krańcach dziedziny, które do niej należą, oraz w punktach nieciągłości.

3. Granice funkcji w tych krańcach dziedziny, które do niej nie należą, oraz w punktach nieciągłości.

4. Asymptoty.

5. Pochodna i jej dziedzina.

5a.** Granice pochodnej w punktach dziedziny wyjściowej funkcji, które nie należą do dziedziny pochodnej, oraz w punktach nieciągłości pochodnej.

6. Miejsca zerowe i znak pochodnej.

7. Tabelka monotoniczności (i sklejanie w niej) z wartościami funkcji w ekstremach.

8*. Druga pochodna i jej dziedzina.

8a*. Miejsca zerowe i znak drugiej pochodnej.

8b*. Tabelka wypukłości.

9. Tabelka końcowa.

10. Wykres funkcji.

8 Rachunek całkowy funkcji jednej zmiennej

Choć w nowoczesnej analizie króluje *całka Lebesgue'a*, której wprowadzenie do matematyki stanowiło przełom w analizie, rozszerzając granice rachunku całkowego daleko poza to, co było możliwe przy użyciu klasycznej całki Riemanna, w niniejszym kursie, z uwagi na jego niewielkie ramy czasowe, skupimy się wyłącznie na jej prototypie, czyli wspomnianej całce Riemanna. Aby jednak nauczyć się nią posługiwać, wcześniej warto omówić operację odwrotną do różniczkowania — czyli *całkę nieoznaczoną*, która okaże się być kluczowa w rachunku całkowym.

8.1 Funkcja pierwotna i całka nieoznaczona

8.1 Definicja.
Mówimy, że funkcja F jest funkcją *pierwotną* funkcji $f\colon I \to \mathbb{R}$ **określonej na przedziale** $I \subset \mathbb{R}$, gdy F jest określona i różniczkowalna we wszystkich punktach przedziału I oraz:

$$\forall x \in I\colon \quad F'(x) = f(x).$$

Zgodnie z Wn. 7.11 (str. 33), jeśli funkcje F oraz G są funkcjami pierwotnymi dla $f\colon I \to \mathbb{R}$, to $G(x) = F(x) + c$ dla pewnej stałej c oraz wszelkich $x \in I$. Z łatwością sprawdza się także, że dla dowolnej stałej c, pochodna z funkcji $x \mapsto F(x) + c$ jest identyczna z pochodną funkcji F. Z tego względu zbiór wszystkich funkcji postaci $x \mapsto F(x) + c$, gdzie $c \in \mathbb{R}$ jest dowolną stałą, a F jest ustaloną funkcją pierwotną funkcji f, nazywa się *całką nieoznaczoną z funkcji* f i oznacza się przez $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. (Litera x w zapisie całki nieoznaczonej ma charakter „lokalny" [„chwilowy"] i może zostać zastąpiona dowolną inną literą, która w danym kontekście nie została użyta do oznaczenia czegokolwiek; tak więc: $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t = \int f(y)\,\mathrm{d}y$ itd. Dla porównania, jeśli f jest funkcją z parametrem a, np. $f(x) = ax^2 + bx + c$, możemy napisać $\int f(z)\,\mathrm{d}z$, ale zapis $\int f(a)\,\mathrm{d}a$ jest niedozwolony, bo

© Piotr Niemiec

litera a jest zarezerwowana na oznaczenie jednego ze współczynników funkcji f). Funkcję f w zapisie $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ nazywa się funkcją *podcałkową*.
Uwaga: Funkcja pierwotna zawsze rozpatrywana jest na przedziale: nawet jeśli dziedzina wyjściowej funkcji jest sumą kilku przedziałów, możemy pytać o jej funkcję pierwotną na każdym z tych przedziałów **z osobna**.

Nabyte w rachunku różniczkowym doświadczenie może stać się źródłem błędnej przesłanki, że wyznaczanie funkcji pierwotnych jest zagadnieniem prostszym, niż w istocie jest. Chociaż z każdego „rozsądnego" wzoru można bez większego trudu wyznaczyć pochodną, w odniesieniu do całek nieoznaczonych podobne zdanie jest bardzo odległe od prawdy: prawda jest taka, że tylko dla stosunkowo niewielkiej liczby wzorów (ogólnej postaci) całkę nieoznaczoną **da się** wyznaczyć. Z tego względu ważne jest, by poznać techniki liczenia takich całek. Zacznijmy jednak od podstawowych wzorów, które powstają przez przekształcenie odpowiednich wzorów na pochodną. W poniższej tabeli pominęliśmy składnik „$+C$", który należy zawsze dopisać do wzoru w momencie, gdy nie będzie w nim żadnego znaku całki nieoznaczonej.

$\boldsymbol{f(x)}$	$\int \boldsymbol{f(x)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$	**Uwagi**
a	ax	$a \in \mathbb{R}$ stała
x^p	$\frac{x^{p+1}}{p+1}$	$p \neq -1$
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\ln\lvert x\rvert$	osobno w $(-\infty, 0)$ i w $(0, \infty)$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$	$a > 0,\ a \neq 1$
e^x	e^x	$\mathrm{e} = 2,7182818284\ldots$
$\sin x$	$-\cos x$	
$\cos x$	$\sin x$	
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$	
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$	

8.2 Obserwacja.
Całka nieoznaczona jest operacją liniową, tzn.:

$$\int (af(x) + bg(x))\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x + b\int g(x)\,\mathrm{d}x,$$

o ile tylko a i b to (dowolne) stałe rzeczywiste.

8.3 Przykład.
Z punktu (C) Prz. 7.5 (str. 30) wynika, że $(x|x|)' = 2|x|$. W takim razie:

$$\int |x|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x|x| + C.$$

Dwie podstawowe metody natury ogólnej do wyznaczania całek nieoznaczonych to *całkowanie przez części* oraz *całkowanie przez podstawianie*, które przedstawiamy poniżej.

8.4 Obserwacja. (Całkowanie przez części)
Jeśli funkcja g jest różniczkowalna, a $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$, to:

$$\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

© Piotr Niemiec

Powszechnie stosowany zapis:

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

8.5 Obserwacja. (Całkowanie przed podstawianie)
Jeśli g jest funkcją różniczkowalną oraz $\int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + C$, to

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = F(g(x)) + C.$$

Powszechnie stosowany zapis:

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{smallmatrix} g(x)=t \\ g'(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{smallmatrix}\right] = \int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + C = F(g(x)) + C.$$

8.6 Przykład.
Jako przykład zastosowania obu powyższych metod, wyznaczymy całkę $\int \ln x\,\mathrm{d}x$ na dwa sposoby.

Sposób 1: całkowanie przez części. Zapisujemy $\ln x$ jako iloczyn $\ln x \cdot 1$ i czynnik $\ln x$ oznaczamy przez u, a czynnik 1 przez v'. Aby zastosować wzór na całkowanie przez części, musimy odgadnąć funkcję v, czyli wyznaczyć całkę nieoznaczoną z v'. Ale $\int v'(x)\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x = x + C$. A zatem możemy zastosować całkowanie przez części. Moment, w którym stosujemy tę metodę, to pierwszy znak równości poniżej:

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{smallmatrix} u=\ln x & v'=1 \\ u'=\frac{1}{x} & v=x \end{smallmatrix}\right] = \ln x \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int 1\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + C,$$

czyli $\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + C$.

Sposób 2: całkowanie przez podstawianie. Tym razem zastosujmy podstawienie $t = \ln x$. Innymi słowy:

$$x = \mathrm{e}^t, \tag{8:1}$$

a stąd $\mathrm{d}x = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ (po lewej stronie napis $\mathrm{d}x$ jest poprzedzony pochodną lewej strony wzoru (8:1), traktowanego jako funkcja zmiennej x, natomiast po prawej stronie napis $\mathrm{d}t$ jest poprzedzony pochodną prawej strony tegoż wzoru, traktowanego jako funkcja zmiennej t). Dalsze procedowanie w metodzie podstawiania przedstawia poniższy rachunek (moment zastosowania tej metody to pierwszy znak równości; w dalszej części stosujemy całkowanie przez części):

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{smallmatrix} \ln x=t \\ x=\mathrm{e}^t \\ \mathrm{d}x=\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \end{smallmatrix}\right] = \int t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \left[\begin{smallmatrix} u=t & v'=\mathrm{e}^t \\ u'=1 & v=\mathrm{e}^t \end{smallmatrix}\right] = t\mathrm{e}^t - \int 1\cdot\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = t\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t + C = \ln x\cdot x - x + C$$

(w ostatnim kroku powróciliśmy ze zmiennej t do zmiennej x). Kluczowe w tej metodzie jest to, by tak dobrać podstawienie, by z jego pomocą z wyjściowej całki pozbyć się *każdej* litery x — dotyczy to także litery x w napisie $\mathrm{d}x$, tak więc wśród wzorów zamieniających literę x na nową musimy otrzymać taki wzór, w którym pojawi się $\mathrm{d}x$.

8.7 Przykład.

(A) Aby wyznaczyć całkę $\int \mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x$, należy zastosować całkowanie przez części dwukrotnie, ważne przy tym, by w obu krokach funkcja u była tego samego rodzaju (tzn. albo dwukrotnie u to funkcja wykładnicza, albo dwukrotnie u to funkcja trygonometryczna), np.:

$$\int \mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{smallmatrix} u=\cos x & v'=\mathrm{e}^x \\ u'=-\sin x & v=\mathrm{e}^x \end{smallmatrix}\right] = \cos x\cdot\mathrm{e}^x + \int \sin x\cdot\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{smallmatrix} u=\sin x & v'=\mathrm{e}^x \\ u'=\cos x & v=\mathrm{e}^x \end{smallmatrix}\right]$$
$$= \mathrm{e}^x\cos x + \sin x\cdot\mathrm{e}^x - \int \cos x\cdot\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$$

© Piotr Niemiec

Otrzymaliśmy więc, że $\int \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x$. Jeśli teraz całkę po prawej stronie przeniesiemy na lewą stronę, otrzymamy: $2\int \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \sin x + C'$ i tym samym $\int \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x \cos x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x \sin x + C$ (końcowej stałej C nigdy nie przemnaża się przez liczby).

(B) Czasem, aby obliczyć całkę, stosuje się bardzo nieprzewidywalne podstawienie. Przykładem dobrze to ilustrującym jest tzw. podstawienie Eulera, które tutaj przedstawimy. Aby obliczyć całkę $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$, dokonujemy podstawienia Eulera

$$x + \sqrt{1+x^2} = t. \tag{8:2}$$

Zauważmy, że $(x+\sqrt{1+x^2})' = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}$, a więc możemy nieformalnie napisać: $(x+\sqrt{1+x^2})' = \frac{t}{\sqrt{1+x^2}}$. W takim razie wzór (8:2) prowadzi do nieformalnego równania $\frac{t}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, które — po podzieleniu obustronnie przez t — daje nam wzór $\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\mathrm{d}t}{t}$, który już jest całkiem poprawny. Zatem:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \boxed{\substack{x+\sqrt{1+x^2}=t \\ \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{\mathrm{d}t}{t}}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + C = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C$$

(w ostatnim kroku powróciliśmy do zmiennej x i uwzględniliśmy to, że $x + \sqrt{1+x^2} > 0$ dla wszelkich $x \in \mathbb{R}$ [dlaczego?]). Tak więc $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C$.

(C) Często stosowanymi podstawieniami, przydatnymi zwłaszcza wtedy, gdy w funkcji podcałkowej występują wyłącznie funkcje trygonometryczne zmiennej x, są następujące dwa:

- $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$; wtedy: $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{1-t^2}{2t}$ oraz $\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$; podstawienie to dość często zamienia funkcje podcałkowe na funkcje wymierne, których całkowanie omawiamy w następnej części skryptu;
- $\operatorname{tg} x = t$ — wygodniejsze, ale przydatne tylko wtedy, gdy funkcja podcałkowa jest funkcją wyrażeń $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\sin x \cos x$, $\operatorname{tg} x$ $(= \frac{\sin x}{\cos x})$ oraz $\operatorname{ctg} x$ $(= \frac{\cos x}{\sin x})$; przy takim podstawieniu: $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$, $\sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2}$, $\operatorname{tg} x = t$, $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{t}$ oraz $\mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

(D) Każde podstawienie w postaci równania, z którego da się wyznaczyć zmienną x, jest *wykonalne* (o ile wzór na x to funkcja różniczkowalna): bo wtedy wzór na x możemy zróżniczkować, by otrzymać wzór na $\mathrm{d}x$ — tym samym z wyrażenia pod całką pozbędziemy się każdej litery x. Dotyczy to w szczególności (bardzo prostych) podstawień liniowych (tzn. takich, że wzór na t jest wielomianem stopnia 1 zmiennej x). Należy jednak pamiętam, że nie każde wykonalne podstawienie jest właściwe, tzn. niekoniecznie musi ono przyczynić się do wyznaczenia całki.

8.2 Całka funkcji wymiernej

Przypomnijmy, że funkcja *wymierna* to iloraz dwóch wielomianów. W tej części opiszemy dość złożoną metodę wyznaczania całek funkcji wymiernych. W kontekście obliczania całek nieoznaczonych funkcje te dzielą się na dwie zasadnicze grupy. Pierwsza z nich zawiera stosunkowo niewiele funkcji wymiernych, a ich zasadniczą cechą jest to, że nie umiemy przedstawić mianownika jako iloczynu wielomianów wyłącznie stopnia 1 lub 2. Gdy natkniemy się na taką całkę w jakimś zbiorze zadań (czyli będzie to całka, którą się wyznaczyć!), najczęściej będzie tak, że albo podstawienie nowej zmiennej za cały mianownik będzie wykonalne i pozwoli wyznaczyć całkę, albo mianownik będzie potęgą pewnego wielomianu, za który należy podstawić nową zmienną. Zobaczmy to na dwóch przykładach:

8.8 Przykład.

(A) Chcemy wyznaczyć $\int \frac{x^5+1}{x^6+6x-1}\,\mathrm{d}x$. Zauważamy, że mianownik jest wielomianem, którego nie umiemy rozłożyć. W takim razie testujemy podstawienie $t = x^6 + 6x - 1$ (podstawiamy cały mianownik). Wtedy $\mathrm{d}t = (6x^5 + 6)\,\mathrm{d}x = 6(x^5+1)\,\mathrm{d}x$. Tym samym $(x^5+1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\,\mathrm{d}t$. Szczęśliwie wyrażenie $(x^5+1)\,\mathrm{d}x$ pojawia się w naszej całce. Co więcej, funkcja podcałkowa ma taką postać, że możemy się pozbyć każdej litery x przy takim podstawieniu:

$$\int \frac{x^5+1}{x^6+6x-1}\,\mathrm{d}x = \boxed{\substack{x^6+x-1=t \\ (x^5+1)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\,\mathrm{d}t}} = \int \frac{\frac{1}{6}\,\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{6}\ln|t| + C = \frac{1}{6}\ln|x^6+6x-1| + C.$$

© Piotr Niemiec

(B) Tym razem rozważmy znacznie trudniejszy przykład:

$$\int \frac{x^9+6x^5+x^4+5x+1}{(x^5+5x+1)^3(x^{10}+10x^6+2x^5+25x^2+10x+1)}\,\mathrm{d}x = ?$$

Tym razem mianownik zawiera dwa czynniki, z których żaden nie wygląda na rozkładalny. Jednakże wielomian występujący w pierwszym nawiasie mianownika ma stopień 5, który jest o połowę mniejszy od stopnia wielomianu w drugim nawiasie mianownika. Ponieważ zadano nam taką całkę, musi ona być wyliczalna. W takim razie być może ten pierwszy nawias ma być pewną podpowiedzią…? Jeśli pójdziemy tym tropem i sprawdzimy, ile to jest $(x^5+5x+1)^2$, okaże się, że jest to dokładnie $x^{10}+10x^6+2x^5+25x^2+10x+1$, czyli zawartość drugiego nawiasu. Zatem mianownik funkcji podcałkowej to $(x^5+5x+1)^5$. Ale tak przekształcona funkcja podcałkowa wciąż nie wygląda przystępnie. Skoro z mianownikiem poradziliśmy sobie z użyciem wielomianu x^5+5x+1, spróbujmy odgadnąć, co ma wspólnego licznik ułamka pod całką z tym wielomianem. W tym celu podzielmy (z resztą) wielomian z licznika przez x^5+5x+1. Gdy wykonamy takie dzielenie, okaże się, że wielomian z licznika jest podzielny przez x^5+5x+1, a dokładniej $x^9+6x^5+x^4+5x+1 = (x^5+5x+1)(x^4+1)$. Zatem funkcja podcałkowa to $\frac{x^4+1}{(x^5+5x+1)^4}$. Zaraz, zaraz, ale pochodna z x^5+5x+1 to $5(x^4+1)$, więc podstawienie $t = x^5+5x+1$ jest wykonalne:

$$\int \frac{x^9+6x^5+x^4+5x+1}{(x^5+5x+1)^3(x^{10}+10x^6+2x^5+25x^2+10x+1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^4+1}{(x^5+5x+1)^4}\,\mathrm{d}x$$
$$= \boxed{\begin{smallmatrix} x^5+5x+1=t \\ 5(x^4+1)\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \\ (x^4+1)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\,\mathrm{d}t \end{smallmatrix}} = \frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^4} = \frac{1}{5}\int t^{-4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{5}\cdot\frac{t^{-3}}{-3}+C = -\frac{1}{15(x^5+5x+1)^3}+C.$$

Tych Czytelników, którym ten przykład wydaje się bardzo trudny, uspokajamy, że w zbiorach zadań i innej literaturze tematu zadania na całkowanie funkcji wymiernych na ogół nie wymagają aż takiego sprytu. Tutaj chcieliśmy jedynie naświetlić kłopoty, z jakimi można się zmagać przy wyznaczaniu całek nieoznaczonych.

Najbardziej pospolite zadania z całkami funkcji wymiernych dotyczą funkcji, których mianownik jesteśmy w stanie rozłożyć na iloczyn wielomianów wyłącznie stopnia 1 lub 2. O tym, że tak się da zrobić zawsze (choć nie zawsze ludzie są w stanie to zrobić), świadczy poniższe twierdzenie:

8.9 Twierdzenie.
Każdy niestały wielomian jednej zmiennej o współczynnikach rzeczywistych jest iloczynem pewnych wielomianów, z których każdy albo ma stopień 1, albo jest trójmianem kwadratowym z ujemnym wyróżnikiem.

Dalszą opowieść o tym, jak scałkować funkcję wymierną, będziemy prowadzić przy założeniu, że mianownik takiej funkcji jest przedstawiony jako iloczyn takich czynników, o jakich mowa w powyższym twierdzeniu. Niech więc f będzie funkcją wymierną postaci $f(x) = \frac{W(x)}{Q(x)}$, gdzie W i Q to wielomiany jednej zmiennej, przy czym $Q(x) = V_1(x)^{p_1}\cdot V_2(x)^{p_2}\cdot\ldots\cdot V_r(x)^{p_r}$, gdzie V_j to wielomian stopnia 1 lub trójmian kwadratowy z ujemnym wyróżnikiem. Zakładamy przy tym (co bardzo ważne!), że **wielomiany $V_1,\ldots,V_r$ są parami nieproporcjonalne** (tzn. jeśli $V_j(x) = cV_k(x)$ dla pewnej stałej, to $j=k$). W takiej sytuacji funkcję f można rozłożyć (jednoznacznie!) na sumę wielomianu i tzw. *ułamków prostych*. *Ułamek prosty* (w kontekście funkcji wymiernych jednej zmiennej) to funkcja, która ma jedną z dwóch postaci:

- $x \mapsto \frac{A}{(ax+b)^k}$, gdzie $A\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $b\in\mathbb{R}$ oraz $k\in\mathbb{N}_1$; albo
- $x\mapsto\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$, gdzie $A,B,a,b,c\in\mathbb{R}$, $A^2+B^2\neq 0$, $a\neq 0$, $(\Delta =)\ b^2-4ac<0$ oraz $k\in\mathbb{N}_1$.

Aby opisać, jak wygląda taki rozkład, wprowadźmy dla uproszczenia pomocniczą terminologię: *część rozkładu wyznaczona przez nawias $V_j(x)$* mianownika $V_1(x)^{p_1}\cdot\ldots\cdot V_r(x)^{p_r}$ to suma $\sum_{k=1}^{p_j}\frac{L_k(x)}{V_j(x)^k}$ ułamków prostych (w których licznik $L_k(x)$ ma postać zgodną z definicją ułamka prostego, a jego współczynniki to niewiadome). Dla przykładu: części rozkładu wyznaczone przez poszczególne nawiasy mianownika $x^2(2x-3)^4(x^2+x+1)^3$ to:

- $\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}$ [nawias x; A i B to niewiadome];
- $\frac{C}{2x-3}+\frac{D}{(2x-3)^2}+\frac{E}{(2x-3)^3}+\frac{F}{(2x-3)^4}$ [nawias $2x-3$; C, D, E i F to kolejne niewiadome];
- $\frac{Gx+H}{x^2+x+1}+\frac{Ix+J}{(x^2+x+1)^2}+\frac{Kx+L}{(x^2+x+1)^3}$ [nawias x^2+x+1; G, H, I, J, K, L to kolejne niewiadome].

© Piotr Niemiec

Wreszcie, jeśli stopień licznika funkcji wymiernej jest nie mniejszy niż stopień jej mianownika, *część rozkładu wyznaczona przez licznik* to wielomian stopnia $d = \deg(W) - \deg(Q)$ (gdzie deg oznacza stopień wielomianu), którego współczynniki to kolejne niewiadome rozkładu. Kontynuując poprzedni przykład (w którym mianownik ma stopień 12):

- jeśli stopień licznika jest mniejszy niż 12, licznik ten nie wyznacza części rozkładu (tzn. część rozkładu wyznaczona przez licznik jest wielomianem zerowym);
- jeśli stopień licznika jest równy 12, wtedy część rozkładu wyznaczona przez licznik to jedna stała: M [M to kolejna niewiadoma];
- jeśli stopień licznika jest równy 13, wtedy część rozkładu wyznaczona przez licznik ma postać: $Mx + N$ [M i N to kolejne niewiadome];
- jeśli stopień licznika jest równy np. 15, wtedy część rozkładu wyznaczona przez licznik ma postać: $Mx^3 + Nx^2 + Px + R$ [M, N, P i R to kolejne niewiadome].

Pełny rozkład dla funkcji wymiernej to suma części rozkładu wyznaczonych przez wszystkie nawiasy mianownika oraz przez licznik. Jeśli tę sumę oznaczymy przez $\mathscr{S}$, $\mathscr{S}$ jest wyrażeniem algebraicznym, w którym występuje kilka lub wiele niewiadomych (są to współczynniki liczników ułamków prostych oraz wielomianu wyznaczonego przez licznik). Następny krok do scałkowania funkcji wymiernej to rozwiązanie równania z tymi niewiadomymi, postaci:

$$\frac{V(x)}{W(x)} = \mathscr{S}. \tag{8:3}$$

Kluczowe w tym miejscu jest poniższe nietrywialne twierdzenie:

8.10 Twierdzenie.
Dla dowolnej funkcji wymiernej równanie (8:3) *ma dokładnie jedno rozwiązanie.*

Precyzyjnie, niewiadomym występującym w tym równaniu można nadać wartości w jeden jedyny sposób, tak by powyższe równanie było spełnione.

Aby rozwiązać (8:3), przede wszystkim należy przemnożyć obustronnie przez mianownik lewej strony. A potem możemy np. za x podstawiać dowolne wartości liczbowe (nawet możemy podstawiać liczby zespolone!), by otrzymać kolejne równania z konkretnymi wartościami współczynników przy niewiadomych. Możemy też np. obliczyć pochodną (i kolejne pochodne) po obu stronach równości i znów podstawiać dowolne wartości liczbowe za x. W ostateczności zawsze możemy wymnożyć wszystkie nawiasy po obu stronach znaku równości, potem pogrupować składniki wg potęg zmiennej x i porównując współczynniki po obu stronach wypisać dokładnie tyle równań (liniowych), ile jest niewiadomych. Zgodnie z powyższym twierdzeniem, układ taki ma dokładnie jedno rozwiązanie, co często przyspiesza rozwiązywanie powstałego układu równań. Zanim omówimy ostatni krok wyznaczania całki z funkcji wymiernej, powyższą dyskusję zilustrujmy konkretnym przykładem.

8.11 Przykład.
Rozłożymy na ułamki proste funkcję wymierną $f(x) = \frac{x^5+1}{(2x-2)(x^3-1)}$. Rozpocznijmy od tego, że stopień licznika jest o 1 większy od stopnia mianownika, zatem część rozkładu wyznaczona przez licznik ma postać: $Ax + B$.

Dalej, rozłóżmy mianownik: $(2x-2)(x^3-1) = (2x-2)(x-1)(x^2+x+1)$. Chociaż wyróżnik trójmianu z ostatniego nawiasu jest ujemny, otrzymany rozkład nie jest prawidłowy, gdyż dwa pierwsze nawiasy są proporcjonalne: $2x - 2 = 2(x - 1)$, tak więc poprawny rozkład mianownika to:

$$(2x - 2)(x^3 - 1) = 2(x - 1)^2(x^2 + x + 1).$$

Wypiszmy teraz kolejne części rozkładu — wyznaczone przez nawiasy mianownika:

- współczynnik 2 poprzedzający nawiasy nie wyznacza żadnych części rozkładu;
- nawias $x - 1$ wyznacza część: $\frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2}$;
- nawias $x^2 + x + 1$ wyznacza część: $\frac{Ex+F}{x^2+x+1}$.

Zatem w tym przykładzie równanie (8:3) przybiera postać:

$$\frac{x^5 + 1}{2(x - 1)^2(x^2 + x + 1)} = Ax + B + \frac{C}{x - 1} + \frac{D}{(x - 1)^2} + \frac{Ex + F}{x^2 + x + 1}.$$

© Piotr Niemiec

Mamy więc 6 niewiadomych. Po przemnożeniu powyższego równania przez mianownik lewej strony, otrzymujemy równanie postaci:

$$x^5+1=2(Ax+B)(x-1)^2(x^2+x+1)+2C(x-1)(x^2+x+1)+2D(x^2+x+1)+2(Ex+F)(x-1)^2. \tag{8:4}$$

Początek jest łatwy: wstawmy $x=1$ (tj. miejsce zerowe wielomianu stopnia 1 będącego zawartością jednego z nawiasów mianownika), by otrzymać: $2=6D$, czyli $D=\frac{1}{3}$. Nie istnieje *jedna najlepsza* metoda postępowania w kolejnych krokach. Moglibyśmy np. podstawić dowolne 5 innych liczb, by otrzymać kolejnych 5 równań, a potem je rozwiązać. Tutaj pokażemy rozumowanie, które postrzegamy jako sprytniejsze.

Przerzućmy składnik z prawej strony równania (8:4) zawierający niewiadomą D na lewą stronę i przemnóżmy obustronnie przez 3:

$$3x^5-2x^2-2x+1=6(Ax+B)(x-1)^2(x^2+x+1)+6C(x-1)(x^2+x+1)+6(Ex+F)(x-1)^2. \tag{8:5}$$

Zauważmy, że prawa strona zeruje się dla $x=1$. W takim razie wielomian po lewej stronie jest podzielny przez $x-1$. Gdy wykonamy dzielenie tego wielomianu przez $x-1$, otrzymamy $3x^5-2x^2-2x+1=(x-1)(3x^4+3x^3+3x^2+x-1)$. Po podstawieniu tego wzoru do (8:5), możemy obustronnie podzielić przez $x-1$, by otrzymać:

$$3x^4+3x^3+3x^2+x-1=6(Ax+B)(x-1)(x^2+x+1)+6C(x^2+x+1)+6(Ex+F)(x-1). \tag{8:6}$$

Do powyższego wzoru ponownie wstawiamy $x=1$ (z racji, że w mianowniku wyjściowej funkcji czynnik $x-1$ miał potęgę 2, wartość 1 za x możemy podstawiać dwukrotnie) i wyznaczamy C: $C=\frac{1}{2}$. Powtarzamy poprzednią operację: w równaniu (8:6) przenosimy składnik z niewiadomą C na lewą stronę, potem zauważamy, że prawa strona zeruje się dla $x=1$, i rozkładamy wielomian po lewej stronie: $3x^4+3x^3-2x-4=(x-1)(3x^3+6x^2+6x+4)$. Następnie lewą stronę zastępujemy przez ten iloczyn i obustronnie dzieląc przez $x-1$, otrzymujemy:

$$3x^3+6x^2+6x+4=6(Ax+B)(x^2+x+1)+6(Ex+F). \tag{8:7}$$

Teraz można by np. za x wstawić oba zespolone miejsca zerowe wielomianu x^2+x+1, by w ten sposób wyznaczyć E i F (a potem pozostałoby jedynie przenieść ostatni składnik (8:7) na lewą stronę i tę nową lewą stronę podzielić przez wielomian x^2+x+1, by ostatecznie wyznaczyć A i B). Tutaj pokażemy jednak bardziej tradycyjne podejście, tzn. będziemy posługiwać się wyłącznie liczbami rzeczywistymi. Do równania (8:7) podstawmy za x kolejno $0,1,-1,-2$, by otrzymać układ równań:

$$\begin{cases} 6B+6F=4 \\ 18(A+B)+6(E+F)=19 \\ 6(B-A)+6(F-E)=1 \\ 18(B-2A)+6(F-2E)=-8 \end{cases}.$$

Aby ułatwić rachunki, przyjmijmy pomocniczo: $a=6A$, $b=6B$, $e=6E$ oraz $f=6F$. Powyższy układ przybiera wtedy postać:

$$\begin{cases} b+f=4 \\ 3a+3b+e+f=19 \\ b-a+f-e=1 \\ 3b-6a+f-2e=-8 \end{cases}.$$

Moglibyśmy teraz zaprząc macierze i metodami algebry liniowej rozwiązać ów układ, ale tutaj zrobimy to metodami szkoły średniej. Z pierwszego równania otrzymujemy $f=4-b$, co po uwzględnieniu w trzecim równaniu daje (po przekształceniu): $e=3-a$. Podstawiając oba te wzory do drugiego i czwartego równania, po uproszczeniu otrzymujemy:

$$\begin{cases} a+b=6 \\ b-2a=-3 \end{cases}.$$

Odejmując powyższe równania stronami, wyznaczamy a: $a=3$, a zatem $b=3$, a stąd $e=0$ i $f=1$. Ostatecznie otrzymujemy: $A=B=\frac{1}{2}$, $E=0$ oraz $F=\frac{1}{6}$, czyli:

$$\frac{x^5+1}{2(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{\frac{1}{3}}{(x-1)^2}+\frac{\frac{1}{6}}{x^2+x+1}.$$

Gdy już wiemy, jak rozkładać funkcje wymierne (których mianownik udało nam się rozłożyć zgodnie z Tw. 8.9), musimy jedynie scałkować poszczególne składniki, korzystając z liniowości całki. Jak zobaczymy poniżej, tylko ostatni

© Piotr Niemiec

ich rodzaj jest kłopotliwy. Najpierw omówmy dwa proste rodzaje składników:

- składnik postaci wielomianowej oczywiście całkujemy w sposób trywialny, zgodnie ze wzorami zamieszczonymi w tabelce na stronie 41;
- składnik postaci $\frac{A}{(ax+b)^k}$ całkuje się przez proste podstawienie (lub przez zastosowanie gotowego wzoru — zob. poniżej) — pamiętajmy, że $a \neq 0$:

$$\int \frac{A\,\mathrm{d}x}{(ax+b)^k} = \boxed{\begin{smallmatrix} ax+b=t \\ \mathrm{d}x=\frac{1}{a}\,\mathrm{d}t \end{smallmatrix}} = \frac{A}{a}\int t^{-k}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \frac{A}{a}\ln|t|+C & \text{gdy } k=1 \\ \frac{A}{a}\frac{t^{1-k}}{1-k}+C & \text{gdy } k>1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{A}{a}\ln|ax+b|+C & \text{gdy } k=1 \\ -\frac{A}{a(k-1)(ax+b)^{k-1}}+C & \text{gdy } k>1 \end{cases}.$$

Pozostaje więc nauczyć się całkować ułamki proste postaci $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$ (gdzie wyróżnik trójmianu z mianownika jest ujemny, a $k \geq 1$). W tym celu najpierw przedstawiamy trójmian z mianownika w postaci kanonicznej: $ax^2+bx+c = a(x-p)^2+q$, po czym wyciągamy wyraz wolny (czyli liczbę q) przed nawias (ta liczba na pewno będzie różna od zera!): $ax^2+bx+c = q[\frac{a}{q}(x-p)^2+1]$. Następnie pierwiastkujemy liczbę $\frac{a}{q}$ (na pewno będzie dodatnia!) i wciągamy do nawiasu, którego zawartość podnoszona jest do kwadratu: $ax^2+bx+c = q[(\sqrt{\frac{a}{q}}(x-p))^2+1]$, doprowadzając w ten sposób trójmian do postaci $ax^2+bx+c = q[(\alpha x+\beta)^2+1]$ (przy czym $\alpha > 0$). Na koniec współczynnik q wyciągamy z mianownika przed całkę, zarazem podstawiając $t = \alpha x+\beta$, czyli

$$x = \frac{t-\beta}{\alpha} \tag{8:8}$$

oraz $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{\alpha}$. Wzór (8:8) pozwala nam przedstawić licznik ułamka prostego w postaci $Kt+L$. Zatem:

$$\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}\,\mathrm{d}x = \int \frac{Ax+B}{[q((\alpha x+\beta)^2+1)]^k}\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{smallmatrix} t=\alpha x+\beta \\ x=\frac{t-\beta}{\alpha} \\ \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{\alpha} \end{smallmatrix}} = \ldots = \frac{1}{q^k\alpha}\int \frac{Kt+L}{(t^2+1)^k}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{K}{2q^k\alpha}\int \frac{2t}{(t^2+1)^k}\,\mathrm{d}t + \frac{L}{q^k\alpha}\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^k}.$$

Wystarczy więc obliczyć dwie powyższe całki. Pierwsza z nich to łatwe zadanie:

$$\int \frac{2t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^k} = \boxed{\begin{smallmatrix} t^2+1=s \\ 2t\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}s \end{smallmatrix}} = \int \frac{\mathrm{d}s}{s^k} = \begin{cases} \ln|s|+C & \text{gdy } k=1 \\ \frac{s^{1-k}}{1-k}+C & \text{gdy } k>1 \end{cases},$$

czyli:

$$\int \frac{2t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^k} = \begin{cases} \ln(1+t^2)+C & \text{gdy } k=1 \\ -\frac{1}{(k-1)(1+t^2)^{k-1}}+C & \text{gdy } k>1 \end{cases}. \tag{8:9}$$

Aby wyznaczyć tę drugą całkę, wprowadźmy dla uproszczenia oznaczenie:

$$I_k = \int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^k} \qquad (k \in \mathbb{N}_1).$$

Oczywiście — zgodnie z tabelką na stronie 41 — $I_1 = \operatorname{arctg} t + C$. Dla $k > 1$ wyprowadzimy rekurencyjny wzór na I_k, wychodząc od I_{k-1} (poniżej wykorzystujemy wzór (8:9)):

$$I_{k-1} = \int \frac{1+t^2}{(1+t^2)^k}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{(1+t^2)^k}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int t\cdot\frac{2t}{(1+t^2)^k}\,\mathrm{d}t = \boxed{\begin{smallmatrix} u=t & v'=\frac{2t}{(1+t^2)^k} \\ u'=1 & v=-\frac{1}{(k-1)(1+t^2)^{k-1}} \end{smallmatrix}} =$$
$$= I_k - \frac{t}{2(k-1)(1+t^2)^{k-1}} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(k-1)(1+t^2)^{k-1}} = I_k - \frac{t}{(2k-2)(1+t^2)^{k-1}} + \frac{1}{2k-2}I_{k-1},$$

skąd otrzymujemy wzór na I_k:

8.12 Twierdzenie.
Dla $I_k = \int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^k}$ zachodzi rekurencja:

$$\begin{cases} I_1 = \operatorname{arctg} t + C, \\ I_k = \frac{t}{(2k-2)(1+t^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2k-2}I_{k-1} \quad (k>1). \end{cases}$$

© Piotr Niemiec

8.13 Przykład.
Obliczmy $\int \frac{x-1}{(2x^2+2x+5)^2}\,\mathrm{d}x$. W tym celu najpierw przekształcamy trójmian z mianownika:

$$2x^2+2x+5 = 2(x^2+x)+5 = 2\Big(x+\frac{1}{2}\Big)^2+\frac{9}{2} = \frac{9}{2}\Big[\frac{4}{9}\Big(x+\frac{1}{2}\Big)^2+1\Big] = \frac{9}{2}\Big[\Big(\frac{2}{3}\Big(x+\frac{1}{2}\Big)\Big)^2+1\Big].$$

Zatem będziemy podstawiać $t = \frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$:

$$\int \frac{x-1}{(2x^2+2x+5)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x-1}{[\frac{9}{2}((\frac{2}{3}x+\frac{1}{3})^2+1)]^2}\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{array}{c}\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}=t\\ x=\frac{3t-1}{2}\\ \mathrm{d}x=\frac{3}{2}\,\mathrm{d}t\end{array}} = \int \frac{\frac{3t-1}{2}-1}{(\frac{9}{2})^2(t^2+1)^2}\cdot\frac{3}{2}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{4}{81}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{3t-3}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{9}\int\frac{t-1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{18}\int\frac{2t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{9}I_2 = \dots$$

Zgodnie ze wzorem (8:9), $\int\frac{2t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{1+t^2}+C$. Natomiast z Tw. 8.12 otrzymujemy: $I_2 = \frac{t}{2(1+t^2)}+\frac{1}{2}I_1 = \frac{t}{2(1+t^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C$. W takim razie powyższy rachunek możemy kontynuować następująco:

$$\dots = -\frac{1}{18(1+t^2)} - \Big(\frac{t}{18(1+t^2)}+\frac{1}{18}\operatorname{arctg}t\Big)+C = -\frac{1+t}{18(1+t^2)}-\frac{1}{18}\operatorname{arctg}t+C$$
$$= -\frac{\frac{2}{3}(x+2)}{18(1+(\frac{2}{3}x+\frac{1}{3})^2)}-\frac{1}{18}\operatorname{arctg}\Big(\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\Big)+C.$$

Teraz już pozostaje jedynie uprościć pierwszy ułamek powyższego wyrażenia, co pozostawiamy Czytelnikowi.

8.14 ***Uwaga.***
Z uwagi na to, że wzór rekurencyjny podany w Tw. 8.12 jest stosunkowo prosty, można łatwo odgadnąć wzór ogólny na I_k (dla $k>1$):

$$I_k = \frac{t}{(2k-2)(1+t^2)^{k-1}}+\frac{(2k-3)t}{(2k-2)(2k-4)(1+t^2)^{k-2}}+\dots+\frac{(2k-3)(2k-5)\cdot\ldots\cdot3\cdot t}{(2k-2)(2k-4)\cdot\ldots\cdot2(1+t^2)}$$
$$+\frac{(2k-3)(2k-5)\cdot\ldots\cdot1}{(2k-2)(2k-4)\cdot\ldots\cdot2}\operatorname{arctg}t+C.$$

Precyzyjnie, $I_k = a_0\operatorname{arctg}t+\sum_{j=1}^{k-1}a_j\frac{t}{(1+t^2)^j}$, gdzie, dla $j\in\{1,\dots,k-1\}$, a_j ma postać

$$a_j = \frac{(2j+1)(2j+3)\cdot\ldots\cdot(2k-3)}{2j(2j+2)\cdot\ldots\cdot(2k-2)}$$
$$= \frac{(2j+1)(2j+3)\cdot\ldots\cdot(2k-3)}{2^{k-j}\cdot j(j+1)\cdot\ldots\cdot(k-1)}\cdot\frac{(2j)!(2j+2)(2j+4)\cdot\ldots\cdot(2k-2)}{(2j)!(2j+2)(2j+4)\cdot\ldots\cdot(2k-2)}\cdot\frac{(j-1)!}{(j-1)!}$$
$$= \frac{(2k-2)!(j-1)!}{2^{k-j}(k-1)!(2j)!\cdot2^{k-j-1}(j+1)(j+2)\cdot\ldots\cdot(k-1)}\cdot\frac{j!}{j!}$$
$$= \frac{(2k-2)!(j-1)!j!}{2^{2k-2j-1}(k-1)!(2j)!(k-1)!} = \frac{(2k-2)!(j-1)!(j-1)!\cdot j}{4^{k-j}\cdot\frac{1}{2}(k-1)!^2(2j-2)!(2j-1)(2j)} = \frac{\binom{2k-2}{k-1}}{4^{k-j}\binom{2j-2}{j-1}(2j-1)}$$

i podobnie:

$$a_0 = \frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2k-3)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2k-2)} = \frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2k-3)}{2^{k-1}\cdot1\cdot2\cdot\ldots\cdot(k-1)}\cdot\frac{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2k-2)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2k-2)}$$
$$= \frac{(2k-2)!}{2^{k-1}(k-1)!\cdot2^{k-1}\cdot1\cdot2\cdot\ldots\cdot(k-1)} = \frac{(2k-2)!}{2^{2k-2}(k-1)!^2} = \frac{\binom{2k-2}{k-1}}{4^{k-1}}.$$

Tak więc:

$$\int\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^k} = \frac{\binom{2k-2}{k-1}}{4^{k-1}}\operatorname{arctg}t+\sum_{j=1}^{k-1}\frac{\binom{2k-2}{k-1}}{4^{k-j}\binom{2j-2}{j-1}(2j-1)}\cdot\frac{t}{(1+t^2)^j}+C.$$

© Piotr Niemiec

Na koniec tej sekcji przedstawiamy podsumowanie ogólnej metody wyznaczania całek nieoznaczonych z funkcji wymiernych.

Ogólny schemat całkowania funkcji wymiernych

1. Rozłożyć mianownik na czynniki stopnia 1 lub 2.

1a. Rozłożyć te czynniki stopnia 2 (mianownika), których wyróżnik jest liczbą nieujemną.

1b. Połączyć w jeden nawias czynniki proporcjonalne mianownika.

2. Rozpisać ułamki proste dla ułamka.

3. Rozwiązać równanie z niewiadomymi współczynnikami w licznikach rozkładu na ułamki proste.

4. Rozdzielić zadaną całkę na kombinację liniową całek z ułamków prostych.

5. Wyznaczyć całki ułamków prostych, stosując m.in. wzór (8:9) oraz Tw. 8.12 (por. końcowy wzór w Uwadze 8.14).

8.3 Całka oznaczona (Riemanna)

W tej części wprowadzimy całkę (oznaczoną) Riemanna. Zasadnicza różnica między całką nieoznaczoną a całką oznaczoną jest taka, że ta pierwsza jest funkcją (z parametrem C oznaczającym stały składnik), a ta druga jest liczbą (w najgorszym razie wielkością nieskończoną).

8.15 Definicja.
Podziałem odcinka $[a,b]\subset\mathbb{R}$ nazywamy skończony zestaw liczb:

$$\pi\colon\quad a=t_0<t_1<\ldots<t_r=b. \tag{8:10}$$

W powyższej sytuacji liczbę $\max\{t_k-t_{k-1}\colon\ k\in\{1,\ldots,r\}\}$ nazywamy *średnicą podziału* π i oznaczamy przez $\operatorname{diam}\pi$.

Jeśli π jest podziałem odcinka $[a,b]$ zadanym przez (8:10), zestaw liczb $\delta\colon\xi_1,\ldots,\xi_r$ nazywamy *układem punktów pośrednich zgodnym z* π, gdy:

$$\xi_k\in[t_{k-1},t_k]\qquad(k=1,\ldots,r).$$

Ciąg podziałów $\pi_1,\pi_2,\pi_3,\ldots$ odcinka $[a,b]$ nazywamy *normalnym ciągiem podziałów*, gdy $\lim_{n\to\infty}\operatorname{diam}\pi_n=0$.

Dla funkcji $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$, podziału π zadanego przez (8:10) oraz układu $\delta\colon\xi_1,\ldots,\xi_r$ punktów pośrednich zgodnego z π określamy ***sumę Riemanna*** *funkcji* f *wyznaczoną przez* π *i* δ jako:

$$S(f;\pi,\delta)\overset{\text{def}}{=}\sum_{k=1}^{r}f(\xi_k)(t_k-t_{k-1}).$$

Powiemy, że funkcja $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ jest *całkowalna w sensie Riemanna* [*w przedziale* $[a,b]$] (lub krótko: ***całkowalna***), jeśli f jest funkcją ograniczoną oraz istnieje liczba $c\in\mathbb{R}$, taka że dla dowolnego normalnego ciągu podziałów $\pi_1,\pi_2,\pi_3,\ldots$ odcinka $[a,b]$ oraz dowolnego ciągu $\delta_1,\delta_2,\delta_3,\ldots$, takiego że δ_n to układ punktów pośrednich zgodny z podziałem π_n (dla dowolnego indeksu n), zachodzi:

$$\lim_{n\to\infty}S(f;\pi_n,\delta_n)=c.$$

W powyższej sytuacji liczbę c nazywamy *całką Riemanna* (lub *całką oznaczoną Riemanna*; lub krótko: ***całką***) *z funkcji* f i oznaczamy ją przez $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. (Podobnie jak dla całek nieoznaczonych, litera x w zapisie całki może być zastąpiona dowolną inną, która w danym kontekście nie została użyta do oznaczenia czegokolwiek. Tak więc: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ to to samo co $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ lub np. $\int_a^b f(\alpha_p^\bullet)\,\mathrm{d}\alpha_p^\bullet$). Nietrudno pokazać, że powyższa liczba c jest jednoznacznie wyznaczona (o ile istnieje) i tym samym całka jest dobrze określona. W zapisie $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ funkcję f nazywamy funkcją *podcałkową*, a liczby a i b odpowiednio *dolną* i *górną granicą całkowania*.

Zacznijmy od podstawowych własności całki.

8.16 Obserwacja.

© Piotr Niemiec

(a) *Całkowanie jest operacją liniową. Precyzyjnie: jeśli* $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *są funkcjami całkowalnymi, to dla dowolnych stałych* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *również funkcja* $\alpha f + \beta g$ *jest całkowalna oraz:*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(b) *Jeśli funkcja* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *jest całkowalna w przedziale* $[a,b]$ *oraz* $[c,d] \subset [a,b]$*, to jest ona całkowalna w przedziale* $[c,d]$*.*

(c) *Jeśli* $a < b < c$ *oraz funkcja* $f\colon [a,c] \to \mathbb{R}$ *jest całkowalna w przedziałach* $[a,b]$ *i* $[b,c]$*, to jest ona także całkowalna w* $[a,c]$ *i zachodzi wzór:*

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

8.17 ***Uwaga.*** **(Interpretacja geometryczna całki oznaczonej)**
Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną.

- Jeśli f przyjmuje tylko wartości nieujemne, to całka $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ jest równa polu P_+ zbioru płaskiego

  (8:11) $$F_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x \in [a,b],\ 0 \le y \le f(x)\}.$$

  Innymi słowy, F_+ to fragment płaszczyzny (położony w pionowym pasie $a \le x \le b$) między osią X a wykresem funkcji.

- Jeśli f przyjmuje tylko wartości niedodatnie, to całka $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -P_-$, gdzie P_- to pole zbioru płaskiego

  (8:12) $$F_- \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x \in [a,b],\ f(x) \le y \le 0\}.$$

  (F_- to, podobnie jak F_+, fragment płaszczyzny położony w pionowym pasie $a \le x \le b$ między osią X a wykresem funkcji).

- W ogólności: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ to różnica pól: $P_+ - P_-$, gdzie $P_\pm$ to pola zbiorów $F_\pm$ zadanych przez (8:11) i (8:12).

8.18 Definicja.
Dla funkcji całkowalnej $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ oraz liczb $p, q \in [a,b]$, takich że $\boldsymbol{p \ge q}$ określamy $\int_p^q f(x)\,\mathrm{d}x$ w następujący sposób:

- $\int_p^q f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, gdy $p = q$;
- $\int_p^q f(x)\,\mathrm{d}(x) = -\int_q^p f(x)\,\mathrm{d}x$, gdy $p > q$.

Przy tak określonych wielkościach „całkowych”, wzór z punktu (c) Obs. 8.16 zachodzi w pełnej ogólności:

8.19 Obserwacja.
Jeśli $f\colon [p,q] \to \mathbb{R}$ *jest funkcją całkowalną i* a, b, c *to dowolne liczby z przedziału* $[p,q]$*, wtedy:*

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Wyznaczanie całek wprost z definicji jest wręcz niewykonalne. Aby więc można je było liczyć, potrzebne są pewne ogólnej natury metody i wzory. Dwie najważniejsze z nich przedstawiamy poniżej.

© Piotr Niemiec

8.20 Twierdzenie. (Podstawowe twierdzenie rachunku całkowego)
Każda funkcja ciągła $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna. Ponadto, jeśli funkcja $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest zadana wzorem:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

to F jest funkcją różniczkowalną w $[a,b]$ i $F'(x) = f(x)$ dla wszelkich $x \in [a,b]$.

8.21 Wniosek. (Związek całki nieoznaczonej z oznaczoną)
Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i załóżmy, że $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$ (gdzie $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest pewną funkcją). Wtedy

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

8.22 Twierdzenie.
Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie taka funkcją, taką że dla pewnego podziału

$$\pi\colon \quad a = t_0 < t_1 < \ldots < t_r = b$$

zachodzą własności:

- *funkcja f jest ciągła w każdym punkcie zbioru $[a,b] \setminus \{t_0, t_1, \ldots, t_r\}$;*
- *funkcja f ma jednostronne granice liczbowe w punktach $t_0, t_1, \ldots, t_r$.*

Dla dowolnego indeksu $k \in \{1, \ldots, r\}$ określamy funkcję $f_k^*\colon [t_{k-1}, t_k] \to \mathbb{R}$ wzorem:

$$f_k^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{gdy } t_{k-1} < x < t_k \\ \lim_{x \to t_{k-1}^+} f(x) & \text{gdy } x = t_{k-1} \\ \lim_{x \to t_k^-} f(x) & \text{gdy } x = t_k \end{cases}.$$

Wtedy funkcja f jest całkowalna, funkcje $f_1^*, \ldots, f_r^*$ są ciągłe oraz zachodzi wzór:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{r} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f_k^*(x)\,\mathrm{d}x.$$

Notacja. Na potrzeby rachunku całkowego (dla wygody), w nawiązaniu do Wn. 8.21, stosuje się następującą notację: jeśli $F(x)$ to wzór, który ma sens w przedziale $[a,b]$ i określa w nim funkcję ciągłą, wtedy:

$$(F(x))\Big|_a^b = [F(x)]_a^b \stackrel{\text{def}}{=} F(b) - F(a).$$

W przypadku, gdy $F(x)$ ma tylko jeden składnik, okrągły nawias w pierwszym napisie można pominąć i można pisać krótko $F(x)\Big|_a^b$. Powyższą notację można także stosować w stosunku do wzorów, które są określone jedynie w przedziale otwartym (a,b), a w jego krańcach mają granice (niekoniecznie liczbowe!): jeśli tylko napis $\lim_{x\to b^-} f(x) - \lim_{x\to a^+} f(x)$ ma sens i nie jest symbolem nieoznaczonym, jego wartość staje się wartością symboli $(F(x))\Big|_a^b$ oraz $[F(x)]_a^b$.

Podamy teraz przykłady obliczania całek z użyciem wzoru podanego w przywołanym powyżej wniosku.

8.23 Przykład.
Na dwa sposoby obliczymy całki:

(A) $\int_0^2 x^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ oraz

© Piotr Niemiec

(B) $\int_0^{\pi/2} \cos x \sin^{2025} x \,\mathrm{d}x$.

Pierwszy sposób, niezalecany, polega na wyznaczeniu całki nieoznaczonej z funkcji podcałkowej i dopiero na końcu zastosowaniu wzoru z Wn. 8.21. Drugi sposób, zdecydowanie szybszy i często zalecany, polega na stosowaniu wszelkich reguł dla całek nieoznaczonych w sposób dostosowany do całek oznaczonych — w szczególności, przy podstawieniu nie powraca się do pierwotnej zmiennej, tylko przelicza się granice całkowania.

I sposób (niezalecany).

Zgodnie z powyższą zapowiedzią, w tym sposobie najpierw wyznaczamy całkę nieoznaczoną:

(A)

$$\int x^2\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{smallmatrix} u=x^2 & v'=\mathrm{e}^x \\ u'=2x & v=\mathrm{e}^x \end{smallmatrix}} = x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{smallmatrix} u=x & v'=\mathrm{e}^x \\ u'=1 & v=\mathrm{e}^x \end{smallmatrix}} = x^2\mathrm{e}^x - 2\left(x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x\right)$$
$$= x^2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x + C = (x^2 - 2x + 2)\mathrm{e}^x + C.$$

W takim razie $\int_0^2 x^2\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = (x^2 - 2x + 2)\mathrm{e}^x\Big|_0^2 = 2\mathrm{e}^2 - 2$.

(B)

$$\int \cos x \sin^{2025} x \,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{smallmatrix} \sin x = t \\ \cos x \,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{smallmatrix}} = \int t^{2025} \,\mathrm{d}t = \frac{t^{2026}}{2026} + C = \frac{\sin^{2026} x}{2026} + C.$$

A zatem $\int_0^{\pi/2} \cos x \sin^{2025} x \,\mathrm{d}x = \frac{\sin^{2026} x}{2026}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2026}$.

II sposób (zalecany).

W tym sposobie na bieżąco przeliczamy wartości liczbowe całek dla poszczególnych „elementów" całki nieoznaczonej. W szczególności, nigdzie nie pojawia się końcówka $+C$. Warto zwrócić szczególną uwagę na **sposób przeliczenia granic całkowania przy podstawianiu** w ramce w przykładzie (B).

(A)

$$\int_0^2 x^2\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{smallmatrix} u=x^2 & v'=\mathrm{e}^x \\ u'=2x & v=\mathrm{e}^x \end{smallmatrix}} = x^2\mathrm{e}^x\Big|_0^2 - 2\int_0^2 x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{smallmatrix} u=x & v'=\mathrm{e}^x \\ u'=1 & v=\mathrm{e}^x \end{smallmatrix}} = 4\mathrm{e}^2 - 2\left(x\mathrm{e}^x\Big|_0^2 - \int_0^2 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x\right)$$
$$= 4\mathrm{e}^2 - 4\mathrm{e}^2 + 2\mathrm{e}^x\Big|_0^2 = 2\mathrm{e}^2 - 2.$$

(B)

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \sin^{2025} x \,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{smallmatrix} \sin x = t \\ \cos x \,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ x=0 \Longrightarrow t=0 \\ x=\pi/2 \Longrightarrow t=1 \end{smallmatrix}} = \int_0^1 t^{2025} \,\mathrm{d}t = \frac{t^{2026}}{2026}\Big|_0^1 = \frac{1}{2026}.$$

Jak pokazuje poniższy rezultat, całka przydaje się do liczenia pól figur płaskich (lub ogólniej: obszarów płaszczyzny specjalnej postaci).

8.24 Twierdzenie.
Niech $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będą dwiema funkcjami ciągłymi, takimi że

$$\forall t \in [a,b]\colon\ f(t) \le g(t).$$

Pole obszaru $F_X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x \in [a,b],\ f(x) \le y \le g(x)\}$ to całka $\int_a^b (g(x) - f(x)) \,\mathrm{d}x$. Podobnie, pole obszaru $F_Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ y \in [a,b],\ f(y) \le x \le g(y)\}$ to całka $\int_a^b (g(y) - f(y)) \,\mathrm{d}y$. (Tym samym oba te obszary mają równe pola).

8.25 Przykład.
Obliczymy na trzy sposoby pole $|F|$ obszaru F powstałego przez doklejenie do lewego i prawego boku kwadratu $[-1,1]^2$ półkola o promieniu 1 (którego średnicą jest ów bok).

© Piotr Niemiec

(A) Stosując wzory ze szkoły średniej, łatwo wyliczyć pole obszaru F, dodając do siebie pola kwadratu oraz dwóch półkoli: $|F| = 4 + \pi$.

(B) Tym razem zastosujemy całkę oznaczoną do wyznaczenia pola, opisując obszar F sposobem „najpierw współrzędna x, potem współrzędna y". Dlatego najpierw odnajdujemy współrzędne punktów położonych w F najbardziej na lewo oraz najbardziej na prawo (są to, odpowiednio, punkty $(-2, 0)$) oraz $(2, 0)$. Tak więc zakres dla zmiennej x to $-2 \leq x \leq 2$. Jeśli teraz ustalimy w sposób zupełnie dowolny współrzędną x z tego zakresu, powiedzmy, $x = x_o$, i wśród punktów ze zbioru F położonych na prostej pionowej $x = x_o$ odnajdziemy punkt położone, odpowiednio, najniżej i najwyżej, będą one mieć współrzędnej postaci (x_o, y_*) oraz (x_o, y^*), przy czym wzór na drugą współrzędną będzie zależeć od wartości x_o:

- dla $x_o \in [-1, 1]$: $y_* = -1$, $y^* = 1$;
- dla $x_o \in [-2, -1]$: oba ww. punkty leżą na obrzeżu lewego półkola obszaru, więc ich współrzędne spełniają równanie $(x+1)^2 + y^2 = 1$, czyli $y_* = -\sqrt{1-(x_o+1)^2}$ oraz $y^* = \sqrt{1-(x_o+1)^2}$;
- podobnie dla $x_o \in [1, 2]$: oba ww. punkty leżą na obrzeżu prawego półkola obszaru, więc ich współrzędne spełniają równanie $(x-1)^2 + y^2 = 1$, czyli $y_* = -\sqrt{1-(x_o-1)^2}$ oraz $y^* = \sqrt{1-(x_o-1)^2}$.

Tak więc widzimy, że opis zakresu zmiennej y istotnie zależy od wartości pierwszej zmiennej. Z tego powodu obszar F rozdzielamy na 3 części (dokładnie to samo zrobiliśmy w sposobie (A) powyżej!):

$$F_1\colon \begin{cases} -2 \leq x \leq -1 \\ -\sqrt{1-(x+1)^2} \leq y \leq \sqrt{1-(x+1)^2} \end{cases}, \qquad F_2\colon \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases},$$

$$F_3\colon \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ -\sqrt{1-(x-1)^2} \leq y \leq \sqrt{1-(x-1)^2} \end{cases}.$$

Wtedy $|F| = |F_1| + |F_2| + |F_3|$ i wystarczy wyznaczyć pola tych trzech obszarów. Za każdym razem zastosujemy Tw. 8.24. Najprościej obliczyć pole drugiego z nich: $|F_2| = \int_{-1}^{1} (1 - (-1))\,\mathrm{d}x = 4$. Wyznaczenie pola obszaru F_1 jest znacznie trudniejsze:

$$|F_1| = \int_{-2}^{-1} \left(\sqrt{1-(x+1)^2} - \left(-\sqrt{1-(x+1)^2}\right)\right) \mathrm{d}x = \boxed{\begin{array}{c} -x-1=t \\ \mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t \\ x=-2 \Longrightarrow t=1 \\ x=-1 \Longrightarrow t=0 \end{array}} = -2\int_1^0 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= 2\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Zarazem:

$$\int \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1-t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t - \int t \cdot \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \boxed{\begin{array}{cc} u=t & v' = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \\ u'=1 & v = -\sqrt{1-t^2} \end{array}}$$
$$= \arcsin t + t\sqrt{1-t^2} - \int \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t,$$

czyli

$$\int \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\arcsin t + t\sqrt{1-t^2}) + C. \tag{8:13}$$

Tym samym $|F_1| = (\arcsin t + t\sqrt{1-t^2})\Big|_0^1 = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}$. Aby wyznaczyć pole obszaru F_3, należy wykonać podstawienie $x - 1 = t$, które prowadzi do identycznej całki jak w rachunku dla $|F_1|$, i dlatego $|F_3| = |F_1|$. Ostatecznie otrzymujemy $|F| = 4 + \pi$.

(C) Tym razem opiszemy obszar F sposobem „najpierw y, potem x" (i ponownie zastosujemy Tw. 8.24. Łatwo zauważyć, że punkty położone najniżej (odp. najwyżej) w obszarze F mają drugą współrzędną równą -1 (odp. 1), czyli $-1 \leq y \leq 1$. Jeśli teraz ustalimy w sposób dowolny wartość zmiennej y z tego zakresu, powiedzmy $y = y_o \in [-1, 1]$, równie łatwo zobaczyć, że wśród punktów obszaru F położonych na prostej poziomej $y = y_o$ najbardziej na lewo (odp. na prawo) położony jest punkt na obrzeżu lewej (odp. prawej), więc jego współrzędne spełniają równanie $(x+1)^2 + y^2 = 1$ (odp. $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Tym samym zakres pierwszej współrzędnej dla punktów z obszaru F położonych na prostej $y = y_o$ ma postać:

$$-1 - \sqrt{1-y_o^2} \leq x \leq 1 + \sqrt{1-y_o^2}.$$

© Piotr Niemiec

A więc tym razem zbiór można opisać jednym wzorem, bez dzielenia go na mniejsze obszary:

$$F\colon \begin{cases} -1 \le y \le 1 \\ -1-\sqrt{1-y^2} \le x \le 1+\sqrt{1-y^2} \end{cases}.$$

Stąd (poniżej stosujemy wzór (8:13)):

$$|F| = \int_{-1}^{1} ((1+\sqrt{1-y^2}) - (-1-\sqrt{1-y^2}))\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} (2+2\sqrt{1-y^2})\,\mathrm{d}y$$
$$= (2y + \arcsin y + y\sqrt{1-y^2})\Big|_{-1}^{1} = 2 + \arcsin 1 - (-2 + \arcsin(-1)) = 4+\pi.$$

8.26 Przykład.
Niektóre całki oznaczone można wyliczyć, nawet jeśli nie jesteśmy w stanie wyznaczyć całki nieoznaczonej. Najprostszym tego typu przykładem jest całka postaci $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$, gdzie $a>0$, a f jest **nieparzystą** funkcją ciągłą w przedziale $[-a,a]$, to $\int_{-a}^{a} f(x) = 0$. Istotnie, funkcja ta jest całkowalna (na podstawie Tw. 8.20), więc jest określona całka z niej (która jest liczbą). Co więcej:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{smallmatrix} x=-t \\ \mathrm{d}x=-\,\mathrm{d}t \\ x=-a \implies t=a \\ x=a \implies t=-a \end{smallmatrix}} = -\int_{a}^{-a} f(-t)\,\mathrm{d}t = -\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

czyli $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$, a stąd $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Podamy teraz podobny przykład, ale nieco trudniejszy. Obliczmy całkę $\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{x^2-\pi x}\cos x\,\mathrm{d}x$. Wszelkie próby wyznaczenia całki nieoznaczonej z tutejszej funkcji podcałkowej zakończą się niepowodzeniem. Co więcej, gdyby górna granica całkowania miała inną wartość, powyższej całki mogłoby nie dać się wyliczyć w sposób ściśle dokładny. W tym jednak konkretnym przypadku całka jest wyliczalna: po pierwsze, funkcja podcałkowa jest ciągła, więc całka istnieje (i jest liczbą); po drugie:

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{x(x-\pi)}\cos x\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{smallmatrix} x=\pi-t \\ \mathrm{d}x=-\,\mathrm{d}t \\ x=0 \implies t=\pi \\ x=\pi \implies t=0 \end{smallmatrix}} = -\int_{\pi}^{0} \mathrm{e}^{(\pi-t)(-t)}\cos(\pi-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{t(t-\pi)}(-\cos t)\,\mathrm{d}t,$$

czyli $\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{x(x-\pi)}\cos x\,\mathrm{d}x = -\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{x(x-\pi)}\cos x\,\mathrm{d}x$, a zatem $\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{x(x-\pi)}\cos x\,\mathrm{d}x = 0$.

Na koniec tej sekcji podamy twierdzenie, które w kontekście całki Riemanna jest natychmiastowym wnioskiem z (ogólniejszego) sztandarowego twierdzenia teorii całki Lebesgue'a.

8.27 Twierdzenie. (Twierdzenie o zmajoryzowanym przejściu do granicy pod znakiem całki)
Jeśli funkcje $f_1, f_2, f_3, \ldots : [a,b] \to \mathbb{R}$ są całkowalne i podobnie funkcja $g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ jest całkowalna oraz zachodzą własności:

- *istnieje stała $M>0$, taka że $|f_n(x)| \le M$ dla wszelkich $n\in\mathbb{N}_1$ oraz $x\in[a,b]$;*
- *$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x)$ dla wszelkich $x\in[a,b]$,*

to:

$$\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \to \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \quad (n\to\infty).$$

8.4 Całka niewłaściwa

Tw. 8.22 pozwala całkować „porządne" funkcje — nawet takie, które są nieciągłe w kilku punktach. Rezultat ten nie obejmuje jednak przypadku, gdy funkcja podcałkowa ma granice jednostronne w każdym punkcie, ale niektóre z nich są wielkościami nieskończonymi. Całka oznaczona zdefiniowana w poprzedniej sekcji nie obejmuje również całek po przedziałach nieograniczonych (tzn. takich całek, w których przynajmniej jedna z granic całkowania nie jest liczbą).

© Piotr Niemiec

W tej sekcji omówimy pokrótce ideę całkowania w obu ww. przypadkach — mówi się wtedy o całce *niewłaściwej*. Jak zobaczymy, koncepcja ta będzie bazować na całce Riemanna (zdefiniowanej w poprzedniej sekcji) i polegać na przejściu do granicy.

8.28 Definicja.
Niech I będzie przedziałem otwartym postaci (a,b) (gdzie $a,b\in\bar{\mathbb{R}}$), a $f\colon I\to\mathbb{R}$ dowolną funkcją. Mówimy, że określona jest całka *niewłaściwa* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, jeśli:

- dla dowolnych liczb c i d, takich że $a<c<d<b$, funkcja f jest całkowalna w przedziale $[c,d]$; oraz
- istnieją liczbowe granice $\lim_{A\to a^+}\int_A^C f(x)\,\mathrm{d}x$ oraz $\lim_{B\to b^-}\int_C^B f(x)\,\mathrm{d}x$, gdzie C jest dowolnie ustalonym punktem z przedziału I.

Jeśli oba powyższe warunki są spełnione, liczbę $\lim_{A\to a^+}\int_A^C f(x)\,\mathrm{d}x+\lim_{B\to b^-}\int_C^B f(x)\,\mathrm{d}x$ nazywamy całką *niewłaściwą* z funkcji f po przedziale I i oznaczamy przez $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. W tej sytuacji mówimy także, że całka niewłaściwa $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ jest *zbieżna*; a w przeciwnym przypadku, że jest *rozbieżna*. Dowodzi się, że zbieżność całki niewłaściwej oraz jej wartość nie zależą od wyboru punktu $C\in I$, który występuje w powyższych granicach.

Ogólniej, jeśli $F=\{t_0,t_1,\dots,t_r\}$ jest zbiorem skończonym, takim że

$$a=t_0<t_1<\ldots<t_r=b,$$

a f jest funkcją określoną na zbiorze $(a,b)\setminus F$ (tzn. $f\colon(a,b)\setminus F\to\mathbb{R}$), to powiemy, że określona jest całka *niewłaściwa* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, gdy zbieżne są wszystkie całki niewłaściwe postaci $\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x)\,\mathrm{d}x$ (gdzie $k\in\{1,\dots,r\}$). W powyższej sytuacji sumę $\sum_{k=1}^r\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x)\,\mathrm{d}x$ nazywamy całką *niewłaściwą z funkcji f po przedziale* (a,b) i oznaczamy ją przez $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Podobnie jak poprzednio, mówimy o zbieżności lub rozbieżności takiej całki.

W powyższych rozważaniach te punkty przedziału $[a,b]$, w których funkcja nie jest określona lub które są jego nieskończonymi krańcami, nazywamy *osobliwościami* całki.

Całki niewłaściwe mają właściwości podobne do szeregów. I podobnie jak w przypadku szeregów, częściej interesuje nas sama tylko zbieżność takiej całki, a nie jej dokładna wartość. Przykład podobieństwa do szeregów ilustruje następujące twierdzenie.

8.29 Twierdzenie. (Kryterium porównawcze dla całek nieoznaczonych)
Jeśli S jest zbiorem skończonym zawierającym punkty $a,b\in\bar{\mathbb{R}}$, a $f,g\colon(a,b)\setminus S\to\mathbb{R}$ to dowolne funkcje, takie że:

- *funkcja f jest całkowalna w każdym ograniczonym przedziale domkniętym zawartym w $(a,b)\setminus S$; oraz*
- *$|f(x)|\le g(x)$ dla wszelkich $x\in(a,b)\setminus S$; oraz*
- *całka $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ jest zbieżna,*

to całka $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ także jest zbieżna.

Istnieje również ciekawy związek między zbieżnościami szeregu i całki:

8.30 Twierdzenie. (Kryterium całkowe)
Jeśli $f\colon[0,\infty)\to\mathbb{R}_+$ jest funkcją słabo malejącą, całkowalną w każdym przedziale postaci $[0,N]$ (gdzie $N\in\mathbb{N}_1$), to:

$$\text{szereg } \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \text{ jest zbieżny} \iff \text{całka } \int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ jest zbieżna.}$$

Ponadto, gdy powyższe szereg i całka są zbieżne, zachodzą nierówności:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\le\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\le\sum_{n=0}^{\infty} f(n).$$

© Piotr Niemiec

8.31 Przykład.
Zbadamy zbieżność całki $\int_a^b x^p\,\mathrm{d}x$, gdzie p to parametr rzeczywisty, a granice całkowania zostaną konkretnie wskazane poniżej.

(A) Zacznijmy od $\int_1^\infty x^p\,\mathrm{d}x$. Bez względu na wartość parametru p, całka ta ma tylko jedną osobliwość — jest nim górna granica całkowania. Mimo że jest to wielkość nieskończona, możemy tę całkę niewłaściwą policzyć w niemal taki sam sposób, jak zwykłą całkę oznaczoną; należy jednak pamiętać, że w miejscu, w którym należy „podstawić" za zmienną wielkość ∞, tak naprawdę należy policzyć granicę stosownego wzoru w ∞:

$$\int_1^\infty x^p\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_1^\infty & \text{gdy } p\neq -1 \\ \ln x\Big|_1^\infty & \text{gdy } p=-1 \end{cases} = \begin{cases} \infty - \frac{1}{p+1} & \text{gdy } p>-1 \\ 0-\frac{1}{p+1} & \text{gdy } p<-1 \\ \infty - 0 & \text{gdy } p=-1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{-(p+1)} & \text{gdy } p<-1 \\ \infty & \text{gdy } p\geq -1 \end{cases},$$

a więc całka ta jest zbieżna dokładnie wtedy, gdy $p<-1$.

(B) Tym razem rozważmy $\int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x$ (z umową, że $0^0=1$). Na wstępie zauważmy, że dla $p\geq 0$ całka ta jest zwykłą całką oznaczoną i jej wartość to (w tym przypadku) $\frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{p+1}$. Dla $p<0$ całka ta ma jedną osobliwość — w dolnej granicy całkowania. W tym przypadku całkę tę możemy wyznaczyć podobnie, jak całkę z przykładu (A) (podobnie jak tam, w miejscu, w którym należy „podstawić" 0, w istocie należy policzyć granicę w 0^+):

$$\int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_0^1 & \text{gdy } p\in(-\infty,-1)\cup(-1,0) \\ \ln x\Big|_0^1 & \text{gdy } p=-1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{p+1}-(-\infty) & \text{gdy } p<-1 \\ \frac{1}{p+1}-0 & \text{gdy } p\in(-1,0) \\ 0-(-\infty) & \text{gdy } p=-1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{p+1} & \text{gdy } p\in(-1,0) \\ \infty & \text{gdy } p\leq -1 \end{cases},$$

a więc całka $\int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x$ ma wartość liczbową dokładnie wtedy, gdy $p>-1$.

(C) Na koniec rozważmy całkę $\int_0^\infty x^p\,\mathrm{d}x$. Całka ta ma osobliwość w górnej granicy całkowania oraz ma osobliwość w dolnej granicy całkowania dla $p<0$. Bez względu na to, jaka jest wartość parametru (i ile jest osobliwości), aby ta całka była zbieżna, muszą być określone (liczbowe) całki $\int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x$ oraz $\int_1^\infty x^p\,\mathrm{d}x$. Z punktów (A) i (B) powyżej wynika, że nie istnieje taka wartość $p\in\mathbb{R}$, by obie te całki miały wartość liczbową. Tak więc całka $\int_0^\infty x^p\,\mathrm{d}x$ jest rozbieżna dla dowolnej wartości p.

8.32 Przykład.
Zbadajmy, dla jakich wartości parametru $p<0$ zbieżna jest całka $\int_{-1}^1 (1+x)^p|x|^p(1-x)^p\,\mathrm{d}x$. Całka ta ma trzy osobliwości: w -1, 0 oraz 1. Zatem zbieżność tej całki jest równoważna zbieżności czterech całek: $\int_{-1}^{-\frac12}(1+x)^p|x|^p(1-x)^p\,\mathrm{d}x$, $\int_{-\frac12}^0 (1+x)^p|x|^p(1-x)^p\,\mathrm{d}x$, $\int_0^{\frac12}(1+x)^p|x|^p(1-x)^p\,\mathrm{d}x$ oraz $\int_{\frac12}^1(1+x)^p|x|^p(1-x)^p\,\mathrm{d}x$. Zbadamy te całki niezależnie, stosując kryterium porównawcze.

- Dla $x\in[-1,-\frac12]$, $\frac12\leq|x|\leq 1$ oraz $1\leq 1-x\leq 2$. Tym samym (skoro $p<0$) $2^p\leq|x|^p(1-x)^p\leq 2^{-p}$ i w konsekwencji

$$2^p(1+x)^p\leq(1+x)^p|x|^p(1-x)^p\leq 2^p(1+x)^p \qquad \left(x\in\left(-1,-\frac12\right]\right).$$

Zatem (na podstawie Tw. 8.29):

$$\text{całka } \int_{-1}^{-\frac12}(1+x)^p|x|^p(1-x)^p\,\mathrm{d}x \text{ jest zbieżna} \iff \text{całka } \int_{-1}^{-\frac12}(1+x)^p\,\mathrm{d}x \text{ jest zbieżna.}$$

Wystarczy więc obliczyć łatwiejszą całkę. Posłużymy się przy tym wzorami z Prz. 8.31:

$$\int_{-1}^{-\frac12}(1+x)^p\,\mathrm{d}x = \left[\begin{smallmatrix} 1+x=\frac12 t \\ \mathrm{d}x=\frac12\,\mathrm{d}t \\ x=-1\implies t=0 \\ x=-\frac12\implies t=1 \end{smallmatrix}\right] = \frac12\int_0^1 t^p\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \frac{1}{2(p+1)} & \text{gdy } p\in(-1,0) \\ \infty & \text{gdy } p\leq -1 \end{cases}.$$

© Piotr Niemiec

- Dla $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $2^p \le (1 \pm x)^p \le 2^{-p}$, więc $4^p|x|^p \le (1-x)^p|x|^p(1+x)^p \le 4^{-p}|x|^p$ dla $x \in [-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2}]$. Tak więc, podobnie jak w poprzednim przypadku, stwierdzamy, że:

$$\text{całka } \int_{-\frac{1}{2}}^{0} (1+x)^p|x|^p(1-x)^p \,\mathrm{d}x \text{ jest zbieżna} \iff \text{całka } \int_{-\frac{1}{2}}^{0} |x|^p \,\mathrm{d}x \text{ jest zbieżna,}$$
$$\text{całka } \int_{0}^{\frac{1}{2}} (1+x)^p|x|^p(1-x)^p \,\mathrm{d}x \text{ jest zbieżna} \iff \text{całka } \int_{0}^{\frac{1}{2}} |x|^p \,\mathrm{d}x \text{ jest zbieżna.}$$

  Zauważmy też, że

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} |x|^p \,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{smallmatrix} x=-t \\ \mathrm{d}x=-\,\mathrm{d}t \\ x=-\frac{1}{2} \implies t=\frac{1}{2} \\ x=0 \implies t=0 \end{smallmatrix}} = -\int_{\frac{1}{2}}^{0} |-t|^p \,\mathrm{d}p = \int_{0}^{\frac{1}{2}} |t|^p \,\mathrm{d}t,$$

  więc wystarczy obliczyć tylko całkę po przedziale $[0, \frac{1}{2}]$, co czynimy poniżej (ponownie stosując wzory z poprzedniego przykładu):

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}} |x|^p \,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{smallmatrix} x=\frac{1}{2}t \\ \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \\ x=0 \implies t=0 \\ x=\frac{1}{2} \implies t=1 \end{smallmatrix}} = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} t^p \,\mathrm{d}t = \begin{cases} \frac{1}{2(p+1)} & \text{gdy } p \in (-1,0) \\ \infty & \text{gdy } p \le -1 \end{cases}.$$

- Wreszcie, dla $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, rozumowanie jest podobne jak w pierwszym przypadku (pozostawiamy je jako ćwiczenie) i prowadzi do konkluzji:

$$\text{całka } \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1+x)^p|x|^p(1-x)^p \,\mathrm{d}x \text{ jest zbieżna} \iff \text{całka } \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-x)^p \,\mathrm{d}x \text{ jest zbieżna.}$$

  Ale po podstawieniu $1 - x = \frac{1}{2}t$ otrzymuje się, że:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-x)^p \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{2(p+1)} & \text{gdy } p \in (-1,0) \\ \infty & \text{gdy } p \le -1 \end{cases}.$$

Podsumowując, z trzech powyższych przypadków wynika, że zadana całka niewłaściwa jest zbieżna dokładnie wtedy, gdy $p \in (-1, 0)$.

9 Funkcje wielu zmiennych

Główne koncepcje (takie jak ciągłość, granica, pochodna, całka), jakie omówiliśmy w poprzednich rozdziałach dla funkcji jednej zmiennej, mają swe naturalne uogólnienia dla funkcji o dowolnej (skończonej) liczbie zmiennych. Niniejszy rozdział poświęcony jest omówieniu powyższych pojęć w kontekście takich właśnie funkcji.

W niniejszym rozdziale $\mathbb{R}^d$ oznacza przestrzeń wektorową wszystkich d-wyrazowych ciągów o wyrazach rzeczywistych:

$$\mathbb{R}^d = \{(x_1, x_2, \ldots, x_d) \colon \ x_1, x_2, \ldots, x_d \in \mathbb{R}\}.$$

Powyższy parametr d nazywamy *wymiarem* przestrzeni $\mathbb{R}^d$. Choć w rozważaniach teoretycznych ów wymiar będzie dowolną dodatnią liczbą całkowitą, w praktyce (w szczególności, w zadaniach na ćwiczenia oraz w przykładach) ograniczymy się do $d \in \{2, 3\}$.

Zasadnicze koncepcje analizy matematycznej związane są z pojęciem granicy. Aby móc o niej mówić w $\mathbb{R}^d$, wprowadza się naturalną metrykę na tej przestrzeni. Jako że jest ona ściśle związana z tzw. iloczynem skalarnym oraz normą przezeń generowaną, informacyjnie podajemy także wzory na te funkcje:

9.1 Definicja.
Standardowy iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^d$ to funkcja:

$$\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \ni (x, y) \mapsto \langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{d} x_k y_k \in \mathbb{R} \qquad (x = (x_1, \ldots, x_d),\ y = (y_1, \ldots, y_d)).$$

Normą euklidesową w $\mathbb{R}^d$ nazywamy funkcję daną wzorem:

$$\mathbb{R}^d \ni x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \in \mathbb{R}_+.$$

© Piotr Niemiec

Metryka euklidesowa w $\mathbb{R}^d$ to metryka d_e (na $\mathbb{R}^d$) dana wzorem $d_e(x,y) = \|x-y\|$. Nazywa się ją także metryką *naturalną*. Zbiór $\mathbb{R}^d$ wyposażony w metrykę euklidesową nazywa się *d-wymiarową przestrzenią euklidesową*.

9.2 ***Uwaga.***
Dowodzi się, że:

$$|\langle x,y\rangle| \le \|x\|\cdot\|y\| \qquad (x,y\in\mathbb{R}^d).$$

Jest to tzw. *nierówność Cauchy'ego-Schwarza*. Z jej pomocą bez trudu dowodzi się, że:

$$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\| \qquad (x,y\in\mathbb{R}^d).$$

Powyższa nierówność, zwana *nierównością trójkąta* dla norm, to jeden z trzech warunków definiujących normę na przestrzeni wektorowej (pozostałe dwa, dla normy euklidesowej dość oczywiste, to: $\|tx\| = |t|\cdot\|x\|$ oraz $\|x\| > 0$ dla dowolnej liczby t oraz dowolnego niezerowego wektora x). Bardzo łatwo sprawdza się, że każda norma wyznacza metrykę — zadaną wzorem podanym w Def. 9.1.

W całym tym rozdziale symbole $e_1,\dots,e_d$ są zarezerwowane na oznaczenie *bazy kanonicznej* przestrzeni $\mathbb{R}^d$, tzn. e_k jest wektorem z $\mathbb{R}^d$, którego współrzędna o numerze k ma wartość 1, a wszystkie pozostałe są równe 0 (czyli $e_1 = (1,0,\dots,0)\in\mathbb{R}^d$, $e_2 = (0,1,0,\dots,0)\in\mathbb{R}^d$, itd., $e_d = (0,\dots,0,1)\in\mathbb{R}^d$).

9.1 Granica i ciągłość

Gdy już wiemy, jaka metryka zadana jest na przestrzeni $\mathbb{R}^d$, możemy posługiwać się pojęciami: zbioru otwartego (Def. 2.8, str. 4); zbioru ograniczonego (Def. 2.13, str. 5); punktu skupienia zbioru (Def. 6.8, str. 24); granicy ciągu (Def. 3.2, str. 6) i funkcji (Def. 6.8 i fragmenty Def. 6.9, str. 24); oraz ciągłości funkcji (Def. 6.1, str. 21). Poniższy, bardzo ważny i zarazem podstawowy, rezultat wyjaśnia, na czym polega zbieżność w przestrzeniach euklidesowych.

9.3 Twierdzenie.

(A) *Ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}^d$, gdzie $x_n = (x_n^{(1)},\dots,x_n^{(d)})$, jest zbieżny (w metryce euklidesowej) do wektora $g = (g^{(1)},\dots,g^{(d)})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n\to\infty} x_n^{(k)} = g^{(k)}$ dla $k = 1,\dots,d$.*

(B) *Jeśli A jest podzbiorem przestrzeni metrycznej (X,ρ), $a\in X$ jest punktem skupienia zbioru A (lub $a\in\{-\infty,\infty\}$ gdy $X=\mathbb{R}$ i zbiór A jest nieograniczony od dołu lub od góry), $f\colon A\to\mathbb{R}^d$ jest funkcją postaci $f(x) = (f_1(x),\dots,f_d(x))$ (gdzie $f_k\colon A\to\mathbb{R}$) oraz $g = (g_1,\dots,g_d)$ należy do $\mathbb{R}^d$, to:*

$$\lim_{x\to a} f(x) = g \iff \forall k\in\{1,\dots,d\}\colon \lim_{x\to a} f_k(x) = g_k.$$

Analogiczna charakteryzacja obowiązuje dla granic jednostronnych i jednostronnych punktów skupienia, gdy $X=\mathbb{R}$.

(C) *Jeśli $f\colon X\to\mathbb{R}^d$, gdzie X to przestrzeń metryczna oraz $f(x) = (f_1(x),\dots,f_d(x))$ (przy czym $f_k\colon X\to\mathbb{R}$), to funkcja f jest ciągła (odp. jest ciągła w punkcie $a\in X$) wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie funkcje $f_1,\dots,f_d$ są ciągłe (odp. są ciągłe w punkcie a).*

Podobnie jak dla funkcji jednej zmiennej, wszystkie typowe funkcje są ciągłe (por. Tw. 6.2, str. 22):

9.4 Twierdzenie.
Jeśli funkcja wielu zmiennych o wartościach w $\mathbb{R}$ zadana jest jednym wzorem, w którym występuje tylko skończenie wiele operacji oraz nie występują inne operacje niż: 5 podstawowych działań algebraicznych, pierwiastkowanie, wartość bezwzględna, funkcje trygonometryczne, logarytmy i funkcje cyklometryczne, to funkcja ta jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny[*3)].

[*3)] Pod warunkiem, że dziedzina jest określona zgodnie z regułą potęgowania, tzn. że o wyrażeniu, które jest potęgą, której i podstawa, i wykładnik zależą od pewnych argumentów funkcji, zakładamy, że podstawa potęgi jest dodatnia.

© Piotr Niemiec

9.5 Przykład.
Mając na uwadze dwa powyższe twierdzenia, wydawać by się mogło, że sprawdzanie, czy funkcja wielu zmiennych jest ciągła, powinno być równie łatwe, jak w przypadku funkcji jednej zmiennej. Poniższy przykład ma za zadanie przekonać Czytelnika, że tak nie jest — ciągłość dla funkcji wielu zmiennych zadanej kilkoma wzorami to nierzadko trudne zadanie.

Na zbiorze $A = ((0,\infty)\times(0,\infty)) \cup \{(0,0)\}$ określamy funkcję $f\colon A \to \mathbb{R}$ wzorem:

$$f(x,y) = \begin{cases} a & \text{gdy } x = y = 0 \\ \frac{x^b y^c}{x^2+y^2} & \text{gdy } (x,y) \neq (0,0) \end{cases},$$

gdzie a, b, c to parametry. Pytamy, dla jakich wartości tych parametrów powyższa funkcja jest ciągła w punkcie $(0,0)$. W przypadku funkcji dwóch (lub większej liczby) zmiennych nie ma odpowiednika reguły de l'Hospitala, więc wyznaczenie granicy w punkcie $(0,0)$ funkcji f nie będzie łatwe. Przede wszystkim musimy pamiętać, że licząc $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in A}} f(x,y)$ możemy za zmienne x i y podstawiać *cokolwiek*, co jest dodatnie i dąży do 0, a wynik granicy musi wyjść zawsze taki sam (i być równy $f(0,0) = a$). Spróbujmy więc przetestować takie podstawienie: $x = t$, $y = t$, gdzie $t \to 0^+$. W tej sytuacji $f(x,y) = f(t,t) = \frac{1}{2}t^{b+c-2}$, więc

$$\lim_{t\to 0^+} f(t,t) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } b+c-2 > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{gdy } b+c-2 = 0 \\ \infty & \text{gdy } b+c-2 < 0 \end{cases}.$$

Tym samym, aby funkcja f mogła być ciągła w punkcie $(0,0)$, musi być $b+c \geq 2$, a parametr a musi mieć wartość 0 lub $\frac{1}{2}$. Dlatego od teraz (wszędzie poniżej) zakładamy, że $b + c \geq 2$.

Tak proste podstawienie dało nam sporo informacji. Spróbujmy więc przetestować podobne podstawienie: tym razem przyjmijmy $x = t$, $y = 2t$, gdzie ponownie $t \to 0^+$. W tej sytuacji:

$$\lim_{t\to 0^+} f(t,2t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{2^c t^{b+c}}{5t^2} = \frac{2^c}{5} \lim_{t\to 0^+} t^{b+c-2}.$$

Widzimy, że powyższa granica to ponownie liczba 0, gdy $b + c > 2$. Ale gdy $b + c = 2$, jej wartość to $2^c/5$ — i ta liczba musi być równa poprzednio wyliczonej granicy (dla $b + c = 2$), jeśli funkcja f ma być ciągła w $(0,0)$ — czyli warunek konieczny na tę ciągłość to:

$$b + c = 2 \implies \frac{2^c}{5} = \frac{1}{2} \implies c = \log_2 \frac{5}{2}.$$

Teraz zauważmy, że gdybyśmy podstawili odwrotnie, tj.: $x = 2t$ oraz $y = t$, zupełnie analogiczny rachunek doprowadziłby nas do konkluzji:

$$b + c = 2 \implies \frac{2^b}{5} = \frac{1}{2} \implies b = \log_2 \frac{5}{2}.$$

Podsumowując obie powyższe własności, otrzymujemy kolejny warunek konieczny na ciągłość:

$$b + c = 2 \implies b = c = \log_2 \frac{5}{2} \implies b + c = 2\log_2 \frac{5}{2} \neq 2.$$

Otrzymana sprzeczność pokazuje, że jeśli $b + c = 2$, to funkcja f nie jest ciągła w punkcie $(0,0)$. Tym samym pozostaje do rozważenia przypadek, gdy $b + c > 2$, co zakładamy wszędzie poniżej. Nierówność ta (na podstawie powyższych obliczeń) wymusza $a = 0$ (by funkcja mogła być ciągła w $(0,0)$).

Zastanówmy się, co by było, gdyby jeden z parametrów b lub c był ujemny. Dla ustalenia uwagi, powiedzmy, że $b < 0$ (z uwagi na pewną symetrię we wzorze na f, w przypadku, gdy $c < 0$, postępuje się zupełnie analogicznie). Kluczową obserwacją jest to, że wtedy $\lim_{x\to 0^+} x^b = \infty$. W takim razie, gdyby czynnik y^c dążył do zera w takim samym tempie, w jakim x^b dąży do nieskończoności, granica wartości $f(x,y)$ powinna dać niepożądany wynik (tzn. wielkość różną od zera). Sprawdźmy, czy mamy rację. Zatem przyjmujemy, że $x = t$ (gdzie $t \to 0^+$), i chcemy, by $y^c = \frac{1}{x^b}$, co daje $y = x^{-b/c} = t^{-b/c} \to 0^+$ (bo $b < 0$, a $c > 0$ — gdyż $b + c > 2$). Obliczmy wartość funkcji dla takich argumentów: $f(t, t^{-b/c}) = \frac{t^b \cdot t^{-b}}{t^2 + t^{-2b/c}} = \frac{1}{t^2 + t^{-2b/c}}$, czyli

$$\lim_{t\to 0^+} (t, t^{-b/c}) = (0,0) \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{t\to 0^+} f(t, t^{-b/c}) = \infty.$$

Tym samym, gdy $b < 0$ (lub $c < 0$), funkcja f nie jest ciągła w $(0,0)$. Ostatecznie więc zakładamy, że $b \geq 0$, $c \geq 0$ oraz $b + c > 2$.

© Piotr Niemiec

Wszystkie powyższe przypadki miały na celu rozpoznanie tych wartości b i c, dla których funkcja f **nie jest** ciągła w punkcie $(0,0)$, i zazwyczaj jest to łatwiejsza część zadania: wykazanie, że funkcja wielu zmiennych zadana ułamkiem jest ciągła w punkcie „osobliwym" jest na ogół dużo trudniejsze i wymaga pewnego wyczucia tematu. (Aby bowiem wykazać ciągłość w punkcie, nie wystarczy podstawianie — należy udowodnić istnienie granicy „całej" funkcji). Na zakończenie tego przykładu pokażemy, że warunki wymienione w poprzednim akapicie już implikują ciągłość funkcji f w punkcie $(0,0)$ (o ile $a=0$). Chociaż dowód będzie krótki, nie jest on łatwy do wymyślenia i trudno mówić o metodologii postępowania w takim przypadku (odpowiednio dopasowane podstawianie, które przedstawiliśmy w poprzednich akapitach, zazwyczaj wystarczy do rozstrzygnięcia, że funkcja nie jest ciągła w stosownym punkcie). Niech $\varepsilon = \frac{2}{b+c}$ ($\varepsilon < 1$), $b' = \varepsilon b$ oraz $c' = \varepsilon c$. Zauważmy, że $b'+c' = 2$, $b-b' \geq 0$, $c-c' \geq 0$ oraz przynajmniej jedna z liczb $b-b'$, $c-c'$ jest dodatnia. Tym samym $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in A}} x^{b-b'}y^{c-c'} = 0$. Jeśli pokażemy, że wyrażenie $\frac{x^{b'}y^{c'}}{x^2+y^2}$ jest ograniczone, powiedzmy przez M, to z twierdzenia o trzech funkcjach (Tw. 6.18, str. 28) wywnioskujemy, że $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in A}} f(x,y) = 0$ (albowiem otrzymamy wtedy: $0 \leq f(x,y) = \frac{x^{b'}y^{c'}}{x^2+y^2}x^{b-b'}y^{c-c'} \leq Mx^{b-b'}y^{c-c'} \to 0$). Ograniczoność tego wyrażenia najprościej uzasadnić tak: powiedzmy, że $x \leq y$ (gdy $y \leq x$, rozumujemy podobnie). Wtedy $x^{b'}y^{c'} = x^{2-c'}y^{c'} = x^2(y/x)^{c'} \leq x^2(y/x)^2 = y^2 \leq x^2+y^2$ (przedostatnia nierówność zachodzi, dlatego że $y/x \geq 1$ oraz $c' \leq 2$), czyli $\frac{x^{b'}y^{c'}}{x^2+y^2} \leq 1$.

Podsumowując: zadana funkcja f jest ciągła w punkcie $(0,0)$ dokładnie wtedy, gdy $a=0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$ oraz $b+c > 2$.

9.2 Pochodne cząstkowe i różniczkowalność

W przypadku funkcji jednej zmiennej, pochodna w punkcie jest liczbą. Pojęcie to komplikuje się w wyższych wymiarach:

9.6 Definicja.
Niech $f\colon U \to \mathbb{R}^k$ będzie dowolną funkcją określoną na zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{R}^d$. Mówimy, że funkcja f jest *różniczkowalna w punkcie* $a \in U$, gdy istnieje odwzorowanie liniowe $L\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$, takie że:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}^d}} \frac{1}{\|h\|}(f(a+h) - f(a) - L(h)) = 0 \ (\in \mathbb{R}^k).$$

W powyższym przypadku odwzorowanie L jest wyznaczone jednoznacznie, nazywamy je *różniczką* (lub *pochodną*; lub *pochodną Frécheta*) *funkcji f w punkcie a* i oznaczamy przez $f'(a)$. Tak więc $f'(a)\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ to odwzorowanie liniowe.

9.7 Uwaga.
O funkcji jednej zmiennej $f\colon U \to \mathbb{R}$ (gdzie $U \subset \mathbb{R}$ to zbiór otwarty) również możemy myśleć jak o funkcji wielu zmiennych. W tym przypadku możemy więc mówić zarówno o pochodnej w punkcie $a \in U$ (czyli o liczbie) oraz o różniczce w tym punkcie (czyli funkcji z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$). Jeśli tę pierwszą oznaczymy (dla klarownego wyrażenia myśli) przez f'_{num}, a tę drugą przez f'_{fun}, wtedy można łatwo pokazać, że:

$$f'_{\text{num}} \text{ istnieje} \iff f'_{\text{fun}} \text{ istnieje}$$

oraz $f'_{\text{fun}}(x) = f'_{\text{num}} \cdot x$ i $f'_{\text{num}} = f'_{\text{fun}}(1)$ — o ile tylko funkcja f jest różniczkowalna w a.

Podobnie jak dla funkcji jednej zmiennej, zachodzi proste kryterium:

9.8 Obserwacja. (Warunek konieczny na różniczkowalność)
Jeśli funkcja wielu zmiennych jest różniczkowalna w jakimś punkcie, to jest w tym punkcie ciągła.

Poniższe twierdzenie podaje przystępny wzór na wyznaczanie różniczki w punkcie. Jednakże najwygodniejszą metodę jej wyznaczania poznamy w Tw. 9.12.

© Piotr Niemiec

9.9 Twierdzenie. *Niech $f\colon U \to \mathbb{R}^k$ będzie postaci $f(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x))$, gdzie $U \subset \mathbb{R}^d$ to zbiór otwarty oraz $f_1, \dots, f_k\colon U \to \mathbb{R}$ to dowolne funkcje. Ustalmy dowolnie punkt $a \in U$.*

(A) *Funkcja f jest różniczkowalna w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie funkcje $f_1, \dots, f_k$ są w różniczkowalne w punkcie a. Ponadto, gdy odwzorowanie f jest różniczkowalne w a, to:*

$$(f'(a))(x) = ((f_1'(a))(x), \dots, (f_k'(a))(x)) \qquad (x \in \mathbb{R}^d).$$

(B) *Jeśli f jest funkcją różniczkowalną w a, to odwzorowanie $L = f'(a)$ można odtworzyć ze wzoru:*

$$L(x) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \in \mathbb{R}}} \frac{f(a+tx) - f(a)}{t} \qquad (x \in \mathbb{R}^d). \tag{9:1}$$

(C) *Jeśli $k = 1$ (czyli $f\colon U \to \mathbb{R}$), funkcja f jest różniczkowalna w a oraz funkcje $g_1, \dots, g_d\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ (gdzie $\varepsilon > 0$ jest dostatecznie małą liczbą) są zadane wzorami $g_j(t) = f(a + te_j)$, to funkcje $g_1, \dots, g_d$ są różniczkowalne w 0, a odwzorowanie $L = f'(a)$ można odtworzyć ze wzoru:*

$$L(x_1, \dots, x_d) = \sum_{j=1}^{d} g_j'(0) x_j.$$

Wartość granicy (o ile istnieje i jest liczbą) występującej po prawej stronie wzoru (9:1) nazywamy *pochodną kierunkową funkcji f w punkcie a w kierunku wektora x.*

Gdy funkcja wielu zmiennych f jest różniczkowalna w każdym punkcie zbioru otwartego U, posługiwanie się pełną różniczką w (każdym) punkcie częstokroć jest niepraktyczne, gdyż odwzorowanie $x \mapsto f'(x)$ ma wartości leżące w innej przestrzeni wektorowej niż wartości funkcji f (jeśli $f\colon U \to \mathbb{R}^k$, a $U \subset \mathbb{R}^d$, to odzworowanie $x \mapsto f'(x)$ ma wartości w dk-wymiarowej przestrzeni wektorowej złożonej z wszystkich odwzorowań liniowych z $\mathbb{R}^d$ w $\mathbb{R}^k$, które można w naturalny sposób utożsamić z macierzami $k \times d$). Chociażby z tego powodu wprowadza się tzw. *pochodne cząstkowe*, których zaletą jest to, że — jeśli tylko istnieją w każdym punkcie — są funkcjami o tej samej dziedzinie i przestrzeni docelowej co wyjściowa funkcja.

9.10 Definicja.
Niech $f\colon U \to \mathbb{R}^k$ będzie dowolną funkcją, określoną na zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{R}^d$. Jeśli dla $j \in \{1, \dots, d\}$ oraz $a \in U$ istnieje (w $\mathbb{R}^k$) granica

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(a + he_j) - f(a)}{h},$$

wtedy wartość powyższej granicy oznaczamy przez $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ i nazywamy *pochodną cząstkową (pierwszego rzędu) funkcji f w punkcie $a \in U$ wzdłuż współrzędnej o numerze j*. Jeśli funkcja f ma tę pochodną cząstkową w każdym punkcie zbioru U, otrzymujemy funkcję $\frac{\partial f}{\partial x_j}\colon U \to \mathbb{R}^k$.

W szczególnym przypadku, gdy $f\colon U \to \mathbb{R}$, powyższą pochodną cząstkową można określić (w sposób równoważny) następująco: jeśli $a = (a_1, \dots, a_d)$ oraz $g(t) = f(a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_d)$ (gdzie $t \in \mathbb{R}$ przebiega pewien przedział otwarty, do którego należy liczba a_j), to $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = g'(a_j)$, przy czym lewa strona tego wzoru jest określona wtedy i tylko wtedy, gdy określona jest jego prawa strona.

W przypadku, gdy argumenty funkcji f oznaczane są literami (kolejno) x, y, z (itp.), zamiast $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}$ itd. piszemy (odpowiednio) $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ (itd.). Można także pisać $\frac{\partial}{\partial x_j} f$ zamiast $\frac{\partial f}{\partial x_j}$.

9.11 Przykład.
Poniżej pokazujemy, na dwóch prostych przykładach, że obliczanie pochodnych cząstkowych jest równie proste jak wyznaczanie pochodnych funkcji jednej zmiennej.

(a) Niech $f(x, y, z) = x^3 y^2 z$. Aby wyznaczyć pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ i $\frac{\partial f}{\partial z}$, patrzymy na wzór funkcji f tak, jakby określał funkcję jednej zmiennej (odpowiednio: x, y, z), a pozostałe zmienne były jego parametrami. Dla większej przejrzystości, oznaczmy $g(x) = f(x, y, z)$ (y i z to parametry), $h(y) = f(x, y, z)$ (x i z to parametry)

© Piotr Niemiec

oraz $k(z) = f(x, y, z)$ (x i y to parametry). Wtedy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = g'(x) = 3x^2y^2z, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = h'(y) = 2x^3yz, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = k'(z) = x^3y^2. \tag{9:2}$$

Aby jeszcze mocniej uwypuklić różnicę między literami zmiennych występujących w mianowniku napisów $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ oraz $\frac{\partial f}{\partial z}$ a literami argumentów funkcji, trzy wzory z (9:2) możemy również zapisać tak — w sposób **całkowicie równoważny**:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c) = 3a^2b^2c, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c) = 2a^3bc, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) = a^3b^2.$$

Z drugiej strony, zapis $\frac{\partial f}{\partial a}(x, y, z)$ jest w kontekście tego przykładu niedopuszczalny, gdyż nie wiadomo, którą współrzędną oznacza użyta tutaj litera a (w mianowniku).

(b) Tym razem niech $f(x, y, z) = x^y$, gdzie $x > 0$. Wtedy $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = yx^{y-1}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = x^y \ln x$ oraz $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0$.

Poniższe twierdzenie opisuje związek między różniczką funkcji a pochodnymi cząstkowymi.

9.12 Twierdzenie. (Różniczka a pochodne cząstkowe)
Jeśli funkcja $f\colon U \to \mathbb{R}$ (gdzie $U \subset \mathbb{R}^d$ jest zbiorem otwartym) jest różniczkowalna w punkcie $a \in U$, to ma w tym punkcie wszystkie pochodne cząstkowe (pierwszego rzędu) oraz dla $L = f'(a)$ zachodzi wzór:

$$L(x_1, \ldots, x_d) = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) x_k. \tag{9:3}$$

Odwrotnie, jeśli f jest funkcją ciągłą w każdym punkcie zbioru U i ma wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w każdym punkcie zbioru U, i wszystkie te funkcje są ciągłe, to funkcja f jest różniczkowalna w każdym punkcie zbioru U.

Punkt (A) Tw. 9.9 zasadniczo sprowadza rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych do funkcji o wartościach rzeczywistych. W przypadku takich właśnie funkcji, wzór (9:3) można wyrazić w bardziej zgrabny sposób (w języku iloczynu skalarnego). Do tego celu wprowadza się dodatkowe pojęcie związane z różniczką:

9.13 Definicja.
Jeśli funkcja $f\colon U \to \mathbb{R}$ (gdzie $U \subset \mathbb{R}^d$ to zbiór otwarty) ma wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie $a \in U$, wektor $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_d}(a))$ nazywamy *gradientem* funkcji f w punkcie a i oznaczamy przez $(\nabla f)(a)$. *Długością gradientu* nazywamy liczbę $\|(\nabla f)(a)\|$.

Gdy funkcja f ma wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w każdym punkcie zbioru U, otrzymujemy funkcję $\nabla f\colon U \to \mathbb{R}^d$.

Jako szczególny przypadek Tw. 9.12, otrzymujemy poniższy rezultat.

9.14 Wniosek.
Jeśli funkcja $f\colon U \to \mathbb{R}$ (gdzie $U \subset \mathbb{R}^d$ to zbiór otwarty) jest różniczkowalna w punkcie $a \in U$, to dla $L = f'(a)$ zachodzi wzór: $L(x) = \langle (\nabla f)(a), x \rangle$.

9.15 Definicja.
Funkcję $f\colon U \to \mathbb{R}^p$ (gdzie $U \subset \mathbb{R}^d$ to zbiór otwarty) nazywamy *funkcją klasy C^1*, gdy jest różniczkowalna w każdym punkcie zbioru U, a wszystkie jej pochodne cząstkowe pierwszego rzędu są funkcjami ciągłymi.

© Piotr Niemiec

Tw. 9.12 pokazuje, że funkcja wielu zmiennych jest klasy C^1 wtedy i tylko wtedy, gdy jest funkcją ciągłą, ma wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu (w każdym punkcie jej dziedziny) i wszystkie te funkcje są ciągłe. Jako że znacznie wygodniej posługiwać się pochodnymi cząstkowymi niż różniczką, zamiast wprowadzać pochodne Frécheta wyższych rzędów, w niniejszym skrypcie ograniczymy się wyłącznie do pochodnych cząstkowych wyższych rzędów:

9.16 Definicja.
Niech $f\colon U \to \mathbb{R}^p$ (gdzie $U \subset \mathbb{R}^d$ jest zbiorem otwartym) będzie dowolną funkcją. Mówimy, że f jest funkcją *klasy* C^2, gdy jest klasy C^1 oraz wszystkie jej pochodne cząstkowe pierwszego rzędu również są klasy C^1 (więc, w szczególności, mają wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu). Pochodne cząstkowe pierwszego rzędu pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu funkcji f nazywamy *pochodnymi cząstkowymi drugiego rzędu funkcji* f i oznaczamy je w następujący sposób:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_k}\Big).$$

Pochodne cząstkowe rzędów wyższych niż 2 definiuje się indukcyjnie następująco: jeśli $k \in \mathbb{N}$ jest liczbą większą od 2, to mówimy, że f jest funkcją klasy C^k, gdy jest klasy C^1 i wszystkie jej pochodne cząstkowe pierwszego rzędu są klasy C^{k-1}; w tej sytuacji pochodne cząstkowe pierwszego rzędu pochodnych cząstkowych rzędu $k-1$ funkcji f nazywamy *pochodnymi cząstkowymi rzędu* k *funkcji* f i oznaczamy je następująco:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_k}} = \frac{\partial^k}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_k}} f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x_{j_1}}\Big(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_k}}\Big).$$

Funkcja f jest *klasy* C^∞, gdy jest klasy C^k dla dowolnej liczby $k \in \mathbb{N}_1$; równoważnie: funkcja f jest klasy C^∞, gdy jest ciągła, ma wszystkie pochodne cząstkowe wszystkich rzędów i wszystkie te funkcje są ciągłe.

Funkcję $g\colon U \to \mathbb{R}^d$ nazywamy *dyfeomorfizmem klasy* C^k (gdzie $k \in \mathbb{N}_1 \cup \{\infty\}$), gdy spełnione są oba poniższe warunki:

- funkcja g jest różnowartościowa, a zbiór $V = g(U)$ jest otwarty w $\mathbb{R}^d$;[*4)] oraz
- funkcja g oraz funkcja do niej odwrotna $g^{-1}\colon V \to \mathbb{R}^d$ są klasy C^k.

Poniższe twierdzenie ma ważne znaczenie teoretyczne. A w praktyce przydaje się przy wyznaczaniu pochodnych cząstkowych wyższych rzędów.

9.17 Twierdzenie. (Twierdzenie o pochodnych mieszanych)
Pochodne cząstkowe rzędu k funkcji klasy C^k nie zależą od porządku współrzędnych, wzdłuż których wyznacza się kolejne pochodne cząstkowe; tzn.: jeśli $f\colon U \to \mathbb{R}^p$ to funkcja klasy C^k (gdzie $U \subset \mathbb{R}^d$ to zbiór otwarty), $j_1, j_2, \dots, j_k$ to dowolne numery współrzędnych ze zbioru $\{1, \dots, d\}$, a σ to dowolna permutacja zbioru $\{1, \dots, k\}$, wtedy:

$$\forall x \in U\colon \qquad \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_{\sigma(1)}} \partial x_{j_{\sigma(2)}} \dots \partial x_{j_{\sigma(k)}}}(x) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_k}}(x).$$

Powyższe twierdzenie stanowi motywację do wprowadzenia uproszczonej notacji pochodnych cząstkowych wyższych rzędów:

9.18 Definicja.
Jeśli f to funkcja klasy C^k, $\ell_1, \dots, \ell_d$ to dowolne liczby naturalne, takie że suma $\ell \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{s=1}^d \ell_s$ jest nie większa niż k, wtedy symbolem $\frac{\partial^\ell f}{\partial x_1^{\ell_1} \partial x_2^{\ell_2} \dots \partial x_d^{\ell_d}}$ oznaczamy wszystkie pochodne cząstkowe rzędu ℓ postaci $\frac{\partial^\ell f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_\ell}}$, takie że w zestawie $j_1, j_2, \dots, j_\ell$ każdy z numerów $1, 2, \dots, d$ występuje dokładnie $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_d$ razy (odpowiednio); np.:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y^1 \partial z^0} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial x}.$$

[*4)] Założenie, że zbiór V jest otwarty, jest spełnione automatycznie, gdy tylko $g\colon U \to \mathbb{R}^d$ jest różnowartościową funkcją ciągłą określoną na zbiorze otwartym w $\mathbb{R}^d$ — jest to treść (trudnego) twierdzenia Brouwera. Wtedy też automatycznie funkcja g^{-1} odwrotna do g także jest funkcją ciągłą.

© Piotr Niemiec

Tw. 9.17 gwarantuje, że wszystkie te pochodne cząstkowe pokrywają się, więc $\frac{\partial^\ell f}{\partial x_1^{\ell_1}\partial x_2^{\ell_2}\ldots\partial x_d^{\ell_d}}$ jest dobrze zdefiniowaną funkcją. Jeśli wśród liczb $\ell_1,\ldots,\ell_d$ występują zera, w powyższej notacji zmienne, które w mianowniku tego napisu mają zostać podniesione do potęgi zerowej, można pominąć; wykładniki równe 1 także można pominąć; np.:

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^3\partial y^0\partial z^1} = \frac{\partial^4 f}{\partial x^3\partial z}.$$

9.19 Przykład.
Niech $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie funkcją daną wzorem: $f(x,y) = (x^3y^2 + x + 1, x^2y - xy)$. Aby wyznaczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji f, obliczamy je po współrzędnych — dla każdej współrzędnej z osobna:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (3x^2y^2 + 1, 2xy - y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (2x^3y, x^2 - x).$$

Zamiast notacji „ułamkowej" z użyciem symbolu "∂", możemy także zastosować notację ze znakiem apostrofu (jak przy pochodnej), dopisując w indeksie dolnym litery zmiennych, wzdłuż których wyznaczamy pochodną cząstkową:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f'_x(x,y) = ((x^3y^2 + x + 1)'_x, (x^2y - xy)'_x) = (3x^2y^2 + 1, 2xy - y),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f'_y(x,y) = ((x^3y^2 + x + 1)'_y, (x^2y - xy)'_y) = (2x^3y, x^2 - x).$$

Analogiczną notację możemy zastosować wobec pochodnych cząstkowych drugiego rzędu. Zgodnie z Tw. 9.17, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$, więc wystarczy wyprowadzić trzy wzory (zamiast 4). Mimo to w tym przykładzie wyznaczymy wszystkie 4 pochodne cząstkowe drugiego rzędu — by zilustrować przywołane twierdzenie:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = f''_{xx}(x,y) = (f'_x)'_x(x,y) = ((3x^2y^2 + 1)'_x, (2xy - y)'_x) = (6xy^2, 2y),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = (f'_y)'_x(x,y) = ((2x^3y)'_x, (x^2 - x)'_x) = (6x^2y, 2x - 1),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = f''_{xy}(x,y) = (f'_x)'_y(x,y) = ((3x^2y^2 + 1)'_y, (2xy - y)'_y) = (6x^2y, 2x - 1),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = f'_{yy}(x,y) = (f'_y)'_y(x,y) = ((2x^3y)'_y, (x^2 - x)'_y) = (2x^3, 0).$$

W powyższej notacji zmiana porządku współrzędnych np. we wzorze $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = f''_{xy}$ mogłaby prowadzić do licznych pomyłek, gdyby nie Tw. 9.17, dzięki któremu możemy wypisywać współrzędne w tych wzorach w dowolnej kolejności. Oznacza to w szczególności, że używanie np. zapisu $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = f''_{yx}$ (bez żadnego komentarza wyjaśniającego!) jest równie poprawne i nie powinno być traktowane jako błąd.

*9.20 **Uwaga.***
Gdy funkcja klasy C^1 ma wartości wektorowe (a nie rzeczywiste), jej różniczkę w każdym punkcie możemy w naturalny sposób przedstawiać jako macierz pochodnych cząstkowych — co jest powszechnie praktykowane. Konkretnie, jeśli $f\colon U \to \mathbb{R}^p$ ($U \subset \mathbb{R}^d$) i $f(x) = (f_1(x),\ldots,f_p(x))$, wtedy różniczka w punkcie $x \in U$ to macierz $p \times d$:

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_d}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_d}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(x) & \ldots & \frac{\partial f_p}{\partial x_d}(x) \end{pmatrix}.$$

W przypadku, gdy $p = d$, czyli gdy $f\colon U \to \mathbb{R}^d$, różniczka jest macierzą kwadratową (stopnia d) i stwierdzenie, że jest ona izomorfizmem liniowym, jest równoważne temu, że wyznacznik powyższej macierzy jest różny od 0.

Sprawdza się, że jeśli funkcje f i g są klasy C^1 i złożenie $g \circ f$ ma sens w pewnym zbiorze otwartym D zawierającym punkt a, wtedy $g \circ f$ jest funkcją klasy C^1 na zbiorze D, a różniczka tego złożenia w punkcie a,

© Piotr Niemiec

w zapisie macierzowym, spełnia wzór (analogiczny do wzoru na pochodną złożenia funkcji jednej zmiennej):

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a). \tag{9:4}$$

W szczególności, jeśli f jest dyfeomorfizmem, a g oznacza funkcję f^{-1} odwrotną do f, wtedy $g \circ f$ to odwzorowanie identycznościowe (czyli $(g \circ f)(x) = x$), więc $(g \circ f)'(a)$ to macierz jednostkowa (identycznościowa). Tym samym (9:4) implikuje, że wyznacznik macierzy $f'(a)$ jest różny od zera, czyli: różniczka dyfeomorfizmu w każdym punkcie jego dziedziny jest izomorfizmem liniowym.

Z uwagi na jego ważne znaczenie, podajemy do informacji następujące twierdzenie.

9.21 Twierdzenie. (Twierdzenie o lokalnym dyfeomorfizmie)
Niech $f\colon U \to \mathbb{R}^d$ (gdzie $U \subset \mathbb{R}^d$ jest zbiorem otwartym) będzie funkcją klasy C^k (gdzie $k \in \mathbb{N}_1 \cup \{\infty\}$), a $b \in U$ takim punktem, że różniczka $f'(b)\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ jest izomorfizmem liniowym. Wtedy istnieje zbiór otwarty $V \subset U$ zawierający punkt b, taki że zawężenie funkcji f do zbioru V (czyli funkcja $V \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}^d$) jest dyfeomorfizmem klasy C^k.

9.3 Ekstrema lokalne

Celem tej części jest podanie narzędzi, które pozwalają wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji wielu zmiennych. Rozpocznijmy od uogólnienia pojęć wprowadzonych wcześniej dla funkcji jednej zmiennej:

9.22 Definicja.
Niech $f\colon U \to \mathbb{R}$ będzie funkcją, której dziedziną jest zbiór otwarty $U \subset \mathbb{R}^d$. Punkt $a \in U$ nazywamy [*silnym*] *maksimum lokalnym* (odp. [*silnym*] *minimum lokalnym*) funkcji f, jeśli istnieje zbiór otwarty $V \subset U$ zawierający punkt a, taki że:

$$\forall x \in V \setminus \{a\}\colon\ f(x) < f(a) \qquad (\text{odp. } \forall x \in V \setminus \{a\}\colon\ f(x) > f(a)).$$

Jeśli powyższy warunek zachodzi z nierównością słabą (czyli „$\leq$” zamiast „$<$” lub „$\geq$” zamiast „$>$”), punkt a nazywamy *słabym maksimum lokalnym* (odp. *słabym minimum lokalnym*) funkcji f. Gdy stosowna nierówność zachodzi dla wszelkich $x \neq a$ z dziedziny funkcji f, w powyższym nazewnictwie przymiotnik *lokalne* można zastąpić słowem *globalne*.

[*Silne/słabe*] *ekstremum lokalne/globalne* funkcji to takież maksimum lub minimum. (Silne ekstremum jest słabym, ale nie odwrotnie).

Warunek konieczny na to, by w danym punkcie mogło być słabe ekstremum lokalne, jest zupełnie analogiczny do podanego w punkcie (a) Tw. 7.13 (str. 33) dla funkcji jednej zmiennej:

9.23 Twierdzenie. (Warunek konieczny do bycia ekstremum)
Jeśli funkcja $f\colon U \to \mathbb{R}$ (gdzie $U \subset \mathbb{R}^d$ jest zbiorem otwartym) ma słabe ekstremum lokalnie w punkcie $a \in U$ i jest w tym punkcie różniczkowalna, to $f'(a) = 0$. W szczególności, jeśli f jest funkcją klasy C^1 i ma w punkcie a słabe ekstremum lokalne, to:

$$\forall j \in \{1, \ldots, d\}\colon\ \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = 0. \tag{9:5}$$

Jako że dla funkcji o większej liczbie argumentów niż 1 pojęcie monotoniczności nie jest jednoznacznie rozumiane (a poza tym jest to właściwość znacznie rzadziej występująca niż w przypadku typowych funkcji jednej zmiennej), najprostsze warunki wystarczające na to, by w punkcie spełniającym równania (9:5) było ekstremum lokalne (lub by wykluczyć ekstremum w takim punkcie), formułuje się w języku drugich pochodnych cząstkowych. Aby przedstawić takie kryterium, wprowadzamy przydatne pojęcia:

© Piotr Niemiec

9.24 Definicja.
Niech $f\colon U \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^2 w zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{R}^d$. *Macierz Hessego* (lub: *hesjan*) funkcji f w punkcie $a \in U$ to macierz kwadratowa:

$$H(a) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a)\right]_{j,k=1}^{d} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_d}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_d}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_d}(a) \end{pmatrix}.$$

Zgodnie z Tw. 9.17, hesjan jest macierzą symetryczną, tzn. $H(a)^T = H(a)$ (gdzie dla macierzy $A = [a_{jk}]_{j=1,\dots,n}^{k=1,\dots,m}$ o wymiarach $n \times m$, macierz $A^T = [b_{pq}]_{p=1,\dots,m}^{q=1,\dots,n}$ to macierz *transponowana do* A, czyli macierz o wymiarach $m \times n$, taka że $b_{pq} = a_{qp}$).

Kwadratową macierz symetryczną $A = [a_{jk}]_{j,k=1}^{n}$ o wyrazach rzeczywistych nazywamy *dodatnio określoną* (odp. *ujemnie określoną*), gdy $xAx^T > 0$ (odp. $xAx^T < 0$) dla wszelkich niezerowych wektorów $x \in \mathbb{R}^n$ (tutaj wektor x traktujemy jako jednowierszową macierz o wymiarach $1 \times n$). Równoważnie, macierz A jest dodatnio (odp. ujemnie) określona, gdy $\langle Ax, x\rangle > 0$ (odp. $\langle Ax, x\rangle < 0$) dla wszelkich niezerowych wektorów $x \in \mathbb{R}^n$ zapisanych jako jednokolumnowa macierz (o wymiarach $n \times 1$). Macierz A nazywamy *nieokreśloną*, gdy istnieją wektory $x, y \in \mathbb{R}^n$, takie że $xAx^T > 0$ oraz $yAy^T < 0$.

Możemy teraz przedstawić narzędzie do wyznaczania ekstremów lokalnych funkcji wielu zmiennych.

9.25 Twierdzenie. (Warunek wystarczający do bycia ekstremum)
Niech $f\colon U \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^2 określoną na zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{R}^d$. Niech ponadto $a \in U$ będzie punktem spełniającym układ równań (9:5). Wtedy:

- *jeśli hesjan $H(a)$ jest macierzą dodatnio określoną, to funkcja f ma w punkcie a silne minimum lokalne;*
- *jeśli hesjan $H(a)$ jest macierzą ujemnie określoną, to funkcja f ma w punkcie a silne maksimum lokalne;*
- *jeśli hesjan $H(a)$ jest macierzą nieokreśloną, to funkcja f nie ma w punkcie a słabego ekstremum lokalnego.*

W związku z powyższym kryterium, poniższe twierdzenie nabiera szczególnej wagi:

9.26 Twierdzenie.
Niech $A = [a_{jk}]_{j,k=1}^{n}$ będzie symetryczną macierzą kwadratową o wyrazach rzeczywistych.

(a) (***Kryterium Sylvestera***) *Macierz A jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy:*

$$\forall r \in \{1, \dots, n\}\colon \quad \det[a_{jk}]_{j,k=1}^{r} > 0.$$

(b) *Macierz A jest ujemnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy:*

$$\forall r \in \{1, \dots, n\}\colon \quad (-1)^r \det[a_{jk}]_{j,k=1}^{r} > 0.$$

(c) *Jeśli $\det A \neq 0$, to macierz A jest albo dodatnio określona, albo ujemnie określona, albo nieokreślona.*

Połączenie powyższych dwóch twierdzeń prowadzi do szczególnie wygodnej metody wyznaczania ekstremów dla funkcji dwóch zmiennych:

9.27 Wniosek. (Ekstrema lokalne dla funkcji dwóch zmiennych)
Niech $f\colon U \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną na zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{R}^2$ i niech a będzie dowolnym punktem ze zbioru U.

© Piotr Niemiec

(A) *Jeśli* $\frac{\partial f}{\partial x}(a) \neq 0$ *lub* $\frac{\partial f}{\partial y}(a) \neq 0$, *lub* $\det H(a) < 0$, *to w punkcie* a *nie ma słabego ekstremum lokalnego.*

(B) *Jeśli* $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(a)$ *oraz* $\det H(a) > 0$ (*przy czym* $\det H(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) - (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a))^2$), *to funkcja* f *ma w punkcie* a *silne ekstremum lokalne. Co więcej: wtedy* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \neq 0$ *oraz*

- *jeśli* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) > 0$, *to w punkcie* a *funkcja* f *ma silne minimum lokalne;*
- *jeśli* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) < 0$, *to w punkcie* a *funkcja* f *ma silne maksimum lokalne.*

W powyższych nierównościach $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$ *można zastąpić* (*w sposób całkowicie równoważny*) *przez* $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$.

(C) *Jeśli* $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = \det H(a)$, *to w punkcie* a *może być, ale nie musi, słabe ekstremum lokalne.*

9.28 Przykład.
Wszędzie poniżej dziedziną rozważanych funkcji jest pełna przestrzeń euklidesowa stosownego wymiaru. Naszym celem jest znalezienie wszystkich ekstremów lokalnych podanych funkcji.

(A) Niech $f(x,y) = x^2y - xy^2 + 3\delta xy$, gdzie $\delta \in \{-1, 1\}$ to parametr. Do wyznaczenia ekstremów potrzebujemy pochodnych cząstkowych pierwszego (i być może drugiego) rzędu, dlatego wyznaczamy te funkcje:

$$f'_x(x,y) = 2xy - y^2 + 3\delta y = y(2x - y + 3\delta),$$
$$f'_y(x,y) = x^2 - 2xy + 3\delta x = x(x - 2y + 3\delta).$$

Następnie rozwiązujemy układ równań: $f'_x(x,y) = 0 = f'_y(x,y)$, czyli:

$$\begin{cases} y(2x - y + 3\delta) = 0 \\ x(x - 2y + 3\delta) = 0 \end{cases}. \tag{9:6}$$

Aby szybko rozwiązać ten układ równań, rozpatrujemy 4 rozłączne przypadki:

- $x = 0 = y$: para $(0,0)$ jest rozwiązaniem układu (9:6);
- $x = 0 \neq y$: wtedy drugie równanie układu (9:6) jest automatycznie spełnione, a z pierwszego otrzymujemy (po skróceniu przez y) $-y + 3\delta = 0$, czyli rozwiązaniem jest para $(0, 3\delta)$;
- $y = 0 \neq x$: analogicznie jak w drugim przypadku, po skróceniu przez x w drugim równaniu otrzymujemy $x + 3\delta = 0$, czyli rozwiązaniem jest para $(-3\delta, 0)$;
- $x \neq 0 \neq y$: wtedy obustronnie dzieląc pierwsze równanie przez y, a drugie przez x otrzymujemy prosty układ równań liniowych, którego rozwiązaniem jest para $(-\delta, \delta)$.

Z powyższych rozważań wynika, że dla funkcji f są 4 punkty podejrzane o ekstremum: $A = (0,0)$, $B = (0, 3\delta)$, $C = (-3\delta, 0)$ oraz $D = (-\delta, \delta)$. Aby rozstrzygnąć, w których z tych punktów są ekstrema, wyznaczamy pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji f, a następnie funkcję $w(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \det H(x,y)$ (gdzie H to hesjan funkcji f):

$$f''_{xx}(x,y) = 2y, \qquad f''_{yy}(x,y) = -2x, \qquad f''_{xy}(x,y) = 2x - 2y + 3\delta,$$

więc $w(x,y) = 2y \cdot (-2x) - (2x - 2y + 3\delta)^2 = -4xy - (2x - 2y + 3\delta)^2$. Teraz sprawdzamy każdy z powyższych punktów (podejrzanych o ekstremum) zgodnie z Wn. 9.27:

- $w(A) = w(0,0) = -9\delta^2 = -9$ — skoro $w(A) < 0$, w punkcie A nie ma ekstremum;
- $w(B) = w(0, 3\delta) = -9\delta^2 = -9 < 0$, więc (jak poprzednio) w punkcie B nie ma ekstremum;
- $w(C) = w(-3\delta, 0) = -9\delta^2 = -9 < 0$, czyli brak ekstremum w punkcie C;
- $w(D) = w(-\delta, \delta) = 4\delta^2 - \delta^2 = 3$ — skoro $w(D) > 0$, w punkcie D jest silne ekstremum lokalne; aby rozpoznać, czy jest to maksimum czy minimum, sprawdzamy znak $f''_{xx}(D) = 2\delta$, tak więc funkcja f ma w punkcie D minimum lokalne, gdy $\delta = 1$, a maksimum lokalne dla $\delta = -1$.

Podsumowując, funkcja f ma tylko jedno ekstremum lokalne: jest to minimum (odp. maksimum) lokalne w punkcie $(-1, 1)$ (odp. w punkcie $(1, -1)$) dla $\delta = 1$ (odp. dla $\delta = -1$). Wartość funkcji w tym punkcie to $f(-\delta, \delta) = \delta^3 + \delta^3 - 3\delta^3 = -\delta^3 = -\delta$.

© Piotr Niemiec

(B) Niech $g(x,y) = \mathrm{e}^{\sin x} - \mathrm{e}^{\cos y}$. Wyznaczmy pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu:

$$g'_x(x,y) = \mathrm{e}^{\sin x}\cos x, \qquad g'_y(x,y) = \mathrm{e}^{\cos y}\sin y, \qquad g''_{xy}(x,y) = 0,$$
$$g''_{xx}(x,y) = \mathrm{e}^{\sin x}\cos^2 x - \mathrm{e}^{\sin x}\sin x = \mathrm{e}^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x),$$
$$g''_{yy}(x,y) = -\mathrm{e}^{\cos y}\sin^2 y + \mathrm{e}^{\cos y}\cos y = \mathrm{e}^{\cos y}(\cos y - \sin^2 y).$$

Układ równań $g'_x(x,y) = 0 = g'_y(x,y)$ po podzieleniu równań przez stosowne potęgi liczby e przekształca się do $\cos x = 0 = \sin y$ (co implikuje, że $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ oraz $y = \ell\pi$, gdzie k i ℓ to dowolne parametry całkowite — ale w tym momencie tego nie potrzebujemy). Z jedynki trygonometrycznej wynika, że otrzymane równania są równoważne warunkom:

$$\sin x \in \{-1, 1\}, \qquad \cos y \in \{-1, 1\}. \tag{9:7}$$

Odnotujmy, że jest nieskończenie wiele punktów podejrzanych o ekstremum. Aby rozpoznać, w których z nich w istocie są ekstrema, obliczmy wyznacznik z hesjanu funkcji g, czyli niech $w(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \det H(x,y) = \mathrm{e}^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x)\cdot \mathrm{e}^{\cos y}(\cos y - \sin^2 y) = \mathrm{e}^{\sin x + \cos y}(\cos^2 x - \sin x)(\cos y - \sin^2 y)$. Jeśli teraz (a,b) jest jednym z punktów podejrzanych o ekstremum, to z równań $\cos a = 0 = \sin b$ wnioskujemy, że $w(a,b) = -\mathrm{e}^{\sin a + \cos b}\sin a \cos b$. Tym samym:

- jeśli $\sin a \cos b > 0$, wtedy $w(a,b) < 0$, więc w punkcie (a,b) nie ma nawet słabego ekstremum lokalnego;
- jeśli natomiast $\sin a \cos b < 0$, wtedy $w(a,b) > 0$, więc w punkcie (a,b) jest silne ekstremum lokalne.

Warunki (9:7) implikują, że $\sin a \cos b \in \{-1, 1\}$, zatem w punkcie (a,b) jest ekstremum wtedy i tylko wtedy, gdy $\sin a \cos b = -1$. Odnotujmy, że w tym przypadku $g''_{xx}(a,b) = -\mathrm{e}^{\sin a}\sin a$. Aby zachodziła równość $\sin a \cos b = -1$, możliwe są dwa przypadki:

- $\sin a = 1$ i $\cos b = -1$: wtedy $g''_{xx}(a,b) = -\mathrm{e} < 0$, co oznacza, że w takich punktach funkcja ma maksimum lokalne;
- $\sin a = -1$ i $\cos b = 1$: wtedy $g''_{xx}(a,b) = \mathrm{e} > 0$, czyli funkcja ma minimum lokalne w takich punktach.

Podsumowując, funkcja g ma nieskończenie wiele minimów i maksimów lokalnych:

- minima lokalne: w punktach $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 2\ell\pi)$ (gdzie $k, \ell \in \mathbb{Z}$), wartość funkcji w tych punktach to $\frac{1}{\mathrm{e}} - \mathrm{e}$;
- maksima lokalne: w punktach $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2\ell\pi)$ (gdzie $k, \ell \in \mathbb{Z}$), wartość funkcji w tych punktach to $\mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}$.

(C) Tym razem niech $h(x,y,z) = \frac{y^2+z^2+\delta}{x^2+1}$, gdzie $\delta \in \{-1, 1\}$ to parametr. Procedujemy jak poprzednio — najpierw pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu:

$$h'_x(x,y,z) = -2(y^2+z^2+\delta)\frac{x}{(x^2+1)^2}, \qquad h'_y(x,y,z) = \frac{2y}{x^2+1}, \qquad h'_z(x,y,z) = \frac{2z}{x^2+1},$$
$$h''_{xx}(x,y,z) = -2(y^2+z^2+\delta)\frac{1-3x^2}{(x^2+1)^3}, \qquad h''_{yy}(x,y,z) = \frac{2}{x^2+1}, \qquad h''_{zz}(x,y,z) = \frac{2}{x^2+1},$$
$$h''_{xy}(x,y,z) = -\frac{4xy}{(x^2+1)^2}, \qquad h''_{xz}(x,y,z) = -\frac{4xz}{(x^2+1)^2}, \qquad h''_{yz}(x,y,z) = 0.$$

Następnie rozwiązujemy układ równań (9:5):

$$\begin{cases} -2(y^2+z^2+\delta)\frac{x}{(x^2+1)^2} = 0 \\ \frac{2y}{x^2+1} = 0 \\ \frac{2z}{x^2+1} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2\delta x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff x = y = z = 0.$$

A więc tylko jeden punkt — $(0,0,0)$ — jest podejrzany o ekstremum. Zamiast wyznaczać macierz Hessego w dowolnym punkcie przestrzeni, przyjrzyjmy się jej tylko dla punktu $(0,0,0)$ (dla uproszczenia macierz tę oznaczmy przez A):

$$A \stackrel{\text{def}}{=} H(0,0,0) = \begin{pmatrix} -2\delta & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zauważmy, że $\det A = -8\delta \neq 0$, zatem (zgodnie z Tw. 9.26) macierz ta jest albo dodatnio określona (i wtedy w punkcie $(0,0,0)$ jest silne minimum lokalne — zgodnie z Tw. 9.25), albo ujemnie określona (i wtedy w punkcie $(0,0,0)$ jest silne maksimum lokalne), albo jest nieokreślona (i wtedy w punkcie $(0,0,0)$ nie ma nawet

© Piotr Niemiec

słabego ekstremum lokalnego). Aby macierz ta była dodatnio lub ujemnie określona, wyznacznik macierzy 2×2 wyciętej z A od lewego górnego rogu musi być dodatnia. A ten wyznacznik to liczba $-2\delta \cdot 2 = -4\delta$. Wnioskujemy, że dla $\delta = 1$ funkcja h nie ma żadnych ekstremów. Pozostaje rozpatrzyć przypadek, gdy $\delta = -1$. Wtedy macierz A jest dodatnio określona (np. dzięki kryterium z punktu (a) Tw. 9.26), więc w tym przypadku funkcja h ma jedno ekstremum lokalne i jest to silne minimum w punkcie $(0,0,0)$; wartość funkcji w tym punkcie to -1.

9.4 Całka Riemanna

W tej części uogólnimy pojęcie całki Riemanna na przypadek funkcji wielu zmiennych.

9.29 Definicja.
Kostką (niezdegenerowaną) w $\mathbb{R}^d$ nazywamy dowolny zbiór będący iloczynem kartezjańskim ograniczonych (niezdegenerowanych) przedziałów domkniętych w $\mathbb{R}$; innymi słowy, $Q \subset \mathbb{R}^d$ jest kostką, gdy istnieją liczby $a_1, \ldots, a_d$ oraz $b_1, \ldots, b_d$, takie że $a_j < b_j$ (dla $j = 1, \ldots, d$) oraz

$$Q = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_d, b_d] = \prod_{j=1}^{d} [a_j, b_j] = \{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid \forall j \in \{1, \ldots, d\}\colon\ a_j \le x_j \le b_j\}.$$

W powyższej sytuacji liczbę $(b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_d - a_d)$ nazywamy *objętością* kostki Q i oznaczamy ją przez $|Q|$ (w przypadku $d = 2$ zamiast o objętości mówimy o *polu* kostki). Z kolei *średnica* kostki Q, oznaczana przez $\operatorname{diam} Q$, to liczba $\|(a_1 - b_1, \ldots, a_d - b_d)\|$ (czyli $\operatorname{diam} Q = \sqrt{\sum_{j=1}^{d} (b_j - a_j)^2}$ to długość nadłuższego odcinka zawartego w Q). Dla uproszczenia, przedziały $[a_j, b_j]$ (jednoznacznie wyznaczone przez kostkę Q) nazywać będziemy *krawędziami* kostki Q. *Brzeg* kostki Q to zbiór postaci $Q \setminus \prod_{j=1}^{d} (a_j, b_j)$.

Niech $P \subset \mathbb{R}^d$ będzie kostką. *Podział* kostki P to skończony zestaw kostek

$$\pi\colon \quad Q_1, \ldots, Q_r \tag{9:8}$$

powstałych przez podział krawędzi kostki P, tzn.: jeśli $P = \prod_{j=1}^{d} [a_j, b_j]$ i dla każdego indeksu $j \in \{1, \ldots, d\}$ mamy zadany podział

$$\pi_j\colon \quad a_j = t_0^{(j)} < t_1^{(j)} < \ldots < t_{m(j)}^{(j)} = b_j$$

przedziału $[a_j, b_j]$, to podziały $\pi_1, \ldots, \pi_d$ wyznaczają podział kostki P przez ustawienie (w sposób różnowartościowy) w dowolnej kolejności kostek postaci $\prod_{j=1}^{d} \left[t_{s(j)-1}^{(j)}, t_{s(j)}^{(j)}\right]$, gdzie $s(j)$ jest dowolnym indeksem ze zbioru $\{1, \ldots, m(j)\}$. (Obrazowo: podział prostokąta polega na narysowaniu na nim siatki liniami poziomymi i pionowymi, przy czym długości i szerokości komórek tej siatki nie muszą być takie same dla wszystkich komórek). *Średnicą* podziału (9:8) nazywamy liczbę $\operatorname{diam} \pi = \max_{s=1,\ldots,r} \operatorname{diam} Q_s$.

Jeśli π jest podziałem kostki P zadanym przez (9:8), zestaw wektorów $\delta\colon \xi_1, \ldots, \xi_r$ nazywamy *układem punktów pośrednich zgodnym z* π, gdy:

$$\xi_j \in Q_j \qquad (j = 1, \ldots, r).$$

Ciąg podziałów $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots$ kostki P nazywamy *normalnym ciągiem podziałów*, gdy $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} \pi_n = 0$.

Dla funkcji $f\colon P \to \mathbb{R}$, podziału π kostki P zadanego przez (9:8) oraz układu $\delta\colon \xi_1, \ldots, \xi_r$ punktów pośrednich zgodnego z π określamy ***sumę Riemanna*** *funkcji* f *wyznaczoną przez* π *i* δ jako:

$$S(f; \pi, \delta) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{r} f(\xi_j) |Q_j|.$$

Powiemy, że funkcja $f\colon P \to \mathbb{R}$ jest *całkowalna w sensie Riemanna* [*w kostce* P] (lub krótko: ***całkowalna***), jeśli f jest funkcją ograniczoną oraz istnieje liczba $c \in \mathbb{R}$, taka że dla dowolnego normalnego ciągu podziałów $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots$ kostki P oraz dowolnego ciągu $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$, takiego że δ_n to układ punktów pośrednich zgodny z podziałem π_n (dla dowolnego indeksu n), zachodzi:

$$\lim_{n\to\infty} S(f; \pi_n, \delta_n) = c.$$

W powyższej sytuacji liczbę c nazywamy *całką Riemanna* (lub krótko: ***całką***) *z funkcji* f (*po kostce* P) i oznaczamy ją przez $\int_P f(x_1, \ldots, x_d)\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_d$. (Podobnie jak w przypadku funkcji jednej zmiennej, oznaczenie zmiennych w zapisie całki odgrywa drugorzędną rolę; tak więc, dla kostki $P \subset \mathbb{R}^2$: $\int_P f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_P f(z,w)\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}w = \int_P f(y,x)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$, ale $\int_P f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ to nie to samo, co $\int_P f(x,z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ czy $\int_P f(z,w)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$).

© Piotr Niemiec

O ile całkowanie funkcji jednej zmiennej tylko po przedziałach w praktyce jest zazwyczaj wystarczające, o tyle już w przypadku funkcji dwóch zmiennych ograniczanie się do całek jedynie po prostokątach (których boki są równoległe do osi układu współrzędnych) byłoby wyraźnie odczuwalne w wielu typowych zagadnieniach. Z tego względu powyższą definicję całki po kostce rozszerza się w sposób następujący:

9.30 Definicja.
Niech $A \subset \mathbb{R}^d$ będzie zbiorem ograniczonym, a $f\colon B \to \mathbb{R}$ dowolną funkcją określoną na zbiorze $B \subset \mathbb{R}^d$ zawierającym zbiór A. Mówimy, że funkcja f jest *całkowalna (w sensie Riemanna) po/na zbiorze* A, gdy istnieje kostka $P \subset \mathbb{R}^d$, taka że $A \subset P$ oraz funkcja

$$\tilde{f}_P\colon P \ni x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{gdy } x \in A \\ 0 & \text{gdy } x \notin A \end{cases} \in \mathbb{R}$$

jest całkowalna po kostce P. W tej sytuacji liczbę $\int_P \tilde{f}_P(x_1,\dots,x_d)\,\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_d$ nazywamy *całką z funkcji* f *po zbiorze* A i oznaczamy przez $\int_A f(x_1,\dots,x_d)\,\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_d$. Dowodzi się przy tym, że wartość tej całki nie zależy od doboru kostki $P \supset A$.

Ograniczony zbiór $A \subset \mathbb{R}^d$ nazywamy *mierzalnym w sensie Jordana*, gdy funkcja stale równa 1 na zbiorze A jest całkowalna. W tej sytuacji liczbę $\int_A 1\,\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_d$ nazywamy *objętością* (a w przypadku $d=2$ *polem*) zbioru A i oznaczamy przez $|A|$.

W przypadku $d=2$ (tj. gdy całkujemy po podzbiorze płaszczyzny $\mathbb{R}^2$) lub $d=3$ (tj. gdy całkujemy po podzbiorze przestrzeni $\mathbb{R}^3$), stosuje się bardziej sugestywną notację całki:

- $d=2$: zamiast $\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ piszemy $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ i mówimy o całce *podwójnej*;
- $d=3$: zamiast $\int_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ piszemy $\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ i mówimy o całce *potrójnej*.

Gdy $d>3$, zamiast $\int_D f(x_1,\dots,x_d)\,\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_d$ można także pisać $\int\cdots\int_D f(x_1,\dots,x_d)\,\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_d$ (dla $d=4$ mówimy o całce *poczwórnej*).

9.31 ***Uwaga.***
Podobnie jak w przypadku całki z funkcji jednej zmiennej, całka po zbiorze $A \subset \mathbb{R}^d$ z nieujemnej funkcji całkowalnej $f\colon A \to \mathbb{R}_+$ to objętość zbioru $\{(x,t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}\colon\ x \in A,\ 0 \le t \le f(x)\}$.

Podamy teraz podstawowe własności pojęć wprowadzonych powyżej. Dla uproszczenia sformułowań, zbiór $A \subset \mathbb{R}^d$ nazwiemy *zwartym*, gdy jest ograniczony, a jego dopełnienie $\mathbb{R}^d \setminus A$ jest zbiorem otwartym.

9.32 Obserwacja.

(A) *Każda kostka jest mierzalna w sensie Jordana, a jej objętość w sensie sformułowanym w Def.* 9.30 *jest identyczna z objętością zdefiniowaną w Def.* 9.29.

(B) *Brzeg F dowolnej kostki jest zbiorem mierzalnym w sensie Jordana oraz $|F| = 0$.*

(C) *Całka po zbiorze mierzalnym w sensie Jordana jest operacją liniową: jeśli $A \subset \mathbb{R}^d$ jest zbiorem mierzalnym w sensie Jordana, a $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ są funkcjami całkowalnymi po zbiorze A, to dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbb{R}$ także funkcja $af + bg$ jest całkowalna po zbiorze A oraz*

$$\int_A (af(x_1,\dots,x_d) + bg(x_1,\dots,x_d))\,\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_d = \\ = a\int_A f(x_1,\dots,x_d)\,\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_d + b\int_A g(x_1,\dots,x_d)\,\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_d.$$

(D) *Niech A i B będą zbiorami mierzalnymi w sensie Jordana w $\mathbb{R}^d$, takimi że ich część wspólna jest zbiorem mierzalnym w sensie Jordana oraz $|A \cap B| = 0$. Jeśli $f\colon A \cup B \to \mathbb{R}$ jest funkcją całkowalną zarówno po zbiorze A, jak i po zbiorze B, to funkcja f jest całkowalna po zbiorze $A \cup B$ oraz*

$$\int_{A\cup B} f(x_1,\dots,x_d)\,\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_d = \int_A f(x_1,\dots,x_d)\,\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_d + \int_B f(x_1,\dots,x_d)\,\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_d.$$

W szczególności, $A \cup B$ jest zbiorem mierzalnym w sensie Jordana oraz $|A \cup B| = |A| + |B|$.

© Piotr Niemiec

(E) *Jeśli $A \subset \mathbb{R}^d$ jest zbiorem mierzalnym w sensie Jordana, a $f\colon B \to \mathbb{R}$ funkcją ciągłą określoną na zbiorze zwartym $B \supset A$ w $\mathbb{R}^d$, to funkcja f jest całkowalna po zbiorze A.*

9.33 Definicja.
Dla zbioru $D \subset \mathbb{R}^2$ oraz liczby $t \in \mathbb{R}$ wprowadzamy oznaczenia:

$$D(\cdot, t) = \{x \in \mathbb{R}\colon\ (x,t) \in D\}, \qquad D(t, \cdot) = \{y \in \mathbb{R}\colon\ (t,y) \in D\}.$$

Rzut zbioru D na oś X to zbiór $D_x = \{x \in \mathbb{R}\colon\ D(x,\cdot) \neq \varnothing\}$. Podobnie, *rzut zbioru D na oś Y* to zbiór $D_y = \{y \in \mathbb{R}\colon\ D(\cdot, y) \neq \varnothing\}$.

Mówimy, że zbiór D jest *obszarem normalnym względem osi X* (odp. *względem osi Y*), gdy D_x (odp. D_y) to ograniczony przedział domknięty, powiedzmy $[a,b]$, oraz istnieją funkcje ciągłe $\alpha, \beta\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, takie że dla wszelkich liczb $t \in [a,b]$: $\alpha(t) \leq \beta(t)$ oraz $D(t,\cdot)$ (odp. $D(\cdot,t)$) to przedział $[\alpha(t), \beta(t)]$. Innymi słowy, obszar normalny względem osi X ma postać:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ a \leq x \leq b,\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

(a obszar normalny względem osi Y ma postać $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ a \leq y \leq b,\ \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\}$).

Podobnie, dla zbioru $D \subset \mathbb{R}^3$ oraz liczb $s, t \in \mathbb{R}$ wprowadzamy oznaczenia:

$$D(\cdot, s, t) = \{x \in \mathbb{R}\colon\ (x,s,t) \in D\}, \qquad D(s, \cdot, t) = \{y \in \mathbb{R}\colon\ (s,y,t) \in D\}, \qquad D(s,t,\cdot) = \{z \in \mathbb{R}\colon\ (s,t,z) \in D\}.$$

Rzut zbioru D na płaszczyznę XY to zbiór $D_{xy} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ D(x,y,\cdot) \neq \varnothing\}$. Podobnie, *rzut zbioru D na płaszczyznę XZ* (odp. YZ) to zbiór $D_{xz} = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2\colon\ D(x,\cdot,z) \neq \varnothing\}$ (odp. $D_{yz} = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2\colon\ D(\cdot,y,z) \neq \varnothing\}$).

Mówimy, że zbiór D jest *obszarem normalnym względem płaszczyzny XY*, jeśli zachodzą następujące warunki:

- zbiór $\Omega = D_{xy}$ jest sumą mnogościową skończenie wielu podzbiorów płaszczyzny, z których każdy jest obszarem normalnym względem jednej z osi;
- istnieją funkcje ciągłe $\alpha, \beta\colon \Omega \to \mathbb{R}$, takie że dla dowolnego punktu $(x,y) \in \Omega$: $\alpha(x,y) \leq \beta(x,y)$ oraz $D(x,y,\cdot) = [\alpha(x,y), \beta(x,y)]$.

Innymi słowy, obszar normalny względem płaszczyzny XY ma postać:

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon\ (x,y) \in \Omega,\ \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)\}.$$

W analogiczny sposób określamy obszary normalne względem płaszczyzn XZ i YZ.

Poniższe ważne twierdzenie to szczególny przypadek twierdzenia Fubiniego:

9.34 Twierdzenie. (Twierdzenie o całce iterowanej)
W poniższych wzorach wszystkie funkcje podcałkowe (zadane całką) są całkowalne.

(A) *Podzbiór płaszczyzny, który jest obszarem normalnym względem którejkolwiek osi, jest mierzalny w sensie Jordana.*

(B) *Jeśli obszar normalny $D \subset \mathbb{R}^2$ względem osi X jest opisany wzorem:*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ a \leq x \leq b,\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\},$$

a $f\colon D \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, to

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \Big(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x.$$

(C) *Jeśli obszar normalny $D \subset \mathbb{R}^2$ względem osi Y jest opisany wzorem:*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ a \leq y \leq b,\ \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\},$$

© Piotr Niemiec

a $f\colon D\to\mathbb{R}$ *jest funkcją ciągłą, to*

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_a^b\Big(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y.$$

(D) *Podzbiór przestrzeni* $\mathbb{R}^3$*, który jest obszarem normalnym względem którejkolwiek z płaszczyzn* XY*,* XZ*,* YZ*, jest mierzalny w sensie Jordana, a jego rzut na płaszczyznę, względem której jest obszarem normalnym, jest podzbiorem płaszczyzny mierzalnym w sensie Jordana.*

(E) *Jeśli obszar normalny* $D\subset\mathbb{R}^3$ *względem płaszczyzny* XY *jest opisany wzorem:*

$$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon\ (x,y)\in\Omega,\ \alpha(x,y)\le z\le\beta(x,y)\},$$

a $f\colon D\to\mathbb{R}$ *jest funkcją ciągłą, to*

$$\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint_\Omega\Big(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Analogiczne wzory zachodzą dla całek po obszarach normalnych względem płaszczyzn XZ *oraz* YZ*.*

9.35 Przykład.

(A) Obliczmy $\iint_D(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ dla $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon\ x^2+y^2\le 1\}$. Zbiór D jest obszarem normalnym zarówno względem osi X, jak i osi Y. Możemy więc wybrać oś, względem której opiszemy ten zbiór. Chociaż oś X jest naturalnym wyborem, pokażemy, jak tę całkę wyliczyć, gdy zbiór D traktujemy jako obszar normalny względem osi Y. Przy takim podejściu:

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon\ -1\le y\le 1,\ -\sqrt{1-y^2}\le x\le\sqrt{1-y^2}\}.$$

W takim razie, z Tw. 9.34 wynika, że:

$$\iint_D(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-1}^1\Big(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y=\int_{-1}^1\big(\tfrac{1}{3}x^3+xy^2\big)\Big|_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^1\big(\tfrac{2}{3}(1-y^2)\sqrt{1-y^2}+2y^2\sqrt{1-y^2}\big)\,\mathrm{d}y=\frac{2}{3}\int_{-1}^1(1+2y^2)\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y=\left[\begin{array}{c}t=\arcsin y\\ y=-1\Longrightarrow t=-\frac{1}{2}\pi\\ y=1\Longrightarrow t=\frac{1}{2}\pi\\ y=\sin t\\ \sqrt{1-y^2}=\cos t\\ \mathrm{d}y=\cos t\,\mathrm{d}t\end{array}\right]$$

$$=\frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+2\sin^2 t)\cos t\cos t\,\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(2-\cos 2t)(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(2+\cos 2t-\cos^2 2t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big(\frac{3}{2}+\cos 2t-\frac{1}{2}\cos 4t\Big)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\Big(\frac{3}{2}t+\frac{1}{2}\sin 2t-\frac{1}{8}\sin 4t\Big)\Big|_{t=-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}=\frac{\pi}{2}.$$

Zwróćmy uwagę, że podczas liczenia całek wielu zmiennych, w notacji typu $(f(x))\big|_a^b$ dopisujemy w indeksie dolnym literę zmiennej, za którą należy podstawić granice całkowania, np.: $(f(x))\big|_{x=a}^b$. (Podobnie, zamiast $[f(x)]_a^b$ powinniśmy pisać np. $[f(x)]_{x=a}^b$). Szybszy sposób wyznaczenia zadanej tu całki poznamy nieco później, z użyciem współrzędnych biegunowych.

(B) Tym razem obliczmy $\iint_D(x+2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, gdzie D jest obszarem ograniczonym przez krzywe $y=4x^2-1$ oraz $y=x^2+2$. Tym razem zbiór D nie jest obszarem normalnym względem osi Y, ale jest względem osi X: $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon\ -1\le x\le 1,\ 4x^2-1\le y\le x^2+2\}$. Zatem:

$$\iint_D(x+2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-1}^1\Big(\int_{4x^2-1}^{x^2+2}(x+2y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^1(xy+y^2)\Big|_{y=4x^2-1}^{x^2+2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^1(x(x^2+2)+(x^2+2)^2-x(4x^2-1)-(4x^2-1)^2)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^1(-15x^4-3x^3+12x^2+3x+3)\,\mathrm{d}x$$

$$=\Big(-3x^5-\frac{3}{4}x^4+4x^3+\frac{3}{2}x^2+3x\Big)\Big|_{x=-1}^1=2(-3+4+3)=8.$$

© Piotr Niemiec

(C) Twierdzenie o całce iterowanej podaje pewien rekurencyjny schemat obliczania całek: potrójną sprowadza się do podwójnej, poczwórną do potrójnej, itd. Aby to zilustrować, obliczymy całkę $\iiint_\Omega 3x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ po zbiorze $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1,\ x^2+y^2 \leq z \leq 1\}$. Zbiór ten jest obszarem normalnym względem płaszczyzny XY. Istotnie, $\Omega_{xy} = D$, gdzie $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\}$ oraz $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon\ (x,y) \in D,\ x^2+y^2 \leq z \leq 1\}$. Zauważmy także, że

$$D\colon\quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq 1-x \end{cases}.$$

W takim razie do zadanej całki możemy dwukrotnie zastosować Tw. 9.34 (najpierw do zbioru Ω, a potem do zbioru D):

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega 3x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \iint_D \Big(\int_{x^2+y^2}^1 3x\,\mathrm{d}z\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D 3xz\big|_{z=x^2+y^2}^1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D 3x(1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \Big(\int_0^{1-x} x(3-3x^2-3y^2)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x(3y-3x^2y-y^3)\big|_{y=0}^{1-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x(3(1-x)-3x^2(1-x)-(1-x)^3)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x-x^2)(2+2x-4x^2)\,\mathrm{d}x = \ldots\end{aligned}$$

(dokończenie rachunku pozostawiamy jako ćwiczenie).

Innym przykładem (natury ogólnej) zastosowania całki iterowanej, jest poniższy wzór na objętość tzw. bryły obrotowej:

9.36 Twierdzenie. (Objętość bryły obrotowej)
Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}_+$ będzie funkcją ciągłą o wartościach nieujemnych, a $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ będzie bryłą ograniczoną przez powierzchnię powstałą przez obrót wokół osi X wykresu funkcji f (oraz ograniczoną przez płaszczyzny o równaniach $x=a$ i $x=b$). Wtedy Ω jest zbiorem mierzalnym w sensie Jordana oraz

$$|\Omega| = \pi \int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

9.37 Przykład.
Zobaczmy, jak wykorzystując wzór z Tw. 9.36 można obliczyć objętość kuli. Zauważmy, że sfera o środku w $(0,0,0)$ i promieniu $R > 0$ powstaje przez obrót półokręgu o równaniu $x^2+y^2 = R^2$ wokół osi X. Tym samym sfera jest powierzchnią powstałą przez obrót dookoła osi X wykresu funkcji $f\colon [-R,R] \to \mathbb{R}_+$ danej wzorem: $f(x) = \sqrt{R^2-x^2}$. A zatem objętość tej kuli $B(R)$ to:

$$|B(R)| = \pi \int_{-R}^R f(x)^2\,\mathrm{d}x = \pi \int_{-R}^R (R^2-x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Poniższy rezultat stanowi jedno z najpotężniejszych narzędzi do obliczania całek.

9.38 Twierdzenie. (Twierdzenie o zmianie zmiennych)
Niech $g\colon U \to \mathbb{R}^d$ będzie dyfeomorfizmem klasy C^1 określonym na zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{R}^d$, $B \subset g(U)$ będzie zwartym zbiorem mierzalnym w sensie Jordana, a $f\colon B \to \mathbb{R}$ funkcją ciągłą. Wtedy zbiór $A = g^{-1}(B)$ jest także mierzalny w sensie Jordana oraz:

$$\int_B f(x_1,\ldots,x_d)\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_d = \int_A f(g(x_1,\ldots,x_d))\,|\det g'(x_1,\ldots,x_d)|\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_d. \tag{9:9}$$

© Piotr Niemiec

9.39 ***Uwaga.***
W praktyce, stosując Twierdzenie o zmianie zmiennych, litery zmiennych w wyjściowej całce zamienia się na inne i stosuje się notację podobną do stosowanej przy zmianie zmiennych podczas całkowania funkcji jednej zmiennej:

$$\iint_B f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \boxed{\begin{matrix} x=\alpha(z,w) \quad y=\beta(z,w) \\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left|\det \begin{pmatrix} \alpha'_z(z,w) & \alpha'_w(z,w) \\ \beta'_z(z,w) & \beta'_w(z,w) \end{pmatrix}\right| \mathrm{d}z\,\mathrm{d}w \\ B \rightsquigarrow A \end{matrix}} = \iint_A \dots$$

Przywołane twierdzenie stosuje się również z użyciem pewnych klasycznych podstawień (m.in.: współrzędne biegunowe; walcowe; sferyczne) z użyciem funkcji g, które nie są dyfeomorfizmami w całej swojej dziedzinie, ale mimo to wzór (9:9) jest poprawny. Te szczególne podstawienia omawiamy poniżej.

9.40 Przykład.

(A) (***Współrzędne biegunowe***) Rozważmy funkcję $g(r,\phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$, gdzie $r \geq 0$ oraz $\phi \in [0, 2\pi]$ (lub $\phi \in [-\pi, \pi]$; lub $\phi \in I$, gdzie I to dowolnie wybrany przedział domknięty o długości 2π). Zauważmy, że $g'_r(r,\phi) = (\cos\phi, \sin\phi)$ oraz $g'_\phi(r,\phi) = (-r\sin\phi, r\cos\phi)$, zatem:

$$\det g'(r,\phi) = \det \begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix} = r\cos^2\phi + r\sin^2\phi = r.$$

Tym samym we wszelkich całkach podwójnych możemy wprowadzać *współrzędne biegunowe*, tj. stosować podstawienie:

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \boxed{\begin{matrix} x=r\cos\phi \\ y=r\sin\phi \\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi \\ D \rightsquigarrow \Omega \end{matrix}} = \iint_\Omega f(r\cos\phi, r\sin\phi) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi.$$

Cała sztuka w tym podstawieniu to rozpoznać, na jaki zbiór Ω przekształci się wyjściowy zbiór D. Aby tego dokonać, należy pamiętać, że dowolny punkt (x,y) na płaszczyźnie (inny niż $(0,0)$ — ten punkt możemy zupełnie pominąć) we współrzędnych biegunowych ma reprezentację (r,ϕ), gdzie $r = \sqrt{x^2+y^2}$ (czyli $x^2 + y^2 = r^2$), a ϕ to taki kąt z wybranego przez nas zakresu, który możemy przedstawić jako $\phi = \phi_0 + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, a $\phi_0 \in [0, 2\pi)$ to kąt między dodatnią półosią X a półprostą o początku w $(0,0)$ przechodzącą przez (x,y) (kąt zataczany od dodatniej półosi X w kierunku odwrotnym do ruchu wskazówek zegara).

Można również stosować współrzędne biegunowe wokół dowolnego punktu $O = (a,b)$ płaszczyzny. Współrzędne punktu opisuje się wtedy wzorami $x = a + r\cos\phi$ oraz $y = b + r\sin\phi$. W tej wersji $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi$, r to odległość punktu (x,y) od punktu O, a ϕ to kąt wyznaczony tak jak poprzednio, ale wg układu współrzędnych, którego początkiem jest punkt O.

(B) (***Współrzędne walcowe***) Tym razem rozważamy funkcję trzech zmiennych $w(r,\phi,z) = (r\cos\phi, r\sin\phi, z)$, gdzie (jak poprzednio) $r \geq 0$, zakres ϕ to pewien domknięty przedział o długości 2π, a $z \in \mathbb{R}$. W tej sytuacji $\det w(r,\phi,z) = r$, więc przy obliczaniu całek potrójnych można wprowadzać *współrzędne walcowe*, tj. stosować następujące podstawienie:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \boxed{\begin{matrix} x=r\cos\phi \\ y=r\sin\phi \\ (z=z) \\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z \\ D \rightsquigarrow \Omega \end{matrix}} = \iiint_\Omega \dots$$

Powyższe współrzędne walcowe to ich wersja wzdłuż osi Z. Można także stosować współrzędne walcowe wzdłuż osi X ($x = x$, $y = r\cos\phi$, $z = r\sin\phi$, $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = r\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi$) oraz wzdłuż osi Y ($x = r\cos\phi$, $y = y$, $z = r\sin\phi$, $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\phi$). Kolejność, w jakiej wypisujemy napisy $\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}\phi$ oraz $\mathrm{d}z$ (lub $\mathrm{d}x$, lub $\mathrm{d}y$) we wzorze na $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ nie ma znaczenia i do nas należy wybór, w jakiej kolejności je wypiszemy.

Przedstawiając punkt przestrzeni trójwymiarowej we współrzędnych walcowych wzdłuż osi Z, jego współrzędna z nie ulega zmianie, a na podstawie jego współrzędnych x i y wyznacza się współrzędne biegunowe r i ϕ, które wraz ze współrzędną z opisują ów punkt we współrzędnych walcowych.

(C) (***Współrzędne sferyczne*** — I wersja) Punkty trójwymiarowej przestrzeni możemy także opisać za pomocą trzech zmiennych: $r \geq 0$ to odległość punktu od początku układu współrzędnych (czyli $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

© Piotr Niemiec

$x^2+y^2+z^2=r^2$), $\phi\in[0,2\pi]$ (lub $\phi\in[-\pi,\pi]$) to kąt we współrzędnych walcowych dla punktu (x,y,z) na płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny XY, która przechodzi przez ów punkt, a $\theta\in[0,\pi]$ to kąt, jaki tworzy półprosta wychodząca z $(0,0,0)$ i przechodząca przez (x,y,z) z dodatnią półosią Z. W tych współrzędnych sferycznych stosuje się podstawienie postaci:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta \end{cases}.$$

(D) (***Współrzędne sferyczne*** — II wersja) W tej wersji zmienne r i ϕ wyznaczamy identycznie jak w pierwszej wersji współrzędnych sferycznych, natomiast $\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ to kąt między półprostą wychodzącą z $(0,0,0)$ przechodzącą przez punkt (x,y,z) a płaszczyzną XY. W tej wersji stosuje się podstawienie:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\phi \\ y = r\cos\theta\sin\phi \\ z = r\sin\theta \\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = r^2\cos\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta \end{cases}.$$

9.41 Przykład.
Obliczmy ponownie całkę $\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ (gdzie $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon\ x^2+y^2\le 1\}$) z Prz. 9.35. Tym razem zastosujemy współrzędne biegunowe. Jako że zbiór D jest kołem o środku w $(0,0)$ i promieniu 1, we współrzędnych biegunowych zbiór ten opisuje się bardzo prosto:

$$D\colon\quad \begin{cases} 0\le r\le 1 \\ 0\le\phi\le 2\pi \end{cases}.$$

Co więcej, wiemy, że $x^2+y^2=r^2$. Tak więc zadaną całkę możemy obliczyć tak:

$$\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \boxed{\begin{array}{c} x=r\cos\phi \\ y=r\sin\phi \\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi \\ (x,y)\in D \iff (r,\phi)\in\Omega \\ \Omega\colon\ 0\le r\le 1,\ 0\le\phi\le 2\pi \end{array}} = \iint_\Omega r^2\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi = \int_0^1\Big(\int_0^{2\pi} r^3\,\mathrm{d}\phi\Big)\,\mathrm{d}r = 2\pi\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}.$$

Podobnie jak dla funkcji jednej zmiennej, zachodzi następujące

9.42 Twierdzenie. (Twierdzenie o zmajoryzowanym przejściu do granicy pod znakiem całki)
Jeśli $A\subset\mathbb{R}^d$ jest zbiorem mierzalnym w sensie Jordana, funkcje $f_1,f_2,f_3,\ldots\colon A\to\mathbb{R}$ są całkowalne i podobnie funkcja $g\colon A\to\mathbb{R}$ jest całkowalna oraz zachodzą własności:

- *istnieje stała $M>0$, taka że $|f_n(x)|\le M$ dla wszelkich $n\in\mathbb{N}_1$ oraz $x\in A$;*
- *$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=g(x)$ dla wszelkich $x\in A$,*

to:

$$\int_A f_n(x_1,\ldots,x_d)\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_d \to \int_A g(x_1,\ldots,x_d)\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_d \quad (n\to\infty).$$

Na koniec omówimy krzywe w $\mathbb{R}^d$ i ich długość.

9.43 Definicja.
Krzywa w $\mathbb{R}^d$ to dowolna funkcja ciągła z ograniczonego przedziału domkniętego $I\subset\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}^d$.

© Piotr Niemiec

Jeśli $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^d$ jest dowolną funkcją (niekoniecznie ciągłą), to jej *długością*, oznaczaną przez $\ell(\gamma)$, nazywamy kres górny (a więc wielkość z $[0,\infty]$) wszystkich liczb postaci

$$\sum_{k=1}^{m} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|,$$

gdzie $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ jest dowolnym podziałem przedziału $[a,b]$. Funkcję γ nazywamy *prostowalną*, gdy $\ell(\gamma) < \infty$.

Obliczanie długości krzywej wprost z definicji jest niemal niewykonalne. Do tego celu służy poniższe

9.44 Twierdzenie.
Jeśli $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^d$ jest krzywą, która jest klasy C^1 w przedziale (a,b), to:

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t,$$

przy czym całka po prawej stronie to całka (potencjalnie) niewłaściwa, której wartość może być nieskończona.

Jako szczególny przypadek powyższego rezultatu, otrzymujemy:

9.45 Wniosek.

(a) *Jeśli $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, klasy C^1 w przedziale (a,b), to długość wykresu $\Gamma(f) = \{(t, f(t))\colon\ t \in [a,b]\}$ funkcji f wyraża się wzorem:*

$$\ell(\Gamma(f)) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

(b) *Jeśli $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^d$ jest funkcją ciągłą, klasy C^1 w przedziale (a,b), przy czym $f(t) = (f_1(t), \ldots, f_d(t))$, to długość wykresu $\Gamma(f) = \{(t, f_1(t), \ldots, f_d(t))\colon\ t \in [a,b]\}$ funkcji f wyraża się wzorem:*

$$\ell(\Gamma(f)) = \int_a^b \sqrt{1 + \sum_{k=1}^{d} f_k'(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

9.46 Przykład.
Jak zobaczymy w poniższych przykładach, dość często obliczenie długości krzywej zadanej „ładnym” wzorem jest znacznie trudniejsze niż dla krzywych, których wzór wygląda znacznie „gorzej”.

(a) Niech $\gamma\colon [0,3] \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą daną wzorem $\gamma(t) = (-t^2, \frac{4}{5}t^2\sqrt{t}, \frac{1}{3}t^3)$. Aby obliczyć długość tej krzywej, zauważmy, że jest ona klasy C^1 oraz $\gamma'(t) = (-2t, 2t\sqrt{t}, t^2)$. Zatem, dzięki Tw. 9.44:

$$\ell(\gamma) = \int_0^3 \|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_0^3 \sqrt{4t^2 + 4t^3 + t^4}\,\mathrm{d}t = \int_0^3 (2t + t^2)\,\mathrm{d}t = \left(t^2 + \frac{1}{3}t^3\right)\Big|_0^3 = 18.$$

(b) Tym razem niech $f(x) = x^2$. Chcemy wyliczyć długość kawałka Γ paraboli będącej wykresem funkcji f wyznaczonego przez warunek $x \in [0,1]$. W tym celu korzystamy z Wn. 9.45:

$$\ell(\Gamma) = \int_0^1 \sqrt{1 + f'(t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Aby obliczyć powyższą całkę, skorzystamy ze wzoru

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 + x^2}} = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + C,$$

© Piotr Niemiec

który wyprowadziliśmy w Prz. 8.7 (str. 42). Przyda on nam się do obliczenia następującej całki:

$$\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} + \int x\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{array}{cc} & \text{②:} \\ u=x & v'=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ u'=1 & v=\sqrt{1+x^2}\end{array}}$$
$$= \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

a więc $\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + C$. Dalszy rachunek jest już prosty:

$$\ell(\Gamma) = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\,\mathrm{d}t = \boxed{\begin{array}{c} x=2t \\ \mathrm{d}t=\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x \\ t=0 \Longrightarrow x=0 \\ t=1 \Longrightarrow x=2\end{array}} = \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2}\Big)\Big|_0^2$$
$$= \frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5}) + \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

(c) Tym razem obliczymy długość górnego półokręgu o środku w $(0,0)$ i promieniu $R>0$. Na wstępie zaznaczamy, że istnieje prostszy sposób (z użyciem funkcji trygonometrycznych) na wykonanie tego zadania niż rozumowanie zaprezentowane poniżej. (Ten prostszy sposób jest związany z treścią jednego z zadań na ćwiczenia i dlatego tutaj go pomijamy).

Półokrąg, o którym mowa powyżej, jest opisany przez warunki:

$$\begin{cases} x^2+y^2 = R^2 \\ y \geq 0 \end{cases}.$$

Równoważnie, półokrąg ten jest wykresem Γ funkcji $f\colon [-R,R] \ni x \mapsto \sqrt{R^2-x^2} \in \mathbb{R}$. Tak więc ponownie możemy zastosować Wn. 9.45, zauważając wcześniej, że f jest funkcją ciągłą oraz $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$ dla $x\in(-R,R)$. Zatem:

$$\ell(\Gamma) = \int_{-R}^R \sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-R}^R \frac{R\,\mathrm{d}x}{\sqrt{R^2-x^2}} = \boxed{\begin{array}{c} x=Rt \\ \mathrm{d}x=R\,\mathrm{d}t \\ x=-R \Longrightarrow t=-1 \\ x=R \Longrightarrow t=1\end{array}} = R^2\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{R^2-R^2t^2}}$$
$$= R\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = R\arcsin t\Big|_{-1}^1 = \pi R.$$

© Piotr Niemiec

Zagadnienia na egzamin w roku akad. 2025/26

- granica ciągu (liczbowa i niewłaściwa) [definicje] (Def. 3.2; Def. 3.3)
- ciąg monotoniczny [definicja] (Def. 3.9); twierdzenie o granicy takiego ciągu [sformułowanie] (Tw. 3.11)
- symbole nieoznaczone [lista] (Tw. 4.2)
- operacje arytmetyczne na granicach [wzory] (tabelka na str. 15)
- warunek na zbieżność szeregu geometrycznego oraz harmonicznego [sformułowania] (punkt (G) Tw. 5.5; punkt (E) Tw. 5.6)
- kryteria zbieżności szeregów [sformułowania]: Cauchy'ego, d'Alemberta, asymptoptyczne, Leibniza (Tw. 5.6; Tw. 5.9)
- szereg potęgowy (o środku w zerze) [definicja] (Def. 5.16)
- promień zbieżności szeregu potęgowego [wzór] (Tw. 5.17)
- ciągłość funkcji w punkcie [definicja] (Def. 6.1)
- twierdzenia o kresach (Weierstrassa) i o własności Darboux [sformułowania] (Tw. 6.6)
- twierdzenie o ciągłości funkcji odwrotnej [sformułowanie] (punkt (C) Tw. 6.6)
- pochodna w punkcie [definicja] (Def. 7.1)
- podstawowe wzory na pochodną [wzory] (Tw. 7.4; Tw. 7.6; tabelka na str. 32)
- twierdzenie o wartości średniej (Lagrange'a) [sformułowanie] (Tw. 7.10)
- warunek na ścisłą monotoniczność funkcji [sformułowanie] (punkt (e) Tw. 7.10)
- warunki konieczne i wystarczające na ekstremum funkcji jednej zmiennej [sformułowania] (Tw. 7.13; Tw. 7.21)
- reguła de l'Hospitala [sformułowanie] (Tw. 7.15)
- wzór Taylora [definicja] (Def. 7.22); twierdzenie o wzorze Taylora [sformułowanie] (Tw. 7.23)
- szeregi potęgowe funkcji exp, sin i cos [wzory] (Tw. 7.26)
- różniczkowanie szeregu potęgowego [sformułowanie] (Tw. 7.27)
- funkcja pierwotna [definicja] (Def. 8.1)
- wzory na całkowanie przez części i przez podstawianie [sformułowanie] (Obs. 8.4; Obs. 8.5)
- podstawowe twierdzenie rachunku całkowego [sformułowanie] (Tw. 8.20)
- całka niewłaściwa i jej zbieżność [definicja] (Def. 8.28)
- iloczyn skalarny, norma euklidesowa, metryka euklidesowa [definicje] (Def. 9.1)
- charakteryzacja ciągłości i zbieżności w przestrzeniach euklidesowych [sformułowanie] (Tw. 9.3)
- pochodne cząstkowe i gradient [definicje] (Def. 9.10; Def. 9.13)
- pochodne cząstkowe wyższych rzędów i ich przemienność [definicja+sformułowanie] (Def. 9.16; Tw. 9.17)
- dyfeomorfizm [definicja] (Def. 9.16)
- warunek konieczny na ekstremum funkcji wielu zmiennych [sformułowanie] (Tw. 9.23)
- hesjan [definicja] (Def. 9.24)
- ogólny warunek na ekstremum funkcji wielu zmiennych [sformułowanie] (Tw. 9.25)
- warunek wystarczający na ekstremum dla funkcji dwóch zmiennych (wraz z warunkiem na maksimum/minimum) [sformułowanie] (Wn. 9.27)
- twierdzenia o: całce iterowanej; zmianie zmiennych; przejściu do granicy pod znakiem całki [sformułowanie] (Tw. 9.34; Tw. 9.38; Tw. 9.42)
- wzór na objętość bryły obrotowej [sformułowanie] (Tw. 9.36)
- współrzędne biegunowe, walcowe i sferyczne [wzory] (Prz. 9.40)
- długość krzywej [sformułowanie] (Tw. 9.44; Wn. 9.45)

© Piotr Niemiec