

Zagadnienia do sprawdzianu w ramach I części egzaminu (**oprócz wymienionych poniżej haseł obowiązującej umiejętności podawania prostych przykładów związanych z tymi zagadnieniami i pojęciami**):

- metryka, kule, zbiór otwarty w przestrzeni metrycznej (definicje)
- topologia na zbiorze (definicja)
- dyskretne: topologia i metryka (definicje)
- zbiór domknięty, otoczenie (definicje)
- własności rodziny zbiorów domkniętych (sformułowanie)
- wnętrze, domknięcie, brzeg (definicje)
- wnętrze, domknięcie i brzeg dopełnienia zbioru (sformułowanie)
- wnętrze i domknięcie sumy i przecięcia dwóch zbiorów (sformułowanie)
- norma, metryka wyznaczona przez normę (definicje)
- norma: euklidesowa, maksimum, sumy (definicje)
- równoważność i porównywalność metryk i norm (definicje)
- równoważność norm euklidesowej, maksimum i sumy (sformułowanie)
- przestrzeń metryzowalna (definicja)
- topologia indukowana (definicja)
- wzór na domknięcie w podprzestrzeni (sformułowanie)
- zbiór: gęsty, brzegowy, nigdziegęsty (definicje)
- zbiór skierowany, ciąg uogólniony (definicje)
- funkcja współkońcowa; podciąg (uogólniony) ciągu uogólnionego (definicje)
- zbieżność i granica ciągu uogólnionego (definicja)
- zbieżność ciągu uogólnionego a zbieżność podciągów jego podciągów (sformułowanie)
- ciągowa charakteryzacja domknięcia zbioru w przestrzeniach metryzowalnych (sformułowanie)
- charakteryzacja domknięcia zbioru w terminach ciągów uogólnionych (sformułowanie)
- punkt skupienia ciągu uogólnionego (definicja)
- charakteryzacja punktów skupienia ciągu uogólnionego (sformułowanie)
- ciągłość funkcji w punkcie (definicja)
- homeomorfizm, zanurzenie topologiczne/otwarte/domknięte, odwzorowanie otwarte/domknięte (definicje)
- warunki równoważne ciągłości (w tym w terminach ciągów uogólnionych) (sformułowanie)
- ciągowy warunek na ciągłość w przypadku metryzowalnym (sformułowanie)
- ciągłość złożenia i zacieśnienia funkcji ciągłych (sformułowanie)
- twierdzenie o sklejaniu funkcji ciągłych [domknięte] (sformułowanie)
- twierdzenie o sklejaniu funkcji ciągłych [otwarte] (sformułowanie)
- baza topologii, ciężar topologiczny (definicje)
- twierdzenie o zadawaniu topologii przez bazę (sformułowanie)
- baza otoczeń, pełny układ otoczeń, charakter punktowy (definicje)
- twierdzenie o zadawaniu topologii przez pełny układ otoczeń (sformułowanie)
- aksjomaty przeliczalności (definicje)
- warunek na ciągłość w punkcie z przeliczalną bazą otoczeń (sformułowanie)
- podzbiór dyskretny przestrzeni topologicznej, metrycznie rozproszona przestrzeń metryczna (definicje)
- charakter gęstości, przestrzeń ośrodkowa (definicje)
- kardynalne charakterystyki w przestrzeniach metryzowalnych (sformułowanie)
- aksjomaty oddzielania:  $T_0$ – $T_4$  oraz ich nazwy (definicje)
- charakteryzacja  $T_1$  (sformułowanie)
- charakteryzacja  $T_2$  w języku ciągów uogólnionych (sformułowanie)
- funkcje lipschitzowskie i nieoddalające, izometrie (definicje)
- funkcja odległości od zbioru (definicja)
- twierdzenie o kresach funkcji lipschitzowskich (sformułowanie)
- własność funkcji odległości od zbioru (sformułowanie)
- metryzowalność implikuje normalność (sformułowanie)
- lemat Urysohna (sformułowanie)
- twierdzenie o zbieżności jednostajnej (sformułowanie)
- twierdzenie Tietzego-Urysohna (sformułowanie)
- pokrycie, podpokrycie, zwartość (definicje)
- ciągly obraz zbioru zwartego (sformułowanie)
- aksjomaty oddzielania w przestrzeniach zwartych (sformułowanie)
- podzbiory zwarte w przestrzeniach  $T_2$  (sformułowanie)
- podzbiory zwarte przestrzeni zwartej (sformułowanie)
- oddzielanie zbiorów zwartych w przestrzeniach  $T_2$  (sformułowanie)
- homeomorfizm w przestrzeniach zwartych (sformułowanie)

- charakteryzacja zwartości w terminach ciągów uogólnionych (sformułowanie)
- przestrzeń ciągowo zwarta (definicja)
- zwartość a ciągowa zwartość w przestrzeniach z I A.P. (sformułowanie)
- zwartość w przestrzeniach metryzowalnych (sformułowanie)
- zwartość odcinka (sformułowanie)
- średnica przestrzeni metrycznej (definicja)
- twierdzenie Heinego-Borela (sformułowanie)
- przestrzeń Heinego-Borela (definicja)
- twierdzenie Weierstrassa o kresach (sformułowanie)
- jednostajna ciągłość (definicja)
- (jednostajna) ciągłość w przestrzeniach zwartych (sformułowanie)
- twierdzenie Kuratowskiego o zbieżności (sformułowanie)
- $k$ -przestrzeń, odwzorowanie właściwe (definicje)
- twierdzenie o odwzorowaniach właściwych (sformułowanie)
- (nie)spójność (definicja)
- zbiory: rozgraniczone, otwarto-domknięte (definicje)
- spójność a zbiory rozgraniczone oraz otwarto-domknięte (sformułowanie)
- zbiór między zbiorem spójnym a jego domknięciem (sformułowanie)
- topologicznie spójna rodzina zbiorów (definicja)
- twierdzenie o sumie spójnej (sformułowanie)
- charakteryzacja spójnych podzbiorów prostej (sformułowanie)
- krzywa, łuk; drogowa i łukowa spójność (definicje)
- ciągły obraz zbioru spójnego lub drogowo spójnego (sformułowanie)
- drogowa spójność a spójność (sformułowanie)
- drogowa = łukowa spójność w  $T_2$  (sformułowanie)
- składowa, składowa drogowa (definicje); „wzory” na obie składowe (sformułowanie)
- własności składowych i składowych drogowych (sformułowanie)
- przestrzeń dziedzicznie niespójna, całkowicie niespójna, zerowymiarowa (definicje)
- dziedziczna niespójność w przestrzeniach zwartych (sformułowanie)
- zbiór Cantora (definicja)
- ciąg Cauchy’ego, zupełność przestrzeni (definicje)
- zbieżność podciągu ciągu Cauchy’ego (sformułowanie)
- własność Heinego-Borela a zupełność (sformułowanie)
- uzupełnienie przestrzeni metrycznej (definicja)
- twierdzenie Cantora o przestrzeniach zupełnych (sformułowanie)
- $\varepsilon$ -sieć, całkowita ograniczoność (definicje)
- twierdzenie Hausdorffa o zwartości (sformułowanie)
- twierdzenie Banacha o punkcie stałym (sformułowanie)
- przestrzeń metryzowalna w sposób zupełny (definicja)
- zbiór typu  $\mathcal{G}_\delta$  i  $\mathcal{F}_\sigma$  (definicje)
- twierdzenie Baire’a (sformułowanie)
- topologia produktowa; otwarty cylinder (definicje)
- zbieżność ciągów uogólnionych w topologiach produktowych (sformułowanie)
- ciągłość funkcji o wartościach w produktach: zestawienie oraz produkt rodziny funkcji (sformułowanie)
- wzór na domknięcie produktu (sformułowanie)
- charakteryzacja  $T_2$  w języku topologii produktowej (sformułowanie)
- ciężar topologiczny i charakter punktowy produktu (sformułowanie)
- topologia produktowa w przestrzeniach metrycznych (sformułowanie)
- metryzowalność produktu (sformułowanie)
- spójność w topologiach produktowych (sformułowanie)
- zwartość przeliczalnego iloczynu kartezjańskiego przestrzeni metryzowalnych (sformułowanie)
- rodzina scentrowana oraz ultrafiltr (definicje)
- charakteryzacja zwartości w terminach rodzin scentrowanych (sformułowanie)
- własności ultrafiltrów (sformułowanie)
- twierdzenie Tichonowa (sformułowanie)

## LISTA PYTAŃ DO II CZĘŚCI EGZAMINU

---

Podając dowód wylosowanego zagadnienia, należy także sformułować wszystkie lematy/twierdzenia/obserwacje/itp. (prowadzące do owego zagadnienia), oraz udowodnić te z nich, których nie ma na liście zagadnień (ani na ocenę 4, ani na 5), a o które poprosi egzaminator.

---

Zagadnienia na ocenę dobrą (4):

- A1 Wzór na domknięcie w podprzestrzeni (sformułowanie i DOWÓD)
  - A2 Charakteryzacja punktów skupienia ciągu uogólnionego (sformułowanie i DOWÓD)
  - A3 Twierdzenie o zadawaniu topologii przez bazę (sformułowanie i DOWÓD)
  - A4 Twierdzenie o zadawaniu topologii przez pełny układ otoczeń (sformułowanie i DOWÓD)
  - A5 Charakteryzacja  $T_2$  w języku ciągów uogólnionych (sformułowanie i DOWÓD)
  - A6 Aksjomaty oddzielania w przestrzeniach zwartych (sformułowanie i DOWÓD)
  - A7 Zwartość w przestrzeniach metryzowalnych (sformułowanie i DOWÓD)
  - A8 Zbiór między zbiorem spójnym a jego domknięciem (sformułowanie i DOWÓD)
  - A9 Twierdzenie o sumie spójnej (sformułowanie i DOWÓD)
  - A10 Twierdzenie Baire'a (sformułowanie i DOWÓD)
  - A11 Charakteryzacja  $T_2$  w języku topologii produktowej (sformułowanie i DOWÓD)
  - A12 Topologia produktowa w przestrzeniach metrycznych (sformułowanie i DOWÓD)
- 

Zagadnienia na ocenę bardzo dobrą (5):

- B1 Warunki równoważne ciągłości (w tym w terminach ciągów uogólnionych) (sformułowanie i DOWÓD)
  - B2 Kardynalne charakterystyki w przestrzeniach metryzowalnych (sformułowanie i DOWÓD)
  - B3 Lemat Urysohna (sformułowanie i DOWÓD)
  - B4 Twierdzenie Tietzego-Urysohna (sformułowanie i DOWÓD)
  - B5 Charakteryzacja zwartości w terminach ciągów uogólnionych (sformułowanie i DOWÓD)
  - B6 Twierdzenie Kuratowskiego o zbieżności (sformułowanie i DOWÓD)
  - B7 Dziedziczna niespójność w przestrzeniach zwartych (sformułowanie i DOWÓD)
  - B8 Twierdzenie Cantora o przestrzeniach zupełnych (sformułowanie i DOWÓD)
  - B9 Twierdzenie Hausdorffa o zwartości (sformułowanie i DOWÓD)
  - B10 Twierdzenie Banacha o punkcie stałym (sformułowanie i DOWÓD)
  - B11 Spójność w topologiach produktowych (sformułowanie i DOWÓD)
  - B12 Twierdzenie Tichonowa (sformułowanie i DOWÓD)
-