Analiza Matematyczna 1

Rok akademicki 2022/2023

Piotr Tworzewski

Rozdział 1. Preliminaria

§1. Uwagi ogólne

1. Podstawy analizy.

Cytując Franciszka Leję:

„Rachunek różniczkowy i całkowy, zwany inaczej analizą matematyczną, powstał w drugiej połowie XVII w.; (...). Powstanie nowego rachunku wywarło duży wpływ na rozwój matematyki i wielu innych gałęzi wiedzy, a w szczególności fizyki, astronomii i nauk technicznych. Podstawowymi pojęciami rachunku różniczkowego są: liczba i funkcja."

Twórcy podstaw analizy:

Isaac Newton (1643-1727).

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1717)

a następnie:

August Cauchy (1789-1857)

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897).

2. Literatura.

Współczesna analiza matematyczna to przedmiot trudny i zbyt obszerny, by można go było wyłożyć studentom bez odwoływania się do podręcznika.

... według słów Witolda Kołodziejczyka

1-3

Podane pozycje stanowią klasykę literatury, która w Polsce jest wykorzystywana w tym zakresie.

LITERATURA

[Fi] G.M. Fichtenholz, Rachunek różniczkowy i całkowy, tomy 1-3, PWN.

[Kr] T. Krasiński, Analiza matematyczna, funkcje jednej zmiennej, Wydawnictwo UŁ.

[Le] F. Leja, Rachunek różniczkowy i całkowy, PWN.

[Ru] W. Rudin, Podstawy analizy matematycznej, PWN.

+ [Rs] Lektura obowiązkowa każdego studenta...

3. Kontynuacje

Przedmiot będzie kontynuowany w drugim semestrze jako Analiza Matematyczna 2, obejmując swym zakresem obszary rachunku różniczkowego i całkowego jednej zmiennej.

Kolejna kontynuacja to Analiza Matematyczna 3 i 4, na II roku studiów, obejmująca 120 godzin wykładów i 120 godzin ćwiczeń. W jej zakresie otrzymujemy „dowody" rachunek różniczkowy wielu zmiennych (zwykle w przestrzeniach Banacha) oraz jego związki z teorią miary i formami różniczkowymi z „kultowym" Twierdzeniem Stokesa.

4. Sprawy organizacyjne

(A) Ćwiczenia

Przy staraniu się o ocenę z ćwiczeń (zaliczenie), poza aktywnością na zajęciach oraz pracami pisemnymi (kolokwiami) obowiązują limity nieobecności. Ich przekroczenie skutkuje uzyskaniem oceny NZAL, wykluczającej przystąpienie do egzaminu.

W semestrze jest 60 godzin (lekcyjnych) ćwiczeń. Limit nieobecności nieusprawiedliwionych wynosi 12 godzin zaś ogólny limit nieobecności (nieusprawiedliwionych i usprawiedliwionych) to 30 godzin.

Akceptowane są zwolnienia lekarskie, ale usprawiedliwiają nieobecności mogą także Prowadzący ćwiczenia. Dodatkowo obowiązuje zasada, że nieobecności z wcześniej zapowiedzianymi pracami pisemnymi muszą być usprawiedliwione.

Podane wyżej limity mogą być w szczególnych sytuacjach modyfikowane przez Prowadzących zajęcia w porozumieniu ze mną. Ważną sprawą jest wczesne zgłoszenie problemu oraz uzyskanie wyżej wspomnianej modyfikacji limitów.

(B) Egzamin

Osoby, które z ćwiczeń uzyskają zaliczenie 5,0 automatycznie otrzymują 5,0 z egzaminu końcowego AM1. Osoby, które z ćwiczeń uzyskają oceny z zakresu od 3,0 do 4,5 mogą przystąpić do egzaminu w dwóch terminach. Otrzymanie z ćwiczeń oceny 2,0 lub NZAL wyklucza możliwość zdawania egzaminu.

Egzaminy, które będą odbywać się ustnie, zostaną zorganizowane z indywidualnym, dość swobodnym wyborem terminów w ramach obowiązującego „Regulaminu studiów ..." UJ.

Zawsze podstawą oceny z egzaminu będzie ocena z ćwiczeń, w tym sensie, że ocena z egzaminu (standardowo) nie będzie przekraczać oceny z ćwiczeń o więcej niż jeden stopień.

(C) Zalecenia:

1. Dużo się uczyć!!!
2. Dbać o zdrowie!!!
3. W przypadku kłopotów z opanowaniem materiału stosować punkt 1.

§2. Podstawowe pojęcia logiczne i mnogościowe

1. Symbolika logiczna

Fakty formułować będziemy w języku polskim tocząc zdania oznaczone: $p, q, r, \ldots$ następującymi spójnikami logicznymi:

$\sim$ - negacja (zaprzeczenie),
$\vee$ - alternatywa (lub),
$\wedge$ - koniunkcja (i), (, - przecinek),
$\Rightarrow$ - implikacja,
$\Leftrightarrow$ - równoważność,

oraz wykorzystując zestaw kwantyfikatorów:

$\forall$ - dla każdego (ogólny)
$\exists$ - istnieje (szczegółowy)
$\exists!$ - istnieje dokładnie jeden

W wyniku połączeń otrzymujemy nowe zdania lub formy (funkcje) zdaniowe jeśli część zdań potraktujemy jako zmienne

Szczegółowe informacje na ten temat otrzymają Państwo w ramach przedmiotu:

„Elementy logiki i teorii mnogości"

2. Zbiory.

Dygresja. Jeśli potrzeba nam podstaw teorii mnogości w Analizie Matematycznej to sięgamy zwykle po tzw. ZFC.

Zbiory oznaczamy zwykle dużymi literami: $A, B, C, X, Y, Z, \ldots$, zaś szczególnie „dokuczliwy" zbiór pusty oznaczać będziemy dalej symbolem $\emptyset$.

Część zbiorów ma swoje ustalone oznaczenia jak:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ - liczby naturalne,

$\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, \ldots\}$ - liczby całkowite,

$\mathbb{Q}$ - liczby wymierne,

$\mathbb{R}$ - liczby rzeczywiste,

$\mathbb{C}$ - liczby zespolone.

Dwa ostatnie zbiory skonstruujemy w ramach tego wykładu.

Elementy zbiorów oznaczamy zwykle małymi literami i często zbiór zadajemy przez podanie jego elementów. Zatem $A = \{a, b, c\}$ oznacza, że zbiór A jest złożony z elementów a, b, c.

Jeśli a jest elementem zbioru A, to piszemy $a \in A$, zaś w przeciwnym przypadku $a \notin A$.

Mówimy, że zbiór A zawiera się w zbiorze B, pisząc $A \subset B$, jeśli

$$\forall a \in A : a \in B$$

$\{a\}$ - to zbiór złożony z dokładnie jednego elementu a (tzw. singleton).

Wiele zbiorów określamy korzystając z form zdaniowych według schematu

$A = \{x \in X : w(x)\}$ - ogół elementów zbioru X,

które mają własność $w(x)$ to znaczy, dla których $w(x)$ jest zdaniem prawdziwym.

Należy odnotować, że w Analizie Matematycznej mamy wygodną sytuację gdyż zawsze „poruszamy" się w pewnej przestrzeni X będącej zbiorem. W zasadzie nigdzie nie spotyka się pojęcia „klasy" dobrze znanego z teorii mnogości. Często przestrzeń X, w której działamy jest bardzo skomplikowanym obiektem.

Jeśli A jest zbiorem, to przez $\mathcal{P}(A)$ oznaczać będziemy zbiór wszystkich podzbiorów zbioru A, czyli zbiorów zawartych w A. W szczególności $\phi \in \mathcal{P}(A)$ dla dowolnego zbioru A.

Musimy zawsze zwracać szczególną uwagę na ϕ gdyż sprawi nam on wiele kłopotów w dalszych rozważaniach.

3. Działania na zbiorach.

Rozważając, przy działaniach, rodziny zbiorów zawsze możemy założyć, że są one zawarte w pewnej przestrzeni X będącej zbiorem. Spotyka się też dla niej oznaczenie U i nazwę uniwersum. W tak zwanej naiwnej teorii mnogości, wystarczającej na potrzeby analizy, jest zawsze taka właśnie sytuacja.

Suma zbiorów

A, B - zbiory, ich suma $A \cup B$ opisywana jest równoważnością $x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)$.

Jeśli $\mathcal{A}$ jest rodziną zbiorów (można założyć, że $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ czyli $\forall A \in \mathcal{A}: A \subset X$ gdzie X - przestrzeń) to sumę opisujemy podobnie.

$$x \in \bigcup \mathcal{A} \Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{A}: x \in A$$

Iloczyn zbiorów.

A, B - zbiory, ich iloczyn (część wspólna, przecięcie) opisuje równoważność $x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)$.

Jeśli $\mathcal{A}$ rodzina zbiorów niepusta (!), to jej iloczyn $\bigcap \mathcal{A}$ definiujemy

$$x \in \bigcap \mathcal{A} \Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{A}: x \in A$$

Wrócimy do tych pojęć i ich własności nieco dalej przy tzw. rodzinach indeksowanych.

Różnica zbiorów.

A, B - zbiory, określamy ich różnicę równością

$$A \setminus B := \{x \in A : x \notin B\}$$

Różnica symetryczna zbiorów

Dla zbiorów A, B ich różnicę symetryczną nazywamy

$$A \div B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Jest to piękne działanie, oznaczam również innymi symbolami (!) ($\div$, Δ, ...), bardzo często wykorzystywane w analizie.

Dopełnienie zbioru w przestrzeni.

Jeśli X jest ustaloną przestrzenią zaś $A \subset X$, to dopełnieniem A w X nazywamy

$$A^c := X \setminus A$$

Spotyka się też oznaczenie dopełnienia A przez A', ale ze względu na kolizję z innymi oznaczeniami w analizie stosować będziemy A^c.

4. Iloczyn (produkt) kartezjański pary zbiorów.

A, B - zbiory $a \in A$, $b \in B$.

Oliveslamy tzw. parę uporządkowaną

$$(a,b) := \{\{a\}, \{a,b\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$$

a następnie iloczyn kartezjański

$$A \times B := \{(a,b) : a \in A, b \in B\} \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)).$$

Istotne jest to że dwie pary uporządkowane są sobie równe jeśli ich pierwsze i drugie elementy są identycznie.

5. Relacje (dwuargumentowe).

Niech X, Y będą zbiorami.
Jeśli $R \subset X \times Y$, to R nazywamy relacją między elementami zbiorów X, Y

Jeśli $(x,y) \in R$, to mówimy, że x jest w relacji z y i czasem piszemy xRy.

Jeśli $X = Y$, to wtedy $R \subset X \times X$ i mówimy o relacji między elementami jednego zbioru X.

Mówimy wtedy, że:

R - jest <u>zwrotna</u> gdy $\forall x \in X : xRx$,

R - jest <u>symetryczna</u> gdy $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$,

R - jest <u>przechodnia</u> gdy $\forall x, y, z \in X : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$.

Relację R nazywamy <u>równoważnością</u> jeśli R jest: zwrotna, symetryczna i przechodnia. Dla takiej relacji R i elementu $a \in X$ oznaczamy przez:

$$\underline{[a]_R := \{x \in X : xRa\}}$$

tak zwaną klasę równoważności elementu a.

<u>Przykładowo</u>:

(1) $X = \mathbb{Z}$, $xRy \Leftrightarrow 2 | x - y$, dostajemy dwie klasy.

(2) X - mieszkańcy Krakowa, $a, b \in X$

$aRb \Leftrightarrow$ a i b mają tę samą liczbę włosów na głowie.

Możemy dostać około 150 tys. klas równoważności.

W dalszym ciągu symbolem X/R oznaczamy <u>zbiór klas równoważności</u> relacji równoważności R w X.

Łatwo sprawdzić, że klasy równoważności są parami rozłączne i ich suma daje zbiór X.

6. Odwzorowania (funkcje)

X, Y - zbiory.

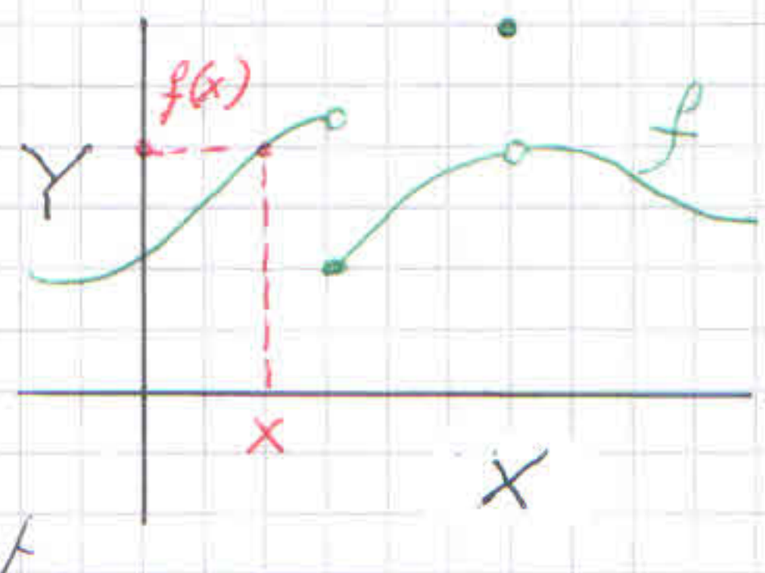
$f \subset X \times Y$ (f - jest relacją między elementami zb. X i Y)

Relację f nazywamy odwzorowaniem (funkcją) z X do Y jeśli:

$$\forall x \in X \; \exists! \, y \in Y : (x,y) \in f$$

Piszemy wtedy $f : X \ni x \longrightarrow y = f(x) \in Y$

nazywając $y = f(x)$ wartością funkcji f w punkcie x.



Szukanie „dziedziny" funkcje jest w zasadzie nieporozumieniem bo jeśli zadajemy funkcję, to musimy określić X tzn. jej dziedzinę.

Podstawowe przykłady:

(1) X, Y - zbiory, $b \in Y$

$f : X \ni x \longrightarrow f(x) = b \in Y$, funkcja stała.

(2) X - zbiór

$f : X \ni x \longrightarrow f(x) = x \in X$, identyczność oznaczana id_X.

(3) X, Y - zbiory, $X \subset Y$

$f : X \ni x \longrightarrow f(x) = x \in Y$, zanurzenie X w Y.

(4) X - zbiór

$f : \mathbb{N} \ni n \longrightarrow f(n) = a_n \in X$, to tak zwany ciąg elementów zbioru X oznaczany dalej poprzez $\{a_n\}$

Niech X, Y będą zbiorami oraz $f: X \longrightarrow Y$ będzie odwzorowaniem z X do Y.

Wtedy określamy:

- dla $A \subset X$, $f(A) = \{y \in Y : \exists x \in A : y = f(x)\}$
  obraz zbioru A przez odwzorowanie f,
- dla $B \subset Y$, $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$
  przeciwobraz zbioru B przez odwzorowanie f,
- dla $b \in Y$, $f^{-1}(b) = f^{-1}(\{b\})$
  włókno elementu b odwzorowania f.

Rozpatrując dalej $f: X \to Y$ jak wyżej odwzorowanie f nazywamy:

- injekcją, jeśli $\forall x', x'' \in X : (x' \neq x'') \Rightarrow (f(x') \neq f(x''))$,
- surjekcją, jeśli $f(X) = Y$,
- bijekcją jeśli f jest injekcją i jest surjekcją.

Niech następnie $f: X \to Y$ będzie bijekcją.
Wtedy określamy $f^{-1}: Y \longrightarrow X$ odwzorowanie odwrotne do f jako jedyne odwzorowanie spełniające związek

$$\forall x \in X \, \forall y \in Y : f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y .$$

Relacja określająca f i f^{-1} jest ta sama a jedynie zamieniamy role zbiorów X i Y dokonując „odbicia" $(x, y) \in f \Leftrightarrow (y, x) \in f^{-1}$ dla $x \in X$ i $y \in Y$

7. Rodziny indeksowane, iloczyny kartezjańskie rodzin zbiorów

Niech S, X będą zbiorami.

$$f : S \ni s \longrightarrow A_s \in \mathcal{P}(X),$$

nazywamy rodziną zbiorów indeksowaną zbiorem S i dalej oznaczamy $\{A_s\}_{s \in S}$

Jeśli $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s \in S}$ jest rodziną zbiorów, to wprowadzamy oznaczenia:

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{s \in S} A_s$$

oraz gdy $S \neq \emptyset$ $\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{s \in S} A_s$.

Jeśli $\{A_s\}_{s \in S}$ jest rodziną podzbiorów zbioru X, to tutaj dostajemy równości:

$$\left(\bigcup_{s \in S} A_s\right)^c = \bigcap_{s \in S} A_s^c, \quad \left(\bigcap_{s \in S} A_s\right)^c = \bigcup_{s \in S} A_s^c.$$

Następnie wprowadzamy w tej sytuacji dla rodziny $\{A_s\}_{s \in S}$ jej iloczyn kartezjański:

$$\prod_{s \in S} A_s := \{f : S \longrightarrow X \mid \forall s \in S : f(s) \in A_s\}.$$

Najczęściej, w najbliższym czasie, spotykać będziemy sytuację $S = \{1, \ldots, m\}$, $m \in \mathbb{N}$. Wtedy iloczyn kartezjański zapisujemy $A_1 \times \ldots \times A_m$.

Jeśli dodatkowo $A_1 = A_2 = \ldots = A_m = A$, to wprowadzamy oznaczenie $A^m := \underbrace{A \times \ldots \times A}_{\times m}$.

8. Zbiory skończone, przeliczalne i nieprzeliczalne:

X, Y zbiory.

X i Y nazywamy równolicznymi, piszemy $X \sim Y$, jeśli istnieje $f: X \to Y$ bijekcja między tymi zbiorami.

Mówimy, że zbiór X jest:

(a) n-elementowy gdzie $n \in \mathbb{N}$, jeśli dla $n = 0$ $X = \emptyset$ oraz dla $n \geq 1$, $X \sim \{1, 2, \ldots, n\}$

(b) skończony, jeśli $\exists n \in \mathbb{N}$: X - jest n-elementowy.

(c) nieskończony, jeśli X nie jest skończony,

(d) przeliczalny, jeśli $X \sim \mathbb{N}$

(e) co najwyżej przeliczalny, jeśli X jest skończony lub X jest przeliczalny,

(f) nieprzeliczalny, jeśli X nie jest co najwyżej przeliczalny.

Przykładowo:

$\mathbb{Z}$ - jest przeliczalny.

$\mathbb{Q}$ - jest przeliczalny.

$\mathbb{R}$ - jest nieprzeliczalny.

9. Podstawowe operacje na odwzorowaniach.

(A) Zwężenie.

X, Y - zbiory, $f: X \to Y$ odwzorowanie, $A \subset X$. Wtedy $f|A : A \ni x \longrightarrow f(x) \in Y$ nazywamy zwężeniem f do A

(B) Sklejenie

A, B, Y - zbiory, $f: A \to Y$, $g: B \to Y$ odwzorowania. takie, że $f|A \cap B = g|A \cap B$. Wtedy $f \cup g \subset (A \cup B) \times Y$ nazywamy sklejeniem f i g.

(C) Złożenie

X, Y, Z - zbiory, $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ odwzorowania. Wtedy $g \circ f : X \ni x \longrightarrow g(f(x)) \in Z$ nazywamy złożeniem odwzorowań f i g.

(D) Skończone zestawienie odwzorowań

$X, Y_1, \dots, Y_m$ - zbiory, $m \geq 1$, $f_i : X \to Y_i$ dla $i = 1, \dots, m$. Wtedy $(f_1, \dots, f_m) : X \ni x \longrightarrow (f_1(x), \dots, f_m(x)) \in Y_1 \times \dots \times Y_m$ nazywamy zestawieniem odwzorowań $f_1, \dots, f_m$.

(E) Skończony iloczyn kartezjański odwzorowań

$X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_m$ - zbiory $m \geq 1$ oraz $f_i : X_i \longrightarrow Y_i$ odwzorowanie dla $i = 1, \dots, m$. Wtedy, $f_1 \times \dots \times f_m : X_1 \times \dots \times X_m \ni (x_1, \dots, x_m) \longrightarrow (f_1(x_1), \dots, f_m(x_m)) \in Y_1 \times \dots \times Y_m$ nazywamy iloczynem kartezjańskim $f_1, \dots, f_m$.

Uwaga: (D), (E) łatwo uogólnić na rodziny indeksowane zbiorów i odwzorowań

§3. Podstawowe struktury algebraiczne

1. Działania.

Niech S będzie zbiorem.

Definicja 1.01 Działaniem (dwuargumentowym, wewnętrznym) w zbiorze S nazywamy odwzorowanie

$$f: S \times S \ni (a,b) \longrightarrow f(a,b) \in S$$

Działania bywają oznaczane różnymi symbolami takimi jak: $+, -, \cdot, :, \square, \circ, \bullet, \cap, \cup, \setminus, \div$ itp. Zwykle wynik działania na elementach a, b oznaczać będziemy wykorzystując symbol tego działania czyli:

$$f(a,b) = a+b,\ a-b,\ a\cdot b, \ldots$$

Uwaga 1.02 Spotykane są często inne odwzorowania też nazywane działaniami. Przykładem może być powszechnie znany iloczyn skalarny, w którym biorąc dwa wektory v, w (np. z $\mathbb{R}^2$ czy $\mathbb{R}^3$), mnożymy je skalarnie dostając $v \circ w \in \mathbb{R}$. Dla iloczynu skalarnego stosowane są zresztą też inne oznaczenia jak $(v|w)$ czy $\langle v|w \rangle$. My będziemy traktować te obiekty jako odwzorowania nie nazywając ich działaniami.

2. Grupy.

Definicja 1.03. Grupą nazywamy $(G, \cdot)$, gdzie G jest zbiorem niepustym zaś

$$\cdot : G \times G \ni (a,b) \longrightarrow a \cdot b \in G,$$

działaniem spełniającym warunki:

(G1) $\forall\, a,b,c \in G : a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$,

(G2) $\exists\, e \in G\ \forall\, a \in G : a \cdot e = e \cdot a = a$,

(G3) $\forall\, a \in G\ \exists\, b \in G : a \cdot b = b \cdot a = e$.

Uwagi 1.04

(1) Element e w grupie jest nazywany elementem neutralnym. Jest on wyznaczony jednoznacznie i często oznaczany przez 0 lub 1, w zależności od własności rozpatrywanego działania.

(2) Element b z G3, nazywany elementem odwrotnym do elementu $a \in G$, jest wyznaczony jednoznacznie i często oznaczany przez $-a$ lub a^{-1}, w zależności od rozpatrywanego działania.

Jako ćwiczenie warto sprawdzić fakty z (1) i (2)

Definicja 1.05 Jeśli w grupie $(G, \cdot)$ spełniony jest dodatkowo warunek

(G4) $\forall\, a,b \in G : a \cdot b = b \cdot a$,

to grupę nazywamy przemienną lub abelową.

Zwykle w grupach przemienny działania oznaczamy przez $+$, element neutralny przez 0 zaś odwrotny do a przez $-a$. Przykładami mogą być $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$.

3. Ciała

Definicja 1.06 Ciałem nazywamy trójkę $(K,+,\cdot)$ gdzie K jest zbiorem zaś $+: K\times K \to K$, $\cdot: K\times K \to K$ są działaniami w K spełniającymi warunki:

(K1) $(K,+)$ jest grupą przemienną,

(K2) $(K\setminus\{0\},\cdot)$, gdzie 0 - jest neutralnym elementem względem $+$, jest grupą przemienną.

(K3) $\forall \alpha,\beta,\gamma \in K: \alpha\cdot(\beta+\gamma) = \alpha\cdot\beta + \alpha\cdot\gamma$.

Przykładowo:

(1) $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ ma strukturę ciała z klasycznym dodawaniem i mnożeniem liczb wymiernych.

(2) Zbiór $\{0,1\}$ ze zwykłym mnożeniem oraz dodawaniem z umową $1+1=0$ jest ciałem.

Uwaga 1.07 Przyjmujemy, że $\mathbb{Q}$ zbiór liczb wymiernych konstruowany szczegółowo w ramach przedmiotu „Elementy logiki i teorii mnogości" jest nam znany. W ramach Analizy Matematycznej skonstruujemy zbiory liczbowe (ciała) $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$, liczby rzeczywiste i liczby zespolone.

4. Przestrzenie wektorowe

Definicja 1.08 Przestrzenią wektorową nazywamy układ $((V,+),(K,+,\cdot),\cdot)$ taki, że:
(V1). $(V,+)$ jest grupą przemienną,
(V2). $(K,+,\cdot)$ jest ciałem.
Ostatni element układu to odwzorowanie $\cdot : K \times V \longrightarrow V$ spełnia warunki:
(V3). $\forall \alpha \in K \; \forall v,w \in V : \alpha\cdot(v+w) = \alpha\cdot v + \alpha\cdot w$,
$\forall \alpha,\beta \in K \; \forall v \in V : (\alpha+\beta)\cdot v = \alpha\cdot v + \beta\cdot w$,
(V4). $\forall \alpha,\beta \in K \; \forall v \in V : \alpha\cdot(\beta\cdot v) = (\alpha\cdot\beta)\cdot v$,
(V5). Jeśli przez 1 oznaczymy element neutralny mnożenia w K, to $\forall v \in V : 1\cdot v = v$.

Uwagi 1.09. W powyższej sytuacji:
(1) K jest nazywane ciałem skalarów przestrzeni wektorowej
(2) Odwzorowanie $\cdot : K \times V \longrightarrow V$ jest nazywane mnożeniem zewnętrznym przez skalary wektorów, czyli elementów $v \in V$
(3) Jeśli wiadomo o jakich strukturach mówimy, to symbole działań się pomijane. Pojawią się V przestrzeń wektorowa nad K lub tylko przestrzeń wektorowa V gdy ciało jest ustalone.
(4) Każde ciało daje strukturę przestrzeni wektorowej jako $((K,+),(K,+,\cdot),\cdot)$ w naturalny sposób.
(5) Szczegółowa teoria przestrzeni wektorowych to zadanie przedmiotu „Algebra liniowa z geometrią".

Rozdział 2. Liczby rzeczywiste i liczby zespolone.

§1. Zbiór liczb rzeczywistych

1. Aksjomatyczne sprowadzenie liczb rzeczywistych.

Poszukiwany jest, przy tym podejściu, zbiór $\mathbb{R}$ dalej zwany zbiorem liczb rzeczywistych, który spełnia wszystkie dalej przedstawione warunki (aksjomaty) połączone w cztery grupy.

I. Aksjomaty ciała

W $\mathbb{R}$ określone są dwa działania dwuargumentowe „$+$" i „$\cdot$" zwane dalej dodawaniem i mnożeniem takie, że trójka $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ jest ciałem.

II. Aksjomaty porządku

W $\mathbb{R}$ określona jest relacja „$<$" zwana dalej mniejszością, spełniająca następujące warunki:

(1) $\forall x,y \in \mathbb{R} : (x \neq y) \Rightarrow (x<y) \vee (y<x)$,
(2) $\forall x,y,z \in \mathbb{R} : (x<y) \wedge (y<z) \Rightarrow (x<z)$,
(3) $\forall x,y \in \mathbb{R} : (x<y) \Rightarrow \sim (y<x)$.

III. Aksjomaty związku działań z porządkiem:

(1) $\forall x,y,z \in \mathbb{R} : (x<y) \Rightarrow (x+z<y+z)$,
(2) $\forall x,y,z \in \mathbb{R} : (x<y) \wedge (0<z) \Rightarrow (x \cdot z < y \cdot z)$.

IV. Aksjomat ciągłości (Zasada ciągłości Dedekinda)

Zbioru $\mathbb{R}$ nie można podzielić na dwa podzbiory A, B takie, że:

(1) $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$,

(2) $\forall a \in A \; \forall b \in B : a < b$,

(3) $\forall a \in A \; \exists \tilde{a} \in A : a < \tilde{a}$,

(4) $\forall b \in B \; \exists \tilde{b} \in B : \tilde{b} < b$.

W powyższej sytuacji pod pojęciem podzielenia zbioru $\mathbb{R}$ na A i B rozumiem spełnianie przez te zbiory warunków: $A \cup B = \mathbb{R}$ oraz $A \cap B = \emptyset$, ale ten drugi warunek wynika natychmiast z (2).

Uwaga 2.01 Można wykazać, że taki zbiór $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$ istnieje i aksjomaty wyznaczają go jednoznacznie. Jednoznaczność jest rozumiana w ten sposób, że dla dwóch zbiorów z określonymi działaniami i relacjami spełniającymi podane aksjomaty istnieje bijekcja między nimi zachowująca działania oraz relację mniejszości

Uwaga 2.02. Nie będziemy się głębiej zajmować tym podejściem gdyż wykonamy konstrukcję $\mathbb{R}$ według propozycji Cantora z 1872 r. Sprawdzimy następnie, że konstrukcja ta spełnia aksjomaty podane w punkcie 1.

2. Własności zbioru $\mathbb{R}$, kresy

Definicja 2.03 Dla $x, y \in \mathbb{R}$ piszemy $x \leq y$ jeśli $x = y$ lub $x < y$. Uzyskaną relację $\leq$ nazywamy relacją niewiększości.

Uwaga 2.04 Dla $x, y \in \mathbb{R}$ możemy analogicznie wprowadzić relacje: większości $>$ i niemniejszości $\geq$ przyjmując: $(x > y) \Leftrightarrow (y < x)$, $(x \geq y) \Leftrightarrow (y \leq x)$.

Uwaga 2.05 Relacja $\leq$ w $\mathbb{R}$ ma następujące własności:

(1) $\forall x \in \mathbb{R} : x \leq x$,
(2) $\forall x, y \in \mathbb{R} : (x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow (x = y)$,
(3) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)$,
(4) $\forall x, y \in \mathbb{R} : (x \leq y) \vee (y \leq x)$.

Mówimy wtedy, że relacja $\leq$ wprowadza w $\mathbb{R}$ porządek liniowy. Więcej na temat tego pojęcia na przedmiocie „Elementy logiki i teorii mnogości". Powyższe własności 1-4 proszę sprawdzić jako ćwiczenie.

Zbiór $\mathbb{R}$ istotnie różni się od $\mathbb{Q}$ co dobrze opisuje aksjomat ciągłości. Rozwiązania rozpoczniemy od kilku definicji ustalając na wstępie $E \subset \mathbb{R}$

Definicja 2.06 Mówimy, że E jest ograniczony z góry (z dołu) jeśli

$$\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in E : x \leq y \quad (y \leq x).$$

Taki element y nazywamy ograniczeniem górnym (dolnym) E.
Mówimy, że E jest ograniczony jeśli jest ograniczony z góry i z dołu.

Definicja 2.07 Mówimy, że $m \in E$ jest najmniejszy w zbiorze E jeśli $\forall x \in E : m \leq x$.
Piszemy wtedy $m = \min E$.

Definicja 2.08 Mówimy, że $M \in E$ jest największy w zbiorze E jeśli $\forall x \in E : x \leq M$.
Piszemy wtedy $M = \max E$.

Definicja 2.09 Jeśli w zbiorze ograniczeń górnych zbioru E istnieje element najmniejszy, to nazywamy go kresem górnym E i oznaczamy $\sup E$.

Definicja 2.10 Jeśli w zbiorze ograniczeń dolnych zbioru E istnieje element największy, to nazywamy go kresem dolnym E i oznaczamy $\inf E$.

Uwaga 2.11 Łatwo sprawdzić, że:
(1) $M = \max E \Rightarrow M = \sup E$,
(2) $m = \min E \Rightarrow m = \inf E$,
(3) $\emptyset$ jest ograniczony i nie ma kresów w $\mathbb{R}$.

Oczywiście zbiory mające elementy największe (najmniejsze) oraz kresy górne (dolne) są ograniczone od góry (dołu). Sytuację porządkuje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.12 (o istnieniu kresów)

Z: $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}$, E - ograniczony z góry (z dołu).

T: Istnieje $\sup E$ ($\inf E$)

D: Dowodzimy wersję podstawową twierdzenia, gdy E jest ograniczony z góry i poszukiwana jest $\sup E$.

Niech B będzie zbiorem ograniczeń górnych wyjściowego zbioru E i określmy $A := \mathbb{R} \setminus B$. Mamy $A \cup B = \mathbb{R}$ oraz:

(1) $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$,

(2) $a \in A, b \in B \Rightarrow a < b$,

(3) $a \in A \Rightarrow \exists \tilde{a} \in A : a < \tilde{a}$

(1) i (2) są oczywiste zaś aby wykazać (3) weźmy $a \in A$. Skoro a nie jest ograniczeniem górnym zbioru E, więc istnieje $x \in E$ taki, że $a < x$. Wtedy $\tilde{a} = \frac{1}{2}(a + x)$ spełnia nierówności $a < \tilde{a} < x$, oraz $\tilde{a}$ nie jest ograniczeniem górnym dla E, bo $\tilde{a} < x$. Zatem $\tilde{a} \in A$, co kończy sprawdzenie (3)

Zatem dla pary A, B nie może być spełniony warunek (4) aksjomatu ciągłości, co oznacza, że

$$\exists b \in B \; \forall \tilde{b} \in B : \tilde{b} \geq b.$$

Widać więc, że $b = \min B$ czyli $b = \sup E$. Analogicznie dowodzimy drugą wersję tego twierdzenia.

Uwaga 2.13

Z: $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}$, E - ograniczony

T: (1) $\inf E \leq \sup E$

(2) $\inf E = \sup E \Leftrightarrow E$ - ma jeden element

D: Ćwiczenie

3. Przedziały w $\mathbb{R}$

Definicja 2.14 Zbiór $I \subset \mathbb{R}$ nazywamy przedziałem jeśli spełnia warunek.

$$\forall x,y,z \in \mathbb{R} : (x,z \in I) \wedge (x<y<z) \Rightarrow (y \in I)$$

Przedziały w $\mathbb{R}$ dzielimy na 5 grup:

I. Zbiór pusty $\emptyset$ jest przedziałem.

II. Przedziały niepuste i ograniczone.

Oznaczając $a = \inf I$, $b = \sup I$ gdzie I jest rozpatrywanym przedziałem mamy $a \leq b$ oraz dostajemy cztery możliwości w zależności od tego kiedy te liczby zwane końcami I należą, bądź nie należą do I:

(1) $I = [a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$,

(2) $I = [a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$,

(3) $I = (a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$,

(4) $I = (a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.

III. Przedziały niepuste, ograniczone z góry i nieograniczone z dołu.

Jeśli $b = \sup I$ to dostajemy możliwości:

(1) $I = (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$,

(2) $I = (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$.

IV. Przedziały niepuste ograniczone z dołu i nieograniczone z góry.

Jeśli $a = \inf I$ to mamy dwie możliwości:

(1) $I = [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant a\}$,

(2) $I = (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$.

V. Przedziały, które nie są ograniczone ani z góry ani z dołu.

Jest tylko jeden taki przedział

$I = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

W wyżej wprowadzonych oznaczeniach $-\infty$ i $+\infty$ są jedynie elementem symbolu przedziału nie. symbolizującc (chwilowo) elementów jakiegoś zbioru.

Ćwiczenie. Sprawdzić, że w ten sposób zostały wyczerpane wszystkie możliwości postaci przedziałów w $\mathbb{R}$.

Twierdzenie 2.15

Z: $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $a_n \leqslant b_n$ dla $n \in \mathbb{N}$

$I_n = [a_n, b_n]$ dla $n \in \mathbb{N}$

$I_0 \supset I_1 \supset \ldots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \ldots$

T: $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$

D: Niech $\forall p, q \in \mathbb{N}: a_p \leqslant b_q$

Niech $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ oraz $a = \sup A$

Mamy $\forall p \in \mathbb{N}: a_p \leq a$ oraz widzimy że $\forall q \in \mathbb{N}: b_q$ jest ograniczeniem górnym A. Czyli $a \leq b_q$ dla $q \in \mathbb{N}$, więc $a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$.

4. Liczby naturalne, zasada indukcji

Twierdzenie 2.16 (Zasada minimum).

Z: $E \subset \mathbb{N}$, $E \neq \emptyset$

T: E - ma element najmniejszy

D: E - jest ograniczony z dołu przez 0, więc ma kres dolny $m = \inf E \geq 0$.
Zauważmy, że $[m, m+1) \cap E \neq \emptyset$.
$\mathbb{N}$ przecina $[m, m+1)$ mamy dokładnie jedną liczbę $n \in \mathbb{N}$, więc $m = n \in E$

Twierdzenie 2.17 (Zasada indukcji).

Z: $E \subset \mathbb{N}$ i spełnia następujące własności:

(1) $0 \in E$

(2) $n \in E \Rightarrow n+1 \in E$

T: $E = \mathbb{N}$

D: Przypuśćmy, że $\mathbb{N} \setminus E \neq \emptyset$. Na podstawie 2.16 zbiór $\mathbb{N} \setminus E$ ma element najmniejszy $k \in \mathbb{N} \setminus E$, a ponadto $k \neq 0$ (z (1))
Zatem $k-1 \in E$ więc z (2) $k \in E$
co daje sprzeczność.

5. Nieprzeliczalność $\mathbb{R}$

Zajmiemy się „liczebnością" podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych rozpoczynając od $\mathbb{N}$, który jest według naszej definicji modelem zbioru przeliczalnego

Lemat 2.18

Z: $E \subset \mathbb{N}$

T: E jest skończony lub przeliczalny.

D: Przypuśćmy, że E jest nieskończony.
Określimy $f: \mathbb{N} \to E$ przyjmując
$f(0) = \min E$
$f(1) = \min(E \setminus \{f(0)\})$
$\vdots$
$f(n+1) = \min(E \setminus \{f(0), \dots, f(n)\})$, dla $n \in \mathbb{N}$

Łatwo sprawdzić (ćw.), że f jest bijekcją.
Więc E jest przeliczalny

Lemat 2.19

Z: A jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym.
$f: A \to B$ jest surjekcją.

T: B jest co najwyżej przeliczalny

D: Jeśli A jest skończony, to B również.
Gdy A jest nieskończony to możemy przyjąć dalej, że $A = \mathbb{N}$

Dla $b \in B$ mamy $f^{-1}(b) \neq \emptyset$, $f^{-1}(b) \subset \mathbb{N}$, więc możemy określić funkcję

$$g : B \ni b \longrightarrow \min f^{-1}(b) \in \mathbb{N}$$

Wtedy $g : B \longrightarrow g(B) \subset \mathbb{N}$ jest bijekcją, ale $g(B)$ jest co najwyżej przeliczalny więc B również, co kończy dowód.

Lemat 2.20 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ jest przeliczalny.

D: Określmy odwzorowanie.

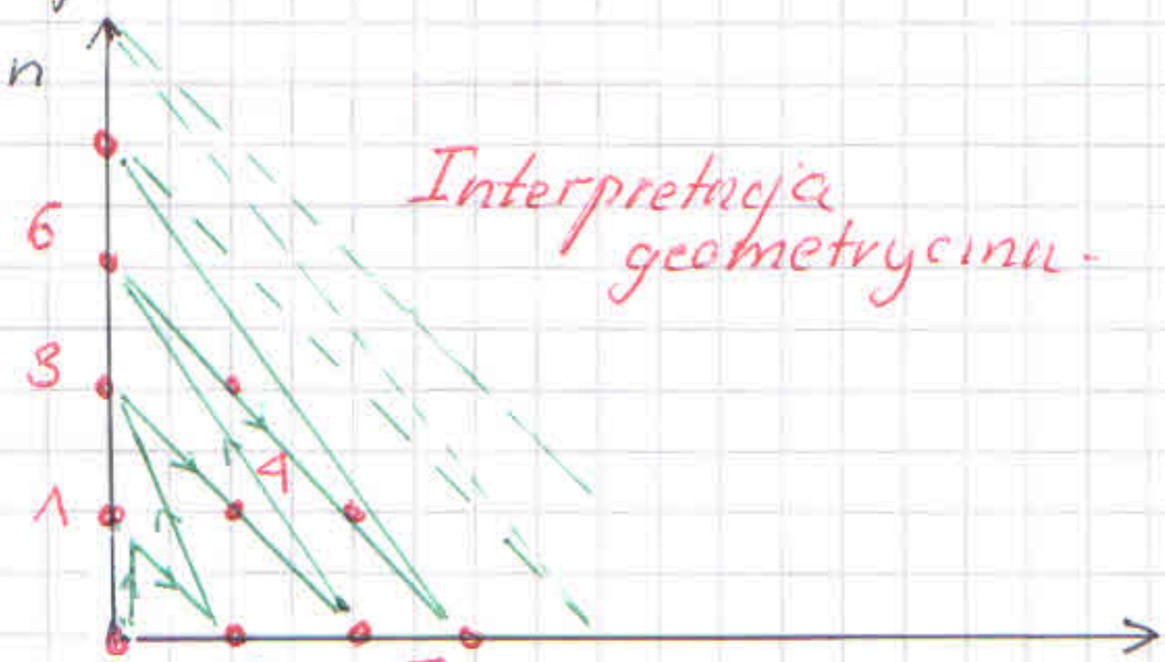
$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ni (m,n) \longrightarrow m + \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} \in \mathbb{N}$$

Można pokazać (ćw.), że f jest bijekcją.
Warto oprzeć dowód na dwóch własnościach f:

(1) $f(m,n) + 1 = f(m+1, n-1)$ dla $m, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

(2) $f(m,0) + 1 = f(0, m+1)$ dla $m \in \mathbb{N}$

dla $n, m \in \mathbb{N}$.



Twierdzenie 2.21 Zbiór $\mathbb{Q}$ jest przeliczalny

D: Łatwo sprowadzić (ćw.) że zbiory $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ oraz $\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ są przeliczalne.

Określamy.

$$f: \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \ni (p,q) \to f(p,q) = p/q \in \mathbb{Q}$$

Jest to surjekcja na zbiór $\mathbb{Q}$ więc na podstawie.
2.19 $\mathbb{Q}$ jest co najwyżej przeliczalny, ale jest nieskończony.
więc musi być przeliczalny.

Twierdzenie 2.22 Zbiór $\mathbb{R}$ jest nieprzeliczalny.

D: Przypuśćmy, że $\mathbb{R} = \{c_n : n \in \mathbb{N}\}$
Wybieramy ciąg przedziałów $\{I_n\}$ tak aby:
$I_0 = [a_0, b_0]$, $a_0 < b_0$, $c_0 \notin I_0$
$I_1 = [a_1, b_1]$, $a_1 < b_1$, $I_1 \subset I_0$, $c_1 \notin I_1$
$I_2 = [a_2, b_2]$, $a_2 < b_2$, $I_2 \subset I_1$, $c_2 \notin I_2$
:
$I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$, $a_{n+1} < b_{n+1}$, $I_{n+1} \subset I_n$, $c_{n+1} \notin I_{n+1}$
dla $n \in \mathbb{N}$

Wtedy $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \emptyset$ co jest sprzeczne z 2.15

Wniosek 2.23
Z: I - przedział w $\mathbb{R}$ mający co najmniej dwa elementy
T: I - jest nieprzeliczalny.

6. Struktura przestrzeni wektorowej w $\mathbb{R}$.

Jeśli $(K, +, \cdot)$ jest ciałem, to w K istnieje naturalna struktura przestrzeni wektorowej nad K. Jako mnożenie zewnętrzne elementów $\alpha \in K$ przez wektory $v \in K$ przyjmujemy αv zwykłe mnożenie w K. Mając dwa ciała $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$ takie, że działania w $\mathbb{Q}$ są indukowane z $\mathbb{R}$ możemy uzyskać trzy struktury przestrzeni wektorowych.

Uwaga 2.24 Mamy następujące naturalne przestrzenie wektorowe:

(1) $\mathbb{Q}$ nad ciałem $\mathbb{Q}$,

(2) $\mathbb{R}$ nad ciałem $\mathbb{R}$,

(3) $\mathbb{R}$ nad ciałem $\mathbb{Q}$.

W zasadzie w Analizie Matematycznej znaczenie ma wyłącznie (2), jedynie czasami do konstrukcji specjalnych przykładów przydaje się (3).

7. Przestrzenie metryczne - podstawowe pojęcia

Definicja 2.25 Przestrzenią metryczną nazywamy parę (X,d) gdzie X jest zbiorem zaś funkcja.

$$d: X\times X \ni (x,y) \longrightarrow d(x,y) \in [0,+\infty)$$

spełnia następujące warunki:

(1) $\forall x,y \in X: d(x,y)=0 \iff x=y$,

(2) $\forall x,y \in X: d(x,y)=d(y,x)$,

(3) $\forall x,y,z \in X: d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$.

Warunek (2) nazywamy symetrią d, zaś (3) war. trójkąta.

Definicja 2.26 Jeśli (X,d) jest przestrzenią oraz $a\in X$ i $r\in(0,+\infty)$, to zbiory:

$$K(a,r) = \{x\in X: d(x,a)<r\},$$
$$\overline{K}(a,r) = \{x\in X: d(x,a)\leq r\},$$
$$S(a,r) = \{x\in X: d(x,a)=r\},$$

nazywamy kolejno: kulą otwartą, kulą domkniętą oraz sferą o środku a i promieniu r.

Ustalmy (X,d) przestrzeń metryczną.

Definicja 2.27 Zbiór $U\subset X$ nazywamy otwartym jeśli $\forall a\in U\ \exists r>0: K(a,r)\subset U$. Rodzinę wszystkich podzbiorów otwartych nazywamy topologią (X,d).

Dygresja. Parę (X,τ) nazyramy p. topologiczną gdy X jest zbiorem i $\tau\subset\mathcal{P}(X)$ spełnia warunki: (1) $\emptyset, X\in\tau$ (2) $U_s\in\tau$ dla $s\in S \Rightarrow \bigcup_{s\in S} U_s\in\tau$, (3) $U,V\in\tau \Rightarrow U\cap V\in\tau$.

Jak łatwo sprawdzić każda metryka wprowadza nam topologię

Uwaga 2.28 Topologia X zawiera zawsze $\emptyset$ i X i jest zamknięta na dowolne sumy i skończone iloczyny swoich podzbiorów (ćw.).

Definicja 2.29 Jeśli U jest otwarty w X oraz $a \in U$, to U nazywamy otoczeniem punktu a.

Definicja 2.30 Zbiór $F \subset X$ nazywamy domkniętym w X jeśli F^c jest otwarty w X.

Uwaga 2.31 Rodzina zbiorów domkniętych w X zawiera zawsze $\emptyset$ i X oraz jest zamknięta ze względu na dowolne iloczyny oraz sumy skończone swoich podzbiorów.

Ustalmy następnie przestrzeń metryczną (X,d) oraz zbiór $A \subset X$

Definicja 2.32 Zbiór

$$\operatorname{int} A = \bigcup \{U : U\text{-otw w } X, U \subset A\}$$

nazywamy wnętrzem zbioru A zaś punkty zbioru $\operatorname{int} A$ punktami wewnętrznymi A.

Definicja 2.33 Zbiór

$$\overline{A} = \bigcap \{F : F\text{-domknięty w } X, A \subset F\}$$

nazywamy domknięciem zbioru A.

Definicja 2.34 Zbiór

$$\partial A = \overline{A} \setminus \operatorname{int} A$$

nazywamy brzegiem zbioru A zaś punkty zbioru ∂A nazywamy punktami brzegowymi A.

Uwagi 2.35

Z: $A \subset X$

T: (1) $\operatorname{int} A$ jest otwarty,
(2) $\overline{A}$ jest domknięty,
(3) ∂A jest domknięty.

D: (1) $\operatorname{int} A$ jest sumą rodziny zbiorów otwartych więc jest zbiorem otwartym.
(2) $\overline{A}$ jest domknięty jako przecięcie rodziny zb. domkn.
(3) $\partial A = \overline{A} \setminus \operatorname{int} A = \overline{A} \cap (\operatorname{int} A)^c$ jest przecięciem dwóch zbiorów domkniętych więc jest domknięty.

Ustalmy przestrzeń metryczną (X,d) oraz $A \subset X$

Definicja 2.36 Zbiór A nazywamy:

(1) ograniczonym, jeśli $\exists a \in X \exists r>0 : A \subset \overline{K}(a,r)$
(2) brzegowym, jeśli $\operatorname{int} A = \emptyset$,
(3) gęstym, jeśli $\overline{A} = X$,
(4) nigdziegęstym, jeśli $\operatorname{int} \overline{A} = \emptyset$.

Definicja 2.37 Punkt $a \in X$ nazywamy punktem skupienia zbioru A jeśli:

$$\forall U\text{-otoczenia } a : (U \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$$

Zbiór punktów skupienia zbioru A oznaczamy przez A'.
Punkty zbioru $A \setminus A'$ nazywamy punktami izdowanymi zbioru A.

Przykłady 2.38

(1) Metryka dyskretna na zbiorze X. Określając:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, \text{ gdy } x = y, \\ 1, \text{ gdy } x \neq y, \end{cases} \quad \text{dla } x, y \in X$$

dostajemy przestrzeń metryczną (X, d).

(2) Metryka przeniesiona przez injekcję. Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną, Y zbiorem oraz $\varphi : Y \longrightarrow X$ injekcją. Wtedy przyjmując $\varrho(x,y) = d(\varphi(x), \varphi(y))$ dla $x, y \in Y$ dostajemy przestrzeń metryczną (Y, ϱ)

(3) Podprzestrzeń metryczna przestrzeni (X,d). Jeśli $Y \subset X$ to $d|Y \times Y$ jest metryką na Y (przeniesiona przez zanurzenie $Y \ni x \longrightarrow x \in X$) zwaną indukowaną na Y. Wtedy $(Y, d|Y \times Y)$ nazywamy podprzestrzenią metryczną (X,d).

(4) Iloczyn kartezjański przestrzeni metrycznych.
Jeśli $(X_1, d_1), \ldots, (X_m, d_m)$ przestrzenie metryczne to dla $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$ z $X_1 \times \ldots \times X_m$

określamy $d(x,y) := d_1(x_1,y_1) + \dots + d_m(x_m,y_m)$
i otrzymujemy $(X_1 \times \dots \times X_m, d)$ - przestrzeń metryczną.

(5) $\emptyset$ jest „najdoskonalszą" wersją przestrzeni metrycznej; w której metryka jest zbiorem pustym.

8. Struktura przestrzeni metrycznej w $\mathbb{R}$

Wstępnie przyjmujemy określenie modułu liczby rzeczywistej

$$\mathbb{R} \ni x \longrightarrow |x| := \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases} \in [0, +\infty)$$

Wprowadzamy następnie odzworowanie

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x,y) \longrightarrow d(x,y) := |x-y| \in [0,+\infty)$$

Twierdzenie 2.39 $(\mathbb{R}, d)$ jest przestrzenią metryczną.

D: Dwa pierwsze warunki metryki są oczywiste.
Dla dowodu warunku trzeciego zauważmy, że dla $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $|a+b| \leq |a| + |b|$ (ćw)
Biorąc teraz $a = x-y$, $b = y-z$ dostajemy.
$|x-z| \leq |x-y| + |y-z|$ dla $x, y, z \in \mathbb{R}$,
co kończy dowód.

Uwaga 2.40 Dla $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$ mamy.

(1) $K(a,r) = (a-r, a+r)$
(2) $\overline{K}(a,r) = [a-r, a+r]$
(3) $S(a,r) = \{a-r, a+r\}$

9. Podstawowe funkcje na zbiorze liczb rzeczywistych i jego podzbiorach.

A. Moduł i znak liczby rzeczywistej

Znamy już kilka odwzorowań określonych na $\mathbb{R}$, wpływających w ogólniejszych sytuacjach, takich jak odległość stałe czy identyczność. Bardzo ważną rolę odgrywa zawsze moduł, zwany wartością bezwzględną liczby rzeczywistej wprowadzony w poprzednim punkcie 8, tego paragrafu

$$|\cdot| : \mathbb{R} \ni x \longrightarrow |x| = \begin{cases} x, \text{ gdy } x \geq 0 \\ -x, \text{ gdy } x < 0 \end{cases} \in [0, +\infty).$$

Ze względów technicznych warto również wprowadzić odwzorowanie przyporządkowujące liczbie rzeczywistej jej znak.

$$\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \ni x \longrightarrow \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, \text{ gdy } x > 0 \\ 0, \text{ gdy } x = 0 \\ -1, \text{ gdy } x < 0 \end{cases} \in \{-1, 0, 1\}$$

B. Część całkowita i ułamkowa liczby rzeczywistej

Dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$ zawsze istnieje największa liczba całkowita, niewiększa od tej liczby, którą dalej oznaczać będziemy przez $[x]$. Zatem $[x] \in \mathbb{Z}$ jest jednoznacznie wyznaczone przez nierówności $[x] \leq x < [x] + 1$. Dostajemy zatem odwzorowanie „część całkowita"

$$[\cdot] : \mathbb{R} \ni x \longrightarrow [x] \in \mathbb{Z}$$

Uzupełnia je zwykle odwzorowanie „część ułamkowa" liczby rzeczywistej, określone następująco

$$\{\cdot\} : \mathbb{R} \ni x \longrightarrow \{x\} = x - [x] \in [0,1)$$

Warto tutaj odnotować, że $\{\frac{7}{5}\} = \frac{2}{5}$, $\{-\frac{7}{5}\} = \frac{3}{5}$.

C. Potęgi całkowite liczb rzeczywistych

Określenie funkcji potęgowej zwykle zaczynamy od przypadku potęg naturalnych. Dla $x \in \mathbb{R}$ określamy:

$$x^0 = 1$$
$$x^1 = x$$
$$x^2 = x \cdot x^1$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x^{n+1} = x \cdot x^n \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Zatem, dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$, będziemy mieli określone n-te potęgi liczb rzeczywistych, dające nam funkcję $\mathbb{R} \ni x \longrightarrow x^n \in \mathbb{R}$

Potęgi o wykładnikach całkowitych ujemnych określone są poprzez odwracanie elementów w grupie $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, \cdot)$, czyli odwzorowanie

$$\mathbb{R}\setminus\{0\} \ni x \longrightarrow x^{-1} \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Dla $m \in \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$ określamy, przy $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $x^m = (x^{-1})^{-m}$ dostając odwzorowanie

$$\mathbb{R}\setminus\{0\} \ni x \longrightarrow x^m \in \mathbb{R}$$

D. Pierwiastki liczb rzeczywistych nieujemnych.

W tej części zajmiemy się budową funkcji odwrotnych do $[0,+\infty) \ni x \longrightarrow x^n \in [0,+\infty)$ przy ustalonym $n \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie 2.41 (o istnieniu pierwiastków)

Z: $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

T: $\exists! y \in \mathbb{R} : y \geq 0 \wedge y^n = x$

D: Dla $0 \leq y_1 < y_2$ mamy $0 \leq y_1^n < y_2^n$ zatem jedynosc y z tezy twierdzenia jest oczywista, jeśli otrzymamy istnienie. Mamy $y^n = 0 \Leftrightarrow y = 0$. Wystarczy więc stwierdzić, że dla $x > 0$ istnieje $y > 0$ takie, że $y^n = x$

Na wstępie zauważmy, że dla $0 < a < b$ zachodzi nierówność (*) $b^n - a^n \leq (b-a) \cdot n \cdot b^{n-1}$

Faktycznie $b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \ldots + a^{n-1}) \leq$

$\leq (b-a) \cdot (b^{n-1} + b^{n-1} + \ldots + b^{n-1}) = (b-a) \cdot n \cdot b^{n-1}$

Wracając do głównego problemu, ustalmy $x > 0$ i określmy $E = \{t \in (0,+\infty) : t^n < x\}$

Biorąc teraz $t_x = \frac{x}{x+1} < 1$ mamy $t_x^n < t_x < x$, więc $t_x \in E$ skąd $E \neq \emptyset$.

Zauważmy następnie, że $x+1$ jest ograniczeniem górnym E gdyż

$t \in E \Rightarrow t^n < x \Rightarrow t^n < x+1 \Rightarrow t^n < (x+1)^n \Rightarrow t < x+1$

Zatem E jest niepusty i ograniczony z góry, więc możemy określić

$y := \sup E \in \mathbb{R}$.

Dalej pokażemy, że $y^n = x$, sprawdzając, że nie mogą zajść nierówności $y^n < x$, $y^n > x$.

(1) Przypuśćmy, że $y^n < x$. Pokażemy wtedy $h > 0$ takie, że $(y+h)^n < x$ co da sprzeczność z określeniem elementu y. Zauważmy, że $(y+h)^n = y^n + ((y+h)^n - y^n) \leq y^n + hn(y+h)^{n-1}$
Poszukujemy do otrzymania sprzeczności $h > 0$ takiego, że $y^n + hn(y+h)^{n-1} < x$. Wystarczy tak dobrać $h \in (0,1)$ aby zaszła nierówność

$$y^n + hn(y+1)^{n-1} < x.$$

Zatem wystarcza aby $h < \frac{x-y^n}{n(y+1)^{n-1}}$. Takie $h \in (0,1)$ oczywiście istnieje więc wykluczyliśmy nierówność $y^n < x$

(2) Przypuśćmy, że $y^n > x$. Wskażemy wtedy $h \in (0,y)$ takie, że dla $t = y-h$ mamy $t^n > x$, co daje sprzeczność z określeniem y, gdyż wtedy $t < y$ jest ograniczeniem górnym zbioru E.

Mamy $t^n = y^n - (y^n - t^n) \geq y^n - hny^{n-1}$

Należy zatem tak dobrać $h \in (0,y)$ aby

$$y^n - hny^{n-1} > x,$$

czyli aby zaszła nierówność

$$h < \frac{y^n - x}{ny^{n-1}} \quad \text{przy } h \in (0,y).$$

Takie h oczywiście istnieje, więc mamy sprzeczność z określeniem y.

Zatem z (1) i (2) wynika, że $y^n = x$, co kończy dowód.

Definicja 2.42 Liczbę $y \in [0,+\infty)$ z tezy poprzedniego twierdzenia nazywamy n-tym pierwiastkiem liczby $x \in [0,+\infty)$ i oznaczamy $\sqrt[n]{x}$. Tradycyjnie dla „pierwiastków kwadratowych" ($n=2$) oznaczenie $\sqrt[2]{x}$ zastępujemy przez $\sqrt{x}$.

E. Potęgi liczb rzeczywistych dodatnich

Niech $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ gdzie $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $m \in \mathbb{Z}$

Definicja 2.43 Dla $x \in (0,+\infty)$ określamy jej q-tą potęgę przyjmując $x^q = (\sqrt[n]{x})^m \in (0,+\infty)$. Otrzymujemy w ten sposób odwzorowanie.

$$(0,+\infty) \ni x \longrightarrow x^q \in (0,+\infty),$$

nazywane potęgą o wykładniku wymiernym q

Uwagi 2.44

(1) Jeśli w 2.43 mamy $q \geq 0$, to możemy w sposób naturalny dookreślić $0^q = 1$ gdy $q = 0$ oraz $0^q = 0$ gdy $q > 0$.

(2) Konstrukcję możemy uzupełnić określając potęgi x^r dla $x \in (0,+\infty)$ oraz $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ przyjmując dla $x \geq 1$ $x^r = \sup\{x^q : q \in \mathbb{Q}, q < r\}$ oraz dla $x \in (0,1)$, $x^r = \left(\frac{1}{x}\right)^{-r}$. (CN.)

(3) Czasami, dla nieparzystych naturalnych n, pierwiastek $\sqrt[n]{x}$ jest określany dla $x \in \mathbb{R}$ przez rozszerzenie $\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x}$.

(4) Dla nas te rozszerzenia nie mają znaczenia gdyż określimy w przyszłości z^w dla $z, w \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$

§2. Rozszerzony zbiór liczb rzeczywistych $\overline{\mathbb{R}}$

1. Struktura mnogościowa.

Wprowadzamy $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ gdzie $-\infty \notin \mathbb{R}$, $+\infty \notin \mathbb{R}$, $-\infty \neq +\infty$.

Dotąd nie tak dwóch elementów idzie w kierunku jednego z najprostszych przykładów tak zwanego „uzwarcenia" popularnego w topologii.

2. Porządek w $\overline{\mathbb{R}}$

Rozszerzamy relację $<$ z $\mathbb{R}^2$ do $\overline{\mathbb{R}}^2$ przyjmując, że $-\infty < +\infty$ oraz $\forall x \in \mathbb{R}: -\infty < x,\ x < +\infty$

W tej sytuacji możemy wprowadzić przedziały o końcach nieskończonych: $[-\infty, -\infty]$, $[-\infty, x)$ $[-\infty, x]$, $[-\infty, +\infty)$, $[-\infty, +\infty]$, $(-\infty, +\infty]$, $[x, +\infty]$ $(x, +\infty]$, $[+\infty, +\infty]$ gdzie $x \in \mathbb{R}$

Uwaga 2.45 Bez zmian możemy powtórzyć w $\overline{\mathbb{R}}$ definicje ograniczoności, elementów najmniejszego i największego, ograniczenia górnego i dolnego oraz kresów przedstawione poprzednio dla $\mathbb{R}$ (2.06 do 2.10). Jednak jak widać $\overline{\mathbb{R}}$ jest ograniczony oraz $-\infty = \min \overline{\mathbb{R}}$, $+\infty = \max \overline{\mathbb{R}}$

Uwagi 2.46

(1) Każdy podzbiór $\overline{\mathbb{R}}$ jest ograniczony i ma kresy w $\overline{\mathbb{R}}$

(2) W $\overline{\mathbb{R}}$ $\forall E \subset \overline{\mathbb{R}}$: $(E \neq \emptyset) \Leftrightarrow (\inf E \leq \sup E)$.

(3) W $\overline{\mathbb{R}}$ $\inf \emptyset = +\infty$, $\sup \emptyset = -\infty$.

D: (1) Ograniczoność podzbiorów jest oczywista.
Jeśli teraz $E \subset \overline{\mathbb{R}}$ i nie jest ograniczony z góry w $\mathbb{R}$ to $\sup E = +\infty$ zaś jeśli jest ograniczony w $\mathbb{R}$, to jego kres górny w $\mathbb{R}$ jest kresem górnym w $\overline{\mathbb{R}}$. Analogicznie rozumujemy dla kresu dolnego.

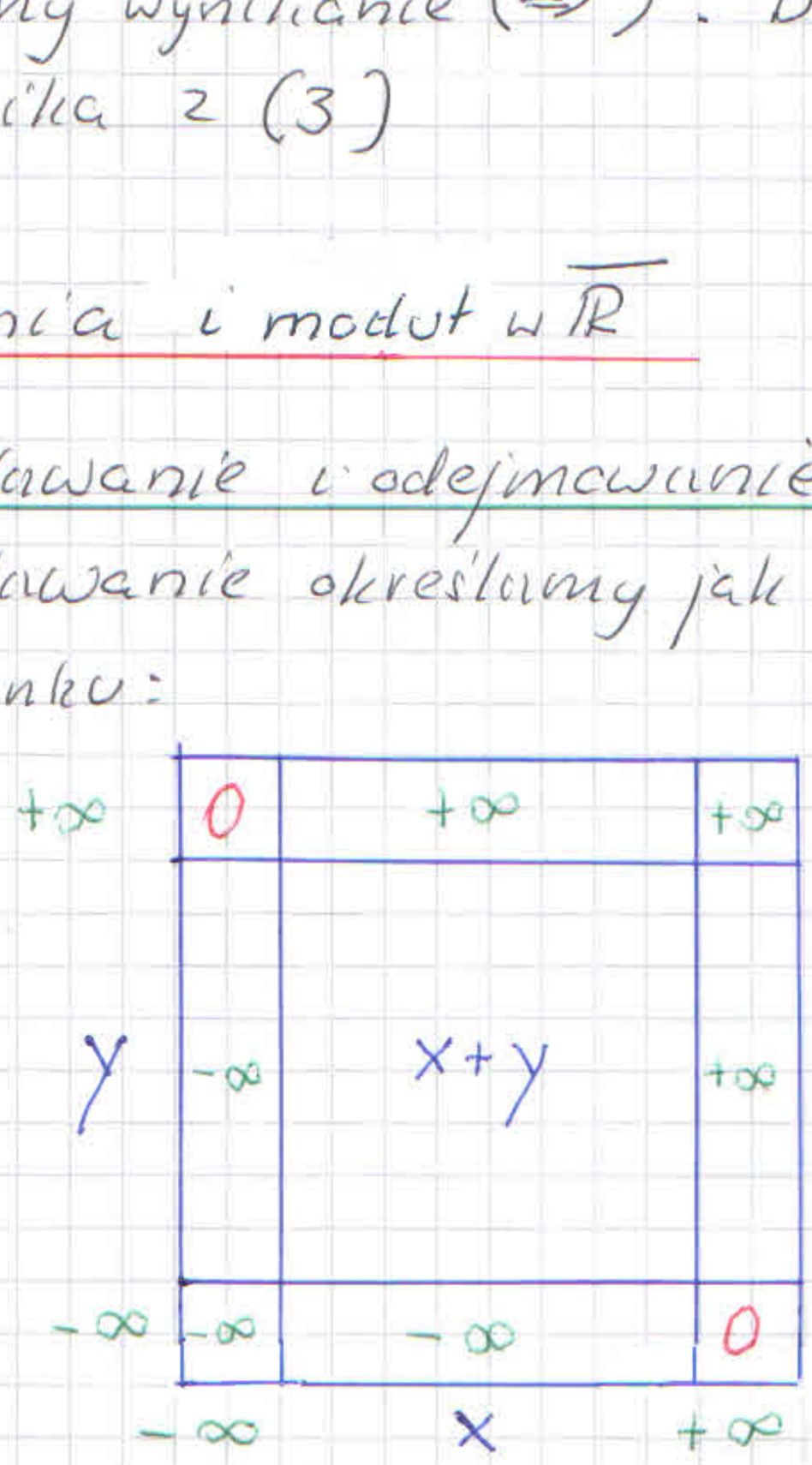
(3) Oczywiste.

(2) Jeśli $x \in E$, to $\inf E \leq x \leq \sup E$, skąd mamy wynikanie ($\Rightarrow$). Druga implikacja wynika z (3)

3. Działania i moduł w $\overline{\mathbb{R}}$

(A) Dodawanie i odejmowanie.

Dodawanie określamy jak na poniższym rysunku:



O ile rozszerzenie dodawania o podane wyżej „nieskończone" $-\infty, +\infty$ ma naturalny charakter o tyle przyjęcie, że $(-\infty)+(+\infty) = (+\infty)+(-\infty) = 0$, to czysta umowa, często unikana przez autorów książek. Przyjmujemy ją zgodnie z ideami topologicznymi.

Jeśli określimy w $\overline{\mathbb{R}}$ elementy przeciwne do nieskończoności jako: $-(+\infty) = -\infty$ i $-(-\infty) = +\infty$, to możemy określić odejmowanie w $\overline{\mathbb{R}}$ jako:

$$x - y := x + (-y) \quad \text{dla } x, y \in \overline{\mathbb{R}}$$

(B) Mnożenie

y \ x	$-\infty$	0	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	0	$-\infty$
0	0	$x \cdot y$	0

Przedstawione umowy mnożenia elementów skończonych i nieskończonych mają dość naturalny charakter. Mnożenia $0 \cdot (+\infty) = 0 \cdot (-\infty) = (+\infty) \cdot 0 = (-\infty) \cdot 0 = 0$ to jedynie formalna umowa.

(C) Moduł w $\overline{\mathbb{R}}$

Dookreślamy przyjmując $|+\infty| = |-\infty| = +\infty$

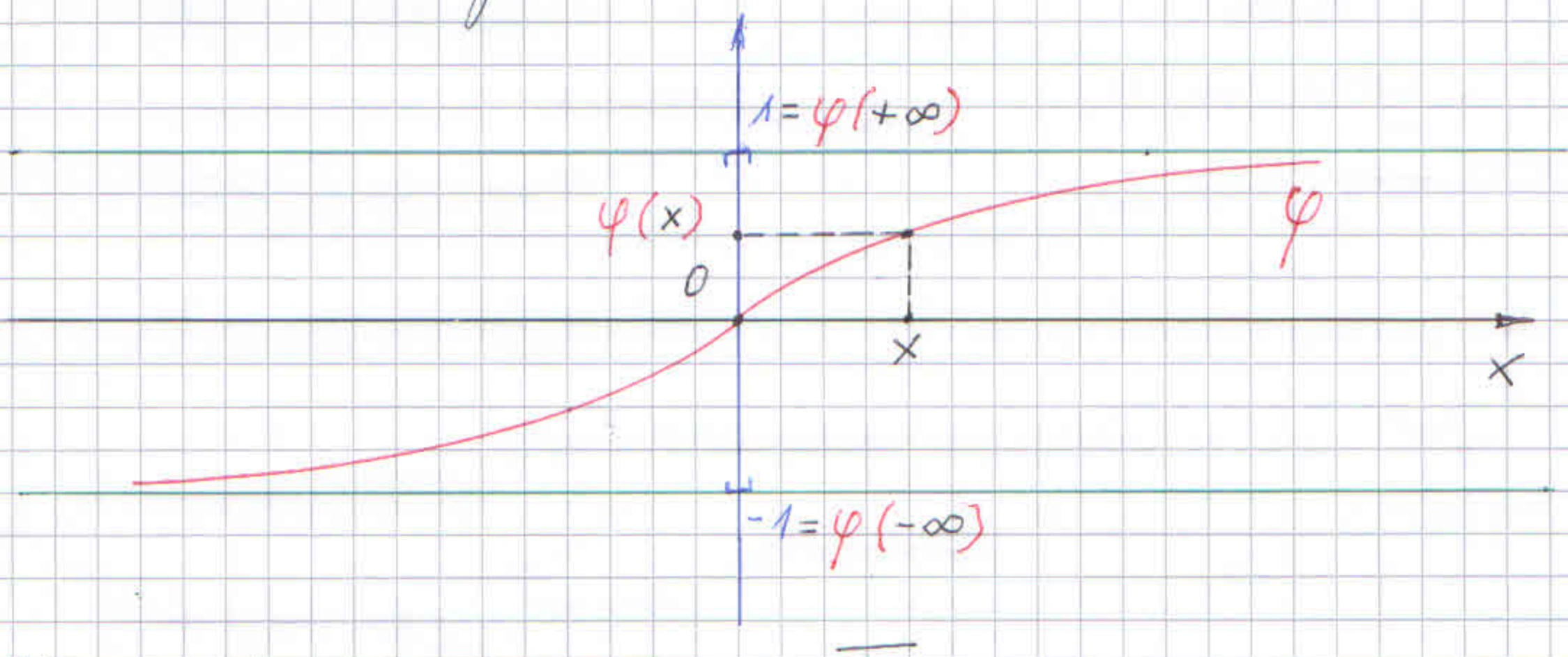
Uwaga 2.47 Przedstawione umowy służą nam tylko do usprawnienia zapisów faktów bez rozpatrywania szczególnych przypadków jak na przykład pole powierzchni prostokąta o bokach $x, y \in [0, +\infty]$. Nie należy się tutaj spodziewać struktur algebraicznych lub dobrych własności rozszerzonych działań. Nie ma już nawet łączności dodawania $(13 + (-\infty)) + (+\infty) = 0 \neq 13 = 13 + ((-\infty) + (+\infty))$

4. Struktura przestrzeni metrycznej w $\overline{\mathbb{R}}$

Określamy odwzorowanie

$$\varphi : \overline{\mathbb{R}} \ni x \longrightarrow \begin{cases} \frac{x}{1+|x|}, & \text{gdy } x \in \mathbb{R} \\ 1, & \text{gdy } x = +\infty \\ -1, & \text{gdy } x = -\infty \end{cases} \in \mathbb{R}.$$

Wtedy $\varphi : \overline{\mathbb{R}} \ni x \longrightarrow \varphi(x) \in [-1, 1]$ jest bijekcją, co dość łatwo sprawdzić.



Wprowadzamy metrykę w $\overline{\mathbb{R}}$ przenosząc ją przez nasze odwzorowanie $\varphi : \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$, to znaczy zadajemy metrykę

$$d : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \ni (x, y) \longrightarrow d(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)| \in [0, +\infty).$$

Para $(\overline{\mathbb{R}}, d)$, to przestrzeń metryczna, którą dalej będziemy badać.

§3. Liczby zespolone

1. Struktura algebraiczna

W zbiorze $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ wprowadzamy strukturę ciała, zadając dla $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ dodawanie i mnożenie:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Pokazujemy (ćw. proste, ale dość żmudne), że $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ jest ciałem w którym:

$0 = (0,0)$ - jest elementem neutralnym $+$,

$1 = (1,0)$ - jest elementem neutralnym $\cdot$.

Definicja 2.48 Określone wyżej ciało $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ nazywamy ciałem liczb zespolonych i oznaczamy dalej przez $\mathbb{C}$.

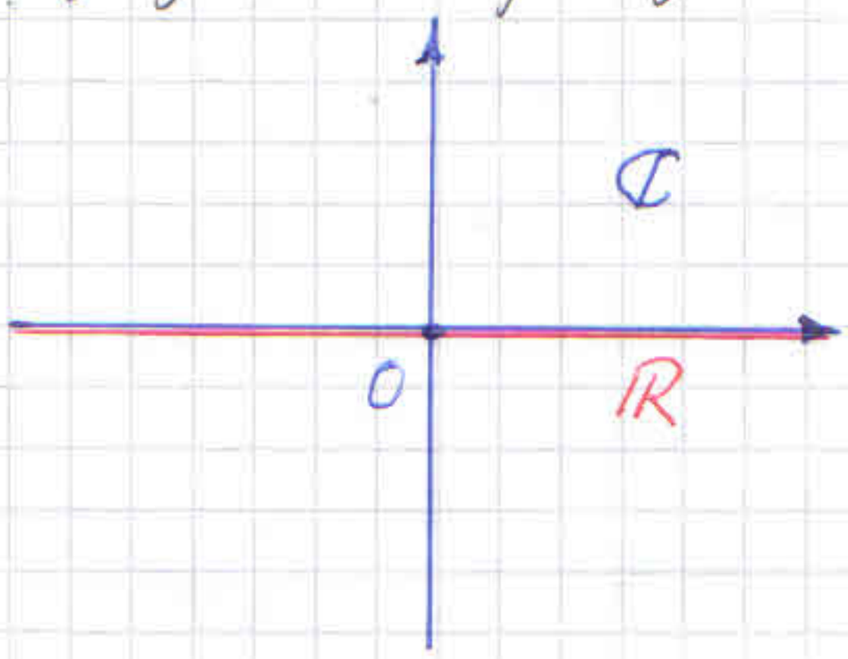
Uwaga 2.49 Ciało liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ możemy zanurzyć w $\mathbb{C}$ za pomocą odwzorowania

$$\mathbb{R} \ni x \longrightarrow (x, 0) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}.$$

Działania z $\mathbb{C}$ po zawężeniu ich do tak zanurzonego $\mathbb{R}$ dają zwykłe działania w $\mathbb{R}$ (tak zanurzonym), gdyż dostajemy:

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$$

$$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 \cdot x_2, 0)$$



2. Postać algebraiczna liczby zespolonej

W $\mathbb{C}$ specjalną rolę odgrywa element

$$i = (0,1).$$

Każdą liczbę $z = (x,y) \in \mathbb{C}$ możemy zapisać w postaci:

$$z = (x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (y,0)\cdot(0,1)$$
$$= x + y \cdot i = x + iy$$

W powyższym zapisie x, y to liczby rzeczywiste traktowane jako zespolone zaś mnożenie i dodawanie to działania w $\mathbb{C}$. Możemy tutaj skorzystać też ze struktury $\mathbb{C}$ jako przestrzeni wektorowej nad $\mathbb{R}$, ale ten temat omówimy nieco później.

Definicja 2.50 Zapis $z = (x,y) \in \mathbb{C}$ w postaci

$$z = x + iy$$

nazywamy postacią algebraiczną z.

Uwaga 2.51 Zapis liczby zespolonej w postaci algebraicznej jest jednoznaczny, to znaczy elementy x i y są wyznaczone jednoznacznie

D: Jeśli $x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2$, to
$(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) = 0$
Mnożąc tę równość przez $(x_1 - x_2) - i(y_1 - y_2)$.
dostajemy $((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2, 0) = 0$ więc
$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 0$ skąd $x_1 = x_2$ i $y_1 = y_2$

Postać algebraiczna pozwala spokojnie liczyć a nawet zapomnieć wyjściowe definicję działań. Wystarczy jedynie zauważyć, że

$$\underline{i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1}$$

i wykorzystywać rozdzielność mnożenia względem dodawania, łączność i przemienność naszych działań. Mamy wtedy:

$$(x_1 + i y_1) + (x_2 + i y_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$(x_1 + i y_1)\cdot(x_2 + i y_2) = (x_1 x_2 + i^2 y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) =$$
$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Warto też zauważyć, że $\underline{(x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2}$

a zatem jeśli $z = (x,y) \neq 0$, to

$$(x+iy)\left(\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{iy}{x^2+y^2}\right) = 1,$$

czyli $\underline{z^{-1} = (x+iy)^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}}$ jest elementem odwrotnym do $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

<u>Definicja 2.52</u>. Dla $z = (x,y) \in \mathbb{C}$ wprowadzamy oznaczenia i nazwy:

(1) $\underline{x = \mathrm{re}\, z}$ nazywamy <u>częścią rzeczywistą z</u>.

(2) $\underline{y = \mathrm{im}\, z}$ nazywamy <u>częścią urojoną z</u>.

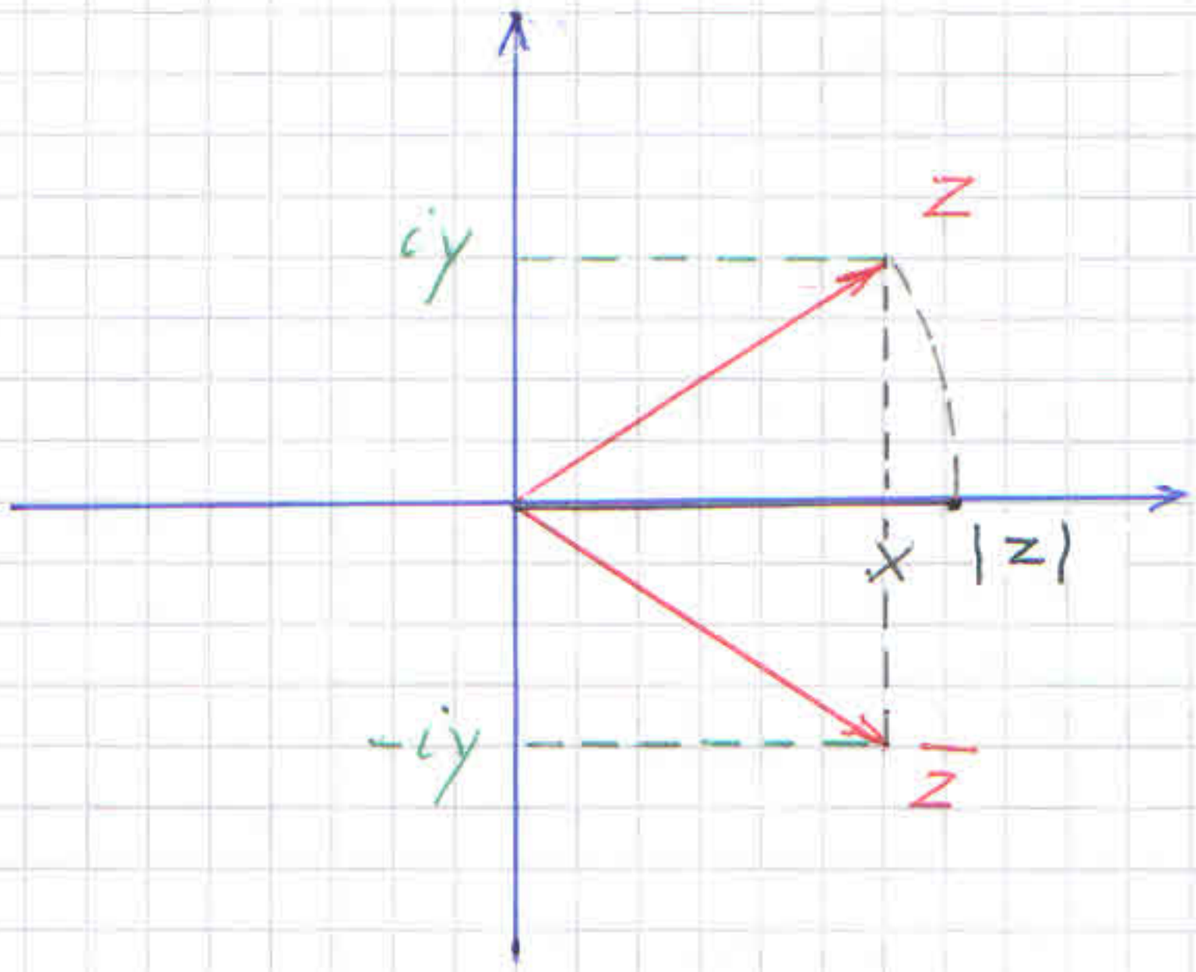
Dla z mamy zatem przedstawienie

$$\underline{z = (\mathrm{re}\, z) + i\,(\mathrm{im}\, z)},$$

przy czym część urojona z to liczba rzeczywista.

3. Sprzężenia i moduły liczb zespolonych.

Definicja 2.53. Dla $z = x + iy \in \mathbb{C}$ określamy:
(1) liczbę zespoloną $\overline{z} = x - iy \in \mathbb{C}$ zwaną *sprzężeniem* z,
(2) liczbę rzeczywistą $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ zwaną *modułem* z.



Uwaga 2.54 Dla $z \in \mathbb{R}$ mamy $z = \overline{z}$ oraz moduł z jest modułem z (wartością bezwzględną) liczby $z \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 2.55. Jeśli $z, w \in \mathbb{C}$, to:
(1) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$,
(2) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$,
(3) $z + \overline{z} = 2 \operatorname{re} z$,
(4) $z - \overline{z} = 2i(\operatorname{im} z)$,
(5) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$,
(6) $|z| = |\overline{z}|$,
(7) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$,
(8) $|\operatorname{re} z| \leqslant |z|$,
(9) $|\operatorname{im} z| \leqslant |z|$,
(10) $|z + w| \leqslant |z| + |w|$.

D: (1) - (9) łatwe ćwiczenie.

(10) $|z+w|^2 = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) =$

$= |z|^2 + |w|^2 + z\bar{w} + \bar{z}w =$

$= |z|^2 + |w|^2 + z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} =$

$\leq |z|^2 + |w|^2 + 2\,\mathrm{re}(z\bar{w}) \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z||\bar{w}| =$

$= |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = (|z|+|w|)^2$

To kończy dowód.

4 Struktury przestrzeni wektorowej w $\mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{C}$.

$\mathbb{R}$ jest podciałem $\mathbb{C}$ więc $\mathbb{C}$ ma strukturę przestrzeni wektorowej na $\mathbb{R}$.

Uwaga 2.56 Zapisując liczbę $z \in \mathbb{C}$ w postaci

$$z = (x,y) = x\cdot(1,0) + y\cdot(0,1),$$

mnożenia $x\cdot(1,0)$, $y\cdot(0,1)$ możemy traktować jako mnożenia liczb zespolonych lub jako mnożenia zewnętrzne liczb $x, y \in \mathbb{R}$ (skalarów) przez wektory $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$, bo dają te same wyniki odpowiednio $(x,0)$ i $(0,y)$.

Warto odnotować, że dwa występujące tu wektory $e_1 = (1,0) = 1$, $e_2 = (0,1) = i$ to, tak zwana, baza kanoniczna $\mathbb{R}^2$

5. Struktura przestrzeni metrycznej w $\mathbb{C}$

W $\mathbb{C}$ określamy metrykę zadając

$$d: \mathbb{C}\times\mathbb{C} \ni (z,w) \longrightarrow d(z,w) = |z-w| \in [0,+\infty)$$

Oczywiście: (1) $|z-w|=0 \Leftrightarrow z=w$ dla $z,w\in\mathbb{C}$

(2) $|z-w| = |w-z|$ dla $z,w\in\mathbb{C}$

(3) Biorąc $z,u,w\in\mathbb{C}$ i stosując (10) z 2.55 dla pary $z-u$, $u-w$ dostajemy

$|(z-u)+(u-w)| \leq |z-u|+|u-w|$,

czyli $|z-w|\leq|z-u|+|u-w|$ czyli dostajemy dla d nierówność trójkąta.

Przy tej metryce dostajemy dla $w\in\mathbb{C}$ i $r>0$

$K(w,r) = \{z\in\mathbb{C} : |z-w|<r\}$, czyli gdy $w=(a,b)$ oraz $z=(x,y)\in\mathbb{R}^2$, to

$K(w,r) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < r\} =$

$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-a)^2+(y-b)^2 < r^2\}$ jest kołem otwartym o środku $(a,b)=w$ i promieniu r.

Podobnie dostajemy

$\overline{K}(w,r) = \{z\in\mathbb{C} : |z-w|\leq r\} =$

$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-a)^2+(y-b)^2 \leq r^2\}$

koło domknięte o środku $(a,b)=w$ i promieniu r.

Uwaga 2.57 W $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ możemy wprowadzić również metryki $d_1(z_1, z_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$,

$d_2(z_1, z_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$,

gdzie $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$. Wszystkie metryki są co prawda od siebie różne, ale można pokazać, że wprowadzają w $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ tę samą topologię!

6. Nierówność Schwarza

Twierdzenie 2.58

Z: $z_1, \dots, z_m, w_1, \dots, w_m \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

T: $\left| \sum_{k=1}^{m} z_k \overline{w_k} \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{m} |z_k|^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{m} |w_k|^2}$

D: $A = \sum_{k=1}^{m} |z_k|^2$, $B = \sum_{k=1}^{m} |w_k|^2$

$C = \sum_{k=1}^{m} z_k \overline{w_k}$

Jeśli $B = 0$, to obydwie strony nierówności zerują się.

Jeśli $B \neq 0$, to $B > 0$ oraz

$$\sum_{k=1}^{m} |Bz_k - Cw_k|^2 = \sum_{k=1}^{m} (Bz_k - Cw_k)(B\overline{z_k} - \overline{C}\overline{w_k}) =$$

$$= B^2 A + |C|^2 B - B\overline{C} \sum_{k=1}^{m} z_k \overline{w_k} - BC \sum_{k=1}^{m} \overline{z_k} w_k =$$

$$= B^2 A + |C|^2 B - B\overline{C}C - BC\overline{C} =$$

$$= B^2 A + |C|^2 B - 2B|C|^2 = B^2 A - B|C|^2 = B(A \cdot B - |C|^2)$$

Zatem $B(A \cdot B - |C|^2) \geq 0$ skąd $|C|^2 \leq A \cdot B$

czyli

$$|C| \leq \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$$

§4. Płaszczyzna domknięta (sfera Riemanna)

1. Struktura mnogościowa.

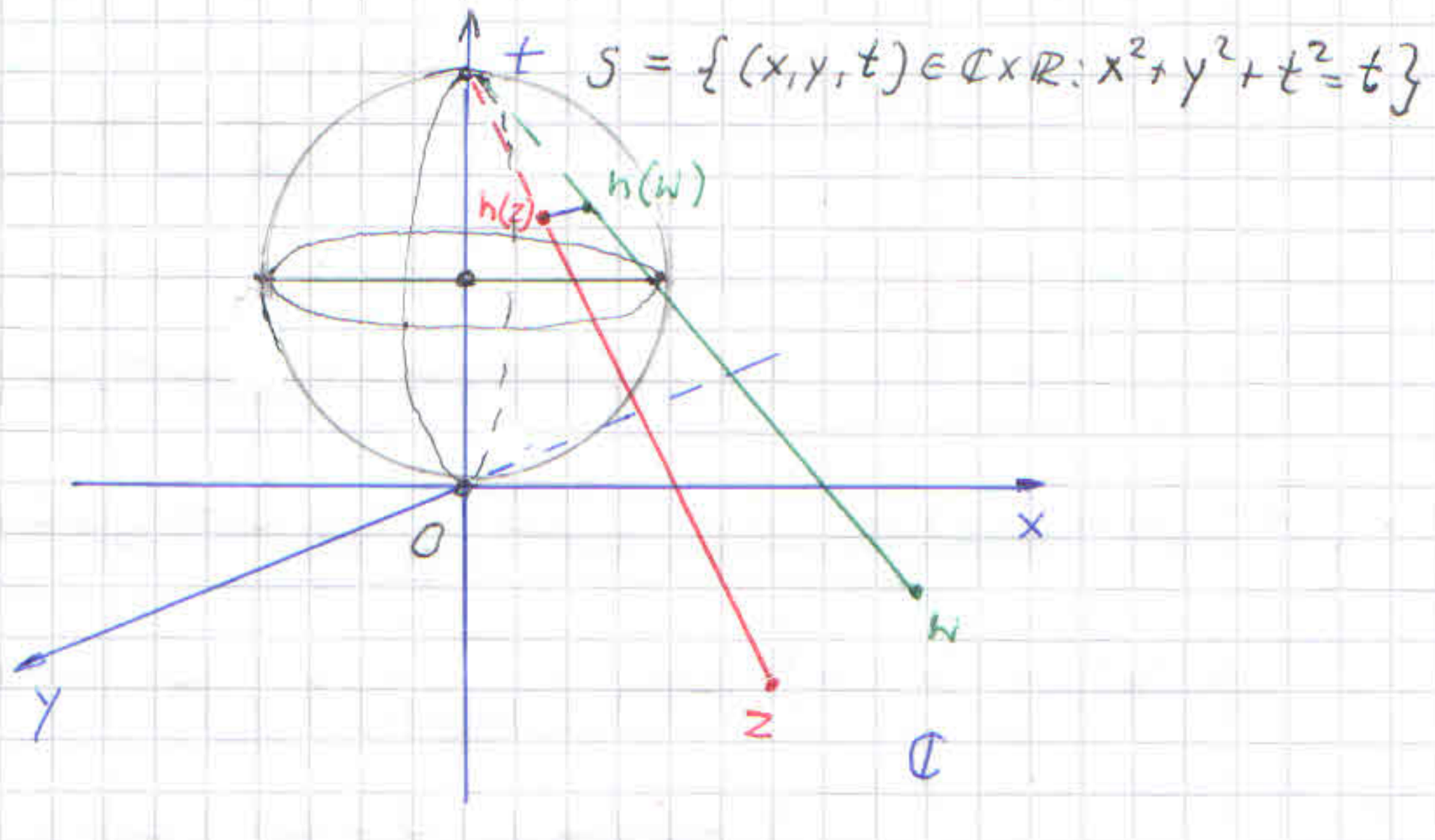
Wybieramy element $\infty \notin \mathbb{C}$ i określamy.

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Definicja 2.59 $\hat{\mathbb{C}}$ nazywamy płaszczyzną domkniętą.

Sens tej nazwy uzasadnia dalej wprowadzona struktura metryczna $\hat{\mathbb{C}}$

2. Rzut stereograficzny i odległość w $\hat{\mathbb{C}}$



$$h : \mathbb{C} \ni z \longrightarrow h(z) \in S \setminus \{(0,0,1)\}$$

$$h(z) = h((x,y)) = \left(\frac{x}{1+|z|^2}, \frac{y}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2}{1+|z|^2} \right)$$

Mówiąc geometrycznie, płaszczyznę $\mathbb{C} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ przekształcamy przez tak zwaną inwersję o środku w $(0,0,1)$ i współczynniku inwersji 1.

Określamy odwzorowanie

$$H: \hat{\mathbb{C}} \ni z \longrightarrow \begin{cases} h(z), \text{ gdy } z \in \mathbb{C}, \\ (0,0,1), \text{ gdy } z = \infty \end{cases} \in S$$

Jest to bijekcja między $\hat{\mathbb{C}}$ oraz S i możemy przez nią przenieść metrykę z S na $\hat{\mathbb{C}}$.
Wtedy dostajemy dla $z, w \in \mathbb{C}$:

$$\varrho(z,w) = \frac{|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}},$$

$$\varrho(z,\infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}.$$

Warto sprawdzić te wzory jako ćwiczenie.
W praktyce przekonamy się, że tak wprowadzona metryka nie zmienia topologii w $\mathbb{C} \subset \hat{\mathbb{C}}$, w porównaniu z poprzednio wprowadzoną przez moduł.

Dygresja. Sfera Riemanna to przykład tak zwanych powierzchni Riemanna pomocniczych, na wyższych latach studiów. Takie powierzchnie Riemanna to $\mathbb{C}$, kopia otwarta $\mathbb{C}$, torusy i wiele innych.

§5. Uwagi końcowe

Wprowadziliśmy ciała $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ stanowiące podstawę wszelkich dalszych działań, oraz ich rozszerzenia $\overline{\mathbb{R}}$ i $\widehat{\mathbb{C}}$, które pozwolą będą na wygodniejszy zapis wielu faktów.

Uwaga 2.60 Wiele faktów w analizie matematycznej można zapisać nad każdym z tych dwóch ciał nie zmieniając sformułowań a czasami nawet dowodów. W związku z tym w dalszym ciągu.

przez $\mathbb{K}$ oznaczać będziemy jedno z ciał $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$ jeśli jego wybór nie będzie miał znaczenia.

Oczywiście, przy tej konwencji ciało ustalamy dla całości rozważań w danym zagadnieniu.

Rozdział 3. Ciągi liczbowe.

§1. Ciągi i ich zbieżność

1. Ciągi

Niech X będzie zbiorem.

Definicja 3.01 Ciągiem w zbiorze X nazywamy dowolną funkcję

$$\mathbb{N} \ni n \longrightarrow a_n \in X.$$

Wartość ciągu w punkcie $n \in \mathbb{N}$ nazywamy jego n-tym wyrazem i oznaczamy a_n. Ciąg o ustalonych wyrazach a_n dla $n \in \mathbb{N}$ oznaczać będziemy przez $\{a_n\}$.

Uwaga 3.02 Ciągi liczbowe to zazwyczaj ciągi w wybranym i ustalonym ciele $\mathbb{K}$. Czasami rozpatrując ciąg w $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$ umieszczamy go w szerszych zbiorach $\overline{\mathbb{R}}$ lub $\hat{\mathbb{C}}$, co pozwala na kontrolę ciągu w „nieskończoności": $-\infty, +\infty, \infty$.

Definicja 3.03 Jeśli $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są ciągami w zbiorze X, to mówimy, że $\{b_n\}$ jest podciągiem $\{a_n\}$ jeśli istnieje funkcja $\varphi: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ taka, że $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $b_n = a_{\varphi(n)}$ dla $n \in \mathbb{N}$

Przykłady 3.04

(1) $a_n = n$, $b_n = 2n$ dla $n \in \mathbb{N}$ dostajemy.
w ciągu liczb naturalnych podciąg złożony.
z liczb naturalnych parzystych.

(2) $a_n = n$, b_n - n-ta liczba pierwsza. czyli:
$b_0 = 2$, $b_1 = 3$, $b_2 = 5$, ... Nie mamy ogólnego wzoru na b_n!

(3). Ciąg Fibonacciego określa się jako podciąg.
ciągu liczb naturalnych zadany przez.
wzory: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$

(4) Jeśli $z \in \mathbb{C}$ oraz $a_n = z^n$, $n \in \mathbb{N}$ jest
ciągiem geometrycznym liczb zespolonych, to
$b_n = a_{2n} = z^{2n} = (z^2)^n$ jest jego podciągiem.
wyrazów parzystych. Jest to również ciąg
geometryczny.

2. Podstawowe modyfikacje ciągów

Niech X będzie zbiorem, $\{a_n\}$ ciąg w X

(A) Zmiana wyrazów początkowych ciągu $\{a_n\}$

$\{b_n\}$ ciąg w X taki, że
$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N.\ b_n = a_n$

Wtedy mówimy, że ciągi $\{a_n\}$, $\{b_n\}$
różnią się wyrazami początkowymi

(B) Permutacja ciągu $\{a_n\}$

Niech $\sigma: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ będzie bijekcją. Jeśli $b_n = a_{\sigma(n)}$ dla $n \in \mathbb{N}$, to mówimy, że ciąg $\{b_n\}$ jest permutacją ciągu $\{a_n\}$ zadaną przez σ.

Uwaga 3.05 Podane wyżej modyfikacje ciągu nie wpływają na jego podstawowe własności topologiczne. Szczegóły poznamy w dalszej części wykładu.

3. Zbieżność i punkty skupienia ciągów w przestrzeniach metrycznych.

Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną, $\{a_n\}$ ciągiem w zbiorze X oraz niech $a \in X$

DEFINICJA 3.06. Mówimy, że a jest granicą ciągu $\{a_n\}$ jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : d(a_n, a) < \varepsilon$$

Ciąg $\{a_n\}$ nazywamy wtedy zbieżnym do granicy a i piszemy $a_n \longrightarrow a \; (n \longrightarrow +\infty)$ albo $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$.
Ciąg $\{a_n\}$ nazywamy zbieżnym w przestrzeni metrycznej (X,d) jeśli istnieje $a \in X$ będące granicą $\{a_n\}$.

Uwaga 3.07 Warunek $d(a_n, a) < \varepsilon$ można równoważnie zapisać $a_n \in K(a, \varepsilon)$. Łatwo zatem zauważyć, że $\{a_n\}$ jest zbieżny do a wtedy i tylko wtedy gdy w każdym otoczeniu U punktu a leżą „prawie wszystkie" wyrazy ciągu $\{a_n\}$, to znaczy wszystkie poza skończoną ich ilością.

Uwaga 3.08

Z: (X,d) przestrzeń metryczna, $\{a_n\}$ ciąg w X, $a \in X$

T: Następujące warunki są równoważne:

(1) $a_n \longrightarrow a$ $(n \to +\infty)$,

(2) $d(a_n, a) \longrightarrow 0$ $(n \to +\infty)$.

D: Ćwiczenie - wystarczy rozpisać definicję.

Twierdzenie 3.09 Ciąg w przestrzeni metrycznej może mieć co najwyżej jedną granicę.

D: Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną, $\{a_n\}$ ciąg w X, $b_1, b_2 \in X$, $b_1 \neq b_2$. Przypuśćmy, że $a_n \longrightarrow b_1$ $(n \to +\infty)$ oraz $a_n \longrightarrow b_2$ $(n \to +\infty)$. Weźmy $\varepsilon = \frac{1}{2} d(b_1, b_2)$. W każdej z kul $K(b_1, \varepsilon)$, $K(b_2, \varepsilon)$ leżą prawie wszystkie wyrazy ciągu $\{a_n\}$, ale jak łatwo zauważyć z nierówności trójkąta, $K(b_1, \varepsilon) \cap K(b_2, \varepsilon) = \emptyset$ co nam daje sprzeczność.

Definicja 3.10 Mówimy, że a jest punktem skupienia ciągu $\{a_n\}$ jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \; \forall N \in \mathbb{N} \; \exists n \geq N : d(a_n, a) < \varepsilon.$$

Uwaga 3.11 Łatwo zauważyć, że a jest punktem skupienia ciągu $\{a_n\}$ wtedy i tylko wtedy gdy w dowolnym otoczeniu punktu a leży nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{a_n\}$.

Uwaga 3.12 Rozpisując definicję łatwo zauważamy, że dla $\{a_n\}$ w p.m. (X,d) i punktu $a \in X$ mamy równoważne warunki:

(1) a jest punktem skupienia $\{a_n\}$ w X,

(2) 0 jest punktem skupienia $\{d(a_n, a)\}$ w $\mathbb{R}$.

Twierdzenie 3.13

Z: (X,d) - przestrzeń metryczna, $\{a_n\}$ ciąg w X, $a \in X$

T: Następujące warunki są równoważne:

(1) a jest punktem skupienia $\{a_n\}$.

(2) Istnieje $\{b_n\}$ podciąg $\{a_n\}$ taki, że $b_n \to a$ $(n \to +\infty)$.

D: Ćwiczenie.

4. Ciągi a domkniętość i punkty skupienia podzbiorów przestrzeni metrycznych

Twierdzenie 3.14

Z: (X,d) - przestrzeń metryczna, $A \subset X$

T: Następujące warunki są równoważne:

(1) A jest domknięty w X

(2) $(\{a_n\}$ ciąg w A, $a \in X$, $a_n \to a$ $(n \to +\infty)) \Rightarrow (a \in A)$

D: (1) $\Rightarrow$ (2) Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem w A, $a \in X$, $a_n \to a$ $(n \to +\infty)$. Przypuśćmy, że $a \notin A$. Wtedy $U = A^c$ jest otoczeniem a bo jest otwarty. Zatem prawie wszystkie wyrazy $\{a_n\}$ leżą w U, czyli poza A. Mamy sprzeczność

(2) $\Rightarrow$ (1) Jeśli A nie jest domknięty to $\bar{A} \setminus A \neq \emptyset$. Ustalmy $a \in \bar{A} \setminus A$. Wtedy dla $n \in \mathbb{N}$ mamy $A \cap K(a, 2^{-n}) \neq \emptyset$. Wybierzmy $a_n \in A$ tak aby $a_n \in K(a, 2^{-n})$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $a_n \to a$ $(n \to +\infty)$, więc powinno być $a \in A$, co jest sprzeczne z wyborem punktu a.

Twierdzenie 3.15

Z: (X,d) przestrzeń metryczna, $A \subset X$, $a \in X$

T: Następujące warunki są równoważne:

(1) $a \in A'$,

(2) $\exists \{a_n\}$ ciąg w $A \setminus \{a\}$: $a_n \to a$ $(n \to +\infty)$

D: Ćwiczenie

Twierdzenie 3.16

Z: (X,d) przestrzeń metryczna, $A \subset X$

T: $\overline{A} = A \cup A'$

D: Z 3.14 i 3.15 wynika, że $A \cup A' \subset \overline{A}$.

Jeśli teraz $a \in \overline{A}$, to znajdziemy ciąg $\{a_n\}$ w A taki, że $a_n \to a$ $(n \to +\infty)$ gdyż dla $n \in \mathbb{N}$ $K(a, 2^{-n}) \cap A \neq \emptyset$. Zatem gdy $a \notin A$ to ciąg $\{a_n\}$ leży w $A \setminus \{a\}$ czyli $a \in A'$.

5. Ciągi ograniczone i ciągi Cauchy'ego.

Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną.

Definicja 3.17 Średnicą zbioru $A \subset X$ nazywamy element zbioru $[0, +\infty]$ określony równością.

$$\text{diam } A = \begin{cases} 0, & A = \emptyset \\ \sup d(A \times A), & A \neq \emptyset \end{cases}$$

gdzie supremum obliczamy w $\overline{\mathbb{R}}$.

Lemat 3.18

Z: (X,d) - przestrzeń metryczna, $A \subset X$

T: Następujące warunki są równoważne:

(1) A jest zbiorem ograniczonym,

(2) $\operatorname{diam} A < +\infty$,

(3) $\forall a \in X \; \exists r > 0 : \overline{K}(a,r) \supset A$.

D: Ćwiczenie

Definicja 3.19 Ciąg $\{a_n\}$ w przestrzeni metrycznej (X,d) nazywamy ograniczonym jeśli zbiór jego wyrazów $\{a_n \in X : n \in \mathbb{N}\}$ jest ograniczony.

Dwa kolejne przedstawicielne pojęcia należą do najważniejszych w teorii przestrzeni metrycznych.

DEFINICJA 3.20 Ciąg $\{a_n\}$ w przestrzeni metrycznej (X,d) nazywamy ciągiem Cauchy'ego jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall p,q \geq N : d(a_p, a_q) < \varepsilon$$

W tej sytuacji czasami mówimy także, że ciąg $\{a_n\}$ spełnia warunek Cauchy'ego

DEFINICJA 3.21 Mówimy, że przestrzeń metryczna (X,d) jest zupełna jeśli każdy ciąg Cauchy'ego w X jest zbieżny w X.

Twierdzenie 3.22

Z: (X,d) - przestrzeń metryczna, $\{a_n\}$ ciąg w X

T: (1) ($\{a_n\}$ jest zbieżny) => ($\{a_n\}$ ciąg Cauchy'ego).

(2) ($\{a_n\}$ ciąg Cauchy'ego) => ($\{a_n\}$ ciąg ograniczony)

(3) ($\{a_n\}$ ciąg Cauchy'ego, który ma pod ciąg zbieżny) =>

=> ($\{a_n\}$ jest zbieżny)

D: (1) Wybierzmy $\varepsilon > 0$. Skoro $a_n \longrightarrow a$ $(n \to +\infty)$, to $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : d(a_n, a) < \varepsilon/2$. Zatem dla $p,q \geq N$ $d(a_p, a_q) \leq d(a_p, a) + d(a_q, a) < \varepsilon$ co kończy dowód.

(2) $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall p,q \geq N : d(a_p, a_q) < 7$. Wtedy dla $r = 7 + d(a_N, a_0) + \ldots + d(a_N, a_{N-1})$ mamy zawiérzanie wyrazów $\{a_n\}$ w kuli $\overline{K}(a_N, r)$.

(3) Niech $\{b_n\}$ będzie podciągiem $\{a_n\}$ zbieżnym do $b \in X$. Wybierając dowolne $\varepsilon > 0$ dostajemy:
$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : d(b_n, b) < \varepsilon/2$ (ze zbieżności $\{b_n\}$),
$\exists \tilde{N} \in \mathbb{N}\ \forall p,q \geq \tilde{N} : d(a_p, a_q) < \varepsilon/2$ ($\{a_n\}$ ciąg Cauchy'ego).
Niech teraz $M = \max\{N, \tilde{N}\}$. Wtedy dla $p \geq M$
$d(a_p, b) \leq d(a_p, b_n) + d(b_n, b)$ dla $n \in \mathbb{N}$.
Zatem $d(a_p, b) \leq d(a_p, b_M) + d(b_M, b) < \varepsilon$ gdyż $b_M = a_{q(M)} = a_q$ dla pewnego $q \geq M$. To kończy dowód.

Uwaga 3.23. Zmiana początkowych wyrazów oraz permutacja ciągu nie wpływają na jego: (1) zbieżność,
(2) punkty skupienia,
(3) ograniczoność,
(4) sp. war. Cauchy'ego.

D: Ćwiczenie.

§2. Podstawowe własności zbieżnych ciągów liczbowych.

Twierdzenie 3.24

Z: $\{a_n\}$ ciąg w $\mathbb{K}$, $a \in \mathbb{K}$, $a_n \to a$ $(n \to +\infty)$.

T: (1) $(-a_n) \to (-a)$ $(n \to +\infty)$.

(2) $|a_n| \to |a|$ $(n \to +\infty$

(3) $(a_n \neq 0$ dla $n \in \mathbb{N}, a \neq 0) \Rightarrow (a_n^{-1} \to a^{-1}$ $(n \to +\infty))$

D: (1) Oczywiste bo $|(-a_n) - (-a)| = |a_n - a|$, $n \in \mathbb{N}$

(2) Dostajemy z nierówności $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$, $n \in \mathbb{N}$

(3) Istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $|a_n| \geqslant \frac{1}{2}|a|$ dla $n \geqslant N$

Zatem:

$$|a_n^{-1} - a^{-1}| = \frac{|a_n - a|}{|a_n||a|} \leqslant 2\frac{|a_n - a|}{|a|^2}$$

co łatwo kończy dowód.

Twierdzenie 3.25

Z: $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ - ciągi w $\mathbb{K}$, $a, b \in \mathbb{K}$

$a_n \to a$ $(n \to +\infty)$, $b_n \to b$ $(n \to +\infty)$.

T: (1) $a_n + b_n \to a + b$ $(n \to +\infty)$

(2) $a_n - b_n \to a - b$ $(n \to +\infty)$

(3) $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$ $(n \to +\infty)$

(4) $(b_n \neq 0$ dla $n \in \mathbb{N}, b \neq 0) \Rightarrow (a_n/b_n \to a/b$ $(n \to +\infty))$.

D: (1) i (2) są oczywiste. Jeśli pokażemy (3) to (4) otrzymamy 3.24 (3).

Dowodzimy punkt (3) teraz. Dla $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n b_n - ab| \leqslant |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - a \cdot b| =$$

$$= |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a|.$$ $\{a_n\}$ jako zbieżny jest ograniczony więc istnieje $M \in [0, +\infty)$

łatwo, że zachodzi nierówność

$$|a_n b_n - ab| \leq M(|b_n - b| + |a_n - a|) \text{ dla } n \in \mathbb{N}$$

Teraz prostym rachunkiem z definicji dostajemy.

$$a_n b_n \longrightarrow a \cdot b \quad (n \to +\infty).$$

§3. Zbieżność w $\mathbb{R}$ i $\overline{\mathbb{R}}$

1 Ciągi monotoniczne.

W tych dwóch przestrzeniach szczególną rolę odgrywa przy zbieżności wprowadzony porządek.

Definicja 3.26 Ciąg $\{a_n\}$ w $\overline{\mathbb{R}}$ nazywamy:

(1) rosnącym, jeśli $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq a_{n+1}$,

(2) malejącym, jeśli $\forall n \in \mathbb{N}: a_{n+1} \leq a_n$

(3) monotonicznym, jeśli $\{a_n\}$ jest rosnący lub malejący.

(4) silnie rosnącym, jeśli $\forall n \in \mathbb{N}: a_n < a_{n+1}$,

(5) silnie malejącym, jeśli $\forall n \in \mathbb{N}: a_{n+1} < a_n$.

(6) silnie monotonicznym, jeśli $\{a_n\}$ jest ciągiem silnie rosnącym lub silnie malejącym.

W $\overline{\mathbb{R}}$ wszystkie ciągi są ograniczone, zaś w $\mathbb{R}$ stawiamy następujące definicje.

Definicja 3.27 Ciąg $\{a_n\}$ w $\mathbb{R}$ nazywamy:

(1) ograniczonym z góry jeśli zbiór jego wyrazów jest ograniczony z góry

(2) ograniczonym z dołu, jeśli zbiór jego wyrazów jest ograniczony z dołu

(3) ograniczonym, jeśli zbiór jego wyrazów jest ograniczony

2. Zbieżność ciągów w $\mathbb{R}$.

Podstawowym faktem z tego zakresu jest następujące

TWIERDZENIE 3.28 (Bolzano-Weierstrassa).
Każdy ograniczony ciąg liczb rzeczywistych ma podciąg zbieżny.

D: Przedstawimy dowód tego faktu oputy o 2.15 czyli w zasadzie o aksjomat ciągłości $\mathbb{R}$.

Ustalmy ciąg ograniczony $\{a_n\}$. Z ograniczoności wynika istnienie przedziału $I_0 = [b_0, c_0]$ takiego, że $a_n \in I_0$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Rozpatrujemy następnie dwa przedziały $[b_0, \frac{b_0+c_0}{2}]$, $[\frac{b_0+c_0}{2}, c_0]$. Wybieramy oraz oznaczamy przez $I = [b_1, c_1]$ ten z nich w którym leży a_n dla nieskończenie wiela $n \in \mathbb{N}$.

Proces kontynuujemy w ten sposób, że mając już $I_n = [b_n, c_n]$ dla pewnego $n \geq 1$ rozpatrujemy przedziały $[b_n, \frac{b_n+c_n}{2}]$ i $[\frac{b_n+c_n}{2}, c_n]$ wybierając i oznaczając przez $I_{n+1} = [b_{n+1}, c_{n+1}]$ ten z nich w którym a_n zawiera się dla nieskończenie wiela $n \in \mathbb{N}$.

Otrzymujemy ciąg przedziałów domkniętych

$$I_0 \supset I_1 \supset \ldots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \ldots$$

Dla którego z 2.15 mamy $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$.

Niech $a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Łatwo zauważyć, że $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{a\}$
bo przecięcie nie może zawierać dwóch elementów.

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Znajdziemy $n \in \mathbb{N}$ takie, że:

$$I_n \subset (a-\varepsilon, a+\varepsilon);$$

a zatem w przedziale $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ leży nieskończenie
wyrazów ciągu $\{a_n\}$. Dostajemy więc informację, że
a jest punktem skupienia ciągu $\{a_n\}$ co pociąga
tezę.

Mamy równoważną postać poprzedniego twierdzenia.

TWIERDZENIE 3.29

Każdy ograniczony ciąg liczb rzeczywistych ma
punkt skupienia w $\mathbb{R}$.

D: Wynika wprost z 3.13.

Z tego ostatniego twierdzenia także dostajemy
kolejną fundamentalną informację o $\mathbb{R}$.

TWIERDZENIE 3.30

Przestrzeń $\mathbb{R}$ wraz z metryką naturalną jest
przestrzenią metryczną zupełną.

D: Jeśli $\{a_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $\mathbb{R}$, to
na podstawie 3.22 (2) jest on ograniczony. Zatem
z 3.28 musi mieć podciąg zbieżny. Korzystając
teraz z 3.22(3) $\{a_n\}$ jest zbieżny w $\mathbb{R}$. To kończy
dowód twierdzenia.

Poza zupełnością możemy stosować Twierdzenie B-W do badania ciągów monotonicznych.

Twierdzenie 3.31

Z: $\{a_n\}$ ciąg w $\mathbb{R}$ rosnący (malejący) ograniczony z góry (z dołu).

T: $\{a_n\}$ jest zbieżny

D: Dowodzimy wersję podstawową. Dowód drugiego przypadku jest analogiczny.

Jeśli $\{a_n\}$ jest ograniczony z góry i rosnący, to jest ograniczony. Niech zatem punkt skupienia $\in \mathbb{R}$, który dla ciągu monotonicznego musi być granicą.

3. Zbieżność ciągów w $\overline{\mathbb{R}}$

Aby dalej swobodnie działać w $\overline{\mathbb{R}}$ potrzebna nam będzie charakterystyczna zbieżności ciągów w $\overline{\mathbb{R}}$ w oparciu o zbieżność w $\mathbb{R}$. Jak zwykle w $\mathbb{R}$ rozpatrujemy metrykę naturalną zaś w $\overline{\mathbb{R}}$, tak jak to jest opisane w Rozdziale drugim, metrykę przeniesioną z $[-1,1]$ przez odwzorowanie.

$$\varphi : \overline{\mathbb{R}} \ni x \longrightarrow \begin{cases} -1, & x = -\infty \\ \frac{x}{1+|x|}, & x \in \mathbb{R} \\ 1, & x = +\infty \end{cases}$$

czyli metryką

$$d : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \ni (x,y) \longrightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| \in [0, +\infty).$$

W 2.47 wspomnieliśmy, że $d|_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ określa na $\mathbb{R}$ tę samą topologię co metryka naturalna. Aktualnie nas będzie interesowała zbieżność ciągów.

Lemat 3.32

Z: $\{a_n\}$ ciąg w $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$

T: Następujące warunki są równoważne:

(1) $a_n \to a \ (n \to +\infty)$ w $\mathbb{R}$

(2) $a_n \to a \ (n \to +\infty)$ w $\overline{\mathbb{R}}$

D: (1) $\Rightarrow$ (2) Niech $a_n \to a \ (n \to +\infty)$ w $\mathbb{R}$

Mamy $d(a_n, a) = \left| \frac{a_n}{1+|a_n|} - \frac{a}{1+|a|} \right| \to 0 \ (n \to +\infty)$

(2) $\Rightarrow$ (1) Niech $a_n \to a \ (n \to +\infty)$ w $\overline{\mathbb{R}}$

Wtedy $d(a_n, a) \to 0 \ (n \to +\infty)$.

Określmy φ - jako odwzorowanie odwrotne.

do bijekcji φ. Mamy

$$\varphi : [-1,1] \ni y \to \begin{cases} -\infty, & y = -1 \\ \frac{y}{1-|y|}, & y \in (-1,1) \\ +\infty, & y = +1 \end{cases} \in \overline{\mathbb{R}}$$

Skoro $|\varphi(a_n) - \varphi(a)| \to 0 \ (n \to +\infty)$ $\varphi(a_n), \varphi(a) \in (-1,1)$

więc z własności ciągów w $\mathbb{R}$.

$|\varphi(\varphi(a_n)) - \varphi(\varphi(a))| \to 0 \ (n \to +\infty)$

czyli $|a_n - a| \to 0$ co kończy dowód.

Lemat 3.33

Z: $\{a_n\}$ ciąg w $\overline{\mathbb{R}}$

T: Następujące warunki są równoważne.

(1) $a_n \to +\infty \ (-\infty) \ (n \to +\infty)$ w $\overline{\mathbb{R}}$

(2) $\forall C \in \mathbb{R} \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N : C < a_n \ (a_n < C)$

D: Wystarczy wypisać wzór na odległość w $\overline{\mathbb{R}}$ do $+\infty \ (-\infty)$

Twierdzenie 3.34

Z: $\{a_n\}$ ciąg w $\overline{\mathbb{R}}$

T: $\{a_n\}$ ma punkt skupienia w $\overline{\mathbb{R}}$.

D: Jeśli nieskończenie wiele wyrazów $\{a_n\}$ ma wartości $+\infty$ lub $-\infty$, to jeden z tych punktów jest punktem skupienia $\{a_n\}$.

Jeśli wartości nieskończonych mamy skończenie wiele, to wszystkie te wartości nieskończone możemy zamienić na liczbę 7 bez wpływu na punkty skupienia ciągu w $\overline{\mathbb{R}}$.

Po powyższej modyfikacji wyrazów początkowych otrzymujemy ciąg w $\mathbb{R}$ i musimy wskazać jego punkt skupienia w $\mathbb{R}$.

Rozpatrujemy dwa przypadki:

(1) $\{a_n\}$ jest nieograniczony w $\mathbb{R}$, więc jest nieograniczony z góry lub z dołu, a wtedy $+\infty$ lub odpowiednio $-\infty$ jest jego punktem skupienia w $\overline{\mathbb{R}}$.

(2) $\{a_n\}$ jest ograniczony w $\mathbb{R}$, a wtedy ma na podstawie 3.29 ma punkt skupienia w $\mathbb{R}$, który z 3.32 jest też punktem skupienia w $\overline{\mathbb{R}}$.

To kończy dowód.

Uwaga 3.35. Pokazać, korzystając 3.32, że topologia naturalna $\mathbb{R}$ jest taka sama jak zadawana w $\mathbb{R}$ przez metrykę $d/\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Opisać otoczenia $-\infty$, $+\infty$ w $\overline{\mathbb{R}}$.

4. Granice górna i dolna ciągu w $\overline{\mathbb{R}}$

O takich granicach można też mówić w $\mathbb{R}$, ale teoria w $\overline{\mathbb{R}}$ jest ogólniejsza i ma większe zastosowania.

Ustalmy $\{a_n\}$ ciąg w $\overline{\mathbb{R}}$ i oznaczmy

$$S = \{a \in \overline{\mathbb{R}} : a \text{ jest punktem skupienia } \{a_n\} \text{ w } \overline{\mathbb{R}}\}$$

Zbiór ten nazywamy zbiorem granic częściowych $\{a_n\}$ w $\overline{\mathbb{R}}$.

Lemat 3.36 W powyższej sytuacji:
(1) S jest niepustym, domkniętym podzbiorem $\overline{\mathbb{R}}$,
(2) $\inf S \in S$, $\sup S \in S$.

D: (1) Z 3.34 widzimy, że $S \neq \emptyset$. Jeśli $b \notin S$ to istnieje U otoczenie b w $\mathbb{R}$, w którym leży skończona liczba elementów $\{a_n\}$. W tej sytuacji $U \subset S^c$. Wynika stąd, że S^c jest otwarty w $\mathbb{R}$, co kończy dowód.

(2) Niech $a = \sup S$ i przypuśćmy, że $a \notin S$. Wtedy $a \neq -\infty$ oraz $[a, +\infty] \cap S = \emptyset$. Rozpatrujemy dwa przypadki:
- Jeśli $a = +\infty$, to ze względu na otwartość S^c z (1) istnieje $R > 0$ takie, że $(R, +\infty] \cap S = \emptyset$. Stąd wynika, że $\sup S \leq R$ i dostajemy sprzeczność
- Jeśli $a \in \mathbb{R}$, to istnieje $r > 0$ takie, że $(a-r, a+r) \cap S = \emptyset$ skąd $(a-r, +\infty] \cap S = \emptyset$. Zatem $\sup S \leq a - r$, więc dostajemy sprzeczność.

Analogicznie pokazujemy, że $\inf S \in S$.

Warto tutaj zauważyć, że jeśli F jest niepusty oraz domknięty w $\overline{\mathbb{R}}$, to $\inf F \in F$ oraz $\sup F \in F$

Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem w $\overline{\mathbb{R}}$ oraz S będzie zbiorem granic częściowych ciągu $\{a_n\}$.

Definicja 3.37 Granicą górną (dolną) ciągu $\{a_n\}$ w $\overline{\mathbb{R}}$ nazywamy $\sup S$ ($\inf S$) i oznaczamy.
$\limsup_{n\to+\infty} a_n$ ($\liminf_{n\to+\infty} a_n$).

Twierdzenie 3.38
Z: $\{a_n\}$ ciąg w $\overline{\mathbb{R}}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$
T: (1) $\liminf_{n\to+\infty} a_n \leqslant \limsup_{n\to+\infty} a_n$,

(2) $\left(\liminf_{n\to+\infty} a_n = \limsup_{n\to+\infty} a_n = a \in \overline{\mathbb{R}}\right) \Leftrightarrow \left(a_n \to a \ (n\to+\infty) \text{ w } \overline{\mathbb{R}}\right)$

D: Niech S będzie zbiorem granic częściowych $\{a_n\}$.

(1) $S \neq \emptyset$ więc dostajemy nierówność $\inf S \leqslant \sup S$. co kończy dowód.

(2) Jeśli $m = \liminf_{n\to+\infty} a_n$, $M = \limsup_{n\to+\infty} a_n$, to mamy $S \subset [m, M]$.
($\Rightarrow$) Jeśli $m = M$, to $m = a$ jest jedynym punktem skupienia ciągu w $\overline{\mathbb{R}}$. Biorąc U otoczenie a wiemy, że w U leżą prawie wszystkie wyrazy $\{a_n\}$. Faktycznie gdyby nieskończenie wiele z nich leżało poza U, to zbiór z nich podciąg miałby punkt skupienia, ale poza U co daje sprzeczność. Zatem $a_n \to a$ $(n\to+\infty)$.
($\Leftarrow$) Oczywiste bo $S = \{a\}$.

Dla $\{a_n\}$ ciągu w $\overline{\mathbb{R}}$ oraz $I \subset \mathbb{N}$ wprowadzamy skrócone zapisy:

$$\inf_{n \in I} a_n = \inf \{a_n : n \in I\}$$

$$\sup_{n \in I} a_n = \sup \{a_n : n \in I\}.$$

Zachodzi następujące twierdzenie

Twierdzenie 3.39

Z: $\{a_n\}$ ciąg w $\overline{\mathbb{R}}$

T: (1) $\liminf_{n \to +\infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\inf_{k \geq n} a_k \right)$,

(2) $\limsup_{n \to +\infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{k \geq n} a_k \right)$.

D: Pokażemy równość (2). Na wstępie oznaczmy

$$l = \limsup_{n \to +\infty} a_n \quad , \quad p = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{k \geq n} a_k \right)$$

Niech $L \in \overline{\mathbb{R}}$ spełnia nierówność $L > l$. Wtedy zbiór $\{n \in \mathbb{N} : a_n \geq L\}$ jest skończony, skąd wynika, że dla dostatecznie dużych $n \in \mathbb{N}$ $\sup_{k \geq n} a_k \leq L$. Zatem $p \leq L$. Mamy więc wynikanie $(L \in \overline{\mathbb{R}}, L > l) \Rightarrow (L \geq p)$ skąd dostajemy $p \leq l$.

Jeśli $P \in \overline{\mathbb{R}}$ spełnia nierówność $P > p$, to istnieje $m \in \mathbb{N}$ takie, że $\sup_{k \geq m} a_k < P$. Wtedy $a_k \leq P$ dla $k \geq m$, skąd natychmiast wynika $l \leq P$. Mając wynikanie $(P \in \overline{\mathbb{R}}, P > p) \Rightarrow (P \geq l)$ dostajemy $l \leq p$ co kończy dowód równości $l = p$.

Punkt (1) tezy dowodzimy analogicznie.

Twierdzenie 3.40

Z: $\{a_n\}, \{b_n\}$ ciągi w $\overline{\mathbb{R}}$, $a_n \leqslant b_n$ dla $n \in \mathbb{N}$

T: (1) $\liminf\limits_{n \to +\infty} a_n \leqslant \liminf\limits_{n \to +\infty} b_n$

(2) $\limsup\limits_{n \to +\infty} a_n \leqslant \limsup\limits_{n \to +\infty} b_n$

D: (1) Mamy $\inf\limits_{k \geqslant n} a_k \leqslant \inf\limits_{k \geqslant n} b_k$ dla $n \in \mathbb{N}$

Zatem $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} (\inf\limits_{k \geqslant n} a_k) \leqslant \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} (\inf\limits_{k \geqslant n} b_k)$

co na podstawie 3.39 daje nierówność (1).

(2) Dowodzimy analogicznie jak (1).

Twierdzenie 3.41

Z: $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ ciągi w $\overline{\mathbb{R}}$

$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ dla $n \in \mathbb{N}$

T: $\liminf\limits_{n \to +\infty} a_n \leqslant \liminf\limits_{n \to +\infty} b_n \leqslant \limsup\limits_{n \to +\infty} b_n \leqslant \limsup\limits_{n \to +\infty} c_n$

D: Wynika natychmiast z 3.38 i 3.40

Stąd dostajemy natychmiast klasyczne twierdzenie o trzech ciągach.

Twierdzenie 3.42 (o trzech ciągach).

Z: $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ ciągi w $\mathbb{R}$, $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ dla $n \in \mathbb{N}$

$d \in \mathbb{R}$, $a_n \to d$ $(n \to +\infty)$, $c_n \to d$ $(n \to +\infty)$

T: $b_n \to d$ $(n \to +\infty)$.

D: Z 3.41 mamy

$$d \leqslant \liminf_{n \to +\infty} b_n \leqslant \limsup_{n \to +\infty} b_n \leqslant d$$

Skąd $b_n \to d$ $(n \to +\infty)$ na podstawie 3.38 (2).

§4. Ciągi w $\mathbb{C}$ i $\hat{\mathbb{C}}$

1. Zbieżność ciągów liczb zespolonych.

Ustalmy $\{z_n\}$ ciąg w $\mathbb{C}$ oraz $z \in \mathbb{C}$. Po przejściu do postaci algebraicznej $z_n = x_n + iy_n$ dla $n \in \mathbb{N}$ gdzie $\{x_n\}, \{y_n\}$ ciągi w $\mathbb{R}$ oraz $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 3.43 W powyższej sytuacji następujące warunki są równoważne:

(1) $z_n \to z$ $(n \to +\infty)$,

(2) $x_n \to x$ $(n \to +\infty)$ oraz $y_n \to y$ $(n \to +\infty)$.

D: Mamy nierówności: (a) $|x_n - x| \leq |z_n - z|$, $n \in \mathbb{N}$

(b) $|y_n - y| \leq |z_n - z|$, $n \in \mathbb{N}$

(c) $|z_n - z| \leq |x_n - x| + |y_n - y|$, $n \in \mathbb{N}$

Wtedy (1) $\Rightarrow$ (2) otrzymujemy z (a) i (b) oraz.
(2) $\Rightarrow$ (1) dostajemy z (c).

Twierdzenie 3.44.

Z: Przy wprowadzonych na wstępie oznaczeniach.
z jest punktem skupienia $\{z_n\}$.

T: x jest punktem skupienia $\{x_n\}$ wtw y punktem skupienia $\{y_n\}$.

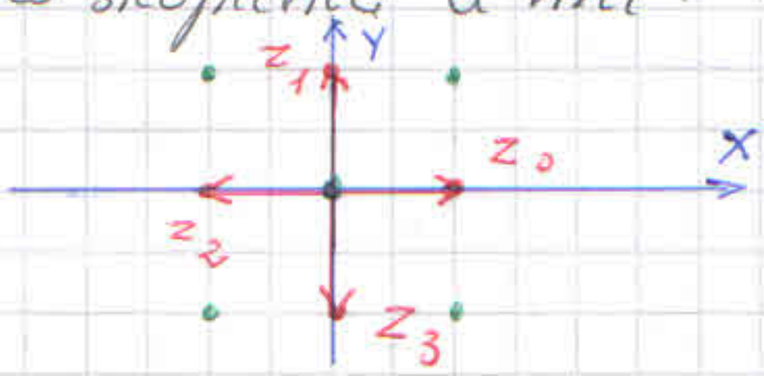
D: Słowo z jest punktem skupienia $\{z_n\}$ to istnieje jego podciąg $\{w_n\}$ zbieżny do z $w_n = z_{\varphi(n)}$ gdzie $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ ściśle rosnące. Jeśli teraz $w_n = z_{\varphi(n)} = x_{\varphi(n)} + i\, y_{\varphi(n)}$ to x jest granicą $\{x_{\varphi(n)}\}$ wtw y granicą $\{y_{\varphi(n)}\}$

Dostaliśmy więc podciągi odpowiednio $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ zbieżne do x i y, czyli x to punkt skupienia $\{x_n\}$ zaś y punkt skupienia $\{y_n\}$.

Uwaga 3.45 Implikacja przeciwna do przedstawionej w 3.44 nie jest prawdziwa. Biorąc ciąg $z_n = i^n$ dla $n \in \mathbb{N}$ dostajemy jego wyrazy:

$1, i, -1, -i, 1, i, -1, -i, 1, \ldots$ itd.

Każdy z ciągów $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ ma punkty skupienia $\{-1, 0, 1\}$ więc przy prawdziwości talliej odwrotnej implikacji $\{z_n\}$ miałby 9 punktów skupienia a ma ich tylko 4: $\{1, i, -1, -i\}$.



Twierdzenie 3.46

Z: $\{z_n\}$ ciąg ograniczony w $\mathbb{C}$

T: $\{z_n\}$ ma w $\mathbb{C}$ punkt skupienia.

D: W postaci algebraicznej $z_n = x_n + iy_n$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Wybierzmy $M \geq 0$ tak aby $z_n \in [-M, M] \times [-M, M]$ w $\mathbb{R}^2$ identyfikowanym z $\mathbb{C}$, dla $n \in \mathbb{N}$.

Skoro $\{x_n\}$ jest ograniczony, to istnieje $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ silnie rosnąca taka, że $x_{\varphi(n)} \to x$ $(n \to +\infty)$, dla pewnego $x \in \mathbb{R}$ (oczywiście $x \in [-M, M]$).

Rozpatrując teraz $\{y_{\varphi(n)}\}$ widzimy, że jako ciąg ograniczony w $\mathbb{R}$ musi mieć podciąg zbieżny do pewnego $y \in \mathbb{R}$, czyli $y_{\varphi(\psi(n))} \to y$ $(n \to +\infty)$ dla pewnej silnie rosnącej funkcji $\psi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Wtedy $z_{\varphi(\psi(n))} \to z = x + iy$ $(n \to +\infty)$ co daje tezę.

TWIERDZENIE 3.47. Przestrzeń $\mathbb{C}$ z metryką naturalną jest zupełna.

D: Niech $\{z_n\}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w $\mathbb{C}$.
Ciąg $\{z_n\}$ musi być ograniczony więc na podstawie 3.46 ma punkt skupienia w $\mathbb{C}$.
Wynika stąd, że $\{z_n\}$ ma podciąg zbieżny w $\mathbb{C}$, a zatem $\{z_n\}$ jest zbieżny.

2. Zbieżność ciągów w $\hat{\mathbb{C}}$

Twierdzenie 3.48.

Z: $\{z_n\}$ ciąg w $\mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$

T: Następujące warunki są równoważne:
(1) $z_n \to z$ $(n \to +\infty)$ w metryce naturalnej $\mathbb{C}$
(2) $z_n \to z$ $(n \to +\infty)$ w $\hat{\mathbb{C}}$

D: (1) $\Rightarrow$ (2) Mamy $|z_n - z| \to 0$ $(n \to +\infty)$.

$$\varrho(z_n, z) = \frac{|z_n - z|}{\sqrt{1+|z_n|^2}\sqrt{1+|z|^2}} \longrightarrow 0 \quad (n \to +\infty)$$

co kończy dowód.

(2) $\Rightarrow$ (1) $\{z_n\}$ jest zbieżny do z więc ∞ nie może być jego punktem skupienia.
Zatem $\exists M \geq 0 : |z_n| \leq M$ dla $n \in \mathbb{N}$

$$|z_n - z| \leq \frac{|z_n - z|}{\sqrt{1+M^2}} \sqrt{1+M^2} \leq$$

$$\frac{|z_n - z|}{\sqrt{1+|z_n|^2}\cdot\sqrt{1+|z|^2}} \sqrt{1+M^2}\sqrt{1+|z|^2} = \sqrt{1+M^2}\sqrt{1+|z|^2}\,\varrho(z_n, z)$$

$\varrho(z_n, z) \to 0$ $(n \to +\infty)$ więc $|z_n - z| \to 0$ $(n \to +\infty)$

To kończy dowód.

Uwaga 3.49 Z twierdzenia 3.48 dostajemy informację, że topologia zadana przez $\varsigma | \mathbb{C}\times\mathbb{C}$ na $\mathbb{C}$ jest identyczna jak topologia naturalna $\mathbb{C}$. Warto zwrócić uwagę na otoczenia ∞ w $\hat{\mathbb{C}}$ postaci $K(\infty, r)$, $r>0$. Mamy

$$K(\infty,r) = \{z\in\hat{\mathbb{C}} : \varsigma(z,\infty) < r\} =$$

$$= \{\infty\} \cup \{z\in\mathbb{C} : \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}} < r\} =$$

$$= \{\infty\} \cup \{z\in\mathbb{C} : |z|^2 > \frac{1}{r^2} - 1\} =$$

$$= \begin{cases} \hat{\mathbb{C}}, \text{ gdy } r>1 \\ \{\infty\} \cup \{z\in\mathbb{C} : |z| > \sqrt{\frac{1}{r^2}-1}\} \text{ gdy } r\in(0,1] \end{cases}$$

Twierdzenie 3.50

Z: $\{z_n\}$ ciąg w $\hat{\mathbb{C}}$

T: $\{z_n\}$ ma punkt skupienia w $\hat{\mathbb{C}}$

D: Jeśli $\{z_n\}$ jest ograniczony w $\mathbb{C}$, to ma punkt skupienia w $\mathbb{C}$ na podstawie 3.46, który jest z 3.48 punktem skupienia w $\hat{\mathbb{C}}$.

Jeśli $\{z_n\}$ nie jest ograniczony w $\mathbb{C}$, to z 3.49 widzimy, że ∞ jest jego punktem skupienia, co kończy dowód twierdzenia.

Dygresja. Fakty 3.39 i 3.50 tutwo dają zupełność przestrzeni $\bar{\mathbb{R}}$ i $\hat{\mathbb{C}}$. Jednak sygnalizują one nam znacznie silniejszą własność – zwartość, którą zajmiemy się w dalszych częściach wykładu.

§5. Badanie zbieżności ciągów liczbowych.

1. Uwagi ogólne, Twierdzenie Banacha o punkcie stałym.

Badanie zbieżności ciągów i wyliczanie ich granic bywa skomplikowane. Wiele wykazanych do tej pory faktów może nam w tym pomóc, a w szczególności:

- własności działań algebraicznych na ciągach,
- fakty dotyczące zbieżności ciągów monotonicznych w $\mathbb{R}$,
- Twierdzenie Bolzano-Weierstrassa (3.28)
- sprawdzenie, czy ciąg spełnia warunek Cauchy'ego.

Przy ciągach liczbowych istotną rolę pełni zupełność rozpatrywanych ciał $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ jako przestrzeni metrycznych. Temat ten będzie towarzyszył nam przez całą Analizę. i warto w tym miejscu coś opowiedzieć o bardzo ciekawym fakcie, z elementarnym dowodem, opublikowanym w 1922 r. w pracy doktorskiej Stefana Banacha. Okazuje się, że wspomniana wyżej zupełność odgrywa w nim bardzo istotną rolę. Rozważania rozpoczniemy od następującej definicji.

Definicja 3.51 Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną oraz niech $f: X \longrightarrow X$. Odwzorowanie f nazywamy zwężającym (kontrakcją) wtedy i tylko wtedy gdy istnieje taka stała $\lambda \in [0,1)$, że

$$\forall x,y \in X : d(f(x), f(y)) \leqslant \lambda d(x,y).$$

Liczbę λ nazywamy współczynnikiem zwężania.

Dla odwzorowania $f: X \longrightarrow X$ oraz $x_0 \in X$ określamy ciąg $\{x_n\}$ punktów w X przyjmując $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \ldots, x_{n+1} = f(x_n)$ dla $n \in \mathbb{N}$. Taki ciąg możemy zresztą określić w dowolnym zbiorze X dla dowolnego odwzorowania $f: X \to X$. Przyjmując oznaczenie $f^{\langle 0 \rangle} = id_X$, $f^{\langle 1 \rangle} = f, \ldots,$ $f^{\langle n+1 \rangle} = f \circ f^{\langle n \rangle}$ dla $n \in \mathbb{N}$ możemy zapisać

$$x_n = f^{\langle n \rangle}(x_0) \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}$$

Często $f^{\langle n \rangle}$ nazywamy n-tą iteracją odwzorowania f.

Możemy teraz sformułować Twierdzenie Banacha.

TWIERDZENIE 3.52 (Banacha o punkcie stałym)

Z: (X,d) - przestrzeń metryczna zupełna.

$f: X \longrightarrow X$ odwzorowanie zwężające

T: (1) $\exists^{!}_{a} a \in X : f(a) = a$ (tak zwany punkt stały f),

(2) $\forall x_0 \in X : f^{\langle n \rangle}(x_0) \longrightarrow a \ (n \to +\infty)$.

D: Odwzorowanie f nie może mieć dwóch punktów stałych bo gdyby to były a_1 i a_2, to

$$d(f(a_1), f(a_2)) \leq \lambda\, d(a_1, a_2) \text{ gdzie } \lambda \in [0,1)$$

czyli $d(a_1, a_2) \leq \lambda\, d(a_1, a_2) < d(a_1, a_2)$.

Mamy więc pokazać istnienie punktu stałego oraz zbieżność z punktu (2). Zadania te wykonamy jednocześnie. Wybierzmy w tym celu dowolny punkt $x_0 \in X$ i określmy $x_n = f^{\langle n \rangle}(x_0)$. Teraz pokażemy, że $\{x_n\}$ jest zbieżny do pewnego punktu $a \in X$ oraz, że $f(a) = a$.

Pokazemy, że $\{x_n\}$ spełnia warunek Cauchy'ego
Ustalmy $n \in \mathbb{N}$ i zauważmy, że przy wsp. zwężenia λ,

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda d(x_n, x_{n-1}) \leq \ldots \leq \lambda^n d(x_1, x_0)$$

Biorąc więc $p, q \in \mathbb{N}$, $p \leq q$ dostajemy.

$$d(x_q, x_p) \leq d(x_q, x_{q-1}) + d(x_{q-1}, x_{q-2}) + \ldots + d(x_{p+1}, x_p)$$

Łącząc ostatnie nierówności mamy.

$$d(x_q, x_p) \leq \lambda^{q-1} d(x_1, x_0) + \ldots + \lambda^p d(x_1, x_0) =$$

$$= \lambda^p d(x_1, x_0) \cdot (\lambda^{q-p-1} + \ldots + 1) =$$

$$= \lambda^p d(x_1, x_0) \cdot \frac{1 - \lambda^{q-p}}{1 - \lambda} \leq$$

$$\leq \lambda^p \frac{d(x_1, x_0)}{1 - \lambda} = C \lambda^p$$

gdzie stała C nie zależy od wybranych $p, q \in \mathbb{N}$, $p \leq q$.
Zatem $\{x_n\}$ spełnia warunek Cauchy'ego, więc w przestrzeni metrycznej zupełnej (X, d) jest zbieżny do pewnego punktu $a \in X$. Przy tym z nierówności

$$d(f(x_n), f(a)) \leq \lambda d(x_n, a), \quad n \in \mathbb{N}$$

dostajemy $f(x_n) \to f(a)$ $(n \to +\infty)$.

Jeśli skorzystamy na koniec z równości

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

to w granicy dostajemy $a = f(a)$, czyli a jest punktem stałym f. To kończy dowód Twierdzenia Banacha.

Twierdzenie Banacha ma bardzo znaczące następstwa dla różnych gałęzi matematyki, skorzystamy też z tuli opracowanej metody w kolejnej części wykładu. Teraz przejdziemy do innych, klasycznych już kryteriów zbieżności ciągów.

2. Kryteria zbieżności ciągów liczbowych.

Twierdzenie 3.53

Z: $\{a_n\}$ ciąg w $\mathbb{K}$, $\{b_n\}$ ciąg w $\mathbb{R}$
$\forall n \in \mathbb{N}: |a_n| \leq b_n$
$b_n \to 0 \ (n \to +\infty)$

T: $a_n \to 0 \ (n \to +\infty)$

D: Mamy $0 \leq |a_n| \leq b_n$ dla $n \in \mathbb{N}$ zatem.
$|a_n| \to 0 \ (n \to +\infty)$ co daje $a_n \to 0 \ (n \to +\infty)$.

Twierdzenie 3.54

Z: $\{a_n\}, \{b_n\}$ ciąg w $\mathbb{K}$, $a, b \in \mathbb{K}$
$a_n \to a \ (n \to +\infty)$, $b_n \to b \ (n \to +\infty)$.

T: $\frac{1}{n+1}(a_0 b_n + a_1 \cdot b_{n-1} + \ldots + a_n b_0) \to ab \ (n \to +\infty)$

D: Określamy dla $n \in \mathbb{N}$

$c_n = \frac{1}{n+1}((a_0 b_n - ab) + \ldots + (a_n b_0 - ab))$

Pokażemy, że $c_n \to 0 \ (n \to +\infty)$,
skąd natychmiast wynika teza twierdzenia.

Ze względu na zbieżność wyjściowych ciągów, łatwo znaleźć stałą $M > 0$ taką, że dla $p, q \in \mathbb{N}$ mamy:

(1) $|a_p b_q - ab| \leq M(|a_p - a| + |b_q - b|)$,

(2) $|a_p b_q - ab| \leq M$.

Ustalmy $\varepsilon > 0$

Wybierzmy $N \in \mathbb{N}$ tak aby dla $p, q \geq N$

$$|a_p b_q - ab| < \varepsilon/2.$$

Weźmy $n \geqslant 2N$ mamy szacowanie.

$$|c_n| \leq \frac{1}{n+1}\left(|a_0 b_n - ab| + \dots + |a_n b_0 - ab|\right)$$

Dzielimy wyrazy w nawiasie na trzy grupy. zawierające N, $n+1-2N$, N kolejnych wyrazów, dostając:

$$|c_n| \leq \frac{1}{n+1}\left(2NM + ((n+1)-2N)\varepsilon/2\right) \leq$$

$$\leq \frac{2NM}{n+1} + \varepsilon/2$$

Stąd widzimy, że

$|c_n| < \varepsilon$ dla dostatecznie dużych n.

Zatem $|c_n| \to 0 \ (n \to +\infty)$ czyli $c_n \to 0 \ (n \to +\infty)$ skąd rozpisując dostajemy tezę.

Wniosek 3.55

Z: $\{a_n\}$ ciąg w $\mathbb{K}$, $a \in \mathbb{K}$, $a_n \to a$ $(n \to +\infty)$.

T: $\frac{1}{n+1}(a_0 + \ldots + a_n) \longrightarrow a$ $(n \to +\infty)$.

D: Wystarczy przyjąć $b_n = 1$ w Twierdzeniu 3.54 dla $n \in \mathbb{N}$.

Kolejne dwa kryteria pokazują swoją moc dopiero przy skrajnych ale też częściami się przydają.

Twierdzenie 3.56

Z: $\{a_n\}$ ciąg w $\mathbb{K}$

$\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ (granicę górną liczymy w $\overline{\mathbb{R}}$)

T: $a_n \to 0$ $(n \to +\infty)$.

D: Zgodnie z ustaleniami granice liczymy w $\overline{\mathbb{R}}$. Niech $\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \gamma \in [0,1)$. Wybierzmy $\Theta \in (\gamma, 1)$. Wtedy istnieje $N \in \mathbb{N}$, że dla $n \geq N$

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \Theta \quad \text{czyli} \quad |a_n| \leq \Theta^n \text{ dla } n \geq N$$

Wystarczy zatem pokazać, że $\Theta^n \to 0$ $(n \to +\infty)$. Oznaczając $c_n = \Theta^n$ dla $n \in \mathbb{N}$ widzimy, że $\{c_n\}$ to malejący ciąg liczb dodatnich. Musi mieć zatem granicę $g \geq 0$. Mamy także $c_{n+1} = \Theta \cdot c_n$ dla $n \in \mathbb{N}$, więc

$$g = \Theta \cdot g \quad \text{skąd} \quad g = 0.$$

Twierdzenie 3.57

Z: $\{a_n\}$ ciąg w $\mathbb{K}\setminus\{0\}$

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \quad \text{(granica górna w } \overline{\mathbb{R}}\text{)}$$

T: $a_n \longrightarrow 0 \ (n \longrightarrow +\infty)$

D: Niech $g = \limsup_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$

Ustalmy $\Theta \in \mathbb{R}$ tak aby $g < \Theta < 1$

Skoro $g < \Theta$, to

$$\exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N: \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \Theta$$

Zatem $|a_{n+1}| \leq \Theta |a_n|$ dla $n \geq N$ skąd wynika, że $\{|a_n|\}$ jest ograniczony z dołu i od pewnego miejsca malejący, więc zbieżny.

Niech $|a_n| \longrightarrow g \ (n \to +\infty)$ $g \in [0, +\infty)$

Korzystając z nierówności $|a_{n+1}| \leq \Theta |a_n|$, $n \geq N$ dostajemy w granicy $g \leq \Theta g$ czyli musi być $g = 0$. Dostajemy więc $a_n \longrightarrow 0 \ (n \to +\infty)$

Twierdzenie 3.58 (Stolza)

Z: $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ciągi w $\mathbb{R}$

$\{b_n\}$ jest silnie monotoniczny oraz $b_n \neq 0$ dla $n \in \mathbb{N}$

$\left(\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = 0\right)$ lub $\left(\lim_{n\to+\infty} |b_n| = +\infty\right)$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = g \in \overline{\mathbb{R}}$$

T: $$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = g$$

D: Bez straty ogólności możemy założyć, że ciąg $\{b_n\}$ jest silnie rosnący oraz, że $g \in [0, +\infty]$, gdyż w innych przypadkach możemy je sprowadzić zamieniając $\{b_n\}$ na $\{-b_n\}$ i ewentualnie. także $\{a_n\}$ na $\{-a_n\}$.

Na wstępie rozpatrujemy sytuację $g \in [0, +\infty)$.
Ustalmy $\varepsilon > 0$ i dobierzmy $N \in \mathbb{N}$, tak aby.

$$g - \varepsilon/2 < \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} < g + \varepsilon/2 \quad \text{dla } n \geq N$$

Wybierając $m > n$ i mnożąc nierówności przez mianownik dostajemy.

$$(g-\varepsilon/2)(b_{n+1}-b_n) < a_{n+1}-a_n < (g+\varepsilon/2)(b_{n+1}-b_n)$$
$$(g-\varepsilon/2)(b_{n+2}-b_{n+1}) < a_{n+2}-a_{n+1} < (g+\varepsilon/2)(b_{n+2}-b_n)$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$(g-\varepsilon/2)(b_m-b_{m-1}) < a_m-a_{m-1} < (g+\varepsilon/2)(b_m-b_{m-1})$$

Dodając te nierówności stronami dostajemy.

$$(g-\varepsilon/2)(b_m-b_n) < a_m-a_n < (g+\varepsilon/2)(b_m-b_n)$$

dla $m > n \geq N$

Skąd mamy

$$(*)\quad g - \varepsilon/2 < \frac{a_m - a_n}{b_m - b_n} < g + \varepsilon/2 \quad \text{dla } m > n \geq N$$

Jeśli teraz $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = 0$, to przechodząc w (*) z m do $+\infty$ w granicy dostajemy

$$g - \varepsilon < g - \varepsilon/2 \leq \frac{a_n}{b_n} \leq g + \varepsilon/2 < g + \varepsilon \quad \text{dla } n \geq N$$

co kończy dowód w tym przypadku.

Jeśli z kolei mamy $\lim_{n\to+\infty} |b_n| = +\infty$, czyli przy przyjętej metaryce dostajemy $b_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$, to (*) przekształcamy do postaci

$$g - \varepsilon/2 < \frac{\frac{a_m}{b_m}}{1 - \frac{b_n}{b_m}} < g + \varepsilon/2 \quad \text{dla } m > n \geq N$$

gdzie $b_n > 0$

Pokażemy, że dla dostatecznie dużych $m \geq N_1 > N$ zachodzi nierówność $\frac{a_m}{b_m} < g + \varepsilon$.

Faktycznie, mamy. dla dostatecznie dużych $m \in \mathbb{N}$,

$$\frac{a_m}{b_m} < (g + \varepsilon/2)\left(1 - \frac{b_N}{b_m}\right) + \frac{a_N}{b_m}$$

Aby więc została potrzebna nierówność wystarczy aby

$$(g + \varepsilon/2)\left(1 - \frac{b_N}{b_m}\right) + \frac{a_N}{b_m} < g + \varepsilon.$$

Lewa strona tej nierówności zmierza do $g + \varepsilon/2$ gdy $m \to +\infty$ więc takie N_1 istnieje. Analogicznie znajdujemy N_2 takie, że dla $m \geq N_2 > N$ dostajemy

$$g - \varepsilon < \frac{a_m}{b_m}$$

co daje w sumie

$$\left| \frac{a_m}{b_m} - g \right| < \varepsilon \quad \text{dla } m \geq \max\{N_1, N_2\}.$$

Przejdźmy teraz do przypadku $g = +\infty$. Wtedy dla dowolnego $C > 0$ znajdziemy $N \in \mathbb{N}$ takie, że.

$$2C < \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \quad \text{dla } n \geq N$$

Wybierając $m > n \geq N$ i przepuszczając sąsiednie nierówności podobnie jak poprzednio dostaniemy.

$$(**) \quad 2C < \frac{a_m - a_n}{b_m - b_n} \quad \text{dla } m > n \geq N$$

Jeśli więc mamy $\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = 0$, to przechodząc z m do $+\infty$, w granicy dostajemy.

$$C < 2C \leq \frac{a_n}{b_n} \quad \text{dla } n \geq N$$

To kończy dowód w pierwszym wariancie założeń.

Jeśli mamy $\lim_{n \to +\infty} b_n = +\infty$, to możemy przyjąć $b_n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$

Wtedy $$2C < \frac{\frac{a_m}{b_m} - \frac{a_n}{b_m}}{1 - \frac{b_n}{b_m}} \quad \text{dla } m > n \geq N$$

Czyli $$2C\left(1 - \frac{b_n}{b_m}\right) + \frac{a_n}{b_m} < \frac{a_m}{b_m} \quad \text{dla } m > n \geq N$$

Istnieje $N_1 \in \mathbb{N}$ takie, że dla $m \geq N_1 > N$

$$C < 2C\left(1 - \frac{b_N}{b_m}\right) + \frac{a_N}{b_m}$$

a wtedy. $C < \frac{a_m}{b_m}$ dla $m \geq N_1$, co kończy. dowodzenie wariantu $g = +\infty$ i dowód twierdzenia 3.58

Uwaga 3.59 Z 3.58 tutaj można dostać na przykład. uzyskany poprzednio 3.55 biorąc ciągi $\{a_0 + \ldots + a_n\}$ oraz $\{n+1\}$.

§6. Kluczowe przykłady zbieżnych ciągów liczbowych.

1. Ciąg $d_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ dla $n \geq 1$

Dookreślamy wyraz $d_0 = 1$ i dostajemy $d_1 = 2$, $d_2 = \frac{9}{4}, \ldots$
Pokażemy, że $\{d_n\}$ jest zbieżny do pewnej liczby $e \in [2,3]$ nazywanej stałą Nepera lub podstawą logarytmu naturalnego. Skorzystamy przy tym z klasycznego wzoru Newtona w którym, dla $a, b \in K$ i $n \in \mathbb{N}$, mamy:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

gdzie $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ dla $n, k \in \mathbb{N}$ takich, że $k \leq n$, przy czym $0! = 1$ i $p! = p \cdot (p-1)!$ dla $p \geq 1$.

Zauważmy, że dla $n \geq 1$ zachodzą równości

$$(*)\ d_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!\,n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 1}{n!\,n^n} =$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Stąd łatwo zauważyć, że $d_{n+1} > d_n$ dla $n \in \mathbb{N}$.
Widzimy również, że dla $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$d_n \leq \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} =$$

$$= 2 + \frac{1}{2}\,\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}} \leq 2 + 1 = 3$$

Dostajemy więc $2 \leq d_n \leq 3$ dla $n \geq 1$. Ponieważ $\{d_n\}$ jest rosnący, więc będzie zbieżny do pewnego $e \in [2,3]$.

Definicja 3.60 Symbolem e oznaczać będziemy liczbę rzeczywistą będącą granicą rozpatrywanego ciągu $\{d_n\}$

Przy nieco dokładniejszym przeliczeniu dostajemy.

$$e = 2{,}718281828\,4\ldots$$

2. Ciąg $s_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ dla $n \in \mathbb{N}$

Pokażemy, że $s_n \longrightarrow e$ $(n \longrightarrow +\infty)$.

Łatwo zauważyć, że nasz ciąg jest rosnący oraz z szacowania w poprzednim punkcie $d_n \leqslant s_n \leqslant 3$ dla $n \in \mathbb{N}$. Zatem istnieje $g \geqslant e$ takie, że

$$s_n \longrightarrow g \quad (n \longrightarrow +\infty)$$

Ustalmy następnie $k \geqslant 1$ i weźmy $n \geqslant k$.
Z równości (*) w p. 1 mamy.

$$d_n = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

Biorąc po prawej stronie tylko k składników dostajemy szacowanie.

$$d_n \geqslant \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

Przechodząc w tej nierówności z n do $+\infty$ dostajemy.

$$e \geqslant s_k \quad \text{dla} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Wnioskujemy zatem, że $g \leqslant e$ czyli

$$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!} \longrightarrow e \quad (n \longrightarrow +\infty)$$

3. Ciąg $a_n = \sqrt[n]{a}$, $a > 0$, $n \geq 1$

Możemy wstępnie dookreślić $a_0 = a$, dostając.
$a_0 = a$, $a_1 = a$, $a_2 = \sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$, ...
Pokażemy, że $a_n \to 1$ $(n \to +\infty)$.

Rozpatrzmy sytuację gdy $a > 1$. Wtedy
$a_n \in [1, +\infty)$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $\{a_n\}$ jest ciągiem malejącym ograniczonym z dołu przez 1.
Zatem istnieje $g \geq 1$ takie, że $a_n \to g$ $(n \to +\infty)$

Przypuśćmy, że $g > 1$. Wtedy $g = 1 + h$ gdzie $h > 0$
oraz mamy nierówność $a_n \geq g$ dla $n \in \mathbb{N}$.
Zatem dostajemy nierówność dla $n \in \mathbb{N}$

$$a = a_n^n \geq (1+h)^n \geq 1 + nh,$$

co daje sprzeczność, bo prawa strona nie jest ograniczona. Zatem $g = 1$

Jeśli $a \in (0,1)$, to $a^{-1} > 1$ a zatem

$$\sqrt[n]{a^{-1}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \to 1 \quad (n \to +\infty)$$

Czyli dostajemy

$$\sqrt[n]{a} = \left(\sqrt[n]{a^{-1}}\right)^{-1} \to 1 \quad (n \to +\infty).$$

W pozostałym przypadku $a = 1$ ciąg jest stały równy 1 więc granica jest też 1.

4. Ciąg $c_n = \sqrt[n]{n}$, dla $n \geq 1$

Dookreślając $c_0 = 1$ dostajemy ciąg.

$c_0 = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = \sqrt{2}$, $c_3 = \sqrt[3]{3}$, ...

Pokażemy, że $c_n \longrightarrow 1$ $(n \to +\infty)$.

Na podstawie punktu 1. tego paragrafu mamy nierówność

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq n \quad \text{dla } n \geq 3$$

Skąd dostajemy. $(n+1)^n \leq n^{n+1}$ czyli biorąc pierwiastek stopnia $n(n+1)$ mamy.

$$c_n = \sqrt[n]{n} \geq \sqrt[n+1]{n+1} = c_{n+1} \quad \text{dla } n \geq 3.$$

Zatem ciąg $\{c_n\}$ jest malejący i ograniczony z dołu przez liczbę 1. Zatem istnieje $c \in [1, +\infty)$. takie, że $c_n \longrightarrow c$ $(n \to +\infty)$. Przypuśćmy, że $c > 1$ czyli $c = 1 + h$ gdzie $h > 0$. Wtedy. mamy dla $n \geq 3$ $\sqrt[n]{n} \geq 1 + h$, czyli

$$n \geq (1+h)^n \geq 1 + nh + \binom{n}{2} h^2 \quad \text{dla } n \geq 3.$$

Taka nierówność nie jest możliwa gdyż po prawej stronie mamy n w kwadracie, więc $c = 1$, co kończy sprawdzenie.

5. Ciąg $b_n = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1}$, $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$

W tej sytuacji mamy proste przedstawienie.

$$b_n = \frac{1 - z^n}{1 - z} \quad \text{dla} \quad n \geq 1,$$

a zatem $b_n \longrightarrow \frac{1}{1-z}$ $(n \to +\infty)$

Przy tej okazji warto odnotować, że jeśli $|z| = 1$ to dla $z \neq 1$

$$b_n = 1 + z + \ldots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z} \quad n \in \mathbb{N}$$

dostajemy oszacowanie.

$$|b_n| \leq \left| \frac{1 - z^n}{1 - z} \right| \leq \frac{2}{|1 - z|} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

czyli dostajemy ciąg ograniczony.

§7. Uwagi o ciągach rekurencyjnych.

1. Uwagi wstępne

Pozostając zasadniczo w zakresie ciągów liczbowych, przyjmujemy następujące, intuicyjne określenie, które jest następnie precyzowane przy rozważaniu ciągów rekurencyjnych konkretnych typów

Ciąg nazywamy rekurencyjnym jeśli, poza pewną liczbą wyrazów początkowych, każdy wyraz zależy od wyrazów poprzedzających go zgodnie z pewną regułą.

Przykłady 3.61

(1) Ciąg arytmetyczny określamy ustalając $a, r \in \mathbb{K}$ i przyjmując $a_0 = a$, $a_{n+1} = a_n + r$ dla $n \in \mathbb{N}$.

(2) Ciąg geometryczny określamy ustalając $a, q \in \mathbb{K}$ i przyjmując $a_0 = a$, $a_{n+1} = a_n \cdot q$ dla $n \in \mathbb{N}$.

(3) Ciąg silni określamy przyjmując $0! = 1$, $n! = n \cdot (n-1)!$ dla $n \geq 1$.

(4) Ciąg Fibonacciego określa się przyjmując $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dla $n \geq 2$.

Podane wyżej przykłady spełniają warunku naszej intuicyjnej definicji. Są one zaliczane do grup już konkretnie określonych i badanych ciągów rekurencyjnych.

Uwagi 3.62

(1) Podobnie, ogólną definicję „rekurencji" można zbudować w wielu innych przypadkach, w różnych gałęziach matematyki i innych nauk.

(2) Mając zadany ciąg rekurencyjny zwykle zmierzamy do ustalenia ogólnego wzoru na jego n-ty wyraz. Jest to proste dla ciągu arytmetycznego, bo tutaj dostajemy $a_n = a + nr$, $n \in \mathbb{N}$ oraz geometrycznego $a_n = aq^n$, $n \in \mathbb{N}$. Czasami jednak to zadanie jest dość trudne i np. dla ciągu Fibonacciego dostajemy wzór $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, nazywany wzorem Eulera-Bineta.

(3) Zwykle podstawowym problemem jest wyliczenie, dla badanych ciągów rekurencyjnych ich granic.

4. Granice ciągów rekurencyjnych

Na wstępie zajmijmy się problemem wyliczenia granicy ciągu rekurencyjnego w sytuacji gdy jego wyrazy otrzymujemy przez iterację odwzorowania $f : \mathbb{K} \ni z \longrightarrow f(z) \in \mathbb{K}$, po ustaleniu $a_0 = a \in \mathbb{K}$ oraz przyjęciu $a_n = f^{\langle n \rangle}(a)$ dla $n \in \mathbb{N}$

Zwróćmy uwagę na sytuacje, które powstają dla odwzorowań: $f : \mathbb{K} \ni z \longrightarrow z + r \in \mathbb{K}$, $r \in \mathbb{K}$, $f : \mathbb{K} \ni z \longrightarrow qz \in \mathbb{K}$, $q \in \mathbb{K}$, które produkują nam w ten sposób ciągi arytmetyczne i geometryczne o wyrazie początkowym $a_0 = 0$ oraz różnicy r i ilorazie q.

Kongstając z tego, że jesteśmy blisko Twierdzenia Banacha o punkcie stałym, popatrzmy na kwestię zbieżności:

(1) Dla <u>ciągu arytmetycznego</u> odwzorowanie f jest translacją, nie będącą odwzorowaniem zwężającym. Jeśli $r=0$, to dostajemy ciąg zbieżny (stały). W przypadku $r\neq 0$ granic można szukać poza $X=\mathbb{K}$ w punktach nieskończonych $(-\infty, +\infty, \infty)$.

(2) Jeśli w <u>ciągu geometrycznym</u> mamy $|q|<1$, to $f:\mathbb{K}\ni z\to az\in\mathbb{K}$ jest zwężające i nie mamy kłopotów ze znalezieniem granic ciągów geometrycznych w tym przypadku. Zawsze to będzie punkt stały naszego odwzorowania $0\in\mathbb{K}$. Jeśli $|q|\geq 1$ mamy kłopoty ze stwierdzeniem zbieżności poza przypadkiem $q=1$ (ciąg stały).

Powyższe obserwacje możemy wykorzystać do badania granic o wiele ciekawszych ciągów przy odwzorowaniach postaci <u>$f:\mathbb{K}\ni z\to qz+r\in\mathbb{K}$</u> gdzie <u>$q,r\in\mathbb{K}$, $|q|<1$ oraz $r\neq 0$</u>. Startując zatem z punktu $a\in\mathbb{K}$ dostajemy całkiem ciekawy ciąg: $a_0=a$

$$a_1=aq+r$$
$$a_2=aq^2+rq+r$$
$$(*)\qquad a_3=aq^3+rq^2+rq+r$$
$$\ldots \quad \text{itd.}$$

Mamy zatem ciąg w którym w postaci (*) możemy wypisać wzór na a_n, oraz dysponujemy wyjściowym odwzorowaniem f dającym informację

$$(**) \quad a_0 = a, \quad a_{n+1} = a_n \cdot q + r \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Zauważmy, że dzięki Tw. Banacha możemy natychmiast stwierdzić, że skoro f jest odwzorowaniem zwężającym o współczynniku zwężania $|q| < 1$, to ciąg $\{a_n\}$ jest zawsze zbieżny, do jedynego punktu stałego odwzorowania f. Oznaczając ten punkt przez c mamy związek $c = cq + r$ skąd dostajemy

$$c = \frac{r}{1-q} !$$

Zauważmy, że punkt graniczny nie zależy od wybranego punktu początkowego, zgodnie z Twierdzeniem Banacha.

Jeśli jednak do stwierdzenia zbieżności nie będzie nam potrzebne Tw. Banacha, to wiedząc, że ciąg jest zbieżny, możemy wyliczyć granicę przechodząc w drugiej części (**) do granicy i dostając równość $g = gq + r$, skąd ponownie

$$g = \frac{r}{1-q}.$$

Oczywiście, Twierdzenie Banacha jest nie tylko znacznie ogólniejsze w zakresie odwzorowań, które nam tworzą ciąg rekurencyjny ale również możemy nim posługiwać w dowolnej przestrzeni metrycznej zupełnej. Warto o nim pamiętać!

3. Fraktale jako granice ciągów rekurencyjnych.

Rozważmy na wstępie rodzinę zbiorów

$$X = F([0,1]) = \{A \subset [0,1] : A\text{-domknięty}, A \neq \emptyset\}$$

W X możemy wprowadzić strukturę przestrzeni metrycznej określając na wstępie dla dowolnego zbioru $E \subset [0,1]$, $E \neq \emptyset$ oraz $x \in [0,1]$

$$dist(x,E) = \inf\{|x-y| : y \in E\}$$

oraz dla $A, B \in X$

$$h(A,B) = \sup_{x \in [0,1]} |dist(x,A) - dist(x,B)|.$$

Okazuje się, że (X,h) jest przestrzenią metryczną. I tak wprowadzona metryka nazywana jest zwykle metryką Hausdorffa w X. Można pokazać, że (X,h) jest przestrzenią metryczną zupełną!

Określmy dwa odwzorowania:

$$f_1 : [0,1] \ni x \to \frac{1}{3}x \in [0,1],$$
$$f_2 : [0,1] \ni x \to \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \in [0,1],$$

a następnie odwzorowanie

$$f : X \ni A \to f_1(A) \cup f_2(A) \in X$$

Okazuje się, że jest to odwzorowanie zwężające o współczynniku kontrakcji $1/3$, więc musi mieć punkt stały C, dla którego $f^{<n>}(A) \to C$ $(n \to +\infty)$ dla $A \in X$.

Obserwując zachowanie się ciągu $\{f^{<n>}([0,1])\}$, można zauważyć jego zbieżność do trójkowego zbioru Cantora.

W podobny sposób można otworzyć inne ciekawe obiekty zwane zwykle „fraktalami" takie jak:
- pył Cantora,
- trójkąt Sierpińskiego,
- dywan Sierpińskiego,
- piramida Sierpińskiego.

Uwaga 3.62. Wszystkie podane przed chwilą fakty warto sprawdzić jako (dość) trudne ćwiczenie. Na tym etapie odgrywają one rolę ilustracji wagi Twierdzenia Banacha o punkcie stałym. Spotkamy się z nimi, w doktorskiej wersji, w kolejnych częściach AM.

Rozdział 4. Szeregi liczbowe

§1. Zbieżność szeregów.

1. Podstawowe pojęcia.

Niech $\{x_n\}$ będzie ciągiem w $\mathbb{K}$.

Definicja 4.1 Szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ jest to para ciągów $(\{x_n\}, \{s_n\})$ gdzie $s_n = x_0 + \dots + x_n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Ciąg $\{x_n\}$ nazywamy ciągiem wyrazów szeregu zaś $\{s_n\}$ ciągiem jego sum częściowych.

Definicja 4.2 Mówimy, że szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ jest zbieżny do $s \in \mathbb{K}$ jeśli $s_n \longrightarrow s$ $(n \to +\infty)$. Mówimy, że szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ jest zbieżny jeśli jest zbieżny do pewnego $s \in \mathbb{K}$. Liczbę s nazywamy dalej sumą tego szeregu oraz oznaczamy przez $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$.

Uwagi 4.3

1. Szeregi w przestrzeniach rozważać będziemy w ogólniejszej sytuacji. Potrzebne jest sumowanie czyli struktura przestrzeni wektorowej i topologia dla zbieżności. Dobre są z tego względu przestrzenie unormowane.
2. Jeśli koniecznie jest zmienić zakres sumowania to przyjmujemy $\sum_{n=N}^{+\infty} x_n := \sum_{n=0}^{+\infty} x_{N+n}$ dla $N \in \mathbb{N}$

Twierdzenie 4.4 (warunek konieczny zbieżności szeregu).
Z: $\{x_n\}$ ciąg w $\mathbb{K}$, szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ jest zbieżny.
T: $x_n \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow +\infty)$

D: $s_n \longrightarrow s \quad (n \longrightarrow +\infty)$.

$$\tilde{s}_n := \begin{cases} 0, & n = 0, \\ s_{n-1}, & n \geq 1. \end{cases}$$

Wtedy $\tilde{s}_n \longrightarrow s \quad (n \longrightarrow +\infty)$

Zatem $s_n - \tilde{s}_n = x_n \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow +\infty)$

Przykłady 4.5

1) $a_n = aq^n$, $n \in \mathbb{N}$, $a, q \in \mathbb{K}$

Mamy tak zwany szereg geometryczny spełniający warunek konieczny gdy $|q| < 1$.

$$s_n = a(1 + \ldots + q^n) = a\frac{1-q^{n+1}}{1-q},$$

więc $s_n \longrightarrow \frac{a}{1-q} \quad (n \longrightarrow +\infty)$ czyli

$$\sum_{n=0}^{+\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}$$

2) $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$

Szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ nie spełnia warunku koniecznego i jego ciąg $\{s_n\}$ ma dwa punkty skupienia.

4-03

3) $x_n = \frac{1}{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$

Dostajemy szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$ lub. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ zwany dalej harmonicznym.

$$S_{2^n-1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n}}$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \dots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n}$$

$$= 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{x_n} \geq \frac{n}{2}$$

Zatem $S_n \longrightarrow +\infty$ $(n \to +\infty)$ w $\overline{\mathbb{R}}$

4) $x_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ $n \in \mathbb{N}$ $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\right)$

$S_n \leq 2$ dla $n \in \mathbb{N}$ (ćw.) szacowanie podobne jak w 3).

Zatem $\{S_n\}$ rosnący i ograniczony zbieżny

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \dots \left(= \frac{\pi^2}{6}\right)$ ale nie mamy dobrych narzędzi do takich przekleństw

5) $x_n = \frac{1}{n!}$ dla $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \frac{1}{0!} + \dots + \frac{1}{n!} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}$$

$S_n \longrightarrow e$ $(n \to +\infty)$

Zatem $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$

4-04

6) $x_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ (szereg anyharmoniczny).

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Dla $n \geq 1$ mamy więc

$$S_{2n-1} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) =$$

$$= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(2n-1)2n} \leq$$

$$\leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} \quad \text{więc zbieżny.}$$

$S_{2n} = S_{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \to g$ ($n \to +\infty$) do pewnego g.

Łatwo zauważyć, że $S_n \to g$ ($n \to +\infty$).

czyli szereg anyharmoniczny jest zbieżny.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = (\ln 2),$$

ale znów buduje nam pojęć i nawyków.

Kiedyś to policzymy.

2. Własności szeregów zbieżnych.

Łączność sumy szeregu.

Niech będzie dany szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ w $\mathbb{K}$.
Wybierzmy silnie rosnący ciąg.

$$0 = k_0 < k_1 < \dots$$

Określamy: $y_n = \sum_{j=k_n}^{k_{n+1}-1} x_j$.

otrzymując w ten sposób ciąg $\{y_n\}$ w $\mathbb{K}$.

Twierdzenie 4.6

Z: Szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ jest zbieżny

T: (1) Szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ jest zbieżny;

(2) $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$.

D: $\tilde{S}_n = y_0 + \dots + y_n = S_{k_{n+1}-1}$.

Sumy cześciowe $\{\tilde{S}_n\}$ jest podciągiem $\{S_n\}$
więc dostajemy tezę.

Twierdzenie 4.7

Z: Szeregi $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ w $\mathbb{K}$ są zbieżne, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

T: (1) Szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha x_n + \beta y_n)$ jest zbieżny,

(2) $\sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\right) + \beta \left(\sum_{n=0}^{+\infty} y_n\right)$.

D: Oczywiste ćwiczenie.

Twierdzenie 4.8

Z: $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ ciąg w $\mathbb{K}$.
$\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : x_n = y_n$.

T: Następujące warunki są równoważne:
(1) szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ jest zbieżny,
(2) szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ jest zbieżny.

D: $S_n = x_0 + \dots + x_n$, $\tilde{S}_n = y_0 + \dots + y_n$, $n \in \mathbb{N}$
Dla $n \geq N$
$$\tilde{S}_n - S_n = \sum_{k=0}^{N-1} (y_k - x_k) = C \text{ - stała},$$
co kończy dowód.

3. Warunek Cauchy'ego dla szeregów.

$\{x_n\}$ ciąg w $\mathbb{K}$.

Definicja 4.9 Mówimy, że szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ spełnia warunek Cauchy'ego jeśli:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall p, q \geq N : (p < q) \Rightarrow (|x_{p+1} + \dots + x_q| < \varepsilon).$$

Uwaga 4.10 Łatwo zauważyć, że
$$|x_{p+1} + \dots + x_q| = |S_q - S_p|$$
gdzie $\{S_n\}$ jest ciągiem sum częściowych szeregu $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$. Zatem szereg spełnia warunek Cauchy'ego jeśli jego ciąg sum częściowych jest ciągiem Cauchy'ego.

Twierdzenie 4.11

Z: $\{x_n\}$ ciąg w $\mathbb{K}$.

T: Następujące warunki są równoważne:

(1) szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ jest zbieżny.

(2) szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ spełnia warunek Cauchy'ego

D: (1) $\Rightarrow$ (2) oczywiste

(2) $\Rightarrow$ (1) Ciąg $\{s_n\}$ spełnia warunek Cauchy'ego więc jest ograniczony w $\mathbb{K}$. Takie ciągi w $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ mają podciąg zbieżny. Skoro $\{s_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego więc jest zbieżny.

§2. Szeregi bezwzględnie zbieżne i warunkowo zbieżne.

1. Bezwzględna zbieżność

$\{x_n\}$ ciąg w $\mathbb{K}$.

Definicja 4.12 Szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ nazywamy bezwzględnie zbieżnym jeśli szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$ jest zbieżny

Twierdzenie 4.13

Z: $\{x_n\}$ ciąg w $\mathbb{K}$, szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ jest bezwzgl. zb.

T: (1) Szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ jest zbieżny,

(2) $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$

D: (1) Wybierzmy $\varepsilon > 0$. Istnieje $N \in \mathbb{N}$ t.że dla $N \leq p < q$ mamy. $|x_{p+1}| + \dots + |x_q| < \varepsilon$, de stąd. $|x_{p+1} + \dots + x_q| < \varepsilon$ zatem. szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ spełnia warunek Cauchy'ego. więc jest zbieżny

(2). Dla $N \in \mathbb{N}$ mamy.

$$\left|\sum_{n=0}^{N} x_n\right| \leq \sum_{n=0}^{N} |x_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$$

skąd teza.

2. Kryteria bezwzględnej zbieżności szeregów.

Twierdzenie 4.14 (kryterium porównawcze).

Z: $\{x_n\}$ ciąg w $\mathbb{K}$, $\{y_n\}$ ciąg w $\mathbb{R}$.
$\forall n \in \mathbb{N}: |x_n| \leq y_n$., szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ jest zbieżny

T: Szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ jest bezwzględnie zbieżny.

D: $\sum_{n=0}^{m} |x_n| \leq \sum_{n=0}^{m} y_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} y_n \in \mathbb{R}$

Ciąg sum częściowych szeregu $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$ jest rosnący i ograniczony więc musi być zbieżny.

Twierdzenie 4.15 (Kryterium Cauchy'ego).

Z: $\{x_n\}$ - ciąg w $\mathbb{K}$,

$\alpha = \limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|x_n|}$

T: (1) $(\alpha < 1) \Rightarrow$ (szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ jest bezwzgl. zb.).

(2) $(\alpha > 1) \Rightarrow$ (szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ nie jest zb.).

D: (1) Niech $\Theta \in (\alpha, 1)$ wtedy

$\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N: \sqrt[n]{|x_n|} \leq \Theta$

Zatem istnieje $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ t. że.

$|x_n| \leq M\Theta^n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Teza wynika z kryterium porównawczego.

(2) Łatwo zauważyć, że w $\{|x_n|\}$ mamy nieskończenie wiele wyrazów większych od 1 więc nie jest spełniony warunek konieczny

Twierdzenie 4.16 (Kryterium d'Alembeuta).

Z: $\{x_n\}$ ciąg w $\mathbb{K} \setminus \{0\}$

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} < 1.$$

T: Szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ jest bezwzględnie zbieżny.

D:

$\beta := \limsup_{n \to +\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} < 1$, $\Theta \in (\beta, 1)$.

$\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N: \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} < \Theta$

Zatem $|x_{N+1}| \leq \Theta |x_N|$ itd. więc.

$|x_n| \leq |x_N| \Theta^{n-N}$ dla $n \in \mathbb{N}$

$|x_n| \leq \left(\frac{|x_N|}{\Theta^N}\right) \Theta^n$ dla $n \geq N$ więc ist. $M > 0$

takie, że $|x_n| \leq M\Theta^n$ dla $n \in \mathbb{N}$ i kryt. pod. kończy dowód.

Przykłady 4.17

(1) Niech $z \in \mathbb{K}$, szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ jest bezwzględnie zbieżny.

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{|z|}{n+1} \longrightarrow 0 \quad (n \to +\infty).$$

(2) Szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$ jest bezwzględnie zbieżny.

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{(n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} \longrightarrow \frac{1}{e} < 1 \quad (n \to +\infty)$$

3. Tasowanie szeregów bezwzględnie zbieżnych.

Twierdzenie 4.18 (o tasowaniu).

Z: $\{x_n\}$ ciąg w $\mathbb{K}$

szereg $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' x_n$ jest bezwzględnie zbieżny.

$\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ bijekcja.

T: (1) szereg $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' x_{\varphi(n)}$ jest bezw. zbieżny

(2) $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' x_{\varphi(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty}{}' x_n$

D: Dowodzimy równocześnie obydwie punkty tezy przy czym (chwilowo) zbieżność w (1).

Niech $s = \sum_{n=0}^{+\infty}{}' x_n$.

$$\left|s - \sum_{n=0}^{k}{}' x_{\varphi(n)}\right| \leq \left|s - \sum_{n=0}^{m}{}' x_n\right| + \left|\sum_{n=0}^{m}{}' x_n - \sum_{n=0}^{k}{}' x_{\varphi(n)}\right|$$

dla dowolnych $k, m \in \mathbb{N}$

Ustalmy $\varepsilon > 0$

(*) $\exists N_1 \in \mathbb{N} : (N_1 \leq p < q) \Rightarrow (|x_{p+1}| + \dots + |x_q| < \varepsilon/2)$

$\exists N_2 \in \mathbb{N} \; \forall m \geq N_2 : \; |s - \sum_{n=0}^{m}{}' x_n| < \varepsilon/2.$

Ustalmy $m = \max\{N_1, N_2\}$ wtedy z wyjściowej nierówności:

$$|s - \sum_{n=0}^{k}{}' x_{\varphi(n)}| \leq \varepsilon/2 + |\sum_{n=0}^{m}{}' x_n - \sum_{n=0}^{k}{}' x_{\varphi(n)}|$$

dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$

Musimy pokazać, że da się tak dobrać $N \in \mathbb{N}$, że dla $k \geq N$ mamy

$$|\sum_{n=0}^{m}{}' x_n - \sum_{n=0}^{k}{}' x_{\varphi(n)}| < \varepsilon/2.$$

Z (*) wiemy, że skończone sumy wyrazy pierwszej dostatecznie wytecznie (pod modułem) wyrazy o wskaźnikach wyższych od m, więc dostajemy wtedy potrzebną nierówność. Musimy tak więc dobrać N aby wszystkie wyrazy $x_0, \dots, x_m$ znalazły się wśród $x_{\varphi(0)}, \dots, x_{\varphi(N)}$, czyli

$$\varphi(\{0, \dots, N\}) \supset \{0, \dots, m\}, \text{ innymi}$$
$$\{0, \dots, N\} \supset \varphi^{-1}(\{0, \dots, m\}), \text{ czyli}$$

wystarczy przyjąć $N = \max \varphi^{-1}(\{0, \dots, m\})$

(2) Wystarczy zastosować wykazany (2) dla szeregu $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' |x_n|$, dostajemy zbieżność $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' |x_{\varphi(n)}|$ co kończy dowód.

4. Szeregi warunkowo zbieżne

$\{x_n\}$ ciąg w $\mathbb{K}$.

Definicja 4.19 Szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ nazywamy warunkowo zbieżnym, jeśli jest zbieżny, ale nie jest bezwzględnie zbieżny.

Przykład 4.20 Szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ jest zbieżny zaś ciąg jego modułów już nie.

Twierdzenie 4.21 (Riemanna).

Z: $\{x_n\}$ ciąg w $\mathbb{R}$, szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ jest warunkowo zbieżny, $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$, $\alpha \leq \beta$

T: Istnieje $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekcja taka, że dla ciągu sum częściowych $\{\tilde{s}_n\}$ szeregu $\sum_{n=0}^{+\infty} x_{\varphi(n)}$ mamy:

$$\liminf_{n \to +\infty} \tilde{s}_n = \alpha, \quad \limsup_{n \to +\infty} \tilde{s}_n = \beta.$$

D: Łatwo zauważyć, że w wyjściowym ciągu, dzieląc go na wyrazy nieujemne i ujemne, dostajemy dwa szeregi o wyrazach stałego znaku rozbieżne, ale spełniające warunek konieczny. Dysponując takimi dwoma szeregami łatwo już skonstruować φ. (Ćw.).

Twierdzenie 4.22 (Riemanna o przestawianiu sumy)

Z: $\{x_n\}$ ciąg w $\mathbb{R}$, szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ jest war. zbieżny, $s \in \mathbb{R}$

T: Istnieje $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekcja taka, że:

(1) szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} x_{\varphi(n)}$ jest zbieżny,

(2) $\sum_{n=0}^{+\infty} x_{\varphi(n)} = s$.

D: Oczywiste z 4.21.

Uwaga 4.23. Trudna budowa odpowiednika 4.21 i 4.22 w $\mathbb{C}$ - sytuacja jest znacznie bardziej skomplikowana o czym świadczy następne przedstawione twierdzenie.

Twierdzenie 4.24

Z: $\{z_n\}$ ciąg w $\mathbb{C}$, szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ jest war. zbieżny.

T: Istnieje l - niezmiennik prosta afiniczna w $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ taka, że dla dowolnego $w \in l$ istnieje $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekcja; dla której:

(1) szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} z_{\varphi(n)}$ jest zbieżny,

(2) $\sum_{n=0}^{+\infty} z_{\varphi(n)} = w$.

D: Ćwiczenie *** (nieobowiązkowe).

§3. Iloczyny szeregów liczbowych.

1. Iloczyn Hadamarda szeregów liczbowych.

Mając dane szeregi $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' a_n$, $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' b_n$ o wyrazach w $\mathbb{K}$ zajmiemy się szeregiem

$$\sum_{n=0}^{+\infty}{}' a_n \cdot b_n$$

zwanym iloczynem Hadamarda, badając jego zbieżność. Podstawę dalszych dociekań jest

Przekształcenie Abela

Określmy $B_m = \sum_{n=0}^{m}{}' b_n$, $B_{-1} := 0$, $m \geq 1$.

$$\sum_{n=0}^{m}{}' a_n b_n = \sum_{n=0}^{m}{}' a_n (B_n - B_{n-1}) =$$

$$= \sum_{n=0}^{m}{}' a_n B_n - \sum_{n=0}^{m}{}' a_n B_{n-1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{m}{}' a_n B_n - \sum_{n=1}^{m}{}' a_n B_{n-1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{m}{}' a_n B_n - \sum_{n=0}^{m-1}{}' a_{n+1} B_n =$$

$$= \sum_{n=0}^{m-1}{}' (a_n - a_{n+1}) B_n + a_m B_m$$

Otrzymujemy zatem dla $m \geq 1$ równość:

$$\sum_{n=0}^{m}{}' a_n b_n = \sum_{n=0}^{m-1}{}' (a_n - a_{n+1}) B_n + a_m \cdot B_m$$

Twierdzenie 4.24.

Z: $\{a_n\}$ - ciąg monotoniczny i ograniczony w $\mathbb{R}$.
$\{b_n\}$ - ciąg w $\mathbb{K}$ taki, że $\{B_n\}$ jest ograniczony.

T: Szereg $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' (a_n - a_{n+1}) B_n$ jest bezwzględnie zbieżny.

D: $\sum_{n=0}^{m-1}{}' |a_n - a_{n+1}||B_n| \leq \sum_{n=0}^{m-1}{}' |a_n - a_{n+1}| M = \dots$

gdzie $|B_n| \leq M$ dla $n \in \mathbb{N}$

$\dots = |(a_0 - a_1) + \dots + (a_{m-1} - a_m)| M = |a_0 - a_m| M$

co jest ograniczone i dostajemy tezę.

Twierdzenie 4.25 (Kryt. Dirichleta).

Z: $\{a_n\}$ monotoniczny w $\mathbb{R}$, $a_n \to 0$ $(n \to +\infty)$.
$\{b_n\}$ ciąg w $\mathbb{K}$, szereg $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' b_n$ ma ograniczony ciąg sum częściowych.

T: Szereg $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' a_n b_n$ jest zbieżny

D: Z 4.24 ciąg $\sum_{n=0}^{m-1}{}' (a_n - a_{n+1}) B_n$ jest zbieżny.
Jednocześnie $a_m B_m \to 0$ $(m \to +\infty)$,
zatem z przekształcenia Abela ciąg

$\left\{ \sum_{n=0}^{m}{}' a_n b_n \right\}$ jest zbieżny

co daje tezę.

Twierdzenie 4.26 (Kryterium Abela).

Z: $\{a_n\}$ ciąg w $\mathbb{R}$ monotoniczny i ograniczony.
$\{b_n\}$ ciąg w $\mathbb{K}$ taki, że szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ jest zb.

T: Szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ jest zbieżny.

D: Ciąg $\sum_{n=0}^{m-1} (a_n - a_{n+1}) B_n$ jest zbieżny podobnie.
$\{a_m B_m\}$ więc przekształcenie Abela daje też

Twierdzenie 4.27 (Kryterium Leibniza)

Z: $\{a_n\}$ ciąg w $\mathbb{R}$, $a_0 \geq a_1 \geq \dots$, $a_n \to 0$ $(n \to +\infty)$

T: Szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ jest zbieżny.

D: Stosujemy 4.25 dla $b_n = (-1)^n$ dostając tezę.

Przykład 4.28 Zajmiemy się szeregiem

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n+1}, \quad z \in \mathbb{C}$$

Dla $|z| < 1$ mamy bezwzględną zbieżność zaś dla $|z| > 1$ nie jest spełniony warunek konieczny. Pozostały sytuacje gdy $|z| = 1$.

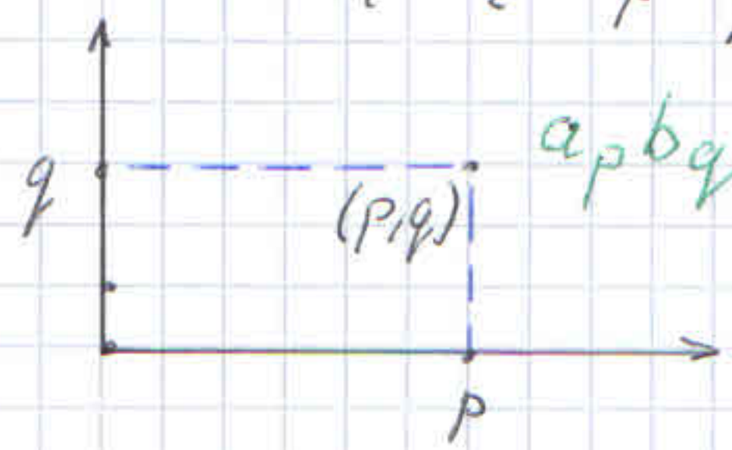
Dla $z = 1$ dostajemy szereg harmoniczny, który nie jest zbieżny, weźmy dalej $z \neq 1$.
(widzimy, że dla $z = -1$ Kryt. L. daje zbieżność).
Wtedy przyjmując $b_n = z^n$, $n \in \mathbb{N}$

$$|B_n| = |1 + \dots + z^n| = \left|\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}\right| \leq \frac{2}{|1 - z|}$$

dostajemy możliwość skorzystania z kryterium Dirichleta. — dostajemy zbieżność

2. Iloczyn szeregów liczbowych

Jeśli $a_n, b_n \in \mathbb{K}$ dla $n \in \mathbb{N}$, to stwarzamy się wymnożyć szeregi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ mnożąc wszystkie pary wyrazów i następnie sumując uzyskaną rodzinę przeliczalną $\{a_p \cdot b_q : p, q \in \mathbb{N}\}$



Aby przeprowadzić takie sumowanie można skorzystać z bijekcji

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : \mathbb{N} \ni n \longrightarrow (\varphi_1(n), \varphi_2(n)) \in \mathbb{N}^2,$$

dla której będziemy badać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\varphi_1(n)} b_{\varphi_2(n)}.$$

Zauważmy, że tutaj dostajemy następujące

Twierdzenie 4.29

Z: $\{a_n\}, \{b_n\}_{+\infty}$ ciągi w $\mathbb{K}$, szeregi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ są bezwzględnie zbieżne $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^2$ bijekcja.

T: Szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\varphi_1(n)} \cdot b_{\varphi_2(n)}$ jest bezwzględnie zb.

D: Dla $m \in \mathbb{N}$ istnieją $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ takie, że.

$$\sum_{n=0}^{m} |a_{\varphi_1(n)} \cdot b_{\varphi_2(n)}| \leq \left(\sum_{n=0}^{m_1} |a_n|\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{m_2} |b_n|\right) \leq$$

$$\leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n|\right)$$ co tutaj kończy dowód.

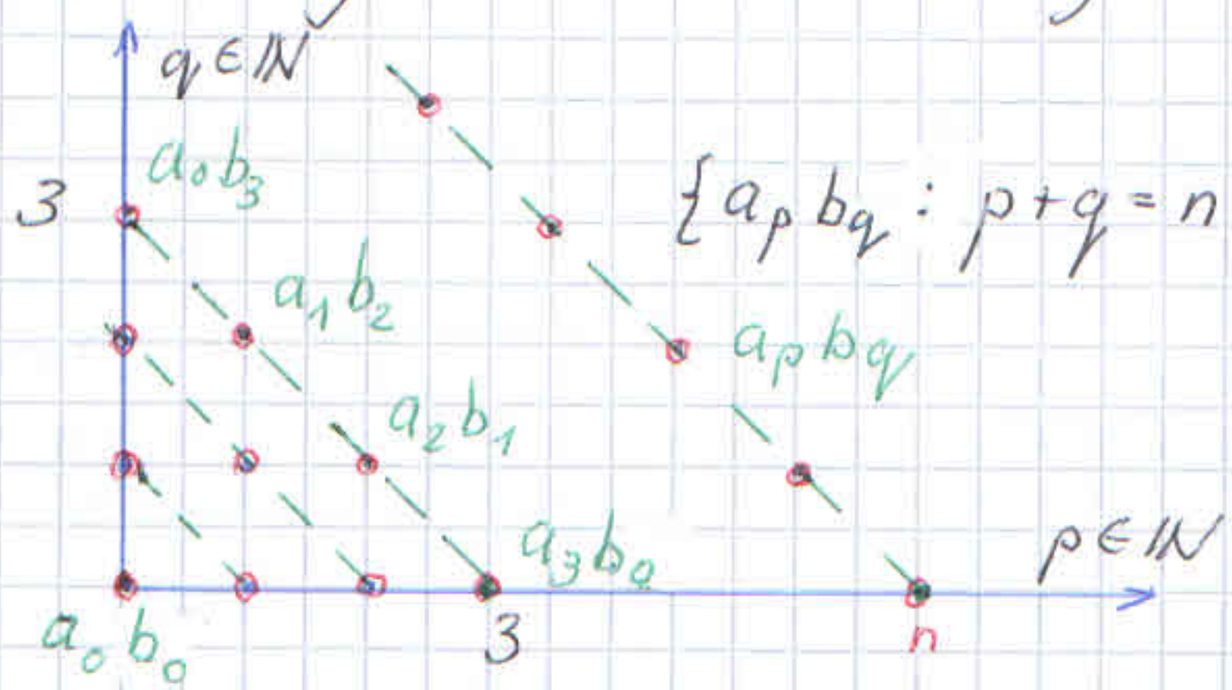
Uwaga 4.30. W sytuacji 4.29 pokażemy, że.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\varphi_1(n)} \cdot b_{\varphi_2(n)} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$

Aby uporządkować procedurę mnożenia szeregów. iloczyny par ich wyrazów traktujemy w specjalne grupy skończone i sumujemy tworząc szereg o wyrazach.

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 \text{ dla } n \in \mathbb{N}$$

Następnie badamy zbieżność szeregu $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$.



Czasami ograniczając się do liczb $p, q \in \mathbb{N}$ stosujemy zapis $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$, $n \in \mathbb{N}$

Jeśli w tej sytuacji rozpatrujemy bijekcję $f: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ z Lematu 2.20 oraz $\varphi = f^{-1}$, to szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ dostaniemy stosując do szeregu $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\varphi_1(n)} b_{\varphi_2(n)}$ procedurę tożsamą z §1 p. 2, w której wybieramy do kolejnych grup 1, 2, 3, ... itd. kolejnych wyrazów rozpatrywanego szeregu.

Utworzony w podany wyżej sposób szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ nazywamy iloczynem wyjściowych szeregów

4-19.

Dla wyjściowych szeregów $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ oraz ich iloczynu $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ wprowadzimy oznaczenie sum częściowych: $A_n = a_0 + \ldots + a_n$,

$B_n = b_0 + \ldots + b_n$,

$C_n = c_0 + \ldots + c_n$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Przy ich zbieżności sumy będziemy oznaczać: A, B i C.

Twierdzenie 4.31

Z: Szeregi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ są zbieżne do odpowiednio $A, B \in \mathbb{K}$

T: $\frac{1}{n+1}(C_0 + C_1 + \ldots + C_n) \longrightarrow A \cdot B \quad (n \to +\infty)$

D: Mamy:

$c_0 = a_0 \cdot b_0$

$c_1 = a_0 \cdot b_1 + a_1 b_0$

$\vdots$

$c_n = a_0 \cdot b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$

Stąd dostajemy sumując:

$C_n = a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \ldots + a_n B_0$ dla $n \in \mathbb{N}$

Zatem:

$C_0 = a_0 \cdot B_0 = a_0 B_0$

$C_1 = a_0 B_1 + a_1 B_0 = a_1 B_0 + a_0 B_1$

$\vdots$

$C_n = a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \ldots + a_n B_0 = a_n B_0 + a_{n-1} B_1 + \ldots + a_0 B_n$

Sumując dostajemy dla $n \in \mathbb{N}$

$C_0 + C_1 + \ldots + C_n = A_n B_0 + A_{n-1} B_1 + \ldots + A_0 B_n$

Skoro jednak wiemy, że $A_n \to A \ (n \to +\infty)$, $B_n \to B \ (n \to +\infty)$ to z 3.54

$\frac{1}{n+1}(C_0 + C_1 + \ldots + C_n) \longrightarrow A \cdot B \ (n \to +\infty)$

Twierdzenie 4.32 (Abela)

Z: $\{a_n\}, \{b_n\}$ ciągi w $\mathbb{K}$
Szeregi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n, \sum_{n=0}^{+\infty} b_n, \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ są zbieżne do odpowiednio A, B, C.

T: $C = A \cdot B$

D: Jeśli $c_n \to C \ (n \to +\infty)$ to wiemy, że:

$$\frac{1}{n+1}(c_0 + \ldots + c_n) \to C \ (n \to +\infty).$$

Zatem, na podstawie 4.31 dostajemy.

$$C = A \cdot B$$

Twierdzenie 4.33

Z: $\{a_n\}, \{b_n\}$ ciągi w $\mathbb{K}$
Szeregi: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n, \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ są bezwzględnie zbieżne oraz mają sumy A, B

T: Szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ jest bezwzględnie zbieżny oraz mamy równość $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = A \cdot B$.

D: Bezwzględna zbieżność wynika z 4.29 po zauważeniu, że procedura łączenia szeregów daje z szeregów bezwzględnie zbieżnych szeregi bezwzględnie zbieżne. Równość $C = A \cdot B$ dostajemy natychmiast z 4.32

Warto zauważyć, że zachodzi nierówność $\sum_{n=0}^{m} |c_n| \leq \left(\sum_{n=0}^{m} |a_n|\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{m} |b_n|\right)$, która też daje bezwzględną zbieżność szeregu $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$.

Twierdzenie 4.34 (Mertensa).

Z: $\{a_n\}, \{b_n\}$ ciągi w $\mathbb{K}$
szeregi $\sum_{n=0}^{+\infty}$, a_n jest bezwzględnie zbieżny
i jego suma wynosi A
szeregi $\sum_{n=0}^{+\infty}$, b_n jest zbieżny i jego suma wyn. B.

T: Szeregi $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ jest zbieżny i jego suma to $A \cdot B$.

D: Z poprzedniego w dowodzie 4.31 mamy.

$$C_n = a_0 \cdot B_n + a_1 \cdot B_{n-1} + \dots + a_n \cdot B_0$$
$$A_n = a_0 + \dots + a_n$$

Stąd

$$C_n - A_n \cdot B = a_0(B_n - B) + \dots + a_n(B_0 - B).$$

Weźmy $N \in \mathbb{N}$ i $n \geq N$ wtedy.

$$|C_n - A_n B| \leq (|a_0||B_n - B| + \dots + |a_N||B_{n-N} - B|) + (|a_{N+1}||B_{n-(N+1)} - B| + \dots + |a_n||B_0 - B|)$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$ i wybierzmy $N \in \mathbb{N}$ tak.
aby druga część powyższej sumy była.
mniejsza od $\varepsilon/2$ dla wszelkich $n \geq N$

Wtedy

$$|C_n - A_n B| \leq |a_0||B_n - B| + \dots + |a_N||B_{n-N} - B| + \varepsilon/2$$

Lecz przy tak ustalonym N mamy równość
$B_n \to B$ $(n \to +\infty)$ stąd istnieje $\tilde{N} \geq N$ tak aby.
dla $n \geq \tilde{N}$ było $|C_n - A_n B| < \varepsilon$ co tutaj daje tezę.

§4. Zbieżność szeregów nieujemnych.

1. Twierdzenie o trzech szeregach.

Twierdzenie 4.35

Z: $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ – ciągi w $\mathbb{R}$.
$\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq b_n \leq c_n$
Szeregi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ są zbieżne.

T: Szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ jest zbieżny.

D: Mamy $0 \leq b_n - a_n \leq c_n - a_n$
Szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} (c_n - a_n)$ jest zbieżny więc równie bezwzględnie zbieżny. Zatem szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} (b_n - a_n)$ jest zbieżny.
Dodając do niego szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ dostajemy tezę.

2. Kryterium kondensacyjne.

Twierdzenie 4.36 (Kryterium kondensacyjne I.)

Z: $\{a_n\}$ – malejący ciąg liczb nieujemnych.

T: Następujące warunki są równoważne:

(1) szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny,

(2) szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$ jest zbieżny.

D: (1) => (2).

$$a_0 + \dots + a_{2^n} =$$

$$= a_0 + a_1 + a_2 + \underbrace{a_3 + a_4}_{} + \underbrace{a_5 + \dots + a_8}_{} + \dots + \underbrace{\quad\quad}_{} a_{2^n}.$$

$$\geq a_0 + a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \dots + 2^{n-1} a_{2^n} =$$

$$= a_0 + \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{2}(a_1 + 2a_2 + \dots + 2^n a_{2^n})$$

Jeśli sumy częściowe (1) są ograniczone, to ograniczone są sumy częściowe (2) co kończy dowód implikacji.

(2) => (1).

Mamy.

$$a_0 + a_1 + \dots + a_{2^{n+1}-1} =$$

$$= a_0 + a_1 + \underbrace{a_2 + a_3}_{} + \underbrace{a_4 + a_5 + a_6 + a_7}_{} + \dots + \underbrace{\quad\quad}_{} a_{2^{n+1}-1} \leq$$

$$a_0 + a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^n a_{2^n} =$$

$$= a_0 + (a_1 + 2a_2 + \dots + 2^n a_{2^n}) \quad \text{co tutaj kończy dowód.}$$

Wniosek 4.37 Szeregi $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^p}$, $p \in \mathbb{Q}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy $p > 1$.

D: Szeregi możemy zamienić na $a_0 = 0$, $a_n = \frac{1}{n^p}$ dla $n \geq 1$. Wtedy z 4.36 badamy zbieżność

4-24

szeregu $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{(2n)!}$, czyli interesuje nas czy zbieżny jest szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2^{p-1})^n}$

Jest to szereg geometryczny więc warunek zbieżności $2^{p-1} > 1$ daje $p > 1$.

3. Specjalne kryteria zbieżności szeregów liczbowych

Twierdzenie 4.38 (Kryterium Kummera).

Z: $a_n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$

T: Następujące warunki są równoważne:

(1). Szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny.

(2) Istnieje $\{b_n\}$ ciąg liczb dodatnich takich, że $b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \to g > 0$ $(n \to +\infty)$.

D: (1) $\Rightarrow$ (2) Niech $\{s_n\}$ będzie ciągiem sum częściowych wyjściowego szeregu $s_n \to s$ $(n \to +\infty)$,

Weźmy $b_n = \frac{s - s_n}{a_n}$, $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{s - s_n}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{s - s_{n+1}}{a_{n+1}} =$$

$$= \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}} = 1 \qquad n \in \mathbb{N}$$

więc zmierza do 1.

(2) $\Rightarrow$ (1).

Jeśli zachodzi (2), to wybierzmy $\Theta \in (0,g)$.
Wtedy istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n \geq N$
mamy $b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \geq \Theta$ czyli

$\oplus\ a_{n+1} \leq a_n \cdot b_n - a_{n+1} \cdot b_{n+1}$ dla $n \geq N$

Rozpisując

$\oplus\ a_{N+1} \leq a_N \cdot b_N - a_{N+1} \cdot b_{N+1}$

$\vdots$ - - -

Rozdział 5. Odwzorowania ciągłe, ciągi i szeregi funkcyjne

§1. Ciągłość w przestrzeniach metrycznych

1. Podstawowe pojęcia i fakty

Niech $(X,d),(Y,\varrho)$ będą przestrzeniami metrycznymi $f: X \to Y$ oraz $a \in X$

Definicja 5.1 Mówimy, że odwzorowanie f jest **ciągłe w punkcie a** jeśli

$$\forall\, V\text{-ot. } f(a)\ \exists\, U\text{-ot. } a : f(U) \subset V.$$

Twierdzenie 5.2 W rozpatrywanej sytuacji następujące warunki są równoważne:

(1) f jest ciągłe w punkcie a,

(2) $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x \in X : (d(x,a)<\delta) \Rightarrow (\varrho(f(x),f(a))<\varepsilon)$,

(3) $(\{x_n\}$ ciąg w $X, x_n \to a\ (n\to+\infty)) \Rightarrow (f(x_n)\to f(a)\ (n\to+\infty))$.

D: (1) $\Rightarrow$ (2) $K(f(a),\varepsilon)$ - jest otoczeniem $f(a)$, więc z (1) istnieje U-ot. a takie, że $f(U)\subset K(f(a),\varepsilon)$

Skoro U jest otwarte, to $\exists \delta>0 : K(a,\delta)\subset U$, skąd wiedzieć dla $x\in X$, że $d(x,a)<\delta \Rightarrow \varrho(f(x),f(a))<\varepsilon$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Wybierzmy $\varepsilon>0$ a następnie z (2) $\delta>0$, wtedy $\exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geqslant N : x_n \in K(a,\delta)$, więc $f(x_n)\in K(f(a),\varepsilon)$ czyli $\varrho(f(x_n),f(a))<\varepsilon$, zatem. $f(x_n)\to f(a)\ (n\to+\infty)$

(3) $\Rightarrow$ (1) Wybierzmy V otoczenie $f(a)$ w Y. Pokażemy, że

$$(*)\ \exists n\in\mathbb{N}:\ f(K(a,2^{-n}))\subset V$$

Przypuśćmy, że ten warunek nie jest spełniony. Wtedy dla każdego $n\in\mathbb{N}$ znajdziemy $x_n\in K(a,2^{-n})$ takie, że $f(x_n)\notin V$. Łatwo zauważyć, że $x_n\to a$ $(n\to+\infty)$ zaś $\{f(x_n)\}$ nie jest zbieżny do $f(a)$. Dostajemy więc sprzeczność z (3), więc (*) zachodzi, co nam kończy dowód.

Ustalmy przestrzenie metryczne $(X,d),(Y,\varrho)$ oraz $f:X\to Y$

Definicja 5.3 Odwzorowanie f nazywamy ciągłym jeśli f jest ciągłe w każdym punkcie $a\in X$

Twierdzenie 5.4 W rozpatrywanej sytuacji następujące warunki są równoważne:

(1) f jest ciągłe,

(2) $(\{x_n\}$ ciąg w $X,\ a\in X,\ x_n\to a\ (n\to+\infty))\Rightarrow(f(x_n)\to f(a)\ (n\to+\infty))$

D: Na podstawie 5.2 widzimy, że warunek (2) jest zapisem ciągłości f we wszystkich punktach $a\in X$.

Twierdzenie 5.5 W rozpatrywanej sytuacji następujące warunki są równoważne:

(1) f jest ciągłe,

(2) $\forall$ V-otw. w Y: $f^{-1}(V)$ jest otw. w X,

(3) $\forall$ F-dom. w Y: $f^{-1}(F)$ jest dom. w X.

D: (1) $\Rightarrow$ (2) Niech V będzie zbiorem otw. w Y oraz $a \in f^{-1}(V)$. Wtedy z (1) istnieje U_a otwarty w X takie, że $a \in U_a$ oraz $f(U_a) \subset V$. Stąd dostajemy $U_a \subset f^{-1}(V)$ dla $a \in f^{-1}(V)$ więc $f^{-1}(V) = \bigcup_{a \in f^{-1}(V)} U_a$ jest otwarty.

(2) $\Rightarrow$ (3) Jeśli F jest domknięty w Y, to wtedy $f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$ jest otwarty, więc $f^{-1}(F)$ jest domknięty w X.

(3) $\Rightarrow$ (1) Niech $a \in X$ i V będzie otoczeniem $f(a)$ w Y. Wtedy $f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$ jest domknięty w X, a zatem $f^{-1}(V)$ jest otwarty w X oraz $a \in f^{-1}(V)$. Biorąc więc $U = f^{-1}(V)$ dostajemy $f(U) \subset V$, co kończy dowód.

2. Odwzorowania jednostajnie ciągłe i lipschitzowskie.

$(X,d), (Y,\varrho)$ - p. metryczne, $f: X \longrightarrow Y$

Definicja 5.6 Mówimy, że f jest jednostajnie ciągłe gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x', x'' \in X : d(x', x'') < \delta \Rightarrow \varrho(f(x'), f(x'')) < \varepsilon.$$

Definicja 5.7 Mówimy, że f spełnia warunek Lipschitza ze stałą $L \geq 0$ jeśli

$$\forall x', x'' \in X : \varrho(f(x'), f(x'')) \leq L \, d(x', x'').$$

Twierdzenie 5.8 W rozpatrywanej sytuacji:
(1) f-spełnia warunek Lipschitza z $L \geq 0 \Rightarrow f$-jednostajnie cg.
(2) f-jednostajnie ciągłe $\Rightarrow f$ jest ciągłe.

D: (1) ćw. (2) łatwo wynika z 5.2

Przykłady 5.9 $(X,d),(Y,\varrho)$ - przestrzenie metr., $f: X \to Y$.

(1) Jeśli $f: X \ni x \to f(x)=c \in Y$, gdzie $c \in Y$ jest odwzorowaniem stałym, to jest ciągłe bo obrazem każdego ciągu jest ciąg stały. Widać też, że f spełnia warunek Lipschitza z $L=0$.

(2) Jeśli $X'=\emptyset$, to f jest ciągłe, bo każdy ciąg $\{x_n\}$ zbieżny w X, musi być od pewnego miejsca stały, więc $\{f(x_n)\}$ również.

(3) $Y=X$, $\varrho=d$, $f=id_X$, to f spełnia warunek Lipschitza ze stałą $L=1$. Jest to zatem odwzorowanie jednostajnie ciągłe, więc ciągłe.

(4) $X \subset Y$, $d=\varrho|_{X\times X}$, $f: X \ni x \to f(x)=x \in Y$, to f spełnia warunek Lipschtza z $L=1$, więc jest ciągłe jednostajnie i ciągłe.

Przykłady 5.10

(1) $f: \mathbb{K} \ni z \to f(z)=|z| \in \mathbb{R}$. Przy metrykach naturalnych w $\mathbb{K}$ i $\mathbb{R}$ mamy $|f(z)-f(w)|=||z|-|w|| \le |z-w|$, $z,w \in \mathbb{K}$. Zatem f spełnia warunek Lipschitza z $L=1$.

(2) $f: \mathbb{K} \ni z \to z^n \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$

Dla $n=0$ f jest stałe więc spełnia warunek Lipschitza ze stałą $L=0$.

Dla $n=1$, $f=id_{\mathbb{K}}$ więc dostajemy sytuację jak w 5.9 (3).

Dla $n \ge 2$, f - jest ciągłe (ćw.).

(3) Działania w $\mathbb{K}$, czy odwzorowanie

$\mathbb{K}\times\mathbb{K}\ni(z,w)\longrightarrow z+w\in\mathbb{K}$,

$\mathbb{K}\times\mathbb{K}\ni(z,w)\longrightarrow z\cdot w\in\mathbb{K}$ są ciągłe,

gdy w $\mathbb{K}\times\mathbb{K}$ wprowadzimy metrykę produktową.

$$d((z_1,w_1),(z_2,w_2))=|z_1-z_2|+|w_1-w_2|$$

dla $(z_1,w_1),(z_2,w_2)\in\mathbb{K}\times\mathbb{K}$, jak 2.38 (4).

Ciąg $\{(z_n,w_n)\}$ w $\mathbb{K}\times\mathbb{K}$ jest zbieżny do $(z,w)\in\mathbb{K}^2$ dokładnie wtedy gdy $z_n\to z\ (n\to+\infty)$, $w_n\to w\ (n\to+\infty)$. W tej sytuacji, na podstawie Tw. 3.25 (1), (3) dostajemy $z_n+w_n\to z+w\ (n\to+\infty)$ oraz

$$z_n\cdot w_n\longrightarrow z\cdot w\ (n\to+\infty),$$ co daje ciągłość rozważanych tutaj odwzorowań.

(4) Ustalmy $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ i rozważmy odwzorowanie

$$f:\mathbb{K}\times\mathbb{K}\ni(z,w)\longrightarrow\alpha z+\beta w\in\mathbb{K}.$$

Łatwo zauważyć, że $z_n\to z\ (n\to+\infty)$, $w_n\to w\ (n\to+\infty)$ to dostajemy $\alpha z_n+\beta w_n\longrightarrow\alpha z+\beta w\ (n\to+\infty)$, skąd wynika ciągłość f. Można też pokazać, że f spełnia warunek Lipschitza z $L=\max\{|\alpha|,|\beta|\}$, więc jest jednostajnie ciągłe. (Ćw.)

(5) Jeśli X jest przestrzenią metryczną zaś $f:X\to X$ jest jej odwzorowaniem zwężającym, to f spełnia warunek Lipschitza z pewną stałą $L\in[0,1)$. Zatem f jest jednostajnie ciągłe i ciągłe.

3. Operacje na odwzorowaniach ciągłych.

Operacje na odwzorowaniach (funkcjach) ciągłych, podobnie jak same odwzorowania ciągłe są jednym z głównych obiektów badań w zakresie topologii. My zajmiemy się wyłącznie podstawowymi faktami z tego zakresu, dzieląc informacje na grupy.

A. Zacieśnianie

Twierdzenie 5.11

Z: (X,d), (Y,ϱ) - przestrzenie metryczne, $Z \subset X$, $a \in Z$
$f: X \longrightarrow Y$ jest ciągłe w punkcie a (jest ciągłe)

T: Jeśli w Z wprowadzimy metrykę indukowaną z X,
to $f|Z: Z \longrightarrow Y$ jest cg. w punkcie a (jest ciągłe).

D: Ciąg zbieżny w Z do a jest zbieżny do a w X,
skąd tutaj otrzymujemy tezę.

B. Sklejanie

Twierdzenie 5.12

Z: (X,d), (Y,ϱ) przestrzenie metryczne, $f: X \longrightarrow Y$
S - rodzina podzbiorów X taka, że $X = \bigcup_{E \in S} E$
$\forall E \in S: f|E: E \longrightarrow Y$ ciągłe

T: (1) S - rodzina podzbiorów otwartych $\Rightarrow f$ jest ciągłe.
(2) S - skończ. rodz. podzb. domkniętych $\Rightarrow f$ jest ciągłe.

D: Jeśli $H \subset Y$, to mamy równość

$$f^{-1}(H) = \bigcup_{E \in S} (f|E)^{-1}(H).$$

Tezę dostajemy teraz łatwo z Tw. 5.5 sprawdzając dla (1), (2) warunki odpowiednie (2), (3), które mamy w 5.5.

C. Złożenie

Twierdzenie 5.13

Z: $(X,d), (Y,\rho), (Z,\mu)$ - przestrzenie metryczne
$f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, $a \in X$
f - ciągłe w punkcie a (ciągłe)
g - ciągłe w punkcie $f(a)$ (ciągłe)

T: $g \circ f$ ciągłe w punkcie a (ciągłe).

D: Wystarczy pokazać wersję twierdzenia z ciągłością w ustalonym punkcie $a \in X$.
Jeśli $x_n \to a$ $(n \to +\infty)$, $f(x_n) \to f(a)$ $(n \to +\infty)$ bo f jest ciągłe w a. Ze względu na ciągłość g w punkcie $f(a)$ dostajemy następnie $g(f(x_n)) \to g(f(a))$ $(n \to +\infty)$. Stąd mamy $(g \circ f)(x_n) \to (g \circ f)(a)$ $(n \to +\infty)$, co kończy dowód.
Jeśli mamy wersję twierdzenia dla punktów $a \in X$, to wystarczy skorzystać z Definicji 5.3

D. Naturalne działania na funkcjach

Twierdzenie 5.14

Z: (X,d) - przestrzenie metryczne, $a \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.
$f: X \to \mathbb{K}$, $g: X \to \mathbb{K}$ są ciągłe w a (są ciągłe).

T: (1) $\alpha f + \beta g$ jest ciągła w a (jest ciągła),
(2) $f \cdot g$ jest ciągła w a (jest ciągła),
(3) $g^{-1}(0) = \emptyset \Rightarrow f/g$ jest ciągła w a (jest ciągła).

D: Wszystkie punkty tutaj wynikają z własności ciągów zbieżnych w $\mathbb{K}$, z Tw. 3.25.

§2 Granica funkcji w punkcie

1. Podstawowe definicje

Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną i $A \subset X$.
Przypomnijmy, że $a \in X$ jest punktem skupienia zbioru A, jeśli $\forall U\text{-ot. } a : (U \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$.
Piszemy wtedy $a \in A'$. Jest to równoważne istnieniu ciągu $\{x_n\}$ w $A \setminus \{a\}$ zbieżnego do a.

Niech teraz X, Y będą przestrzeniami metrycznymi $A \subset X$, $a \in X$, $f: A \to Y$, $g \in Y$

Definicja 5.15 Mówimy, że g jest granicą f w punkcie a jeśli:
(1) $a \in A'$
(2) $\forall V\text{-ot. } g \; \exists U\text{-ot. } a : f(A \cap (U \setminus \{a\})) \subset V$
Piszemy wtedy $g = \lim_{x \to a} f(x)$ lub $f(x) \to g \; (x \to a)$

Twierdzenie 5.16

Z: X, Y - p. metryczne, $A \subset X$, $f: A \longrightarrow Y$
$a \in A'$, $g \in Y$

T: Następujące warunki są równoważne:
(1) $f(x) \longrightarrow g \ (x \to a)$,
(2) $(\{x_n\}$ ciąg w $A \setminus \{a\}$, $x_n \to a \ (n \to +\infty)) \Rightarrow (f(x_n) \to g(n \to +\infty))$

D: Wynika wprost z Definicji 5.15 (Ćw.).

Uwaga 5.17 Funkcja w ustalonym punkcie może posiadać co najwyżej jedną granicę.

Przykład 5.18 Y - przestrzeń metryczna, $\{x_n\}$ ciąg w Y
Rozpatrujemy $A = \mathbb{N} \subset \overline{\mathbb{R}}$, $a = +\infty$, $a \in \mathbb{N}'$, $g \in Y$
Określamy $f: \mathbb{N} \ni n \longrightarrow f(n) = x_n \in Y$ i dostajemy.

$$(f(n) \longrightarrow g \ (n \to +\infty)) \iff (f(n) \longrightarrow g \ (n \to +\infty))$$

zbieżność ciągu — granica funkcji

2. Granice jednostronne w $\overline{\mathbb{R}}$

Dla $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ oraz $a \in \overline{\mathbb{R}}$ określamy

$A_a^- := A \cap (-\infty, a)$, $A_a^+ := A \cap (a, +\infty)$.

Wprowadzimy następnie pojęcie granic jednostronnych dla $f: A \longrightarrow Y$, gdzie Y jest ustaloną przestrzenią metryczną

Definicja 5.19 Mówimy, że $g \in Y$ jest granicą lewostronną (prawostronną) f w punkcie a jeśli g jest granicą $f|A_a^-$ ($f|A_a^+$) w punkcie a. Piszemy wtedy $\lim_{x \to a^-} f(x) = g$ ($\lim_{x \to a^+} f(x) = g$), albo $f(x) \to g \ (x \to a^-)$ ($f(x) \to g \ (x \to a^+)$).

Uwaga 5.20 Jeśli w powyższej sytuacji f ma w punkcie $a \in \mathbb{R}$ obydwie granice jednostronne, to ma granicę w tym punkcie jeśli granice jednostronne są sobie równe.

3. Operacje na granicach

Warto zauważyć, że można łatwo dowodzić fakty z pogranicza ciągłości w punkcie oraz granic w punkcie operując następującą obserwacją:

Dla X, Y - przestrzeni metrycznych, $A \subset X$, $a \in A'$ $f: A \to Y$ oraz $g \in Y$ określamy odwzorowanie

$\tilde{f} = (f|A \setminus \{a\}) \cup \{(a, g)\}$, które możemy zapisać $\tilde{f}(x) = \begin{cases} g, & x = a, \\ f(x), & x \in A \setminus \{a\}. \end{cases}$

Dostajemy $\tilde{f}: A \to Y$, dla którego zachodzi

Uwaga 5.21 W tej sytuacji następujące warunki są równoważne: (1) $f(x) \to g \ (x \to a)$
(2) $\tilde{f}$ jest ciągła w punkcie a.

Twierdzenie 5.22

Z: X, Y, Z - przestrzenie metryczne, $A \subset X$, $a \in X$

$f: A \longrightarrow Y$, $h: Y \longrightarrow Z$

$g \in Y$, $f(x) \longrightarrow g$ $(x \longrightarrow a)$, h - jest ciągła w punkcie g

T: $(h \circ f)(x) \longrightarrow h(g)$ $(x \longrightarrow a)$.

D: Wiemy, że $a \in A'$, więc weźmy $\{x_n\}$ ciąg w $A \setminus \{a\}$ zbieżny do a. Wtedy $f(x_n) \longrightarrow g$ $(n \longrightarrow +\infty)$, więc z ciągłości h dostajemy $h(f(x_n)) \longrightarrow h(g)$ $(n \longrightarrow +\infty)$, co kończy dowód.

Twierdzenie 5.23

Z: X - przestrzeń metryczna, $A \subset X$, $a \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$f, h: A \longrightarrow \mathbb{K}$ mają granice w punkcie a

T: (1) $\lim\limits_{x \to a} (\alpha f(x) + \beta h(x)) = \alpha \lim\limits_{x \to a} f(x) + \beta \lim\limits_{x \to a} h(x)$,

(2) $\lim\limits_{x \to a} (f \cdot h)(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} h(x)$,

(3) Jeśli $h^{-1}(0) = \emptyset$ oraz $\lim\limits_{x \to a} h(x) \neq 0$,

to $\lim\limits_{x \to a} (f/h)(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \Big/ \lim\limits_{x \to} h(x)$

D: Ćwiczenie.

4. Granica dolna i granica górna funkcji rzeczywistej w punkcie

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną i niech
$A \subset X$, $f: A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $a \in A'$

Rozważmy w tej sytuacji zbiór

$$E = \{g \in \overline{\mathbb{R}} : \exists \{x_n\} \text{ ciąg w } A \setminus \{a\} : x_n \to a \ (n \to +\infty), f(x_n) \to g \ (n \to +\infty)\}$$

Skoro $a \in A'$, to łatwo zauważyć, że $E \neq \emptyset$

Definicja 5.24 W powyższej sytuacji:
- granicą dolną funkcji f w punkcie a nazywamy

$$\liminf_{x \to a} f(x) := \inf E \in \overline{\mathbb{R}}$$

- granicą górną funkcji f w punkcie a nazywamy

$$\limsup_{x \to a} f(x) := \sup E \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Podobnie jak dla ciągów możemy wprowadzić granicę dolną i górną funkcji o wartościach w $\mathbb{R}$, tak aby istnienie tych granic wymagane było w $\mathbb{R}$ a nie w $\overline{\mathbb{R}}$. Dostalibyśmy w ten sposób pojęcie o znacznie gorszych własnościach, niosące też znacznie mniej informacji o rozważanej funkcji.

Podobnych pojęć nie wprowadzamy dla funkcji zespolonych. Możemy posługiwać się wtedy granicą ∞ po rozszerzeniu przestrzeni docelowej funkcji z $\mathbb{C}$ do $\hat{\mathbb{C}}$. Dostajemy jednak wtedy jedynie granicę ∞ w zwykłym sensie

Mówiąc zatem o granicy dolnej lub górnej funkcji w punkcie, automatycznie ustalamy, że funkcja przyjmuje wartości w $\overline{\mathbb{R}}$ i rozważamy sytuację jak na początku tego punktu.

Przykłady 2.25

(1) $f : \mathbb{R} \ni x \longrightarrow \operatorname{sgn} x \in \mathbb{R}$

Wtedy f jest ciągła w punktach $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, a ponadto

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

W punkcie 0 f ma zbiór granic częściowych $E = \{-1, 1\}$ więc $\liminf_{x \to 0} f(x) = -1$, $\limsup_{x \to 0} f(x) = 1$.

(2) Funkcje $\mathbb{R} \ni x \longrightarrow [x] \in \overline{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R} \ni x \longrightarrow \{x\} \in \overline{\mathbb{R}}$ są ciągłe w punktach $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. W każdym punkcie mają one granice jednostronne, które łatwo wyliczyć podobnie jak granicę górne i dolne. (Ćw.). Możemy również rozważać funkcje te jako określone na podzbiorze $\mathbb{R}$ przestrzeni $\overline{\mathbb{R}}$. Dostajemy wtedy, np. dodatkowo $\lim_{x \to -\infty^+} [x] = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty^-} [x] = +\infty$ oraz $\liminf_{x \to -\infty} \{x\} = \liminf_{x \to +\infty} \{x\} = 0$, $\limsup_{x \to -\infty} \{x\} = \limsup_{x \to +\infty} \{x\} = 1$.

(3) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \longrightarrow \frac{1}{x} \in \overline{\mathbb{R}}$ jest ciągła i mamy, ponadto $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \liminf_{x \to 0} f(x) = -\infty$ oraz $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \limsup_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

(4) $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \ni z \longrightarrow \frac{1}{z} \in \hat{\mathbb{C}}$ jest ciągła. Rozważając $\mathbb{C} \setminus \{0\} \subset \hat{\mathbb{C}}$ dostajemy $\lim_{z \to 0} f(z) = \infty$, $\lim_{z \to \infty} f(z) = 0$.

§ 3. Własności odwzorowań ciągłych.

1. Przestrzenie metryczne zwarte.

Definicja 5.26 Przestrzeń metryczną (X,d) nazywamy **zwartą** jeśli z każdego ciągu w X można wybrać podciąg zbieżny.

Definicja 5.27 Podzbiór Y przestrzeni metrycznej (X,d) nazywamy **zwartym** jeśli $(Y, d|_{Y\times Y})$ jest przestrzenią metryczną zwartą.

Uwaga 5.28 Pojęcie zwartości określa się w klasie przestrzeni topologicznych w nieco inny sposób. Na wstępie wymaga się aby rozpatrywana przestrzeń była Hausdorffa (T_2) czyli aby każde dwa jej różne punkty miały otoczenia rozłączne. Taką przestrzeń topologiczną nazywamy zaś zwartą jeśli z każdego jej pokrycia otwartego da się wybrać podpokrycie skończone. Dla przestrzeni metrycznych te dwie definicje są równoważne, ale dowód tego faktu nie jest tatwy. Aktualnie wykorzystywać będziemy definicję, która w przestrzeniach metrycznych lepiej pracuje. Przed przystąpieniem do opisu zwartości wprowadzimy jeszcze jedną klasę przestrzeni metrycznych, którą wykorzystamy w przyszłości.

Definicja 5.29 Przestrzeń metryczną (X,d) nazywamy **lokalnie zwartą** jeśli spełnia warunek

$\forall a\in X\ \exists U$-ot. a : $\overline{U}$ jest podzbiorem zwartym X.

Twierdzenie 5.30

Z: X - przestrzeń metryczna.
Y - zwarty podzbiór X

T: Y jest domkniętym podzbiorem X

D: Niech $\{x_n\}$ będzie ciągiem w Y zbieżnym do $a \in X$.
Skoro Y jest zwarty więc z $\{x_n\}$ można wybrać podciąg zbieżny w Y do pewnego $b \in Y$. Zatem w przestrzeni X mamy $x_n \to a$ $(n \to +\infty)$ oraz $x_{\varphi(n)} \to b$ $(n \to +\infty)$ gdzie $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ściśle rosnąca. Stąd dostajemy $a = b$ więc $a \in Y$.
Z Tw. 3.19 o charakteryzacji podzbiorów domkniętych wnioskujemy, że Y jest domknięty.

Twierdzenie 5.31

Z: X - przestrzeń metryczna zwarta, $Y \subset X$

T: Następujące warunki są równoważne:
(1) Y - zwarty
(2) Y - jest domknięty w X

D: (1) $\Rightarrow$ (2) na podstawie 5.30
(2) $\Rightarrow$ (1) Niech $\{y_n\}$ będzie ciągiem w Y. Skoro X jest zwarta, to z $\{y_n\}$ możemy wybrać podciąg $\{x_n\}$ zbieżny w X do pewnego $a \in X$. Jednak Y jest domknięty więc $a \in Y$, co kończy dowód.

Twierdzenie 5.32 Każda przestrzeń zwarta jest zupełna

D: Jeśli $\{x_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego w rozważanej przestrzeni (X,d), to $\{x_n\}$ ma podciąg zbieżny. Teraz teza wynika wprost z 3.22 (3).

Przykłady 5.33

(1) (X,d) przestrzeń metryczna, w której X jest skończony. jest zawsze zwarta

(2) Jeśli (X,d) jest p.m. z metryką dyskretną, to podzbiory zwarte X, to są dokładnie podzbiory skończone.

(3) Zbadajmy jakie podzbiory $\mathbb{R}$ są zwarte. Dość łatwo zauważyć, że muszą być one ograniczone i jednocześnie domknięte. Jeśli mamy z kolei podzbiór $\mathbb{R}$ domknięty i ograniczony, to wybierając w nim dowolny ciąg, z Tw. Bolzano-Weierstrassa dostajemy możliwość wyboru podciągu zbieżnego w $\mathbb{R}$, ale domkniętość gwarantuje nam, że granica pozostaje w tym zbiorze. Zatem podzbiory zwarte $\mathbb{R}$, to są dokładnie podzbiory $\mathbb{R}$ domknięte i ograniczone.

(4) Rozumując podobnie jak w (3) łatwo pokazać, że podzbiory zwarte $\mathbb{C}$, to są podzbiory domknięte i ograniczone.

(5) $\overline{\mathbb{R}}$ i $\hat{\mathbb{C}}$, to przestrzenie metryczne zwarte. Wnioskujemy to bezpośrednio z Tw 3.34 (dla $\overline{\mathbb{R}}$) oraz z Tw. 3.50 dla $\hat{\mathbb{C}}$.

(6) Ogólnie znany Zbiór Cantora w $\mathbb{R}$ jest zwarty (Ćw.). Również większość konstruowanych fraktali jest przestrzeniami zwartymi.

2. Przestrzenie metryczne spójne

Definicja 5.34 Przestrzeń metryczną X nazywamy *spójną* jeśli nie istnieją jej podzbiory otwarte i niepuste U, V takie, że:

$$U \cap V = \emptyset \quad i \quad U \cup V = X$$

Warto zauważyć, że zawsze mamy rozkład $X = X \cup \emptyset$ o podobnych własnościach, ale jeden ze zbiorów jest w nim pusty.

Definicja 5.35 Podzbiór Y przestrzeni metrycznej (X,d) nazywamy *spójnym* jeśli $(Y, d|_{Y\times Y})$ jest spójna.

Przykłady 5.36

(1) Niech X będzie skończoną przestrzenią metryczną. Wtedy każdy podzbiór X jest otwarty, więc łatwo zauważyć, że X jest spójna gdy $X = \emptyset$ albo gdy X jest zbiorem jednoelementowym.

(2) W $\mathbb{C}$ z metryką zadaną przez moduł weźmy $Y = \bigcup_{i=1}^{m} \overline{K}(a_i, r_i)$, gdzie dla $i \neq j$ $\overline{K}(a_i, r_i) \cap \overline{K}(a_j, r_j) = \emptyset$. Łatwo zauważyć, że każde z kół domkniętych jest w Y podzbiorem otwartym. Zatem Y z metryką indukowaną jest spójny jedynie gdy $m = 1$.

(3) W $\mathbb{C}$ z naturalną metryką koła otwarte i koła domknięte są podzbiorami spójnymi (ćw.)

Twierdzenie 5.37

Z: $X \subset \mathbb{R}$.

T: Następujące warunki są równoważne:

(1) X jest spójny,

(2) X jest przedziałem.

D: (1) $\Rightarrow$ (2) Zgodnie z przyjętą definicją 2.14 mamy pokazać, że jeśli $x<y<z$ w $\mathbb{R}$ oraz $x,z \in X$, to $y \in X$. Faktycznie, gdyby $y \notin X$, to $U = X \cap (-\infty, y)$, $V = X \cap (y, +\infty)$ dają rozkład, który nie jest możliwy dla zbiorów spójnych.

(2) $\Rightarrow$ (1). Niech X będzie przedziałem oraz niech $X = U \cup V$ gdzie U, V otwarte w X, $U \cap V = \emptyset$, $a \in U$, $b \in V$.

Przypuśćmy, że $a < b$ (drugą możliwość pokazujemy analogicznie) i określmy

$$c = \sup \{x \in U : x < b\}.$$

Mamy $c \in [a,b] \subset X$

Zatem musi zajść jeden z przypadków:

(I) $c \in U$ ale U - otwarty w X więc

$\exists \varepsilon > 0 : [c, c+\varepsilon) \subset U$ - mamy sprzeczność.

(II) $c \in V$ ale wtedy $\exists \varepsilon > 0 : (c-\varepsilon, c] \subset V$

i również dostajemy sprzeczność z określeniem c.

To kończy dowód.

Uwaga 5.38 Jedynymi podzbiorami spójnymi $\mathbb{R}$ są przedziały. (Pokazać jako ćwiczenie).

3. Szczególne własności odwzorowań ciągłych na przestrzeniach zwartych i przestrzeniach spójnych.

Twierdzenie 5.39

Z: (X,d) - przestrzeń metryczna zwarta
(Y,ϱ) - przestrzeń metryczna.
$f: X \to Y$ odwzorowanie ciągłe.

T: f - jest jednostajnie ciągłe

D: Przypuśćmy, że f nie jest jednostajnie ciągłe. Wtedy.
$\exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x', x'' \in X : d(x', x'') < \delta, \varrho(f(x'), f(x'')) \geq \varepsilon$
Możemy zatem wybrać ciąg $\delta_n = 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$ oraz ciągi punktów przestrzeni X: $\{x_n'\}, \{x_n''\}$ takie, że
(*) $d(x_n', x_n'') < \delta_n$, $\varrho(f(x_n'), f(x_n'')) \geq \varepsilon$ dla $n \in \mathbb{N}$

Skoro X jest zwarta, to możemy dodatkowo założyć, że $\{x_n'\}$ jest zbieżny (gdyż możemy przejść do podciągu wyjściowego ciągu). Niech $x_n' \to a$ $(n \to +\infty)$ gdzie $a \in X$. Wtedy, z warunku $d(x_n', x_n'') < \delta_n$ dla $n \in \mathbb{N}$, wynika nam, że $x_n'' \to a$ $(n \to +\infty)$.

W punkcie $a \in X$ funkcja f jest ciągła, więc dla wcześniej ustalonego $\varepsilon > 0$ mamy, takie otoczenie U punktu a, że

$$\forall x \in U : \varrho(f(x), f(a)) < \varepsilon/2$$

Mamy $\varrho(f(x_n'), f(x_n'')) \leq \varrho(f(x_n'), f(a)) + \varrho(f(a), f(x_n''))$ dla $n \in \mathbb{N}$. Istnieje $N \in \mathbb{N}$, że dla $n \geq N$, $x_n', x_n'' \in U$ a wtedy dostajemy $\varrho(f(x_n'), f(x_n'')) < \varepsilon$, sprzeczność z (*)

Twierdzenie 5.40

Z: X, Y - przestrzenie metryczne, $f: X \to Y$ ciągłe.
X - zwarta.

T: $f(X)$ jest podzbiorem zwartym Y

D: Niech $\{y_n\}$ będzie ciągiem w $f(X)$. Możemy wybrać ciąg $\{x_n\}$ w X tak aby $y_n = f(x_n)$ dla $n \in \mathbb{N}$. Z ciągu $\{x_n\}$ możemy wybrać podciąg zbieżny $\{x_{\varphi(n)}\}$ do punktu $a \in X$, $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ silnie rosnąca. Wtedy $\{y_{\varphi(n)}\}$ jest podciągiem $\{y_n\}$ oraz mamy $y_{\varphi(n)} \to f(a)$ $(n \to +\infty)$, co kończy dowód.

Definicja 5.41 Jeśli X jest zbiorem, (Y, ρ) przestrzenią metryczną, to odwzorowanie $f: X \to Y$ nazywamy ograniczonym jeśli jego obraz $f(X)$ jest podzbiorem ograniczonym Y.

Twierdzenie 5.42 (Weierstrassa)

Z: X - przestrzeń metryczna zwarta, niepusta.
$f: X \to \mathbb{R}$ ciągłe

T: (1) f jest ograniczone
(2) f osiąga kresy zbioru swoich wartości w pewnych punktach zbioru X.

D: (1) $f(X)$ jest zwarty w $\mathbb{R}$ na podstawie 5.40, więc z 5.33(3) $f(X)$ jest ograniczony.
(2) $f(X)$ jest domknięty i ograniczony w $\mathbb{R}$, a zatem $\inf f(X) \in f(X)$ i $\sup f(X) \in f(X)$ na podstawie z 3.36(2).

Definicja 5.43 Odwzorowanie $f: X \to Y$ między przestrzeniami metrycznymi nazywamy homeomorfizmem, jeśli jest bijekcją oraz f i f^{-1} są odwzorowaniami ciągłymi.

Twierdzenie 5.44

Z: X, Y - przestrzenie metryczne, X - zwarta.
$f: X \to Y$ ciągła bijekcja.

T: Y jest zwarta oraz f jest homeomorfizmem.

D: Zwartość Y wynika z 5.40 i surjektywności f.
Aby pokazać ciągłość $g = f^{-1}$ wybierzmy F podzbiór domknięty X. Mamy pokazać, że $g^{-1}(F) = f(F)$ jest podzbiorem domkniętym Y. Jednak F, jako domknięty w przestrzeni zwartej jest zwarty z 5.31, zatem 5.40 daje nam zwartość $f(F)$. Ponownie stosując 5.31 dostajemy domkniętość $g^{-1}(F) = f(F)$ w Y, co kończy dowód.

Kolejne dwa fakty dotyczyć będą problemu przyjmowania przez odwzorowania ciągłe tak zwanych „wartości pośrednich".

Twierdzenie 5.45

Z: X, Y - przestrzenie meto., X-spójna, $f: X \to Y$ ciągłe.

T: $f(X)$ jest spójnym podzbiorem Y

D: Indukując metrykę w $f(X) \subset Y$ mamy, bez straty ogólności założyć, że $Y = f(X)$

Przypuśćmy, że $Y = f(X)$ nie jest spójna. Wtedy $Y = U \cup V$ gdzie U, V - otwarte w Y, U, V - niepuste oraz $U \cap V = \emptyset$. Biorąc teraz przeciwobrazy U i V przez f dostajemy $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ - otwarte niepuste w X, $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$, $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$ co przeczy spójności X. Dostajemy sprzeczność, która kończy dowód.

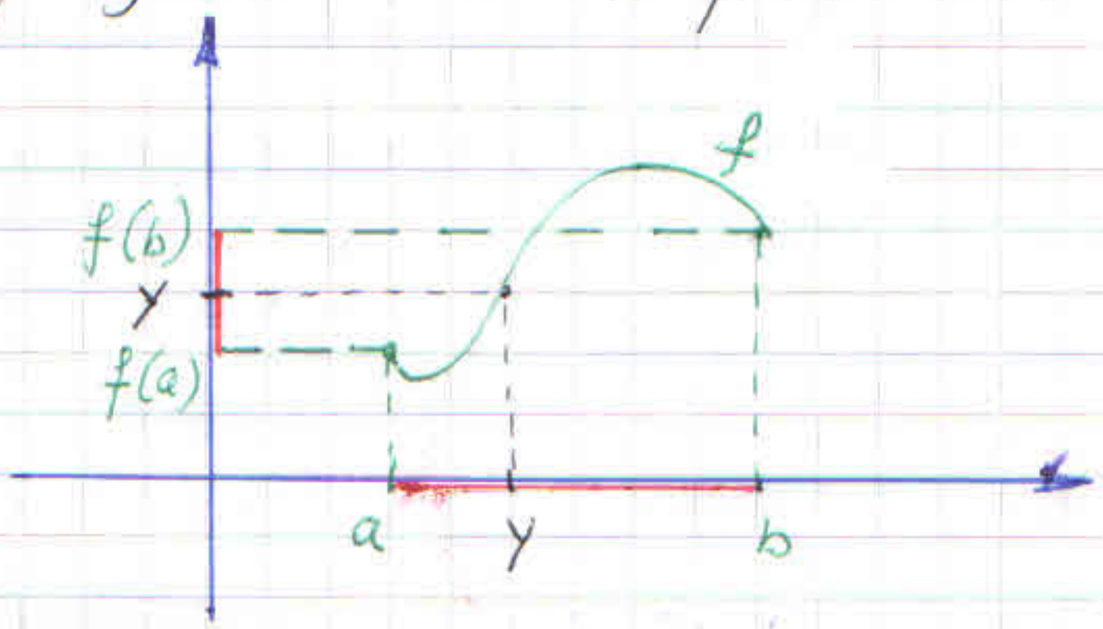
Twierdzenie 5.46 (Własność Darboux).

Z: X jest przestrzenią metryczną spójną,
$f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ odwzorowanie ciągłe.
$a, b \in X$, $f(a) < f(b)$, $y \in (f(a), f(b))$

T: $\exists\, c \in X : f(c) = y$

D: Z 5.45 wynika, że $f(X)$ jest przedziałem.
Skoro $f(a), f(b) \in f(X)$ oraz $f(a) < y < f(b)$,
to również $y \in f(X)$, czyli $\exists\, c \in X : f(c) = y$.
To kończy dowód.

Twierdzenie 5.46 formułuje się często dla funkcji określonych na przedziale w $\mathbb{R}$ (przedział jest spójny), dostając informację, że funkcja ciągła na przedziale w $\mathbb{R}$ o wartościach w $\mathbb{R}$, wraz z dwoma wybranymi wartościami przyjmuje „wszystkie wartości pośrednie".



4. Spójność podzbiorów $\mathbb{C}$

Mamy pełny opis podzbiorów spójnych $\mathbb{R}$ (prostych), ale trudno uzyskać podobny wynik w przypadku drugiego z rozpatrywanych ciał czyli $\mathbb{C}$. Pomocne jest w tej sytuacji spojrzenie geometryczne, pozwalające na konstrukcję szerokiej klasy zbiorów spójnych w $\mathbb{C}$, opartej na tzw. krzywych w przestrzeniach metrycznych, nazywanych też drogami lub ścieżkami.

Definicja 5.47 Krzywą w przestrzeni metrycznej (X,d) nazywamy odwzorowanie ciągłe $\gamma: [a,b] \to X$ gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$. Punkt $\gamma(a)$ nazywamy początkiem krzywej γ zaś punkt $\gamma(b)$ jej końcem.

Możemy teraz sformułować następujące twierdzenie

Twierdzenie 5.48

Z: (X,d) - przestrzeń metryczna, $Y \subset X$

$$\forall y_1, y_2 \in Y \; \exists_{a<b} a, b \in \mathbb{R} \; \exists \gamma: [a,b] \to Y : \gamma(a) = y_1, \gamma(b) = y_2$$

krzywa.

T: Y - jest podzbiorem spójnym X

D: Indukując metrykę na Y możemy przyjąć, że $Y = X$. Przypuśćmy, że Y nie jest spójna oraz U, V są podzbiorami otwartymi Y, które są niepuste $U \cap V = \emptyset$ oraz $U \cup V = Y$. Skoro $U \neq \emptyset$ i $V \neq \emptyset$ więc wybierzmy $y_1 \in U$ oraz $y_2 \in V$. Wtedy na podstawie założenia. istnieje krzywa $\gamma: [a,b] \to Y$ t. że $\gamma(a) = y_1, \gamma(b) = y_2$

Biorąc teraz $\tilde{U} = \gamma^{-1}(U)$, $\tilde{V} = \gamma^{-1}(V)$ otrzymujemy podobiory otwarte niepuste $[a,b]$, dla których $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \emptyset$ i $\tilde{U} \cup \tilde{V} = [a,b]$. Otrzymaliśmy sprzeczność ze spójnością $[a,b]$, co kończy dowód twierdzenia 5.48. Możemy w tym momencie zauważyć, że kluczowym argumentem jest tutaj, wynikająca z 5.45 spójność obrazu $\gamma([a,b])$.

Wykazane twierdzenie wykorzystamy w przyszłości, do dobrego opisu obszarów, czy zbiorów otwartych oraz jednocześnie spójnych w przestrzeniach unormowanych. Chwilowo zwróćmy uwagę na następujący wniosek.

<u>Wniosek 5.49</u> Jeśli zbiór $C \subset \mathbb{C}$ jest wypukły, czyli ma następującą własność

$$\underline{z, w \in C \Rightarrow [z,w] = \{z + t(w-z) \in \mathbb{C} : t \in [0,1]\} \subset C,}$$

<u>to jest spójny</u>.

D: Zbiór $[z,w]$ to jest tak zwany odcinek w $\mathbb{C}$, łączący punkty z, w będący obrazem krzywej $\delta_{z,w} : [0,1] \ni t \longrightarrow z + t(w-z) \in \mathbb{C}$.

Spójność C dostajemy w tej sytuacji bezpośrednio z 5.48.

§4. Ciągi funkcyjne.

1. Zbieżność ciągów funkcyjnych.

Niech X, Y będą zbiorami niepustymi oraz niech $f_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$ i $f : X \to Y$.
Odwzorowania f_n, $n \in \mathbb{N}$ oraz f możemy traktować również jako elementy przestrzeni $Z = Y^X$.
Na zbieżność ciągu funkcyjnego $\{f_n\}$ do f możemy spojrzeć na dwa sposoby:

(A) zbieżność $\{f_n\}$ do f gdy w Z zadana jest pewna metryka (ewentualnie topologia),

(B) $\{f_n\}$ to ciąg odwzorowań, którego zbieżność do f określamy w specjalny sposób.

Optymalna sytuacja jest wtedy gdy mamy obydwie możliwości (A) i (B) i są one zgodne. Wtedy możemy mówić o zbieżności używając tego aparatu wprowadzonego dla zbieżności ciągów w przestrzeni metrycznej, przy wykorzystaniu dodatkowego opisu (B). Jednak ogólne pojęcia są tutaj zwykle formułowane w oparciu o (B), pozwalając na dodatkowe możliwości typu (A).

Zajmiemy się teraz zbieżnościami ciągów funkcyjnych: punktową, jednostajną, lokalnie jednostajną oraz niemal jednostajną, badając występujące między nimi zależności.

2. Zbieżność punktowa

Załóżmy, że X jest zbiorem niepustym oraz (Y,d) przestrzenią metryczną. Rozpatrujemy odwzorowania $f_n : X \longrightarrow Y$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $f : X \longrightarrow Y$.

Definicja 5.50 Mówimy, że ciąg funkcyjny $\{f_n\}$ jest zbieżny punktowo do f jeśli

$$\forall x \in X : f_n(x) \longrightarrow f(x) \ (n \longrightarrow +\infty)$$

Zbieżność punktową $\{f_n\}$ do f zapisujemy zwykle $f_n \longrightarrow f \ (n \longrightarrow +\infty)$ (punktowo). Jeśli z kontekstu to wynika pomijamy drugie nawias.

Zbieżność punktowa jest zawsze wyznaczona przez pewną topologię Y^X. Jeśli zbiór X jest przeliczalny oraz $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, to można ją uzyskać z metryki określonej dla $f, g \in Y^X$ równością

$$S(f,g) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \frac{d(f(x_n), g(x_n))}{1 + d(f(x_n), g(x_n))}$$

Jeśli zbiór X jest skończony, to można uzyskać tę zbieżność jako zbieżność w przestrzeni punktów $(f_n(x_1), \ldots, f_n(x_m)) \in Y^m$ gdzie $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$, $n \in \mathbb{N}$ do $(f(x_1), \ldots, f(x_m))$. Jednak w zadaniu zbieżności punktowej ograniczymy się w zasadzie do wykorzystania podstawowej definicji 5.50.

3. Zbieżność jednostajna.

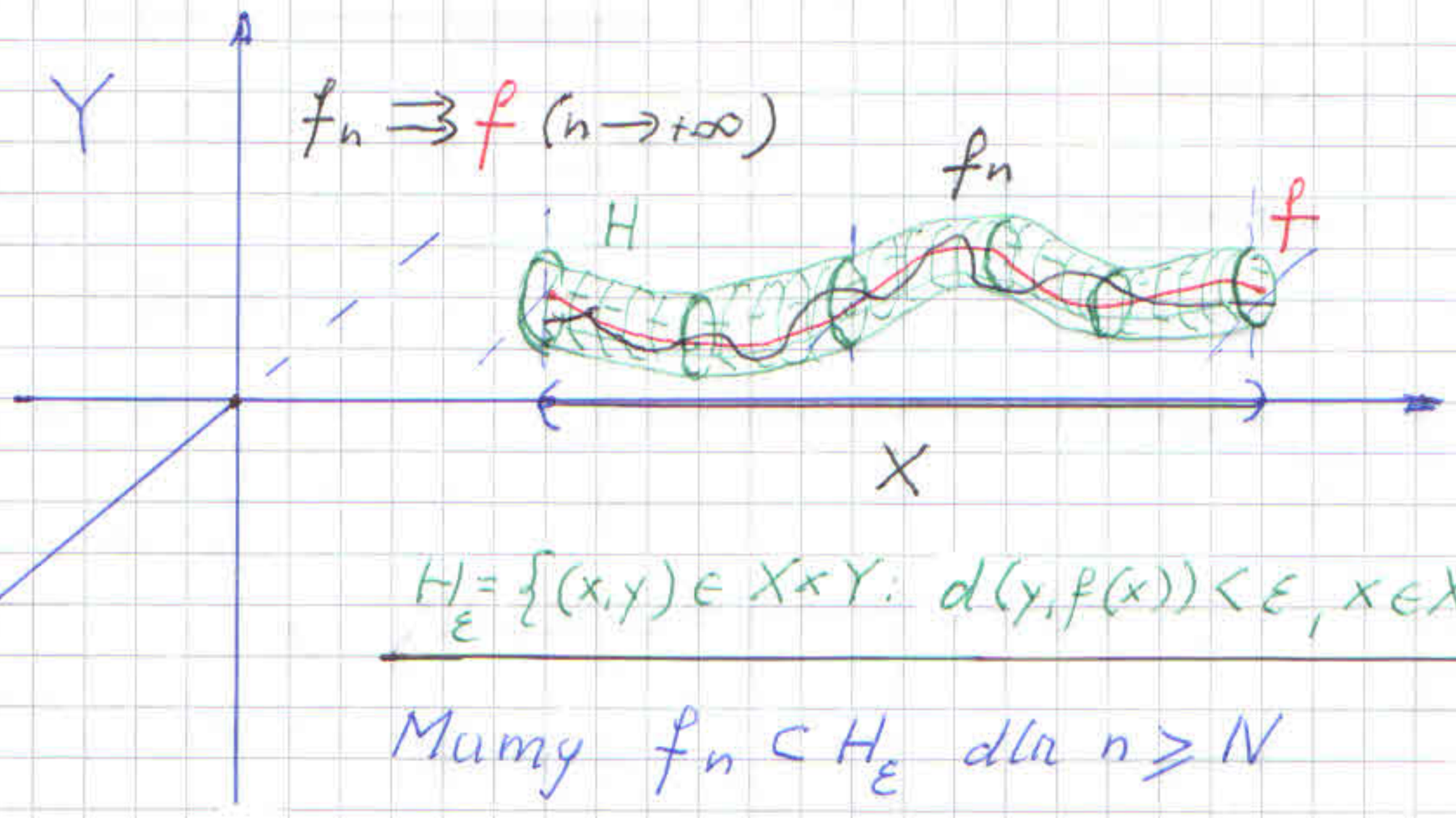
Zakładamy, tak jak przy zbieżności punktowej, że. X jest zbiorem niepustym, (Y,d) przestrzenią metryczną. $f_n: X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$ oraz $f: X \to Y$.

Definicja 5.51 Mówimy, że ciąg funkcyjny $\{f_n\}$ jest zbieżny jednostajnie do f jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N \; \forall x \in X: \; d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon .$$

Piszemy wtedy $f_n \rightrightarrows f \; (n \to +\infty)$ lub $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f \; (n \to +\infty)$

Wprowadzony symbol jest jednoznacznie kojarzony ze zbieżnością jednostajną. Łatwo nadać temu pojęciu interpretację geometryczną. mówiąc o zawieraniu się wykresów funkcji z ciągu w „otoczeniu" wykresu funkcji granicznej



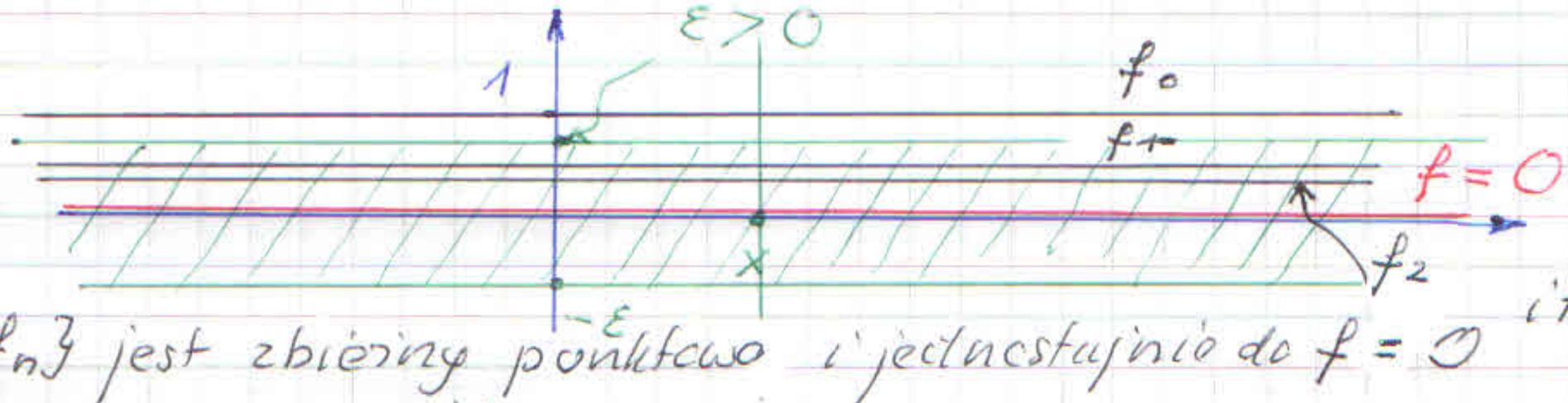
$$H_\varepsilon = \{(x,y) \in X \times Y: \; d(y, f(x)) < \varepsilon, \; x \in X\}, \; \varepsilon > 0$$

Mamy $f_n \subset H_\varepsilon$ dla $n \geq N$

Taką zbieżność zawsze możemy dostać wprowadzając metrykę, co jest możliwe na przykład gdy Y jest ograniczona.

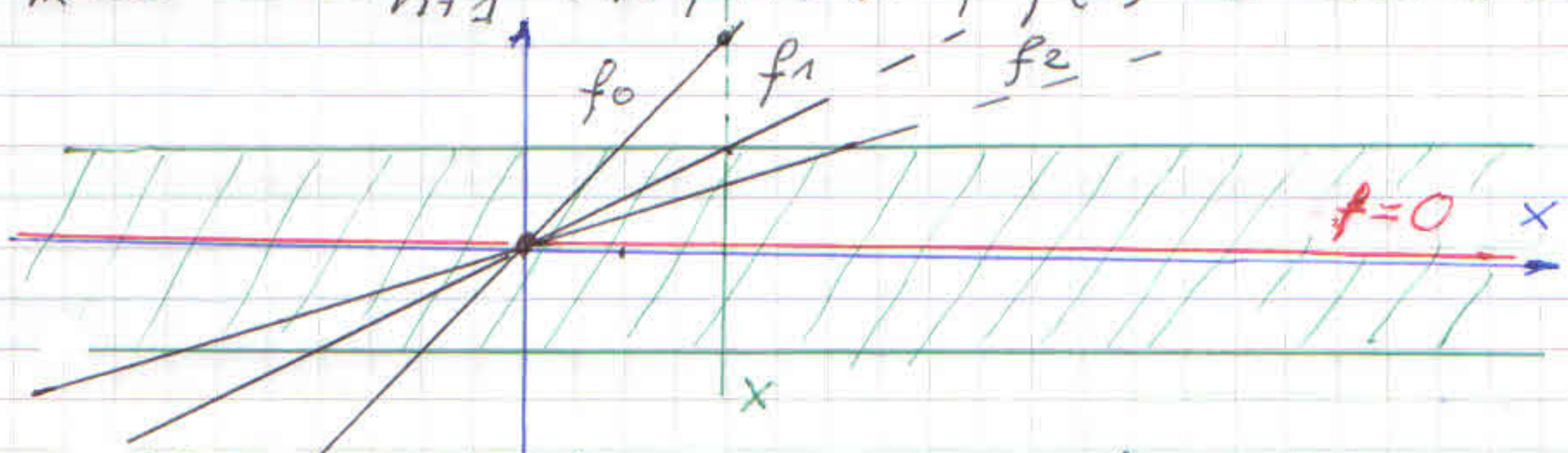
Przykłady 5.52

(1) $f_n : \mathbb{R} \ni x \longrightarrow \frac{1}{n+1} \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R}$



$\{f_n\}$ jest zbieżny punktowo i jednostajnie do $f = 0$ itd.

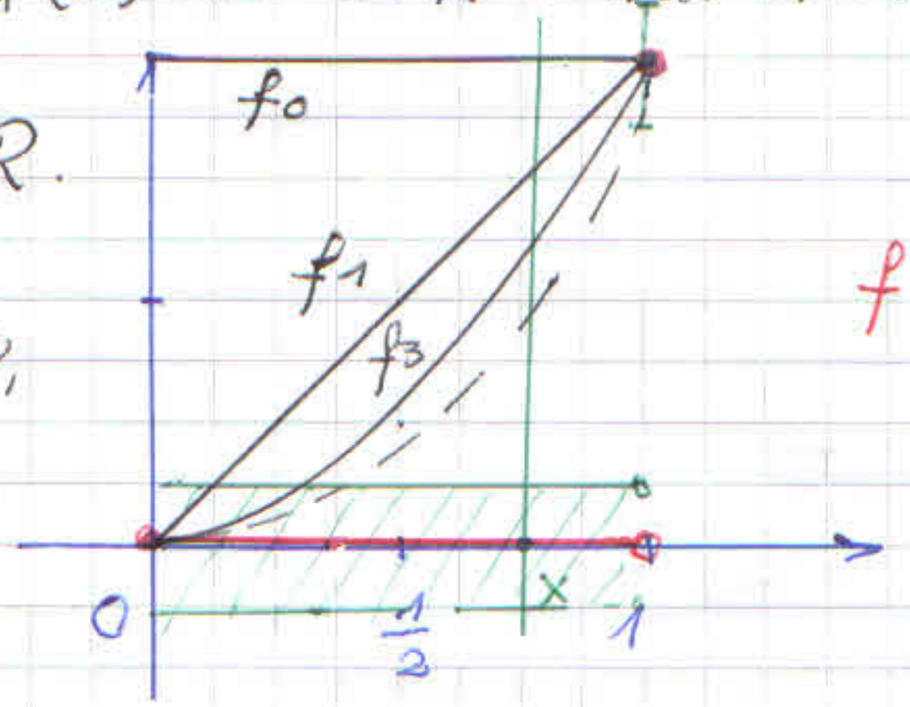
(2) $f_n : \mathbb{R} \ni x \longrightarrow \frac{x}{n+1} \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R}$



Ciąg $\{f_n\}$ jest zbieżny punktowo do $f = 0$ ale nie mamy w tym przypadku zbieżności jednostajnej.

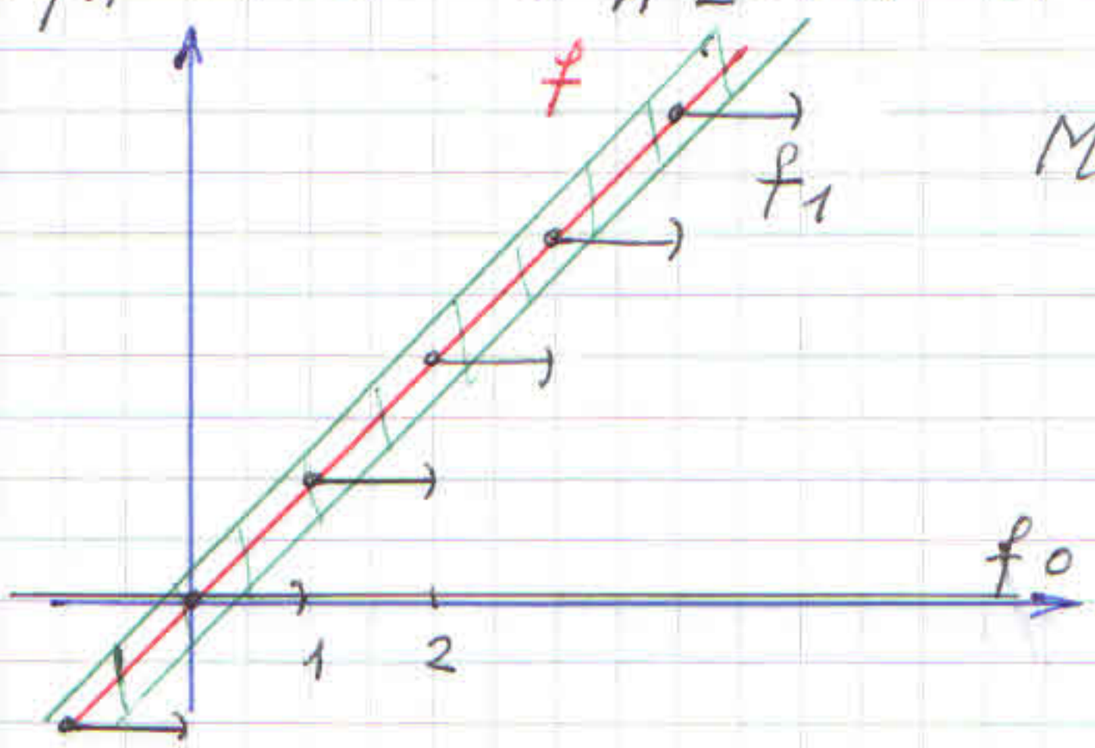
(3) $f_n : [0,1] \ni x \longrightarrow f_n(x) = x^n \in \mathbb{R}$ dla $n \in \mathbb{N}$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases} \in \mathbb{R}.$$



Mamy zbieżność punktową $\{f_n\}$ do f. Nie ma zbieżności jednostajnej.

(4) $f_n : \mathbb{R} \ni x \longrightarrow \frac{1}{n}[nx] \in \mathbb{R}$ dla $n \geq 1$, $f_0 = 0$, $f(x) = x$ dla $x \in \mathbb{R}$



Mamy $nx - 1 < [nx] \leq nx$

$x - \frac{1}{n} < \frac{1}{n}[nx] \leq x$

dla $x \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$

Dostajemy zbieżność punktową, oraz jednostajną $\{f_n\}$ do f.

4. Zbieżność lokalnie jednostajna.

Przy tym typie zbieżności ciągu funkcyjnego zakładamy, że X i Y są niepustymi przestrzeniami metr. $f_n : X \to Y$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $f : X \to Y$.

Definicja 5.53 Mówimy, że ciąg funkcyjny $\{f_n\}$ jest zbieżny lokalnie jednostajnie do f jeśli

$$\forall x \in X \; \exists U\text{-ot. } x : f_n|U \rightrightarrows f|U \; (n \to +\infty).$$

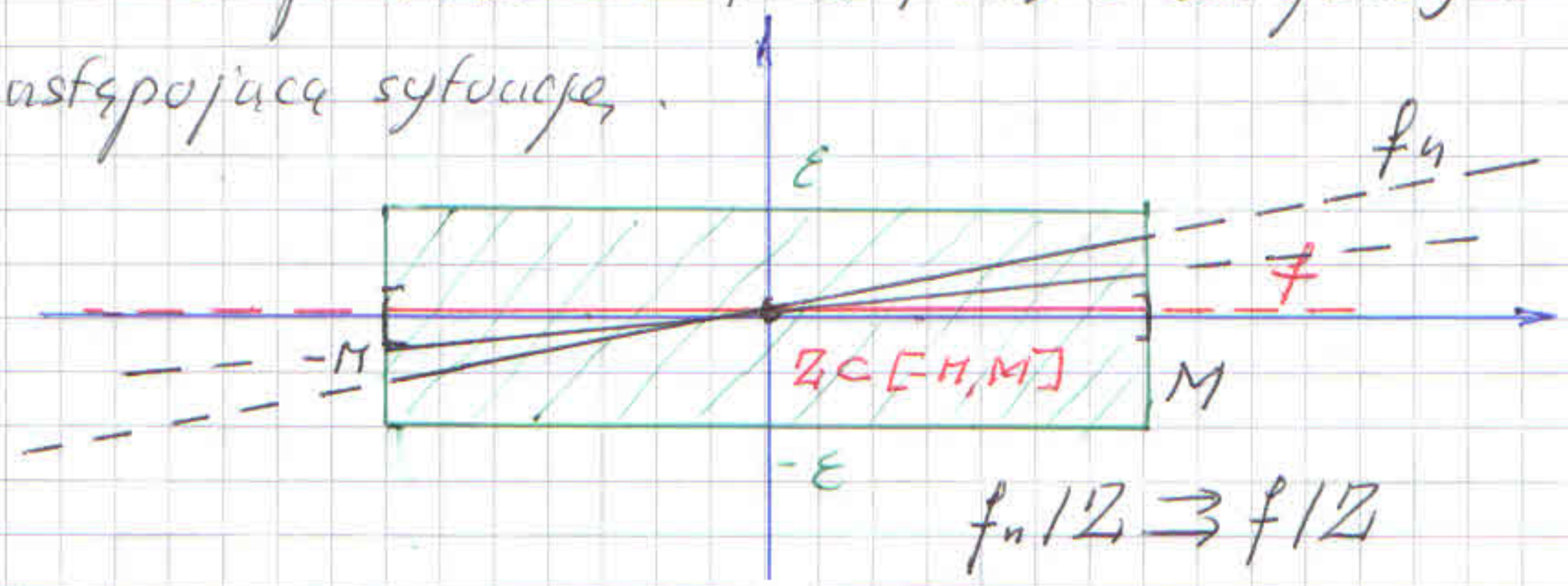
Piszemy wtedy $f_n \to f \; (n \to +\infty)$ (lokalnie jednostajnie)

Nie mamy tutaj specyficznego oznaczenia tej zbieżności i zwykle jest problem z wprowadzeniem tej zbieżności przez metrykę z przestrzeni Y^X.

Uwagi 5.54 W Przykładach 5.52 mamy:

(1) Zbieżność lok. jednostajną $\{f_n\}$ do f, bo jest jednostajna.

(2) Mamy zbieżność jednostajną $\{f_n\}$ do f na każdym zbiorze ograniczonym, gdyż umieszczając zbiór ograniczony $Z \subset \mathbb{R}$ w przedziale $[-M, M]$, $M > 0$ dostajemy następującą sytuację.



$$f_n|Z \rightrightarrows f|Z$$

Stąd także wynika lokalnie jednostajna zbieżność ciągu $\{f_n\}$ do f.

(2) Można zauważyć, że nie będzie zbieżnością lokalnie jednostajnej gdyż dla punktu $x=1 \in [0,1]$ nie znajdziemy otoczenia U w $[0,1]$, w którym mielibyśmy zbieżność jednostajną.

(4) Mamy $f_n \rightrightarrows f \ (n \to +\infty)$ więc również dostajemy zbieżność lokalnie jednostajną.

5. Zbieżność niemal jednostajna.

Niech X, Y będą przestrzeniami metrycznymi niepustymi, $f_n : X \to Y$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $f : X \to Y$

Definicja 5.55 Mówimy, że ciąg funkcyjny $\{f_n\}$ jest niemal jednostajnie zbieżny do f jeśli

$\forall$ K - zwartego, niepustego w X : $f_n|K \rightrightarrows f|K \ (n \to +\infty)$.

Piszemy wtedy $f_n \to f \ (n \to +\infty)$ (niemal jednostajnie)

Brak ogólnego oznaczenia specjalnego na tę zbieżność, ale dość dawno temu (około roku 1975) KMSUJ proponowało symbol $f_n \dashrightarrow f \ (n \to +\infty)$, ale niestety nie zostało to „ogólnie" przyjęte.

Uwaga 5.56 Analiza przykładów 1-4 z 5.52 daje tutaj identyczne wyniki jak przy zbieżności lokalnie jednostajnej, opisanej w poprzednim punkcie.

6. Relacje między zbieżnościami ciągów funkcyjnych.

Ustalmy w tej części $(X,d),(Y,\varrho)$ niepuste przestrzenie metryczne. Dla $f_n: X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$ oraz $f: X \to Y$ rozpatrujemy następujące warunki:

(P) $f_n \to f$ $(n \to +\infty)$ (punktowo)

(J) $f_n \rightrightarrows f$ $(n \to +\infty)$

(L) $f_n \to f$ $(n \to +\infty)$ (lokalnie jednostajnie).

(N) $f_n \to f$ $(n \to +\infty)$ (niemal jednostajnie)

Uwagi 5.57 W powyższej sytuacji:

(1) Każdy z warunków: (J), (L), (N) implikuje (P).

(2) Jeśli X jest skończony, to warunki (P), (J), (L), (N) są równoważne.

Twierdzenie 5.58 Przy powyższych oznaczeniach:

(1) $(J) \Rightarrow (L) \Rightarrow (N) \Rightarrow (P)$.

(2) Jeśli X jest lokalnie zwarta to $(L) \Leftrightarrow (N)$.

(3) Jeśli X jest zwarta, to $(J) \Leftrightarrow (L) \Leftrightarrow (N)$.

D: (1) Implikacje $(J) \Rightarrow (L)$ i $(N) \Rightarrow (P)$ są oczywiste.

Aby wykazać $(L) \Rightarrow (N)$ przypuśćmy, że dla $\{f_n\}$ i f mamy (L) i nie zachodzi (N). Wtedy istnieje zbiór zwarty, niepusty K, na którym nie ma zbieżności jednostajnej $\{f_n|K\}$ do $f|K$, a zatem

$$(\#)\ \exists \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N\ \exists x \in K: \varrho(f_n(x), f(x)) \geq \varepsilon$$

Zatem:

- istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ oraz $x_0 \in K$ takie, że $\varrho(f_{n_0}(x_0), f(x_0)) \geq \varepsilon$
  (z warunku # dla $N = 0$)
- istnieje $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 > n_0$ oraz $x_1 \in K$ takie, że $\varrho(f_{n_1}(x_1), f(x_1)) \geq \varepsilon$.
  (z warunku # dla $N = n_0 + 1$)

..... itd.

Dostajemy więc ciąg $\{x_k\}$ w K oraz ciąg rosnący $n_0 < n_1 < \dots$, takie, że $\varrho(f_{n_k}(x_k), f(x_k)) \geq \varepsilon$ dla $k \in \mathbb{N}$

Skoro K jest zwarty, to z ciągu $\{x_k\}$ możemy wybrać podciąg $\{x_{\varphi(k)}\}$ zbieżny do pewnego punktu $a \in K$ ($\varphi: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ silnie rosnące).

Skoro zachodzi (L) więc istnieje U otoczenie punktu a w X takie, że $f_n|U \rightrightarrows f|U$ $(n \to +\infty)$

Zatem dla wcześniej wybranego $\varepsilon > 0$ mamy.

$$\exists \tilde{N} \in \mathbb{N} \ \forall n \geq \tilde{N} \ \forall x \in U : \varrho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

Jeśli wybierzemy więc $k \in \mathbb{N}$ tak aby $n_{\varphi(k)} \geq \tilde{N}$ oraz $x_{\varphi(k)} \in U$, to z poprzedniej konstrukcji mamy $\varrho(f_{n_{\varphi(k)}}(x_{\varphi(k)}), f(x_{\varphi(k)})) \geq \varepsilon$ co nam daje sprzeczność.

(2) Jeśli X jest lokalnie zwarta, to każdy punkt $x \in X$ ma otoczenie U takie, że $\overline{U}$ jest zwarte, więc mamy.
(N) $\Rightarrow$ (L) zaś przeciwną implikację dostajemy z (1).

(3) Jeśli X jest zwarta, to (N) $\Rightarrow$ (J), ale zawsze.
(J) $\Rightarrow$ (L) $\Rightarrow$ (N), co kończy dowód równoważności

7. Własności zbieżnych ciągów funkcji ciągłych.

Twierdzenie 5.59

Z: (X,d), (Y,ϱ) niepuste przestrzenie metryczne

$f_n : X \to Y$ ciągłe dla $n \in \mathbb{N}$

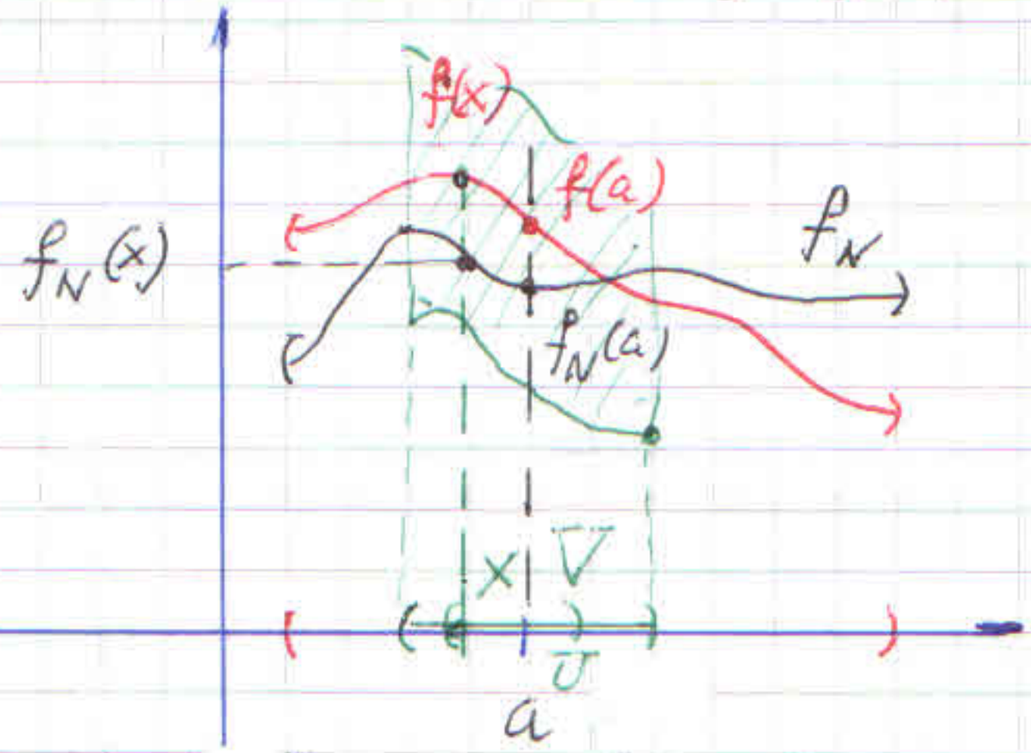
$f : X \to Y$

$f_n \to f$ $(n \to +\infty)$ (lokalnie jednostajnie)

T: f jest ciągłe.

D: Ustalmy $a \in X$ i pokażmy ciągłość f w punkcie a.

Wybierzmy $\varepsilon > 0$ oraz U otoczenie a takie, że $f_n|U \rightrightarrows f|U$ $(n \to +\infty)$. Istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n \geq N$ oraz $x \in U$ mamy $\varrho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon/3$.



Ustalmy funkcję f_N, dla której ze względu na ciągłość w punkcie a istnieje V otoczenie punktu a w U takie, że

$\varrho(f_N(a), f_N(x)) < \varepsilon/3$ dla $x \in V$

Zatem dla $x \in V$ mamy.

$\varrho(f(x), f(a)) \leq \varrho(f(x), f_N(x)) + \varrho(f_N(x), f_N(a)) + \varrho(f_N(a), f(a))$

czyli $\varrho(f(x), f(a)) < \varepsilon$ co kończy dowód ciągłości funkcji f.

Warto zauważyć, że w 5.52(3) granica ciągu funkcji ciągłych nie jest ciągła, więc z 5.59 wynika, że ten ciąg nie może być zbieżny lokalnie jednostajnie.

Twierdzenie 5.60 (Diniego)

Z: X - niepusta, zwarta przestrzeń metryczna

$f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ciągłe dla $n \in \mathbb{N}$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ciągła.

$\forall x \in X \; \forall n \in \mathbb{N}: f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$

$f_n \longrightarrow f \; (n \to +\infty)$ (punktowo).

T: $f_n \rightrightarrows f \; (n \to +\infty)$.

D: Ćwiczenie (obowiązkowe).

8 Przestrzeń funkcji ograniczonych i jej podprzestrzenie.

Niech X będzie zbiorem niepustym zaś (Y,d) niepustą przestrzenią metryczną. Określamy:

$$\mathcal{B}(X,Y) := \{f : X \longrightarrow Y \mid f \text{ - jest ograniczona}\},$$

oraz dla $f, g \in \mathcal{B}(X,Y)$

$$\varrho(f,g) := \sup\{d(f(x),g(x)) : x \in X\} \in [0,+\infty]$$

Lemat 5.61 Odwzorowanie

$$\varrho : \mathcal{B}(X,Y) \times \mathcal{B}(X,Y) \ni (f,g) \longrightarrow \varrho(f,g) \in [0,+\infty)$$

jest metryką w $\mathcal{B}(X,Y)$.

D: Łatwo zauważyć, że dla f, g - ograniczonych dostajemy $\varrho(f,g) \in [0,+\infty)$. Przechodząc do sprawdzenia, że ϱ jest metryką widzimy, że dwa pierwsze warunki są spełnione w sposób oczywisty zaś mamy pokazać, że spełniona jest nierówność trójkąta.

Niech $f,g,h \in \mathcal{B}(X,Y)$ i wybierzmy dowolne $x \in X$. Wtedy

$d(f(x),h(x)) \leq d(f(x),g(x)) + d(g(x),h(x)) \leqslant \varrho(f,g) + \varrho(g,h)$.

Więc $\varrho(f,h) \leqslant \varrho(f,g) + \varrho(g,h)$, co kończy dowód.

Definicja 5.62 W rozpatrywanej sytuacji $\mathcal{B}(X,Y)$ nazywamy przestrzenią funkcji ograniczonych na X o wartościach w Y zaś ϱ „metryką supremową" w tej przestrzeni.

Twierdzenie 5.63

Z: $X \neq \emptyset$, (Y,d) - przestrzeń metryczna.
$f_n \in \mathcal{B}(X,Y)$ dla $n \in \mathbb{N}$, $f: X \longrightarrow Y$

T: Następujące warunki są równoważne:
(1) $f_n \rightrightarrows f \ (n \to +\infty)$
(2) $f \in \mathcal{B}(X,Y)$ oraz $f_n \longrightarrow f \ (n \to +\infty)$ w metryce ϱ

D: (1) $\Rightarrow$ (2) Zauważmy na wstępie, że
$\exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant N \ \forall x \in X : d(f_n(x), f(x)) < 7$, więc jeśli f_N jest ograniczona, to f również (ćw.).

Aby wykazać zbieżność ustalmy $\varepsilon > 0$. Wtedy.
$\exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant N \ \forall x \in X : d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon/2$.
Zatem dla $n \geqslant N$ dostajemy $\varrho(f_n, f) \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon$.
Wynika stąd, że
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant N : \varrho(f_n, f) < \varepsilon$,
co dalej zbieżność w metryce ϱ.

(2) $\Rightarrow$ (1) Oczywiste.

Do najważniejszych faktów dotyczących przestrzeni $\mathcal{B}(X,Y)$ należy zaliczyć następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5.64

Z: $X \neq \emptyset$, (Y,d) - zupełna przestrzeń metryczna.

T: $(\mathcal{B}(X,Y), \varrho)$ - jest przestrzenią metryczną zupełną.

D: Niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w $\mathcal{B}(X,Y)$. Wtedy ustalając $x \in X$ dostajemy ciąg $\{f_n(x)\}$ w Y, który jest ciągiem Cauchy'ego gdyż

$$d(f_p(x), f_q(x)) \leq \varrho(f_p, f_q) \quad \text{dla } p,q \in \mathbb{N}$$

Zatem dla dowolnego $x \in X$ ciąg $\{f_n(x)\}$ jest zbieżny, co pozwala nam określić $f: X \to Y$ przez.

$$f(x) := \lim_{n \to +\infty} f_n(x) \quad \text{dla } x \in X.$$

Biorąc $\varepsilon > 0$ mamy $N \in \mathbb{N}$ takie, że.

$$\forall_{p,q \geq N}: \varrho(f_p, f_q) < \varepsilon/2$$

Zatem

$$\forall x \in X \; \forall p \geq N: \; \varrho(f_p(x), f(x)) \leq \varepsilon/2.$$

Czyli $\forall n \geq N: \varrho(f_n, f) < \varepsilon$ czyli $f_n \to f \; (n \to +\infty)$.

w metryce ϱ przestrzeni $\mathcal{B}(X,Y)$.

Najważniejsze podprzestrzenie $\mathcal{B}(X,Y)$

Niech teraz X i Y będą przestrzeniami metrycznymi. Określamy przestrzeń

$$\mathcal{CB}(X,Y) = \{f \in \mathcal{B}(X,Y) : f \text{ - ciągłe}\},$$

którą rozpatrywać będziemy z metryką indukowaną z przestrzeni $\mathcal{B}(X,Y)$.

Twierdzenie 5.65

Z: X, Y - niepuste przestrzenie metryczne

T: $\mathcal{CB}(X,Y)$ jest domkniętym podzbiorem $\mathcal{B}(X,Y)$.

D: Niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem w $\mathcal{CB}(X,Y)$ zbieżnym do $f \in \mathcal{B}(X,Y)$ w metryce ϱ. Wtedy $f_n \rightrightarrows f \ (n \to +\infty)$ więc na podstawie 5.59 $f: X \longrightarrow Y$ jest ciągłe, czyli w efekcie $f \in \mathcal{CB}(X,Y)$, co kończy dowód.

Dostajemy stąd łatwo kolejny ważny fakt

Twierdzenie 5.66

Z: X, Y - niepuste przestrzenie metryczne, Y - jest zupełna.

T: $\mathcal{CB}(X,Y)$ jest zupełną przestrzenią metryczną.

D: $\mathcal{CB}(X,Y)$ jest domkniety w przestrzeni zupełnej $\mathcal{B}(X,Y)$ na podstawie 5.65 i 5.64.

Jak łatwo zauważyć podzbiory domknięte przestrzeni zupełnych są zawsze zupełne (Ćw.) co kończy dowód.

Jeśli $X = K$ jest niepustą przestrzenią metryczną zwartą, wtedy funkcje ciągłe o wartościach w przestrzeni metrycznej Y są zawsze ograniczone i mierzy.

opuścić ograniczenie dostajemy przestrzeń

$$\mathcal{C}(K,Y) = \mathcal{CB}(K,Y) = \{f: K \to Y \mid f \text{ - ciągłe}\}.$$

rozpatrywaną z metryką supremacyjną.

Bardzo często w miejsce Y pojawia się ciało $\mathbb{K}$ i dostajemy przestrzeń $\mathcal{C}(K,\mathbb{K})$ zapisywaną przez $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(K)$.

§5. Szeregi funkcyjne

1. Ogólne spojrzenie na pojęcie szeregu

Szeregi elementów możemy rozważać w bardzo ogólnych strukturach; ale naturalne są w tym zakresie przestrzenie wektorowe nad dość dowolnym ciałem (np. $\mathbb{K}$)

Jeśli V jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$, to wprowadzamy następującą definicję.

Definicja 5.67 Szeregiem $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ nazywamy parę ciągów $(\{x_n\}, \{s_n\})$ w przestrzeni V, gdzie $s_n = x_0 + \dots + x_n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Ciąg $\{x_n\}$ nazywamy ciągiem wyrazów wyjściowego szeregu zaś $\{s_n\}$ nazywamy ciągiem jego sum częściowych.

Dalsze rozważania dotyczące kolejnych pojęć wymagają dodatkowych informacji o V

2. Podstawowe pojęcia i fakty

Ustalmy zbiór $X \neq \emptyset$ oraz przestrzeń wektorową W nad $\mathbb{K}$. Wtedy w $V = W^X$ mamy naturalną strukturę przestrzeni wektorowej nad $\mathbb{K}$.

Definicja 5.68 Szeregiem funkcyjnym na X o wartościach w W nazywamy szereg w przestrzeni wektorowej W^X.

W dalszym ciągu przy ustalonym zbiorze $X \neq \emptyset$ rozpatrywać będziemy szeregi funkcyjne o wartościach w $\mathbb{K}$. Mamy zatem ciąg $\{f_n\}$, $f_n: X \to \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$ oraz ciąg jego sum częściowych

$$s_n = f_0 + \dots + f_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Rozkład zbieżności szeregu funkcyjnego $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ określimy poprzez odpowiednie własności ciągu funkcyjnego $\{s_n\}$.

Definicja 5.69 Mówimy, że szereg funkcyjny $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ jest:

(1) punktowo zbieżny do $f: X \to \mathbb{K}$ gdy $\{s_n\}$ jest punktowo zbieżny do f,

(2) jednostajnie zbieżny do $f: X \to \mathbb{K}$ gdy $\{s_n\}$ jest jednostajnie zbieżny do f,

(3) lokalnie jednostajnie zbieżny do $f: X \to \mathbb{K}$, gdy X - jest p. metryczną oraz $\{s_n\}$ jest lokalnie jednostajnie zbieżny do f,

(4) niemal jednostajnie zbieżny do $f: X \to \mathbb{K}$, gdy. X - jest p. metryczną oraz $\{s_n\}$ jest niemal jednostajnie zbieżny do f.

W tych przypadkach funkcję f nazywamy sumą szeregu wyjściowego i oznaczamy $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

Badając szeregi funkcyjne możemy wygodnie korzystać z własności ciągów funkcyjnych, ale na wyróżnienie zasługuje następujące twierdzenie

Twierdzenie 5.70 (Kryterium Weierstrassa)

Z: $X \neq \emptyset$, $f_n : X \longrightarrow \mathbb{K}$ dla $n \in \mathbb{N}$
$M_n \geqslant 0$ dla $n \in \mathbb{N}$, szereg $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' M_n$ jest zbieżny
$\forall n \in \mathbb{N} \; \forall x \in X : |f_n(x)| \leqslant M_n$

T: Szereg funkcyjny $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' f_n$ jest jednostajnie zbieżny do pewnej funkcji $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$.

D: Wynik ten jest konsekwencją zupełności $\mathbb{K}$ zaś idea dowodu jest podobna jak w 5.64.
Na wstępie określimy funkcję $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$, do której powinien być zbieżny szereg.
Ustalmy $x \in X$ i zauważmy, że $|f_n(x)| \leqslant M_n$, $n \in \mathbb{N}$ daje nam bezwzględną zbieżność szeregu $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' f_n(x)$.
Zatem możemy określić funkcję

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty}{}' f_n(x) \quad \text{dla } x \in X.$$

Dla dowolnych $p < q$ i $x \in X$ mamy nierówność

$$\left| \sum_{n=0}^{q}{}' f_n(x) - \sum_{n=0}^{p}{}' f_n(x) \right| \leqslant M_{p+1} + \ldots + M_q$$

Ponieważ szereg $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' M_n$ spełnia warunek Cauchy'ego więc ustalając $\varepsilon > 0$ znajdziemy $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla $N \leqslant p < q$ i $x \in X$ jest

$$\left| \sum_{n=0}^{q}{}' f_n(x) - \sum_{n=0}^{p}{}' f_n(x) \right| < \varepsilon/2$$

Ustalmy $p \geq N$ i przejdźmy z q do $+\infty$ dostając w granicy

$$|f(x) - \sum_{n=0}^{p} f_n(x)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon,$$

co daje nam jednostajną zbieżność ciągu $s_n = \sum_{n=0}^{p} f_p$.

3. Szeregi potęgowe

Ustalmy ciało $\mathbb{K}$, $z_0 \in \mathbb{K}$, $\{a_n\}$ ciąg w $\mathbb{K}$.
Rozpatrujemy ciąg funkcyjny

$$f_n : \mathbb{K} \ni z \longrightarrow f_n(z) = a_n (z - z_0)^n \in \mathbb{K}.$$

Definicja 5.71 Szereg funkcyjny $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' f_n$ nazywamy szeregiem potęgowym o środku z_0 i współczynnikach a_n, $n \in \mathbb{N}$. Zwykle w tym przypadku piszemy szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' a_n (z - z_0)^n$.

Dla ustalonego szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' a_n (z - z_0)^n$ rozpatrujemy następujące cztery obiekty:

$$\lambda := \limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, +\infty]$$

$$R := \begin{cases} 0 & \text{gdy } \lambda = +\infty, \\ 1/\lambda & \text{gdy } \lambda \in (0, +\infty), \\ +\infty & \text{gdy } \lambda = 0. \end{cases}$$ tak zw. promień zbieżności

$K := \{z \in \mathbb{K} : |z - z_0| < R\}$, tak zwane koło zbieżności

$E := \{z \in \mathbb{K} : \text{szereg } \sum_{n=0}^{+\infty}{}' a_n (z - z_0)^n \text{ jest zbieżny}\}$,
tak zwany zbiór punktów zbieżności.

Lemat 5.72

Z: $\{a_n\}$ ciąg w $\mathbb{K}$, $w \in \mathbb{K}$, ciąg $\{a_n w^n\}$ jest ograniczony.
$z \in \mathbb{K}$, $|z| < |w|$

T: Szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ jest bezwzględnie zbieżny

D: Jeśli $|z| < |w|$, to $w \neq 0$ oraz otrzymujemy

$$|a_n z^n| = |a_n w^n| \cdot \left|\frac{z}{w}\right|^n \leq M \Theta^n,$$

gdzie $M \geq 0$ jest takie, że $|a_n w^n| \leq M$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $\Theta = \left|\frac{z}{w}\right| \in [0,1)$. Kryterium porównawcze daje nam więc tezę Lematu.

Stąd dostajemy następujące, ważne twierdzenie

Twierdzenie 5.73

Z: $z_0 \in \mathbb{K}$, $\{a_n\}$ ciąg w $\mathbb{K}$

R, K, E to odpowiednio promień, koło zbieżności, zbiór punktów zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$

T: (1) $K = \operatorname{int} E \subset E \subset \{z \in \mathbb{K} : |z - z_0| \leq R\}$.

(2) Dla $z \in K$ szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ jest bezwzględnie zbieżny

(3) Po zacieśnieniu do K szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ jest szeregiem funkcyjnym lokalnie jednostajnie zbieżnym gdy $K \neq \emptyset$.

(4) Funkcja $f: K \ni z \longrightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \in \mathbb{K}$ jest ciągła.

D: Zauważmy na wstępie, że dla $z = z_0$ dostajemy szereg zerujący się poza pierwszym wyrazem a_0, więc bezwzględnie zbieżny do a_0.

Jeśli $z \neq z_0$, to otrzymujemy dla szeregu liczbowego $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ przy kryterium Cauchy'ego

$$\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n||z-z_0|^n} = |z-z_0| \cdot \lambda,$$ gdzie $\lambda \in [0, +\infty]$ jest stałą określoną na str. 5-41.

Po tym przygotowaniu punkty (1) i (2) rozpatrujemy w trzech możliwych przypadkach:

I. $\lambda = +\infty$, a wtedy $R = 0$, $K = \emptyset$ oraz łatwo zauważyć, że $E = \{z_0\}$ i (1), (2) zachodzą.

II. $\lambda = 0$, a wtedy $R = +\infty$, oraz z kryterium Cauchy'ego $E = \mathbb{K} = K$, więc (1), (2) zachodzą.

III. $\lambda \in (0, +\infty)$, więc $R = 1/\lambda$ i z kryterium Cauchy'ego dostajemy

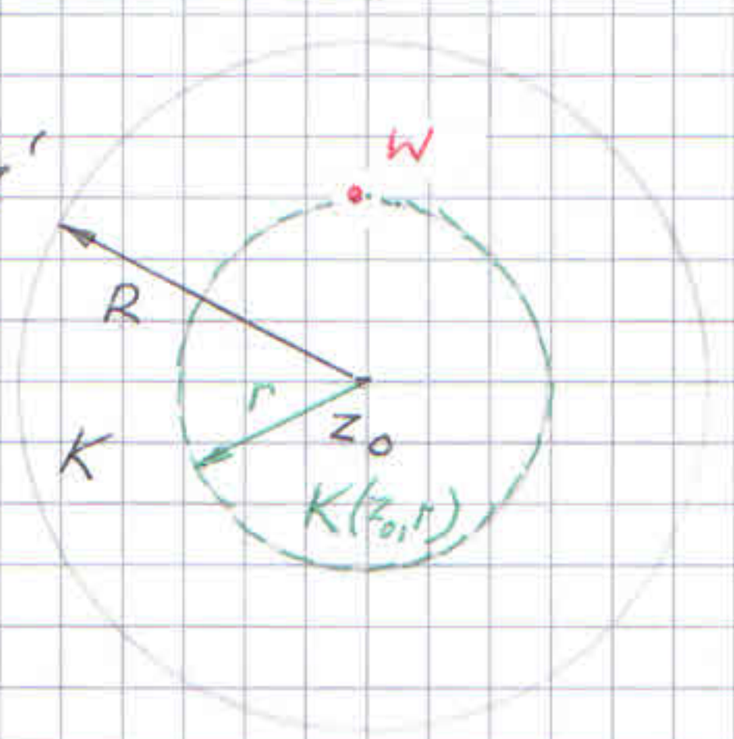
$$\{z \in \mathbb{K} : |z-z_0| < R\} \subset E \subset \{z \in \mathbb{K} : |z-z_0| \leq R\},$$

oraz w $K(z_0, R)$ mamy bezwzględną zbieżność, więc punkty (1) i (2) tezy są spełnione.

Punkty (3) i (4) należy sprawdzić gdy $K \neq \emptyset$ czyli gdy $R \in (0, +\infty]$.
Pokażemy w tej sytuacji, że dla $r \in (0, R)$ w $K(z_0, r)$ mamy jednostajną zbieżność szeregu funkcyjnego $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n | K(z_0, r)$ gdzie

$$f_n : \mathbb{K} \ni z \longrightarrow f_n(z) = a_n (z-z_0)^n \in \mathbb{K} \text{ dla } n \in \mathbb{N}.$$

Wybierzmy $N \in \mathbb{K}$, tak aby $\underline{|z_0 - w| = r}$



Mamy dla $z \in K(z_0, r)$ nierówność

(*) $\underline{|a_n(z-z_0)^n| \leq |a_n(w-z_0)^n|}$

$\underline{\text{dla } n \in \mathbb{N}}$

Szereg $\sum' a_n(w-z_0)^n$ jest bezwzględnie zbieżny, więc z kryterium Weierstrassa dostajemy jednostajną zbieżność szeregu funkcyjnego $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' f_n | K(z_0, r)$. Stąd tutaj wynikają punkty (3) i (4) dowodzonego twierdzenia.

Przykłady 5.74

(1) Szereg $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' n^n z^n$ ma zerowy promień zbieżności.

(2) Szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' \frac{z^{n+1}}{n+1}$ ma promień zbieżności $R = 1$. Łatwo sprawdzić stosując kryterium Dirichleta, że $E = \overline{K}(0,1) \setminus \{1\}$.

(3) Wielomiany pojawiają się w przypadku $z_0 = 0$ oraz $a_n = 0$ dla $n > N$ gdzie $N \in \mathbb{N}$ zostało ustalone. Łatwo zauważyć, że $R = +\infty$. Dostajemy funkcje postaci

$$\underline{P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_N z^N}.$$

Piszemy wtedy $\underline{P \in \mathbb{K}[z]}$. To samo dostajemy startując od dowolnego $z_0 \in \mathbb{K}$.

§6. Wybrane funkcje zadane szeregami potęgowymi

1. Funkcja „exp" na $\mathbb{K}$

Szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ jest zbieżny dla wszelkich $z \in \mathbb{K}$, więc mamy $R = +\infty$ (ćw.), więc możemy wprowadzić następującą definicję.

Definicja 5.75 Określamy

$$\exp : \mathbb{K} \ni z \longrightarrow \exp(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \in \mathbb{K}$$

Twierdzenie 5.76

(1) $\exp(0) = 1$,

(2) $\exp(1) = e$,

(3) $z, w \in \mathbb{K} \Rightarrow \exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$

(4) $\exp(\mathbb{K}) \subset \mathbb{K} \setminus \{0\}$

(5) $\exp(-z) = (\exp(z))^{-1}$ dla $z \in \mathbb{K}$

D: (1) Oczywiste

(2) $\exp(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$

(3) Ustalmy $z, w \in \mathbb{K}$ i utwórzmy iloczyn dwóch szeregów bezwzględnie zbieżnych $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ i $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^n}{n!}$. Mamy wtedy.

$$c_n = \sum_{p+q=n} \frac{z^p w^q}{p!\,q!} = \frac{1}{n!} \sum_{p+q=n} \binom{n}{p} z^p w^q =$$

$$= \frac{1}{n!}(z+w)^n$$

Zatem z kryterium Abela (4.32) mamy.

$$\exp(z) \cdot \exp(w) = \exp(z+w).$$

(4) i (5) Dla $z \in \mathbb{C}$ z (3) dostajemy.
$\exp(z)\cdot\exp(-z) = \exp(0) = 1$, więc stąd wynika.
$\exp(z) \neq 0$ oraz $\exp(-z) = (\exp(z))^{-1}$, co kończy.
dowód 5.76.

Twierdzenie 5.77 Zachodzi równość
$$\exp(x) = e^x \text{ dla } x \in \mathbb{R}$$

D: Z 5.76 mamy $\exp(1) = e$, zatem $\exp(2) = e^2$,
$\exp(3) = e^3$ i ogólnie $\exp(n) = e^n$ dla $n \in \mathbb{N}$
Dla $p \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ mamy $\exp(p) = (\exp(-p))^{-1} =$
$= (e^{-p})^{-1} = e^p$. Zatem $\exp(p) = e^p$ dla $p \in \mathbb{Z}$
Jeśli więc teraz $p \in \mathbb{Z}$ oraz $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, to
$$(\exp(\tfrac{p}{q}))^q = \exp(p) = e^p, \text{ a zatem}$$
$$\exp(\tfrac{p}{q}) = e^{\frac{p}{q}} \text{ co kończy dowód.}$$

Uwagi 5.78
(1) Funkcja exp jest naturalnym, ciągłym przekształceniem na $\mathbb{R}$ i na $\mathbb{C}$ funkcji e^x, $x \in \mathbb{Q}$.
W dalszym ciągu będziemy stosować oznaczenie.
$$e^z := \exp(z) \text{ dla } z \in \mathbb{K}.$$

(2) W identyczny sposób funkcja exp jest określana na tzw. Algebrach Banacha, których prostym przykładem jest przestrzeń macierzy kwadratowych ze zwykłym dodawaniem i mnożeniem macierzy jako mnożeniem (nieprzemiennym!)

2. Funkcje trygonometryczne

Ustalmy $z \in \mathbb{C}$, wtedy

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} + i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

Definicja 5.79 Określamy dla $z \in \mathbb{C}$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

Jak łatwo zauważyć ze wstępnego przeliczenia dostajemy:

$$(*) \quad \begin{aligned} e^{iz} &= \cos z + i \sin z \\ e^{-iz} &= \cos z - i \sin z \end{aligned}$$

Lemat 5.80 Dla dowolnych $z, w \in \mathbb{C}$:

(1) $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$,

(2) $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$,

(3) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$,

(4) $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \sin w \cos z$

(5) $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \cdot \sin w$

D: Dodając i odejmując równości (*) stronami
tirtwo dostajemy (1) i (2).
Mnożąc równość (*) otrzymujemy

$$1 = (\cos z + i\sin z)(\cos z - i\sin z) =$$
$$= \cos^2 z - (i\sin z)^2 = \cos^2 z + \sin^2 z,$$

co daje nam (3)
Skoro $e^{iz} = \cos z + i\sin z$, $e^{iw} = \cos w + i\sin w$,
to $e^{i(z+w)} = (\cos z\cos w - \sin z\sin w) +$
$+ i(\cos z\sin w + \cos w\sin z)$, skąd

$$\cos(z+w) + i\sin(z+w) = (\cos z\cos w - \sin z\sin w) +$$
$$+ i(\cos z\sin w + \cos w\sin z)$$

Jeśli w tej równości wstawimy w miejsce argumentów
z, w wartości przeciwne $-z, -w$, to dostaniemy dzięki
parzystości potęg „cos" i nieparzystości „sin"

$$\cos(z+w) - i\sin(z+w) = (\cos z\cos w - \sin z\sin w) +$$
$$- i(\cos z\sin w + \cos w\sin z).$$

Teraz dodając i odejmując stronami ostatnie
dwie równości dostaniemy (4) i (5).

Uwagi 5.81

(1) Uzyskane funkcje e^z, $\sin z$, $\cos z$ są ciągłymi odwzorowaniami na $\mathbb{K}$ o wartościach w $\mathbb{K}$.

(3) Ponieważ e^z, $\sin z$, $\cos z$ mają współczynniki rzeczywiste, to dla liczb $z \in \mathbb{R}$ przyjmują one wartości $z \in \mathbb{R}$.

Rozdział 6. Wstępne informacje o funkcjach analitycznych i ich zastosowaniach.

§1. Funkcje analityczne

1. Podstawowe informacje.

Ustalmy ciało $\mathbb{K}$ oraz Ω niepusty, otwarty podzbiór $\mathbb{K}$.

Definicja 6.01 Funkcję $f: \Omega \to \mathbb{K}$ nazywamy *analityczną w Ω* jeśli

$\forall z_0 \in \Omega \; \exists r>0 \; \exists \{a_n\}$ ciąg w $\mathbb{K}$:

(1) $K(z_0, r) \subset \Omega$,

(2) $\forall z \in K(z_0, r)$: szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ jest bezwzględnie zbieżny,

(3) $\forall z \in K(z_0, r)$: $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$.

Uwagi 6.02

(1) Rodzinę funkcji analitycznych w Ω jest czasami oznaczana $C^\omega(\Omega)$ uzupełniając ciąg $C^0(\Omega) \supset C^1(\Omega) \supset \ldots \supset C^\infty(\Omega) \supset C^\omega(\Omega)$ który poznamy w ramach rachunku różniczkowego. W ciągu tym mam kolejno: funkcje ciągłe, klasy C^1, ..., klasy C^∞.

(2) W przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ funkcje analityczne zwykle nazywane są holomorficznymi zaś ich rodzinę oznaczamy $\mathcal{O}(\Omega)$.

(3) Zbiór $C^\omega(\Omega)$ z naturalnym dodawaniem i mnożeniem funkcji ma strukturę pierścienia przemiennego z jedynką.

(4) W fizyce spotykamy się ze stwierdzeniami, że wszystkie funkcje pojawiające się w przyrodzie są analityczne.

Przykłady 6.03

(1) Wielomiany. Dla $f \in \mathbb{K}[z]$ mamy przedstawienie $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$, $n \in \mathbb{N}$ $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. Zatem, spowodowane definicją dla $\Omega = \mathbb{K}$ możemy wybrać dowolne $r > 0$ dostając przedstawienie w punkcie $z_0 = 0$. Zmieniając z_0 przekształcamy jedynie zapis na $f(z) = f((z-z_0)+z_0) =$ $= a_0 + a_1((z-z_0)+z_0) + \dots + a_n((z-z_0)+z_0)^n$, co po zastosowaniu wzoru Newtona da nam $f(z) = (a_0 + a_1 z_0 + \dots + a_n z_0^n) + \dots + a_n(z-z_0)^n$, co kończy sprawdzenie

(2) $f: \mathbb{K} \setminus \{0\} \ni z \longrightarrow \frac{1}{z} \in \mathbb{K}$.

Wybierając $z_0 \in \Omega = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ zapisujemy dla $z \in \Omega$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z - z_0 + z_0} = \frac{1}{z_0} \frac{1}{1 - \left(-\frac{z-z_0}{z_0}\right)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{z_0^{n+1}} (z-z_0)^n$$

jeśli $\left|\frac{z-z_0}{z_0}\right| < 1$ czyli gdy $z \in K(z_0, |z_0|)$.

W tym kole mamy bezwzględną zbieżność naszego szeregu geometrycznego

(3) $f: \mathbb{K} \ni z \longrightarrow e^z \in \mathbb{K}$.

Mamy przedstawienie $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ dla $z \in \Omega = \mathbb{K}$, co stanowi dla dowolnego $r > 0$ wymagany warunek w punkcie $z_0 = 0$.
Aby dostać przedstawienie w dowolnym punkcie $z_0 \in \mathbb{K}$ możemy skorzystać z własności

$$e^z = e^{z-z_0} e^{z_0},$$

skąd dostaniemy

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{z_0}}{n!} (z-z_0)^n,$$

co daje zapis wymagany w definicji dla dowolnego $r > 0$.

(4) Funkcje $\sin: \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$, $\cos: \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$.

Możemy sprawdzić ich analityczność korzystając z punktu (3) oraz równości uzyskanych poprzednio w Lemacie 5.80 ((1) i (2)). (C.w.)

Uwaga 6.04 Chwilowo mówimy o funkcjach analitycznych jednej zmiennej w $\mathbb{K}$ o wartościach w $\mathbb{K}$. Podobne definicje stawiane są w ogólniejszych sytuacjach np. funkcje analityczne m-zmiennych $z = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{K}^m$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ o wartościach w $\mathbb{K}^n$, zwane zazwyczaj odwzorowaniami analitycznymi. Mamy również stosowne rozszerzenia teorii dla wymiarów nieskończonych po stronie zmiennych i / lub wartości.

Uwaga 6.05. Funkcja e^z oraz $\sin z$, ccsz zadowane są na całym $\mathbb{K}$ jednym szeregiem bezwzględnie zbieżnym. Dla takiego szeregu umieliśmy znaleźć zapis, który przesuwa jego środek do dowolnego innego punktu $z_0 \in \mathbb{K}$. Okazuje się, że przedstawienie funkcji za pomocą szeregu bezwzględnie zbieżnego w pewnym kole daje w nim zawsze funkcję analityczną, czyli mamy możliwość przesunięcia środka szeregu do dowolnego punktu wyjściowego koła. Daje to bardzo ważne uproszczenie przy wprowadzaniu ovaz badaniu funkcji analitycznych.

2. Rodziny liczb bezwzględnie sumowalne.

Niech A będzie zbiorem przeliczalnym ($\#A = \aleph_0$) będącym zbiorem wskaźników rodziny $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ złożonej z elementów $\mathbb{K}$.

Definicja 6.06 Rodzinę $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ nazywamy bezwzględnie sumowalną jeśli istnieje bijekcja $\varphi: \mathbb{N} \to A$ taka, że szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} x_{\varphi(n)}$ jest bezwzględnie zbieżny.

Uwagi 6.07

(1) Dzięki twierdzeniu o tasowaniu w powyższej definicji kwantyfikator mały możemy zastąpić dużym kwantyfikatorem.

(2) Można mówić o sumowaniu dość dowolnych rodzin liczb, ale ważne informacje spotykamy jedynie w przypadku rodzin przeliczalnych. Do takich rodzin ograniczymy nasze dalsze rozważania.

(3) Jeśli sumujemy rodziny przekształcone lub szeregi w ogólniejszych strukturach takich jak przestrzenie unormowane czy przestrzenie Banacha, to pojawia nam się w dość naturalny sposób, kolejne pojęcie tak zwanej przemiennej zbieżności. Zagadnienie to omówimy dokładniej w dalszej części tego wykładu AM, przy szeregach w przestrzeniach Banacha.

Dzięki twierdzeniu o tasowaniu możemy wprowadzić w sposób naturalny, pojęcie sumy rodziny liczb bezwzględnie sumowalnej.

Definicja 6.07 Jeśli $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ jest rodziną liczb bezwzględnie sumowalną oraz $\varphi: \mathbb{N} \to A$ jest bijekcją, to sumę $\sum_{n=0}^{+\infty} x_{\varphi(n)}$ bezwzględnie zbieżnego szeregu $\sum_{n=0}^{+\infty} x_{\varphi(n)}$ nazywamy sumą rodziny $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ i oznaczamy $\sum_{\alpha\in A} x_\alpha$.

3. Sumowanie rodzin dwuwskaźnikowych.

Niech $A = \mathbb{N}^2 = \{(i,j) : i,j \in \mathbb{N}\}$. Rozpatrujemy rodzinę liczb $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ zapisując $x_{ij} := x_{(i,j)}$ dla $i,j \in \mathbb{N}$. Rodzinę tę możemy wypisać następująco

$$\begin{array}{llll} x_{00} & x_{01} & x_{02} & \ldots \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} & \ldots \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Jeśli teraz rodzina $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ jest bezwzględnie sumowalna, to łatwo zauważyć (ćw.), że szeregi wyrazów z wierszy są bezwzględnie zbieżne i oznaczmy ich sumy przez $Y_i = \sum_{j=0}^{+\infty} x_{ij}$, $i \in \mathbb{N}$

W powyższej sytuacji zachodzi następujące twierdzenie

Twierdzenie 6.08

Z: $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ rodzina liczb bezwzględnie sumowalna. gdzie $A = \mathbb{N}^2$.

T: Przy wyżej przyjętych oznaczeniach:

(1) szereg $\sum_{i=0}^{+\infty} Y_i$ jest bezwzględnie zbieżny,

(2) $\sum_{i=0}^{+\infty} Y_i = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha$

D: Permutacja wierszy rodziny nie wpływa na jej bezwzględną sumowalność i sumę a jedynie permutuje szeregi $\sum_{i=0}^{+\infty} Y_i$. Aby wykazać twierdzenie wystarczy pokazać punkt (2).

6-07

Dla dowodu ustalmy bijekcję $\varphi : \mathbb{N} \to A$ i niech

$$s = \sum_{n=0}^{+\infty}{}' x_{\varphi(n)} = \sum_{\alpha \in A}{}' x_\alpha$$

Mamy dla dowolnych $N, M, K \in \mathbb{N}$ szacowanie

$$(*)\quad \left| \sum_{i=0}^{N}{}' \left(\sum_{j=0}^{M}{}' x_{ij} \right) - s \right| \leq \left| \sum_{i=0}^{N}{}' \left(\sum_{j=0}^{M}{}' x_{ij} \right) - \sum_{n=0}^{k}{}' x_{\varphi(n)} \right| + \left| \sum_{n=k+1}^{+\infty}{}' x_{\varphi(n)} \right|$$

Biorąc $\varepsilon > 0$ ustalmy $K_0 \in \mathbb{N}$ z warunku Cauchy'ego dla szeregu $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' |x_{\varphi(n)}|$, tak aby dla $K_0 \leq p < q$ zachodziła zawsze nierówność

$$\sum_{n=p+1}^{q}{}' |x_{\varphi(n)}| < \varepsilon/3$$

Wtedy, w szczególności $\left| \sum_{n=K_0+1}^{+\infty}{}' x_{\varphi(n)} \right| \leq \varepsilon/3$.

Weźmy teraz N_0, M_0 tak dobrane aby

$$\varphi(\{0, \dots, K_0\}) \subset \{0, \dots, N_0\} \times \{0, \dots, M_0\}$$

Wtedy dla $N \geq N_0$, $M \geq M_0$ mamy nierówność

$$\left| \sum_{i=0}^{N}{}' \left(\sum_{j=0}^{M}{}' x_{ij} \right) - \sum_{n=0}^{K_0}{}' x_{\varphi(n)} \right| < \varepsilon/3$$

Z $(*)$ dostajemy dla $N \geq N_0$, $M \geq M_0$

$$\left| \sum_{i=0}^{N}{}' \left(\sum_{j=0}^{M}{}' x_{ij} \right) - s \right| \leq 2/3\, \varepsilon$$

Ustalając następnie $N \geq N_0$ i przechodząc z M do $+\infty$ dostajemy

$$\left| \sum_{i=0}^{N}{}' y_i - s \right| < \varepsilon$$

co kończy dowód.

Uwaga 6.09

(1) Jeśli w rozpatrywanej na wstępie rodzinie $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ szeregi $\sum_{j=0}^{+\infty} |x_{ij}|$ dla $i\in\mathbb{N}$ oraz szereg $\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}|x_{ij}|\right)$ są zbieżne, to $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ jest bezwzględnie sumowalna. (Ćw.)

(2) W różnych sytuacjach zachodzi potrzeba sumowania blokowego rodzin przeliczalnych. Wtedy zazwyczaj wystarcza zastosować 6.08 przy „dobrym" rozstawieniu elementów rodziny w formie rodziny dwuwskaźnikowej. Przykładowo, jeśli chcemy uzyskać iloczyn szeregów bezwzględnie zbieżnych $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$, warto rozpatrywać rodzinę dwuwskaźnikową $\{a_i\cdot b_j\}_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ oraz jej dwa „ustawienia":

a_0b_0 a_0b_1 a_0b_2 ...
a_1b_0 a_1b_1 a_1b_2 ...
a_2b_0 a_2b_1 a_2b_2 ...
.....

i sumę $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$

oraz

a_0b_0 0 0 ...
a_1b_0 a_0b_1 0 ...
a_2b_0 a_1b_1 a_0b_2 ...
.....

różniące się od pierwszego zerami, więc dające też rodzinę bezwzględnie sumowalną

Sumując tę rodzinę wierszami dostajemy $c_n=\sum_{i+j=n} a_ib_j$, $n\in\mathbb{N}$ a następnie sumę $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$. W efekcie dostajemy Tw. Abela dla szeregów bezwzględnie zbieżnych. Bez zbieżności bezwzględnej problem jest trudniejszy!

4. Analityczność funkcji zadawanych szeregami

W zakresie teorii funkcji analitycznych poprzednie dwa punkty tego paragrafu przygotowywały dowód następującego, bardzo ważnego twierdzenia.

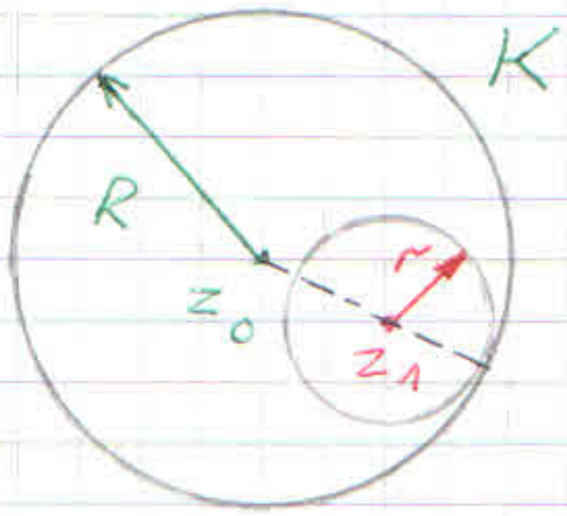
Twierdzenie 6.10

Z: $\{a_n\}$ ciąg w $\mathbb{K}$, $z_0 \in \mathbb{K}$
szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ mu nieposte
koło zbieżności $K \subset \mathbb{K}$.

T: $f: K \ni z \longrightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \in \mathbb{K}$ jest funkcją analityczną na K.

D: Niech $K = \{z \in \mathbb{K} : |z-z_0| < R\}$ gdzie $R \in (0, +\infty]$ jest promieniem zbieżności rozpatrywanego szeregu potęgowego

Wybierzmy $z_1 \in K$ i niech $r = R - |z_1 - z_0|$ dla $R < +\infty$ oraz $r = +\infty$ dla $R = +\infty$.



Możemy wyrazy wyjściowego szeregu rozpisać następująco $a_n (z-z_0)^n = a_n [(z_1 - z_0) + (z - z_1)]^n$, $n \in \mathbb{N}$

czyli

$$a_0 = a_0$$
$$a_1 (z-z_0) = a_1 (z_1 - z_0) + a_1 (z - z_1)$$
$$a_2 (z-z_0)^2 = a_2 (z_1 - z_0)^2 + 2a_2 (z_1 - z_0)(z - z_1) + a_2 (z - z_1)^2$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_n (z-z_0)^n = a_n (z_1 - z_0)^n + \binom{n}{1} a_n (z_1 - z_0)^{n-1} (z - z_1) + \ldots + a_n (z - z_1)^n$$

Tworzymy rodzinę dwuwskaźnikową.

$$\begin{array}{lllll} a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1(z_1-z_0) & a_1(z-z_1) & 0 & & 0 \\ a_2(z_1-z_0)^2 & 2a_2(z_1-z_0)(z-z_1) & a_2(z-z_1)^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & & \\ a_n(z_1-z_0)^n & \binom{n}{1}a_n(z_1-z_0)^{n-1}(z-z_1) & \dots & \dots & a_n(z-z_1)^n \\ \dots & \dots & & & \end{array}$$

Sprawdzimy jej bezwzględną sumowalność. Sumując moduły elementów w wierszach dostajemy:
$|a_0|$, $|a_1|(|z_1-z_0|+|z-z_1|)$, $|a_2|(|z_1-z_0|+|z-z_1|)^2$, ...
Zatem rodzina ta jest bezwzględnie sumowalna z 6.09, gdy zbieżny jest szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|(|z_1-z_0|+|z-z_1|)^n$.
Oznaczmy $\varsigma := |z_1-z_0|+|z-z_1|$. Wracając do bezwzględnej zbieżności wyjściowego szeregu widzimy, że. $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n||z-z_0|^n$ jest zbieżny gdy $|z-z_0|<R$, więc. szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\varsigma^n$ jest zbieżny gdy $\varsigma < R$, co daje. warunek

$$|z_1-z_0|+|z-z_1|<R,$$

czyli ostatecznie $|z-z_1|<r$. Wracając do wyjściowego rysunku widzimy, że dla z leżących. w kole o środku z_1 i promieniu r mamy bezwzględną. sumowalność naszej rodziny dwuwskaźnikowej. Sumując ją wierszami dostajemy sumę $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, czyli wartość $f(z)$ zaś sumując kolumnami dostajemy. szereg potęgowy postaci $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z-z_1)^n$ bezwzględnie zbieżny. Jest to wymagane w definicji rozwinięcie funkcji f w szereg potęgowy o środku z_1 i promieniu r.

Przykłady 6.11

(1) $f \in \mathbb{K}[z]$, $f: \mathbb{K} \ni z \longrightarrow a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n \in \mathbb{K}$
gdzie $n \in \mathbb{N}$. Wielomian jest zadany szeregiem na $\mathbb{K}$ zbieżnym bezwzględnie więc jest funkcją analityczną

(2) Już już sprawdzaliśmy w inny sposób funkcję $\mathbb{K} \ni z \longrightarrow e^z \in \mathbb{K}$ jako zadaną szeregiem potęgowym $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ jest funkcją analityczną.

(3) Funkcje cos, sin zadane szeregami bezwzględnie zbieżnymi na $\mathbb{K}$ są analityczne.

5. Podstawowe operacje na funkcjach analitycznych.

Ustalmy ciało $\mathbb{K}$ do dalszych rozważań

Twierdzenie 6.12

Z: Ω - otwarty, niepusty podzbiór $\mathbb{K}$.
$f, g \in C^\omega(\Omega)$

T: (1) $f + g \in C^\omega(\Omega)$
(2) $f \cdot g \in C^\omega(\Omega)$.

D: Wybierzmy $z_0 \in \Omega$, $r \in (0, +\infty)$ tak, że $K(z_0, r) \subset \Omega$ oraz f i g mają rozwinięcia.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n,$$

bezwzględnie zbieżne dla $z \in K(z_0, r)$.

(1) Dla sumy mamy równość

$$(f+g)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n)(z-z_0)^n \qquad z \in K(z_0, r)$$

Szereg jest bezwzględnie zbieżny jako suma dwóch szeregów bezwzględnie zbieżnych.

(2) Dla iloczynu dostajemy równość

$$(f \cdot g)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p+q=n} a_p b_q \right) (z-z_0)^n$$

Otrzymany szereg jest iloczynem dwóch szeregów bezwzględnie zbieżnych (iloczyn Cauchy'ego), więc jest bezwzględnie zbieżny.

Ponieważ (1), (2) mamy wykonać w każdym punkcie $z_0 \in \Omega$, więc $f+g$ i $f \cdot g$ są analityczne w zbiorze Ω.

Twierdzenie 6.13.

Z: Ω, G - podzbiory otwarte, niepuste $\mathbb{K}$.
$f: \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$, $h: G \longrightarrow \mathbb{K}$ funkcje analityczne.
Załóżmy, że $f(\Omega) \subset G$

T: $h \circ f: \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ jest funkcją analityczną.

D: (Zarys) Ustalmy $z_0 \in \Omega$ i niech $w_0 = f(z_0)$
Istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że $K(w_0, \varepsilon) \subset G$ oraz funkcja h ma przedstawienie

$$h(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (w-w_0)^n$$

bezwzględnie zbieżne dla $w \in K(w_0, \varepsilon)$

Wybierzmy rozwinięcie funkcji f w $K(z_0,r)$, $r>0$

$$f(z)=\sum_{m=0}^{+\infty}{}' a_m(z-z_0)^m,$$

tak aby $\sum_{m=1}^{+\infty}{}' |a_m||z-z_0|^m<\xi$ dla $z\in K(z_0,r)$.

Skoro $f(z_0)=w_0$, więc $a_0=w_0$ oraz dla $z\in K(z_0,r)$ mamy nierówność

$$(*)\quad \sum_{n=0}^{+\infty}{}' |c_n|\left(\sum_{m=1}^{+\infty}{}' |a_m||z-z_0|^m\right)^n<+\infty.$$

Dla $z\in K(z_0,r)$ zachodzi równość

$$h(f(z))=\sum_{n=0}^{+\infty}{}' c_n\left(\sum_{m=1}^{+\infty}{}' a_m(z-z_0)^m\right)^n.$$

Porządkując dostajemy $\left(\sum_{m=1}^{+\infty}{}' a_m(z-z_0)^m\right)^n=\sum_{j=n}^{+\infty}{}' a_{j,n}(z-z_0)^j$ dla pewnych $\{a_{j,n}\}_{j,n\in\mathbb{N}}$, ale z nierówności trójkąta mamy.

$$(**)\quad \sum_{j=n}^{+\infty}{}' |a_{j,n}||z-z_0|^j\le\left(\sum_{m=1}^{+\infty}{}' |a_m||z-z_0|^m\right)^n$$

dla $z\in K(z_0,r)$ oraz $n\in\mathbb{N}$. Dzięki $(*)$ mamy.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}{}' |c_n|\left(\sum_{j=n}^{+\infty}{}' |a_{j,n}||z-z_0|^j\right)<+\infty$$

dla $z\in K(z_0,r)$. Zatem, dla $z\in K(z_0,r)$, sumcie

$$h(f(z))=\sum_{n=0}^{+\infty}{}' c_n\left(\sum_{j=n}^{+\infty}{}' a_{j,n}(z-z_0)^j\right)$$

można nadać postać szeregu potęgowego bezwzględnie zbieżnego, co kończy dowód. (Ćw. sprawdzić $(**)$).

Twierdzenie 6.14

Ω - otwarty, niepusty w $\mathbb{K}$, $f,g\in C^\omega(\Omega)$, $g\neq 0$

T: (1) $g^{-1}(0)$ jest domkniętym podzbiorem Ω

(2) $\Omega\setminus g^{-1}(0)\ni z\longrightarrow \frac{f(z)}{g(z)}\in\mathbb{K}$ jest analityczna w Ω

D: (1) Funkcje analityczne są ciągłe, więc $g^{-1}(0)$ jest domknięty.

(2) Oznaczając $h:\mathbb{K}\setminus\{0\}\ni z\longrightarrow\frac{1}{z}\in\mathbb{K}$, z 6.13 mamy analityczność $h\circ(g|\Omega\setminus g^{-1}(0))$.

Czyli uzyskaliśmy analityczność funkcji

$$\Omega \setminus g^{-1}(0) \ni z \longrightarrow \frac{1}{g(z)} \in \mathbb{K}.$$

Teza wynika teraz wprost z 6.12 gdyż możemy pomnożyć powyższą funkcję przez f.

Przykłady 6.15

(1) Funkcje wymierne. Jeśli $P, Q \in \mathbb{K}[z]$, $Q \neq 0$ to przyjmując $Z = Q^{-1}(0)$ (jest to zbiór domknięty), określamy.

$$\mathbb{K} \setminus Z \ni z \longrightarrow \frac{P(z)}{Q(z)} \in \mathbb{K},$$

funkcję analityczną na zbiorze $\Omega \setminus Z$.

(2) Funkcje trygonometryczne tg, ctg

Określamy: $Z = \{z \in \mathbb{K} : \cos z = 0\}$ oraz

$$tg : \mathbb{K} \setminus Z \ni z \longrightarrow tg\, z = \frac{\sin z}{\cos z} \in \mathbb{K},$$

$W = \{z \in \mathbb{K} : \sin z = 0\}$ oraz.

$$ctg : \mathbb{K} \setminus W \ni z \longrightarrow ctg\, w = \frac{\cos z}{\sin z} \in \mathbb{K}$$

Uwaga 6.16. Klasa funkcji analitycznych jest często rozpatrywana równolegle do klasy szeregów formalnych nad ciałem $\mathbb{K}$. Wiele twierdzeń w tych dwóch przypadkach formułowanych podobnie, ale te dla funkcji analitycznych wymagają dowodów zbieżności. Warto odnotować również tutaj możliwość odwracania funkcji analitycznych przy pewnych warunkach, podobnie jak szeregów formalnych.

6. Informacja o funkcjach analitycznych wielu zmiennych.

Ustalmy $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$.

Wprowadzamy oznaczenia:

$\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m) \in \mathbb{N}^m$ (nazywamy m-wskaźnikiem).

$|\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_m$

Dla $z = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{K}^m$ i $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$ określamy

$$z^\nu := z_1^{\nu_1} \cdot \dots \cdot z_m^{\nu_m}$$

Mając daną rodzinę $\{a_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}^m}$ w $\mathbb{K}$ oraz punkt $\mathring{z} = (\mathring{z}_1, \dots, \mathring{z}_m) \in \mathbb{K}^m$, możemy mówić o szeregu potęgowym m-krotnym zapisywanym jako

$$\text{szereg } \sum_{\nu \in \mathbb{N}^m}{}' a_\nu (z - \mathring{z})^\nu,$$

który traktujemy jako rodzinę funkcji indeksowanych zbiorem $A = \mathbb{N}^m$. W tej sytuacji stawiamy następującą definicję dla Ω niepustego, otwartego podzbioru $\mathbb{K}^m$.

Definicja 6.17 Funkcję $f: \Omega \to \mathbb{K}$ nazywamy analityczną w Ω jeśli

$\forall \mathring{z} \in \Omega \; \exists$ U - ot. $\mathring{z} \; \exists \{a_\nu\}_{\nu \in \mathbb{K}^m}$ - rodzina w $\mathbb{K}$:

(1) $U \subset \Omega$,

(2) $\forall z \in U$: $\{a_\nu (z - \mathring{z})^\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}^m}$ jest bezwzględnie sumowalna,

(3) $\forall z \in U$: $f(z) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^m}{}' a_\nu (z - \mathring{z})^\nu$.

§2. Liczba π i jej własności

1. Liczba π

Zajmiemy się własnościami, dla $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, funkcji „cos" czyli

$$\mathbb{R} \ni x \longrightarrow \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \in \mathbb{R}$$

Zauważmy, że:

(1) $\cos 0 = 1$,

(2) $\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{1 \cdot 2} + \sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} <$

$$< -1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!} =$$

$$= -1 + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^6}{6!} + \ldots <$$

$$< -1 + \frac{2^4}{4!} \left(1 + \frac{2^2}{5^2} + \frac{2^4}{5^4} + \ldots\right) =$$

$$= -1 + \frac{2^4}{4!} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = -1 + \frac{2^4 \cdot 25}{4! \cdot 21} = -1 + \frac{50}{63} < 0$$

(3) $(\cos)^{-1}(0) \neq \emptyset$ bo z (2) na podstawie ciągłości funkcji $\cos | [0,2] : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$, wynika przyjęcie przez nią wartości pośredniej 0.

(4) $(\cos)^{-1}(0)$ jest domknięty w $\mathbb{R}$ ze względu na ciągłość funkcji cos.

(5) Jeśli $Z = \{x \in [0, +\infty) : \cos x = 0\}$, to $x_0 = \inf Z \in Z \cap (0,2)$ jest najmniejszym zerem rzeczywistym funkcji cos.

Definicja 6.18 Symbolem π oznaczamy taką liczbę rzeczywistą, że $\frac{\pi}{2}$ jest najmniejszą liczbą rzeczywistą dodatnią w której zeruje się funkcja cos.

Zatem, zgodnie z wcześniejszymi oznaczeniami $\pi = 2x_0$.
Widzimy ponadto, że dla $x \in \mathbb{R}$, ze względu na równość $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, mamy $\sin x, \cos x \in [-1, 1]$

Lemat 6.19 Przy przyjętych oznaczeniach:
(1) $\cos 0 = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$
(2) $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow 0 < \cos x < 1$.

D.: (1) jest oczywiste.
(2) Rozpisując $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$
$= 1 - \frac{x^2}{2!}\left(1 - \frac{x^2}{3 \cdot 4}\right) - \frac{x^6}{6!}\left(1 - \frac{x^2}{7 \cdot 8}\right) - \dots$
Dla $x \in (0, 2)$ czynniki w nawiasach są większe od 0, więc w tym przedziale $\cos x < 1$.
Wiemy, że $\frac{\pi}{2} < 2$, więc $\cos x < 1$ dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.
Definicja π daje $\cos x > 0$ dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, co kończy dowód

Lemat 6.20 Przy przyjętych oznaczeniach:
(1) $\sin 0 = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$
(2) $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow 0 < \sin x < 1$

D: (1) Oczywiście $\sin 0 = 0$ oraz $|\sin \frac{\pi}{2}| = 1$.
Z rozwinięcia $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots =$
$= x\left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3}\right) + \frac{x^5}{5!}\left(1 - \frac{x^2}{6 \cdot 7}\right) + \dots$
widzimy, że dla $x \in (0, 2)$ $\sin x > 0$. Ponieważ $\frac{\pi}{2} \in (0, 2)$ więc $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.
(2) Dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ mamy $\cos x \in (0, 1)$ więc jedynka trygonometryczna daje $\sin x \in (0, 1)$ co kończy dowód.

Z lematu 5.80 mamy: $\sin 2z = 2\sin z \cos z$

$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$ dla $z \in \mathbb{C}$

Więc $\cos \pi = -1$, $\sin \pi = 0$, skąd następnie.

$\cos 2\pi = 1$, $\sin 2\pi = 0$.

Mając te, kluczowe wartości możemy, wracając do 5.80 uzyskać następujące twierdzenie

Twierdzenie 6.21 Dla $z \in \mathbb{K}$ mamy:

(1) $\cos(z + 2\pi) = \cos z$,

(2) $\sin(z + 2\pi) = \sin z$.

D: (1) $\cos(z + 2\pi) = \cos z \cdot \cos 2\pi - \sin z \cdot \sin 2\pi = \cos z$

(2) $\sin(z + 2\pi) = \sin z \cos 2\pi + \cos z \cdot \sin 2\pi = \sin z$.

dla $z \in \mathbb{K}$ na podstawie 5.80.

Inaczej mówiąc liczba 2π jest „okresem" naszych funkcji trygonometrycznych sin i cos.

2. Własności funkcji wykładniczej

Twierdzenie 6.22 Dla $z \in \mathbb{C}$ mamy $e^{z+2\pi i} = e^z$.

D: $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z$

Uwaga 6.23 Zachodzi równość $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Mamy $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$ co daje oczekiwaną równość, czasami nazywaną najpiękniejszą równością w matematyce !!!

Twierdzenie 6.24 Funkcja

$$[0,2\pi) \ni t \longrightarrow e^{it} \in \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

jest bijekcją.

D: Widzimy, że.

$$|e^{it}|^2 = e^{it} \cdot e^{-it} = e^0 = 1.$$

Przypuśćmy, że funkcja ta nie jest injekcją.
Wtedy dla pewnych $t_1, t_2 \in [0,2\pi)$, $t_1 < t_2$
mamy $e^{it_1} = e^{it_2}$ czyli $e^{i(t_2 - t_1)} = 1$. Czyli
wtedy istnieje $t \in [0,2\pi)$, $t > 0$ t. że $e^{it} = 1$.

Mamy wtedy $t = 4s$ gdzie $s \in (0, \frac{\pi}{2})$.
Wtedy $e^{is} = x + iy$ gdzie $x, y \neq 0$

$$e^{it} = (x+iy)^4 = x^4 + y^4 - 6x^2y^2 + 4xyi(x^2 - y^2)$$

Jeśli $e^{it} = 1$ to $x^2 - y^2 = 0$ więc $x^2 = y^2$
ale $x^2 + y^2 = 1$ więc $x^2 = y^2 = \frac{1}{2}$. Dostajemy więc:

$$e^{it} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 (2 - 6) = -1.$$

Otrzymujemy sprzeczność.

Dowodząc surjektywność tutaj widzimy osiąganie punktów $(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)$.
Na podstawie dotychczasowych rozważań tutaj zauważamy, że biorąc $w = x + iy$ t. że $|w| = 1$, gdy $x > 0$ i $y > 0$, to $w = e^{it}$ dla pewnego $t \in (0, \frac{\pi}{2})$. Pozostałe ćwiartki tutaj dostajemy wzorami redukcyjnymi (Cw.)

3. Postać wykładnicza i postać trygonometryczna liczby zespolonej

Twierdzenie 6.25

(1) $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \; \exists w \in \mathbb{C} : z = e^w$

(2) $(w_1, w_2 \in \mathbb{C}, e^{w_1} = e^{w_2}) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : w_1 - w_2 = 2k\pi i$

D: (1) Dla $z \neq 0$ mamy $z = |z| \frac{z}{|z|}$

Skoro $\left|\frac{z}{|z|}\right| = 1$, to istnieje $b \in [0, 2\pi)$ takie, że $\frac{z}{|z|} = e^{ib}$ (z 6.24).

Łatwo pokazać, że funkcja $\mathbb{R} \ni t \to e^t \in (0, +\infty)$ jest homeomorfizmem (ćw.), więc istnieje $a \in \mathbb{R}$, że $|z| = e^a$. Zatem $z = e^a \cdot e^{ib} = e^w$ dla $w = a + ib$.

(2) Jeśli $e^{w_1} = e^{w_2}$, to $e^{w_1 - w_2} = 1$. Zapisując $w_1 - w_2$ w postaci algebraicznej $w_1 - w_2 = a + ib$, dostajemy $e^a(\cos b + i \sin b) = 1$. Zatem $e^a = 1$, więc $a = 0$. Możemy zapisać $b = b_0 + 2k\pi$ dla pewnego $b_0 \in [0, 2\pi)$, więc na podstawie 6.24 otrzymujemy $e^{ib_0} = 1$ skąd wnioskujemy, że $b_0 = 0$.

Zatem $z - w = 0 + 2k\pi i = 2k\pi i$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.

Zatem każdą liczbę $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ możemy zapisać w postaci $z = e^w$, $w \in \mathbb{C}$, nazywanej postacią wykładniczą liczby z.

Zauważmy następnie, że dla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ dostajemy przedstawienie $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha) = |z|e^{i\alpha}$ gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$ jest wyznaczone z dokładnością do wielokrotności 2π,

czyli $\alpha = \alpha_0 + 2k\pi$, gdzie $\alpha_0 \in [0, 2\pi)$ oraz $k \in \mathbb{Z}$.
W tej postaci możemy też zapisać $0 = 0 \cdot e^{i\alpha}$ dla dowolnego (!) $\alpha \in \mathbb{R}$.

Wprowadza się następnie dla $z \in \mathbb{C}$ zbiór

$$\underline{\arg z = \{\alpha \in \mathbb{R} : z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)\}},$$

nazywany „argumentem" liczby $z \in \mathbb{C}$. Jak widać:

$z = 0 \Rightarrow \arg z = \mathbb{R}$

$z \neq 0 \Rightarrow \arg z = \{\alpha_0 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, gdzie

$\alpha_0 \in [0, 2\pi)$ to tzw. argument główny z.

Podsumowując dostajemy dla $z \in \mathbb{C}$ przedstawienie.

$$\underline{z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha) = |z|e^{i\alpha}, \alpha \in \arg z}$$

nazywane <u>postacią trygonometryczną</u> tej liczby.

Kończąc ten paragraf zwróćmy uwagę na dwa fakty:

<u>A. Wzory de Moivre'a</u>, stwierdzające, że dla n.

$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mamy.

$z^n = |z|^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha))$. Równość tą dostajemy zauważając, że $z^n = |z|^n(e^{i\alpha})^n = |z|^n e^{in\alpha}$.

<u>B. Zera funkcji sin i cos w $\mathbb{C}$</u>. Dla równania $\sin z = 0$ dostajemy $\frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = 0$, więc $e^{iz} = e^{-iz}$ oraz $e^{2iz} = 1$, czyli z poprzednich rozważań $2iz = 2k\pi i$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$. <u>Zatem $z = k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$.</u>

Podobnie dla równania $\cos z = 0$ otrzymujemy

<u>$z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ gdzie $k \in \mathbb{Z}$</u> (ćw.).

<u>Zatem funkcje sin, cos mają w $\mathbb{C}$ zera wyłącznie rzeczywiste.</u>

§3. Funkcje odwrotne do funkcji analitycznych; logarytmy, funkcje wykładnicze i potęgowe

1. Funkcje odwrotne do funkcji analitycznych

Rozważania rozpoczniemy od następującego, kluczowego dla tej tematyki, twierdzenia.

Twierdzenie 6.26

Z: Ω otwarty w $\mathbb{K}$, $f \in C^{\omega}(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$

$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$ jest rozwinięciem funkcji f w $K(z_0, r) \subset \Omega$, $r > 0$ w szereg potęgowy w którym $c_1 \neq 0$.

T: Istnieją: U - otoczenie z_0, $U \subset \Omega$,
V - otoczenie $c_0 = f(z_0)$ w $\mathbb{K}$,
tak dobrane, że $f|U : U \longrightarrow V$ jest bijekcją oraz $g = (f|U)^{-1} : V \longrightarrow U$ jest analityczna w V.

Dowód tego twierdzenia zostanie przedstawiony w ostatnim rozdziale AM1. Dość łatwo wskazać, w tym przypadku, kandydata na rozwinięcie g w punkcie $f(z_0) = c_0$ jako szeregu formalnego z $\mathbb{K}[[z]]$. Jednak dowód jego dodatniego promienia zbieżności jest dość żmudny.

2. Funkcja „ln" i funkcje wykładnicze dla $\mathbb{K}=\mathbb{R}$

Rozważmy na wstępie funkcję

$$(*)\quad \mathbb{R}\ni x \longrightarrow e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \in \mathbb{R}.$$

Łatwo zauważyć, że jest to funkcja analityczna, więc jest ciągła. Bez trudu stwierdzimy, że $e^x \longrightarrow +\infty \ (x\to+\infty)$, $e^x \longrightarrow 0 \ (x\to-\infty)$, oraz $e^x \neq 0$ dla $x\in\mathbb{R}$. Obserwacje te pozwalają nam stwierdzić, że funkcja $(*)$ jest surjekcją na $(0,+\infty)$.

Jeśli $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, to $\frac{e^{x_2}}{e^{x_1}} = e^{x_2-x_1} > 1$ czyli $e^{x_1} < e^{x_2}$. Wynika stąd, że nasza funkcja $(*)$ jest injekcją, rosnącą.

Zatem rozpatrywane odwzorowanie jest bijekcją między $\mathbb{R}$ oraz $(0,+\infty)$. Zauważmy, że odwzorowanie do niego odwrotne też jest analityczne. Faktycznie wybierając $x_0\in\mathbb{R}$ dostajemy

$$e^x = e^{x_0}\cdot e^{x-x_0} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{x_0}}{n!}(x-x_0)^n$$

Dla $n=1$ mamy w rozwinięciu wyraz $\frac{e^{x_0}}{1!}(x-x_0)^1$ o współczynniku $e^{x_0}\neq 0$. Na podstawie 6.26 wiemy, że funkcja odwrotna do $(*)$ ma rozwinięcie w każdym punkcie obrazu $(0,+\infty)$, czyli jest analityczna.

Definicja 6.27 Funkcję odwrotną do $\mathbb{R} \ni x \longrightarrow e^x \in (0,+\infty)$, będącą funkcją analityczną, nazywamy logarytmem naturalnym i oznaczamy „ln" uzyskując odwzorowanie $\ln : (0,+\infty) \ni x \to \ln x \in \mathbb{R}$

Dysponując w sytuacji rzeczywistej funkcją „ln" możemy w naturalny sposób wprowadzić funkcje wykładnicze o dowolnej podstawie $a > 0$, przyjmując określenie

$$\mathbb{R} \ni x \longrightarrow a^x := e^{x \ln a} \in (0,+\infty)$$

Jak łatwo zauważyć funkcje wykładnicze są funkcjami analitycznymi jako złożenia funkcji analitycznych.

Rozpatrując funkcję wykładniczą o podstawie $a \in (0,+\infty) \setminus \{1\}$ łatwo sprawdzić jej bijektywność na przedział $(0,+\infty)$. Możemy wtedy wprowadzić funkcje do nich odwrotne, nazywane logarytmami o wybranej podstawie. $a \in (0,+\infty) \setminus \{1\}$.

$$(0,+\infty) \ni x \longrightarrow \log_a x \in \mathbb{R}$$

Łatwo sprawdzić, że wszystkie logarytmy, podobnie jak logarytm naturalny są funkcjami analitycznymi.

3. Potęgi liczb zespolonych

Nie mamy problemów z określeniem funkcji potęgowych dla wykładników naturalnych.

$$\mathbb{K} \ni z \longrightarrow z^m \in \mathbb{K} \quad \text{dla } m \in \mathbb{N}$$

oraz wykładników całkowitych ujemnych.

$$\mathbb{K} \setminus \{0\} \ni z \longrightarrow z^m = \frac{1}{z^{-m}} \in \mathbb{K}, \quad m \in \mathbb{Z}, \ m < 0$$

Przechodząc do pierwiastków i potęg wymiernych dostajemy już komplikacje w postaci funkcji wielowartościowych. Dla $z \in \mathbb{C}$ i $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ określamy.

$$\sqrt[m]{z} = \{ w \in \mathbb{C} : w^m = z \} \subset \mathbb{C}$$

Można sprawdzić, że dla $z \neq 0$ zbiór ten liczy dokładnie m elementów bo każdy uzyskany wynik możemy pomnożyć przez $e^{\frac{2\pi i}{m} k}$, $k = 0, \dots, m-1$ dostając m różnych liczb zespolonych.

Możemy do zagadnienia potęg zespolonych podejść zupełnie ogólnie określając dla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\log z := \{ c \in \mathbb{C} : e^c = z \} = \ln|z| + i \arg z$$

a następnie dla $w \in \mathbb{C}$ przyjmujmy.

$$z^w := e^{w \log z} = e^{w(\ln|z| + i \arg z)}$$

Oczywiście potęgi całkowite to funkcje analityczne. W zakresie innych wykładników można też tę analityczność znaleźć przechodząc do tzw gałęzi jednoznaczności, które są podzbiorami opisanych relacji.

§4. Gałęzie jednoznaczne funkcji wielowartościowych, funkcje cyklometryczne.

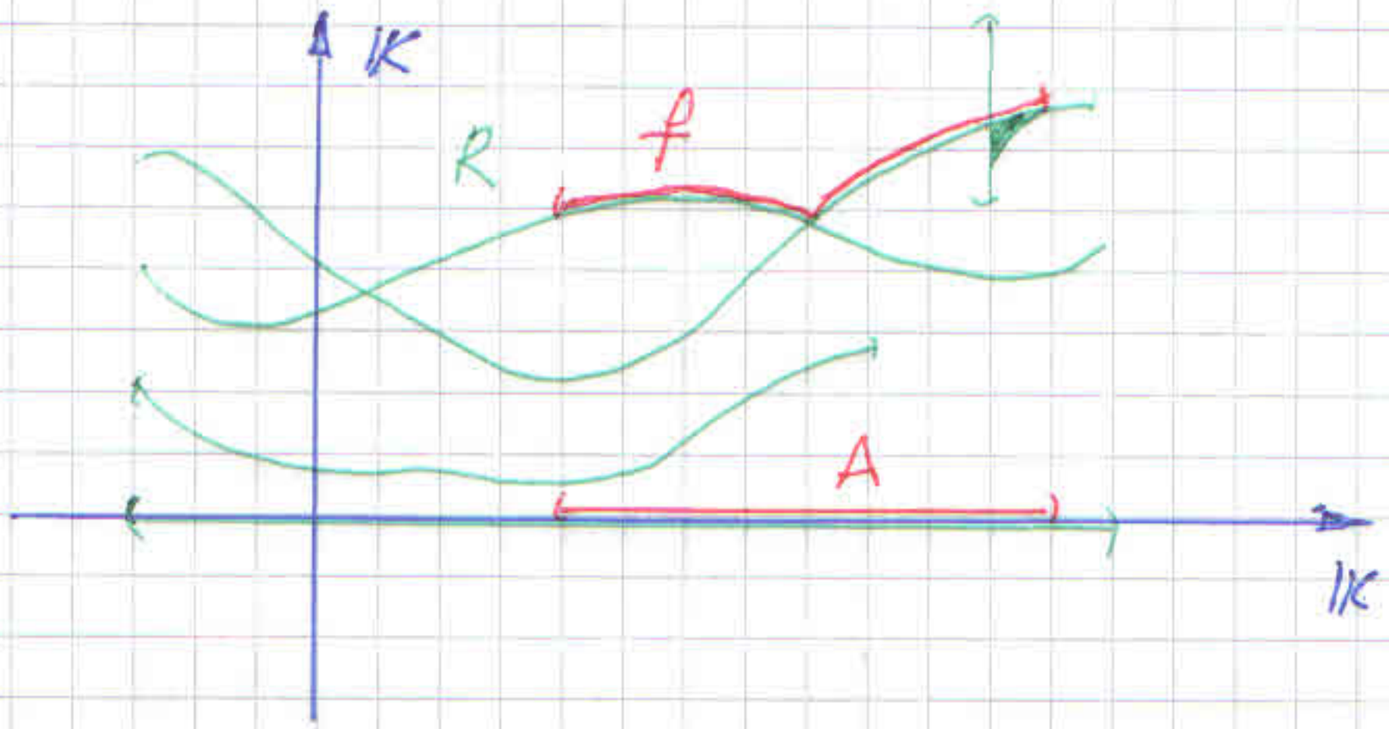
1. Podstawowe pojęcia.

Ustalmy ciało $\mathbb{K}$ oraz relację $R \subset \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. Dla $z \in \mathbb{K}$ przez R_z będziemy oznaczać zbiór $\{w \in \mathbb{K} : (z,w) \in R\}$. Przypuśćmy, że dla pewnego zbioru $A \subset \mathbb{K}$ mamy $R_z \neq \emptyset$. Wtedy mówimy, że odwzorowanie

$$A \ni z \longrightarrow R_z \subset \mathbb{K} \quad (\in \mathcal{P}(\mathbb{K}))$$

jest funkcją wielowartościową na zbiorze A.

Definicja 6.28. Mówimy, że funkcja ciągła $f: A \longrightarrow \mathbb{K}$ jest gałęzią jednoznaczną funkcji wielowartościowej R jeśli $\forall z \in A : f(z) \in R_z$



Uwagi 6.29

(1) Wiadomości z tego zakresu można znaleźć w materiałach M. Jarnickiego, jak na przykład „Wykłady z Funkcji Analitycznych" (2010)

(2) Definicję 6.28 można sformułować ogólniej, na przykład dla pary przestrzeni topologicznych X, Y oraz $R \subset X \times Y$, co nam nie będzie potrzebne.

Przykłady 6.30

(1) Funkcja m-ty pierwiastek z liczby, $m \geq 2$ gdzie $R = \{(z,w) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} : w^m = z\}$, jest funkcją wielowartościową na $A = \mathbb{K}$.

(2) Wprowadzony w §2 tak zwany argument liczby zespolonej $z \in \mathbb{K}$ określony przez

$$\arg z = \{\alpha \in \mathbb{R} : z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)\}$$

daje zbiór $\arg = \{(z,w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : w \in \arg z\}$.
Mamy tutaj $\arg_0 = \mathbb{R}$ oraz przeliczalne zbiory $\arg_z = \arg z$ postaci $\{\alpha_0 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ gdzie $\alpha_0 \in \arg z$, dla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

(3) Określamy zbiór $\log = \{(z,w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : e^w = z\}$.
Dla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mamy $\log_z = \log z \neq \emptyset$, więc możemy poszukiwać gałęzi jednowartościowych logarytmu na podzbiorach $A \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
Zawsze taka gałąź jest funkcją ciągłą $f : A \to \mathbb{C}$ taką, że $\forall z \in A : e^{f(z)} = z$.

Uwaga 6.31. Podane przed chwilą przykłady (1) i (3) wynikają z próby odwrócenia funkcji $\mathbb{C} \ni z \longrightarrow z^m \in \mathbb{C}$ oraz $\mathbb{C} \ni z \longrightarrow e^z \in \mathbb{C}$, odpowiednio. Ponieważ funkcje te nie są injekcjami, więc do gałęzi jednoznacznych musimy wybrać jedną z wielu wartości argumentów, ale tak aby skonstruowana funkcja była ciągła. Aby taką konstrukcję przeprowadzić należy wstępnie ustalić, dla funkcji $F: C \longrightarrow D$, $C, D \subset \mathbb{K}$, zbiory B i A tak aby $F|B: B \longrightarrow A$ była bijekcją. Wtedy $(F|B)^{-1}: A \longrightarrow \mathbb{K}$ będzie gałęzią jednoznaczną funkcji wielowartościowej $\{(z,w) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} : (w,z) \in F\}$, o ile będzie ciągła.

Uwagi 6.32

(1) Korzystając z tego schematu określona była poprzednio (w definicji 6.27) podstawowa funkcja „ln" jako gałąź jednoznaczną logarytmu w oparciu o funkcję $\mathbb{R} \ni x \longrightarrow e^x \in (0, +\infty) \subset \mathbb{R}$ będącą bijekcją i homeomorfizmem. To dało określenia funkcji: a^x, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$ $\log_a x$ dla $a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$, $x \in (0, +\infty)$.

(2) W przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, bez trudu, określamy gałąź jednoznaczną dla $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^m\}$, $m \geq 2$

$$[0, +\infty) \ni x \longrightarrow \sqrt[m]{x} \in \mathbb{R},$$

którą dla m-nieparzystych czasami rozszerzamy na $\mathbb{R}$.

2. Funkcje cyklometryczne

Funkcjami cyklometrycznymi nazywamy szczególne, ustalone gałęzie jednoznaczne funkcji wieloznacznych powstałych przez odwracanie klasycznych funkcji trygonometrycznych: sin, cos, tg, ctg (sec, csc) w szczególnych podzbiorach $\mathbb{R}$. Aby je skonstruować zauważmy na wstępie, że funkcje:

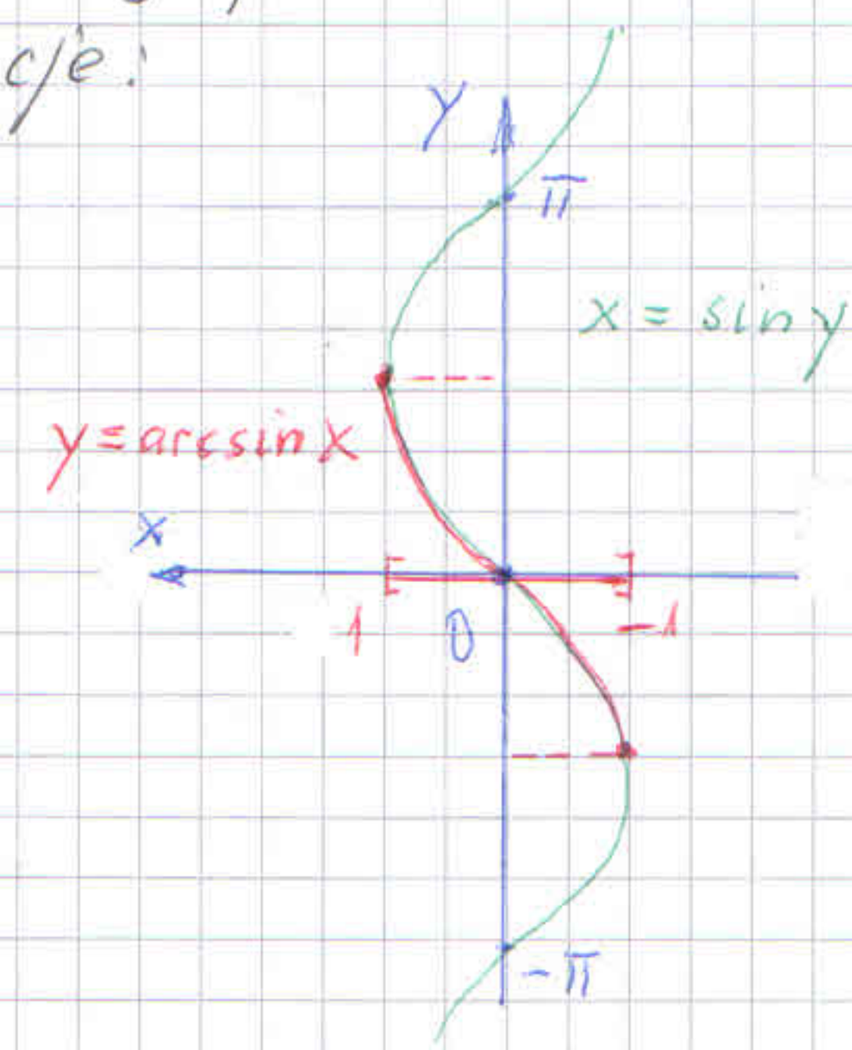
$\sin \mid [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$,

$\cos \mid [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$,

$tg \mid (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$ctg \mid (0, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}$,

są homeomorfizmami (ćw.).



Definicja 6.33 Funkcje odwrotne do powyższych nazywamy funkcjami cyklometrycznymi i oznaczamy odpowiednio: arc sin, arc cos, arctg, arcctg.

Uwaga 6.34 Konstrukcję gałęzi jednoznacznych dostajemy rozpatrując $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ relacje:

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \sin y\}$,
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \cos y\}$,
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = tg\, y\}$,
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = ctg\, y\}$.

Rozdział 7. Uzupełnienia.

§1. Konstrukcja zbioru liczb rzeczywistych.

1. Aksjomatyczne wprowadzenie liczb rzeczywistych

Aksjomaty zbioru liczb rzeczywistych poznaliśmy na początku Rozdziału 2. Były one połączone w cztery grupy: Aksjomaty ciała, Aksjomaty porządku, Aksjomaty związku dodawania z porządkiem i Aksjomat ciągłości

Uwaga 7.01 W ramach przedmiotu Analiza Matematyczna 1 rozwijaliśmy teorię bazując wyłącznie na wprowadzonych aksjomatach.

Uwaga 7.02 W tym paragrafie zostanie podana konstrukcja zbioru liczb rzeczywistych według idei Cantora z 1872 r. Wykonamy również sprawdzenie, że konstrukcja ta spełnia wszystkie wcześniej podane aksjomaty. Dysponując tymi informacjami dostaniemy pełną konstrukcję liczb rzeczywistych uzupełnioną wszystkimi wiadomościami przedmiotu z przedstawionych rozdziałów 2-6. Przy konstrukcji będziemy na zbiorze liczb wymiernych, który jest konstruowany w ramach przedmiotu „Elementy logiki i teorii mnogości".

2. Liczby wymierne.

Rozpatrujemy zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ wraz z dwuargumentowymi działaniami $+, \cdot$ wprowadzającymi w nim strukturę ciała.

W $\mathbb{Q}$ dysponujemy klasycznymi nierównościami „$<$" „$\leq$" relacjami dwuargumentowymi, przy czym zachodzi następująca własność:

Uwaga 7.03

Z: $x, y \in \mathbb{Q}$, $x < y$

T: 1) $z \in \mathbb{Q} \Rightarrow x + z < y + z$

2) $z \in \mathbb{Q}$, $0 < z \Rightarrow x \cdot z < y \cdot z$.

Możemy w naturalny sposób określić dwie kolejne relacje „$\geq$" i „$>$".

Dla liczb wymiernych określamy wartość bezwzględną (moduł) liczby przyjmując:

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{gdy } a \geq 0, \\ -a, & \text{gdy } a < 0. \end{cases}$$

Uwaga 7.04

Z: $a, b, c \in \mathbb{Q}$

T: 1) $|a+b| \leq |a| + |b|$

2) $|a-c| \leq |a-b| + |b-c|$

3) $||a| - |b|| \leq |a-b|$

D: Ćwiczenie.

3. Konstrukcja

W przedstawionej konstrukcji Cantora z 1872 r $\mathbb{R}$ uzyskujemy jako „uzupełnienie" $\mathbb{Q}$ w oparciu o pojęcie ciągu Cauchy'ego. Podobne konstrukcje są wykorzystywane aktualnie do „uzupełniania" wielu innych struktur.

Na wstępie oznaczmy

$$\mathcal{S} := \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} = \{\{a_n\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{Q} : \{a_n\} - \text{ciąg}\}.$$

Definicja 7.05 Ciąg $\{a_n\} \in \mathcal{S}$ nazywamy ciągiem Cauchy'ego ⟺ wtw wymiernych jeśli:

$$\forall_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{Q} \\ \varepsilon > 0}} \exists N \in \mathbb{N} \; \forall p,q \in \mathbb{N} : (p,q \geq N) \Rightarrow (|a_p - a_q| < \varepsilon)$$

Dalsze rozważania będziemy prowadzić w przestrzeni

$$\mathcal{C} := \{\{a_n\} \in \mathcal{S} : \{a_n\} - \text{ciąg Cauchy'ego l. wym.}\}$$

W $\mathcal{C}$ wprowadzamy relację równoważności „$\sim$"

Dla $\{a_n\}, \{b_n\} \in \mathcal{C}$ piszemy $\{a_n\} \sim \{b_n\}$

jeśli $\forall_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{Q} \\ \varepsilon > 0}} \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N) \Rightarrow (|a_n - b_n| < \varepsilon)$

Ćwiczenie. Sprawdzić, że „$\sim$" jest relacją równoważności (ćwiczenie).

Przechodzimy do określenia struktury mnogościowej $\mathbb{R}$, dla której będziemy dalej sprawdzać spełnienie aksjomatyki i badając będziemy jej własności.

Definicja 7.06. Zbiorem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ nazywamy zbiór klas równoważności $\mathbb{C}/\sim$ w którym $\mathbb{Q}$ wprowadzamy poprzez klasy stałych ciągów Cauchy'ego.

$$\mathbb{Q} \ni c \longrightarrow [\{a_n\}]_\sim \in \mathbb{R}$$

gdzie $a_n = c$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Przykłady 7.07

(1) Ciąg $\{a_n\}$ gdzie $a_n = \frac{1}{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$ reprezentuje liczbę $0 \in \mathbb{Q}$.

(2) Weźmy „rozwinięcie dziesiętne" $\sqrt{2}$ z nadmiarem i niedomiarem

$a_0 = 1$ $\quad b_0 = 2$

$a_1 = 1,4$ $\quad b_1 = 1,5$

$a_2 = 1,41$ $\quad b_2 = 1,42$

$a_3 = 1,414$ $\quad b_3 = 1,415$

Mamy $|a_n - b_n| < 2 \cdot 10^{-n}$. Te dwa ciągi Cauchy'ego nie reprezentują liczby wymiernej

(3) Ciąg $\{a_n\}$ gdzie $a_n = n \in \mathbb{N}$ nie jest ciągiem Cauchy'ego ale może nam się w przyszłości też przydać do dotychczas $+\infty$.

Chwilowo mamy określoną strukturę mnogościową $\mathbb{R}$. Wprowadzimy następnie działania w $\mathbb{R}$.

4. Działania w $\mathbb{R}$.

Zaczniemy od przygotowania pomocniczego

Lemat 7.08

Z: $\{a_n\} \in \mathcal{C}$, $\{b_n\} \in \mathcal{S}$, $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}$: $a_n = b_n$ $^{n \geq N}$

T: $\{b_n\} \in \mathcal{C}$ oraz $\{a_n\} \sim \{b_n\}$.

D: Fakt oczywisty.

Lemat 7.09.

Z: $\{a_n\} \in \mathcal{C}$

T: $\exists M \in \mathbb{Q}\ \forall n \in \mathbb{N}$: $|a_n| \leq M$.

D: $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall p, q \geq N$: $|a_p - a_q| \leq 7$

(nie piszemy, że $p, q \in \mathbb{N}$ bo wiemy to z kontekstu)

Zatem dla $n \geq N$, $|a_n - a_N| \leq 7$

Stąd $|a_n| - |a_N| \leq 7$ dla $n \geq N$ czyli

$|a_n| \leq 7 + |a_N|$ dla $n \geq N$ skąd:

$|a_n| \leq |a_1| + \ldots + |a_N| + 7$ dla $n \in \mathbb{N}$

Lemat 7.10

Zł: $\{a_n\} \in \mathbb{C}$, $[\{a_n\}]_\sim \neq 0$.

Tł: $\exists_{m>0}\, m \in \mathbb{Q}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N: |a_n| \geqslant m$.

D: Przypuścimy, że teza nie zachodzi.
Wtedy istnieją liczby naturalne.

$n_0 < n_1 < \dots < n_p < \dots$ takie, że.

$|a_{n_p}| < \frac{1}{p+1}$ dla $p \in \mathbb{N}$

Ustalmy $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, $\varepsilon > 0$

$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall p,q \geq N: |a_p - a_q| < \varepsilon/2$

Możemy wybrać N tak duże aby.
jednocześnie $\frac{1}{N+1} < \varepsilon/2$.

Wtedy dla $p \geq N$. $|a_p - a_{n_p}| < \varepsilon/2$.
a zatem dla $p \geq N$

$$|a_p| \leqslant |a_p - a_{n_p}| + |a_{n_p}| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

czyli $[\{a_n\}]_\sim = 0$ co daje sprzeczność.

Lemat 7.11

Zł: $\{a_n\} \in \mathbb{C}$, $[\{a_n\}]_\sim \neq 0$

Tł: $\exists_{m>0}\, m \in \mathbb{Q}\ \exists N \in \mathbb{N}: (\forall n \geq N: a_n \geqslant m) \vee (\forall n \geq N: a_n \leqslant -m)$

D: Na podstawie 7.10 istnieje.
$m > 0$, $N \in \mathbb{N}$, że dla $n \geq N$, $|a_n| \geqslant m$.
ale $\{a_n\} \in \mathbb{C}$ więc mamy teza.

Biorąc $\{a_n\}, \{b_n\} \in \mathcal{C}$ określamy działania na ich klasach, czyli ciągach rzeczywistych następująco.

Definicja 7.12 Przyjmujemy

$$[\{a_n\}]_\sim + [\{b_n\}]_\sim := [\{a_n + b_n\}]_\sim$$
$$[\{a_n\}]_\sim \cdot [\{b_n\}]_\sim := [\{a_n \cdot b_n\}]_\sim$$

Przechodząc do sprawdzenia poprawności powyższej definicji musimy stwierdzić, że:

(a) $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n \cdot b_n\}$ są ciągami Cauchy'ego.
(b) Określenie nie zależy od wyboru reprezentantów

Ad(a) Łatwo sprawdzić, że suma ciągów Cauchy'ego jest ciągiem Cauchy'ego. Dla iloczynu zauważmy, że.

$$|a_p \cdot b_p - a_q \cdot b_q| \leq |a_p \cdot b_p - a_p \cdot b_q| +$$
$$+ |a_p \cdot b_q - a_q \cdot b_q| = |a_p||b_p - b_q| +$$
$$+ |a_p - a_q||b_q| \leq \ldots$$

Mamy $M \in \mathbb{Q}$ t. że $|a_p| \leq M$, $|a_q| \leq M$ dla $p, q \in \mathbb{N}$ więc

$$\ldots \leq M(|a_p - a_q| + |b_p - b_q|).$$

Dysponując tą nierównością łatwo pokazać, że $\{a_n \cdot b_n\}$ jest Cauchy'ego.

Ad (b) Niezależność od wyboru reprezentanta

Wybierzmy ciągi Cauchy'ego $\{a_n\}, \{b_n\}, \{\tilde{a}_n\}$ takie, że $[\{a_n\}]_\sim = [\{\tilde{a}_n\}]_\sim$

Pokażemy, że z definicji możemy wymienić reprezentant $\{a_n\}$ na $\{\tilde{a}_n\}$. Analogicznie można pokazać wymianę drugiego reprezentanta.

Dla sumy szacujemy

$$|(a_n + b_n) - (\tilde{a}_n + b_n)| = |a_n - \tilde{a}_n|$$

i natychmiast widzimy nierówność

Dla iloczynu

$$|a_n \cdot b_n - \tilde{a}_n b_n| = |a_n - \tilde{a}_n||b_n| \leq \dots$$

Biorąc $M \in \mathbb{Q}$ t. że $|b_n| \leq M$ dla $n \in \mathbb{N}$ dostajemy $\dots \leq M|a_n - \tilde{a}_n|$ i korzystając z równości $[\{a_n\}]_\sim = [\{\tilde{a}_n\}]_\sim$ widzimy $[\{a_n \cdot b_n\}]_\sim = [\{\tilde{a}_n \cdot b_n\}]_\sim$

Pokażemy następnie, że z tak określonymi działaniami $\mathbb{R}$ jest ciałem, czyli spełnia aksjomaty I grupy.

Elementy neutralne otrzymujemy przez zanurzenie ciągów stałych i wszystko tutaj wynika z własności $\mathbb{Q}$ poza istnieniem elementu odwrotnego

Przypuśćmy, że $\{a_n\} \in \mathcal{C}$, $[\{a_n\}]_\sim \neq 0$
Poszukujemy $\{b_n\} \in \mathcal{C}$ takiego, że.

$$(*) \quad [\{a_n\}]_\sim \cdot [\{b_n\}]_\sim = 1.$$

Wiemy, że istnieje $N \in \mathbb{N}$ i $m > 0$ takie, że.
$|a_n| \geq m$ dla $n \geq N$

Przyjmujemy $b_n := 13$ dla $n = 0, 1, \ldots, N-1$
oraz

$$b_n = \frac{1}{a_n} \quad \text{dla} \quad n \geq N$$

Sprawdzamy czy $\{b_n\}$ jest Cauchy'ego.
Dla $p, q \geq N$ mamy

$$|b_p - b_q| = \left| \frac{1}{a_p} - \frac{1}{a_q} \right| =$$

$$\frac{|a_p - a_q|}{|a_p| \cdot |a_q|} \leq \frac{1}{m^2} |a_p - a_q| \leq \ldots$$

Ustalając $\varepsilon > 0$ oraz biorąc $\tilde{N} \geq N$
takie aby $|a_p - a_q| < m^2 \varepsilon$ dla $p, q \geq \tilde{N}$
dostajemy

$$|b_p - b_q| < \varepsilon \quad \text{dla} \quad p, q \geq \tilde{N}$$

Czyli $\{b_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego.

Dla $n \geq N$ mamy $a_n b_n = 1$ więc.
zachodzi (*). Zatem $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ jest ciałem.

5. Porządek w $\mathbb{R}$

Definicja 7.13. Dla $a, b \in \mathbb{R}$ piszemy:

(1) $a \leq b$ jeśli istnieją $\{a_n\}, \{b_n\} \in \mathcal{C}$ takie, że $a = [\{a_n\}]_\sim$, $b = [\{b_n\}]_\sim$ oraz $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq b_n$.

(2) $a < b \iff a \leqslant b \wedge a \neq b$.

Lemat 7.14

Z: $\{a_n\}, \{b_n\} \in \mathcal{C}$

T: Następujące warunki są równoważne:

(1) $[\{a_n\}]_\sim < [\{b_n\}]_\sim$

(2) $\exists m \in \mathbb{Q}, m > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geqslant N: b_n - a_n \geqslant m$.

D: (2) $\Rightarrow$ (1) Klasy są różne oraz.

$b_n \geqslant a_n + m \geqslant a_n$ dla $n \geqslant N$

Możemy zmodyfikować wyrazy $0, \ldots, N-1$ ciągów tak aby $b_n \geqslant a_n$ dla $n \in \mathbb{N}$ bez zmiany ich klasy, zatem $[\{a_n\}]_\sim \leqslant [\{b_n\}]_\sim$ czyli $[\{a_n\}]_\sim < [\{b_n\}]_\sim$

(1) $\Rightarrow$ (2). Skoro klasy są różne, to $[\{b_n - a_n\}]_\sim \neq 0$. Zatem istnieją $n \in \mathbb{N}$ $m \in \mathbb{Q}$, $m > 0$ takie, że.

$|b_n - a_n| > m > 0$ dla $n \geqslant N$.

Istnieje zatem $\tilde{N} \geqslant N$ takie, że.

$b_n - a_n > 0$ dla $n \geqslant \tilde{N}$ lub $a_n - b_n > 0$ dla $n \geqslant \tilde{N}$

Ale druga nierówność ze względu na (1) nie jest możliwe.

Sprawdźmy własności relacji „<" w $\mathbb{R}$. ujęte w grupie II - Aksjomaty porządku.

1. Jeśli $a,b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$ to $a<b$ lub $b<a$.

Ustalmy $\{a_n\}, \{b_n\} \in \mathbb{C}$ tak aby $[\{a_n\}]_\sim = a$, $[\{b_n\}]_\sim = b$ Wtedy. $[\{a_n - b_n\}]_\sim \neq 0$. Na podstawie Lematu 7.11 istnieje $m \in \mathbb{Q}$, $m > 0$ oraz $N \in \mathbb{N}$ takie, że:

$$\forall n \geq N: a_n - b_n \geq m \text{ lub } \forall n \geq N: a_n - b_n \leq -m.$$

Teraz z Lematu 7.14 dostajemy. $a < b$ lub $b < a$.

2. Jeśli $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a<b$, $b<c$ to $a<c$.

Biorąc reprezentanty $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ zmyślmy. $N \in \mathbb{N}$ oraz $\varepsilon > 0$ takie, że. dla $n \geq N$, $b_n \geq \varepsilon + a_n$, $c_n \geq \varepsilon + b_n$. Zatem wtedy $c_n \geq 2\varepsilon + a_n$ dla $n \geq N$ co kończy dowód.

3. Dla $a,b \in \mathbb{R}$ jeśli $a<b$ to nie zachodzi $b<a$. Jest to natychmiastowy wniosek z 7.14.

6. Związki działań z porządkiem.

Spowodujemy, że $\mathbb{R}$ spełnia trzecią grupę aksjomatów

1. $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

Wystarczy tutaj zastosować Lemat 7.14 i fakt wynika natychmiast

2. $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c > 0 \Rightarrow ac < b \cdot c$.

Na wstępie wybierzmy reprezentant $\{c_n\}$ liczby c oraz $m \in \mathbb{Q}$, $m > 0$ tak aby $c_n \geqslant m$ dla $n \in \mathbb{N}$. aby to uzyskać wystarczy zmodyfikować pierwsze wyrazy dowolnego reprezentanta c.

Znajdujemy reprezentanty $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ oraz $\tilde{m} \in \mathbb{Q}$, $\tilde{m} > 0$ takie, że

$$a_n + \tilde{m} \leqslant b_n \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}$$

$$b_n \cdot c_n \geqslant (a_n + \tilde{m}) \cdot c_n \geqslant a_n \cdot c_n + \tilde{m} \cdot m$$

dla $n \in \mathbb{N}$ wiec.

$$b_n \cdot c_n - a_n \cdot c_n \geqslant \tilde{m} \cdot m \in \mathbb{Q}.$$

dla $n \in \mathbb{N}$

to kończy dowód.

7. Gęstość $\mathbb{Q}$ w $\mathbb{R}$, aksjomat ciągłości

Określamy odwzorowanie

$$\mathbb{R} \ni a \longrightarrow |a| = \begin{cases} a, \text{ gdy } a \geq 0, \\ -a, \text{ gdy } a < 0. \end{cases}$$

Uwaga 7.15 Zachodzą następujące implikacje:

(1) $\{a_n\} \in \mathcal{C} \Rightarrow |[\{a_n\}]_\sim| = [\{|a_n|\}]_\sim$,

(2) $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow |a+b| \leq |a| + |b|$,

(3) $a, b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow |a-c| \leq |a-b| + |b-c|$,

(4) $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow ||a| - |b|| \leq |a-b|$

D: Ćwiczenie.

Lemat 7.16

Z: $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$

T: $\exists \delta \in \mathbb{Q} : 0 < \delta < \varepsilon$

D: $\varepsilon = [\{\varepsilon_n\}]_\sim$

Istnieje $m \in \mathbb{Q}$, $m > 0$, $N \in \mathbb{N}$ t. że.

$$\forall n \geq N : \varepsilon_n \geq m$$

Wówczas $\delta = \frac{m}{2} \in \mathbb{Q}$, mamy

$$\varepsilon_n \geq \delta + \frac{m}{2} \quad \text{dla } n \geq N$$

Zatem z 7.10 mamy tezę.

Twierdzenie 7.17

Z: $x \in \mathbb{R}$

T: $\forall_{\varepsilon>0} \exists q \in \mathbb{Q} : |x-q| < \varepsilon$.

D: $x = [\{x_n\}]_\sim$, $\varepsilon > 0$

Istnieje $\delta \in \mathbb{Q}$: $N \in \mathbb{N}$ t.że.

(1) $0 < \delta < \varepsilon$

(2) $\forall_{p,q \geq N} : |x_q - x_p| < \delta$

Obieramy $q := x_N$ wtedy dla (1).

$n \geq N$ mamy $|x_n - x_N| < \delta$ czyli

$|x_n - q| < \delta$

$|x-q| = |[\{x_n - q\}]| = [\{|x_n - q|\}]_\sim \leq \delta < \varepsilon$

Czyli $|x-q| < \varepsilon$

Twierdzenie 7.18

Z: $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

T: $\exists q \in \mathbb{Q} : a < q < b$.

D: Weźmy $x = \frac{1}{2}(a+b)$, $\varepsilon = \frac{1}{2}(b-a)$

Z 7.17 dostajemy $q \in \mathbb{Q}$ t.że.

$|x-q| < \frac{1}{2}(b-a)$.

Po rozpisaniu $a < q < b$.

Aksjomat ciągłości

$\mathbb{R}$ nie można podzielić na dwa podzbiory. A i B takie, że:

(1) $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{R}$
(2) $(a \in A, b \in B) \Rightarrow (a < b)$
(3) $a \in A \Rightarrow \exists \tilde{a} \in A : a < \tilde{a}$
(4) $b \in B \Rightarrow \exists \tilde{b} \in B : \tilde{b} < b$.

Przypuśćmy (dowód przez zaprzeczenie), że. $\mathbb{R}$ zostało podzielone na takie podzbiory A, B spełniające powyższe warunki.
Niech. $A_{\mathbb{Q}} = A \cap \mathbb{Q}$, $B_{\mathbb{Q}} = B \cap \mathbb{Q}$
Mamy wtedy: $A_{\mathbb{Q}} \cup B_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$, $A_{\mathbb{Q}} \neq \emptyset$, $B_{\mathbb{Q}} \neq \emptyset$
Wybieramy teraz elementy $a_0 \in A_{\mathbb{Q}}$, $b_0 \in B_{\mathbb{Q}}$ i tworzymy ciągi $\{a_n\}$ w $A_{\mathbb{Q}}$ i $\{b_n\}$ w $B_{\mathbb{Q}}$ korzystając z następującego postępowania.

Określamy $c_0 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0) \in \mathbb{R}$ i tworzymy a_1 i b_1 tak aby.

$c_0 \in \{a_1, b_1\} \subset \{a_0, c_0, b_0\}$

Wyboru dokonujemy następująco.

$c_0 \in A_{\mathbb{Q}} \Rightarrow (a_1 = c_0, b_1 = b_0)$
$c_0 \in B_{\mathbb{Q}} \Rightarrow (b_1 = c_0, a_1 = a_0)$

Dysponując a_n, b_n dla $n \geq 1$ tworzym.
$c_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ oraz wybieramy a_{n+1}, b_{n+1}
tak aby

$$c_n \in \{a_{n+1}, b_{n+1}\} \subset \{a_n, c_n, b_n\}$$

Otrzymujemy w ten sposób. $\{a_n\}, \{b_n\} \in S$
Połóżmy, że $\{a_n\}, \{b_n\} \in C$ oraz, że.
reprezentują tą samą klasę w $\mathbb{R}$.

Widzimy, że $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq b_0$ oraz.
$b_0 \geq b_1 \geq \dots \geq a_0$

Jeśli $\{a_n\}$ nie jest ciągiem Cauchy'ego. to

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists p,q \geq N : |a_p - a_q| \geq \varepsilon$$

Można zatem skonstruować podciąg $\{a_{n_k}\}$.
ciągu $\{a_n\}$ taki, że.

$$a_{n_{k+1}} - a_{n_k} \geq \varepsilon \quad \text{dla } k = 0, 2, 4, \dots$$

Co jest sprzeczne z tym, że $a_n \leq b_0$ dla $n \in \mathbb{N}$
Zatem $\{a_n\}$ i podobnie $\{b_n\}$ są Cauchy'ego.
Mamy jednak $|a_n - b_n| \leq 2^{-n} |a_0 - b_0|$, $n \in \mathbb{N}$
Czyli klasy są identyczne oznaczmy element ten przez c. Wykluczymy możliwości $c \in A$ i $c \in B$
Jeśli $c \in A$ to istnie $\tilde{c} \in A$ takie, że $c < \tilde{c}$. Istnieje więc $q \in \mathbb{Q}$ t. że $c < q < \tilde{c}$ i jak widać $q \in A$ oraz.
$c = [\{b_n\}]_\sim < q$. Zatem $\exists N \subset \mathbb{N} \ \forall n \geq N : b_n \leq q$
co daje sprzeczność czyli $c \notin A$ i podobnie $c \notin B$. Mamy sprzeczność.

Uwaga 7.19 Sprawdziliśmy wszystkie aksjomaty zbioru liczb rzeczywistych, czyli $\mathbb{R} = \mathbb{Q}/\sim$ jest przykładem takiej struktury, której poszukiwaliśmy przy podejściu aksjomatycznym.

Uwaga 7.20 Konkurencyjna do konstrukcji Cantora zbioru liczb rzeczywistych, konstrukcja przedstawiona przez Dedekinda, pojawiła się w tym samym 1872r. Podstawą tej konstrukcji są tzw. przekroje, zwane dzisiaj „przekrojami Dedekinda". Wprowadza się je następująco:

Przekrojem nazywamy zbiór $\alpha \subset \mathbb{Q}$ o następujących trzech własnościach:

(1) $\emptyset \neq \alpha \neq \mathbb{Q}$,

(2) $(p \in \alpha, q \in \mathbb{Q}, q < p) \Rightarrow (q \in \alpha)$

(3) $p \in \alpha \Rightarrow \exists r \in \alpha : p < r$

Przekroje są identyfikowane z liczbami rzeczywistymi.

Taką konstrukcję w dość precyzyjnej formie znajdujemy w książce W. Rudina „Podstawy analizy matematycznej" w postaci Dodatku do Rozdziału 1. W wielu książkach można znaleźć mniej precyzyjny jej zarys.

§2. Charakteryzacja przestrzeni metrycznych zwartych.

1. Pokrycia otwarte, główne twierdzenie o zwartości

X - zbiór, $Y \subset X$, $\{Z_s\}_{s \in S}$ - rodzina podzbiorów X

Definicja 7.19 Rodzinę $\{Z_s\}_{s \in S}$ nazywamy *pokryciem* Y jeśli $Y \subset \bigcup_{s \in S} Z_s$. Jeśli $\tilde{S} \subset S$ oraz $Y \subset \bigcup_{s \in \tilde{S}} Z_s$, to $\{Z_s\}_{s \in \tilde{S}}$ nazywamy *podpokryciem* wyjściowego pokrycia. Jeśli S ($\tilde{S}$) jest skończony, to mówimy wtedy o pokryciu (podpokryciu) skończonym.

Uwaga 7.20 Zwykle operujemy specjalnymi pokryciami tworzonymi np. ze zbiorów otwartych czy domkniętych. Wtedy mówimy o pokryciach otwartych oraz domkniętych.

Twierdzenie 7.21

Z: (X,d) - przestrzeń metryczna.

T: Następujące warunki są równoważne:

(1) X - zwarta,

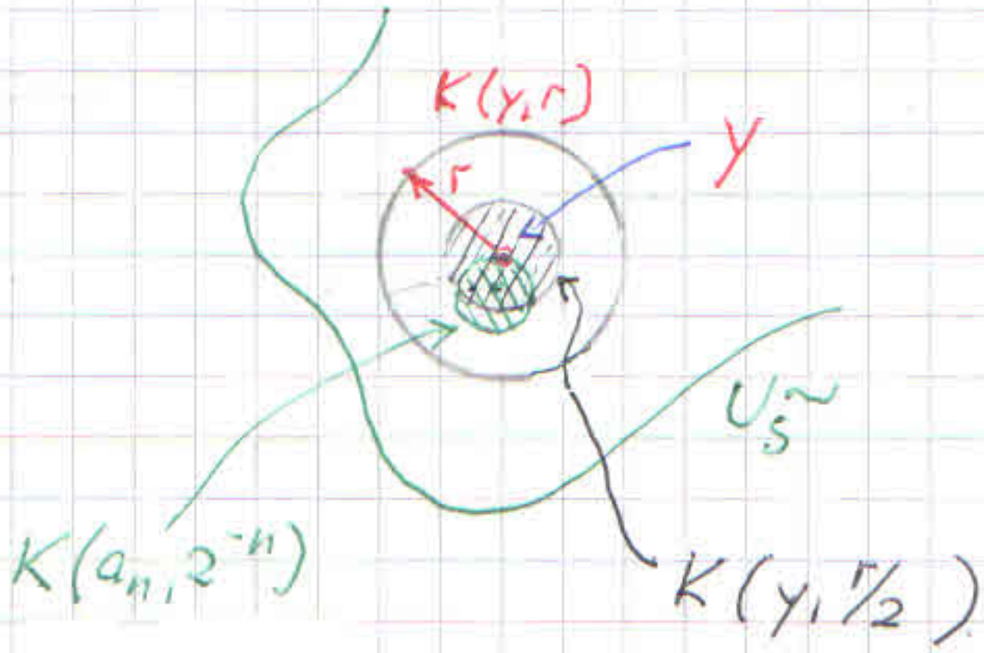
(2) z każdego pokrycia otwartego X można wybrać podpokrycie skończone.

D: (2) $\Rightarrow$ (1) Przypuśćmy, że $\{a_n\}$ jest ciągiem w X bez punktu skupienia. Określając $U_n := X \setminus \{a_n, a_{n+1}, \dots\}$, $n \in \mathbb{N}$ dostajemy takie pokrycie otwarte X, z którego nie da się wybrać podpokrycia skończonego

(1) $\Rightarrow$ (2). Niech $\{U_s\}_{s\in S}$ będzie pokryciem otwartym X. Zauważmy na wstępie, że:

$$(\#)\quad \exists \delta>0\ \forall a\in X\ \exists s\in S: K(a,\delta)\subset U_s$$

Przypuśćmy, że taka liczba $\delta>0$ nie istnieje. Wtedy znajdziemy ciąg punktów $a_n\in X$, $n\in\mathbb{N}$ taki, że $K(a_n, 2^{-n})$ nie zawiera się w żadnym U_s dla $s\in S$. Zauważmy, że ciąg ten nie ma podciągu zbieżnego. Gdyby $\{a_n\}$ miał podciąg zbieżny do $y\in X$, to dla pewnego $\tilde{s}\in S$ oraz $r>0$ mamy $K(y,r)\subset U_{\tilde{s}}$



Wtedy w kuli $K(y, r/2)$ leży nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{a_n\}$, ale wtedy $K(a_n, 2^{-n})\subset K(y,r)\subset U_{\tilde{s}}$ dla $a_n\in K(y, r/2)$ oraz $n\in\mathbb{N}$ takiego, że $2^{-n}\leqslant r/2$.

Dostajemy sprzeczność, a zatem zachodzi (#). Liczba $\delta>0$ spełniająca podany wzwunek jest nazywana liczbą Lebesgue'a pokrycia $\{U_s\}_{s\in S}$.

Skoro mamy już ustaloną liczbę $\delta>0$ więc każda kula $K(a,\delta)$ zawiera się w U_s dla pewnego $s\in S$.

Przypuśćmy, że z naszego pokrycia $\{U_s\}_{s\in S}$ nie można wybrać podpokrycia skończonego.
Określamy ciąg wybierając $a_0 \in X$, $a_1 \in X \setminus K(a_0, \delta)$, ... $a_n \in X \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} K(a_k, \delta)$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Widzimy wtedy, że $d(a_m, a_n) \geq \delta$ dla $m \neq n$ więc wybrany ciąg $\{a_n\}$ nie może mieć podciągu zbieżnego - co daje sprzeczność z (1).
To kończy dowód twierdzenia.

Do stosowania wygodna jest następująca równoważna poprzedniego twierdzenie.

Twierdzenie 7.22

Z: (X,d) - przestrzeń metryczna, $Y \subset X$
T: Następujące warunki są równoważne:
(1) Y jest podzbiorem zwartym X,
(2) z każdego pokrycia otwartego w X zbioru Y można wybrać jego podpokrycie skończone

D: Wystarczy zauważyć, że podzbiory otwarte w $(Y, d|Y\times Y)$ są śladami zbiorów otwartych z X na Y.

Uwaga 7.23. W topologii przestrzenie zwarte, to przestrzenie Hausdorffa spełniające warunek (2) z 7.21. W zasadzie w przestrzeniach metrycznych wygodniej operuje się ciągami, ale technika pokryć otwartych jest bardzo wygodna.

2. Inne spotykane opisy zwartości

Twierdzenie 7.23

Z: X - przestrzeń metryczna.

T: Następujące warunki są równoważne:
(1) X - zwarta,
(2) każdy ciąg w X ma punkt skupienia,
(3) $(A \subset X, A$ - przeliczalny$) \Rightarrow (A' \neq \emptyset)$,
(4) $(A \subset X, A$ - nieskończony$) \Rightarrow (A' \neq \emptyset)$.

D: $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4)$ oczywiste.
$(4) \Rightarrow (1)$ Jeśli X jest zbiorem skończonym, to oczywiście przestrzeń jest zwarta. Jeśli następnie wybierzemy ciąg $\{a_n\}$ w X, to rozpatrując zbiór $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ zauważamy, że jego skończoność daje istnienie (stałego) podciągu zbieżnego zaś nieskończoność pozwala na wybór takiego podciągu na podstawie (4).

§3. Funkcje analityczne

1. Funkcje odwrotne do funkcji analitycznych

W tej części wracamy, zgodnie z zapowiedzią, do dowodu ważnego twierdzenia 6.26, które było sformułowane następująco

Twierdzenie 6.26

Z: Ω otwarty w $\mathbb{K}$, $f \in C^\omega(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$$ jest rozwinięciem funkcji f w $K(z_0, r) \subset \Omega$, $r > 0$ w szereg potęgowy, w którym $c_1 \neq 0$

T: Istnieją: U - otoczenie z_0, $U \subset \Omega$,
V - otoczenie $c_0 = f(z_0)$ w $\mathbb{K}$,
takie dobrane, że $f/U : U \longrightarrow V$ jest bijekcją
oraz $g = (f/U)^{-1} : V \longrightarrow U$ jest analityczne w V

D: Bez straty ogólności możemy przyjąć, że
$z_0 = 0$, $c_0 = f(z_0) = 0$ oraz, że wyjściowa
funkcja f ma rozwinięcie w $K(0,r)$ postaci:

$$(\#) \quad f(z) = z - \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n,$$

gdyż w miejsce f możemy bez straty ogólności rozpatrywać funkcję $f\left(\frac{z}{c_1}\right)$.
Stawiamy się teraz znaleźć funkcję odwrotną do niej $g : K(0,s) \longrightarrow \mathbb{K}$, $s > 0$

7-23

zadaną szeregiem $g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n$.

Czyli funkcja g musi spełniać warunek

$$f(g(z)) = z \quad dla \quad z \in K(0,\varrho)$$

dla dostatecznie małych $\varrho > 0$.

Korzystając z przedstawienia f dostajemy stąd:

$$g(z) - a_2 (g(z))^2 - a_3 (g(z))^3 - \ldots = z.$$

Stąd, po podstawieniu rozwinięcia g, dostaniemy

$$(b_1 z + b_2 z^2 + \ldots) - a_2 (b_1 z + b_2 z^2 + \ldots)^2 - \ldots = z$$

Równość ta zachodzi gdy mamy zgodność współczynników przy potęgach z^n, $n = 1, 2, \ldots$, czyli gdy:

$$b_1 = 1$$
$$b_2 - a_2 b_1^2 = 0$$
$$b_3 - 2 a_2 b_1 b_2 - a_3 b_1^3 = 0$$
$$\ldots\ldots \quad itd.$$

Łatwo zauważyć, że możemy z tych równości otrzymać:

$$b_1 = 1,$$
$$b_n - P_n(a_2, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_{n-1}) = 0 \quad dla \quad n \geq 2,$$

gdzie P_n jest wielomianem o współczynnikach naturalnych wynikających ze stosowania „wzoru Newtona" przy kolejnych przeliczeniach

Rozpisując dokładniej mamy, dla $n \geq 2$

$$P_n(a_2, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_{n-1}) =$$

$$= a_2 P_{2,n}(b_1, \ldots, b_{n-1}) + \ldots + a_n P_{n,n}(b_1, \ldots, b_{n-1})$$

gdzie $P_{2,n}, \ldots, P_{n,n}$ są wielomianami o współczynnikach naturalnych.

Mamy pokazać, że takie przedstawienie prowadzi do szeregu o dodatnim promieniu zbieżności. W tym celu wraz z wyjściową funkcją (#) rozpatrujemy

$$f^*(z) = z - \sum_{n=2}^{+\infty}{}' a_n^* z^n$$

gdzie $a_n^* \in \langle 0, +\infty)$ dla $n \geq 2$ oraz $|a_n| \leq a_n^*$ dla $n \geq 2$.

Przypuśćmy, że uzyskamy podaną procedurą szereg

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{+\infty}{}' d_n z^n, \quad d_1 = 1,$$

gdzie $d_n - P_n(a_2^*, \ldots, a_n^*, d_1, \ldots, d_{n-1}) = 0$ dla $n \geq 2$ z opisanymi wcześniej wielomianami P_n.

Łatwo wtedy zauważyć, że $|b_n| \leq d_n$ dla $n \geq 2$.
Zatem aby uzyskać zbieżność w pewnym kole, szeregu opisującego funkcję g, wystarczy zbadać zbieżność φ utworzonego dla pewnej funkcji f^* takiej jak wyżej wprowadzona.

Okazuje się, że można wziąć jako współczynniki a_n^*, $n \geq 2$ wyrazy ciągu geometrycznego. Faktycznie, skoro f ma dodatni promień zbieżności, to

$$\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < +\infty ,$$

a zatem $\sqrt[n]{|a_n|} \leq A$ dla $n \in \mathbb{N}$ przy pewnym $A > 0$. Skąd $|a_n| \leq A^n$ dla $n \in \mathbb{N}$

Wtedy jako f^* otrzymujemy.

$$f^*(z) = z - \sum_{n=2}^{+\infty} A^n z^n = z - \frac{A^2 z^2}{1 - Az}$$

gdzie $|Az|$ jest dostatecznie małe.

Licząc teraz funkcję φ (odwrotną) dostajemy związek:

$$\varphi(z) - \frac{A^2 (\varphi(z))^2}{1 - A\varphi(z)} = z ,$$

który daje nam równanie kwadratowe

$$(A^2 + A)(\varphi(z))^2 - (1 + Az)\varphi(z) + z = 0$$

To równanie kwadratowe rozwiązuje funkcję.

$$\varphi(z) = \frac{(1 + Az) - \sqrt{(1 + Az)^2 - 4z(A^2 + A)}}{2(A^2 + A)}$$

Problemem pozostaje analityczność funkcji znajdującej się pod symbolem pierwiastka, po wyłączeniu tego pierwiastka. Pytamy zatem, czy jest analityczna funkcja

$$(1 + Az)\sqrt{1 - \frac{4z(A^2 + A)}{(1 + Az)^2}}$$

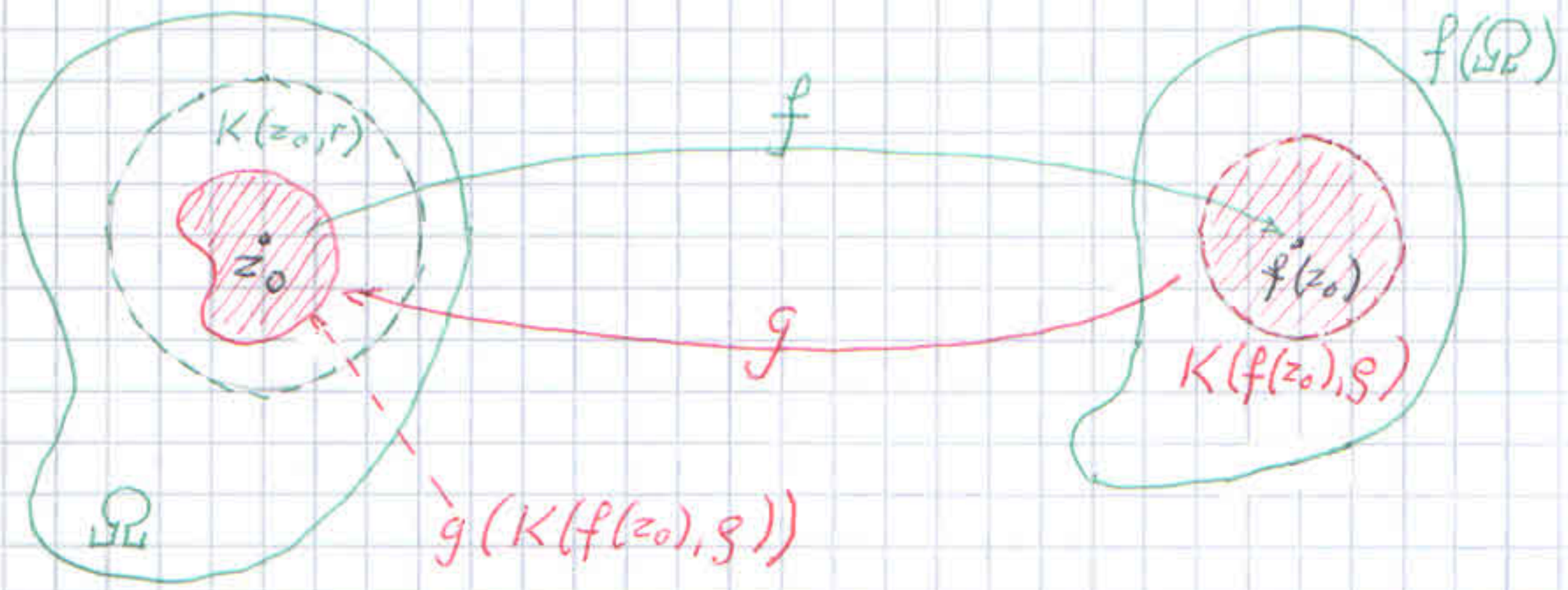
Zatem wystarczy sprawdzić ogólnie znany fakt, że funkcja

$$K(0,1) \ni z \longrightarrow \sqrt{1+z} \in \mathbb{K}$$

jest analityczna. (Ćw.)

Wracając teraz do wyjściowej sytuacji w dowodzonym twierdzeniu dla $f \in C^\omega(\Omega)$ i $z_0 \in \Omega$ przy rozwinięciu $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$ w $K(z_0,r) \subset \Omega$, w którym $c_1 \neq 0$, znajdujemy funkcję $g: K(f(z_0),\varrho) \to \Omega$, $\varrho > 0$ taką, że

$$f(g(z)) = z \quad \text{dla } z \in K(f(z_0),\varrho)$$



(*) Zauważmy, że w tej sytuacji $K(f(z_0),\varrho) \subset f(\Omega)$, bo dla $z \in K(f(z_0),\varrho)$ mamy $z = f(g(z)) \in f(\Omega)$, czyli warunek $c_1 \neq 0$ daje nam $f(z_0) \in \operatorname{int} f(\Omega)$. Gdyby więc w każdym punkcie Ω pierwszy współczynnik rozwinięcia f w szereg potęgowy (w pewnym kole o środku w tym punkcie) był niezerowy, to $f(\Omega)$ byłoby podzbiorem otwartym $\mathbb{K}$

Wracając do dowodu zauważmy, że jeśli $g(K(f(z_0),\varrho))$ jest otwarty, to przyjmując $U = g(K(f(z_0),\varrho))$, $V = K(f(z_0),\varrho)$ dostajemy $f|U: U \to V$ bijekcję i $(f|U)^{-1} = g$, co kończy dowód.

Aby uzyskać otwartość $g(K(f(z_0),\varrho))$ skorzystamy z obserwacji (*) po stosownym zmniejszeniu promienia ϱ koła $K(f(z_0),\varrho)$.
Jeśli uzyskana funkcja g ma rozwinięcie w punkcie $w_0 = f(z_0)$ postaci

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-w_0)^n \quad \text{dla } z \in K(w_0,\varrho)$$

to z przeprowadzonej konstrukcji mamy $b_1 \neq 0$.

Jak wynika z konstrukcji przeprowadzonej w dowodzie Tw. 6.10, pierwszy współczynnik rozwinięcia funkcji g w punktach $z \in K(w_0,\varrho)$ zadany jest przez funkcję $\sum_{n=1}^{+\infty} n b_n (z-w_0)^{n-1}$ analityczną w $K(w_0,\varrho)$, przyjmującą w w_0 wartość $b_1 \neq 0$.
Funkcja ta nie zeruje się w pewnym kole $K(f(z_0),\tilde{\varrho})$ gdzie $\tilde{\varrho} \in (0,\varrho)$, a wtedy obraz $g(K(f(z_0),\tilde{\varrho}))$ jest otwarty w $\mathbb{K}$ i spełnia jako U tezę naszego twierdzenia przy $V = K(f(z_0),\tilde{\varrho})$

Główna idea tego dowodu pochodzi z książki
S. Lang, Complex Analysis, Fourth Edition, Springer 1999.

2. Potęgi zespolone liczb zespolonych.

Dla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ oraz $w \in \mathbb{C}$ określiliśmy

$$z^w := e^{w \log z} = \{e^{wv} : v \in \log z\}$$

Jeśli $z = |z| e^{i\alpha_0}$ gdzie $\alpha_0 \in \arg z \cap [0, 2\pi)$, to wtedy $\log z = \{\ln|z| + i(\alpha_0 + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\}$, skąd

$$z^w = \{e^{w(\ln|z| + i\alpha_0 + 2k\pi i)} : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Przykłady 7.24

(1) $z = i$, $w = i$, więc otrzymujemy wtedy

$$i^i = \{e^{i(0 + i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i)} : k \in \mathbb{Z}\} =$$

$$= \{e^{-(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)} : k \in \mathbb{Z}\} \subset (0, +\infty) \times \{0\}.$$

Dostajemy więc przeliczalny zbiór liczb rzeczywistych, który ma dwa punkty skupienia w $\mathbb{C}$: 0 i ∞.

(2) $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $w \in \mathbb{Z}$. Oznaczmy $m = w$, a wtedy

$$z^w = z^m = \{e^{m(\ln|z| + i\alpha_0 + 2k\pi i)} : k \in \mathbb{Z}\} =$$

$$= \{e^{m(\ln|z| + i\alpha_0)} \cdot e^{2km\pi i} : k \in \mathbb{Z}\} =$$

$$= \{e^{m(\ln|z| + i\alpha_0)}\} = \{z^m\}$$

Zatem wtedy, przy ustalonym $w = m \in \mathbb{Z}$ dostajemy funkcję $\mathbb{C} \setminus \{0\} \ni z \longrightarrow z^m \in \mathbb{C}$, którą dla $w \in \mathbb{N}$ możemy przedłużyć na $\mathbb{C}$.

(3) $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $w = \frac{1}{p}$, $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$.

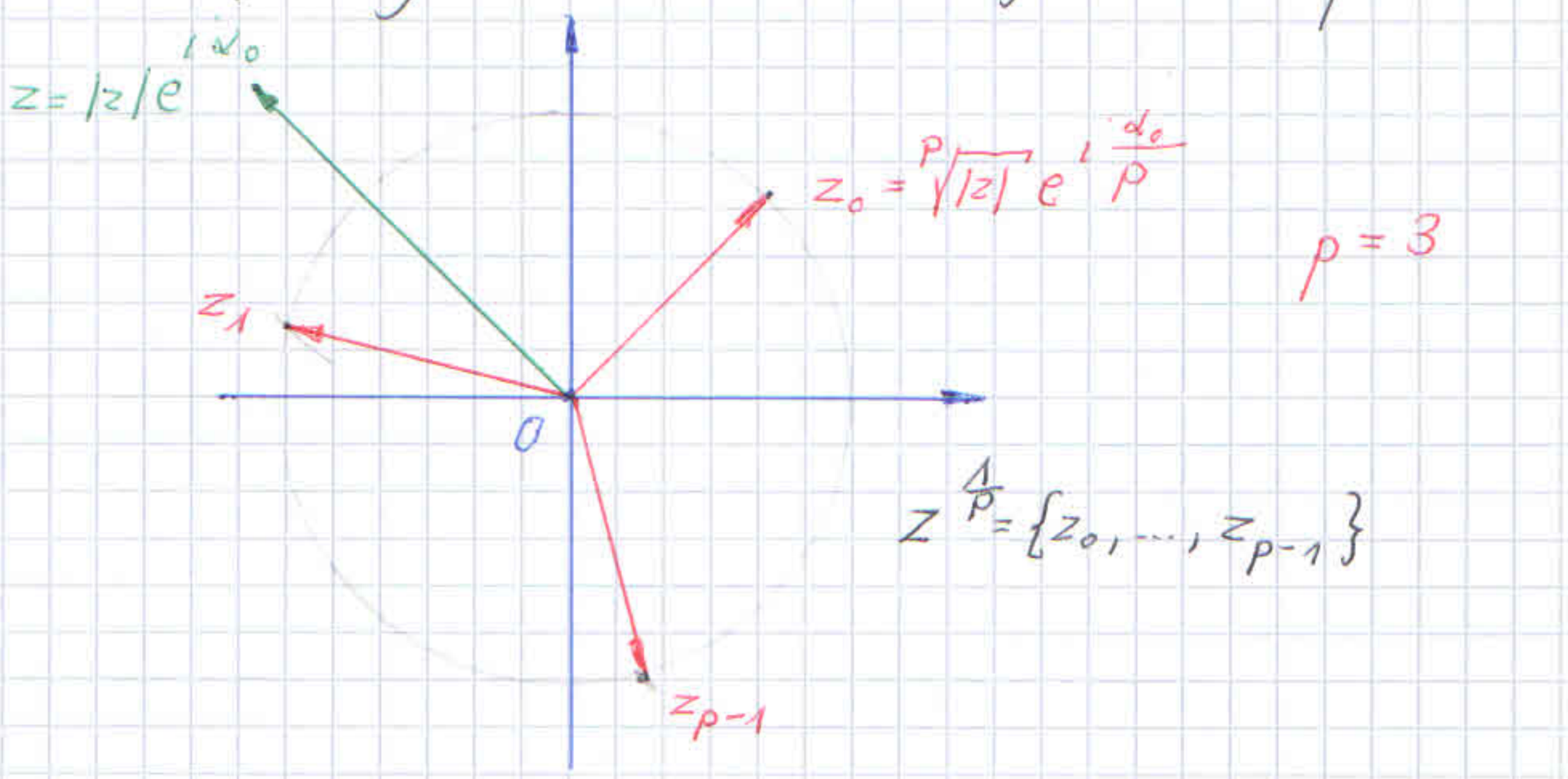
Wtedy dostajemy dla $z = |z| e^{i\alpha_0}$

$$z^{\frac{1}{p}} = \{ e^{\frac{1}{p}(\ln|z| + i\alpha_0 + 2k\pi i)} : k \in \mathbb{Z} \} =$$

$$= \{ e^{\frac{1}{p}(\ln|z| + i\alpha_0)} \cdot e^{\frac{k}{p}(2\pi i)} : k \in \mathbb{Z} \} =$$

$$= \{ \sqrt[p]{|z|}\, e^{i\frac{\alpha_0}{p}} \cdot e^{i\frac{k}{p}(2\pi)} : k = 0, 1, \dots, p-1 \} = \{z_0, \dots, z_{p-1}\}$$

czyli klasyczny pierwiastek p-tego stopnia p liczby $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, który zawsze dookreślamy dla $z = 0$ przez 0.



(4) $z = t \in (0, +\infty)$, $w \in \mathbb{C}$. Wtedy otrzymujemy

$$t^w = \{ e^{w(\ln t + 2k\pi i)} : k \in \mathbb{Z} \}.$$ Ustalmy $t \in (0, +\infty)$

Zwykle w tej sytuacji wprowadza się uproszczenie, wybierając gdzieś jednoznaczną tak określoną funkcję wielowartościową $\mathbb{C} \ni w \longrightarrow R_w \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$, przyjmując $k = 0$. Dostajemy więc dla $w = x + iy$

$$t^w = e^{w \ln t} = e^{(x+iy)\ln t} = e^{x\ln t + iy\ln t}, \text{ więc}$$

$$|t^w| = e^{x \ln t} = t^x = t^{\operatorname{re} w}$$

Zauważmy ponadto, że przy ustalonym $t \in (0, +\infty)$ funkcja $\mathbb{C} \ni w \longrightarrow t^w = e^{w \ln t} \in \mathbb{C}$ jest analityczna.

3. Funkcja ζ Riemanna.

Korzystając z 7.24(4) możemy określić funkcję ζ (dzeta) Riemanna. dla $w \in \mathbb{C}$, $\operatorname{re} w > 1$ wzorem

$$\zeta(w) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^w}$$

Skoro $\left|\frac{1}{n^w}\right| = \frac{1}{n^{\operatorname{re} w}}$, więc ustalając $s > 1$ dostajemy. dla $\operatorname{re} w \geq s$ oszacowanie.

$$(\#) \quad \left|\frac{1}{n^w}\right| \leq \frac{1}{n^s}.$$

To daje punktową zbieżność rozpatrywanego szeregu przy $\operatorname{re} w > 1$. na podstawie 4.37.

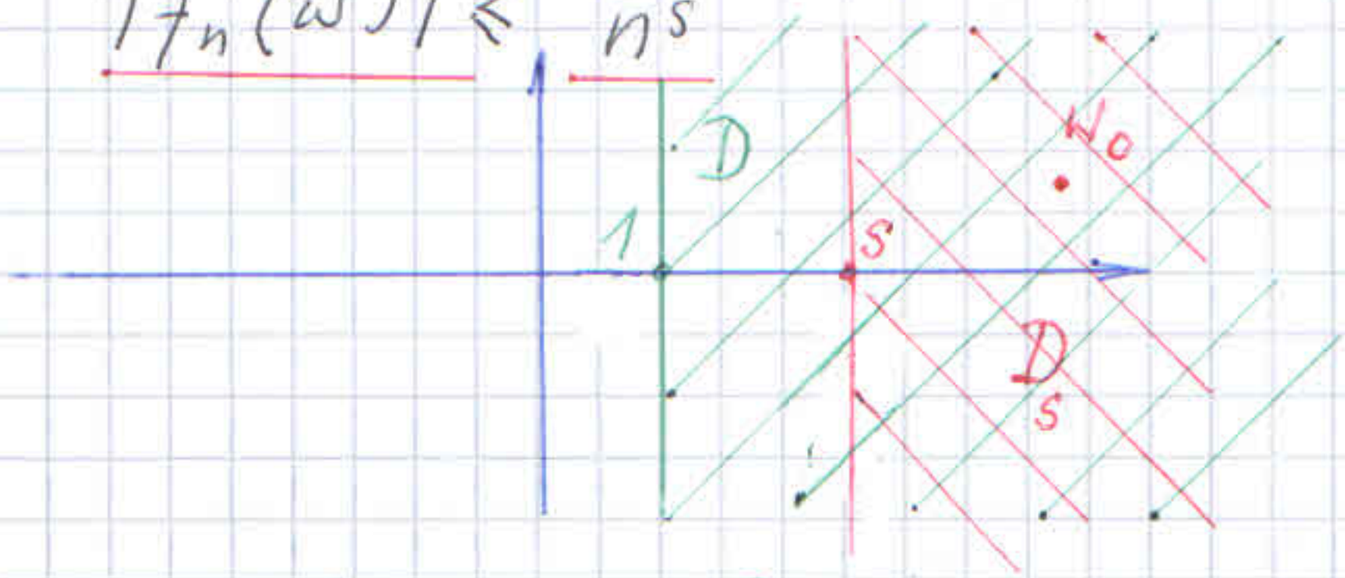
Określając $D = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{re} w > 1\}$

$D_s = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{re} w > s\}$ dla $s > 1$

$f_n : D \ni w \longrightarrow \frac{1}{n^w} \in \mathbb{C}$, dla $n \geq 1$.

zauważamy, że f_n są analityczne (holomorficzne) dla $n \geq 1$, oraz dla $w \in D_s$ mamy z (#) nierówność:

$$(*). \quad |f_n(w)| \leq \frac{1}{n^s}$$



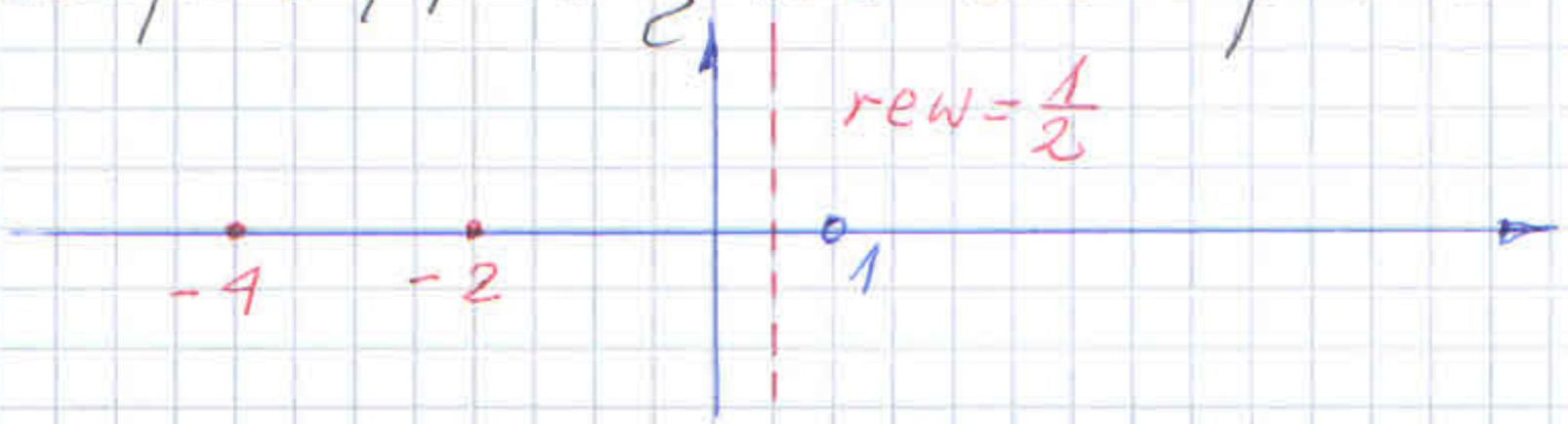
Zatem dla każdego $w_0 \in D$ istnieje jego otoczenie D_s gdzie $1 < s < \operatorname{re} w_0$ w którym szereg funkcyjny $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ jest ograniczany przez szereg zbieżny, tak jak w (*) jest więc lokalnie jednostajnie zbieżny.

Z klasycznego twierdzenia Weierstrassa analizy zespolonej dostajemy analityczność (holomorficzność) funkcji ξ, piszemy $\xi \in \mathcal{O}(D)$.

Okazuje się, że funkcję ξ można przedłużyć holomorficznie na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ i to przedłużenie jest oznaczane też symbolem ξ i nazywane funkcją ξ Riemanna, czyli

$$\xi : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}, \quad \xi(w) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^w} \quad \text{dla } \operatorname{re} w > 1.$$

Okazuje się, że ξ ma zera w punktach $w = -2, -4, -6, \ldots$



Hipoteza Riemanna z 1859 r. mówi, że wszystkie pozostałe zera funkcji ξ leżą na prostej $\operatorname{re} w = \frac{1}{2}$. Problem zaliczany jest do grup najważniejszych problemów matematyki ze względu na znaczenie dla teorii liczb, statystyki oraz fizyki. Znajdujemy go w tak zwanych problemach Hilberta oraz problemach milenijnych i za jego rozstrzygnięcie jest ufundowana nagroda 10^6 $. Wielokrotnie zgłaszano jego rozwiązanie (Nash - 1959, Atiyah - 2018), ale do tej pory uznaje się, że jest on otwarty!

4. Uwagi końcowe.

Pomimo zgodności teorii funkcji analitycznych na $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$, w wielu ważnych faktach; teoria rzeczywistych funkcji analitycznych zdecydowanie różni się od jej odpowiednika zespolonego. W przypadku zespolonym mamy silniejszy związek - z rachunkiem różniczkowym gdyż każda funkcja $\mathbb{C}$-różniczkowalna jest funkcją holomorficzną. Obydwie teorie stanowią bardzo ważne gałęzie matematyki; bogato reprezentowane IM UJ.