# Analiza Matematyczna 2

## Rok akademicki 2022/2023

Piotr Tworzewski

# Rozdział 1. Preliminaria.

## §1. Uwagi ogólne

### 1. Ogólna charakterystyka przedmiotu.

"Jest to naturalna kontynuacja wykładanej w ubiegłym semestrze Analizy Matematycznej 1, stanowiąca jej uzupełnienie do pełnej analizy matematycznej jednej zmiennej. U nas zmienna ta może być rzeczywista lub zespolona. Mówiąc bardzo ludzko zajmiemy się rachunkiem różniczkowym i całkowym jednej zmiennej na bazie pojęć, które zostały przygotowane w semestrze zimowym.

### 2. Literatura

Zalecenia w tym zakresie są identyczne jak dla Analizy Matematycznej 1. Szczególnie można polecać podręczniki, to książki:

- G. M. Fichtenholza,
- T. Krasińskiego,
- F. Leji,
- W. Rudina.

Wystarczają one w zupełności w zakresie jednej zmiennej. Istotne wzmocnienie będzie konieczne po przejściu do analizy wielu zmiennych.

## 3. Kontynuacje

Kontynuacjami tego przedmiotu będą w kolejnych semestrach Analiza Matematyczna 3 oraz Analiza Matematyczna 4. Obejmą one łącznie 120 godzin wykładów i 120 godzin ćwiczeń na II roku studiów. Od II roku nastąpi podział roku na specjalności z wyodrębnieniem specjalności teoretycznej z dość zaawansowanym kursem analizy. W ramach tych dwóch przedmiotów, przy zróżnicowanym zaawansowaniu w specjalnościach, teoretycy dostaną „dowody" rachunek różniczkowy oraz teorię miary, całki i form różniczkowych z „kołtowym" Twierdzeniem Stokesa.

## 4. Sprawy organizacyjne

### (A) Ćwiczenia.

Poza aktywnością na zajęciach oraz pracami pisemnymi obowiązują limity nieobecności. Ich przekroczenie może skutkować uzyskaniem oceny NZAL, wykluczającej przystąpienie do egzaminu i zaliczenie całego przedmiotu. Limity te ustalamy w tych samych wysokościach jak dla AM1, przyjmując, że w semestrze jest 60 godzin lekcyjnych ćwiczeń

1 - 03

Limit nieobecności nieusprawiedliwionych wynosi 12 godzin zaś ogólny limit nieobecności (usprawiedliwionych i nieusprawiedliwionych) to 30 godzin, przy czym zawsze mówimy tutaj o godzinach lekcyjnych.

Przy usprawiedliwieniach akceptowalne są zwolnienia lekarskie, ale nieobecność może także, po wyjaśnieniu powodu, Prowadzący ćwiczenia. Dodatkowo obowiązuje zasada, że nieobecność na zajęciach z wcześniej zapowiedzianymi pracami pisemnymi muszą być usprawiedliwione.

Podane limity mogą być w szczególnych sytuacjach modyfikowane przez Prowadzącego ćwiczenia w porozumieniu ze mną. Częstymi powodami konieczności takich ustaleń są studia na dwóch kierunkach - rzadziej choroby. Warto przy tej okazji zauważyć, że na UJ funkcjonuje Dział Osób Niepełnosprawnych (DON), który pomaga także osobom z innymi trudnościami zdrowotnymi. Najważniejsze jest w tym wszystkim wczesne zgłoszenie nam problemu!

(B) Egzamin.

Wszystkie osoby, które uzyskają z ćwiczeń oceny 3,0 - 5,0 mogą przystąpić do egzaminu ustnego, którego organizacja będzie podobna do egzaminu z AM1.
Wynik NZAL i 2,0 z ćwiczeń wykluczają zdawanie egzaminu i możliwość zaliczenia przedmiotu.
Nie będzie organizowany egzamin pisemny.
Podstawą ustalenia oceny z egzaminu będzie ocena z ćwiczeń, w podobnym sensie jak było przy AM1, aktywność na wykładach oraz odpowiedzi na zadane pytania.

(C) Uwagi ogólne i zalecenia:

1. Dbać o zdrowie !!!
2. Dużo się uczyć, bo AM2 wymaga poświęcenia o wiele więcej czasu niż AM1 !!!
3. Nie przekraczać limitów!
4. Przy kłopotach z opanowaniem materiału stosować punkt 2. oraz korzystać z konsultacji!

# Rozdział 2. Przestrzenie unormowane i przestrzenie Banacha

## §1. Pojęcia wstępne

### 1. Przestrzenie unormowane

Niech $E$ będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$

**Definicja 2.1** Odwzorowanie $\|\ \|: E \ni x \longrightarrow \|x\| \in [0, +\infty)$ nazywamy **normą na $E$** jeśli:

(1) $\forall x \in E : \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(2) $\forall x \in E\ \forall \lambda \in \mathbb{K} : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (jednorodność),

(3) $\forall x, y \in E : \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (nierówność trójkąta).

**Definicja 2.2** Jeśli $\|\ \|$ jest normą na $E$, to parę $(E, \|\ \|)$ nazywamy **przestrzenią unormowaną**.

**Uwagi 2.3**

(1) Normy oznaczamy zwykle tym samym, wyżej podanym symbolem, dla wszystkich przestrzeni. Czasami pojawiają się przy nich dodatkowo jakieś standardowe wskaźniki. To, którą normę w danej sytuacji rozpatrujemy, musi wynikać z kontekstu.

(2) Zazwyczaj drugi element takich par pomija się pisząc, że **$E$ jest przestrzenią unormowaną**.

(3) Jeśli chcemy podkreślić ciało podstawowe, to wtedy mówimy o rzeczywistych lub zespolonych przestrzeniach unormowanych.

## 2. Metryka i topologia przestrzeni unormowanej

**Twierdzenie 2.4**

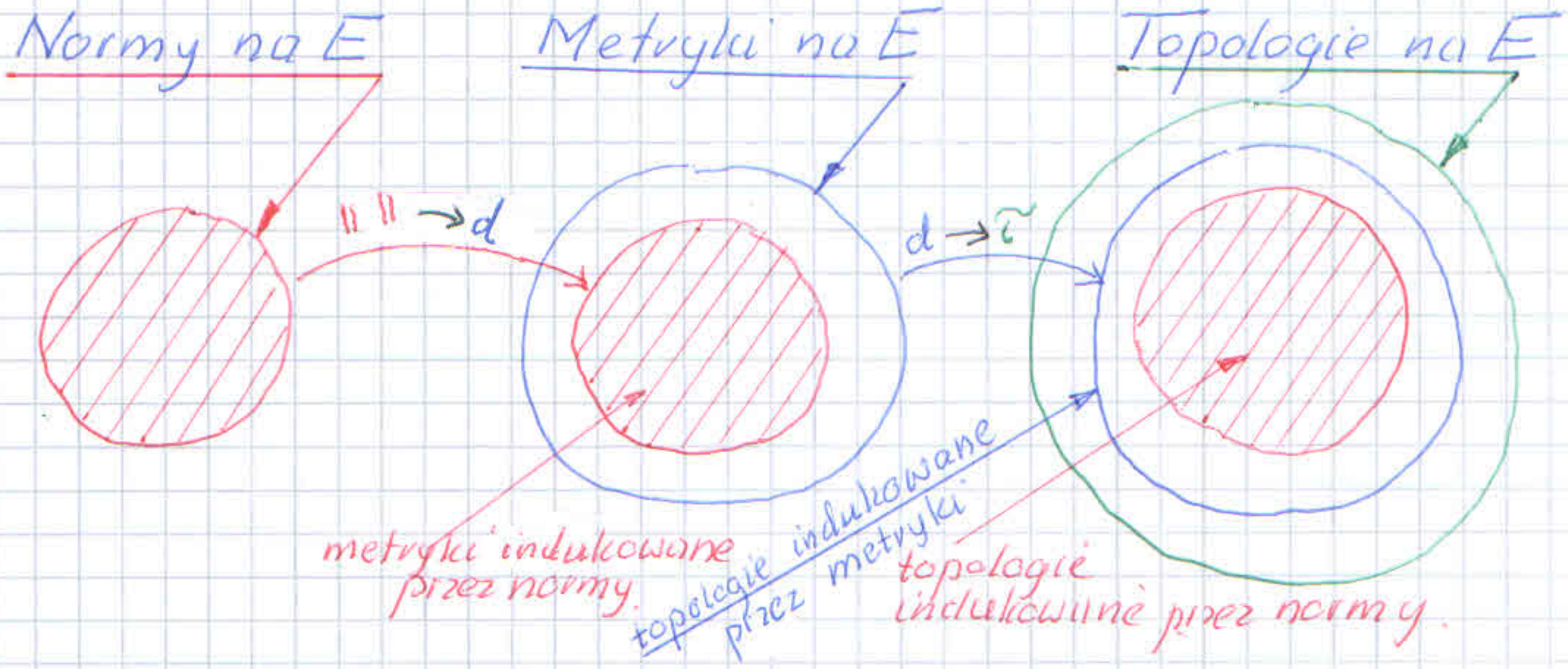
Z: $(E, \|\|)$ przestrzeń unormowana.

T: $d: E \times E \ni (x,y) \to \|x-y\| \in [0, +\infty)$ jest metryką na $E$

D: Ćwiczenie (oczywiste)

Zawsze przestrzeń unormowana $(E, \|\|)$ jest rozpatrywana jako przestrzeń metryczna z metryką $d$, nazywaną indukowaną przez $\|\|$. Metryka $d$ daje z kolei topologię na $E$. Zawsze przestrzeń $E$ jest jest rozpatrywana z tak wprowadzonymi metryką i topologią, nazywanymi indukowanymi na $E$.

Dla przestrzeni wektorowej $E$ nad $\mathbb{K}$ mamy następujący układ odwzorowań opisujących wprowadzanie metryki i topologii przez normy:




Zazwyczaj nie każda metryka jest zadana przez normę i nie każda topologia przez metrykę. Łatwo sprawdzić, że pierwsze odwz. (z lewej) to injekcja zaś drugie zwykle injekcją nie jest.

## 3. Operacje na przestrzeniach unormowanych

W klasie przestrzeni unormowanych pojawiają się klasyczne operacje pozwalające konstruować nowe obiekty tej rodziny. Warto znać następujące możliwości w tym zakresie:

### A. Norma indukowana.

$(E, \|\ \|)$ - p. unormowana, $F$ - podprzestrzeń $E$

$\|\ \|/F : F \ni x \longrightarrow \|x\| \in [0, +\infty)$ jest normą na $F$

Otrzymujemy normę na $F$ nazywaną <u>normą indukowaną</u>

### B. Norma produktowa.

$(E_i, \|\ \|_i)$ $i = 1, \dots, m$, $m \geq 1$ przestrzenie unormowane nad tym samym ciałem $\mathbb{K}$

$E = E_1 \times \dots \times E_m$ - przestrzeń wektorowa nad $\mathbb{K}$

Określamy odwzorowanie $\|\ \| : E \longrightarrow [0, +\infty)$ przez

$E_1 \times \dots \times E_m \ni (x_1, \dots, x_m) \longrightarrow \|x_1\|_1 + \dots + \|x_m\|_m \in [0, +\infty)$,

które jest łatwo sprawdzić normą na $E$

Uzyskaną w ten sposób normę

$$\|(x_1, \dots, x_m)\| = \|x_1\|_1 + \dots + \|x_m\|_m$$

nazywamy jest dalej <u>normą produktową na $E$</u>.

### C. Zmiana ciała podstawowego z $\mathbb{C}$ na $\mathbb{R}$

Jeżeli $(E, \|\ \|)$ jest przestrzenią unormowaną nad $\mathbb{C}$, to $(E, \|\ \|)$ jest również <u>przestrzenią unormowaną nad $\mathbb{R}$</u>.

Uwagi 2.5

(1) $(\mathbb{K}, |\!|\cdot|\!|)$ to przestrzeń unormowana nad $\mathbb{K}$, mająca trywialną $\{0\}$ podprzestrzeń unormowaną

(2) Norma indukowana na podprzestrzeni daje na niej metrykę i topologię indukowaną.

(3) Norma na produkcie zadaje metrykę i topologię produktową.

(4) Zmiana ciała podstawowego nie zmienia metryki i topologii.

Na podstawie poprzednich uwag dla przestrzeni unormowanej $(E, |\!|\cdot|\!|)$ nad $\mathbb{K}$, naturalne normy i topologie w $E$, $E \times E$, $\mathbb{K}$ i $\mathbb{K} \times E$. Pozwala nam to sprawdzić ciągłość odwzorowań związanych ze strukturą wyjściowej przestrzeni

Twierdzenie 2.6

Z: $(E, |\!|\cdot|\!|)$ przestrzeń unormowana nad $\mathbb{K}$

T: Następujące odwzorowania są ciągłe:

(1) $E \ni x \longrightarrow |\!|x|\!| \in \mathbb{R}$,

(2) $E \times E \ni (x, y) \longrightarrow x + y \in E$,

(3) $\mathbb{K} \times E \ni (\lambda, x) \longrightarrow \lambda x \in E$.

D: (1) Dla $x, y \in E$ mamy $|\!|x|\!| = |\!|(x-y)+y|\!| \leq |\!|x-y|\!| + |\!|y|\!|$

Skąd $|\!|x|\!| - |\!|y|\!| \leq |\!|x-y|\!|$ i analogicznie dostajemy

$|\!|y|\!| - |\!|x|\!| \leq |\!|x-y|\!|$ co nam daje.

$\underline{||\!|x|\!| - |\!|y|\!|| \leq |\!|x-y|\!| \text{ dla } x, y \in E}$

Rozpatrując więc odwzorowanie

$$\varphi : E \ni x \longrightarrow \varphi(x) = \|x\| \in \mathbb{R},$$

widzimy, że $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \|x - y\| = d(x,y)$ dla $x, y \in E$

Zatem $\varphi$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $L=1$, jest więc jednostajnie ciągłe.

(2) Niech $(x,y) \in E \times E$ i $(x_n, y_n) \longrightarrow (x,y)$ $(n \to +\infty)$.

Wtedy $\|(x_n+y_n) - (x+y)\| = \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \leq$

$\leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \longrightarrow 0$ $(n \to +\infty)$, więc

$\|(x_n+y_n) - (x+y)\| \longrightarrow 0$ $(n \to +\infty)$,

co kończy dowód (2).

(3) Niech $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$ oraz $(\lambda_n, x_n) \longrightarrow (\lambda, x)$ $(n \to +\infty)$.

Wtedy otrzymujemy.

$$\|\lambda_n x_n - \lambda x\| \leq \|\lambda_n x_n - \lambda x_n\| + \|\lambda x_n - \lambda x\| =$$

$$= |\lambda_n - \lambda| \|x_n\| + |\lambda| \|x_n - x\| \longrightarrow 0 \quad (n \to +\infty),$$

ponieważ $\{\|x_n\|\}$ jest ograniczony.

Zatem $\|\lambda_n x_n - \lambda x\| \longrightarrow 0$ $(n \to +\infty)$

co kończy dowód (3).

## 4. Przestrzenie Banacha.

Niech $E$ będzie przestrzenią unormowaną, traktowaną jako przestrzeń metryczna z metryką indukowaną.

Definicja 2.7 Przestrzeń unormowaną $(E, \|\ \|)$ nazywamy przestrzenią Banacha jeśli z metryką indukowaną jest przestrzenią metryczną zupełną

## §2. Przykłady przestrzeni unormowanych i przestrzeni Banacha

### 1. Podstawowe przykłady.

Przykład 2.8 Na przestrzeni trywialnej $E=\{0\}$ nad dowolnym z dwóch ciał mamy dokładnie jedną normę - zerową. Dostajemy strukturę przestrzeni Banacha

Przykład 2.9 Na $\mathbb{K}$ jako jednowymiarowej przestrzeni wektorowej nad $\mathbb{K}$ mamy normę zadaną przez moduł $|\cdot|$.
Uzyskujemy w ten sposób metrykę naturalną w $\mathbb{R}$ oraz euklidesową w $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$. Czyli $(\mathbb{K},|\cdot|)$ jest w tych dwóch przypadkach przestrzenią Banacha nad $\mathbb{K}$.

Przykład 2.10 Niech $m\in\mathbb{N}$, $m\geq 2$. W przestrzeni wektorowej $\mathbb{K}^m$ nad $\mathbb{K}$ rozpatruje się zazwyczaj trzy normy określone dla $x=(x_1,\dots,x_m)\in\mathbb{K}^m$ wzorami:

$$\|x\|_1 := |x_1|+|x_2|+\dots+|x_m|,$$

$$\|x\|_2 := \left(|x_1|^2+|x_2|^2+\dots+|x_m|^2\right)^{1/2},$$

$$\|x\|_3 := \max\{|x_1|,|x_2|,\dots,|x_m|\}.$$

Można pokazać, że metryki wprowadzone przez te normy są równoważne, to znaczy dają te same topologie. Okazuje się, że wszystkie dają strukturę przestrzeni Banacha. Okaże się, że wkrótce, że wszystkie sk. w.-p. unorm. są Banacha.

## 2. Przestrzenie unitarne i przestrzenie Hilberta.

Niech $E$ będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$

**Definicja 2.11** Odwzorowanie

$$E \times E \ni (x,y) \longrightarrow (x|y) \in \mathbb{K},$$

nazywamy **iloczynem skalarnym** na $E$, jeśli dla dowolnych $x,y,z \in E$ i $\lambda \in \mathbb{K}$ spełnione są warunki: (1) $(y|x) = \overline{(x|y)}$,

(2) $(x+y|z) = (x|z) + (y|z)$,

(3) $(\lambda x|y) = \lambda (x|y)$,

(4) $(x|x) \leq 0 \Rightarrow x = 0$.

**Uwagi 2.12**

(1) Z pierwszego warunku wynika, że $(x|x) \in \mathbb{R}$ dla dowolnego $x \in E$, więc nierówność w (4) ma sens.

(2) Warunek (1) nad $\mathbb{R}$, to symetria iloczynu skalarnego

(3) Łatwo zauważyć, że dla $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ iloczyn skalarny jest symetryczny i dwuliniowy. Nad $\mathbb{C}$ mamy „antyliniowość" na drugiej pozycji i czasami mówimy, że iloczyn skalarny jest „półtoraliniowy".

(4) Spotykamy wiele oznaczeń iloczynu skalarnego elementów $x,y \in E$: $\langle x|y \rangle$, $x \circ y$, $x \bullet y$, $x \cdot y$, itp.

(5) Łatwo sprawdzić, że odwzorowanie

$$\mathbb{K}^m \times \mathbb{K}^m \ni (z,w) \longrightarrow \sum_{n=1}^{m} z_n \overline{w_n} \in \mathbb{K}, \quad m \geq 1$$

jest iloczynem skalarnym w $\mathbb{K}^m$.

Definicja 2.13 Przestrzeń wektorową z zadanym na niej iloczynem skalarnym nazywamy unitarną

W przestrzeni unitarnej $E$ z zadanym iloczynem skalarnym wprowadzamy oznaczenie

$$\|x\| := \sqrt{(x|x)} \quad \text{dla } x \in E.$$

Jak się okazuje jego związek z klasycznym symbolem normy nie jest przypadkowy.

Twierdzenie 2.14

Z: $E$ - przestrzeń unitarna, $x, y \in E$

T: (1) $|(x|y)| \leq \|x\|\|y\|$ (Nierówność Schwarza).

(2) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Nierówność Minkowskiego)

D: (1) Weźmy $x, y \in E$. Jeśli $y = 0$, to obydwie strony nierówności zerują się, a jeśli $y \neq 0$ określmy $v = x - \frac{(x|y)}{\|y\|^2} \cdot y$ i zauważmy, że.

$$0 \leq (v|v) = \left(x - \frac{(x|y)}{\|y\|^2} y \,\middle|\, x - \frac{(x|y)}{\|y\|^2} y\right) =$$

$$= \|x\|^2 - \frac{|(x|y)|^2}{\|y\|^2} \quad \text{co daje (1)}.$$

(2) $\|x+y\|^2 = |(x+y|x+y)| = |\|x\|^2 + \|y\|^2 + (x|y) + (y|x)| \leq$

$$\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \quad z\ (1)$$

Czyli $\|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$ skąd (2).

Lemat 2.15

Z: $E$ - przestrzeń unitarna.

T: Odwzorowanie $E \ni x \longrightarrow \|x\| \in \mathbb{R}$ jest normą na $E$

D: Łatwo, że $\|x\| \geq 0$ dla $x \in E$ oraz, że.
dla $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$ dostajemy:

(1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow (x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(2) $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x|\lambda x)} = \sqrt{|\lambda|^2 (x|x)} = |\lambda| \|x\|$,

(3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Stąd otrzymujemy tezę lematu.

Wniosek 2.16 Jeśli $E$ jest przestrzenią unitarną oraz $\|\ \|$ jest odwzorowaniem zadanym przez iloczyn skalarny, to $(E, \|\ \|)$ jest przestrzenią unormowaną.

Zatem każda przestrzeń unitarna staje się w naturalny sposób przestrzenią unormowaną

Uwaga 2.17 Często normy produkowane przez iloczyny skalarne oznaczane są symbolem modułu. Tak się dzieje zwykle w $\mathbb{K}^m$, $m \geq 1$ gdzie przy iloczynie skalarnym z 2.12(5) dostajemy normę $x \in \mathbb{K}^m$

$$|x| = \|x\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{m} |x_n|^2},$$ czyli klasyczną normę euklidesową

Definicja 2.18 Przestrzeń unitarną, zupełną względem normy zadanej przez iloczyn skalarny, nazywamy przestrzenią Hilberta.

Przykład 2.19 Przestrzeń $\mathbb{K}^m$ z iloczynem wprowadzonym w 2.12(5) jest przestrzenią Hilberta.

Uwaga 2.20 Zwykle dla przestrzeni Hilberta jest rezerwowany symbol $H$.

## 3. Klasyczne przestrzenie funkcyjne.

Przy badaniu zbieżności ciągów funkcyjnych w AM1 w części 5.9.8, spotykamy przestrzenie złożone z funkcji w bardzo ogólnej sytuacji. Rozpatrujemy tam funkcje o wartościach w przestrzeniach metrycznych. W tej części zajmiemy się sytuacją gdy rozpatrywane funkcje mają wartości w przestrzeniach unormowanych. Wtedy w przestrzeniach funkcyjnych możemy wprowadzić normy, które indukować nam będą znane wcześniej metryki supremowe

Niech $X$ będzie zbiorem niepustym zaś $(E, \|\cdot\|)$ przestrzenią unormowaną nad $\mathbb{K}$. Wtedy w zbiorze

$$\mathcal{B}(X,E) := \{f : X \longrightarrow E \mid f \text{ - jest ograniczona}\}.$$

wprowadzamy, w naturalny sposób, strukturę przestrzeni wektorowej określając dla $f, g \in \mathcal{B}(X,E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{dla } x \in X,$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \quad \text{dla } x \in X.$$

Biorąc $f \in \mathcal{B}(X,E)$ wiemy, że istnieje $M \geqslant 0$ takie, że $\forall x \in X : \|f(x)\| \leqslant M$.

Zatem dla $f \in \mathcal{B}(X,E)$ możemy określić liczbę

$$\|f\| := \sup\{\|f(x)\| : x \in X\} \in [0, +\infty)$$

Lemat 2.21 Odwzorowanie

$$\|\ \|: \mathcal{B}(X,E) \ni f \longrightarrow \|f\| \in [0,+\infty)$$

jest normą na przestrzeni $\mathcal{B}(X,E)$.

D: Dwa pierwsze warunki normy są spełnione w oczywisty sposób. Dla dowodu nierówności trójkąta wystarczy zauważyć, że $\forall x \in X: \|(f+g)(x)\| \leqslant \|f\| + \|g\|$.

Jak łatwo zauważyć norma ta wprowadza nam znaną metrykę supremową w $\mathcal{B}(X;E)$. Dostajemy w tej sytuacji następujące.

Twierdzenie 2.22

Z: $X \neq \emptyset$, $E$ - przestrzeń unormowana
$f_n \in \mathcal{B}(X;E)$ dla $n \in \mathbb{N}$, $f: X \longrightarrow E$

T: Następujące warunki są równoważne:
(1) $f_n \rightrightarrows f \ (n \to +\infty)$
(2) $f \in \mathcal{B}(X,E)$, $f_n \to f \ (n \to +\infty)$ (w metr. supr.)

D: Wynika wprost z AM1 Tw. 5.63

Zachodzi ponadto

Twierdzenie 2.23

Z: $X \neq \emptyset$, $E$ - przestrzeń unormowana.

T: Następujące warunki są równoważne:
(1) $E$ jest przestrzenią Banacha.
(2) $\mathcal{B}(X,E)$ jest przestrzenią Banacha.

D: (1) $\Rightarrow$ (2) wynika z AM1 Tw. 5.64
(2) $\Rightarrow$ (1) Oczywiste - wystarczy rozważać funkcje stałe.

Istotną rolę w różnych gałęziach matematyki odgrywają podprzestrzenie $\mathcal{B}(X,E)$. Przykładowo w teoriach całki Cauchy'ego i Riemanna spotykamy dla $X = I = [a,b] \subset \mathbb{R}$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$ podprzestrzenie:

$\underline{\mathcal{C}(I,E)}$ - funkcje ciągłe,
$\underline{\mathcal{S}(I,E)}$ - funkcje przedziałami schodkowe,
$\underline{\mathcal{P}(I,E)}$ - funkcje proste (mające granice jednostronne w każdym punkcie przedziału $I$)
$\underline{\mathcal{R}(I,E)}$ - funkcje całkowalne w sensie Riemanna.

Wszystkie te przestrzenie, poza $\mathcal{S}(I,E)$, są przestrzeniami Banacha o ile przestrzeń $E$ jest Banacha.

Zmierzając w tym kierunku, zauważmy na wstępie, że zachodzi następujący, ważny fakt

## Twierdzenie 2.24

Z: $X$ - niepusta przestrzeń metryczna, $E$ - p. unormowana.
T: Następujące warunki są równoważne:

(1) $\underline{E}$ - jest przestrzenią Banacha.
(2) $\underline{\mathcal{CB}(X,E) = \{f \in \mathcal{B}(X,E) : f \text{ - ciągłe}\}}$ - jest p. Banacha

D: (1) $\Rightarrow$ (2) wynika z AM 1 Tw. 5.66
(2) $\Rightarrow$ (1) Oczywiste

## Uwagi 2.25

(1) W 2.24 możemy jako $X$ wziąć przestrzeń topologiczną (Ćw.)
(2) Jeśli $X$ zwarta, to skracamy zapis $\mathcal{CB}(X;E)$ do $\mathcal{C}(X,E)$. Jeśli $E$ jest ustalonym ciałem to mamy kolejne skrócone zapisy $\mathcal{B}(X)$, $\mathcal{CB}(X)$ i $\mathcal{C}(X)$ gdy $X$ - zwarta.

## 4. Przestrzenie ciągów

Przy ustalonym $\mathbb{K}$ pojawiają się następujące, klasyczne przestrzenie złożone z ciągów liczbowych:

$$\underline{l^\infty := \mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{K}) = \{\{x_n\} \text{ ciąg w } \mathbb{K} : \{x_n\} \text{ ograniczony}\}}.$$

rozpatrywana z typową normą supremową oraz.

$$\underline{c := \{\{x_n\} \in l^\infty : \{x_n\} \text{ zbieżny}\}},$$

$$\underline{c_0 := \{\{x_n\} \in l^\infty : x_n \to 0 \ (n \to +\infty)\}} \subset c,$$

$$\underline{\widetilde{c}_0 := \{\{x_n\} \in l^\infty : \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N : x_n = 0\}} \subset c_0,$$

z normami indukowanymi z $l^\infty$.

Uwagi 2.26

(1) $l^\infty$, $c$, $c_0$ - są to standardowe oznaczenia spotykane w wersjach $l^\infty_{\mathbb{R}}$, $l^\infty_{\mathbb{C}}$ itp. z polskiem ciała, w którym rozpatrujemy ciągi

(2) Jak już wiemy $l^\infty$ jest przestrzenią Banacha oraz dość łatwo pokazać, że $c$ i $c_0$ także są przestrzeniami Banacha. Wystarczy tutaj sprawdzić (Ćw.), że są domknięte w $l^\infty$.

(3) Przestrzeń $\widetilde{c}_0$ nie jest zupełna gdyż łatwo pokazać, że nie jest domknięta. Widzimy dość łatwo, że ciąg o wyrazach z $\widetilde{c}_0$

$$\underline{x_n = (0, 1, \tfrac{1}{2}, \dots, \tfrac{1}{n}, 0, 0, \dots), \ n \geq 1}$$

jest zbieżny w $l^\infty$ zaś jego granica leży poza $\widetilde{c}_0$. Oczywiście jest to też przykład ciągu Cauchy'ego w $\widetilde{c}_0$, który nie jest zbieżny.

## 5. Przestrzenie $\ell^p$, $p \in [1, +\infty)$

Przy ustalonym ciele $\mathbb{K}$ oraz $p \in [1, +\infty)$ rozpatrujemy rodzinę ciągów

$$\ell^p := \{ \{x_n\} \text{ ciąg w } \mathbb{K} : \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty \}.$$

Klasyczne warunki pokazują, że jest to przestrzeń wektorowa oraz wzór

$$(\#) \quad \|\{x_n\}\| = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$$

określa w niej normę dającą strukturę przestrzeni Banacha.

### Uwagi 2.27

(1) Pokazać, jako ćwiczenie, informacje podane wyżej, wprowadzające przestrzenie $\ell^p$.

(2) W zastosowaniach najczęściej spotykamy dwie przestrzenie $\ell^1$ i $\ell^2$, dla których sprawdzenie, że podany wzór (#) daje normę, jest najprostsze.

(3) W $\ell^2$ podaną normę można uzyskać poprzez wprowadzenie $\ell^2$ struktury przestrzeni unitarnej z iloczynem skalarnym

$$(\{x_n\} \mid \{y_n\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \overline{y_n}.$$

Szczegóły proszę sprawdzić jako ćwiczenie.

(4) Przestrzenie $\ell^p$, to tylko najprostsze przykłady, rozpatrywanych w teorii miary i całki, przestrzeni $\mathcal{L}^p(\mu)$ funkcji sumowalnych z p-tą potęgą modułu.

## §3. Odwzorowania liniowe i wieloliniowe ciągłe.

### 1. Ciągłość odwzorowania liniowego

**Twierdzenie 2.28**

Z: $E, F$ - unormowane nad tym samym ciałem $\mathbb{K}$

$f: E \to F$ liniowe

T: Następujące warunki są równoważne:

(1) $f$ - jest ciągłe,

(2) $\exists\, a \in E$ : $f$ - jest ciągłe w punkcie $a$,

(3) $f$ - jest ciągłe w punkcie $0$,

(4) $f$ - jest ograniczone w pewnym otoczeniu $0$,

(5) $\exists\, M \geq 0 : (x \in E, \|x\| \leq 1) \Rightarrow (\|f(x)\| \leq M)$,

(6) $\exists\, M \geq 0\ \forall x \in E : \|f(x)\| \leq M\|x\|$,

(7) $f$ - jest jednostajnie ciągłe.

D: (1) $\Rightarrow$ (2) Oczywiste.

(2) $\Rightarrow$ (3) $\{x_n\}$ ciąg w $E$, $x_n \to 0$ $(n \to +\infty)$

Wtedy $x_n + a \to a$ $(n \to +\infty)$ więc z (2) mamy.

$f(x_n + a) \to f(a)$ $(n \to +\infty)$ zatem

$f(x_n + a) - f(a) \to 0$ $(n \to +\infty) \Rightarrow f(x_n) \to 0$ $(n \to +\infty)$

(3) $\Rightarrow$ (4). Oczywiste. Zapiszmy to dokładniej

$\exists \widetilde{M} \geq 0\ \exists r > 0 : \|x\| \leq r \Rightarrow \|f(x)\| \leq \widetilde{M}$.

(4) $\Rightarrow$ (5) Niech $\widetilde{M} \geq 0$ i $r > 0$ będą jak w (4).

Weźmy $x \in E$, $\|x\| \leq 1$. Wtedy $\|xr\| \leq r$ więc

$\|f(xr)\| \leq \widetilde{M}$, a zatem $\|f(x)\| \leq \widetilde{M}/r$. Czyli

poszukiwaną stałą $M = \widetilde{M}/r$.

(5) $\Rightarrow$ (6) Niech $x \in E$, a wtedy gdy $x=0$, to nierówność zachodzi. Gdy $x \neq 0$, $\| \frac{x}{\|x\|} \| = 1$ czyli z (5) dostajemy $\| f(\frac{x}{\|x\|}) \| \leq M$ i z jednorodności normy $\|f(x)\| \leq M \|x\|$.

(6) $\Rightarrow$ (7) Z (6) dla $x, y \in E$ dostajemy łatwo $\|f(x) - f(y)\| = \|f(x-y)\| \leq M\|x-y\|$ więc $f$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $M \geqslant 0$, więc jest jednost. ciągłe.

(7) $\Rightarrow$ (1) Oczywiste

To kończy dowód 2.28.

## 2. Przestrzeń odwzorowań liniowych ciągłych

Niech $E, F$ będą przestrzeniami unormowanymi nad tym samym ciałem $\mathbb{K}$. Oznaczmy.

$$\mathcal{L}(E;F) := \{ f : E \to F \mid f \text{-jest liniowe ciągłe} \}$$

Łatwo zauważyć, że $\mathcal{L}(E;F)$ ma strukturę przestrzeni wektorowej nad $\mathbb{K}$ jeśli dla $f, g \in \mathcal{L}(E;F)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ zadamy działania: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ dla $x \in E$,
$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ dla $x \in E$.
Dostajemy w ten sposób $f+g \in \mathcal{L}(E;F)$, $\lambda f \in \mathcal{L}(E;F)$. i działania te mają wymagane własności.

Następnie dla $f \in \mathcal{L}(E;F)$ określamy

$$\|f\| = \sup \{ \|f(x)\| : x \in E, \|x\| \leq 1 \}.$$

Zachodzi następujący

**Lemat 2.29** Odwzorowanie

$$\mathcal{L}(E;F) \ni f \longrightarrow \|f\| \in [0,+\infty),$$

jest normą na przestrzeni $\mathcal{L}(E;F)$.

D: Nieujemność jest oczywista - a ponadto:

(1) $\|f\| = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ gdy $\|x\| \leq 1$.

Biorąc $y \in E \setminus \{0\}$ mamy $\left\| \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq 1$ więc

$f\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = 0$ skąd $f(y) = 0$.

(2) $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$ dla $f \in \mathcal{L}(E;F)$ i $\lambda \in \mathbb{K}$,

co wynika wprost z definicji normy.

(3) Dla $f, g \in \mathcal{L}(E;F)$ mamy $\|f+g\| = \sup\{\|f(x)+g(x)\| : \|x\| \leq 1\}$

więc $\|f+g\| \leq \sup\{\|f(x)\| + \|g(x)\| : \|x\| \leq 1\} \leq \|f\| + \|g\|$

**Uwaga 2.30** W przestrzeni wektorowej $\mathcal{L}(E;F)$.

mamy naturalną strukturę przestrzeni unormowanej

**Uwaga 2.31** Jeśli w powyższej sytuacji $f \in \mathcal{L}(E;F)$, to:

(1) $\forall x \in E : \|f(x)\| \leq \|f\| \|x\|$,

(2) $\|f\| = \inf\{M \geq 0 \mid \forall x \in E : \|f(x)\| \leq M\|x\|\}$,

(3) Jeśli $E \neq \{0\}$, to $\|f\| = \sup\{\|f(x)\| : x \in E, \|x\| = 1\}$.

D: (1) Dla $x = 0$ nierówność zachodzi, a jeśli $x \neq 0$,

to $\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq 1$ czyli $\left\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq \|f\|$ skąd dostajemy

$\|f(x)\| \leq \|f\| \|x\|$.

(2) Niech $A$ będzie infimum określonym w (2).

Jeśli $A < \|f\|$, to istnieje $\tilde{A} < \|f\|$ takie, że

$\forall x \in E : \|f(x)\| \leq \tilde{A}\|x\|$ co daje $\|f\| \leq \tilde{A} \leq \|f\|$.

(3) Ćwiczenie.

Wykażemy następnie kluczowe.

**Twierdzenie 2.32**

Z: $E$ - przestrzeń unormowana, $F$ - przestrzeń Banacha nad tym samym ciałem $\mathbb{K}$

T: $\mathcal{L}(E;F)$ jest przestrzenią Banacha

D: Niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w $\mathcal{L}(E;F)$. Wtedy

$$\forall \varepsilon>0 \exists N\in\mathbb{N} \forall p,q\geq N : \|f_p - f_q\| < \varepsilon,$$ a zatem

$$(*)\quad \forall \varepsilon>0 \exists N\in\mathbb{N} \forall p,q\geq N \forall x\in E : \|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \varepsilon \|x\|$$

Jeśli ustalimy $x\in E$, to z $(*)$ widzimy, że $\{f_n(x)\}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $F$. Ze względu zupełność $F$, ciąg ten musi być zbieżny i możemy określić

$$f(x) := \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \text{ dla } x\in E.$$

Mając tak określoną funkcję graniczną pokazujemy:

(1) Liniowość $f$, sprawdzając dla $x,y\in E$, $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$

$$f(\alpha x+\beta y) = \lim_{n\to+\infty} f_n(\alpha x+\beta y) = \lim_{n\to+\infty} (\alpha f_n(x) + \beta f_n(y)) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

(2) Ciągłość $f$, uzyskując wstępnie z $(*)$

$$(**)\quad \forall \varepsilon>0 \exists N\in\mathbb{N} \forall p\geq N \forall x\in E : \|f_p(x) - f(x)\| \leq \varepsilon \|x\|$$

Widzimy, że $f_p - f \in \mathcal{L}(E;F)$ skąd $f\in\mathcal{L}(E;F)$.

(3) Zbieżność $\{f_n\}$ do $f$ zauważając, że z $(**)$ dostajemy

$$\forall \varepsilon>0 \exists N\in\mathbb{N} \forall p\geq N : \|f_p - f\| \leq \varepsilon.$$

Zatem $f_n \to f$ $(n\to+\infty)$ co kończy dowód.

## 3. Izomorfizmy topologiczne

Niech $E, F$ będą przestrzeniami unormowanymi nad $\mathbb{K}$

**Definicja 2.33** Odwzorowanie $f: E \to F$ nazywamy *izomorfizmem topologicznym* jeśli jest izomorfizmem liniowym i homeomorfizmem.

Dalej używać będziemy następującego oznaczenia.

$$Isom(E;F) := \{f: E \to F \mid f \text{ - izomorfizm topologiczny}\}.$$

**Twierdzenie 2.34**

Z: $E, F$ - przestrzenie unormowane nad $\mathbb{K}$
$f: E \to F$ izomorfizm liniowy

T: Następujące warunki są równoważne:
(1) $f \in Isom(E;F)$,
(2) $f \in \mathcal{L}(E;F)$, $f^{-1} \in \mathcal{L}(F;E)$,
(3) $\exists m>0, M>0 \ \forall x \in E: m\|x\| \leq \|f(x)\| \leq M\|x\|$.

D: (1) $\Leftrightarrow$ (2) wprost z definicji
(2) $\Leftrightarrow$ (3) Łatwo zauważyć, że ciągłość $f$ jest równoważna zachodzeniu prawej nierówności w (3) zaś ciągłość odwzorowania $f^{-1}: F \to E$ zachodzeniu lewej nierówności dla $x \in E$.
Szczegóły proszę dopracować jako ćwiczenie.

Uwaga 2.35 Z pojęciem izomorfizmu topologicznego związane jest jedno z najpiękniejszych twierdzeń analizy funkcjonalnej, którego dowód można potraktować jako trudne, wyzywające ćwiczenie.

Twierdzenie Banacha.

Z: $E, F$ - przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$
$f: E \longrightarrow F$ izomorfizm liniowy
$f \in \mathcal{L}(E; F)$

T: $f \in Isom(E; F)$

Fakt tego nie będziemy wykorzystywać w AM. Jednak w szczególnych sytuacjach twierdzenie to daje istotne uproszczenia sprawdzenia, że dane odwzorowanie jest izomorfizmem topologicznym. Istotna jest tutaj zupełność obydwu przestrzeni zaś dowody zwykle dwukrotnie wykorzystują

Twierdzenie Baire'a

## 4. Przykłady.

Niech $E, F$ - p. unormowane nad $\mathbb{K}$, $f: E \to F$ liniowe.
Rozpatrujemy następujące sytuacje:

(1) $E = F = \{0\}$ wtedy $f = 0$, $\|f\| = 0$ oraz $f \in Isom(E; F)$.

(2) $E = \mathbb{K}^m$, $F = \mathbb{K}$, $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{K}$ oraz.
$f: \mathbb{K}^m \ni (x_1, \dots, x_m) \longrightarrow a_1 x_1 + \dots + a_m x_m \in \mathbb{K}$.
Łatwo sprawdzić z nierówności Schwarza, że
$\|f\| \leq \|a\|$ gdzie $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{K}^m$,
oraz wskazać punkt realizacji normy $\|f\| = \|a\|$

(3) $E = \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \mathbb{R}$, $f: E \ni g \to f(g) = g(0) \in \mathbb{R}$
Mamy $|f(g)| = |g(0)| \leq \|g\|$ więc $\|f\| \leq 1$.
Jednak dla $g = 1$ mamy $|f(g)| = |g|$ więc $\|f\| = 1$

(4) $E = \tilde{c}_0$, $F = \mathbb{K} = \mathbb{R}$.
$f: \tilde{c}_0 \ni \{x_n\} \longrightarrow \left\{\frac{x_n}{n+13}\right\} \in \tilde{c}_0$ - ciągłe oraz $\|f\| = \frac{1}{13}$
Jest to izomorfizm liniowy, ale odwrotne już nie jest ograniczone w kuli jednostkowej więc $f \notin Isom(E; E)$

(5) $E = \mathbb{R}^m$, $F = \mathbb{R}^n$ z normami euklidesowymi,
$f: E \to F$ liniowe o macierzy $A$ w bazach kanonicznych.
Łatwo pokazać ciągłość $f$, podobnie jak w (2),
ale z wyliczeniem normy mogą być kłopoty.
Jeśli $\Lambda = \max\{|\lambda| : \lambda - \text{wartość własna } A^T \circ A\}$,
to wtedy $\|f\| = \sqrt{\Lambda}$. Warto zauważyć, że
$A^T \circ A$, to macierz kwadratowa $m \times m$. Zatem
dla $m > 4$ jest kłopot z efektywnością obliczeń

## 5. Odwzorowania wieloliniowe ciągłe

Niech $E_1, \dots, E_m$ będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $\mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ i niech $F$ będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$. Podstawą dalszych dziatań jest następująca definicja.

**Definicja 2.36** Odwzorowanie

$$f: E_1 \times \dots \times E_m \longrightarrow F$$

nazywamy **m-liniowym**, jeśli dla każdego $i \in \{1, \dots, m\}$ i dowolnych ustalonych wektorów $v_1 \in E_1, \dots, v_{i-1} \in E_i, v_{i+1} \in E_{i+1}, \dots, v_m \in E_m$ odwzorowanie

$$E_i \ni v \longrightarrow f(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_m) \in F$$

jest liniowe.

**Przykłady 2.37**

(1) $f: \mathbb{K} \times \mathbb{K} \ni (x, y) \longrightarrow x \cdot y \in \mathbb{K}$ - dwuliniowe

(2) $f: \mathbb{K}^3 \times \mathbb{K}^3 \ni ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \longrightarrow x_3 \cdot y_1 \in \mathbb{K}$ dwulin.

(3) $f: \mathbb{K}^3 \times \mathbb{K}^3 \ni ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \longrightarrow \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}$.

jest odwzorowaniem dwuliniowym

(4) $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \ni ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \longrightarrow x_1 y_1 + x_2 y_2 \in \mathbb{R}$

dwuliniowe, mamy $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x \mid y)$

dla $x = (x_1, x_2)$, $y_1 = (y_1, y_2)$.

(5) $f: (\mathbb{K}^m)^m \ni (v^1, \dots, v^m) = \det(v^1, \dots, v^m) \in \mathbb{K}$.

gdzie przyjmujemy $m \geq 2$.

$$\det(v^1, \dots, v^m) = \det \begin{bmatrix} v_1^1 & \dots & v_1^m \\ \vdots & & \vdots \\ v_m^1 & & v_m^m \end{bmatrix}$$

jest m-liniowe

Niech następnie $E_1, \dots, E_m$, $m \geq 2$ oraz $F$ będą przestrzeniami unormowanymi nad $\mathbb{K}$. Rozważać będziemy odwzorowania $m$-liniowe.

$$f: E_1 \times \dots \times E_m \longrightarrow F$$

Możliwość wprowadzenia na produkcie $E_1 \times \dots \times E_m$ normy (jak również metryki czy topologii) produktowej, pozwala zajmować się ciągłością takich odwzorowań.

Twierdzenie 2.38 W powyższej sytuacji następujące warunki są równoważne:

(1) $f$ - jest ciągłe,

(2) $f$ - jest ciągłe w punkcie $0$,

(3) $f$ - jest ograniczone w pewnym otoczeniu $0$,

(4) $\exists M \geq 0 : (x_i \in E_i, \|x_i\| \leq 1, i = 1, \dots, m) \Rightarrow (\|f(x_1, \dots, x_m)\| \leq M)$,

(5) $\exists M \geq 0 \ \forall (x_1, \dots, x_m) \in E_1 \times \dots \times E_m : \|f(x_1, \dots, x_m)\| \leq M \|x_1\| \cdot \dots \cdot \|x_m\|$

D: Łatwo pokazać implikacje (1)$\Rightarrow$(2)$\Rightarrow$(3)$\Rightarrow$(4)$\Rightarrow$(5), zupełnie podobnie jak dla odwzorowań liniowych.

Pokażemy implikację (5)$\Rightarrow$(1).
Ustalmy $x = (x_1, \dots, x_m) \in E_1 \times \dots \times E_m$ i weźmy ciąg $x^n = (x_1^n, \dots, x_m^n)$, $n \in \mathbb{N}$ elementów produktu taki, że $x^n \longrightarrow x$ $(n \to +\infty)$. Wtedy mamy $x_i^n \longrightarrow x_i$ $(n \to +\infty)$ dla $i = 1, \dots, m$. Korzystając w warunku trójkąta dostajemy nierówności

$$\|f(x^n) - f(x)\| = \|f(x_1^n, \dots, x_m^n) - f(x_1, \dots, x_m)\| \leq$$
$$\leq \|f(x_1^n, x_2^n, \dots, x_m^n) - f(x_1, x_2^n, \dots, x_m^n)\| +$$
$$+ \|f(x_1, x_2^n, x_3^n, \dots, x_m^n) - f(x_1, x_2, x_3^n, \dots, x_m^n)\| +$$
$$+ \dots + \|f(x_1, \dots, x_m^n) - f(x_1, \dots, x_m)\| \leq$$

$$\leq M\|x_1^n - x_1\|\|x_2^n\| \cdot \dots \cdot \|x_m^n\| + M\|x_1\|\|x_2^n - x_2\|\|x_3^n\| \cdot \dots \cdot \|x_m^n\| +$$
$$+ M\|x_1\| \cdot \dots \cdot \|x_{m-1}\|\|x_m^n - x_m\| \longrightarrow 0 \quad (n \to +\infty)$$

ponieważ $\|x_i^n\| \to \|x_i\|$ $(n \to +\infty)$ dla $i = 1, \dots, m$

oraz $\|x_i^n - x_i\| \longrightarrow 0$ $(n \to +\infty)$, co kończy dowód.

## 6. Przestrzeń odwzorowań wieloliniowych ciągłych

Niech $E_1, \dots, E_m, F$ będą przestrzeniami unormowanymi nad ciałem $\mathbb{K}$, $m \geq 1$.

Wprowadzamy następujące oznaczenia.

$$\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F) := \{f : E_1 \times \dots \times E_m \to F \mid f \text{ } m\text{-liniowe ciągłe}\}$$

Jeśli $E_1 = \dots = E_m = E$, to skracamy powyższy symbol do

$$\mathcal{L}_m(E; F) = \mathcal{L}(E, \dots, E; F)$$

Dostajemy w tych przestrzeniach naturalną strukturę przestrzeni wektorowych z dodawaniem funkcji oraz z mnożeniem funkcji przez skalar.

Dla $f \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$ określamy

$$\|f\| := \sup\{\|f(x_1, \dots, x_m)\| : x_i \in E_i,\ \|x_i\| \leq 1 \text{ dla } i = 1, \dots, m\}$$

Jak tutaj zauważyć dostajemy w ten sposób

$$\mathcal{L}(E_1,\dots,E_m;F) \ni f \longrightarrow \|f\| \in [0,+\infty)$$

normę i strukturę przestrzeni unormowanej na $\mathcal{L}(E_1,\dots,E_m;F)$. Szczegóły proszę sprawdzić jako proste ćwiczenie.

Uwaga 2.39 Jeśli $f \in \mathcal{L}(E_1,\dots,E_m;F)$, to:

(1) $\|f(x_1,\dots,x_m)\| \le \|f\|\|x_1\|\cdots\|x_m\|$ dla $x_i \in E_i$, $i=1,\dots,m$

(2) $\|f\| = \inf\{M \ge 0 : \|f(x_1,\dots,x_m)\| \le M\|x_1\|\cdots\|x_m\|,\ x_i \in E_i,\ i=1,\dots,m\}$

(3) gdy $E_i \neq \{0\}$ dla $i=1,\dots,m$ to wtedy

$$\|f\| = \sup\{\|f(x_1,\dots,x_m)\| : x_i \in E_i,\ \|x_i\|=1 \text{ dla } i=1,\dots,m\}$$

Twierdzenie 2.40

Z: $E_1,\dots,E_m$ przestrzenie unormowane nad $\mathbb{K}$

$F$ - przestrzeń Banacha nad $\mathbb{K}$

T: $\mathcal{L}(E_1,\dots,E_m;F)$ przestrzeń Banacha nad $\mathbb{K}$.

D: Bez trudu powtarzamy dowód analogicznego twierdzenia dla odwzorowań liniowych (ćw.)

Można tutaj także skorzystać z izometrycznej identyfikacji między przestrzeniami:

$$\mathcal{L}(E_1,\dots,E_m;F)$$
$$\mathcal{L}(E_1;\mathcal{L}(E_2;\dots;\mathcal{L}(E_m;F))$$

Identyfikację taką będziemy wykorzystywać w ramach rachunku różniczkowego.

## 7. Przykłady.

(1) $E$ - przestrzeń unitarna nad $\mathbb{R}$. Wtedy

$$f : E \times E \ni (x,y) \longrightarrow (x|y) \in \mathbb{R}$$

jest dwuliniowe ciągłe gdyż na podstawie nierówności Schwarza $\|f(x,y)\| = \|(x|y)\| \leq \|x\|\|y\|$. Mamy przy tym informację, że $\|f\| \leq 1$. Jeśli $E \neq \{0\}$, to dla $x \neq 0$ mamy $|(x|x)| = \|x\|\|x\|$ więc wtedy $\|f\| = 1$

(2) $E, F, G$ przestrzenie unormowane nad $\mathbb{K}$

$$\circ : \mathcal{L}(F;G) \times \mathcal{L}(E;F) \ni (g,f) \to g \circ f \in \mathcal{L}(E;G)$$

Jest to odwzorowanie dwuliniowe oraz dla $x \in E$ mamy $\|(g \circ f)(x)\| = \|g(f(x))\| \leq \|g\|\|f(x)\| \leq$

$$\leq \|g\|\|f\|\|x\|, \text{ skąd}$$

$\|g \circ f\| \leq \|g\| \cdot \|f\|$, czyli $\|\circ\| \leq 1$.

(3) $m \geq 2$.

$$f : (\mathbb{R}^m)^m \ni (v^1, \ldots, v^m) \longrightarrow \det(v^1, \ldots, v^m) \in \mathbb{R}^m$$

Jeśli $v^i = (v^i_1, \ldots, v^i_m)$ dla $i = 1, \ldots, m$, to $\det(v^1, \ldots, v^m) = \det[v^i_j]_{i,j=1,\ldots,m}$

Można pokazać, że $f$ jest $m$-liniowe antysymetryczne oraz, że $|f(v^1, \ldots, v^m)| \leq \|v^1\| \ldots \|v^m\|$ z nierówności Hadamarda. Biorąc następnie $v^i = e_i$, $i = 1, \ldots, m$ bazę kanoniczną dostajemy równość więc $\|f\| = 1$.

## §4. Równoważność norm. Szczególne własności przestrzeni skończenie wymiarowych.

### 1. Podstawowe definicje

Niech $E$ będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$ zaś $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ będą normami na $E$

**Definicja 2.41** Mówimy, że normy $\|\ \|_1$ i $\|\ \|_2$ są *równoważne* jeśli zadają na $E$ tę samą topologię. Piszemy wtedy $\|\ \|_1 \sim \|\ \|_2$.

**Lemat 2.42** W powyższej sytuacji następujące warunki są równoważne:

(1) $\|\ \|_1 \sim \|\ \|_2$

(2) $\exists\, m>0, M>0\ \forall x\in E\setminus\{0\}: \quad m \leq \frac{\|x\|_2}{\|x\|_1} \leq M$

D: Rozważmy odwzorowanie

$f = id_E : (E, \|\ \|_1) \longrightarrow (E, \|\ \|_2)$

Na wstępie zauważmy, że normy są sobie równoważne $\Leftrightarrow f \in Isom(E;E)$. Teraz (1) $\Leftrightarrow$ (2) wynika wprost z 2.34 (ćw.).

**Uwagi 2.43**

(1) Normy równoważne wprowadzają metryki, w których odwzorowanie $f$ z powyższego dowodu jest lipschitzowskie, więc jednostajnie ciągłe.

(2) Zupełność przestrzeni zachowuje się po zmianie normy na równoważną

(3) Równoważność norm jest relacją równoważności.

Przykład 2.44 W $\mathbb{K}^m$, $m \geq 2$ rozpatrujemy normy z 2.10 określone dla $x = (x_1, \dots, x_m)$ przez:

$$\|x\|_1 := |x_1| + \dots + |x_m|,$$
$$\|x\|_2 := (|x_1|^2 + \dots + |x_m|^2)^{1/2},$$
$$\|x\|_3 := \max\{|x_1|, \dots, |x_m|\}.$$

Mamy dla nich nierówności

$$\|x\|_3 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq m\|x\|_3 \text{ dla } x \in \mathbb{K}^m.$$

To także daje równoważność tych trzech norm.

Lemat 2.45 Dowolne dwie normy w $\mathbb{K}^m$, $m \geq 1$ są sobie równoważne.

D: Wystarczy pokazać, że dowolna norma $\|\ \|$ jest równoważna normie euklidesowej $\|\ \|_2$.

Jeśli $e_1, \dots, e_m$ jest bazą kanoniczną $\mathbb{K}^m$, wtedy dla $x = (x_1, \dots, x_m) = x_1 e_1 + \dots + x_m e_m$ mamy

$$\|x\| = \|x_1 e_1 + \dots + x_m e_m\| \leq$$
$$\leq |x_1|\|e_1\| + \dots + |x_m|\|e_m\| \leq T\|x\|_2$$

gdzie $T := \left(\sum_{i=1}^{m} \|e_i\|^2\right)^{1/2}$, co wynika z nierówności Schwarza.

Rozpatrujemy na $\mathbb{K}^m$ z normą $\|\ \|_2$ odwzorowanie

$$f : \mathbb{K}^m \ni x \longrightarrow \|x\| \in \mathbb{R}.$$

Mamy $|f(x) - f(y)| = |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq T\|x - y\|_2$ dla $x \in \mathbb{K}^m$, więc $f$ jest ciągłe na $\mathbb{K}^m$ z normą $\|\ \|_2$.

Zauważmy następnie, że $S = \{x \in \mathbb{K}^m : \|x\|_2 = 1\}$ jest zwarty i $f|S$ nie zeruje się, więc

$$\exists m > 0, M > 0 : (x \in \mathbb{K}^m, \|x\|_2 = 1) \Rightarrow m \leq f(x) \leq M.$$

Zatem dla $x \in \mathbb{K}^m \setminus \{0\}$ dostajemy $m \leq \left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\| \leq M$, co z lematu 2.42 kończy dowód.

Twierdzenie 2.46 Na przestrzeni skończenie wymiarowej wszystkie normy są równoważne.

D: Niech $E$ będzie rozpatrywaną przestrzenią nad ciałem $\mathbb{K}$ oraz $m = \dim E$. Jeśli $m = 0$, to fakt jest oczywisty zaś gdy $m \geq 1$ wybierzmy dowolny izomorfizm liniowy $f: \mathbb{K}^m \to E$

Jeśli $\|\ \|_1$ i $\|\ \|_2$ są normami na $E$, to dostajemy $\|\ \|_1 \circ f$, $\|\ \|_2 \circ f$ normy na $\mathbb{K}^m$. Z 2.45 wynika, że są równoważne, czyli istnieją stałe $m > 0$, $M > 0$ takie, że

$$\forall x \in \mathbb{K}^m \setminus \{0\}: \quad m \leq \frac{\|f(x)\|_2}{\|f(x)\|_1} \leq M,$$

Zatem $\forall y \in E \setminus \{0\}: \quad m \leq \frac{\|y\|_2}{\|y\|_1} \leq M$ bo $f$ izomorfizm.
To kończy dowód.

## 3. Szczególne własności przestrzeni skończenie wymiarowych

Twierdzenie 2.47

Z: $E_1, \dots, E_m$, $m \geq 1$ przestrzenie sk. wymiarowe nad $\mathbb{K}$
$F$ - przestrzeń unormowana nad $\mathbb{K}$
$f: E_1 \times \dots \times E_m \to F$ $m$-liniowe.

T: $f \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$

D: Indukcja względem $m \geq 1$. Dla $m = 1$ mamy.
$f: E_1 \to F$ liniowe. Określmy na $E_1$ nową normę.
$\|x\|_f = \|x\| + \|f(x)\|$ dla $x \in E_1$.

# 2-30

Skoro $E_1$ jest skończenie wymiarowa więc normy $\|\ \|$ i $\|\ \|_f$ są równoważne więc istnieje $M>0$ takie, że.

$$\|x\|_f = \|x\| + \|f(x)\| \leq M\|x\|$$

Możemy założyć też, że $M>1$ więc dostajemy nierówność $\|f(x)\| \leq (M-1)\|x\|$ dla $x \in E_1$ co kończy dowód.

Załóżmy następnie, że $m>1$ oraz, że nasze twierdzenie jest prawdziwe dla $k=1,2,\dots,m-1$. Pokażemy, że stąd wynika ono dla $k=m$.

Dla $x_1 \in E_1$ oznaczmy

$$g_{x_1} : E_2 \times \dots \times E_m \ni (x_2,\dots,x_m) \longrightarrow f(x_1,x_2,\dots,x_m) \in F$$

gdzie $f$ jest badanym odwzorowaniem $m$-liniowym.

Na podstawie założenia indukcyjnego wiemy, że.

$g_{x_1} \in \mathcal{L}(E_2,\dots,E_m;F)$ więc dostajemy odwzorowanie.

$$g : E_1 \ni x_1 \longrightarrow g_{x_1} \in \mathcal{L}(E_2,\dots,E_m;F)$$

To odwzorowanie jest liniowe, więc na podstawie założenia indukcyjnego jest ciągłe, a ponadto.

$$\|g_{x_1}\| \leq \|g\|\|x_1\| \quad \text{dla } x_1 \in E_1$$

Jeśli teraz skorzystamy z ciągłości $g$, to dostaniemy.

$$\|g_{x_1}(x_2,\dots,x_m)\| \leq \|g\|\|x_1\| \cdot \dots \cdot \|x_m\|,$$

a następnie

$$\|f(x_1,\dots,x_m)\| \leq \|g\|\|x_1\| \cdot \dots \cdot \|x_m\|$$

dla $x_i \in E_i$, $i=1,\dots,m$

Zatem $f$ jest ciągłe, co kończy dowód.

Uwagi 2.48

(1) Zamieniając normy w składnikach produktu na równoważne otrzymujemy normę produktową równoważną.

(2) Możemy 2.47 wykazać wybierając w elementach produktu wygodne normy i wykonując długie szacowanie.

Twierdzenie 2.49 Każda skończenie wymiarowa przestrzeń unormowana jest przestrzenią Banacha.

D: Niech $E$ będzie rozpatrywaną przestrzenią unormowaną nad $\mathbb{K}$ oraz $m = \dim E$. Dla $m = 0$ twierdzenie jest oczywiste zaś gdy $m \geq 1$ niech $f: \mathbb{K}^m \longrightarrow E$ będzie izomorfizmem, gdzie w $\mathbb{K}^m$ rozpatrujemy normę euklidesową. Na podstawie 2.47 mamy

$$f \in Isom(\mathbb{K}^m; E),$$

a izomorfizmy topologiczne zachowują zupełność. Zatem zupełność $\mathbb{K}^m$ pociąga zupełność $E$.

Wniosek 2.50 Każda skończenie wymiarowa podprzestrzeń przestrzeni unormowanej jest w niej domknięta.

D: Podprzestrzeń skończenie wymiarowa jest zawsze zupełna, więc musi być podzbiorem domkniętym.

Uwaga 2.51 Z 2.50 wynika dość łatwo, że przestrzenie Banacha nie mogą mieć wymiaru $\aleph_0$. Wynika to na podstawie Twierdzenia Baire'a mówiącego, że w zupełnej przestrzeni metrycznej suma ciągu zbiorów nigdziegęstych jest zbiorem brzegowym.

# §5. Szeregi w przestrzeniach unormowanych.

## 1. Podstawowe definicje.

Niech na wstępie $E$ będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$. Definicja 5.67 określa nam szeregi w $E$ jako pary $(\{x_n\}, \{s_n\})$ gdzie $\{x_n\}$ jest ciągiem elementów $E$ zaś $\{s_n\}$ tzw. ciągiem sum częściowych $s_n = x_0 + \dots + x_n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Jeśli teraz $E$ jest przestrzenią unormowaną nad $\mathbb{K}$, to możemy określić zbieżność oraz sumę szeregu następującą definicją.

**Definicja 2.52** Szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ nazywamy **zbieżnym do $s \in E$** jeśli $s_n \to s$ $(n \to +\infty)$. Granicę s ciągu sum częściowych nazywamy **sumą tego szeregu** i oznaczamy $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$. Szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ nazywamy **zbieżnym** jeśli istnieje $s \in E$, że jest on zbieżny do $s$.

**Uwagi 2.53**

(1) Zbieżność szeregów określona bywa w ogólniejszych strukturach jaką są np. przestrzenie wektorowo-topologiczne

(2) W ogólnej sytuacji trudno mówić o szeregach rozbieżnych. Czasami mówimy o nich w $\mathbb{R}$ gdy sumy częściowe zmierzają do $+\infty$ lub $-\infty$ oraz $\mathbb{C}$ gdy ich granicą jest $\infty \in \hat{\mathbb{C}}$. My unikamy tego pojęcia nawet w tych pozostałych sytuacjach.

(3) Gdy sytuacja wymaga zmniejszenia zakresu sumowania, przez szereg $\sum_{n=N}^{+\infty}{}' x_n$, gdzie $N \in \mathbb{N}$, rozumiemy szereg $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' x_{N+n}$. Podobnie zapisujemy sumy szeregów zbieżnych.

(4) Zmiana normy w przestrzeni na równoważną nie wpływa na zbieżność szeregów.

## 2. Podstawowe informacje o szeregach zbieżnych.

**Twierdzenie 2.54** (warunek konieczny zbieżności)

Z: $E$ - p. unormowana, szereg $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' x_n$ jest zbieżny w $E$

T: $x_n \longrightarrow 0 \ (n \longrightarrow +\infty)$.

D: Fakt oczywisty (ćw.)

**Twierdzenie 2.55**

Z: $E, F$ przestrzenie unormowane nad $\mathbb{K}$

szereg $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' x_n$ w $E$ jest zbieżny.

$f \in \mathcal{L}(E; F)$

T: (1) Szereg $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' f(x_n)$ jest zbieżny w $F$,

(2) $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' f(x_n) = f\left(\sum_{n=0}^{+\infty}{}' x_n\right)$.

D: Wystarczy zauważyć, że

$f(s_k) = f(x_0) + \ldots + f(x_k)$ jest $k$-tą sumą

częściową szeregu $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' f(x_n)$ dla $k \in \mathbb{N}$

## Wniosek 2.56

Z: $E$ - przestrzeń unormowana nad $\mathbb{K}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$
szeregi $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' x_n$, $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' y_n$ są zbieżne w $E$

T: (1) Szereg $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' (\alpha x_n + \beta y_n)$ jest zbieżny w $E$,

(2) $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \left(\sum_{n=0}^{+\infty}{}' x_n\right) + \beta \left(\sum_{n=0}^{+\infty}{}' y_n\right)$.

D: $z_n = (x_n, y_n) \in E \times E$, $n \in \mathbb{N}$
w $E \times E$ rozważamy normę produktową oraz odwzorowanie

$$f: E \times E \ni (x,y) \longrightarrow \alpha x + \beta y \in E$$

Ponieważ $f \in \mathcal{L}(E \times E; E)$ teza wynika z 2.55.

## Lemat 2.57

Z: $E$ - przestrzeń unormowana, $\{x_n\}, \{y_n\}$ ciągi w $E$

$$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : x_n = y_n$$

T: Szereg $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' x_n$ jest zbieżny $\Leftrightarrow$ Szereg $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' y_n$ jest zbieżny.

D: Fakt oczywisty.

## Łączność sumy szeregu.

$E$ - przestrzeń unormowana, $\{x_n\}$ ciąg w $E$
$0 = k_0 < k_1 < \dots$, $\{k_n\}$ silnie rosnący ciąg w $\mathbb{N}$
Określamy

$$y_n = \sum_{j=k_n}^{k_{n+1}-1}{}' x_j \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}$$

Twierdzenie 2.58 Jeśli szereg $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' x_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' y_n$ jest zbieżny i ich sumy są równe.

D: Ciąg sum częściowych szeregu $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' y_n$ jest podciągiem ciągu sum częściowych szeregu $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$, co kończy dowód.

Uwaga 2.59 Na przykładzie szeregu zespolonego o wyrazach $\{i^n\}$, $(i^0 = 1)$ można zauważyć, że 2.58 nie należy odwracać.

## 3. Warunek Cauchy'ego dla szeregów

Niech $E$ będzie przestrzenią unormowaną oraz $\{x_n\}$ będzie ciągiem w $E$.

Definicja 2.60 Mówimy, że szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ spełnia warunek Cauchy'ego jeśle

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall p,q \in \mathbb{N} : (N \leq p < q) \Rightarrow (\|x_{p+1} + \dots + x_q\| < \varepsilon)$$

Łatwo zauważyć, że warunek Cauchy'ego mówi, że ciąg sum częściowych $\{s_n\}$ szeregu $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$, spełnia warunek Cauchy'ego w przestrzeni metrycznej $E$ gdyż

$$d(s_p, s_q) = \|s_q - s_p\| = \|x_{p+1} + \dots + x_q\|.$$

Twierdzenie 2.61 (Kryterium Cauchy'ego).
Każdy szereg zbieżny w przestrzeni unormowanej spełnia warunek Cauchy'ego. Jeśli szereg w przestrzeni Banacha spełnia warunek Cauchy'ego to jest on zbieżny.

D: Obydwa fakty są oczywiste wprost z definicji i związków zbieżności szeregu ze zbieżnością ciągu jego sum częściowych.

## 4. Szeregi bezwzględnie zbieżne

Niech $E$ będzie przestrzenią unormowaną zaś $\{x_n\}$ ciągiem elementów $E$

**Definicja 2.62** Szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ nazywamy **bezwzględnie zbieżnym** jeżeli zbieżny jest szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\|$ w zbiorze liczb rzeczywistych.

**Uwaga 2.63** W powyższej definicji zbieżność szeregu $\sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\|$ rozumiemy jako skończoność (!) jego sumy.

**Przykład 2.64** W przestrzeni $\tilde{c}_0$ rozpatrujemy szereg o wyrazach:

$$x_n = (0, 0, \dots, \frac{1}{n^2}, 0, \dots), \quad n \geq 1$$

$$x_0 = 0,$$

gdzie dla $n \geq 1$ jedyna różna od zera pozycja znajduje się na miejscu $n$ przy numerowaniu pozycji od zera.

Szereg ten jest bezwzględnie zbieżny bo $\|x_n\| = \frac{1}{n^2}$ dla $n \geq 0$, ale nie jest w $\tilde{c}_0$ zbieżny (ćw.).

**Przykład 2.65** W przestrzeni $c_0$ rozpatrujemy szereg o wyrazach:

$$x_n = (0, 0, \dots, \frac{1}{n}, 0, \dots), \quad n \geq 1.$$

$$x_0 = 0$$

z opisem jak w 2.64. Nie jest on zbieżny bezwzględnie ale jest zbieżny do $(0, 1, \frac{1}{2}, \dots) \in c_0$ po dowolnej permutacji (ćw.)

Twierdzenie 2.66

Z: $E$ - przestrzeń Banacha, $\{x_n\}$ ciąg w $E$, szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ jest bezwzględnie zbieżny

T: (1) Szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ jest zbieżny.

(2) $\| \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\|$

D: Niech $s_n = x_0 + \ldots + x_n$, $\tilde{s}_n = \|x_0\| + \ldots + \|x_n\|$ dla $n \in \mathbb{N}$

Biorąc $p < q$ mamy:

$$\|s_q - s_p\| = \|x_{p+1} + \ldots + x_q\| \leq \|x_{p+1}\| + \ldots + \|x_q\| = \tilde{s}_q - \tilde{s}_p = |\tilde{s}_q - \tilde{s}_p|$$

Skoro $\{\tilde{s}_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego więc będzie nim również $\{s_n\}$. Zupełność $E$ daje więc nam (1).

Dla dowodu (2) zuważmy, że.

$$\|s_m\| \leq \tilde{s}_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\| \quad \text{dla } m \in \mathbb{N}$$

Skoro $\{s_m\}$ jest zbieżny do $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$, więc z ciągłości normy dostajemy.

$$\| \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\|,$$

czyli otrzymujemy (2).

Uwaga 2.67 Jak już wiemy z 2.65 wśród szeregów zbieżnych, które nie są zbieżne bezwzględnie, zdarzają się szeregi, których suma nie zależy od permutacji wyrazów. Mówimy wtedy o tak zwanej przemiennej zbieżności, którą szczegółowo omówimy w ramach AM3 na drugim roku studiów.

# §6. Szeregi funkcyjne o wartościach w przestrzeniach unormowanych i przestrzeniach Banacha.

## 1. Uwagi wstępne

Niech $X$ będzie zbiorem niepustym oraz niech $E$ będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$. Wtedy $E^X = \{f : X \to E \mid f \text{ - jest odwzorowaniem}\}$ ma naturalną strukturę przestrzeni wektorowej nad $\mathbb{K}$

**Definicja 2.68** Szeregiem funkcyjnym na $X$ o wartościach w $E$ nazywamy szereg w przestrzeni wektorowej $E^X$.

Niech dalej przestrzeń $E$ będzie unormowana. Wtedy dla szeregu funkcyjnego możemy rozpatrywać w oparciu o ciąg sum częściowych:
(1) punktową sumę,
(2) jednostajną zbieżność sum częściowych nazywamy jednostajną zbieżnością szeregu funkcyjnego,
(3) lokalnie jednostajną zbieżność jeśli dodatkowo $X$ jest przestrzenią metryczną.

**Uwagi 2.69** Niech $f_n : X \to E$ odwzorowaniem dla $n \in \mathbb{N}$
(1) Dla $x \in X$ szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ to szereg w $E$.
(2) Jeśli w $E^X$ mamy normę, to szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ możemy rozpatrywać jako szereg w $E^X$.
(3) Należy widzieć wszystkie rodzaje zbieżności, ale fakty formułować będziemy dla jednej z nich.
(4) Szeregi funkcyjne pojawiły się w AM1 Rozdz. 5 §5.

## 2. Kryterium Weierstrassa

**Twierdzenie 2.70 (Kryterium Weierstrassa)**

Z: $X \neq \emptyset$, $E$ - przestrzeń Banacha nad $\mathbb{K}$
$\{M_n\}$ ciąg liczb rzeczywistych nieujemnych, taki, że szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} M_n$ jest zbieżny
$f_n : X \longrightarrow E$ dla $n \in \mathbb{N}$
$\forall n \in \mathbb{N} \; \forall x \in X : \|f_n(x)\| \leq M_n$

T: Szereg funkcyjny $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ jest jednostajnie zbieżny do pewnej funkcji $f : X \longrightarrow E$

D: $\{f_n\}$ możemy traktować jako ciąg w przestrzeni Banacha $\mathcal{B}(X;E)$. Mamy $\|f_n\| \leq M_n$ dla $n \in \mathbb{N}$ więc szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ jest bezwzględnie zbieżny, więc zbieżny do pewnego elementu $f : X \longrightarrow E$. Wtedy dla $s_n = f_0 + \ldots + f_n$ dla $n \in \mathbb{N}$ mamy $s_n \longrightarrow f \; (n \longrightarrow +\infty)$ w $\mathcal{B}(X;E)$ w normie supremumowej, skąd $s_n \rightrightarrows f \; (n \longrightarrow +\infty)$ jeśli $\{s_n\}$ potraktujemy jako ciąg funkcyjny. Czyli dostajemy zbieżność szeregu funkcyjnego $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ do $f$, zbieżność jednostajną

# Rozdział 3. Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej o wartościach w przestrzeniach Banacha

## §1. Pochodne funkcji

### 1. Pochodna funkcji w punkcie

Niech $F$ będzie przestrzenią Banacha nad $\mathbb{K}$, $A \subset \mathbb{K}$, $f: A \longrightarrow F$ oraz $a \in \operatorname{int} A$. Rozpatrujemy funkcję

$$\varphi: A \setminus \{a\} \ni z \longrightarrow \frac{f(z)-f(a)}{z-a} \in F.$$

**Definicja 3.1** Jeśli $\varphi$ ma w punkcie $a$ granicę $v \in F$, to nazywamy ją *pochodną funkcji $f$ w punkcie $a$* i oznaczamy $f'(a)$. Mówimy wtedy, że $f$ jest *różniczkowalna w punkcie $a$*.

**Uwagi 3.2**

(1) Rachunek różniczkowy można budować dla funkcji o wartościach w przestrzeniach unormowanych. Jednak do ciekawszych faktów konieczne jest założenie zupełności przestrzeni docelowej. My od początku pracować będziemy wyłącznie w *przestrzeniach Banacha* oznaczając je zwykle dalej przez $F$.

(2) W przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ wprowadzone są dodatkowo tak zwane *pochodne jednostronne* funkcji. Pojawią się one w dalszych rozważaniach tego rozdziału

## 2. Warunki równoważne istnienia pochodnej

W ustalonej na wstępie sytuacji, w miejsce funkcji

$$\varphi : A \setminus \{a\} \ni z \longrightarrow \varphi(z) = \frac{f(z)-f(a)}{z-a} \in F$$

możemy rozpatrywać funkcję

$$\psi : (A-a) \setminus \{0\} \ni h \longrightarrow \psi(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \in F,$$

gdzie $A-a := \{z-a : z \in A\}$ to przesunięty zbiór $A$ tak, aby punkt $a$ znalazł się w $0 \in \mathbb{K}$. Jeśli $a \in \operatorname{int} A$, to $0 \in \operatorname{int}(A-a)$.

Łatwo w tej sytuacji zauważyć, że istnienie w $F$ granic funkcji $\lim\limits_{z \to a} \varphi(z)$, $\lim\limits_{h \to 0} \psi(z)$ jest równoważne, a jeśli istnieją, to są sobie równe. Zatem jeśli $f$ jest różniczkowalne w punkcie $a$, to dostajemy

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Oznaczając przez $v \in F$ granicę $f'(a)$ można różniczkowalność $f$ w punkcie $a$ równoważnie zapisać na podane sposoby (ćw.):

(A) $f(z) = f(a) + v(z-a) + \eta(z)|z-a|$, $z \in A$

dla $\eta : A \longrightarrow F$, $\eta(a) = 0$, $\eta$ - ciągła w punkcie $a$.

(B) $f(z) = f(a) + v(z-a) + \tilde{\eta}(z)(z-a)$, $z \in A$

dla $\tilde{\eta} : A \longrightarrow F$, $\tilde{\eta}(a) = 0$, $\tilde{\eta}$ - ciągła w punkcie $a$.

(C) $f(a+h) = f(a) + vh + \xi(h)|h|$, $h \in A-a$

dla $\xi : A-a \longrightarrow F$, $\xi(0) = 0$, $\xi$ - ciągła w punkcie $0$.

(D) $f(a+h) = f(a) + vh + \tilde{\xi}(h)h$, $h \in A-a$

dla $\tilde{\xi} : A-a \longrightarrow F$, $\tilde{\xi}(0) = 0$, $\tilde{\xi}$ - ciągła w punkcie $0$

Aby sprawdzić (D) staramy się znaleźć funkcję $\tilde{\xi}$ dostając dla $h \in (A-a)\setminus\{0\}$ wartość

$$\frac{\tilde{\xi}(h)}{h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - v,$$

jeśli więc zadamy $\tilde{\xi}(0)=0$, to $\tilde{\xi}$ będzie ciągła w punkcie 0 wtedy i tylko wtedy $f'(a)=v$. Podobnie sprawdzimy pozostałe trzy warunki równoważne.

## 3. Pochodna a styczność

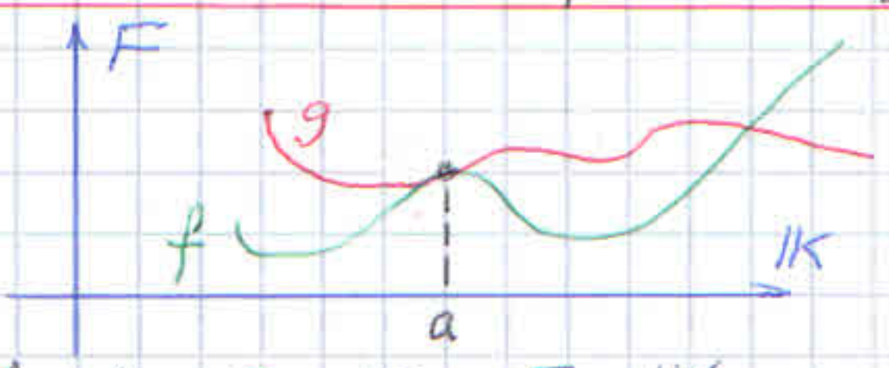
Rozważamy pojęcie styczności odwzorowań określonych na podzbiorach $\mathbb{K}$ i wartościach w $F$. Podobny schemat wykorzystywany jest też w ogólniejszych sytuacjach.

$F$ - przestrzeń Banacha nad $\mathbb{K}$, $A, B \subset \mathbb{K}$

$f: A \longrightarrow F$, $g: B \longrightarrow F$, $a \in \mathbb{K}$.

**Definicja 3.3** Mówimy, że $f$ i $g$ są styczne w punkcie $a$, pisząc $f \tilde{\sim}_a g$, jeśli $a \in \operatorname{int} A \cap B$ oraz

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall z \in \mathbb{K} : (z \in A \cap B, |z-a| < \delta) \Rightarrow (\|f(z)-g(z)\| \leq \varepsilon |z-a|)$$




**Przykłady 3.4** $A = B = \mathbb{K}$, $F = \mathbb{K}$, $a = 0$

(1) $f(z) = z^2$, $g(z) = 0$, są styczne

(2) $f(z) = z$, $g(z) = 0$, nie są styczne

(3) $f(z) = \sin z$, $g(z) = z$, są styczne.

(4) $f(z) = e^z$, $g(z) = 1+z$, są styczne

Uwaga 3.5 Przy przyjętych oznaczeniach w 3.3

(1) $(f \tilde{a} g) \Rightarrow (f(a)=g(a))$

(2) $(f \tilde{a} g) \Rightarrow (f$-ciągła w p. $a \Leftrightarrow g$-ciągła w p. $a)$

D: Ćw.

Twierdzenie 3.6

Z: $F$ - przestrzeń Banacha nad $\mathbb{K}$, $A \subset \mathbb{K}$

$f: A \to F$, $a \in \operatorname{int} A$, $v \in F$

T: Następujące warunki są równoważne:

(1) $f'(a) = v$,

(2) $g: \mathbb{K} \ni z \to f(a) + v(z-a) \in F$ jest styczne do $f$ w punkcie $a$.

D: (1)⇒(2). $\frac{f(z) - f(a)}{z-a} \to v \ (z \to a)$, więc.

$\| \frac{f(z) - f(a) - v(z-a)}{z-a} \| \to 0 \ (z \to a)$.

stąd $f \tilde{a} g$.

(2)⇒(1) Ćwiczenie

Wniosek 3.7

Z: $F$ - przestrzeń Banacha nad $\mathbb{K}$, $A \subset \mathbb{K}$

$f: A \to F$ różniczkowalna w punkcie $a$.

T: $f$ - ciągła w punkcie $a$

D: Dostajemy natychmiast z 3.5 i 3.6

Uwaga 3.8 Styczność odwzorowania afinicznego poprzez jego część liniową daje pochodną - tutaj wektor z $F$. W rozpatrywanych aktualnie sytuacjach odwzorowania liniowe z $\mathbb{K}$ w $F$ są wyznaczone przez wektory z $F$. Mamy więc zachowany ogólny schemat budowy pochodnej w punkcie jako odwzorowania liniowego.

## 4. Pochodna i pochodne wyższych rzędów

Dla ustalonej przestrzeni Banacha $F$ nad $\mathbb{K}$, $A \subset \mathbb{K}$ oraz $f: A \longrightarrow F$ określamy kolejno:

$A^{(0)} := A$

$f^{(0)}: A^{(0)} \ni z \longrightarrow f^{(0)}(z) := f(z) \in F$

$A^{(1)} := \{z \in A^{(0)} : f^{(0)}$ ma pochodną w punkcie $z\}$

$f^{(1)}: A^{(1)} \ni z \longrightarrow f^{(1)}(z) := (f^{(0)})'(z) = f'(z) \in F$

. . . . . .

$A^{(k)} := \{z \in A^{(k-1)} : f^{(k-1)}$ ma pochodną w punkcie $z\}$

$f^{(k)}: A^{(k)} \ni z \longrightarrow f^{(k)}(z) := (f^{(k-1)})'(z) \in F$, $k \geq 1$.

Otrzymujemy w ten sposób ciąg zbiorów i funkcji, być może pustych od pewnego $n \in \mathbb{N}$, w którym zawsze mamy inkluzje

$$A^{(0)} \supset \operatorname{int} A^{(0)} \supset A^{(1)} \supset \operatorname{int} A^{(1)} \supset \ldots \supset \operatorname{int} A^{(k-1)} \supset A^{(k)}.$$

**Definicja 3.9** Jeśli $n \geq 1$ oraz $a \in A^{(n)}$, to mówimy, że $f$ jest *$n$-krotnie różniczkowalne w punkcie $a$* oraz $f^{(n)}(a)$ nazywamy *$n$-tą pochodną $f$ w punkcie $a$*. Odwzorowanie $f^{(n)}: A^{(n)} \longrightarrow F$ nazywamy *$n$-tą pochodną funkcji $f$*.

**Definicja 3.10.** Jeśli $n \geq 1$ oraz $A^{(n)} = A$, to mówimy, że *$f$ jest $n$-krotnie różniczkowalna*.

Uwagi 3.11

(1) Pierwszą pochodną funkcji $f$ nazywamy zwykle jej pochodną i oznaczamy $f'$. Dla drugiej i trzeciej pochodnej zwykle stosuje się oznaczenia $f''$, $f'''$.

(2) Jeśli $f: A \longrightarrow F$ jest $n$-krotnie różniczkowalna, $n \geq 1$, to $A$ musi być otwarty bo $A \supset \operatorname{int} A \supset A^{(n)} = A$.

(3) Warto już teraz wiedzieć, że dla $\Omega$-otwartego w $\mathbb{C}$ oraz $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ różniczkowalnego (1-różniczkowalność') nad $\mathbb{C}$, $f$ ma wszystkie wyższe pochodne oraz jest nawet analityczna.

Definicja 3.12 Jeśli $n \geq 1$, $f$ jest $n$-krotnie różniczkowalna oraz $f^{(n)}: A \longrightarrow F$ jest ciągła, to wtedy mówimy, że $f$ jest klasy $C^n$.

Definicja 3.13. Jeśli dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, funkcja $f$ jest klasy $C^n$, to mówimy, że $f$ jest klasy $C^\infty$.

Przykłady 3.14

(1) $f: \mathbb{K} \ni z \longrightarrow f(z) = v \in F$, $v$ - stała.
$f' = 0$, $f^{(n)} = 0$ dla $n \geq 1$, więc $f$ - kl. $C^\infty$

(2) $f: \mathbb{K} \ni z \longrightarrow f(z) = wz + v \in F$, $w, v \in F$
$f' = w$ - funkcja stała, $f'' = 0$, $f''' = 0$, ..., $f$ jest kl. $C^\infty$

## §2. Operacje na funkcjach różniczkowalnych

### 1. Działania na funkcjach.

**Twierdzenie 3.15**

Z.: $F, G, H$ - przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$, $A \subset \mathbb{K}$

$f: A \to F$, $g: A \to G$ różniczkowalne w $a \in A$

$\Phi \in \mathcal{L}(F, G; H)$

T.: (1) Jeśli $F = G$, to $f+g$ jest różniczkowalna w $a$ oraz $\underline{(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)}$.

(2) $h: A \ni z \to \Phi(f(z), g(z)) \in H$ jest różniczkowalne w punkcie $a$ oraz zachodzi równość

$\underline{h'(a) = \Phi(f'(a), g(a)) + \Phi(f(a), g'(a))}$.

(3) Jeśli $G = \mathbb{K}$ oraz $g^{-1}(0) = \emptyset$, to wtedy odwzorowanie $f/g$ jest różniczkowalne w $a$.

oraz $\underline{(f/g)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}}$.

D: (1). $\dfrac{(f+g)(z) - (f+g)(a)}{z-a} = \dfrac{f(z)-f(a)}{z-a} + \dfrac{g(z)-g(a)}{z-a}$,

co zmierza do $f'(a) + g'(a)$ gdy $z \to a$.

(2) $\underline{\dfrac{h(z)-h(a)}{z-a}} = \dfrac{1}{z-a}\Phi(f(z), g(z)-g(a)) +$

$+ \dfrac{1}{z-a}\Phi(f(z)-f(a), g(a)) =$

$= \Phi\left(\dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}, g(a)\right) + \Phi\left(f(z), \dfrac{g(z)-g(a)}{z-a}\right)$

$\downarrow (z \to a)$

$\underline{\Phi(f'(a), g(a)) + \Phi(f(a), g'(a))}$

Korzystamy tutaj z ciągłości $\Phi$.

(3) Mamy $\frac{1}{z-a}\left(\frac{f(z)}{g(z)} - \frac{f(a)}{g(a)}\right) =$

$= \frac{1}{g(z)g(a)} \cdot \frac{f(z)g(a) - f(a)\cdot g(z)}{z-a} =$

$= \frac{1}{g(z)g(a)} \cdot \frac{f(z)g(a) - f(a)g(a) + f(a)g(a) - f(a)g(z)}{z-a} =$

$= \frac{1}{g(z)g(a)} \left[\frac{f(z)-f(a)}{z-a} \cdot g(a) - f(a)\frac{g(z)-g(a)}{z-a}\right] \longrightarrow$

$\longrightarrow \frac{1}{(g(a))^2}\left[f'(a)g(a) - f(a)g'(a)\right] \quad (z \to a).$

co kończy dowód 3.15

## 2. Podstawowe operacje mnogościowe na odwzorowaniach różniczkowalnych

W kolejnych twierdzeniach omówimy takie operacje jak: zestawienie, zacieśnienie i złożenie odwzorowań.

### Twierdzenie 3.16

Z: $F_1, \ldots, F_m$ przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$, $A \subset \mathbb{K}$

$f_i : A \to F_i$, $i = 1, \ldots, m$ są różniczkowalne w $a \in A$

T: Odwzorowanie $f : A \ni z \to (f_1(z), \ldots, f_m(z)) \in F_1 \times \ldots \times F_m$

jest różniczkowalne w $a$ oraz $f'(a) = (f_1'(a), \ldots, f_m'(a))$

D: Mamy

$$\frac{1}{z-a}(f(z)-f(a)) = \left(\frac{f_1(z)-f_1(a)}{z-a}, \ldots, \frac{f_m(z)-f_m(a)}{z-a}\right)$$

$\downarrow (z \to a)$

$(f_1'(a), \ldots, f_m'(a)) \in F_1 \times \ldots \times F_m$

Twierdzenie 3.17

Z: $F$ - przestrzeń Banacha nad $\mathbb{K}$, $B \subset A \subset \mathbb{K}$

$f: A \longrightarrow F$, $a \in \operatorname{int} B$

T: Następujące warunki są równoważne:

(1) $f$ jest różniczkowalne w punkcie $a$,

(2) $f|B$ jest różniczkowalne w punkcie $a$.

Jeśli warunki zachodzą, to $(f|B)'(a) = f'(a)$.

D: Ćwiczenie

Twierdzenie 3.18

Z: $G$ - przestrzeń Banacha nad $\mathbb{K}$, $A, B \subset \mathbb{K}$

$f: A \longrightarrow \mathbb{K}$, $g: B \longrightarrow G$, $f(A) \subset B$

$f$ - jest różniczkowalna w punkcie $a \in A$

$g$ - jest różniczkowalna w punkcie $f(a)$.

T: $g \circ f$ jest różniczkowalna w punkcie $a$ oraz

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

D: Oznaczmy $b = f(a)$ i zapiszmy różniczkowalność warunkami równoważnymi (wersja (B)):

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \tilde{u}(x)(x-a), \quad x \in A$$

$\tilde{u}: A \longrightarrow \mathbb{K}$, $\tilde{u}(a) = 0$, $\tilde{u}$ - ciągłe w $a$.

$$g(y) = g(b) + g'(b)(y-b) + \tilde{v}(y)(y-b), \quad y \in B$$

$\tilde{v}: B \longrightarrow G$, $\tilde{v}(b) = 0$, $\tilde{v}$ - ciągłe w $b$.

Wstawiając $y = f(x)$ w drugim wzorze dostajemy.

$$g(f(x)) = g(f(a)) + g'(f(a))(f(x)-f(a)) + \tilde{v}(f(x))(f(x)-f(a)) =$$

$$= g(f(a)) + g'(f(a))(f'(a)(x-a) + \tilde{u}(x)(x-a)) +$$
$$+ \tilde{v}(f(x))(f'(a)(x-a) + \tilde{u}(x)(x-a)) =$$

$$= \underline{g(f(a)) + g'(f(a))f'(a)(x-a)} +$$
$$+ \underline{[g'(f(a))\cdot\tilde{u}(x) + \tilde{v}(f(x))(f'(a)+\tilde{u}(x))]}(x-a) =$$

$$= \underline{g(f(a)) + g'(f(a))\cdot f'(a)(x-a)} + \underline{\tilde{\eta}(x)}(x-a) \text{ dla } x \in A$$

gdzie $\tilde{\eta}: A \longrightarrow G$, $\tilde{\eta}(a)=0$, $\tilde{\eta}$ - ciągłe w $a$.

To kończy dowód.

## 3. Różniczkowalność nad $\mathbb{R}$, a różniczkowalność nad $\mathbb{C}$

$F$ - przestrzeń Banacha nad $\mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$, $f: A \to F$

Określmy następnie

$$\underline{g = f|A\cap\mathbb{R} : A\cap\mathbb{R} \longrightarrow F,}$$

traktując tym razem $F$ jako przestrzeń Banacha nad $\mathbb{R}$

### Twierdzenie 3.19

Z: Niech w powyższej sytuacji $a \in A\cap\mathbb{R}$ oraz.
$f$ jest różniczkowalna w punkcie $a$ nad $\mathbb{C}$

T: (1) $g$ jest różniczkowalna w punkcie $a$
(2) $\underline{g'(a) = f'(a)}$

D: Widzimy, że $a \in \operatorname{int}_{\mathbb{R}}(A\cap\mathbb{R})$ oraz.

$\frac{f(z)-f(a)}{z-a} \longrightarrow f'(a)$ $(z \to a)$ w zbiorze $A$, więc.

$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \longrightarrow f'(a)$ $(x \to a)$ w $A\cap\mathbb{R}$ co kończy dowód.

## 4. Pochodne podstawowych funkcji

### Przykłady 3.20

(1) $f: \mathbb{K} \ni z \longrightarrow az+b \in \mathbb{K}$, $a, b \in \mathbb{K}$

$f'(z) = a$ dla $z \in \mathbb{K}$

(2) $f: \mathbb{K} \ni z \longrightarrow z^m \in \mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, wtedy

$f'(z) = mz^{m-1}$ dla $z \in \mathbb{K}$.

Dla $m \geq 1$ mamy

$$\frac{(z+h)^m - z^m}{h} = \frac{1}{h}\left[\binom{m}{1} z^{m-1}h + \dots + \binom{m}{m} z^0 h^m\right]$$

$$= \binom{m}{1} z^{m-1} + \binom{m}{2} z^{m-2}h + \dots + \binom{m}{m} h^{m-1} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow mz^{m-1} \quad (h \to 0).$$

(3) $f: \mathbb{K} \setminus \{0\} \ni z \longrightarrow z^m \in \mathbb{K}$, $m \in \mathbb{Z}$, $m < 0$.

Mamy $z^m = \frac{1}{z^{-m}} = \frac{1}{z^p}$, $p = -m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Wzór na pochodną ilorazu daje:

$$f'(z) = \frac{0 - pz^{p-1}}{(z^p)^2} = (-p) z^{-p-1} = mz^{m-1},$$

czyli dostajemy ten sam wynik co w (2).

(4) Różniczkowanie wielomianów ($f \in \mathbb{K}[z]$)

pozostawia nas w tej klasie zmniejszając stopień wielomianu. Wielomiany są zatem klasy $C^\infty$.

(5) Różniczkowanie funkcji wymiernych (poza zerami mianownika) daje nam funkcje wymierne, więc zawsze różniczkowalne. Zatem funkcje wymierne poza zerami mianownika są klasy $C^\infty$.

Zajmijmy się następnie pochodnymi funkcji analitycznych

Twierdzenie 3.21

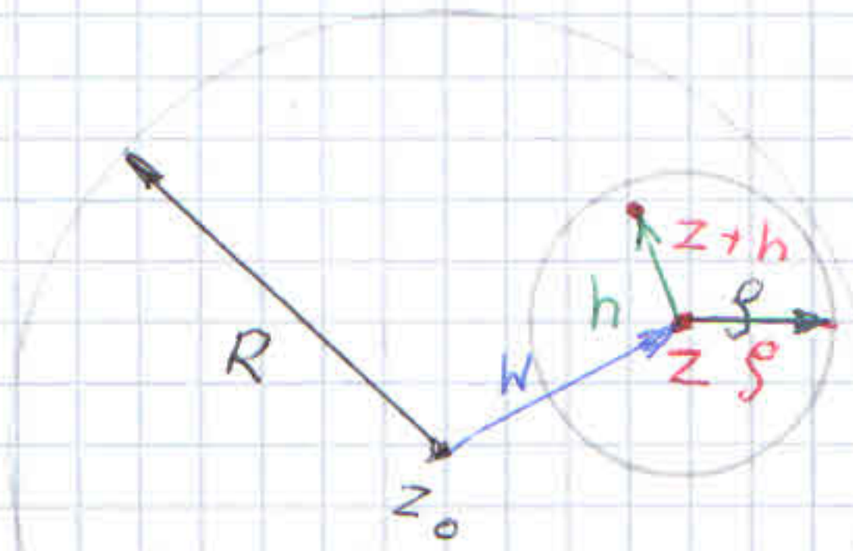
Z: $z_0 \in \mathbb{K}$, $\{a_n\}$ ciąg w $\mathbb{K}$,
szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ ma
niepuste koło zbieżności $K$
$f: K \ni z \to f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \in \mathbb{K}$

T: (1) $f$ jest różniczkowalna.
(2) $f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$ dla $z \in K$

D: Łatwo sprawdzić, że szereg potęgow z punktu (2) tezy ma ten sam promień zbieżności co wyjściowy (Ćw.).

Przechodząc do wyliczenia pochodnej funkcji $f$ zauważmy na wstępie, że jeśli $R$ jest promieniem koła zbieżności wyjściowego szeregu oraz $r \in (0, R)$ to szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n$ jest zbieżny.

Ustalmy następnie $z \in K$ i oznaczmy $w = z - z_0$




Ustalmy teraz promień $\rho < R - |w|$
Dla $h \in \mathbb{K}$, $|h| < \rho$
zbadajmy iloraz różnicowy funkcji $f$, korzystając z tego, że $|w| + \rho = r < R$

Oznaczmy $S(h) = \frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n (z-z_0)^{n-1}$ dla $|h|<\varrho$

Dostajemy

$$S(h) = \frac{1}{h}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}{}' (a_n(w+h)^n - a_n w^n) - \sum_{n=1}^{+\infty}{}' n a_n w^{n-1} h\right) =$$

$$= \frac{1}{h}\left(\sum_{n=2}^{+\infty}{}' a_n \left(\binom{n}{2} w^{n-2}h^2 + \ldots + \binom{n}{n} w^0 h^n\right) =\right.$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty}{}' a_n \left(\binom{n}{2} w^{n-2} h + \ldots + \binom{n}{n} w^0 h^{n-1}\right)$$

Zatem

$$|S(h)| \leq |h| \sum_{n=2}^{+\infty}{}' |a_n| \left(\binom{n}{2}|w|^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n}|h|^{n-2}\right)$$

Skoro $|h|<\varrho$, więc

$$|S(h)| \leq |h| \sum_{n=2}^{+\infty}{}' |a_n| \left(\binom{n}{2}|w|^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n}\varrho^{n-2}\right) =$$

$$= \frac{|h|}{\varrho^2} \sum_{n=2}^{+\infty}{}' |a_n| \left(\binom{n}{2}|w|^{n-2}\varrho^2 + \ldots + \binom{n}{n}\varrho^n\right) \leq$$

$$\leq \frac{|h|}{\varrho^2} \sum_{n=2}^{+\infty}{}' |a_n| (|w|+\varrho)^n \leq$$

$$\leq \frac{|h|}{\varrho^2} \sum_{n=0}^{+\infty}{}' |a_n| (|w|+\varrho)^n$$

Jednak $\varrho < R - |w|$, więc $|w|+\varrho = r < R$,

czyli dla $C = \frac{1}{\varrho^2} \sum_{n=0}^{+\infty}{}' |a_n| r^n$ otrzymujemy

szacowanie

$$|S(h)| \leq C|h| \quad \text{dla} \quad |h|<\varrho.$$

Zatem $S(h) \to 0 \ (h \to 0)$ co kończy dowód.

Wniosek 3.22 Funkcja $f: K \longrightarrow \mathbb{K}$, z założeń 3.21 jest klasy $C^\infty$, i jej pochodna powstaje jako szereg określający zróżniczkowany „wyraz po wyrazie"

Twierdzenie 3.23

Z: $\Omega$ otwarty w $\mathbb{K}$, $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ analityczna.

T: f jest klasy $C^\infty$

D: Wynika natychmiast z definicji funkcji analitycznej oraz Wniosku 3.22

Przykłady 3.24

(1) $(e^z)' = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$

(2) $(\sin z)' = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \cos z$

(3) $(\cos z)' = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} =$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sin z$

Dysponując (1) można do wyliczenia (2) i (3) skorzystać ze wzorów:

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}),$$
$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}),$$

oraz wzoru na różniczkowanie złożenia

## §3. Klasyczne twierdzenie o wartości średniej i jego zastosowania.

### 1. Podstawowe wersje twierdzenia o wartości średniej

**Twierdzenie 3.25 (Rolle'a).**

Z: $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ciągła.
$f|(a,b)$ jest różniczkowalna.
$f(a) = f(b)$

T: $\exists c \in (a,b) : f'(c) = 0$

D: Niech $m = \inf(f([a,b]))$, $M = \sup(f([a,b]))$.
Mamy wtedy $m \leq f(x) \leq M$ dla $x \in [a,b]$

Jeśli $m = M$, to $f$ jest stała na $[a,b]$ oraz.
dowolny punkt $c \in (a,b)$ spełnia tezę.

Jeśli $m \neq M$, to $f(a) = f(b) < M$ lub $m < f(a) = f(b)$.
Zbadajmy pierwszy z tych przypadków zaś drugi możemy zbadać analogicznie.

Istnieje $c \in (a,b)$ takie, że $f(c) = M$. Wtedy rozpatrując iloraz różnicowy w tym punkcie $c$

$$\varphi : [a,b] \setminus \{c\} \ni t \longrightarrow \frac{f(t) - f(c)}{t - c} \in \mathbb{R},$$

widzimy, że jest on nieujemny dla $t < c$ oraz nieodatni dla $t > c$. Skoro $\varphi$ ma w punkcie $c$ granicę, to

$$f'(c) = \lim_{t \to c} \varphi(t) = 0,$$

co kończy dowód.

**Twierdzenie 3.26 (Lagrange'a)**

Z: $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ ciągłe.
$f|(a,b)$ jest różniczkowalna

T: $\exists c \in (a,b): f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

D: Określamy $g:[a,b] \ni t \to f(t) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a) \in \mathbb{R}$
Mamy $g(b) = f(a) = g(a)$, więc jak tutaj zauważyć $g:[a,b] \to \mathbb{R}$ spełnia założenia 3.25. Zatem istnieje $c \in (a,b)$ takie, że $g'(c)=0$. Skoro $g'(t) = f'(t) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, więc otrzymujemy tezę.

**Twierdzenie 3.27 (Cauchy'ego)**

Z: $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, $f,g:[a,b] \to \mathbb{R}$ ciągłe.
$f|(a,b)$, $g|(a,b)$ różniczkowalne

T: $\exists c \in (a,b): [f(b)-f(a)]g'(c) = [g(b)-g(a)]f'(c)$

D: Określamy $h:[a,b] \ni t \to [f(b)-f(a)]g(t) - [g(b)-g(a)]f(t) \in \mathbb{R}$
Mamy $h(a) = [f(b)-f(a)]g(a) - [g(b)-g(a)]f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$.
$h(b) = [f(b)-f(a)]g(b) - [g(b)-g(a)]f(b) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$.
Skoro $h(a) = h(b)$, więc $\exists c \in (a,b): h'(c)=0$, co daje tezę.

**Twierdzenie 3.28**

Z: $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, $f,g:[a,b] \to \mathbb{R}$ ciągłe
$f|(a,b)$, $g|(a,b)$ różniczkowalne, $\forall t \in (a,b): g'(t) \neq 0$

T: (1) $g(a) \neq g(b)$
(2) $\exists c \in (a,b): \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

D: (1) Wynika z 3.25
(2) Dostajemy natychmiast z 3.27

Uwaga 3.29 Z twierdzenia Cauchy'ego dostajemy łatwo twierdzenia Lagrange'a i Rolle'a.
W literaturze można spotkać wiele wersji twierdzeń o wartości średniej dowodzonych zwykle poprzez wykorzystanie twierdzenia Rolle'a. W kolejnym paragrafie tego rozdziału pojawi się istotnie ogólniejsza wersja z tej grupy twierdzeń.

## 2. Różniczkowanie odwzorowania odwrotnego

### Twierdzenie 3.30

Z: $A, B \subset \mathbb{K}$, $f: A \to B$ bijekcja, $g = f^{-1}: B \to A$, $c \in A$
$f$ jest różniczkowalne w punkcie $c$
$g$ jest różniczkowalne w punkcie $f(c)$

T: (1) $f'(c) \neq 0$
(2) $g'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}$.

D: Mamy $g \circ f = id_A$ zatem $g(f(z)) = z$ dla $z \in A$
Ze względu na różniczkowalność $f$ i $g$ mamy.
$c \in \operatorname{int} A$ oraz $f(c) \in \operatorname{int} B$, a ponadto z 3.18 dostajemy $g'(f(c)) \cdot f'(c) = 1$.

Stąd natychmiast wynika teza.

Twierdzenie 3.31

Z: $A, B \subset \mathbb{K}$, $f: A \longrightarrow B$ homeomorfizm
$f$ jest różniczkowalne w punkcie $c \in A$
$f'(c) \neq 0$

T: (1) $g = f^{-1}: B \longrightarrow A$ jest różniczkowalne w $f(c)$,
(2) $g'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}$.

D: Niech $\{w_n\}$ będzie ciągiem w $B$, $w_n \to f(c)$ $(n \to +\infty)$
Wtedy $w_n = f(z_n)$ gdzie $\{z_n\}$ ciąg w $A$, $z_n \to c$ $(n \to +\infty)$.
Otrzymujemy $\frac{g(w_n) - g(f(c))}{w_n - f(c)} = \frac{z_n - c}{f(z_n) - f(c)} \to \frac{1}{f'(c)}$
$(n \to +\infty)$,
co kończy dowód.

Twierdzenie 3.32

Z: $I$ przedział otwarty, niepusty w $\mathbb{R}$
$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ różniczkowalna.
$\forall t \in I: f'(t) \neq 0$

T: (1) $J = f(I)$ przedział otwarty w $\mathbb{R}$.
(2) $f: I \to J$ jest homeomorfizmem.
(3) $g = f^{-1}: J \to I$ jest różniczkowalna.

D: Z twierdzenia Rolle'a wynika, że $f$ jest injekcją.
Ponadto zauważmy, że $f(I)$ jest przedziałem otwartym. To, że $J = f(I)$ jest przedziałem wynika z ciągłości $f$. Gdyby któryś z końców $J$ do niego należał, to $f$ przyjmowałaby wartość największą lub najmniejszą na $I$ w pewnym punkcie $t \in I$ skąd byłoby $f'(t) = 0$. Zatem dostajemy (1)

Tak samo rozumując widzimy, że obrazem przedziału otwartego, zawartego w $I$ jest przedział otwarty. Stąd wynika, że $f$ jest odwzorowaniem otwartym, co tutaj daje (2). W tej sytuacji 3.31 daje nam (3) kończąc dowód.

Niech następnie $U, V$ będą niepustymi podzbiorami otwartymi $\mathbb{R}$ oraz $f: U \longrightarrow V$ będzie bijekcją.

Definicja 3.33 W powyższej sytuacji odwzorowanie $f$ nazywamy dyfeomorfizmem jeśli $f$ i $f^{-1}$ są klasy $C^1$. Dla $k \in \{1, 2, .., \infty\}$ odwzorowanie $f$ nazywamy $C^k$-dyfeomorfizmem jeśli $f$ i $f^{-1}$ są klasy $C^k$.

Zauważmy, że dyfeomorfizm to dokładnie to samo co $C^1$-dyfeomorfizm.

Twierdzenie 3.34

Z: $\Omega$ otwarty w $\mathbb{R}$, $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ klasy $C^1$
$c \in \Omega$, $f'(c) \neq 0$

T: Istnieje $U$ otoczenie punktu $c$ w $\Omega$ oraz $V$ otoczenie punktu $f(c)$ w $\mathbb{R}$ takie, że
$f|U: U \longrightarrow V$
jest dyfeomorfizmem

D: Wybierzmy $U$ przedział zawierający punkt $c$ taki, że $\forall t \in U: f'(t) \neq 0$. Wtedy $V = f(U)$ na podstawie 3.32 jest otwarty oraz $f|U: U \longrightarrow V$ to homeomorfizm różniczkowalny. W tej sytuacji z 3.31
$$[(f|U)^{-1}]'(s) = \frac{1}{f'((f|U)^{-1}(s))}.$$
Więc $(f|U)^{-1}$ jest klasy $C^1$, a zatem $f|U$ to dyfeomorfizm.

## 3. Reguła de l'Hospitala

Przedstawimy wersję tytułowej reguły uzyskaną przez Tadeusza Ważewskiego i opublikowaną w 1948r.

**Twierdzenie 3.35 (Reguła de l'Hospitala)**

Z: $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$

$f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ różniczkowalne

$\forall x \in (a,b) : g(x) \neq 0, g'(x) \neq 0$

$c = a$ lub $c = b$

$\left(\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0\right)$ lub $\left(\lim_{x \to c} |g(x)| = +\infty\right)$

T: $\liminf_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leqslant \liminf_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \limsup_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \limsup_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

D: Jeśli przez $E\left(\frac{f}{g}\right)$ i $E\left(\frac{f'}{g'}\right)$ oznaczymy zbiory granic częściowych w $\overline{\mathbb{R}}$ odpowiednio funkcji $\frac{f}{g}$ i $\frac{f'}{g'}$ w punkcie $c$, to aby wykazać tezę wystarczy pokazać inkluzję

$$E\left(\frac{f}{g}\right) \subset E\left(\frac{f'}{g'}\right) \qquad (\#)$$

Dokładniej rozpisując ten plan będziemy dowodzić, że jeśli $d \in \overline{\mathbb{R}}$, $\{x_n\}$ jest ciągiem w $(a,b)$ takim, że $x_n \to c$ $(n \to +\infty)$ oraz

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \longrightarrow d \quad (n \to +\infty),$$

to znajdziemy taki ciąg $\{t_n\}$ w $(a,b)$, $t_n \to c$ $(n \to +\infty)$, że

$$\frac{f'(t_n)}{g'(t_n)} \longrightarrow d \quad (n \to +\infty)$$

Na wstępie dla $x, y \in (a,b)$, $x \neq y$, wybierzmy na podstawie 3.28, punkt $t = \xi(x,y)$ leżący między $x$ i $y$ taki, że

$$(*) \quad \frac{f'(t)}{g'(t)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)},$$

a wtedy mamy

$$(**) \quad \frac{f'(t)}{g'(t)} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(y)}{g(x)}}{1 - \frac{g(y)}{g(x)}}.$$

Teraz rozważania prowadzimy, po wyborze $x_n \to c \ (n \to +\infty)$, $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to d \ (n \to +\infty)$, w dwóch przypadkach

I. Jeśli $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$

Znajdujemy ciąg $\{y_n\}$ w $(a,b)$ taki, że.

(1) $y_n \neq x_n$ dla $n \in \mathbb{N}$, $y_n \to c \ (n \to +\infty)$

(2) $|f(y_n)| \leq 2^{-n} |g(x_n)|$ dla $n \in \mathbb{N}$

(3) $|g(y_n)| \leq 2^{-n} |g(x_n)|$ dla $n \in \mathbb{N}$

Dobierając teraz $t_n = \xi(x_n, y_n)$ dla $n \in \mathbb{N}$, z równości (**) dostajemy

$$\frac{f'(t_n)}{g'(t_n)} \to d \ (n \to +\infty)$$

Warto tutaj zauważyć, że szukany tutaj ciąg $\{y_n\}$ może zostać wybrany jako podciąg $\{x_n\}$.

To kończy dowód w przypadku I.

II Jeśli $\lim_{x\to c} |g(x)| = +\infty$

Wybierzmy teraz i ustalmy ciąg $\{y_n\}$ tak, aby $y_n \longrightarrow c$ $(n \to +\infty)$. Podstawą konstrukcji będzie teraz właściwy wybór podciągu $\{z_n\}$ z ciągu $\{x_n\}$.

Możemy tak wybrać podciąg $\{z_n\}$ z ciągu $\{x_n\}$ aby spełnione były warunki:

(1) $z_n \neq y_n$ dla $n \in \mathbb{N}$

(2) $|f(y_n)| \leq 2^{-n} |g(z_n)|$ dla $n \in \mathbb{N}$,

(3) $|g(y_n)| \leq 2^{-n} |g(z_n)|$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Oczywiście $z_n \longrightarrow c$ $(n \to +\infty)$ oraz z $(**)$ dla $t_n = \xi(z_n, y_n)$, $n \in \mathbb{N}$ otrzymujemy

$$\frac{f'(t_n)}{g'(t_n)} = \frac{\frac{f(z_n)}{g(z_n)} - \frac{f(y_n)}{g(z_n)}}{1 - \frac{g(y_n)}{g(z_n)}} \longrightarrow d \quad (n \to +\infty$$

Mamy tutaj oczywiście $t_n \to c$ $(n \to +\infty)$ co kończy dowód w przypadku II.

Jak widać w obydwu przypadkach całą konstrukcję możemy oprzeć na wybranym nim ustępie ciągu $\{x_n\}$ i jego podciągach!

Jeśli iloraz $\frac{f'}{g'}$ ma w punkcie c granicę w $\overline{\mathbb{R}}$, to z 3.35 łatwo dostajemy klasyczną wersję Reguły de l'Hospitala.

## Twierdzenie 3.36

Z: $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$

$f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ różniczkowalne

$\forall x \in (a,b): g(x) \neq 0, g'(x) = 0$

$c = a$ lub $c = b$

$(\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} g(x) = 0)$ lub $(\lim\limits_{x \to c} |g(x)| = +\infty)$

$\lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = d \in \overline{\mathbb{R}}$

T: $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = d$

D: Dostajemy natychmiast z 3.35

## Przykłady 3.37

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^m e^{-x} = 0$ dla $m \in \mathbb{N}$

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ łatwe przekształcenia wykonujemy dla granic jednostronnych.

(3) Mamy $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = 0$,

zaś z 3.35, analizując iloraz pochodnych równy $2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ dostajemy jedynie oszacowanie granicy ilorazu przez $-1$ oraz $+1$.

## 4. Szacowanie przyrostu wartości funkcji

Uzyskane wcześniej Twierdzenie Lagrange'a pozwala, w szczególności na wygodną ocenę przyrostu wartości funkcji, jak w poniższym twierdzeniu

**Twierdzenie 3.38**

Z: $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ciągła. $f|(a,b)$ jest różniczkowalna oraz istnieje $M \geq 0$ takie, że $|f'(t)| \leq M$ dla $t \in (a,b)$

T: $|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|$

D: Z twierdzenia Lagrange'a istnieje $c \in (a,b)$ takie, że $(f(b)-f(a)) = f'(c)(b-c)$ co daje tezę.

Dostajemy stąd wniosek następujący.

**Wniosek 3.39**

Z: $I$ - przedział otwarty w $\mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$ różniczkowalna $M \geq 0$, $|f'(t)| \leq M$ dla $t \in I$

T: $\forall x, y \in I : |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$

D: Wystarczy zastosować 3.38 do przedziału $I = [a,b]$ gdzie $a = \min\{x,y\}$, $b = \max\{x,y\}$ gdy $x \neq y$.

**Uwaga 3.40** Ze względu na przykład $\varphi: [0, 2\pi] \ni t \to (\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2$, łatwo zauważyć, że dla funkcji wektorowych nie zachodzą twierdzenie Rolle'a i Lagrange'a, więc trudno powtarzać na przykład 3.39

## §4. Twierdzenie o pochodnych i jego konsekwencje.

### 1. Pochodne jednostronne.

$A \subset \mathbb{R}$, $F$ - przestrzeń Banacha nad $\mathbb{K}$

$f: A \to F$, $c \in A$

**Definicja 3.41** Jeśli istnieje $\delta > 0$ takie, że $[c, c+\delta) \subset A$ oraz istnieje granica

$$f'_+(c) = \lim_{t \to c+} \frac{f(t)-f(c)}{t-c} \in F,$$

to granicę tę nazywamy prawostronną pochodną funkcji $f$ w punkcie $c$ i oznaczamy jak wyżej.

**Definicja 3.42** Jeśli istnieje $\delta > 0$ takie, że $(c-\delta, c] \subset A$ oraz istnieje granica

$$f'_-(c) = \lim_{t \to c-} \frac{f(t)-f(c)}{t-c} \in F,$$

to granicę tę nazywamy lewostronną pochodną $f$ w punkcie $c$ i oznaczamy jak wyżej.

**Uwaga 3.43** Zawsze przestrzeń Banacha $F$ nad $\mathbb{K}$ możemy potraktować jako przestrzeń Banacha nad $\mathbb{R}$ (!). Wtedy, jak bardzo łatwo zauważyć, jeśli $f$ jest różniczkowalna w punkcie $c \in A$, to mamy w sytuacji jak w powyższych definicjach

$$f'(c) = f'_+(c) = f'_-(c)$$

## 2. Podstawowa wersja twierdzenia o przyrostach

**Twierdzenie 3.44 (o przyrostach)**

Z: $F$ - przestrzeń Banacha nad $\mathbb{K}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

$f: [a,b] \longrightarrow F$ ciągłe

$g: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ciągłe

$S$ - podzbiór co najwyżej przeliczalny $[a,b]$

$\forall t \in [a,b] \setminus S$: istnieją $f_+'(t)$ i $g_+'(t)$ oraz $\|f_+'(t)\| \leq g_+'(t)$

T: $\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$

D: Do zbioru $S$ musimy wtączyć $b$ zas bez straty ogólności możemy zatożyć, że $S$ jest przeliczalny. Dalszy dowód poprowadzimy w trzech etapach.

Etap I. Niech $S = \{t_\nu : \nu \in \mathbb{N}\}$, $t_\nu \neq t_\mu$ dla $\nu \neq \mu$.

Określamy funkcję

$$M: [a,b] \ni t \longrightarrow M(t) = \begin{cases} \sum_{\{\nu \in \mathbb{N} : t_\nu < t\}} 2^{-\nu}, & t > \inf S, \\ 0, & t \leq \inf S. \end{cases}$$

Łatwo sprawdzamy następujące jej własności:

(a) $M(a) = 0$,

(b) $M$ jest rosnąca (słabo).

(c) $\nu \in \mathbb{N}$, $t_\nu < t \Rightarrow M(t_\nu) + 2^{-\nu} \leq M(t)$,

(d) $M(t) \leq M(b) < 2$ dla $t \in [a,b]$

Etap II. Ustalmy dowolne $\varepsilon > 0$. Niech

$$T := \{t \in [a,b] : \|f(t)-f(a)\| \leq g(t)-g(a)+\varepsilon(t-a)+\varepsilon M(t)\}$$

Dążymy do pokazania, że $b \in T$ - aby w ostatnim etapie z $\varepsilon$ przejść do 0.

Zauważmy, że

$a \in T \Rightarrow T \neq \emptyset$ oczywiście

$c := \sup T \in [a,b]$

Na wstępie pokażemy, że $c \in T$. Istnieje ciąg rosnący $c_n \to c$ $(n \to +\infty)$ taki, że $c_n \in T$ dla $n \in \mathbb{N}$ czyli $\|f(c_n)-f(a)\| \leq g(c_n)-g(a)+\varepsilon(c_n-a)+\varepsilon M(c_n)$

Ze względu na monotoniczność $M$ dla $n \in \mathbb{N}$

$$\|f(c_n)-f(a)\| \leq g(c_n)-g(a)+\varepsilon(c-a)+\varepsilon M(c)$$
dla $n \in \mathbb{N}$

Korzystając z ciągłości $f$ i $g$ dostajemy w granicy

$$\|f(c)-f(a)\| \leq g(c)-g(a)+\varepsilon(c-a)+\varepsilon M(c).$$

czyli $c \in T$.

Pokażemy teraz, że $c = b$

Przypuśćmy, że $c < b$, dojdziemy do sprzeczności w dwóch możliwych sytuacjach. $c \in S$ i $c \notin S$.

1) $c \in S$, $c = t_\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$. Z ciągłości $f$ i $g$ znajdziemy $c' \in (c,b]$ takie, że

$$\|f(c')-f(a)\| \leq g(c')-g(a)+\varepsilon(c'-a)+\varepsilon 2^{-\nu}+\varepsilon M(c)$$

Na podst własności (c) funkcji $M$

$\|f(c')-f(a)\| \leq g(c')-g(a)+\varepsilon(c'-a)+\varepsilon M(c')$. czyli $c' \in T$

sprzeczność

e) $c \notin S$. Istnieje więc prawe pochodne. $f_+'(c), g_+'(c)$ oraz $c' > c$ t. że.

$$\frac{\|f(c') - f(c)\|}{c' - c} \leq \|f_+'(c)\| + \varepsilon/2.$$

$$\frac{g(c') - g(c)}{c' - c} \geq g_+'(c) - \varepsilon/2.$$

Korzystając z założenia twierdzenia dostajemy

$$\|f(c') - f(c)\| \leq g(c') - g(c) + \varepsilon(c' - c).$$

$$\|f(c') - f(a)\| \leq \|f(c') - f(c)\| + \|f(c) - f(a)\|$$
$$\leq g(c') - g(c) + \varepsilon(c' - c) + g(c) - g(a) + \varepsilon(c - a) + \varepsilon M(c)$$
$$= g(c') - g(a) + \varepsilon(c' - a) + \varepsilon M(c) \leq$$
$$\leq g(c') - g(a) + \varepsilon(c' - a) + \varepsilon M(c')$$

To daje $c' \in T'$ czyli spełnia założenia $c$

Zatem $c = b$

Etap III. Z poprzedniego etapu mamy, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a) + \varepsilon(b - a) + \varepsilon M(b)$$

Zatem

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$$

co kończy dowód twierdzenia.

Uwagi 3.45

(1) Analogiczne twierdzenie można wykazać dla pochodnych lewostronnych wykorzystując podaną wersję dla funkcji:

$[-b, -a] \ni t \longrightarrow -f(-t) \in F$

$[-b, -a] \ni t \longrightarrow -g(-t) \in \mathbb{R}$

(2) Wykazane twierdzenie ma ścisły związek z klasycznym Twierdzeniem Lagrange'a, pozwalając przepuścić ocenę wartości funkcji gdy mamy informację o pochodnych.

(3) Poza rachunkiem różniczkowym Twierdzenie 3.44 jest wykorzystywane w teorii całki Cauchy'ego. Aktualnie wykorzystamy wersję dla funkcji różniczkowalnych w każdym punkcie. Przy całce Cauchy'ego pojawiły się tak zwane pierwotne funkcji, które są ciągłe i różniczkowalne poza zbiorem co najwyżej przeliczalnym. Pozwala to na wygodne stosowanie 3.44 we wszelkich wymaganych szacowaniach.

## 3. Specjalne wersje twierdzenia o przyrostach.

Rozważania rozpoczniemy od twierdzenia, które jest analogonem 3.38, ale daje dobre szacowanie przyrostu funkcji o wartościach w przestrzeni Banacha.

**Twierdzenie 3.46**

Z: $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f: [a,b] \longrightarrow F$ ciągłe, gdzie $F$ jest przestrzenią Banacha nad $\mathbb{R}$
$f|(a,b)$ jest różniczkowalna, $M \geq 0$
$\forall t \in (a,b): \|f'(t)\| \leq M$.

T: $\|f(b) - f(a)\| \leq M(b-a)$

D: Do funkcji ciągłych:
$f: [a,b] \longrightarrow F$
$g: [a,b] \ni t \longrightarrow g(t) = Mt \in \mathbb{R}$.
stosujemy 3.44 dla $S = \{a, b\}$, mając informację, że $\|f'(t)\| \leq M = g'(t)$ dla $t \in (a,b)$.
Dostajemy informację, że.

$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a) = M(b-a)$, czyli tezę naszego twierdzenia.

Kolejne twierdzenie, będące prostą konsekwencją wykazanego Tw. 3.46, jest bardzo często wykorzystywane w analizie - ma ten naturalny odpowiednik w analizie wielu zmiennych.

## Twierdzenie 3.47

Z: $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $F$ - p. Banacha nad $\mathbb{R}$.
$f: (a,b) \longrightarrow F$ jest różniczkowalne.
$\forall t \in (a,b): f'(t) = 0$

T: $f$ - jest odwzorowaniem stałym.

D: Dla dowolnych $t', t'' \in (a,b)$ takich, że $t' < t''$
dostajemy z 3.46
$$\|f(t') - f(t'')\| \leq 0 \cdot (t'' - t') = 0.$$
czyli $f(t') = f(t'')$, co kończy dowód.

## Twierdzenie 3.48

Z: $I$ - przedział otwarty w $\mathbb{R}$, $I \neq \emptyset$
$F$ - przestrzeń Banacha nad $\mathbb{R}$
$f: I \longrightarrow F$ różniczkowalna.
$a, h \in \mathbb{R}$, takie, że $a, a+h \in I$
$J$ - przedział domknięty o końcach $a, a+h$.
$f' | J$ - jest ograniczona.

T: $\|f(a+h) - f(a) - f'(a)h\| \leq (\sup_{t \in J} \|f'(t) - f'(a)\|) |h|$

D: Rozważamy funkcję

$$H: I \ni t \longrightarrow H(t) = f(t) - f'(a)(t-a) \in F,$$
dla której $H'(t) = f'(t) - f'(a)$. Określmy.
$M = \sup_{t \in J} \|H'(t)\| = (\sup_{t \in J} \|f'(t) - f'(a)\|)$. Z 3.46
$\|H(a+h) - H(a)\| = \|f(a+h) - f(a) - f'(a) \cdot h\| \leq M|h|$ co kończy dowód.

Rozważania tej części zakończymy rozszerzeniem Twierdzenia 3.46 do przypadku dowolnego ciała.

## Twierdzenie 3.49

Z: $A \subset \mathbb{K}$, $F$ - przestrzeń Banacha nad $\mathbb{K}$.
$a, b \in \mathbb{K}$, $[a,b] = \{a + t(b-a) : t \in [0,1]\} \subset A$
$f$ - jest różniczkowalne w punktach $z \in [a,b]$
$M \geq 0$, $\forall z \in [a,b] : \|f'(z)\| \leq M$

T: $\|f(b) - f(a)\| \leq M|b-a|$

D: W przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ twierdzenie dostajemy natychmiast z 3.46
W przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ rozpatrujemy funkcję.

$$\tilde{f} : [0,1] \ni t \longrightarrow \tilde{f}(t) = f(a + t(b-a)) \in F$$

Jest to odwzorowanie ciągłe, a ponadto jest ono różniczkowalne na $(0,1)$ i dostajemy równość
$\tilde{f}'(t) = f'(a + t(b-a))(b-a)$ (ćw.)

Zatem norma pochodnej $\|\tilde{f}'(t)\|$ jest szacowana dla $t \in (0,1)$ przez $M|b-a|$. Teraz na podstawie 3.46 dostajemy.

$$\|\tilde{f}(1) - \tilde{f}(0)\| \leq M|b-a|,$$
$$\|f(b) - f(a)\|$$

co kończy dowód.

## §5 Wzór Taylora.

### 1. Wzór Taylora z reszty Peano.

**Twierdzenie 3.50**

Z: $A \subset \mathbb{K}$, $a \in A$, $F$ - przestrzeń Banacha nad $\mathbb{K}$.
$n \geq 1$, $f: A \longrightarrow F$ jest $n$-krotnie różniczkowalna w punkcie $a$.

T: Istnieje $\xi: A-a \longrightarrow F$, $\xi(0)=0$, $\xi$-ciągła w $0$, taka że dla $h \in A-a$.

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{1!}f'(a)h + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n + \xi(h)|h|^n$$

D: Określamy $T_n(h) = f(a) + \frac{1}{1!}f'(a)h + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n$

oraz

$$\xi(h) = \begin{cases} 0, & h=0, \\ \frac{1}{|h|^n}(f(a+h) - T_n(h)), & h \neq 0. \end{cases}$$

Mamy pokazać, że $\xi: A-a \longrightarrow F$ jest ciągła w p. 0.
Dla $n=1$ mamy równość

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \xi(h)|h|.$$

Ciągłość $\xi$ w punkcie $0$, przy $\xi(0)=0$ to jedna z równoważnych wersji definicji pochodnej w p. a.

Dalej dowód przeprowadzimy indukcyjnie.
Niech $n \geq 2$ i przypuśćmy, że twierdzenie zachodzi dla $n-1$. Zastosujemy je więc dla.

$f': A^{(1)} \longrightarrow F$, która jest w punkcie $a$. $n-1$ krotnie różniczkowalna.

Na podstawie założenia indukcyjnego mamy

$$f'(a+h) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} (f')^{(k)}(a) h^k + \xi_1(h)|h|^{n-1}$$

gdzie $\xi_1 : A^{(1)} - a \to F$, $\xi_1(0) = 0$, $\xi_1$ jest ciągła w $0$,

więc $$f'(a+h) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(a) h^k + \xi_1(h)|h|^{n-1}$$

Wybierzmy $\varepsilon > 0$, a następnie $r > 0$ tak aby dla $|h| < r$ mieć $\|\xi_1(h)\| < \varepsilon$ i określmy funkcję

$$R : K(0,r) \ni h \to f(a+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) h^k \in F$$

Wtedy otrzymujemy dla $s \in K(0,r)$

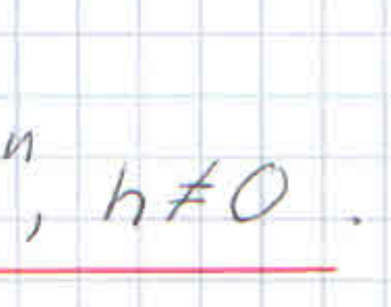
$$R'(s) = f'(a+s) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} f^{(k)}(a) s^{k-1} =$$

$$= f'(a+s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(a) s^k$$

Zatem dla $s \in K(0,r)$ mamy $\|R'(s)\| \leq \varepsilon |s|^{n-1}$

Wtedy dla $h \in K(0,r)$ dostajemy z 3.49 na odcinku $[0,h]$

$$\|R(h) - R(0)\| \leq \varepsilon |h|^{n-1} |h| = \varepsilon |h|^n$$




Zatem $\|\xi(h)\| \leq \varepsilon$ dla $|h| < r$, co kończy dowód.

Uwaga 3.51 Resztę Peano we wzorze Taylora można zapisać w formie $\tilde{\xi}(h) h^n$ gdzie $\tilde{\xi} : A - a \to F$ jest taka, że $\tilde{\xi}(0) = 0$ i $\tilde{\xi}$ - ciągła w punkcie $0$. Wystarczy przyjąć:

$$\tilde{\xi}(h) = \begin{cases} 0, & h = 0 \\ \xi(h) \left(\frac{|h|}{h}\right)^n, & h \neq 0 \end{cases}$$

## 2. Wzory Taylora z resztami Lagrange'a i Cauchy'ego

**Lemat 3.52**

Z: $U$ - otwarty w $\mathbb{R}$, $[0,1] \subset U$, $n \in \mathbb{N}$

$v: U \longrightarrow \mathbb{R}$ jest $n+1$ krotnie różniczkowalna.

$\varphi: U \ni t \longrightarrow v(t) + \frac{1-t}{1!} v'(t) + \ldots + \frac{(1-t)^n}{n!} v^{(n)}(t) \in \mathbb{R}$

T: (1) $\varphi$ jest różniczkowalna;

(2) $\varphi'(t) = \frac{(1-t)^n}{n!} v^{(n+1)}(t)$ dla $t \in U$,

(3) $\exists \Theta \in (0,1): \varphi(1) - \varphi(0) = \frac{1}{(n+1)!} v^{(n+1)}(\Theta)$,

(4) $\exists \Theta' \in (0,1): \varphi(1) - \varphi(0) = \frac{(1-\Theta')^n}{n!} v^{(n+1)}(\Theta')$.

D: Punkty (1) i (2) wynikają z prostego policzenia.

$$\varphi'(t) = v'(t) + \left(-v'(t) + \frac{(1-t)}{1!} v''(t)\right) + \left(-\frac{(1-t)}{1!} v''(t) + \frac{(1-t)^2}{2!} v'''(t)\right) + \ldots + \left(-\frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} v^{(n)}(t) + \frac{(1-t)^n}{n!} v^{(n+1)}(t)\right) =$$

$$= \frac{(1-t)^n}{n!} v^{(n+1)}(t) \quad \text{dla } t \in U$$

Punkt (4) tezy wynika z Twierdzenia Lagrange'a.

gdyż $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\Theta')$ dla pewnego $\Theta' \in (0,1)$,

skąd $$\varphi(1) - \varphi(0) = \frac{(1-\Theta')^n}{n!} v^{(n+1)}(\Theta')$$

Punkt (3) wynika z Twierdzenia Cauchy'ego w wersji 3.28 zastosowanego do funkcji $\varphi|[0,1]: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ i $\psi: [0,1] \ni t \longrightarrow (1-t)^{n+1} \in \mathbb{R}$

W tej sytuacji mamy $\psi'(t) = -(n+1)(1-t)^n$, zatem istnieje $\Theta \in (0,1)$ takie, że

$$\frac{\varphi(1)-\varphi(0)}{\psi(1)-\psi(0)} = \frac{\varphi'(\Theta)}{\psi'(\Theta)}$$

Dostajemy więc równość

$$\varphi(1)-\varphi(0) = \frac{V^{(n+1)}(\Theta)}{n!}\,\frac{(1-\Theta)^n}{(n+1)(1-\Theta)^n} = \frac{1}{(n+1)!}V^{(n+1)}(\Theta)$$

dla pewnego $\Theta \in (0,1)$, co kończy dowód.

Po tym przygotowaniu dostajemy dwa ważne twierdzenia o wzorze Taylora ze specjalnymi resztami.

Twierdzenie 3.53 (Wzór Taylora z resztą Lagrange'a).

Z: $\Omega$ otwarty w $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

$f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ jest $n+1$ krotnie różniczkowalna

$a, h \in \mathbb{R}$, $[a, a+h]$ jest odcinkiem zawartym w $\Omega$

T: Istnieje $\Theta \in (0,1)$ takie, że

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{1!}f'(a)h + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\Theta h)h^{n+1}$$

D: Określmy $U := \{t \in \mathbb{R} : a+th \in \Omega\}$ oraz

$$V : U \ni t \longrightarrow f(a+th) \in \mathbb{R}$$

Funkcja $\varphi$ spełnia założenia Lematu 3.52, więc na podstawie punktu (3) jego tezy dostajemy

$$\exists \Theta \in (0,1) : \varphi(1)-\varphi(0) = \frac{1}{(n+1)!}V^{(n+1)}(\Theta)$$

W tej sytuacji $V^{(k)}(t) = f^{(k)}(a+th)h^k$, $k = 1, \ldots, n+1$

więc

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)h^k + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\Theta h)h^{n+1}$$

co kończy dowód.

Twierdzenie 3.54 (Wzór Taylora z resztą Cauchy'ego)

Z: $\Omega$ otwarty w $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

$f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ jest $n+1$ krotnie różniczkowalna.

$a, h \in \mathbb{R}$, odcinek $[a, a+h]$ zawiera się w $\Omega$

T: Istnieje $\Theta' \in (0,1)$ takie, że

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)h + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)h^n + \frac{(1-\Theta')^n}{n!} f^{(n+1)}(a+\Theta' h)h^{n+1}$$

D: Postępujemy analogicznie jak w 3.53 oznaczając $V = \{t \in \mathbb{R} : a+th \in \Omega\}$ $v: V \ni t \longrightarrow v(t) = f(a+th) \in \mathbb{R}$. Stosując następnie Lemat 3.52 (4) dostajemy tutaj tezę. (Ćw.)

Przykład 3.55

Rozpatrujemy funkcję

$$f: (-1, +\infty) \ni x \longrightarrow f(x) = \ln(x+1) \in \mathbb{R},$$

otrzymując $f'(x) = \frac{1}{x+1}$, $f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$

Następnie stosujemy 3.53 w punkcie $a = 0$ dla przyrostu $h \in (-1, +\infty)$. Mamy w tej sytuacji:

$f(a) = 0$, $f'(a) = 1$, $f''(a+\Theta h) = -\frac{1}{(\Theta h+1)^2}$ dla $\Theta \in (0,1)$

więc otrzymujemy

$$\exists \Theta \in (0,1): \ln(h+1) = h - \frac{1}{2!} \frac{h^2}{(\Theta h+1)^2}$$

Zatem dla $h \in (-1, +\infty)$ istnieje $\Theta \in (0,1)$ takie, że

$$h - \ln(1+h) = \frac{1}{2} \frac{h^2}{(\Theta h+1)^2}$$

Stąd $\forall h>0 : 0 < h - \ln(1+h) < \frac{h^2}{2}$, więc przyjmując $h = \frac{1}{n}$ dla $n \geq 1$ dostajemy

$$0 < \frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2n^2}.$$

Z nierówności tych wynika, że szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n}\right)$ ma wyrazy nieujemne i jest zbieżny.

Wnioskujemy stąd, że ciąg jego sum częściowych $s_n = \frac{1}{1} + \ldots + \frac{1}{n} - \left(\ln\frac{2}{1} + \ldots + \ln\frac{n+1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$. jest zbieżny do granicy dodatniej $\gamma$.

Oznaczmy na koniec $\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n = s_n + \ln\frac{n+1}{n}$, $n \geq 1$
Skoro $\ln\frac{n+1}{n} \to 0$ $(n \to +\infty)$ więc otrzymujemy zbieżność ciągu $\{\gamma_n\}$ do pewnej granicy dodatniej $\gamma$, którą nazywa się stałą Eulera. $\gamma \approx 0{,}577215664\ldots$

Czasami spotykamy zapis dla $n \geq 1$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma_n \text{ gdzie } \gamma_n \to \gamma \ (n \to +\infty).$$

## 3. Szeregi Taylora.

Niech $F$ będzie przestrzenią Banacha nad $\mathbb{K}$, $A \subset \mathbb{K}$ $f : A \to F$ ma w punkcie $a \in A$ wszystkie pochodne. $f^{(n)}(a)$ dla $n \in \mathbb{N}$.

W tej sytuacji w naturalny sposób pojawia się związany z tym punktem szereg potęgowy

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) h^n \text{ lub w innym zapisie } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(z-a)^n$$

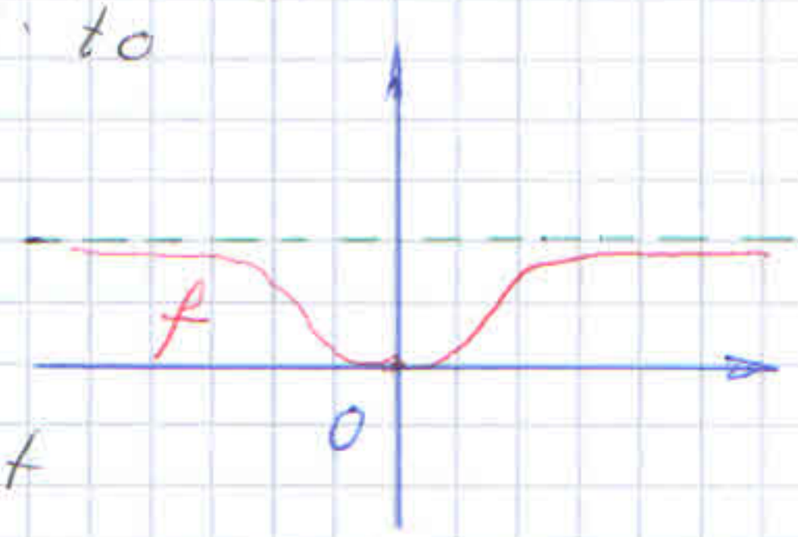
nazywany szeregiem Taylora $f$ w punkcie $a$. Mamy. wtedy podstawowe pytanie o związku tego szeregu z wartościami $f(a+h)$. dla $h \in A-a$ lub $f(z)$ dla $z \in A$.

Możemy w tym zakresie spotkać trzy przypadki:

I. Szereg Taylora jest zbieżny w pewnym otoczeniu punktu a do wyjściowej funkcji. Jeśli $F = \mathbb{K}$, to wtedy w pewnym otoczeniu a $f$ jest funkcją analityczną

II. Szereg Taylora jest w pewnym otoczeniu zbieżny, ale jego suma jest różna od funkcji wyjściowej. Typowy przykład takiej sytuacji to

$$f: \mathbb{R} \ni x \longrightarrow \begin{cases} 0, & x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \end{cases} \in \mathbb{R}$$




Można pokazać (ćw.), że $f$ jest klasy $C^\infty$, i ma zerowy szereg Taylora w punkcie $a = 0$.

III. Szereg Taylora nie jest zbieżny w żadnym otoczeniu a. Zdarza się również dla funkcji $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ klasy $C^\infty$. Znane historyczne Twierdzenie Borela mówi, że

Dla każdego, rzeczywistego (!) szeregu potęgowego

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n h^n$$

istnieje funkcja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ klasy $C^\infty$ taka, że szereg ten jest jej szeregiem Taylora w punkcie 0

Dla $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sytuacja z Twierdzenia Borela nie może mieć miejsca bo każda funkcja $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ różniczkowalna jest analityczna.

# §6. Ekstrema lokalne funkcji rzeczywistych.

## 1. Podstawowe pojęcia.

Niech $(X,d)$ będzie przestrzenią metryczną
$f: X \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in X$

**Definicja 3.56** Mówimy, że funkcja $f$ ma w punkcie $a$:

(1) *maksimum (minimum) lokalne* jeśli
$\exists U\text{-ot.a } \forall x \in U: f(a) \geq f(x)$ $(f(a) \leq f(x))$,

(2) *ekstremum lokalne* jeśli $f$ ma w punkcie $a$
maksimum lub minimum lokalne,

(3) *silne maksimum (minimum) lokalne* jeśli
$\exists U\text{-ot a } \forall x \in U \setminus \{a\}: f(a) > f(x)$ $(f(a) < f(x))$,

(4) *silne ekstremum lokalne* jeśli $f$ ma w punkcie $a$
silne maksimum lokalne lub silne minimum lokalne

**Uwaga 3.57** Podobne definicje możemy wprowadzać dla funkcji o wartościach w $\overline{\mathbb{R}}$ czy innym zbiorze liniowo uporządkowanym. W zakresie rachunku różniczkowego ograniczymy się do funkcji $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie $A \subset \mathbb{R}$ jest rozpatrywany z metryką indukowaną z ciała $\mathbb{R}$.

## 2. Warunki konieczne i wystarczające istnienia ekstremów lokalnych.

**Twierdzenie 3.58**

Z: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, $a \in A$, $n \geq 1$

$f$ jest $n$-krotnie różniczkowalna w punkcie $a$

$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$, $f^{(n)}(a) \neq 0$

T: (1) Jeśli $n$ jest nieparzyste, to funkcja $f$ nie ma ekstremum lokalnego w punkcie $a$.

(2) Jeśli $n$ jest parzyste oraz $f^{(n)}(a) > 0$ ($f^{(n)}(a) < 0$), to $f$ ma silne minimum (maksimum) lokalne w $a$.

D: Korzystając ze wzoru Taylora z resztą Peano postaci opisanej w 3.51 dostajemy

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) h^n + \tilde{\xi}(h) h^n$$

dla $h \in A - a$, gdzie $\tilde{\xi}: A - a \to \mathbb{R}$, $\tilde{\xi}(0) = 0$, $\tilde{\xi}$ - ciągła w 0.

Stąd dostajemy przedstawienie

$$f(a+h) = f(a) + \left(\frac{1}{n!} f^{(n)}(a) + \tilde{\xi}(h)\right) h^n$$

Możemy tak dobrać $r > 0$, aby dla $|h| < r$ znak wyrażenia $\frac{1}{n!} f^{(n)}(a) + \tilde{\xi}(h)$ był stały, taki jak znak $f^{(n)}(a)$. To natychmiast kończy dowód.

**Uwaga 3.59** Jeśli zastosujemy 3.58 dla $n = 1$, to dostajemy klasyczny warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego funkcji różniczkowalnej w punkcie $a$ czyli $f'(a) = 0$.

# §7. Funkcje monotoniczne

## 1. Podstawowe pojęcia.

Niech $A \subset \mathbb{R}$ oraz $f: A \to \mathbb{R}$

**Definicja 3.60** Mówimy, że na $A$ funkcja $f$ jest:

(1) *rosnąca (malejąca)* jeśli
$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$ $(f(x_1) \geqslant f(x_2))$

(2) *monotoniczna* jeśli na $A$ jest rosnąca lub malejąca,

(3) *silnie rosnąca (malejąca)* jeśli
$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$

(4) *silnie monotoniczna* jeśli jest silnie rosnąca lub silnie malejąca na $A$.

## 2. Monotoniczność funkcji różniczkowalnej.

Rozważania rozpoczniemy od pustego faktu.

**Twierdzenie 3.61**
$Z$: $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ciągłe
$f$ jest różniczkowalna w punktach $(a,b)$.
$\forall t \in (a,b) : f'(t) = 0$
$T$: $f$ jest stała
$D$: Dla dowolnego $x \in [a,b]$, z twierdzenia Lagrange'a dostajemy $f(x) = f(a)$, co kończy dowód.

Twierdzenie 3.62

Z: $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ ciągłe.
$f|(a,b)$ różniczkowalna.

T: Następujące warunki są równoważne.
(1) $f$ jest rosnąca (malejąca).
(2) $\forall t \in (a,b): f'(t) \geq 0$ $(f'(t) \leq 0)$

D: (1) $\Rightarrow$ (2) Wynika wprost z definicji.
(2) $\Rightarrow$ (1) Prosty wniosek z Tw. Lagrange'a.

To, jaka jest różnica między monotonicznością, a silną monotonicznością funkcji różniczkowalnych wyjaśnia fakt następujący

Twierdzenie 3.63

Z: $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ ciągła, monotoniczna
$f|(a,b)$ różniczkowalna.

T: Następujące warunki są równoważne:
(1) $f$ jest silnie monotoniczna.
(2) $\operatorname{int}\{x \in (a,b): f'(x)=0\} = \emptyset$

D: Funkcja monotoniczna na $[a,b]$ nie jest na tym przedziale silnie monotoniczna dokładnie wtedy, gdy jest stała na pewnym przedziale $[c,d] \subset [a,b]$ gdzie $c<d$. Stąd tutaj wynika równoważność warunków (1) i (2).

# §8. Funkcje wypukłe i funkcje wklęsłe

## 1. Podstawowe pojęcia i fakty

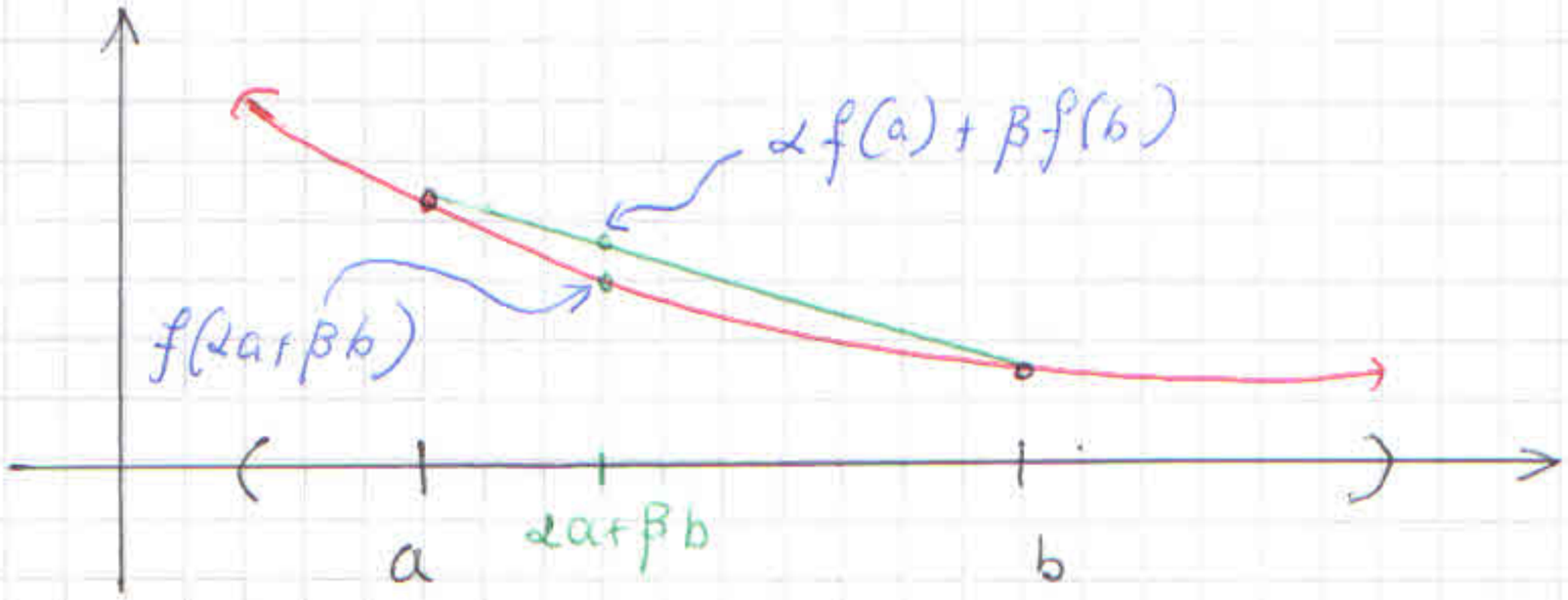
$I$ - przedział w $\mathbb{R}$, $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$

Będziemy rozpatrywali następujące obszary

$$W = \{(a,b,\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^4 : a,b \in I,\ \alpha,\beta \geq 0,\ \alpha+\beta=1\}$$
$$W^* = \{(a,b,\alpha,\beta) \in W : a \neq b,\ \alpha > 0,\ \beta > 0\}.$$

Dla takich obszarów będziemy porównywać

$$f(\alpha a+\beta b) \quad \text{oraz} \quad \alpha f(a)+\beta f(b)$$




**Uwaga 3.64** Jeśli $(a,b,\alpha,\beta) \in W \setminus W^*$, to $f(\alpha a+\beta b) = \alpha f(a)+\beta f(b)$.

**Definicja 3.65** Funkcję $f$ nazywamy na przedz. $I$:

(1) wypukłą jeśli $\forall (a,b,\alpha,\beta) \in W^*: f(\alpha a+\beta b) \leq \alpha f(a)+\beta f(b)$;

(2) silnie wypukłą jeśli $\forall (a,b,\alpha,\beta) \in W^*: f(\alpha a+\beta b) < \alpha f(a)+\beta f(b)$;

(3) wklęsłą, jeśli $\forall (a,b,\alpha,\beta) \in W^*: f(\alpha a+\beta b) \geq \alpha f(a)+\beta f(b)$,

(4) silnie wklęsłą jeśli $\forall (a,b,\alpha,\beta) \in W^*: f(\alpha a+\beta b) > \alpha f(a)+\beta f(b)$.

Uwaga 3.66 W punktach (1) i (3) możemy równoważnie zastąpić $W^*$ przez $W$.

Uwaga 3.67 Spotykamy również pojęcia wypukłości i wklęsłości w sensie Jensena gdzie warunki są rozpatrywane wyłącznie dla $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$. Implikacja dająca z wypukłości i wklęsłości te pojęcia w sensie Jensena jest oczywista. Implikacje odwrotne są fałszywe. Pokażemy to w końcu tej części wykładu.

Uwaga 3.68 Wypukłość bywa również opisywana geometrycznie. Wprowadźmy dla $A \subset \mathbb{R}$ oraz $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ dwa zbiory.

$N_f = \{(x,y) \in A \times \mathbb{R} : y \geq f(x)\}$ - tzw. nadwykres $f$
$P_f = \{(x,y) \in A \times \mathbb{R} : y \leq f(x)\}$ - tzw. podwykres $f$

Jeśli teraz $A = I$ - jest przedziałem, to pojawiają się opisy:

$f$ - jest wypukła $\Leftrightarrow$ $N_f$ jest zbiorem wypukłym.
$f$ - jest wklęsła $\Leftrightarrow$ $P_f$ jest zbiorem wypukłym.

Przypomnijmy, że $C \subset \mathbb{R}^2$ nazywamy wypukłym, gdy $\forall a,b \in C : [a,b] \subset C$ (odcinek).

W dalszym ciągu zajmować będziemy się badaniem funkcji wypukłych. Aby uzyskać odpowiednika dla funkcji wklęsłych wystarczy zamienić $f$ na $-f$.

Z podstawowych faktów z tego zakresu warto odnotować następującą nierówność (dowód ćw.)

Twierdzenie 3.69 (Nierówność Jensena).

Z: $I$ - przedział w $\mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$ wypukła.
$a_1, \dots, a_k \in I$, $k \geq 1$.
$\alpha_1, \dots, \alpha_k \geq 0$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$.

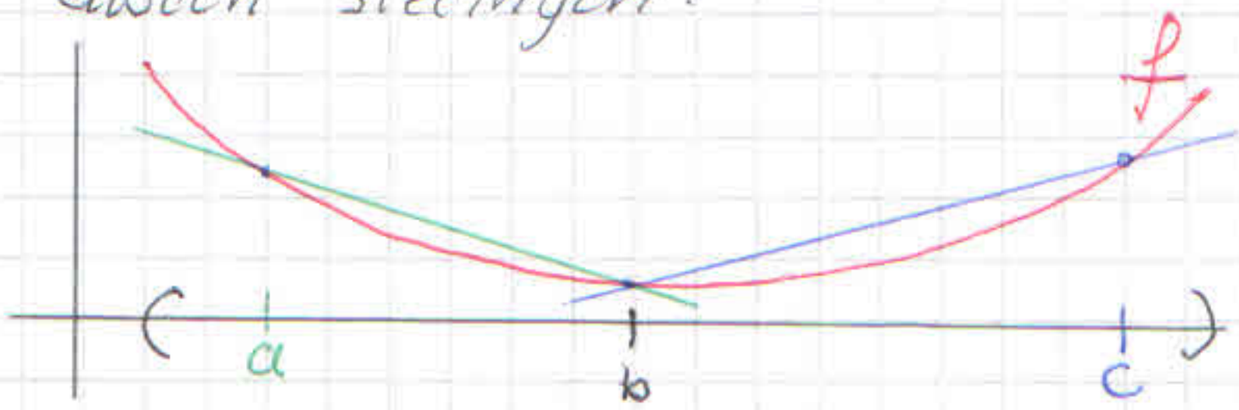
T: (1) $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k \in I$,
(2) $f(\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k) \leq \alpha_1 f(a_1) + \dots + \alpha_k f(a_k)$.

W dalszych rozważaniach wykorzystamy następujący kluczowy lemat

Lemat 3.70

Z: $I$ - niepusty przedział w $\mathbb{R}$
T: Następujące warunki są równoważne:
(1) $f$ wypukła (silnie wypukła).
(2) $(a, b, c \in I, a < b < c) \Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \underset{(<)}{\leq} \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$

D: W punkcie (2) porównujemy współczynniki kierunkowe dwóch sieczных.



Mamy

$$b = a + \frac{b-a}{c-a}(c-a) =$$

$$= a\left(1 - \frac{b-a}{c-a}\right) + c\,\frac{b-a}{c-a} = a\cdot\frac{c-b}{c-a} + c\,\frac{b-a}{c-a}$$

Przyjmijmy $\alpha = \frac{c-b}{c-a}$, $\beta = \frac{b-a}{c-a}$ dostając.

$(a, c, \alpha, \beta) \in W^*$ jak w wyjściowej definicji.

Przechodząc do dowodu wypukłości jest równoważna nierówność:

$$\underline{f(\alpha a + \beta c) \leq \alpha f(a) + \beta f(c).}$$

a silna wypukłości odpowiednio silnej nierówność.

W wersji podstawowej mamy

$$f(b) \leqslant \frac{c-b}{c-a} f(a) + \frac{b-a}{c-a} f(c).$$

$$(c-a) f(b) \leqslant (c-b) f(a) + (b-a) f(c).$$

$$(c-b) f(b) + (b-a) f(b) \leqslant (c-b) f(a) + (b-a) f(c).$$

$$(c-b)(f(b) - f(a)) \leqslant (b-a)(f(c) - f(b))$$

$$\underline{\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.}$$

Analogicznie dostajemy silną nierówność przy silnej wypukłości. To kończy dowód.

Twierdzenie 3.71.

Z: $I$ - przedział w $\mathbb{R}$, $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ wypukła.

T: $f|_{\text{int}I}$ jest funkcją ciągłą.

D: Niech $b \in \text{int} I$. Znajdziemy wtedy liczb $\tilde{a}, a, c, \tilde{c}$ aby $\tilde{a} < a < b < c < \tilde{c}$ oraz $[\tilde{a}, \tilde{c}] \subset I$. Weźmy teraz $x, y \in (a, c)$, $x < y$ i zauważmy, że dostajemy wtedy

$$\tilde{a} < a < x < y < c < \tilde{c}$$

dla którego z 3.70 otrzymujemy.

$$A = \frac{f(a) - f(\tilde{a})}{a - \tilde{a}} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(\tilde{c}) - f(c)}{\tilde{c} - c} = C$$

Jeśli $M = \max\{|A|, |C|\}$ to dostajemy

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} \leq M \quad \text{dla } x, y \in (a, c).$$

Więc $|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|$ dla $x, y \in (a, c)$.
Czyli $f|_{(a,c)}$ jest lipschitzowska. ze stałą $M$ a zatem ciągła.

Uwaga 3.72 Pokazaliśmy, że $f|_{\text{int}I}$ jest lokalnie odwzorowaniem lipschitzowskim.

Przykład 3.73 Niech $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie liniowe nad $\mathbb{Q}$ ale nie nad $\mathbb{R}$. Wtedy $f$ - jest wypukła w sensie Jensena lecz nie może być wypukła. bo nie jest ciągła. (Ćw. - dopuszczalne szkicowy).

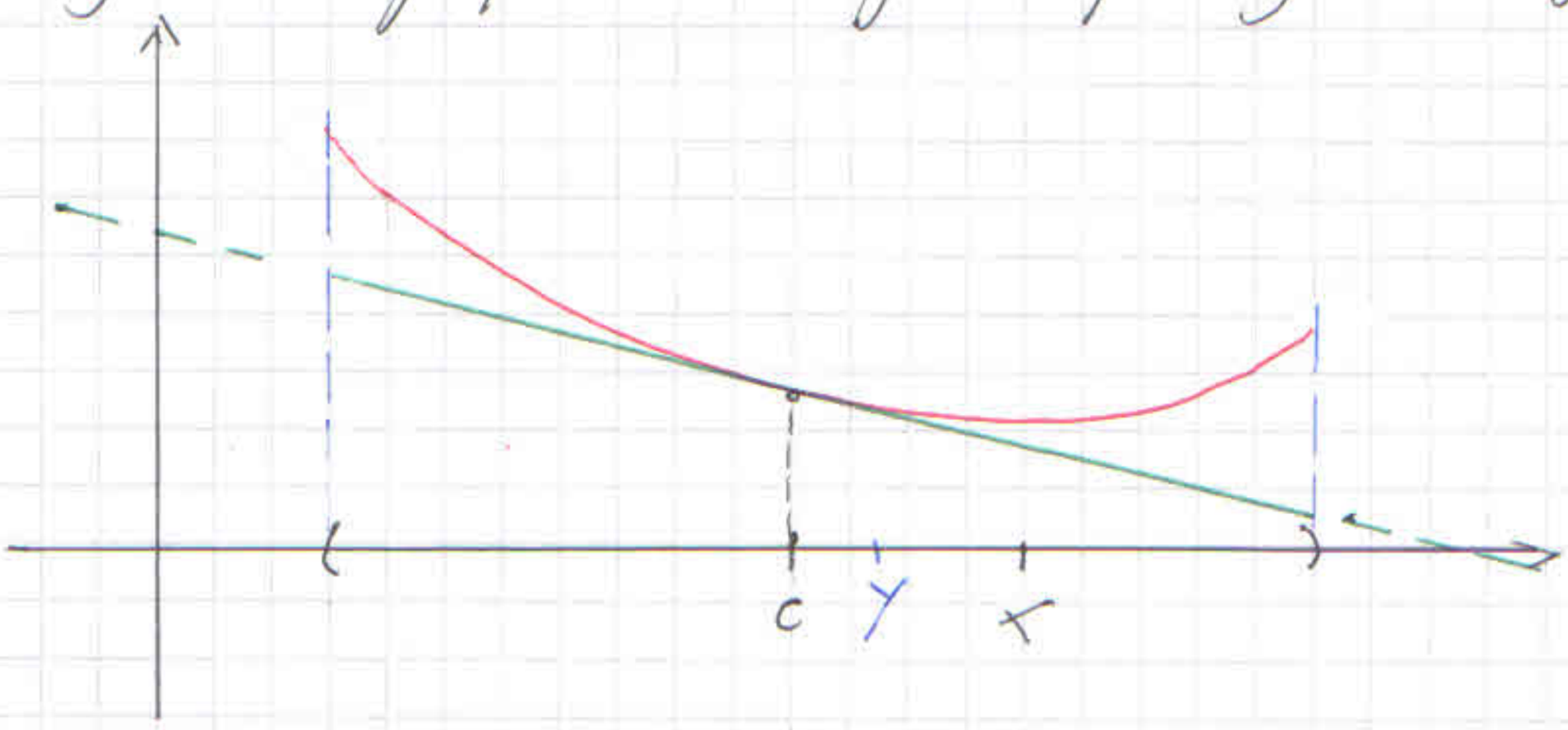
## 2. Wypukłość funkcji różniczkowalnej.

### Twierdzenie 3.74

Z: $I$ - przedział w $\mathbb{R}$, $I \neq \emptyset$
$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ wypukła, $c \in \operatorname{int} I$
$f$ - jest różniczkowalna w punkcie $c$

T: $\forall x \in I : f(x) \geq f'(c)(x-c) + f(c)$.

D: Mamy następującą interpretację geometryczną.




Jeśli $x > c$, to dla $y \in (c, x)$ mamy.

$$\frac{f(y) - f(c)}{y - c} \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

Przechodząc $y \longrightarrow c$ i korzystając z ciągłości $f$ w punkcie $c$ dostajemy.

$$f'(c) \leq \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Stąd nierówność z tezy. Analogicznie postępujemy dla $x < c$. Dla $x = c$ nierówność zawsze zachodzi.

## Twierdzenie 3.75

Zał.: $I$ - otwarty, niepusty przedział w $\mathbb{R}$.
$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ różniczkowalna.

Teza: (1) $f$ - jest wypukła $\Leftrightarrow$ $f'$ jest rosnąca.
(2) $f$ - jest silnie wypukła $\Leftrightarrow$ $f'$ jest silnie rosnąca.

D: ($\Leftarrow$) Dowodzimy (1) i (2) korzystając z Lematu 3.70. Wybierzmy $a, b, c \in I$ tak aby $a < b < c$. Stosując twierdzenie Lagrange'a tutaj dostajemy nierówności wymagane w 3.70 dające wypukłość oraz silną wypukłość.

($\Rightarrow$) Ponownie skorzystamy z 3.70 dowodząc (1) i (2). Ustalając $a, c \in I$, $a < c$ chcemy stwierdzić, że $f'(a) \leq f'(c)$ odpowiednio ($<$). Wybierzmy $b \in (a, c)$ oraz $r > 0$ tak aby dla $h \in (0, r)$ $a - h \in I$ i $c + h \in I$. Mamy $a - h < a < b < c < a + h$ skąd dostajemy nierówności

$$\frac{f(a) - f(a-h)}{h} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \overset{(<)}{\leq} \frac{f(c) - f(b)}{c - b} \leq \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Zmierzając z $h$ do $0$ dostajemy w granicy

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \overset{(<)}{\leq} \frac{f(c) - f(b)}{c - b} \leq f'(c).$$

To tutaj kończy dowód.

## 3. Wypukłość funkcji dwukrotnie różniczkowalnej

### Twierdzenie 3.76

Z: $I$ - przedział otwarty, niepusty w $\mathbb{R}$

$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ dwukrotnie różniczkowalna.

T: (1) $f$ - wypukła $\Leftrightarrow \forall x \in I : f''(x) \geq 0$

(2) $f$ - silnie wypukła $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall x \in I : f''(x) \geq 0) \wedge (\operatorname{int}\{x \in I : f''(x) = 0\} = \emptyset)$

D: Dysponując 3.75, możemy skorzystać z opisu tego, że $f'$ jest rosnąca (silnie rosnąca) za pomocą wcześniejszych charakteryzacji monotoniczności funkcji różniczkowalnych, gdyż przy naszych założeniach $f'$ jest różniczkowalna. Korzystając z 3.62 przy (1) oraz 3.62 i 3.63 przy (2), natychmiast dostajemy wymagane równoważności:

## §9. Rozkłady skończone funkcji w punkcie.

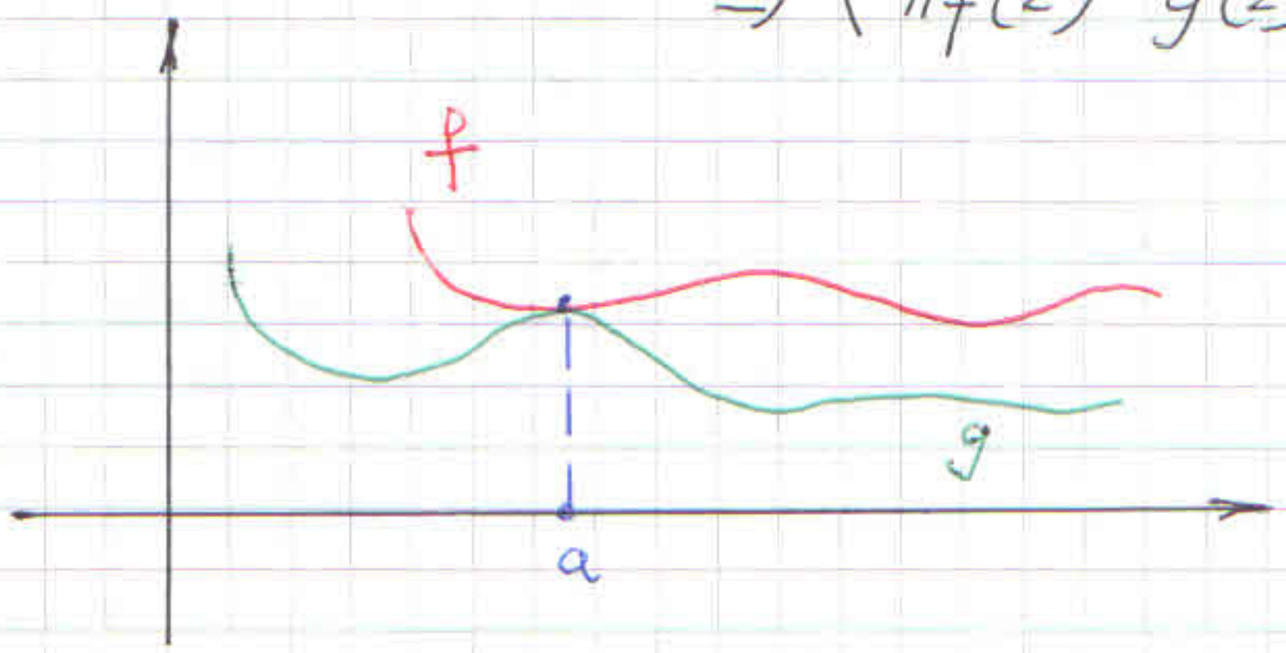
### 1. Styczność odwzorowań rzędu $n$, $n \geq 1$.

Niech $F$ będzie przestrzenią Banacha nad $\mathbb{K}$. Rozważać będziemy styczność odwzorowań rzędu $n$ określonych na podzbiorach $\mathbb{K}$, o wartościach w $F$. W przypadku tej samej schemat rozważać będziemy dla odwzorowań między przestrzeniami Banacha.

$A, B \subset \mathbb{K}$, $f: A \to F$, $g: B \to F$, $a \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Definicja 3.77 Mówimy, że $f$ i $g$ mają styczność w punkcie $a$ rzędu $n$, jeśli $a \in \operatorname{int} A \cap B$ oraz

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall z \in \mathbb{K} : (z \in A \cap B, |z-a| < \delta) \Rightarrow (\|f(z) - g(z)\| \leq \varepsilon |z-a|^n)$$




Uwaga 3.78 Styczność $f$ i $g$ rzędu $n$ w punkcie $a$ możemy również zapisać następująco

(A) $\|f(z) - g(z)\| = \eta(z)|z-a|^n$ gdzie $\eta: A \cap B \to \mathbb{R}$
$\eta(a) = 0$, $\eta$ - ciągła w punkcie $a$.

(B) $\|f(a+h) - g(a+h)\| = \xi(h)|h|^n$ gdzie $\xi: A \cap B - a \to \mathbb{R}$
$\xi(0) = 0$, $\xi$ - jest ciągła w punkcie $0$.

Przykłady 3.79 $A = F = \mathbb{K}$

(1) $f(z) = z^3$, $g(z) = 0$, $a = 0$ są 2-styczne w punkcie 0

(2) $f(z) = e^z$, $g(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6}$ są 3-styczne w p. 0.

## 2. Wielomiany na $\mathbb{K}$ o wartościach w przestrzeni Banacha.

Niech $F$ będzie przestrzenią Banacha nad $\mathbb{K}$.
Ustalmy $k \in \mathbb{N}$.

Definicja 3.80 Odwzorowanie $\varphi : \mathbb{K} \longrightarrow F$ nazywamy wielomianem stopnia co najwyżej $k$ jeśli jest postaci

$$\varphi : \mathbb{K} \ni z \longrightarrow a_0 + a_1 z + \ldots + a_k z^k \in F,$$

gdzie, $a_0, \ldots, a_k \in F$. Przestrzeń wielomianów na $\mathbb{K}$ o wart. w $F$ stopnia co najwyżej $k$ oznaczamy $W^k(\mathbb{K}; F)$

Uwagi 3.81

(1) Jeśli $a_k \neq 0$, to $k$-nazywamy stopniem wielomianu $\varphi \in W^k(\mathbb{K}; F)$

(2) $W^k(\mathbb{K}; F)$ ma naturalną strukturę przestrzeni wektorowej nad $\mathbb{K}$.

(3) Jeśli w powyższych rozważaniach $F = \mathbb{K}$ to w przestrzeni $W^k(\mathbb{K}; F)$ mamy wprowadzić strukturę pierścienia lub algebry nad $\mathbb{K}$.

## 3. Rozkłady skończone rzędu n funkcji w punkcie.

Niech $F$ będzie przestrzenią Banacha nad $\mathbb{K}$ i $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Rozpatrujemy funkcję $f: A \longrightarrow F$ gdzie $A \subset \mathbb{K}$,
ustalając na wstępie punkt $a \in \operatorname{int} A$

**Definicja 3.82** Mówimy, że wielomian $\varphi \in \mathcal{W}^n(\mathbb{K}; F)$ jest *rozkładem skończonym rzędu n funkcji f w a* jeśli odwzorowanie $A - a \ni h \longrightarrow f(a+h) \in F$ oraz $\varphi$ mają w punkcie 0 styczność rzędu $n$.

**Uwaga 3.83** Równoważnie możemy zapisać, że $\varphi$ jest rozkładem skończonym rzędu $n$ funkcji $f$ w punkcie $a$ następująco:

(A) $\|f(z) - \varphi(z-a)\| = \eta(z)|z-a|^n$ gdzie $\eta: A \longrightarrow \mathbb{R}$
$\eta(a) = 0$, $\eta$ - jest ciągła w punkcie $a$.

(B) $\|f(a+h) - \varphi(h)\| = \xi(h)|h|^n$ gdzie $\xi: A - a \longrightarrow \mathbb{R}$
$\xi(0) = 0$, $\xi$ - jest ciągła w punkcie 0.

**Twierdzenie 3.84**

Z: $F$ - przestrzeń Banacha nad $\mathbb{K}$, $A \subset \mathbb{K}$, $a \in \operatorname{int} A$
$f: A \longrightarrow F$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
$\varphi_1, \varphi_2$ - rozkłady skończone $f$ rzędu $n$ w $a$.

T: $\varphi_1 = \varphi_2$

D: Oznaczmy $f_a: A - a \ni h \longrightarrow f(a+h) \in F$

Jeśli $\varphi_1, \varphi_2$ są rozkładami $f$ w punkcie $a$, to $\varphi_1 - \varphi_2 = (\varphi_1 - f_a) - (\varphi_2 - f_a)$ ma styczność rzędu $n$ do odwzorowania zerowego z $\mathbb{K}$ w $F$.
Niech $(\varphi_1 - \varphi_2)(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n$
Dostajemy zatem:

$$\underline{\| c_0 + c_1 h + \ldots + c_n h^n \| = \xi(h)|h|^n}$$

gdzie $\xi(0) = 0$ oraz $\xi$ - ciągłe w punkcie 0.
Łatwo teraz zauważyć, że $c_0 = 0$ i następnie (indukcyjnie) $c_1 = \ldots = c_n = 0$, co kończy dowód.

## 4. Rozkłady skończone a wzór Taylora z resztą Peano.

Rozważmy sytuację jak we wzorze Taylora z resztą Peano. $F$ jest przestrzenią Banacha nad $\mathbb{K}$, $A \subset \mathbb{K}$, $n \geq 1$, $f: A \to F$ jest $n$-krotnie różniczkowalna w punkcie $a$. Określmy wtedy.

$$\underline{T_n : \mathbb{K} \ni h \to f(a) + \frac{1}{1!} f'(a) h + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) h^n \in F}$$

Widzimy, że $T_n$ - $n$-ty wielomian Taylora $f$ w punkcie $a$ jest elementem $W^n(\mathbb{K}; F)$.
na podstawie Tw. 3.50 (Wzór Taylora z resztą Peano).
mamy. $\underline{f(a+h) = T_n(h) + \xi(h)|h|^n \text{ dla } h \in A - a}$.
zatem dostajemy następujące.

Twierdzenie 3.85. W powyższej sytuacji $T_n$ jest (jedynym) rozkładem skończonym rzędu $n$ funkcji $f$ w punkcie $a$.

## 5. Rozkłady skończone funkcji analitycznych.

Ustalmy ciało $\mathbb{K}$ i funkcję analityczną $f: \Omega \to \mathbb{K}$, gdzie $\Omega$ jest podzbiorem otwartym, niepustym $\mathbb{K}$. Wybierając $a \in \Omega$ znajdujemy, zgodnie z definicją funkcji analitycznej, $r > 0$ takie, że $K(a,r) \subset \Omega$ oraz $f$ ma $K(a,r)$ ma przedstawienie jako suma bezwzględnie zbieżnego szeregu potęgowego

$$f|K(a,r) : K(a,r) \ni z \to \sum_{k=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^k \in \mathbb{K}.$$

gdzie $\{a_n\}$ jest ciągiem w $\mathbb{K}$. Wybierając teraz $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ zauważamy, że.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k (z-z_0)^k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n (z-z_0)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k (z-z_0)^k + (z-z_0)^n \left( \sum_{j=1}^{+\infty} a_{n+j} (z-z_0)^j \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k (z-z_0)^k + (z-z_0)^n g(z).$$

Jeśli $h = z - z_0$, $|h| < r$, to dostajemy.

$$f(z_0+h) = \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + h^n g(z_0+h).$$

przy czym $g(z_0) = 0$ (!) łatwo zauważyć że wielomian $\sum_{k=0}^{n} a_k h^k$.

jest rozkładem skończonym $f$ w punkcie $z_0$, zatem. jest to też $n$-ty wielomian Taylora $f$ w $z_0$

Uwaga 3.86 Na podstawie przeprowadzonych rozważań dostajemy w szczególności informację, że w rozwinięciu funkcji analitycznej $f$ w $z_0$ mamy

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0), \quad n \in \mathbb{N}$$

Równość te fakt dostajemy też z Tw. 3.21 mówiącego, że funkcje analityczne możemy różniczkować „wyraz po wyrazie".

4-01

# Rozdział 4. Całka Cauchy'ego

## §1. Funkcje przedziałami schodkowe i funkcje proste

### 1. Podstawowe pojęcia.

Niech $I$ będzie przedziałem w $\mathbb{R}$ o różnych końcach w $\overline{\mathbb{R}}$ $a$ i $b$, $a<b$.
Niech $E$ będzie przestrzenią Banacha nad $\mathbb{R}$.
Jeśli w rozważaniach pojawią nam się przestrzenie zespolone to w zakresie teorii całki Cauchy'ego traktujemy ją jako przestrzeń rzeczywistą.

**Definicja 4.01** Funkcję $f: I \longrightarrow E$ nazywamy:

(a) przedziałami schodkową, jeśli istnieje skończony układ punktów $t_0, \dots, t_k \in \mathbb{R}$ taki, że $a=t_0<t_1<\dots<t_k=b$ oraz $f|(t_{j-1}, t_j)$ jest stała dla $j=1, \dots, k$

(b) prostą jeśli w każdym punkcie wewnętrznym $I$ posiada obydwie granice jednostronne oraz.
$(a \in I) \Rightarrow (f$ - ma granicę prawostronną w $a)$
$(b \in I) \Rightarrow (f$ - ma granicę lewostronną w $b)$

Wprowadzamy oznaczenia.

$\mathcal{S}(I;E) = \{f: I \longrightarrow E \mid f$ - przedziałami schodkowa$\}$
$\mathcal{P}(I;E) = \{f: I \longrightarrow E \mid f$ - jest prosta$\}$

4-02

W tej części wykładu korzystać często będziemy z wcześniej wprowadzonej i omówionej przestrzeni

$$\mathcal{B}(I;E) = \{f : I \to E \mid f \text{ - jest ograniczona}\}.$$

Uwagi 4.02 W powyższej sytuacji

(1) $\mathcal{S}(I;E), \mathcal{P}(I;E), \mathcal{B}(I;E)$ - są przestrzeniami wektorowymi nad $\mathbb{R}$.

(2) Każda funkcja $f: I \to E$ ciągła jest prosta.

(3) Jeśli $E = \mathbb{R}$ i $f: I \to E$ jest monotoniczna, to $f \in \mathcal{P}(I;E)$.

(4) $\mathcal{S}(I;E) \subset \mathcal{P}(I;E)$

(5) $\mathcal{S}(I;E) \subset \mathcal{B}(I;E)$ i możemy przestrzenie $\mathcal{S}(I;E)$ rozpatrywać z normą supremową, więc w szczególności indukowaną z $\mathcal{B}(I;E)$.

(6) Jeśli $I$ jest zwarty, to

$$\mathcal{S}(I;E) \subset \mathcal{P}(I;E) \subset \mathcal{B}(I;E),$$

czyli dostajemy w tej sytuacji trzy przestrzenie z normą supremową.

## 2. Podstawowe własności funkcji przedziałami schodkowych i funkcji prostych.

**Twierdzenie 4.03.**

Z: $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$

$E$ - przestrzeń Banacha nad $\mathbb{R}$

$f: I \longrightarrow E$

T: Następujące warunki są równoważne:

(1) $f \in \mathcal{P}(I; E)$

(2) $\exists \{f_n\}$ w $\mathcal{S}(I; E)$: $f_n \rightrightarrows f$ $(n \to +\infty)$

D: (1) $\Rightarrow$ (2)

Ustalmy $f \in \mathcal{P}(I; E)$ oraz $n \in \mathbb{N}$

$\forall x \in I \; \exists \alpha(x), \beta(x) \in \mathbb{R}$:

(1) $\alpha(x) < x < \beta(x)$

(2) $(s, t \in I \cap (\alpha(x), x)) \vee (s, t \in I \cap (x, \beta(x))) \Rightarrow$

$\Rightarrow \|f(s) - f(t)\| < 2^{-n}$

Istnieją, na podstawie zwartości przedziału $I$, $x_1, \dots, x_p \in I$ takie, że:

$$I \subset \bigcup_{i=1}^{p} (\alpha(x_i), \beta(x_i))$$

Niech teraz $t_0, \dots, t_k$ będą punktami $I$ takimi, że $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ oraz:

$$\{t_0, \dots, t_k\} = I \cap \{a, b, x_1, \dots, x_p, \alpha(x_1), \dots, \alpha(x_p), \beta(x_1), \dots, \beta(x_p)\}$$

Określmy następnie dla $n \in \mathbb{N}$ i $x \in I$

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \{t_0, \dots, t_k\} \\ f\left(\frac{t_{i-1}+t_i}{2}\right) & \text{dla } x \in (t_{i-1}, t_i),\ i = 1, \dots, k \end{cases}$$

Mamy wtedy $f_n \in \mathcal{S}(I;E)$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz.

$$\forall x \in I : \|f(x) - f_n(x)\| < 2^{-n}$$

Stąd dostajemy $f_n \rightrightarrows f \ (n \to +\infty)$ co kończy pierwszą część dowodu.

(2) $\Rightarrow$ (1) Pokażemy, że dla funkcji $f \in \overline{\mathcal{S}}(I;E) \subset \mathcal{B}(I;E)$ istnieją granice prawostronne w punktach $c \in [a,b)$

Ustalmy zatem funkcje $f_n \in \mathcal{S}(I;E)$ takie, że $f_n \rightrightarrows f \ (n \to +\infty)$, $f \in \mathcal{B}(I;E)$.
Weźmy ciąg $\{x_n\}$ w $I$ taki, że $x_n \to c \ (n \to +\infty)$. oraz $x_n > c$ dla $n \in \mathbb{N}$

Pokażemy, że uzyskany w ten sposób ciąg $\{f(x_n)\}$. spełnia warunek Cauchy'ego

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Istnieje wówczas $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\forall x \in I : \|f_{n_0}(x) - f(x)\| < \varepsilon/2$$

.

Mamy $f_{n_0} \in \mathcal{S}(I;E)$ skąd istnieje $\delta > 0$ takie, że $[c, c+\delta) \subset I$ oraz $f_{n_0} | (c, c+\delta)$ - stałe.

Skoro $x_n \to c$ $(n \to +\infty)$ więc $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : x_n \in (c, c+\delta)$

Zatem dostajemy:

$$\|f(x_n) - f(x_m)\| \leq \|f(x_n) - f_{n_0}(x_n)\| + \|f_{n_0}(x_n) - f(x_m)\|$$

$$= \|f(x_n) - f_{n_0}(x_n)\| + \|f_{n_0}(x_m) - f(x_m)\| <$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \text{dla} \quad m, n \geq N$$

To kończy dowód Twierdzenia 4.03.

Pozostaniemy w sytuacji gdy $I$ - jest zwarty.
Wtedy mamy zawierania:

$$\mathcal{S}(I;E) \subset \mathcal{P}(I;E) \subset \mathcal{B}(I;E).$$

Twierdzenie 4.04

Z: $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$

T: (1) $\overline{\mathcal{S}}(I;E) = \mathcal{P}(I;E)$

(2) $\mathcal{P}(I;E)$ jest przestrzenią Banacha.

D: (1) Wynika natychmiast z 4.03.

(2) $\mathcal{P}(I;E)$ - jest przestrzenią domkniętą w $\mathcal{B}(I;E)$ (domknięcie $\mathcal{S}(I;E)$), więc jest przestrzenią Banacha.

To kończy dowód 4.04.

## Twierdzenie 4.05

Zł: $I$ - przedział w $\mathbb{R}$ o różnych końcach w $\overline{\mathbb{R}}$
$E$ - przestrzeń Banacha nad $\mathbb{R}$
$f: I \to E$

Teza: Następujące warunki są równoważne:

(1) $f \in \mathcal{S}(I; E)$

(2) Istnieje ciąg $\{f_n\}$ w $\mathcal{S}(I; E)$ taki, że $f_n \to f$ $(n \to +\infty)$ lokalnie jednostajnie na $I$.

D: Wybieramy ciąg $\{I_n\}$ przedziałów zwartych, o różnych końcach, takich, że:

(a) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = I$

(b) $I_n \subset \operatorname{int} I_{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$ (w topologii $I$).

(1) $\Rightarrow$ (2) $f \in \mathcal{S}(I; E)$ wtedy $f|I_n \in \mathcal{S}(I_n; E)$ dla $n \in \mathbb{N}$

Wybieramy $g_n \in \mathcal{S}(I_n; E)$ tak aby $\|g_n - f|I_n\| < 2^{-n}$ dla $n \in \mathbb{N}$

Zadajemy $f_n : I \to E$ dla $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) = \begin{cases} g_n(x), & x \in I_n \\ 0, & x \in I \setminus I_n \end{cases}$$

Łatwo pokazać (ćw.), że wybór $\{I_n\}$ daje lokalnie jednostajną zbieżność

(2) $\Rightarrow$ (1) Łatwo wynika z 4.03

Uwaga 4.06 Bez trudu można zmodyfikować dowód 4.03 tak aby dostać 4.05.

## 3. Pierwotne i ich własności

Niech $I$ będzie przedziałem w $\mathbb{R}$ o różnych końcach w $\overline{\mathbb{R}}$ zaś $E$ przestrzenią Banacha nad $\mathbb{R}$

Definicja 4.07 Funkcję $F: I \longrightarrow E$ nazywamy pierwotną funkcji $f: I \to E$ jeśli:

(1) $F$ - jest ciągła.

(2) Istnieje $S \subset I$, $S$ - co najwyżej przeliczalny taki, że $\forall t \in I \setminus S$ : $F$ - jest różniczkowalna w $t$ i $F'(t) = f(t)$.

Uwaga 4.08 Jeśli do przedziału $I$ należy jego koniec, to jest automatycznie wliczany do $S$.

Lemat 4.09

Z: $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $E$ - przestrzeń Banacha nad $\mathbb{R}$

$f: [a,b] \to E$, $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ funkcje ciągłe.

$S \subset [a,b]$, $S$ - co najwyżej przeliczalny

$\forall t \in [a,b] \setminus S$ : $f$ i $g$ są różniczkowalne w punkcie $t$

T: (1) $(\forall t \in [a,b] \setminus S : \|f'(t)\| \leq g'(t)) \Rightarrow (\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a))$

(2) $(M \geq 0, \forall t \in [a,b] \setminus S : \|f'(t)\| \leq M) \Rightarrow (\|f(b) - f(a)\| \leq M(b-a))$

(3) $(\forall t \in [a,b] \setminus S : f'(t) = 0) \Rightarrow (f$ - jest funkcją stałą$)$

(4) $(\forall t \in [a,b] \setminus S : g'(t) \geq 0) \Rightarrow (g$ - jest funkcją rosnącą$)$

D: (1) Jest to bezpośredni wniosek z twierdzenia o przyrostach skończonych (Tw. 3.44), w którym, zamiast funkcji mającej pochodne jednostronne, rozpatrujemy funkcję mającą pochodne, poza S - zbiorem co najwyżej przeliczalnym.

(2) Wykorzystujemy (1) przyjmując $g(t) = Mt$

(3) Wynika z zastosowania (2) w podprzedziałach $[a', b']$ przedziału $[a, b]$, $a' < b'$. Dostajemy $f(a') = f(b')$, co pociąga tezę.

(4) Przyjmując $f = 0$ w (1) i stosując to w podprzedziałach $[a', b']$ przedziału $[a, b]$ dostajemy $g(b') - g(a') \geq 0$ gdy $b' - a' > 0$. To daje informację, że $g$ jest rosnąca.

## Lemat 4.10

Z: $I$ - przedział w $\mathbb{R}$ o różnych końcach w $\overline{\mathbb{R}}$
$E$ - przestrzeń Banacha nad $\mathbb{R}$:
$f : I \longrightarrow E$ ciągła, różniczkowalna poza zbiorem $S$ - co najwyżej przeliczalnym oraz:
$f'(t) = 0$ dla $t \in \underline{I} \setminus S$

T: $f$ - jest funkcją stałą.

D: Stosujemy 4.09 (3) dla przedziałów $[a, b] \subset I$, dla $a < b$ dostając $f(a) = f(b)$. To pociąga stałość $f$

## Twierdzenie 4.11

Zł: $I$ - przedział w $\mathbb{R}$ o różnych końcach w $\overline{\mathbb{R}}$
$E$ - przestrzeń Banacha nad $\mathbb{R}$
$f: I \longrightarrow E$

T: (1) Jeśli $F_1, F_2 : I \longrightarrow E$ pierwotne funkcji $f$, to $F_1 - F_2$ jest funkcją stałą.

(2) Jeśli $F$ jest pierwotną $f$, to rodzina $\{F + c : c \in E\}$ składa się z wszystkich pierwotnych funkcji $f$.

D: (1) $(F_1 - F_2)'(t) = 0$ poza zbiorem $S_1 \cup S_2$, gdzie $S_i$ - zbiór punktów wyjątkowych dla $F_i$, $i = 1, 2$. Zatem $F_1 - F_2$ jest funkcją stałą na podstawie 4.10.

(2) Jeśli $\widetilde{F}$ jest pierwotną $f$, to $\widetilde{F} - F = c \in E$ czyli $\widetilde{F} = F + c$ na podstawie (1). Z drugiej strony każda z funkcji $F + c$ jest pierwotną $f$, bo $(F + c)'(t) = F'(t) = f(t)$ poza zbiorem co najwyżej przeliczalnym.

## Twierdzenie 4.12

Z: $I$ - przedział w $\mathbb{R}$ o różnych końcach w $\overline{\mathbb{R}}$
$E$ - przestrzeń Banacha nad $\mathbb{R}$
$f: I \to E$, $F: I \to E$ pierwotna $f$
$t_0 \in I$, $t_0$ - nie jest końcem $I$, $f$ - ciągła w $t_0$

T: (1) $F$ - jest różniczkowalna w $t_0$,
(2) $F'(t_0) = f(t_0)$

D: Rozważmy funkcję
$G: I \ni s \longrightarrow G(s) = F(s) - f(t_0)\cdot s \in E$
Ustalmy $\varepsilon > 0$ oraz $r > 0$ tak aby:
(a) $(t_0 - r, t_0 + r) \subset I$
(b) $\| f(s) - f(t_0) \| < \varepsilon$, dla $s \in (t_0 - r, t_0 + r)$

Wtedy mamy $G'(s) = f(s) - f(t_0)$ poza zbiorem zbiorem co najwyżej przeliczalnym w przedziale $(t_0 - r, t_0 + r)$.

Jeśli teraz $|h| < r$, to stosując 4.09(2) na odcinku $[t_0, t_0 + h]$ dostajemy

$\| G(t_0 + h) - G(t_0) \| \leq \varepsilon |h|$ skąd.

$\| F(t_0 + h) - F(t_0) - f(t_0) h \| \leq \varepsilon |h|$
jeśli tylko $|h| < r$. Stąd.

$$\left\| \frac{F(t_0 + h) - F(t_0)}{h} - f(t_0) \right\| \leq \varepsilon \quad \text{dla } |h| < r.$$

Czyli $F$ jest różniczkowalna w $t_0$ i $F'(t_0) = f(t_0)$

# 4. Pierwotne funkcji przedziałami schodkowych i funkcji prostych.

## Twierdzenie 4.13

$Z$: $I$ - przedział w $\mathbb{R}$ o różnych końcach w $\overline{\mathbb{R}}$
$E$ - przestrzeń Banacha nad $\mathbb{R}$
$f \in \mathcal{S}(I; E)$

$T$: $f$ - ma pierwotną.

D: Jeśli $a_0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$, podział $I$ dla $f$ zaś $c_1, \dots, c_k$ wartości $f|(t_{j-1}, t_j)$ dla $j = 1, \dots, k$, to dowód możemy przeprowadzić indukcyjnie względem $k \geq 1$.
Jeśli $k = 1$, to $F(t) = c_1 t$ jest pierwotną $f$.
Jeśli $k \geq 2$, to z założenia indukcyjnego mamy pierwotną $\widetilde{F}$ dla $f|I \cap (-\infty, t_{k-1}]$.
Wtedy możemy zadać pierwotną $\widehat{F}$ dla $f$ na $I \cap [t_{k-1}, +\infty)$ przyjmując

$$\widehat{F}(t) = \widetilde{F}(t_{k-1}) + c_k (t - t_{k-1}),$$

a wtedy $F = \widetilde{F} \cup \widehat{F}$ jest pierwotną $f$.

Uwaga 4.14 Pierwotną w 4.13 można zadać jedną formułą dla $t \in I$

$$F(t) = \frac{1}{2}\left((c_1 + c_k)t + \sum_{j=1}^{k-1} (c_{j+1} - c_j)|t - t_j|\right)$$

gdzie dla $k = 1$, traktując sumę jako zerową dostrajamy $F(t) = c_1 t$, (ćw.)

## Twierdzenie 4.15

Z: $I$ - przedział w $\mathbb{R}$ o różnych końcach w $\mathbb{R}$
$E$ - przestrzeń Banacha nad $\mathbb{R}$
$f_n : I \longrightarrow E$ dla $n \in \mathbb{N}$
$F_n : I \longrightarrow E$ prewektor $f_n$ dla $n \in \mathbb{N}$
$f : I \longrightarrow E$, $f_n \rightrightarrows f$ $(n \to +\infty)$
$t_0 \in I$, $\{F_n(t_0)\}$ jest zbieżny w $E$

T: (1) Ciąg funkcyjny $\{F_n\}$ jest jednostajnie zbieżny do pewnej funkcji $F : I \longrightarrow E$
(2) $F$ jest prewotną $f$.

D: Zauważmy na wstępie, że przedział $I$ jest ograniczony (!) Niech $d = \operatorname{diam} I$ będzie jego długością.
W ramach przygotowania ustalmy $m, n \in \mathbb{N}$ oraz punkty $t, a \in I$. Wtedy gdy funkcja $f_m - f_n$ jest ograniczona na $I$ dostajemy nierówność wynikającą z 4.09 (2)

$$(*) \quad \| (F_m - F_n)(t) - (F_m - F_n)(a) \| \leq \left( \sup_{s \in I} \| f_m(s) - f_n(s) \| \right) |t - a|$$

Dla $t \in I$ mamy.

$$\| F_m(t) - F_n(t) \| \leq \| (F_m - F_n)(t) - (F_m - F_n)(t_0) \| + \| (F_m - F_n)(t_0) \|$$

Zatem z (*) dostajemy

$$\| F_m(t) - F_n(t) \| \leq d \sup_{s \in I} \| f_m(s) - f_n(s) \| + \| F_m(t_0) - F_n(t_0) \|$$

Ustalając $\varepsilon > 0$ wybierzmy $N \in \mathbb{N}$ tak, aby dla $m, n \geq N$

$$\sup_{s \in I} \|f_m(s) - f_n(s)\| < \varepsilon/2d \quad \text{oraz}$$

$$\|F_m(t_0) - F_n(t_0)\| < \varepsilon/2$$

Wtedy dla $t \in I$ oraz $m, n \geq N$ dostajemy.

$$\|F_m(t) - F_n(t)\| < \varepsilon$$

Stąd natwo wynika punktowa zbieżność $\{F_n\}$ do pewnej funkcji $F: I \longrightarrow E$ oraz po przejściu z $m$ do $+\infty$ otrzymujemy.

$$\|F(t) - F_n(t)\| \leq \varepsilon \text{ dla } t \in I, \ n \geq N$$

Zatem $F_n \rightrightarrows F \ (n \longrightarrow +\infty)$, czyli dostaliśmy punkt (1) tezy twierdzenia.

Odnotujmy ponadto, że istnieje $N \in \mathbb{N}$, że dla $m, n \geq N$ $\|f_m(s) - f_n(s)\| \leq 1$ dla $s \in I$, więc przechodząc w $(*)$ z $m$ do $+\infty$ dostajemy.

$$(**) \quad \|(F - F_n)(t) - (F - F_n)(a)\| \leq \left(\sup_{s \in I} \|f(s) - f_n(s)\|\right) |t - a|$$

dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Przechodząc do dowodu punktu (2) ustalmy. $a \in I$ tak, aby wszystkie funkcje $F_n$ były w $a$ różniczkowalne oraz $F_n'(a) = f_n(a)$ dla $n \in \mathbb{N}$. Oznaczając przez $S$ sumę zbiorów wyjątkowych dla $f_n$, $n \in \mathbb{N}$ dostajemy zbiór przeliczalny taki, że $a$ może być wybrany jako dowolny punkt $I \setminus S$. Pokażemy teraz, że $F$ jest różniczkowalna w $a$ oraz $F'(a) = f(a)$.

Ustalony punkt $a$, ze względu na różniczkowalność funkcji $F_n$ dla $n \in \mathbb{N}$ nie jest końcem przedziału $I$. Ponadto dostajemy nierówność dla $t \in I$ i $n \in \mathbb{N}$

$$\|F(t)-F(a)-f(a)(t-a)\| \leq$$
$$\leq \|(F(t)-F(a))-(F_n(t)-F_n(a))\| +$$
$$+ \|F_n(t)-F_n(a)-f_n(a)(t-a)\| +$$
$$+ \|f_n(a)(t-a)-f(a)(t-a)\| \leq$$
$$\leq \|(F-F_n)(t)-(F-F_n)(a)\| +$$
$$+ \|F_n(t)-F_n(a)-f_n(a)(t-a)\| +$$
$$+ \|f_n(a)-f(a)\|\,|t-a| \leq \dots$$

Korzystając zatem z $(**)$, dla pewnie wszystkich $n \in \mathbb{N}$ mamy dalsze szacowanie.

$$\leq \left(\sup_{s \in I} \|f(s)-f_n(s)\| + \|f_n(a)-f(a)\|\right)|t-a| +$$
$$+ \|F_n(t)-F_n(a)-f_n(a)(t-a)\|$$

Ustalając następnie $\varepsilon > 0$ wybierzmy $N \in \mathbb{N}$, tak, aby czynnik w nawiasie był dla $n \geq N$ mniejszy od $\varepsilon/2$. Dostajemy wtedy

$$\|F(t)-F(a)-f(a)(t-a)\| \leq \varepsilon/2\,|t-a| +$$
$$+ \|F_N(t)-F_N(a)-f_N(a)(t-a)\|$$

Skoro $F_N'(a) = f_N(a)$, więc istnieje $r > 0$ takie, że $(a-r, a+r) \subset I$ oraz gdy $|t-a| < r$, to

$$\|F_N(t)-F_N(a)-f_N(a)(t-a)\| \leq \varepsilon/2\,|t-a|$$

Zatem dla tak dobranego $r > 0$

$$\|F(t) - F(a) - f(a)(t-a)\| \leq \varepsilon |t-a|$$

jeśli $|t-a| < r$. Zatem $F$ jest różniczkowalna w punkcie $a$ oraz $F'(a) = f(a)$ co kończy dowód

Twierdzenie 4.16

Z: $I$ przedział w $\mathbb{R}$ o różnych końcach w $\overline{\mathbb{R}}$
$E$ - przestrzeń Banacha nad $\mathbb{R}$
$f_n : I \to E$ dla $n \in \mathbb{N}$
$F_n : I \to E$ pierwotna $f_n$ dla $n \in \mathbb{N}$
$f : I \to E$, $f_n \to f$ $(n \to +\infty)$ (lok. jednostajnie)
$t_0 \in I$, $\{F_n(t_0)\}$ jest zbieżny w $E$

T: (1) Ciąg funkcyjny $\{F_n\}$ jest lokalnie jednostajnie zbieżny do pewnej funkcji $F : I \to E$,
(2) $F$ - jest pierwotną $f$.

D: Możemy wybrać ciąg przedziałów zwartych $\{I_n\}$ takich, że $t_0 \in I_0$, $I_k \subset \operatorname{int} I_{k+1} \subset I$, $k \in \mathbb{N}$ (wnętrze w $I$), oraz $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k = I$ (Ćw.).

Mamy $f_n | I_k \rightrightarrows f | I_k$ $(n \to +\infty)$ dla $k \in \mathbb{N}$ stąd punktowa zbieżność $\{F_n\}$ oraz jednostajna. $\{F_n | I_k\}$ do zacieśnienia granicy $F | I_k$ dla wszelkich $k \in \mathbb{N}$, na podstawie 4.15. Stąd dostajemy lokalną jednostajną zbieżność $\{F_n\}$ do $F$.

Z 4.15 dostajemy informację, że $F/I_k$ jest pierwotną $f/I_k$, skąd łatwo sprawdzić, że $F$ jest pierwotną $f$ (ćw.).

Twierdzenie 4.17

Z: $I$ - przedział w $\mathbb{R}$ o różnych końcach w $\overline{\mathbb{R}}$
$E$ - przestrzeń Banacha nad $\mathbb{R}$
$f \in \mathcal{P}(I; E)$

T: $f$ - ma pierwotną

D: Na podstawie Tw. 4.05 istnieje ciąg $\{f_n\}$ w $\mathcal{S}(I; E)$ taki, że $f_n \to f$ $(n \to +\infty)$ lokalnie jednostajnie.

Korzystając z Tw. 4.13 dla każdej funkcji przedziałami schodkowej znajdujemy jej pierwotną $F_n : I \to E$, $n \in \mathbb{N}$.
Możemy ponadto tak wybrać ciąg $\{F_n\}$, aby dla wybranego punktu $t_0 \in I$ mieć $F_n(t_0) = 0$. W tej sytuacji Tw. 4.16 daje nam informację, że $\{F_n\}$ jest zbieżny do pierwotnej funkcji $f$.

## §2. Definicja i podstawowe własności całki Cauchy'ego

### 1. Podstawowe pojęcia

Ustalmy:
- $I$ - przedział w $\mathbb{R}$ o różnych końcach w $\overline{\mathbb{R}}$
- $E$ - przestrzeń Banacha nad $\mathbb{R}$
- $f \in \mathcal{P}(I;E)$ o pierwotnej $F: I \to E$
- $\alpha, \beta \in I$

**Definicja 4.18** Całką Cauchy'ego funkcji $f$ od $\alpha$ do $\beta$ nazywamy

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt := F(\beta) - F(\alpha).$$

**Uwaga 4.19** Wielkość wyżej określonej całki nie zależy od wyboru, wyznaczonej z dokładnością do stałej z $E$, pierwotnej funkcji $F$.

**Uwagi 4.20**

(1) Całkę Cauchy'ego określamy wyłącznie dla funkcji prostych. Nie są to jednak wszystkie funkcje mające pierwotne. Łatwo sprawdzić, że funkcja:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$$

jest pierwotną funkcji

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0, \end{cases}$$

ale $f$ nie jest funkcją prostą!

(2) Jeśli $\alpha = \beta$, to $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = 0$.

Jeśli $\alpha \neq \beta$ to $\int_\beta^\alpha f(t)\,dt = -\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$, więc

łatwo sprowadzić całkę $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$ do sytuacji $\alpha < \beta$.

(3) Wartość całki $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$, gdy $\alpha < \beta$ zależy

wyłącznie od $f|[\alpha,\beta]$.

## 2. Podstawowe własności całki Cauchy'ego

### Twierdzenie 4.21

Zł: $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a,b]$

$E$ - przestrzeń Banacha nad $\mathbb{R}$

$f \in \mathcal{P}(I;E)$

T: (1) $(I \ni t \longrightarrow \|f(t)\| \in \mathbb{R}) \in \mathcal{P}(I;\mathbb{R})$,

(2) $\left\|\int_a^b f(t)\,dt\right\| \leqslant \int_a^b \|f(t)\|\,dt \leqslant \|f\|(b-a)$.

D: (1) Wynika z ciągłości normy.

(2) Niech $F: I \longrightarrow E$ będzie pierwotną

funkcji $f$ zaś $\widetilde{F}: I \longrightarrow \mathbb{R}$ pierwotna.

$I \ni t \longrightarrow \|f(t)\| \in \mathbb{R}$. Wtedy poza zbiorem

co najwyżej przeliczalnym mamy. dla $t \in I$

$$\|F'(t)\| \leqslant \|f(t)\| = \widetilde{F}'(t) = \|f(t)\| \leqslant \|f\|$$

Z lematu 4.09 (2), zastosowanego do

nierówności $\|F'(t)\| \leqslant \widetilde{F}'(t) \leqslant \|f\|$,

dostajemy

$$\|F(b)-F(a)\| \leq \widetilde{F}(b)-\widetilde{F}(a) \leq \|f\|(b-a),$$

skąd

$$\left\|\int_a^b f(t)\,dt\right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\,dt \leq \|f\|(b-a)$$

## Twierdzenie 4.22

Z: $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, $I=[a,b]$

$E$ - przestrzeń Banacha nad $\mathbb{R}$

T: Odwzorowanie

$$\int_a^b : \mathcal{C}(I;E) \ni f \longrightarrow \int_a^b f(t)\,dt \in E$$

jest liniowe i ciągłe oraz mamy.

$$\left\|\int_a^b\right\| = \begin{cases} b-a, & E \neq \{0\}, \\ 0, & E = \{0\}. \end{cases}$$

D: Liniowość całki wynika wprost z definicji.

Z Tw. 4.21 dostajemy ciągłość oraz.

szacowanie $\left\|\int_a^b\right\| \leq b-a$. Oczywiście gdy $E=\{0\}$, to norma się zeruje. Jeśli $v \in E \setminus \{0\}$, to całkując funkcję stałą o wartości $v$ na przedziale $[a,b]$ dostajemy $v(b-a)$, co kończy sprawdzenie. ponieważ $\|v(b-a)\| = \|v\|(b-a)$.

Uwagi 4.23

(1) Twierdzenie 4.22 pokazuje, że całka Cauchy'ego dobrze „pracuje" przy przejściach granicznych jednostajnych. Zbieżność punktowa nie jest dla niej dobrym warunkiem, gdyż biorąc na $[0,1]$ ciąg funkcji ciągłych (więc pustych) dla $n \geq 1$

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ \sqrt[n]{t}\,\sin\frac{1}{t}, & t \in (0,1]. \end{cases}$$

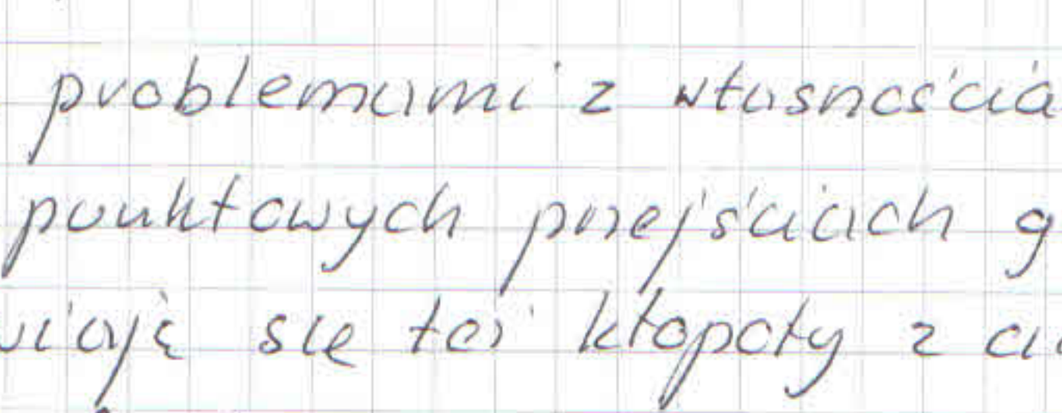
dostajemy w granicy punktowej,

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ \sin\frac{1}{t}, & t \in (0,1]. \end{cases}$$

- funkcja $f \notin \mathcal{P}([0,1];\mathbb{R})$.

(2) Poza problemami z własnościami funkcji, przy punktowych przejściach granicznych, pojawiają się też kłopoty z ciągłością całki jeśli funkcja graniczna jest prosta.

Biorąc ciąg funkcji takich jak na rysunku,




dostajemy $f_n \to f$ $(n \to +\infty)$ punktowo, ale.

$$\int_0^1 f_n(t)\,dt = 1 \not\longrightarrow \int_0^1 f(t)\,dt = 0 \quad (n \to +\infty).$$

## § 3. Podstawowe twierdzenia teorii całki Cauchy'ego

### 1. Twierdzenie o wartości średniej

**Twierdzenie 4.24**

Z: $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ciągła

T: $\exists c \in (a,b): f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,dt$

D: Niech $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie pierwotną $f$. Na podstawie Tw. 4.12 wiemy, że $F$ jest różniczkowalna na $(a,b)$. Ponadto $F$ jako pierwotna $f$ jest funkcją ciągłą.

Na podstawie Twierdzenia Lagrange'a istnieje $c \in (a,b)$ takie, że.

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(c) = f(c).$$

Czyli dostajemy.

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,dt$$

co kończy dowód.

**Uwaga 4.25** W założeniach 4.24 trudno zastąpić ciągłość $f$ innym rozsądnym założeniem. Łatwo wskazać przykłady funkcji prostych, dla których to twierdzenie przestaje być prawdziwe. Dla funkcji

$$f: [-1,1] \ni t \longrightarrow \begin{cases} 1, & t \in [0,1] \\ -1, & t \in [-1,0) \end{cases} \in \mathbb{R}$$

mamy pierwotną $F(t) = |t|$ dla $t \in [-1,1]$ więc $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = 0$ zaś $f(t) \neq 0$ dla $t \in [-1,1]$.

## 2. Twierdzenie o całkowaniu przez części

### Twierdzenie 4.26

Z: $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$

$f, g \in \mathcal{P}(I; \mathbb{R})$, $F, G$ - pierwotne odpowiednio $f$ i $g$

T: (1) $F \cdot g$, $f \cdot G$ są funkcjami prostymi na $I$

(2) $\int_a^b F(t)g(t) = (F(b)G(b) - F(a)G(a)) - \int_a^b f(t)G(t)dt$

D: (1) Skoro $F$ i $G$ są ciągłe, więc funkcje $F \cdot g$ i $f \cdot G$ są, jak tutaj zauważyć, funkcjami prostymi.

(2) Jeśli $S_1, S_2$ są zbiorami co najwyżej przeliczalnymi poza którymi funkcje $F, G$ są odp. różniczkowalne oraz: $F'(t) = f(t)$ dla $t \in I \setminus S_1$

$G'(t) = g(t)$ dla $t \in I \setminus S_2$,

to przyjmując $S = S_1 \cup S_2$ mamy dla funkcji $F \cdot G : I \longrightarrow \mathbb{R}$

oraz $t \in I \setminus S$ równość

$$(F \cdot G)'(t) = F'(t)G(t) + F(t)G'(t) = f(t)G(t) + F(t)g(t)$$

Ponieważ $F \cdot G$ jest ciągła więc $F \cdot G$ jest pierwotną funkcji $f \cdot G + F \cdot g$, a zatem

$$\int_a^b (f(t)G(t) + F(t)g(t))dt = F(b)G(b) - F(a)G(a)$$

i ze względu na addytywność całki dostajemy tezę twierdzenia.

Uwagi 4.27

(1) Stosowany bywa tutaj klasyczny zapis.

$$F(b)G(b) - F(a)G(a) = \left[F(t)G(t)\right]_a^b = \left[F \cdot G\right]_a^b$$

(2) Często twierdzenie to jest formułowane w sytuacji gdy mamy dane funkcje $F, G : J \longrightarrow \mathbb{R}$ klasy $C^1$ gdzie $J$ przedział otwarty, $I \subset J$. Wtedy przyjmując $f = F'$, $g = G'$ dostajemy tezę twierdzenia w "klasycznej" postaci:

$$\int_a^b F'(t)G(t)\,dt = \left[F \cdot G\right]_a^b - \int_a^b F(t)G'(t)\,dt$$

(3) Omawiane twierdzenie można łatwo uogólnić do sytuacji gdzie $\overline{E}$ - jest przestrzenią Banacha nad $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow E$, $g : I \longrightarrow E$ są funkcjami przestymi oraz zadane jest w przestrzeni $\overline{E}$ mnożenie $\Phi : \overline{E} \times \overline{E} \longrightarrow H$, odwzorowanie dwuliniowe ciągłe o wartościach w przestrzeni Banacha $H$. Wtedy korzystając ze wzoru

$$\left(\Phi(F,G)\right)'(t) = \Phi(F'(t), G(t)) + \Phi(F(t), G'(t))$$
$$= \Phi(f(t), G(t)) + \Phi(F(t), g(t))$$

pozwa pewnym zbiorem co najwyżej przeliczalnym w $I$

$$\int_a^b \Phi(f(t), G(t))\,dt = \left[\Phi(F,G)\right]_a^b - \int_a^b \Phi(F(t), g(t))\,dt$$

dostajemy teraz wprost z definicji całki Cauchy'ego oraz jej addytywności.

## 3. Twierdzenie o całkowaniu przez podstawianie

### Twierdzenie 4.28

Z: $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$

$E$ - przestrzeń Banacha nad $\mathbb{R}$

$f \in \mathcal{P}(I; \mathbb{R})$, $F$ - pierwotna $f$

$J$ - przedział w $\mathbb{R}$ o różnych końcach w $\overline{\mathbb{R}}$

$F(I) \subset J$, $g \in \mathcal{P}(J; E)$

T: Jeśli $g$ jest ciągła lub $F$ jest monotoniczna to:

(1) Funkcja $I \ni t \longrightarrow g(F(t))f(t) \in E$ jest pocałc.

(2) $\int_a^b g(F(t))f(t)\,dt = \int_{F(a)}^{F(b)} g(s)\,ds$.

D: Niech $h(t) = g(F(t))f(t)$ dla $t \in I$ oraz niech $G$ będzie pierwotną $g$.

Aby wykazać twierdzenie musimy pokazać dwa następujące fakty:

(*) $h \in \mathcal{P}(I; E)$

(**) $G \circ F$ jest pierwotną funkcji $h$.

Faktycznie (*) daje (1) zaś z (**)

otrzymujemy.

$$\int_a^b h(t)\,dt = (G \circ F)(b) - (G \circ F)(a) =$$

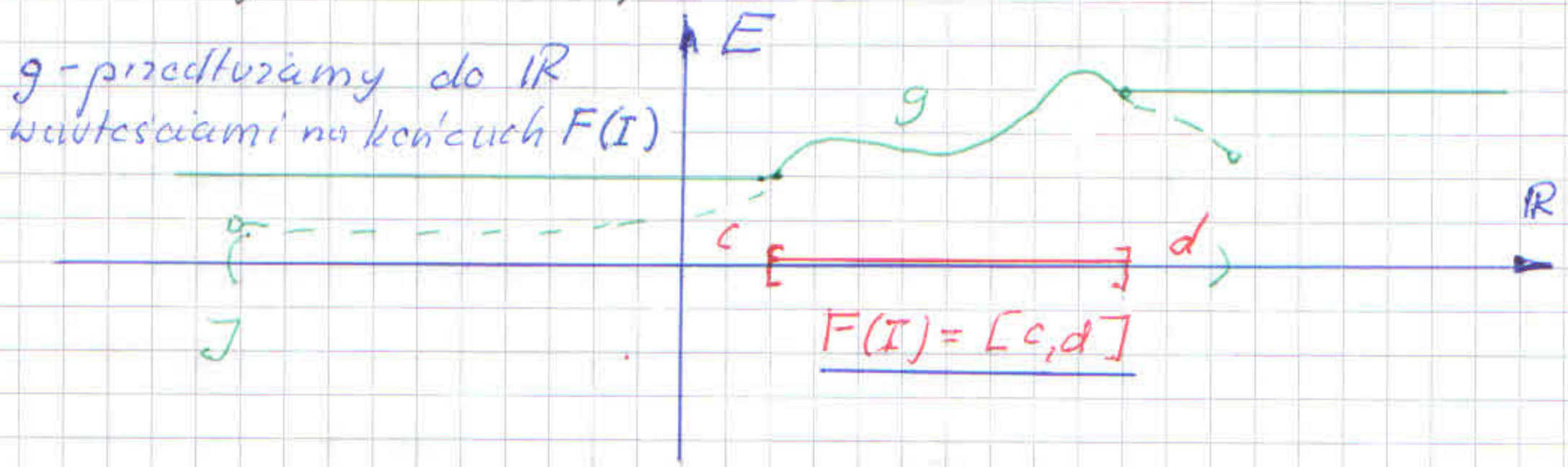
$$= G(F(b)) - G(F(a)) = \int_{F(a)}^{F(b)} g(s)\,ds$$

co daje punkt (2) tezy twierdzenia

Potrzebne fakty dowodzimy w dwóch wariantach zgodnych z przypadkami rozpatrywanymi w tezie

Wariant 1. Funkcja g - jest ciągła.

$F(I)$ jest przedziałem zwartym zawartym w $J$
Bez straty ogólności możemy założyć, że $J=\mathbb{R}$, bo $g|F(I)$ możemy rozszerzyć do funkcji ciągłej na $\mathbb{R}$ nie wpływając na (*), (**). Można to zobaczyć na przykład następująco:




(*) $g \circ F$ jest ciągła oraz $f$ jest prosta, więc $h \in \mathcal{P}(I;E)$.

(**) $G$ jest klasy $C^1$ oraz $G'(x) = g(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$
Niech $A$ będzie zbiorem co najwyżej przeliczalnym w $I$ takim, że $F'(t) = f(t)$ dla $t \notin A$.

Dla $t \in I \setminus A$ mamy więc

$$(G \circ F)'(t) = G'(F(t))F'(t) = g(F(t))f(t) = h(t)$$

To kończy sprawdzenie warunków przy pierwszym wariancie założeń

Wariant 2. Funkcja $F$ - jest monotoniczna.

(*) Skoro $F$ jest monotoniczna oraz $g \in \mathcal{P}(J;E)$, to $g \circ F \in \mathcal{P}(I;E)$. Ponadto $f \in \mathcal{P}(I;\mathbb{R})$, więc $h = (g \circ F)f$ jest pusta.

(**) Oznaczmy przez $B$ zbiór co najwyżej przeliczalny taki, że dla $s \in J \setminus B$ mamy $G'(s) = g(s)$. Weźmy punkt $b \in B \cap F(I)$. Ze względu na ciągłość i monotoniczność $F$ zbiór $F^{-1}(b)$ jest zwartym przedziałem zwartym w $I$. Niech $A_b$ będzie zbiorem końców przedziału $F^{-1}(b)$. Jest to zbiór jednoelementowy lub dwuelementowy.

Niech $A$ będzie zbiorem punktów wyjątkowych dla funkcji $f$.

Określmy $\tilde{A} = A \cup \left( \bigcup_{b \in B \cap F(I)} A_b \right)$.

Wtedy $\tilde{A}$ jest podzbiorem co najwyżej przeliczalnym przedziału $I$. Funkcja $G \circ F$ jest ciągła, a ponadto pokażemy, że $(G \circ F)'(t) = h(t)$ dla $t \in I \setminus \tilde{A}$.

Ustalmy $t \in I \setminus \tilde{A}$

Wiemy, że $F$ jest różniczkowalna w punkcie $t$ oraz $F'(t) = f(t)$. Rozpatrujemy dwie możliwości w zależności od położenia punktu $F(t)$ względem zbioru $B$.

(I) Jeśli $F(t) \notin B$, to $G$ jest różniczkowalna w $F(t)$ oraz $G'(F(t)) = g(F(t))$. Czyli
$(G \circ F)'(t) = G'(F(t))F'(t) = g(F(t))f(t) = h(t)$

(II) Jeśli $F(t) \in B$, to $t$ jest punktem wewnętrznym predykatu $F^{-1}(F(t))$ czyli $F$ jest stała w otoczeniu punktu $t$. Wtedy $(G \circ F)'(t) = 0$ oraz $F'(t) = f(t) = 0$ czyli $h(t) = 0$.
Zatem $(G \circ F)'(t) = h(t)$ więc dostajemy (**).

To kończy sprawdzanie warunków w warunkach 2 i dowód Twierdzenia 4.28.

Uwaga 4.29 Jeśli w Twierdzeniu 4.28 założymy, że $g$ jest funkcją ciągłą oraz $F$ jest klasy $C^1$ w otoczeniu predykatu $I$, to tezę możemy zapisać w popularniejszej formie

$$\int_a^b g(F(t))F'(t)\,dt = \int_{F(a)}^{F(b)} g(s)\,ds$$

## §4. Nieoznaczone całki Cauchy'ego

### 1. Wprowadzenie i wstępne uwagi.

Ustalmy $I$ przedział w $\mathbb{R}$ o różnych końcach w $\overline{\mathbb{R}}$ oraz przestrzeń Banacha $E$ nad $\mathbb{R}$. Oznaczmy,

$$\widetilde{\mathcal{F}}(I;E)=\{F:I\longrightarrow E \mid F\text{-pierwotna fe }\mathcal{P}(I;E)\}$$

Jest to jak łatwo zauważyć rzeczywiste przestrzeń wektorowa, zawierająca $E$, którą identyfikujemy z funkcjami stałymi na $I$. W przestrzeni $\widetilde{\mathcal{F}}(I;E)$ możemy wprowadzić relację równoważności

$$F\sim G \Leftrightarrow F-G \text{ - jest funkcją stałą.}$$

Wtedy podział na klasy równoważności naszej przestrzeni odpowiada podzieleniu jej przez $E$ w sensie liniowym, to jest:

$$\widetilde{\mathcal{F}}(I;E)/_{\sim} = \widetilde{\mathcal{F}}(I;E)/_{E}$$

Mamy naturalne odwzorowanie.

$$\mathcal{P}(I;E)\ni f \longrightarrow [F]_{\sim}\in \widetilde{\mathcal{F}}(I;E)/E.$$

gdzie $F$ - jest dowolną pierwotną funkcji $f$

Definicja 4.30 W powyższej sytuacji, dla funkcji $f\in\mathcal{P}(I;E)$, klasę równoważności $[F]_{\sim}$, gdzie $F$ jest dowolną pierwotną $f$ nazywamy jej całką Cauchy'ego nieoznaczoną i oznaczamy $\int f(t)\,dt$

Uwaga 4.31 Jeśli wiemy, że $f \in \mathcal{P}(I; E)$ oraz $F$ jest pierwotną $f$, to klasycznie piszemy często

$$\int f(t)\,dt = F + C,$$

gdzie „$+C$" należy rozumieć jako symbol oznaczający klasę elementu $F$.

## 2. Podstawy obliczania całek nieoznaczonych.

W zakresie efektywnych obliczeń można polecić podręczniki [Fi] Rozdział VIII (początek tomu 2) oraz [Kr]. Bazujemy, na wstępie, na zestawie pierwotnych otrzymywanych ze wzorów na pochodne funkcji, takich jak:

$$\int t^m\,dt = \frac{1}{m+1}\,t^{m+1} + C, \quad t \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{N},$$

$$\int \frac{1}{t}\,dt = \ln t + C, \quad t \in (0, +\infty),$$

$$\int e^t\,dt = e^t + C, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\int \sin t\,dt = -\cos t + C, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\int \cos t\,dt = \sin t + C, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \operatorname{arctg} t + C, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \arcsin t + C, \quad t \in (-1, 1)$$

i wszystkich innych z którymi uda się do tej pory zetknąć. Okazuje się, że znajomość funkcji cyklometrycznych odgrywa tutaj istotną rolę.

Znajomość podstawowych własności pierwotnych, daje nam możliwość całkowania dość szerokiej klasy funkcji. W tym zakresie stosujemy, w szczególności następujące

Twierdzenie 4.32

Z: $I$ przedział w $\mathbb{R}$ o różnych końcach w $\overline{\mathbb{R}}$
$f, g \in \mathcal{P}(I; E)$, $E$ - przestrzeń Banacha nad $\mathbb{R}$.
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

T: (1) $\alpha f + \beta g \in \mathcal{P}(I; E)$

(2) $\int (\alpha f + \beta g)(t)\,dt = \alpha \int f(t)\,dt + \beta \int g(t)\,dt$

D: Wynika natychmiast z liniowości pochodnej

Warto pamiętać również fakt następujący.

Twierdzenie 4.33.

Z: $I$ - niepusty przedział otwarty w $\mathbb{R}$
$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ klasy $C^1$, taka, że $f(x) \neq 0$ dla $x \in I$

T: $\int \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt = \ln|f(t)| + C$

D: Jak łatwo zauważyć $\ln|f(t)|$ jest pierwotną funkcji $f'(t)/f(t)$.

## 3. Twierdzenie o całkowaniu przez części przy obliczaniu całek nieoznaczonych.

Zwykle przy efektywnym wyliczaniu całek nieoznaczonych nie potrzeba nam tak ogólnych twierdzeń jak 4.26 czy 4.28. Zwykle rozważać będziemy funkcje kl $C^1$, określone na przedziałach otwartych, tak jak w następującym twierdzeniu

### Twierdzenie 4.34

Z: $I$ - niepusty przedział otwarty w $\mathbb{R}$
$f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ kl $C^1$

T: $\int f'(t)\,g(t)\,dt = f(t)\,g(t) - \int f(t)\,g'(t)\,dt$

D: Jak wiemy $(f\cdot g)'(t) = f'(t)\,g(t) + f(t)\,g'(t)$ dla wszelkich $t \in I$. Zatem funkcja $f\cdot g$ jest pierwotną funkcji $f'g + f\cdot g'$ na $I$.
Stąd natychmiast wynika teza twierdzenia.

### Przykłady 4.35

(1) $\int t\cos t\,dt = \int t\,(\sin)'(t)\,dt =$

$= t\sin t - \int \sin(t)\,dt = t\sin t + \cos t + C$

(2) $\int \ln t\,dt = \int (t)'\ln t\,dt = t\ln t - \int t\cdot\frac{1}{t}\,dt$

$= t(\ln t - 1) + C$

(3) $\int \operatorname{arctg} t\,dt = \int (t)' \operatorname{arctg} t\,dt =$

$= t \operatorname{arctg} t - \int t \frac{1}{1+t^2}\,dt = t \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\int \frac{2t}{1+t^2}\,dt =$

$= t \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + C$

(4) Łatwo zauważyć, że stosując wielokrotnie całkowanie przez części można wyliczyć wszystkie całki następujących typów:

$\int t^m \sin(at)\,dt$, $\int t^m \cos(at)\,dt$, $\int t^m e^{at}\,dt$

na przedziale $I = \mathbb{R}$ dla $m \in \mathbb{N}$ oraz $a \in \mathbb{R}$.

(5) $\int e^t \cos t\,dt = \int e^t (\sin t)'\,dt = e^t \sin t - \int e^t \sin t\,dt =$

$= e^t \sin t + \int e^t (\cos t)'\,dt = e^t \sin t + e^t \cos t -$

$- \int e^t \cos t\,dt$, skąd dostajemy.

$$\int e^t \cos t = \frac{1}{2} e^t (\sin t + \cos t) + C$$

W podobny sposób wyliczymy $\int e^t \sin t\,dt$

Przykład 4.36 Wyprowadzenie wzoru redukcyjnego na wyliczenie całki:

(1) $$J_n(t) = \int \frac{1}{(t^2+a^2)^n}\,dt, \quad t \in \mathbb{R},\ a \neq 0,$$

dla $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Zauważmy, że $J_n(t) = \int \frac{(t)'}{(t^2+a^2)^n}\,dt =$

$= \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^{n+1}}\,dt =$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{(t^2+a^2)-a^2}{(t^2+a^2)^{n+1}}\,dt =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{1}{(t^2+a^2)^n}\,dt - 2na^2 J_{n+1}(t)$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2n\, J_n(t) - 2na^2 J_{n+1}(t)$$

Czyli

$$J_{n+1}(t) = \frac{1}{2na^2}\,\frac{t}{(t^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}\,\frac{1}{a^2}\,J_n(t).$$

dla $n \geq 1$. Zauważmy, że dla $n=1$ mamy

$$J_1(t) = \int \frac{1}{t^2+a^2}\,dt = \frac{1}{a}\,\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C$$

W ten sposób mamy możliwość policzenia funkcji $J_n$ dla $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(2) $\int t^k (\ln t)^n\,dt$, $t \in (0,+\infty)$, $k,n \in \mathbb{N}$

Jeśli $n=0$, to wyliczenie jest natychmiastowe.
Dla $n \geq 1$ mamy

$$\int t^k (\ln t)^n\,dt = \int \left(\frac{t^{k+1}}{k+1}\right)' (\ln t)^n\,dt =$$

$$= \frac{t^{k+1}}{k+1}\ln t - \frac{n}{k+1}\int t^k (\ln t)^{n-1}\,dt$$

W ten sposób dostajemy całkę z potęgą $\ln t$ o jeden mniejszą niż wyjściowa, co pozwala na redukcję obliczeń do przypadku $n=0$.

## 4. Twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie, przy wyliczaniu całek nieoznaczonych.

Upraszczając założenia w 4.28 dostajemy nastęjące twierdzenie

**Twierdzenie 4.37**

Z: $I, J$ - niepuste przedziały otwarte w $\mathbb{R}$
$E$ - przestrzeń Banacha nad $\mathbb{R}$
$f: I \longrightarrow J$ odwzorowanie klasy $C^1$
$g: J \longrightarrow E$ odwzorowanie ciągłe.

T: Jeśli $\int g(s)ds = G(s) + C$ gdzie $G: J \longrightarrow E$ jest klasy $C^1$, to wtedy.

$$\int g(f(t))f'(t)dt = (G \circ f)(t) + C$$

D: Skoro $G$ jest pierwotną $g$, to otrzymujemy.

$$(G \circ f)'(t) = G'(f(t))f'(t) = g(f(t))f'(t)$$

co natychmiast daje tezę.

**Uwaga 4.38** Rozpoczynając stosowanie tego twierdzenia przy obliczaniu całki nieoznaczonej pewnej funkcji $h: I \longrightarrow E$ stawiamy się tak dobrać funkcje $f: I \longrightarrow J$, $g: J \longrightarrow E$ aby:

(1) zachodziła równość $h(t) = g(f(t))f'(t)$ dla $t \in I$,

(2) funkcja $g$ była łatwiejsza do scałkowania niż $f$.

Dysponując takim przedstawieniem wiemy, że dla $G$ całki nieoznaczonej $g$, $G \circ f$ jest całką $h$.

Przykład 4.39 Obliczamy całkę $\int \sin^3 t \cos t \, dt$ na $I = \mathbb{R}$. Widzimy, że określając

$f: \mathbb{R} \ni t \longrightarrow \sin t \in \mathbb{R}$ oraz $g: \mathbb{R} \ni s \longrightarrow s^3 \in \mathbb{R}$

dostajemy $\sin^3 t \cdot \cos t = g(f(t)) f'(t)$.

Zatem, korzystając z 4.37 wiemy, że dla pierwotnej $G: \mathbb{R} \ni s \longrightarrow \frac{1}{4} s^4 + C \in \mathbb{R}$ funkcji $g$ dostajemy.

$$\int \sin^3 t \cos t \, dt = \frac{1}{4} (\sin t)^4 + C$$

Uwaga 4.40 Często z twierdzenia o zmianie zmiennych (podstawianiu) korzystamy nieco inaczej. Rozpoczynając liczenie całki nieoznaczonej z funkcji $g: J \longrightarrow \mathbb{R}$ podstawiamy funkcję $f: I \longrightarrow J$ klasy $C^1$ dostając, do zbadania całkę.

$$\int g(f(t)) f'(t) \, dt = H(t) + C$$

Jeśli potrafimy teraz funkcję $f$ odwrócić dostając $h: J \longrightarrow I$ klasy $C^1$, to zauważmy, że

$$(H \circ h)'(s) = H'(h(s)) \cdot h'(s) =$$

$$= g(f(h(s))) f'(h(s)) \cdot h'(s) = g(s)$$

Zatem wracając po wyliczeniu $H$ do zmiennej $s$ przez podstawienie $t = h(s)$ dostajemy pierwotną funkcji $g$.

Przykład 4.41 Obliczamy całkę

$$\int \frac{ds}{\sqrt{s}\,(1+\sqrt[3]{s})}$$

Podstawiając $s = f(t) = t^6$ dla $t \in (0, +\infty)$ dostajemy do całkowania funkcję

$$\frac{6t^5}{t^3(1+t^2)}$$ na przedziale $(0, +\infty)$.

Zatem mamy wyliczyć $\int \frac{6t^2}{1+t^2}\,dt =$

$$6\left(\int 1\,dt - \int \frac{1}{1+t^2}\,dt\right) = 6(t - \operatorname{arctg} t) + C$$

po podstawieniu $t = \sqrt[6]{s}$ mamy.

$$\int \frac{ds}{\sqrt{s}(1+\sqrt[3]{s})} = 6\left(\sqrt[6]{s} - \operatorname{arctg}\sqrt[6]{s}\right) + C$$

Zauważmy, że przechodząc między zmiennymi możemy formalnie stosować umowną równość

$$ds = 6t^5\,dt$$

i przy jej użyciu przechodzić między całkami.

Przykłady 4.42

(1) $\int te^{t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int 2te^{t^2}\,dt =$

$= \frac{1}{2}\int e^s\,ds$ dla $s = t^2$

Zatem $\int te^{t^2}\,dt = \frac{1}{2}e^s + C = \frac{1}{2}e^{t^2} + C$

4-37

(2) $\int \frac{1}{\sin t}\,dt \quad , t \in (0,\pi)$

$$\int \frac{1}{\sin t}\,dt = \int \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}\,dt =$$

$$= \int \frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}\cos^2\frac{t}{2}}\,dt = \int \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}}\,dt =$$

$$= \int \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}} \left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)' dt = \dots \qquad s = f(t) = \operatorname{tg}\frac{t}{2} \in (0,+\infty)$$

$$\dots = \int \frac{1}{s}\,ds = \ln s + C = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right) + C$$

(3) Zauważmy na wstępie, że zachodzą równości:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad x \in (-\pi,\pi)$$

a ponadto mamy $\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1\right)$

Zatem określając

$$f: \mathbb{R} \ni s \longrightarrow 2\operatorname{arctg} s \in (-\pi,\pi)$$

dostajemy

$$\sin(f(s)) = \frac{2s}{1+s^2}, \quad \cos(f(s)) = \frac{1-s^2}{1+s^2}$$

oraz $f'(s) = \frac{2}{1+s^2}$ dla $s \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(t) = \operatorname{tg}\frac{t}{2} = s$

Zatem podstawiając w przykładzie (2) funkcję f dostajemy

$$\int \frac{1}{\sin t}\,dt = \int \frac{1+s^2}{2s} \cdot \frac{2}{1+s^2}\,ds = \int \frac{1}{s}\,ds =$$

$= \ln s + C$, dla $s \in (0,\pi)$ czyli:

$$\int \frac{1}{\sin t}\,dt = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right) + C.$$

W ten sam sposób potrafimy sprowadzić wiele całek z funkcjami trygonometrycznymi do prostszej postaci.

## 5. Całkowanie funkcji wymiernych

Dla wielomianów $P, Q \in \mathbb{R}[t]$, $Q \neq 0$ zajmiemy się całką nieoznaczoną funkcji postaci

$$R : \mathbb{R} \setminus Q^{-1}(0) \ni t \longrightarrow \frac{P(t)}{Q(t)} \in \mathbb{R},$$

na przedziale $I$ otwartym $I \cap Q^{-1}(0) = \emptyset$.

Wśród funkcji wymiernych wyróżniamy tak zwane ułamki proste, czyli funkcje postaci:

(1) $\dfrac{A}{(t-a)^n}$, gdzie $a, A \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(2) $\dfrac{Bt+C}{(t^2+pt+q)^n}$, gdzie $B, C, p, q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $p^2 - 4q < 0$, $B \neq 0$ lub $C \neq 0$

Całkowanie ułamków (1) jest łatwe, bo możemy wypisać całkę

$$\int \frac{A}{(t-a)^n}\,dt = \begin{cases} A \ln|t-a|, & n = 1 \\ -\dfrac{A}{(n-1)(t-a)^{n-1}}, & n > 1 \end{cases}$$

Dla ułamków prostych (2) przekształcenia opierają się o podstawienie sprowadzające problem do liczenia całek postaci

$$I_n(t) = \int \frac{1}{(t^2+1)^n}\,dt,$$

o których mówiliśmy w Przykładzie 4.36 (1)

Opierając się na tych podstawowych całkach możemy przejść do wyliczania całek funkcji wymiernych $\frac{P}{Q}$, których mianownik jest iloczynem mianowników występujących w ułamkach prostych typu (1) i (2), czyli po uporządkowaniu

(*) $\underline{Q(t) = (t-a_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (t-a_k)^{n_k} \cdot (t^2+p_1 t+q_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (t^2+p_l t+q_l)^{m_l}}$

W tej sytuacji możemy skorzystać z rozkładu funkcji wymiernej na sumę wielomianu oraz ułamków prostych typu (1) i (2) lub z tak zwanej metody Ostrogradskiego. Takie wyniki znajdujemy w książce [Fi], tom II, Rozdział VIII, §2, sekcje 273-276.

Nieco przyjemniejsze jest wykorzystanie w tym samym celu dość prostych faktów algebraicznych, dotyczących pierścienia wielomianów $\mathbb{R}[t]$. Znajdujemy takie podejście na przykład w skrypcie:

[St] Paweł Strzelecki, Analiza matematyczna I (skrypt wykładu), 2018.

dostępnym na internetowej stronie Autora na UW.
Procedura rozkładu funkcji wymiernej na sumę wielomianu i ułamków prostych jest oparta na dwóch faktach:

(3) $(P, Q \in \mathbb{R}[t],\ \deg Q > 0) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\exists P_1, P_2 \in \mathbb{R}[t] : \underline{P = P_1 Q + P_2},\ \deg P_2 < \deg Q)$

(4) $(Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}[t]$ są <u>względnie pierwsze</u>$) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\exists V_1, V_2 \in \mathbb{R}[t] : \underline{V_1 Q_1 + V_2 Q_2 = 1})$

Dalszy ciąg rozkładu funkcji wymiernej $\frac{P}{Q}$ jest następujący:

- Korzystając z (3) dostajemy $\frac{P}{Q} = P_1 + \frac{P_2}{Q}$
  i dalej zajmujemy się rozkładem ułamka prostego (właściwego) $\frac{P_2}{Q}$, w którym $\deg P_2 < \deg Q$
- Czynniki w mianowniku Q jak w (*) dzielimy na dwie względnie pierwsze części $Q_1$ i $Q_2$ do których dobieramy $V_1$ i $V_2$ z (4) dostając równość

$$\frac{P_2}{Q} = \frac{P_2(V_1Q_1 + V_2Q_2)}{Q_1 \cdot Q_2} = \frac{P_2V_1}{Q_2} + \frac{P_2V_2}{Q_1}$$

Następnie powtarzamy rozkład korzystając z (3) dla tak uzyskanych ułamków. Całą procedurę powtarzamy $k+l-1$ razy dostając w efekcie rozkład

$$\frac{P(t)}{Q(t)} = W(t) + \sum_{i=1}^{k} \frac{S_i(t)}{(t-a_i)^{n_i}} + \sum_{j=1}^{l} \frac{T_j(t)}{(t^2+p_jt+q_j)^{m_j}}$$

w którym $\deg S_i < n_i$ dla $i = 1, \dots, k$ oraz $\deg T_j < 2m_j$ dla $j = 1, \dots, l$

- Na koniec w każdym ze składników wykonujemy serię dzieleń według (3) wielomianów $S_i(t)$ przez $(t-a_i)$ dla $i = 1, \dots, k$ oraz wielomianów $T_j(t)$ przez $(t^2+p_jt+q_j)$ dla $j = 1, \dots, l$, dostaniemy ułamki proste o postaci (1) i (2), w których mianowniki są postaci:

$$(t-a_1)^{n_1}, (t-a_1)^{n_1-1}, \dots, (t-a_1),$$
$$\vdots$$
$$(t-a_k)^{n_k}, (t-a_k)^{n_k-1}, \dots, (t-a_k)$$
$$(t^2+p_1t+q_1)^{m_1}, \dots, (t^2+p_lt+q_l),$$
$$\text{itd aż do } (t^2+p_lt+q_l).$$

Ten sposób postępowania daje nadzieję, że dla szczególnych problemów dostaniemy szybciej wynik niż przy użyciu metod omówionych w [Fi].

## 6. Uwagi końcowe

Całą, bardzo szczegółową teorię całkowania możemy znaleźć w [Fi], Rozdział VIII oraz [Kr] Rozdział 9 w wersji nieco skróconej.

Warto odnotować, że za pomocą techniki opracowanej w 4.42(3) potrafimy całkować funkcje $R(\sin t, \cos t)$ gdzie $R$ jest funkcją wymierną rozpatrywaną w punkcie 5.

Książka [Fi] przedstawia również wiele uwag o całkach eliptycznych, których nie znajdziemy w [Kr]. Wielu funkcji nie jesteśmy w stanie scałkować efektywnie (w postaci skończonej), ale tutaj mamy też problemy z całkowaniem funkcji wymiernych, w których nie mamy rozkładu mianownika na czynniki liniowe i kwadratowe.

Wśród trudnych do efektywnego scałkowania znajdujemy funkcje: $\frac{e^t}{t}$, $\frac{\sin t}{t}$, $\frac{\cos t}{t}$, których całki nazywane są odpowiednio: logarytmem, sinusem i cosinusem całkowym.

# Rozdział 5. Całka Riemanna.

## §1. Podstawowe pojęcia i fakty.

### 1. Podstawowe definicje.

Niech $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$.

**Definicja 5.1**

(1) Podziałem przedziału $[a,b]$ nazywamy układ punktów $(t_0,\dots,t_k)$, $k \geq 1$ taki, że $a=t_0<t_1<\dots<t_k=b$. Piszemy $P=(t_0,\dots,t_k)$.

(2) Średnicą podziału $P=(t_0,\dots,t_k)$ przedziału $[a,b]$ nazywamy $\delta(P)=\max\{t_j-t_{j-1} : j=1,\dots,k\}$.

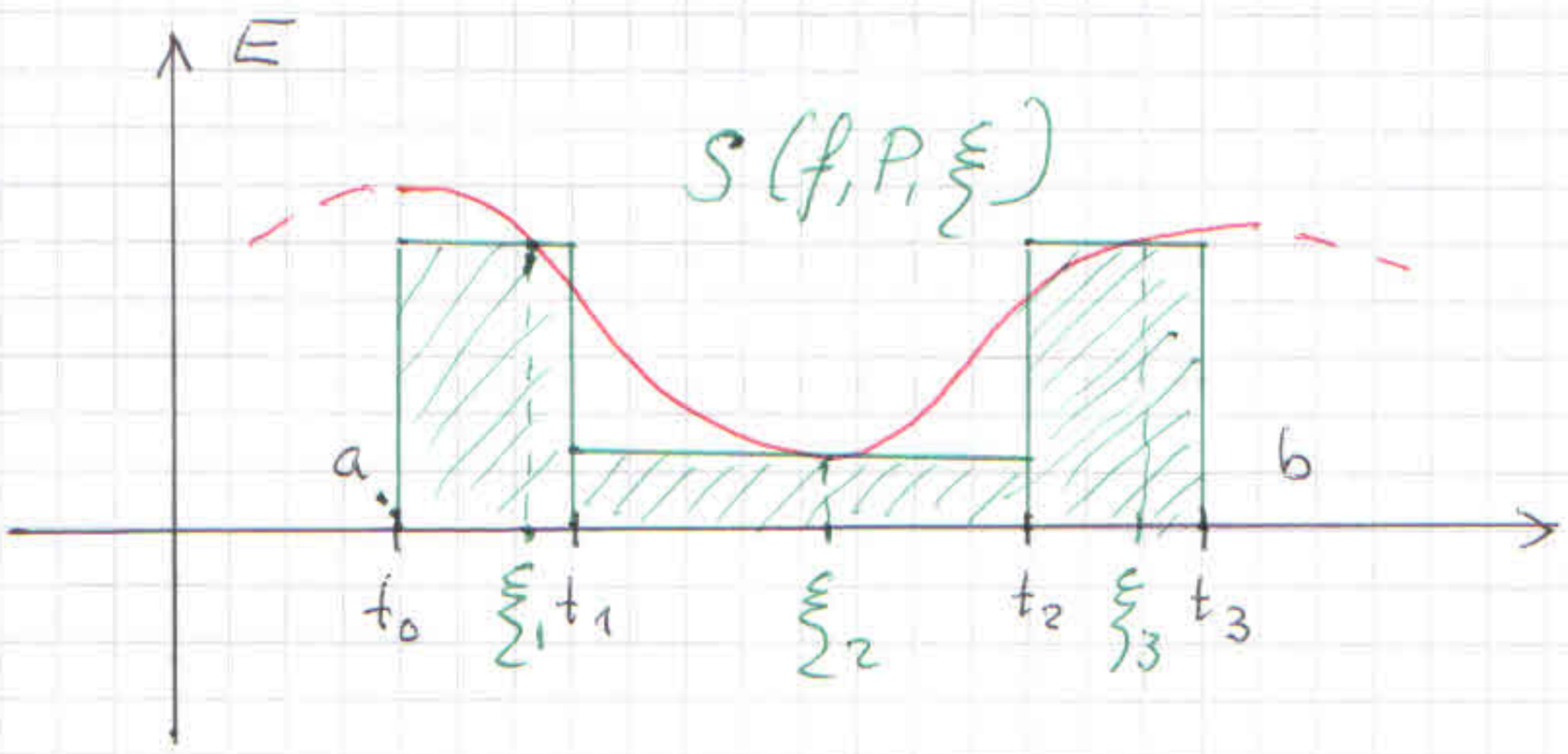
(3) Ciąg podziałów $\{P^{(n)}\}$ nazywamy normalnym, jeśli $\delta(P^{(n)}) \longrightarrow 0$ $(n \longrightarrow +\infty)$

(4) Układem punktów pośrednich dla danego podziału $P=(t_0,\dots,t_k)$ nazywamy $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_k)$ taki, że $\xi_j \in [t_{j-1},t_j]$ dla $j=1,\dots,k$.

Niech następnie $A \subset \mathbb{R}$, $E$ - p. Banacha nad $\mathbb{R}$. $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, $I=[a,b] \subset A$, $f: A \longrightarrow E$. Ustalmy podział $P=(t_0,\dots,t_k)$ oraz układ punktów pośrednich $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_k)$ dla podziału $P$.

**Definicja 5.2**. Sumą Riemanna funkcji $f$ na $[a,b]$ dla podziału $P$ i układu punktów pośrednich $\xi$ nazywamy:

$$S(f,P,\xi) = \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j)(t_j - t_{j-1}).$$




Przy wyżej przyjętych założeniach wprowadzamy następującą podstawową definicję.

**Definicja 5.3** Funkcję $f$ nazywamy całkowalną w sensie Riemanna na $[a,b]$ jeśli istnieje $J \in E$ takie, że dla dowolnego normalnego ciągu podziałów $\{P^{(n)}\}$ oraz związanego z nim ciągu układów punktów pośrednich $\{\xi^{(n)}\}$ mamy.

$$S(f, P^{(n)}, \xi^{(n)}) \longrightarrow J \quad (n \to +\infty).$$

Element $J$ nazywamy całką Riemanna $f$ na $[a,b]$ i oznaczamy dalej symbolem $\int_{[a,b]} f(x)\,dx$.

Dla $f: A \longrightarrow E$, $A \subset \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $[\alpha,\beta] \cup [\beta,a] \subset A$ określamy

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx := \begin{cases} \int_{[\alpha,\beta]} f(x)\,dx & \text{gdy } \alpha < b,\ f \text{ - całkowalna na } [\alpha,\beta], \\ 0, & \text{gdy } \alpha = \beta, \\ -\int_{[\beta,\alpha]} f(x)\,dx & \text{gdy } \beta < \alpha,\ f \text{ - całk. na } [\beta,\alpha]. \end{cases}$$

## 2. Uwagi historyczne

Konstrukcję rozpoczęli:
- Cauchy ok. 1821 roku, dla funkcji ciągłych, $E = \mathbb{R}$
- Riemann w 1853 roku, w ogólnym przypadku, $E = \mathbb{R}$
- Lebesgue w 1902 roku rozstrzygnął problem opisu funkcji mających całkę w sensie Riemanna. dowodząc dla $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $a < b$ fakt następujący:

Funkcja $f$ jest całkowalna w sensie Riemanna wtedy i tylko wtedy gdy jest ograniczona oraz zbiór punktów na przedziale $[a,b]$, w których jest ona nieciągła ma miarę Lebesgue'a zero.

Zbiór $Z \subset \mathbb{R}$ ma miarę Lebesgue'a zero (co zapisujemy $\mathcal{L}^1(Z) = 0$) jeśli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje ciąg $\{(a_n, b_n)\}$, przedziałów otwartych niepustych takich, że $Z \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n)$ i $\sum_{n=0}^{+\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon$.

Rozważane były inne konstrukcje, wśród których wyróżnimy dwie: Darboux i Henstocka-Kurzweila.

### Konstrukcja Darboux (1870r.)

Rozpatrujemy $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$, $[a,b] \subset A$. Przy ustalonym podziale $P = (t_0, t_1, \ldots, t_k)$ określamy.

$$\overline{S}(P) = \sum_{i=1}^{k} \left( \sup f([t_{j-1}, t_j]) \right) (t_j - t_{j-1})$$

5-04

$$\underline{S}(P) = \sum_{j=1}^{k} (\inf f([t_{j-1}, t_j])) (t_j - t_{j-1})$$

Następnie określamy

$$\overline{\int_{[a,b]}} f(x)\,dx = \inf\{\overline{S}(P) : P\text{-podział } [a,b]\}$$

$$\underline{\int_{[a,b]}} f(x)\,dx = \sup\{\underline{S}(P) : P\text{-podział } [a,b]\}$$

Jeśli te ostatnie liczby zwane górną i dolną całką Darboux są sobie równe, to mówimy, że $f$ jest całkowalna w sensie Darboux i ich wspólną wartość nazywamy całką Darboux funkcji $f$ na $[a,b]$. Konstrukcja ta dużo to samo co całka Riemanna i czasami jest nazywana całką Riemanna.

Całka Henstocka-Kurzweila nazywana także Denjoy-Perrona, uogólnioną całką Riemanna HK-całką, („The Gauge Integral"). powstała z prób uogólniania całki Riemanna w kierunku efektów uzyskiwanych z całki Lebesgue'a. „Jest ona modna" w ostatnich latach zaś „kształtowała się" od początku XX w. do lat 1955-1957 gdy niezależnie R. Henstock (1955) i J. Kurzweil (1957) nadali jej bardzo proste sformułowanie, zbliżone do definicji całki Riemanna.

Aby porównać te dwie definicje zauważmy, że funkcja $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna jeśli zachodzi następujący warunek

$$\exists J \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \left[ \begin{array}{l} P = (t_0, \dots, t_k) \text{ - podz. } [a,b] \\ \xi = (\xi_1, \dots, \xi_k) \text{ - u.p. } P \\ t_j - t_{j-1} < \delta,\ j = 1, \dots, k \end{array} \right] \Rightarrow |S(f,P,\xi) - J| < \varepsilon$$

W całce HK stałą $\delta$ zastępujemy dość dowolną funkcją. $\delta : [a,b] \longrightarrow (0,+\infty)$ zaś ograniczenia $t_j - t_{j-1},\ j = 1, \dots, k$ warunkami $t_j - t_{j-1} < \delta(\xi_j),\ j = 1, \dots, k$. W ten sposób dostajemy warunek.

$$\exists J \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta : [a,b] \to (0,+\infty) : \left[ \begin{array}{l} P = (t_0, \dots, t_k) \text{ p. } [a,b] \\ \xi = (\xi_1, \dots \xi_k) \text{ u.p.p. } P \\ t_j - t_{j-1} < \delta(\xi_j),\ j = 1, \dots, k \end{array} \right] \Rightarrow |S(f,P,\xi) - J| < \varepsilon$$

Okazuje się, że ta drobna modyfikacja daje istotne rozszerzenie klasy funkcji całkowalnych i sporej nowych efektów obejmujących swoim zasięgiem również całkę Lebesgue'a funkcji jednej zmiennej rzeczywistej.
Funkcja $\delta : [a,b] \longrightarrow (0,+\infty)$ to tzw. „gauge" (wskaźnik, miernik) sygnalizująca „the gauge integral"

Całka Stieltjesa (1894 r) to przykład konstrukcji rozszerzenia całki Riemanna; gdzie poza podstawowymi obiektami wprowadzamy dodatkowo funkcję $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ i w miejsce zwykłej sumy bierzemy.
$\sum_{j=1}^{k} f(\xi_j)(g(t_j) - g(t_{j-1}))$. Konstruowaną tak całkę nazywa się całką Stjeltiesa i oznacza $\int_{[a,b]} f(t)\,dg(t)$.

## §2 Funkcje całkowalne, podstawowe własności całki

### 1. Funkcje całkowalne w sensie Riemanna.

Niech $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, $I=[a,b]$, $E$ - p. Banacha nad $\mathbb{R}$

Oznaczmy

$$\mathcal{R}(I;E)=\{f:I\to E \mid f\text{ - jest całkowalna w s. Riemanna}\}$$

Otrzymujemy wtedy naturalne odwzorowanie:

$$(*)\quad \mathcal{R}(I;E)\ni f \longrightarrow \int_I f(x)dx\in E$$

**Twierdzenie 5.4**

Zł: $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, $I=[a,b]$, $E$ - p. Banacha nad $\mathbb{R}$.

Tz: (1) $\mathcal{R}(I;E)$ - z naturalnymi działaniami jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$.

(2) Odwzorowanie $(*)$ jest liniowe

(3) $\mathcal{R}(I;E)\subset\mathcal{B}(I;E)$

(4) Gdy $E=\mathbb{R}$ i $f\in\mathcal{R}(I;\mathbb{R})$, to mamy nierówności

$$\inf f(I)\leqslant \frac{1}{b-a}\int_I f(x)dx\leqslant \sup f(I).$$

D: Dowodzimy jednocześnie (1) i (2). Jeśli $f,g\in\mathcal{R}(I;E)$ oraz $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, to dla ciągu podziałów $\{P^{(n)}\}$ oraz układów punktów pośrednich $\{\xi^{(n)}\}$ mamy $S(\alpha f+\beta g,P^{(n)},\xi^{(n)})=\alpha S(f,P^{(n)},\xi^{(n)})+\beta S(g,P^{(n)},\xi^{(n)})$, skąd tatwo dostajemy tezę.

Aby pokazać (3) zauważmy, że jeśli $f$ nie jest ograniczona, to dla dowolnego ciągu podz. $\{P^{(n)}\}$ możemy tak dobrać punkty pośrednie $\{\xi^{(n)}\}$ aby $\|S(f,P^{(n)},\xi^{(n)})\|\geqslant n$, co daje sprzeczność z całkowalnością $f$.

(4) Oczywista konsekwencja zbieżności sum Riemanna

## Twierdzenie 5.5

Zł: $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, $I=[a,b]$, $E$ - p. Banacha nad $\mathbb{R}$

$f_n \in \mathcal{R}(I;E)$ dla $n \in \mathbb{N}$

$f: I \longrightarrow E$

$f_n \rightrightarrows f \quad (n \to +\infty)$

T: (1) $f \in \mathcal{R}(I;E)$

(2) $\int_I f_n(x)\,dx \longrightarrow \int_I f(x)\,dx \quad (n \to +\infty)$.

D: Mamy ciąg funkcyjny $\{f_n\}$ w $\mathcal{B}(I;E)$, zbieżny jednostajnie do $f: I \to E$, więc oczywiście $f \in \mathcal{B}(I;E)$. Niech teraz.

$$J_n = \int_I f_n(x)\,dx \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}$$

Wtedy.

$$J_p - J_q = \int_I (f_p - f_q)(x)\,dx \quad \text{dla } p,q \in \mathbb{N}$$

Mamy nierówność $\|J_p - J_q\| \leq (b-a)\|f_p - f_q\|$, $p,q \in \mathbb{N}$.

Skoro $\{f_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $\mathcal{B}(I;E)$ więc $\{J_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $E$. Zatem istnieje $J \in E$ takie, że $J_n \to J \quad (n \to +\infty)$

Pokażemy następnie, że $f \in \mathcal{R}(I;E)$ oraz $\int_I f(x)\,dx = J$. Wybierzmy więc $\{P^{(k)}\}$ normalny ciąg podziałów $I$ oraz związany z nim dowolny ciąg układów punktów pośrednich $\{\xi^{(k)}\}$.

Dla $k,n \in \mathbb{N}$ mamy nierówności

$$\|S(f,P^{(k)},\xi^{(k)}) - J\| \leq \|S(f,P^{(k)},\xi^{(k)}) - S(f_n,P^{(k)},\xi^{(k)})\| +$$
$$+ \|S(f_n,P^{(k)},\xi^{(k)}) - J_n\| + \|J_n - J\|$$

Weźmy $\varepsilon > 0$. Ustalmy $n \in \mathbb{N}$ tak aby niezależnie od $k$, dwa skrajne składniki prawej strony były mniejsze od $\varepsilon/3$. Wtedy

$$\|S(f,P^{(k)},\xi^{(k)}) - J\| \leq \frac{2}{3}\varepsilon + \|S(f_n,P^{(k)},\xi^{(k)}) - J_n\|$$
dla $k \in \mathbb{N}$

Skoro $f_n \in \mathcal{R}(I;E)$ więc istnieje $K \in \mathbb{N}$ takie, że dla $k \geq K$ mamy $\|S(f_n,P^{(k)},\xi^{(k)}) - J_n\| < \varepsilon/3$

Zatem $\|S(f,P^{(k)},\xi^{(k)}) - J\| < \varepsilon$ dla $k \geq K$ co kończy dowód.

## Twierdzenie 5.6

Z: $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, $I=[a,b]$, $E$ - p. Banacha nad $\mathbb{R}$

T: (1) $\mathcal{R}(I;E)$ jest podprzestrzenią Banacha p. $\mathcal{B}(I;E)$.

(2) $\mathcal{R}(I;E) \ni f \longrightarrow \int_I f(x)dx \in E$ jest liniowe ciągłe.

D: Jak wiemy $\mathcal{R}(I;E)$ jest podprzestrzenią przestrzeni Banacha $\mathcal{B}(I;E)$. Na podstawie 5.5 dostajemy domkniętość $\mathcal{R}(I;E)$ w $\mathcal{B}(I;E)$ czyli $\mathcal{R}(I;E)$ jest przestrzenią Banacha.

Dla funkcji $f \in \mathcal{R}(I;E)$ mamy szacowanie.

$\|\int_I f(x)dx\| \leq (b-a)\|f\|$ skąd dostajemy (2).

## 2. Porównanie całki Riemanna z całką Cauchy'ego

Niech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a,b]$,
$E$ - przestrzeń Banacha nad $\mathbb{R}$

Zajmować będziemy się tutaj całkami Riemanna i Cauchy'ego funkcji określonych na $I$ o wartościach w przestrzeni $E$ oznaczając je odpowiednio

$$\int_{[a,b]} f(t)\,dt \quad \text{oraz} \quad \int_a^b f(t)\,dt$$

Rozważania rozpoczniemy od następującego lematu.

**Lemat 5.7**

Z: $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a,b]$, $E$ - p. Banacha nad $\mathbb{R}$

T: (1) $\mathcal{S}(I;E) \subset \mathcal{R}(I;E)$

(2) Jeśli $f \in \mathcal{S}(I;E)$, to

$$\int_{[a,b]} f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$$

D: $\mathcal{S}(I;E)$ jest jak wiemy przestrzenią wektorową, więc tezę twierdzenia wystarczy sprawdzić dla dowolnego układu generatorów w przestrzeni $\mathcal{S}(I;E)$. Zauważmy więc, że $\mathcal{S}(I;E)$ jest generowane przez funkcje następujących dwóch typów:

- (I) $c \in [a,b]$, $v \in E$

$$f(t) = \begin{cases} v, & t = c, \\ 0, & t \in [a,b] \setminus \{c\}. \end{cases}$$

(II) $a_1, b_1 \in [a,b]$, $a_1 < b_1$, $v \in E$

$$f(t) = \begin{cases} v, & t \in (a_1, b_1) \\ 0, & t \in [a, a_1] \cup [b_1, b] \end{cases}$$

Łatwo zauważyć, że funkcje tych typów generują $S(I;E)$. Ponadto dla funkcji typu (I) mamy

$$\int_{[a,b]} f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt = 0$$

Faktycznie, wybierając podział $P$ przedziału $[a,b]$ o średnicy $\delta$ dostajemy, dla układu $\xi$ punktów pośrednich

$$|S(f,P,\xi)| \leq 2\delta\|v\|$$

Zatem, dla normalnego ciągu podziałów oraz związanego z nim ciągu układów punktów pośrednich dostajemy

$$|S(f,P^{(n)},\xi^{(n)})| \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

Z drugiej strony funkcja stała $F(t) = v$ dla $t \in [a,b]$ jest pierwotną funkcji $f$, skąd

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = 0$$

Analogicznie, możemy dość łatwo przekonać (Ćw.), że dla funkcji typu (II) mamy

$$\int_{[a,b]} f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt = v(b_1 - a_1),$$

co kończy dowód Lematu 5.7

**Twierdzenie 5.8**

Z: $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$

$E$ - przestrzeń Banacha nad $\mathbb{R}$

T: (1) $\mathcal{P}(I; E) \subset \mathcal{R}(I; E)$

(2) Jeśli $f \in \mathcal{P}(I; E)$, to

$$\int_{[a,b]} f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$$

D: Mamy inkluzje

$$\mathcal{S}(I; E) \subset \mathcal{R}(I; E) \subset \mathcal{B}(I; E)$$

Przestrzeń $\mathcal{R}(I; E)$ jest domknięta w $\mathcal{B}(I; E)$

więc $\mathcal{P}(I; E) = \overline{\mathcal{S}(I; E)} \subset \mathcal{R}(I; E)$

Stąd dostajemy punkt (1)

Na przestrzeni $\mathcal{P}(I; E)$ obydwie całki są odwzorowaniami ciągłymi. Skoro pokrywają się one na podprzestrzeni gęstej, która jest $\mathcal{S}(I; E)$, więc muszą być sobie równe.

Stąd dostajemy punkt (2) tezy twierdzenia.

**Uwaga 5.9.** Jeśli $E \neq \{0\}$, to mamy silne zawieranie $\mathcal{P}(I; E) \subsetneq \mathcal{R}(I; E)$.

Uwagi 5.10

(1) Jeśli rozpatrywana w teorii całki Cauchy'ego i teorii całki Riemanna przestrzeń unormowana $E$ jest przestrzenią unormowaną nad $\mathbb{C}$, to łatwo zauważyć, że obydwie rozpatrywane całki są odwzorowaniami $\mathbb{C}$-liniowymi. Wiedząc to natychmiast dla całki Riemanna, gdyż rozpatrując $f:[a,b]\longrightarrow E$, $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, $\alpha\in\mathbb{C}$, podział $P$ i układ punktów pośrednich $\xi$, dostajemy

$$S(\alpha f, P, \xi) = \alpha S(f, P, \xi).$$

Stąd dostajemy więc również $\mathbb{C}$-liniowość całki Cauchy'ego. Jednak w momencie poszukiwania pierwotnych funkcji $E$ musimy traktować ją jako przestrzeń unormowaną nad $\mathbb{R}$.

(2) W dalszych rozważaniach, dla funkcji prostych (zazwyczaj będą to funkcje ciągłe) całki Cauchy'ego i Riemanna będziemy wykorzystywać wymiennie. Wybór zależał będzie od aktualnie wykorzystywanych własności.

## §3. Przykłady zastosowań teorii całek Cauchy'ego i Riemanna.

### 1. Wzór Wallisa.

**Twierdzenie 5.11**

(1) Dla $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ zachodzą nierówności:

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{2n}{2n+1} < \left(\frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}\right)^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2}$$

(2) $$\left(\frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}\right)^2 \frac{1}{2n+1} \longrightarrow \frac{\pi}{2} \quad (n \to +\infty)$$

D: Punkt (2) wynika z punktu (1) natychmiast po zastosowaniu twierdzenia o trzech ciągach.

Przechodząc do dowodu (1) oznaczmy dla $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t\,dt \quad \text{(całka Cauchy'ego)}$$

Przypuśćmy następnie, że $n \geq 2$. Wtedy:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} t\,(-\cos t)'\,dt =$$

$$= \left[-\sin^{n-1} t \cos t\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (n-1)\sin^{n-2} t \cos^2 t\,dt =$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} t \cos^2 t\,dt = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$

Czyli $I_n = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$, skąd

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad \text{dla} \quad n \geq 2$$

Ponadto, jak łatwo wyliczyć $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$

Zauważmy następnie, że

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} = \ldots = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

(*)

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} = \ldots = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$$

Dla $n \geq 1$ oraz $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ mamy nierówności

$$0 < \sin^{2n+1} t < \sin^{2n} t < \sin^{2n-1} t$$

z których dostajemy

$$0 < I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1} = \frac{2n+1}{2n} I_{2n+1}$$

Zatem mamy nierówności

$$0 < I_{2n+1} < I_{2n} < \frac{2n+1}{2n} I_{2n+1}$$

oraz $$\frac{2n}{2n+1} < \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} < 1$$

Ale $$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{2}{\pi} \left( \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)} \right)^2 \frac{1}{2n+1}$$ z (*)

skąd dostajemy.

$$\frac{\pi}{2} \frac{2n}{2n+1} < \left( \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)} \right)^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2}.$$

To kończy dowód 5.11.

## 2. Wzór Stirlinga.

### Twierdzenie 5.12

Z: $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

T: $\exists \Theta \in (0,1] : n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}\, e^{\frac{\Theta}{12n}}$

D: Zauważmy, że dla $|x|<1$ mamy przedstawienie.

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

gdyż szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n$ jest lokalnie jednostajnie zbieżny na $(-1,1)$. Zatem dla $x \in (-1,1)$.

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots,$$ skąd dostajemy.

$$\ln(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots$$ oraz następnie.

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = 2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \dots$$

Stąd dla $x \in (0,1)$ dostajemy nierówności

$$2x < \ln\frac{1+x}{1-x} < 2x + \frac{2}{3}x^3\left(1 + x^2 + x^4 + \dots\right),$$

z których wynika, że

$$(*)\quad 2x < \ln\frac{1+x}{1-x} < 2x + \frac{2x^3}{3(1-x^2)} \quad \text{dla } x \in (0,1).$$

Określmy $a_n = \dfrac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}$ dla $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Wtedy

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!\,(n+1)^{n+1} e^{-(n+1)}\sqrt{n+1}}{(n+1)!\,n^n e^{-n}\sqrt{n}} =$$

$$= \frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^{1/2} = \frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$$

Skąd dostajemy

$$(**)\quad \ln\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2n+1}{2}\ln\frac{n+1}{n} - 1 \quad \text{dla } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

5-16

Wstawiając w (*) $x = \frac{1}{2n+1}$ dla $n \geq 1$ otrzymujemy

$$\frac{2}{2n+1} < \ln \frac{\frac{2n+2}{2n+1}}{\frac{2n}{2n+1}} < \frac{2}{2n+1} + \frac{1}{12} \cdot \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{1}{n(n+1)} \quad (\text{ćw.})$$

Skąd po uporządkowaniu

$$1 < \frac{2n+1}{2} \ln \frac{n+1}{n} < 1 + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Po odjęciu 1 od stron tych nierówności, w oparciu o równość (**) dostajemy.

$$0 < \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \quad \text{dla } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Dodając stronami powyższe nierówności dla $n, n+1, \ldots, n+k$, $n \geq 1$, $k \geq 1$ dostajemy.

$$(***) \quad 0 < \ln \frac{a_n}{a_{n+k}} < \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}\right)$$

Skoro z (**) $0 < \ln \frac{a_n}{a_{n+1}}$ więc $\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$ dla $n \geq 1$, więc ciąg $\{a_n\}$ jest malejący. Zatem przy $a_n > 0$, $n \geq 1$

$$\exists \alpha \geq 0 : a_n \longrightarrow \alpha \quad (n \to +\infty)$$

Zauważmy następnie, że z prawej nierówności (***) wynika, że $\alpha > 0$ oraz.

$$0 < \ln \frac{a_n}{\alpha} \leq \frac{1}{12n}$$

Jeśli zatem ustalimy $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, to istnieje $\Theta \in (0,1]$ takie, że: $\ln \frac{a_n}{\alpha} = \frac{\Theta}{12n}$ skąd $a_n = \alpha \cdot e^{\frac{\Theta}{12n}}$

Skąd dostajemy równość

$$(****) \quad n! = n^n e^{-n} \sqrt{n}\, \alpha\, e^{\frac{\Theta}{12n}} \quad \text{dla pewnego } \Theta \in (0,1]$$

Ze wzoru Wallisa mamy

$$\left(\frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}\right)^2 \frac{1}{2n+1} \longrightarrow \frac{\pi}{2} \quad (n \to +\infty)$$

Zatem

$$\frac{(2^n \cdot n!)^4}{((2n)!)^2 (2n+1)} \longrightarrow \frac{\pi}{2} \quad (n \to +\infty)$$

Po podstawieniu w miejsce $n!, (2n)!$ równości (****) i dość żmudnym, standardowym przekształceniu.

$$\frac{\alpha^2}{4} = \frac{\pi}{2} \quad \text{czyli} \quad \underline{\alpha = \sqrt{2\pi}}$$

co kończy dowód.

## 3. Wzór Taylora z resztą całkową.

Na wstępie zauważmy, że dla odwzorowań o wartościach w przestrzeniach Banacha zachodzi następujący fakt zbliżony charakterem do Lematu 3.52

**Lemat 5.13**

Z: $U$-otwarty w $\mathbb{R}$, $[0,1] \subset U$, $F$-przestrzeń Banacha nad $\mathbb{R}$
$v: U \longrightarrow F$ klasy $C^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$
$\varphi: U \ni t \longrightarrow v(t) + \frac{1-t}{1!} v'(t) + \ldots + \frac{(1-t)^n}{n!} v^{(n)}(t) \in F$

T: (1) $\varphi$ jest klasy $C^1$;

(2) $\varphi'(t) = \frac{(1-t)^n}{n!} v^{(n+1)}(t)$ dla $t \in U$.

D: Teza wynika z prostego przeliczenia, analogicznego jak w 3.52

$$\varphi'(t) = v'(t) + \left(-v'(t) + \frac{(1-t)}{1!} v''(t)\right) +$$
$$+ \left(-\frac{(1-t)}{1!} v''(t) + \frac{(1-t)^2}{2!} v'''(t)\right) + \ldots +$$
$$+ \left(-\frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} v^{(n)}(t) + \frac{(1-t)^n}{n!} v^{(n+1)}(t)\right) =$$
$$= \frac{(1-t)^n}{n!} v^{(n+1)}(t).$$

To kończy sprawdzenie. W tym przypadku całe przeliczenie odbywa się podobnie jak dla $F = \mathbb{R}$. Lemat ten pozwala na wykazanie następującego twierdzenia.

Twierdzenie 5.14 (Wzór Taylora z resztą całkową).

Z: $\Omega$ otwarty w $\mathbb{R}$, $F$ - przestrzeń Banacha nad $\mathbb{R}$

$f: \Omega \longrightarrow F$ klasy $C^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$

$a, h \in \mathbb{R}$, odcinek $[a, a+h] \subset \Omega$

T: $$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) h^k + \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(a+th) h^{n+1} dt$$

D: Określamy $U := \{t \in \mathbb{R} : a+th \in \Omega\}$ oraz

$$v: U \ni t \longrightarrow f(a+th) \in F$$

Z Lematu 5.13 wynika, że funkcja $\varphi$ jest pierwotną. $\frac{(1-t)^n}{n!} v^{(n+1)}(t) = \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+th) h^{n+1}$

zatem

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+th) h^{n+1} dt$$

czyli

$$f(a+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) h^k = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+th) h^{n+1} dt,$$

co po uporządkowaniu daje tezę 5.14.

# §4. Niewłaściwa całka Riemanna.

## 1. Podstawowe pojęcia.

$I$ - przedział w $\mathbb{R}$ o różnych końcach $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$, $\alpha < \beta$

$E$ - przestrzeń Banacha nad $\mathbb{R}$.

$f: I \longrightarrow E$

Przypuśćmy, że $f$ ma następującą własność:

$\forall x, y \in I, x < y : f|[x,y] \in \mathcal{R}([x,y]; E)$

Będziemy wtedy pisać $f \in \widetilde{\mathcal{R}}(I; E)$

oraz określimy odwzorowanie

$$\Phi: I \times I \ni (x,y) \longrightarrow \Phi(x,y) = \int_x^y f(t)\,dt \in E$$

Uwagi 5.15

(1) Jeśli w parze $(x,y)$ mamy $y \leqslant x$, to stosujemy tutaj umowy wprowadzone po Def. 5.3 (str. 5-02).

(2). Jeśli $f \in \mathcal{P}(I;E)$, to jak tutaj zauważyć $f \in \widetilde{\mathcal{R}}(I;E)$. Ponadto jeśli $F: I \to E$ jest pierwotną $f$, to wtedy otrzymujemy równość $\Phi(x,y) = F(y) - F(x)$ dla $(x,y) \in I \times I$

(3). W ramach AM2 całkami niewłaściwymi będziemy się zajmować głównie w przypadku $E = \mathbb{R}$.

**Definicja 5.16** Jeśli $\alpha \notin I$ lub $\beta \notin I$ oraz istnieje granica

$$\lim_{(x,y)\to(\alpha,\beta)} \Phi(x,y) \in E,$$

to nazywamy ją niewłaściwą całką Riemanna funkcji $f$ na przedziale $I$ i oznaczamy $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt$. Piszemy wtedy $f \in \mathcal{R}(I;E)$.

Dalsze rozważania poprzedzimy wygodnym lematem.

**Lemat 5.17**

Z: $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a<b<c$, $f:[a,c]\to\mathbb{R}$, $f_1 = f|[a,b]$, $f_2 = f|[b,c]$

T: Następujące warunki są równoważne:

(1) $f \in \mathcal{R}([a,c];\mathbb{R})$

(2) $f_1 \in \mathcal{R}([a,b];\mathbb{R})$, $f_2 \in \mathcal{R}([b,c];\mathbb{R})$.

Jeśli warunki te są spełnione, to zachodzi równość

$$\int_{[a,c]} f(t)\,dt = \int_{[a,b]} f_1(t)\,dt + \int_{[b,c]} f_2(t)\,dt.$$

D: (1) $\Rightarrow$ (2) Przypuśćmy, że $f \in \mathcal{R}([a,c];\mathbb{R})$ oraz $f_1 \notin \mathcal{R}([a,b];\mathbb{R})$. Możemy wtedy wybrać dwa ciągi normalne podziałów i układów punktów pośrednich odcinka $[a,b]$ tak aby:

$$S(f_1, \tilde{P}^{(n)}, \tilde{\xi}^{(n)}) \to \tilde{J}_1 \quad (n\to+\infty),$$
$$S(f_1, \tilde{\tilde{P}}^{(n)}, \tilde{\tilde{\xi}}^{(n)}) \to \tilde{\tilde{J}}_1 \quad (n\to+\infty)$$

oraz $\tilde{J}_1 \neq \tilde{\tilde{J}}_1$. Ponieważ $f$ jest ograniczona, więc można wybrać normalny ciąg podziałów $\{P_2^{(n)}\}$ i układów punktów pośrednich $\{\xi_2^{(n)}\}$ dla $[b,c]$ tak, aby ciąg $\{S(f_2, P_2^{(n)}, \xi_2^{(n)})\}$ był zbieżny. Łącząc podziały i układy punktów pośrednich na $[a,c]$ dostajemy sprzeczność z (1).

(2) ⇒ (1) Łatwo sprawdzić, że dla dowolnego normalnego ciągu podziałów i układów punktów pośrednich dostajemy zbieżność sum Riemanna na $[a,c]$ do sumy całek na $[a,b]$ i $[b,c]$ (ćw.) Dostajemy w ten sposób równoważność (1) i (2) oraz końcową równość.

## 2. Kryterium całkowe zbieżności szeregów

### Twierdzenie 5.18

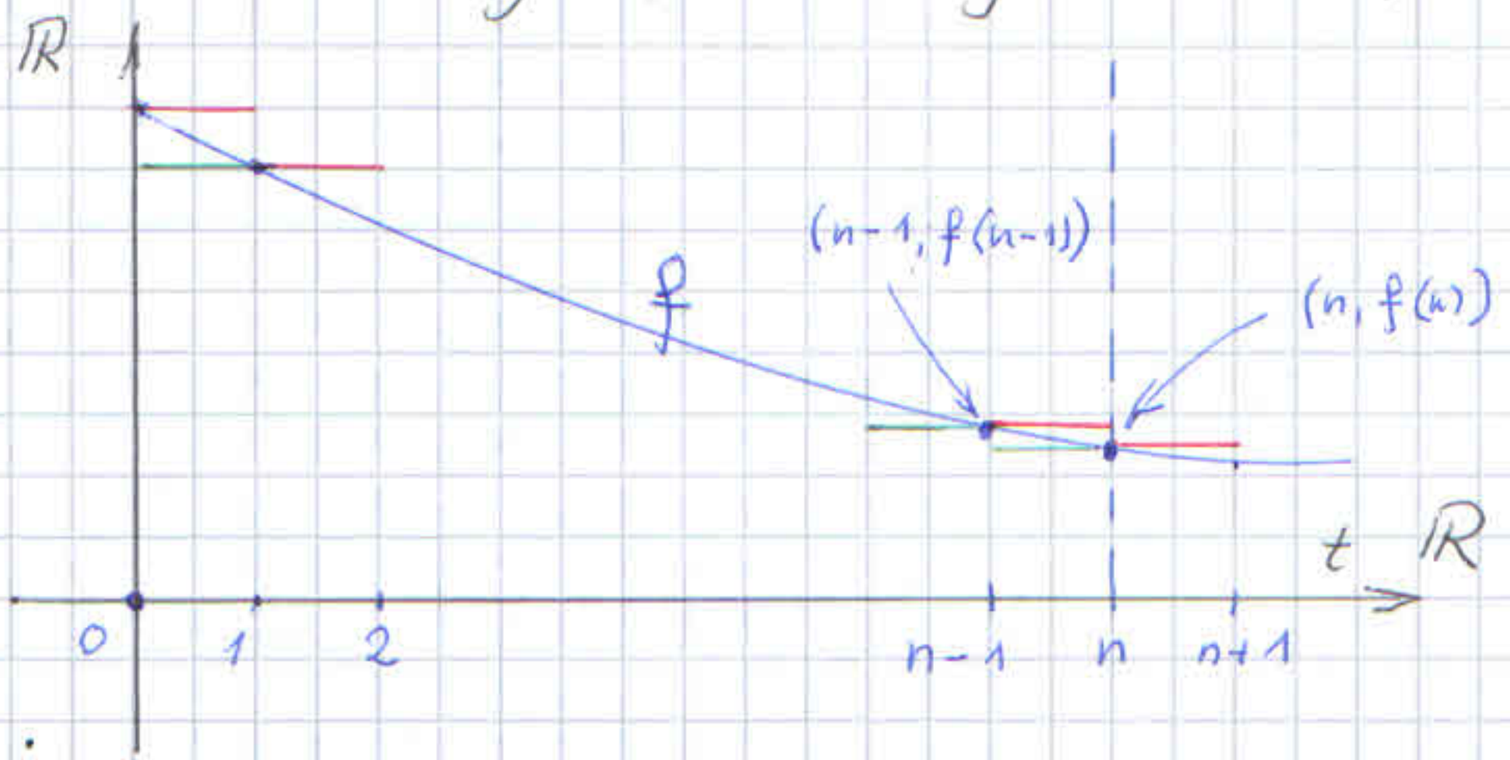
Z: $f: [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ funkcja malejąca.

$$J_n = \int_0^n f(t)\,dt \,, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} f(t) \text{ dla } n \in \mathbb{N}$$

T: (1) Ciąg $\{S_n - J_n\}$ jest zbieżny do granicy w $[0, f(0)]$

(2) Szereg $\sum_{k=0}^{+\infty} f(k)$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy $f \in \mathcal{R}([0,+\infty); \mathbb{R})$

D: Skoro $f$ jest malejąca to $f \in \mathcal{R}([0,+\infty); \mathbb{R})$ i mamy gwarancję całkowalności $f$ na dowolnym przedziale zwartym, zawartym w $[0,+\infty)$.



Ze względu na addytywność całki oraz oszacowanie na przedziałach dostajemy

$$f(1) + \dots + f(n) \leq J_n \leq f(0) + \dots + f(n-1),$$

skąd $$-f(0) \leq J_n - S_n \leq -f(n),$$

czyli $$f(n) \leq S_n - J_n \leq f(0).$$

Określmy $r_n = S_n - J_n$ dla $n \in \mathbb{N}$ i zauważmy, że ciąg $\{r_n\}$ jest malejący.

$$r_{n+1} - r_n = S_{n+1} - J_{n+1} - S_n + J_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t)\,dt =$$

$$= \int_n^{n+1} (f(n+1) - f(t))\,dt \leq 0$$

Zatem ciąg $\{r_n\}$ o wyrazach w $[0, f(0)]$ musi być zbieżny do granicy w $[0, f(0)]$ co daje (1).

(2) Szereg $\sum_{k=0}^{+\infty} f(k)$ jest zbieżny $\Leftrightarrow$ $\{S_n\}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow$ $\{J_n\}$ zbieżny $\Leftrightarrow$ funkcja $F: [0, +\infty) \ni x \longrightarrow \int_0^x f(t)\,dt \in \mathbb{R}$ ma granicę skończoną w $+\infty$ ($F$ - jest rosnąca) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f \in \mathcal{R}([0, +\infty); \mathbb{R})$, co kończy dowód.

Przykład 5.19

Rozpatrujemy funkcję $f: (0, +\infty) \ni t \longrightarrow e^{-t} \in \mathbb{R}$.

Jest to funkcja prosta (ciągła) o pierwotnej

$F: (0, +\infty) \ni t \longrightarrow F(t) = -e^{-t}$.

Przy wyliczaniu całki niewłaściwej dostajemy

$$\Phi(x, y) = -e^{-y} - (-e^{-x}) \longrightarrow 1 \quad (x, y) \longrightarrow (0, +\infty)$$

Zatem $$\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1.$$

Przykład 5.20

Rozpatrujemy funkcję $f: [0,+\infty) \ni t \longrightarrow \frac{1}{(1+t)^\alpha} \in \mathbb{R}$

Jej pierwotną przy $\alpha \neq 1$ jest funkcja.

$$F(t) = \frac{1}{1-\alpha}(1+t)^{1-\alpha},$$

więc zbieżność całki dostajemy gdy $1-\alpha < 0$, czyli gdy $\alpha > 1$. Stąd dostajemy znane nam już wcześniej informację o zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

Dla $\alpha = 1$ dostajemy pierwotną $F(t) = \ln(t+1)$, więc zbieżności całki nie dostaniemy, ale z części (1) tezy 5.18 dostajemy informację o zbieżności ciągu.

$$S_{n-1} - J_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} - \int_0^{n-1} \frac{1}{t+1}\,dt =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$$ do granicy w $[0,1]$.

Ten sam ciąg uzyskaliśmy w przykładzie 3.55, stosując wzór Taylora z resztą Lagrange'a i oznaczyli $\{\gamma_n\}$. Mamy zbieżność $\gamma_n \to \gamma$ $(n \to +\infty)$ gdzie $\gamma \approx 0{,}577215\ldots$ to tak zwana stała Eulera.

## 3. Kryterium zbieżności całki niewłaściwej

Twierdzenie 5.21

Z: $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, $I$ przedział w $\mathbb{R}$ o końcach $a, b$

$a \notin I$ lub $b \notin I$, $f \in \widetilde{\mathcal{R}}(I;\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{R}(I;\mathbb{R})$.

$\forall t \in I: |f(t)| \leq g(t)$.

T: (1) $f \in \mathcal{R}(I;\mathbb{R})$.

(2) $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b g(t)\,dt$

D: Etap 1. Jeśli $0 \le f \le g$, to wybierzmy punkt $c$ tak aby $a < c < b$. Wtedy wybierając ciągi $a_n \to a\ (n \to +\infty)$, $b_n \to b\ (n \to +\infty)$. dla dostatecznie dużych $n$ mamy.

$$\int_{a_n}^{b_n} f(t)\,dt = \int_{a_n}^{c} f(t)\,dt + \int_{c}^{b_n} f(t)\,dt.$$

Ciągi po prawej stronie równości są ograniczone. i rosną gdy $\{a_n\}, \{b_n\}$ są monotoniczne. Istnieją. więc granice skończone

$$\lim_{x \to a} \int_{x}^{c} f(t)\,dt, \quad \lim_{y \to b} \int_{c}^{y} f(t)\,dt,$$

ograniczone odpowiednio przez

$$\int_{a}^{c} g(t)\,dt \text{ i } \int_{c}^{b} g(t)\,dt.$$

Zatem $f \in \mathcal{R}(I; \mathbb{R})$ oraz $-\int_a^b f(t) \le \int_a^b g(t)\,dt$

Etap 2 Jeśli $|f(t)| \le g(t)$ dla $t \in I$, to mamy.

$-g(t) \le f(t) \le g(t)$ dla $t \in t \in I$, a zatem.

$0 \le f(t) + g(t) \le 2g(t)$ dla $t \in I$.

Na podstawie Etapu 1. dostajemy. $f + g \in \mathcal{R}(I; \mathbb{R})$. oraz

$$0 \le \int_a^b (f(t) + g(t))\,dt \le \int_a^b 2g(t)\,dt,$$

skąd już tutaj wynika teza.

## 4. Funkcja gamma Eulera.

**Definicja 5.22** Dla $x \in (0, +\infty)$ przyjmujemy

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt .$$

Tak określoną funkcję nazywamy funkcją $\Gamma$ Eulera.

**Uwagi 5.23.**

(1) Funkcję wprowadził Euler w 1730 r. w postaci

$$\int_0^1 (-\log t)^{x-1}\, dt \quad \text{dla } x > 0,$$

zaś jej symbol $\Gamma$ Legendre w 1809 r.

(2) Istnienie tej całki najłatwiej sprawdzić korzystając z 5.17 i 5.21, poprzez sprawdzenie istnienia całek

$$(I) \int_0^1 t^{x-1} e^{-t}\, dt \quad \text{i} \quad (II) \int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt ,$$

w których jeden z końców już jest ustalony.

(I) Istnienie wynika z oszacowania

$$|t^{x-1} e^{-t}| \leq t^{x-1}, \quad t \in (0,1] \text{ dla } x > 0,$$

oraz 5.21. Pierwotna $\frac{1}{x} t^x$ ma granice na końcach przedziału.

(II) Sprawdzając przy ustalonym $x \in (0, +\infty)$ istnienie tej całki, weźmy $n > x$, $n \in \mathbb{N}$ i zauważmy, że

$$|t^{x-1} e^{-t}| = \frac{t^{x-1}}{e^t} = \frac{t^{x-1}}{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}} \leq n!\, t^{x-n-1}$$

Wtedy $x - n - 1 < -1$ i znów z kryterium 5.21 dostajemy zbieżność

Twierdzenie 5.24

(1) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ dla $x \in (0,+\infty)$.

(2) $\Gamma(n) = (n-1)!$ dla $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

D: (1) Weźmy $\alpha, \beta$ tak aby $0 < \alpha < \beta < +\infty$, $x > 0$

Wtedy:
$$\int_\alpha^\beta t^x e^{-t}\,dt = \int_\alpha^\beta t^x (-e^{-t})'\,dt =$$
$$= \left[-t^x e^{-t}\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta x t^{x-1}(-e^{-t})\,dt =$$
$$= \left[-t^x e^{-t}\right]_\alpha^\beta + x\int_\alpha^\beta t^{x-1} e^{-t}\,dt$$

W granicy, gdy $(\alpha,\beta) \to (0,+\infty)$ dostajemy

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

(2) Mamy $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1$, zatem z (1).

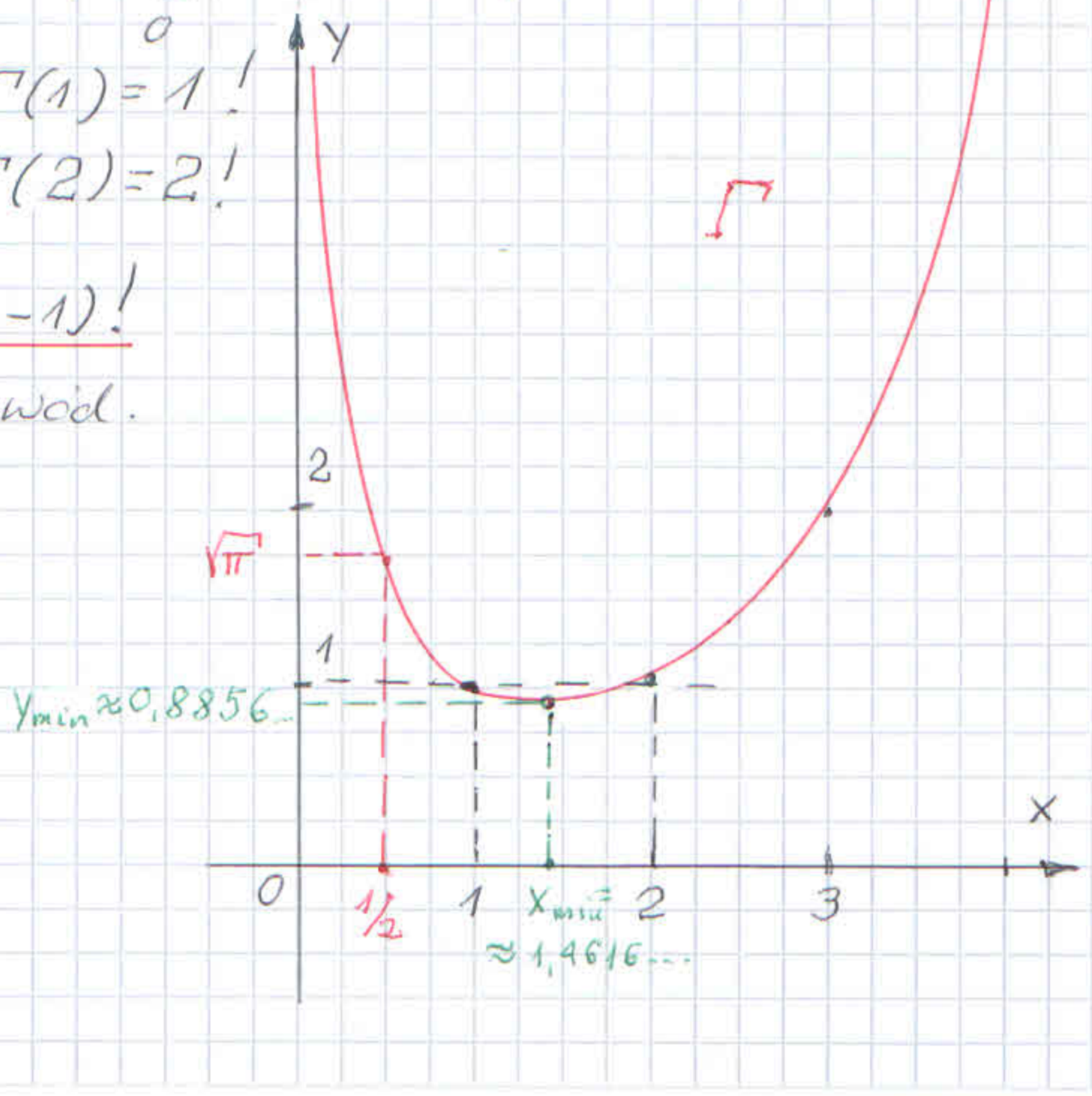
$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1!$

$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2!$

$\vdots$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

To kończy dowód.



Definicja 5.25. Dla $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i $x>0$ przyjmujemy

$$\Gamma_n(x) = \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$$

Twierdzenie 5.26 Jeśli $x>0$, to $\Gamma_n(x) \to \Gamma(x)$ $(n \to +\infty)$.

Dowód tego twierdzenia poprzedzimy podstawowym lematem, którego sformułowanie oraz dowód jest oparty na zestawie faktów z książki:
Earl D. Rainville, Special Functions (1960).

Lemat 5.27

Z: $\alpha \in [0,1)$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $t \in [0,n)$

T: (1) $1+\alpha \leq e^{\alpha} \leq (1-\alpha)^{-1}$;

(2) $(1-\alpha)^n \geq 1-n\alpha$

(3) $0 \leq e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{1}{n} t^2 e^{-t}$

D: (1) Porównując rozwinięcia

$1+\alpha \leq 1+\alpha+\frac{\alpha^2}{2!}+\ldots \leq 1+\alpha+\alpha^2+\ldots$,

łatwo otrzymujemy oczekiwane nierówności.

(2) Indukcja. Dla $n=1$ mamy $1-\alpha \geq 1-\alpha$. Jeśli $(1-\alpha)^n \geq 1-n\alpha$, to $(1-\alpha)^{n+1} \geq (1-n\alpha)(1-\alpha) = 1-(n+1)\alpha+n\alpha^2 \geq 1-(n+1)\alpha$, co kończy dowód.

(3) Korzystając z (1) dla $\alpha = \frac{t}{n}$ dostajemy:

$1+\frac{t}{n} \leq e^{\frac{t}{n}} \leq \left(1-\frac{t}{n}\right)^{-1}$, skąd

(*) $\left(1+\frac{t}{n}\right)^n \leq e^t \leq \left(1-\frac{t}{n}\right)^{-n}$, a zatem

$\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n} \geq e^{-t} \geq \left(1-\frac{t}{n}\right)^n$, co daje nam

$e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \geq 0$, czyli lewą nierówność (3)

Ponadto mamy

$$e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}\left[1 - e^t\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right].$$

Na podstawie (*) $e^t \geq \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$, więc

$$(**) \quad e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}\left[1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n\right]$$

Teraz stosując (2) z $\alpha = \frac{t^2}{n^2}$ dostajemy.

$$\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n \geq 1 - \frac{t^2}{n}, \text{ więc z } (**)$$

$$e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}\left[1 - \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)\right] = e^{-t}\cdot\frac{t^2}{n},$$

co daje prawą nierówność w (3)!

D: Możemy teraz przejść do dowodu twierdzenia 5.26

Otrzymujemy przy ustalonym $x > 0$ oraz $n \in \mathbb{N}$ (!).

$$\Gamma(x) - \Gamma_n(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt - \int_0^n t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt =$$

$$= \int_0^n t^{x-1}\left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right)dt + \int_n^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

Łatwo zauważyć, że drugie składnik tej sumy zmierzają do 0. Dzięki wykazanemu lematowi dostajemy

$$0 \leq \int_0^n t^{x-1}\left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right)dt \leq \int_0^n t^{x+1}\cdot\frac{e^{-t}}{n}dt =$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^n t^{x+1}e^{-t}dt \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

Zatem $\Gamma_n(x) \xrightarrow{n \to +\infty} \Gamma(x)$, co kończy dowód.

**Lemat 5.28** Dla $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i $x > 0$

$$\Gamma_n(x) = \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)}.$$

D: (Szkic dowodu do dopracowania jako ćwiczenie).

$$\Gamma_n(x) = \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt = \ldots$$

Stosując podstawienie $[0,1] \ni s \longrightarrow n\cdot s \in (0,n]$ dostajemy.

$$= \int_0^1 (ns)^{x-1}(1-s)^n n\,ds = n^x \int_0^1 s^{x-1}(1-s)^n ds = \ldots$$

całkując przez części...

$$\ldots = n^x \int_0^1 \left(\frac{s^x}{x}\right)' (1-s)^n ds = \frac{n^x \cdot n}{x} \int_0^1 s^x (1-s)^{n-1} ds = \ldots$$

$$\ldots = \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)}.$$

**Twierdzenie 5.29** $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

D: Na podstawie 5.26 i 5.28

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!\, n^{1/2}}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2}+n\right)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1} n!\, n^{1/2}}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(2n-1)} \cdot \frac{2n^{1/2}}{2n+1} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left[\left(\frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\right)^2 \frac{1}{2n+1}\right]^{1/2} \frac{2\cdot n^{1/2}}{(2n+1)^{1/2}} =$$

... z wzoru Wallisa.

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^{1/2}}{2^{1/2}(n+1/2)^{1/2}} = \sqrt{\pi}$$

Uwaga 5.30 Funkcja $\Gamma$ bywa też określana znacznie szerzej w sytuacji zespolonej poprzez.

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!\, e^{z\ln n}}{z(z+1)\cdot\ldots\cdot(z+n)}, \quad z \neq 0, -1, -2, \ldots$$

Zatem $\Gamma : \mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{C}$. Pokazuje się lokalnie jednostajny zbieżność podanego ciągu (uogólnienie $\{\Gamma_n\}$) na $\mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N})$, co pozwala stwierdzić holomorficzność tak określonej funkcji $\Gamma \in \mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N}))$, która stanowi naturalne (jedyne) rozszerzenie analityczne określonej tutaj funkcji $\Gamma$.

## 5. Funkcja $\alpha$

Kolejna funkcja specjalna „$\alpha$" ma dla analizy matematycznej szczególne znaczenie o czym się wkrótce przekonamy

Definicja 5.31 Dla $p \in [0, +\infty)$ przyjmujemy.

$$\alpha(p) = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^p}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}$$

Uwaga 5.32 Mamy zawsze $\alpha(p) > 0$, a ponadto dla kolejnych liczb naturalnych otrzymujemy.

$$\alpha(0) = 1$$

$$\alpha(1) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = 2$$

$$\alpha(2) = \frac{\left(\sqrt{\pi}\right)^2}{\Gamma(2)} = \pi$$

$$\alpha(3) = \frac{[\Gamma(\frac{1}{2})]^3}{\Gamma(\frac{3}{2}+1)} = \frac{[\Gamma(\frac{1}{2})]^3}{\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{[\Gamma(\frac{1}{2})]^3}{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{4}{3}\pi$$

$$\alpha(4) = \frac{(\sqrt{\pi})^4}{\Gamma(3)} = \frac{\pi^2}{2}$$

$$\alpha(5) = \frac{8}{15}\pi^2, \quad \alpha(6) = \frac{\pi^3}{6}, \quad \alpha(7) = \frac{16}{105}\pi^3,$$

i tak dalej. W ciągu tym pojawiają się kolejne objętości kul jednostkowych w $\mathbb{R}^p$, $p \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

$$\alpha(p) = \mathcal{L}^p(K(0,1)),$$

gdzie $K(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^p : |x| < 1\}$ zaś $\mathcal{L}^p$ jest, tak zwaną, $p$-tą miarą Lebesgue'a w $\mathbb{R}^p$.
Dla $p = 0$ otrzymujemy $\alpha(0) = 1$ czyli informację, że kula składa się z jednego punktu $\{0\}$.
Jak się wkrótce przekonamy funkcję $\alpha$ stosujemy jak współczynnik synchronizujący teorię miar Hausdorffa z miarami Lebesgue'a.

Uwaga 5.33 W teorii funkcji specjalnych spotykamy funkcję $B$ zwaną betą Eulera, określoną w podstawowej, rzeczywistej wersji dla $x > 0, y > 0$ równością

$$B(x,y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

Funkcja $B$ jest silnie związana z naszą funkcją $\Gamma$ gdyż dla $x > 0, y > 0$ zachodzi równość

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

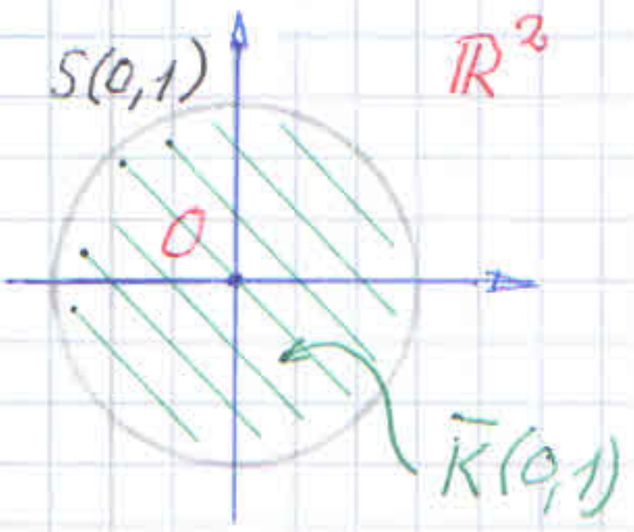
# Rozdział 6. Mierzenie podzbiorów $\mathbb{R}^m$.

## §1. Podstawowe pojęcia i fakty.

### 1. Uwagi wstępne

Istnieje wiele metod mierzenia podzbiorów $\mathbb{R}^m$. Określane i rozwijane one były wiele wieków. Jednak, aby dostać spójną, dobrze działającą teorię, sięgniemy po dość trudną, piękną ale ciągle mało popularną w Polsce teorię miar Hausdorffa, które można wprowadzić w dowolnej przestrzeni metrycznej.

Nawet lepiej znane miary Lebesgue'a nie dają dobrych rozwiązań gdyż na przykład $\mathcal{L}^2$ miara Lebesgue'a w $\mathbb{R}^2$ dobrze mierzy pole powierzchni koła, ale do zmierzenia długości okręgu już musimy dobudować dodatkową teorię.




Problemy zresztą spotykamy zresztą już w $\mathbb{R}$, gdzie zbiory przeliczalne i zbiór Cantora mają zerowe miary $\mathcal{L}^1$, a wyraźnie się różnią.

W tym rozdziale wykładu przedstawimy (informacyjnie) kierunki działań w tym zakresie „od miar Lebesgue'a do fraktali". Część wiadomości będzie rozwijana już precyzyjnie w kolejnych częściach AM.

## 2. Sumowanie rodzin elementów $\overline{\mathbb{R}}$

W ramach AM1 w Rozdziale 2, §2 poznaliśmy dość szczegółowo $\overline{\mathbb{R}}$, jego strukturę i działania. Teraz zajmiemy się sumowaniem dowolnych rodzin elementów $\overline{\mathbb{R}}$.

Niech $Z$ będzie zbiorem i niech będzie dana funkcja $f: Z \to \overline{\mathbb{R}}$. Dla $A \subset Z$ chcemy określić $\sum_A f$, sumę wartości $f$ na zbiorze $A$. Zrobimy to w dwóch krokach:

(A) Jeśli $f: Z \to [0, +\infty]$, to przyjmujemy:

$\sum_{\emptyset} f = 0$

$\sum_A f = f(a_1) + \ldots + f(a_n)$ gdy $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, jest skończony, niepusty.

Sumowanie w zakresie $[0, +\infty]$ jest łączne i przemienne więc wynik jest jednoznacznie określony i zależy wyłącznie od $f(a_1), \ldots, f(a_n)$.

$\sum_A f = \sup\{\sum_B f : B \subset A, B\text{-skończony}\}$ gdy $A$ jest dowolnym podzbiorem $Z$

(B) Jeśli $f: Z \to \overline{\mathbb{R}}$, to określamy na wstępie funkcje: $f^+ : Z \ni x \to \max\{f(x), 0\} \in [0, +\infty]$,

$f^- : Z \ni x \to -\min\{f(x), 0\} \in [0, +\infty]$

dla których $f = f^+ - f^-$, a następnie dla $A \subset Z$

$\sum_A f = (\sum_A f^+) - (\sum_A f^-)$

## 3. Miary zewnętrzne

Niech $X$ będzie zbiorem.

**Definicja 6.01** Funkcję $\alpha : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ nazywamy miarą zewnętrzną na $X$ jeśli:

(1) $\alpha(\emptyset) = 0$,

(2) $(Y \subset X, Y_n \subset X \text{ dla } n \in \mathbb{N}, Y \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\alpha(Y) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}}' \alpha(Y_n))^{n\in\mathbb{N}}$

**Uwaga 6.02** W warunku (2) znajdujemy:

(a) monotoniczność'
$(Z \subset Y \subset X) \Rightarrow (\alpha(Z) \leq \alpha(Y))$

(b) podaddytywność'
$(Y_n \subset X \text{ dla } n \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\alpha(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}}' \alpha(Y_n))$

**Przykłady 6.03.**

(1) $X$ - zbiór

$$\alpha : \mathcal{P}(X) \ni A \longrightarrow \alpha(A) = \begin{cases} \#A, & A \text{ - skończony} \\ +\infty, & A \text{ - nieskończony} \end{cases}$$

(2) $X$ - zbiór nieprzeliczalny.

$$\alpha : \mathcal{P}(X) \ni A \longrightarrow \alpha(A) = \begin{cases} 0, & A \text{ - co najw. przeliczalny} \\ 1/2, & A \text{ i } A^c \text{ - nieprzeliczalny} \\ 1, & A^c \text{ - co najw. przeliczalny} \end{cases}$$

Większość ciekawych miar zewnętrzny powstaje przez dalej przedstawianą konstrukcję Caratheodory'ego.

## Konstrukcja Caratheodory'ego

Niech $(X,d)$ przestrzeń metryczna, $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ oraz $\xi : \mathcal{F} \longrightarrow [0,+\infty]$.

Dla $\delta \in (0,+\infty]$ oraz $Y \subset X$ określamy.

$$\varphi_\delta(Y) = \inf\left\{ \sum_{S \in G} \xi(S) : G \subset \mathcal{F},\ \#G \leqslant \aleph_0,\ Y \subset \bigcup_{S \in G} S,\ \operatorname{diam} S \leqslant \delta \text{ dla } S \in G \right\}$$

Kładziemy, że dla $Y \subset X$ mamy:

$$(0 < \delta_2 \leqslant \delta_1) \Rightarrow (\varphi_{\delta_2}(Y) \geqslant \varphi_{\delta_1}(Y))$$

Na koniec określamy.

$$\varphi(Y) = \sup_{\delta \in (0,+\infty]} \varphi_\delta(Y) = \lim_{\delta \to 0} \varphi_\delta(Y).$$

Otrzymaną funkcję $\varphi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,+\infty]$ nazywamy wynikiem konstrukcji Caratheodory'ego dla funkcji $\xi$

### Twierdzenie 6.03

$\varphi_\delta$ dla $\delta \in (0,+\infty]$ oraz $\varphi$ są miarami zewnętrznymi na $X$.

D: Ustalmy $\delta > 0$.

Dla $Y = \emptyset$ możemy wziąć $G = \emptyset$, więc $\varphi_\delta(\emptyset) = 0$.

Niech następnie $Y_n \subset X$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz.

$Y \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$. Mamy pokazać, że.

$$\varphi_\delta(Y) \leqslant \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi_\delta(Y_n)$$

Jeśli prawa strona nierówności jest równa $+\infty$, to nierówność zachodzi. Jeśli prawa strona jest skończona, to ustalając $\varepsilon > 0$ wybieramy pokrycia $G_n$ zbiorów $Y_n$ dla $n \in \mathbb{N}$ tak, aby dla $S \in G_n$, przy $n \in \mathbb{N}$, mieć $\operatorname{diam} S \leq \delta$ oraz

$$\sum_{S \in G_n}' \xi(S) \leq \varphi_\delta(Y_n) + \varepsilon/2^{n+1}$$

Biorąc więc $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$ mamy $\operatorname{diam} S \leq \delta$ dla $S \in G$ oraz

$$\varphi_\delta(Y) \leq \sum_{S \in G}' \xi(S) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}}' \varphi_\delta(Y_n) + \varepsilon$$

Tę nierówność mamy dla dowolnego $\varepsilon > 0$, zatem

$$\varphi_\delta(Y) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}}' \varphi_\delta(Y_n),$$

czyli $\varphi_\delta$ dla $\delta \in (0, +\infty]$ jest miarą zewnętrzną.

Sprawdzamy następnie czy $\varphi$ jest miarą zewnętrzną.

(1) $\varphi(\emptyset) = 0$ bo $\varphi_\delta(\emptyset) = 0$ dla $\delta \in (0, +\infty]$.

(2) Mamy $\varphi_\delta(Y) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}}' \varphi_\delta(Y_n)$, gdy $Y \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$ oraz $\delta \in (0, +\infty]$.

Zatem $\varphi_\delta(Y) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}}' \varphi(Y_n)$ dla $\delta > 0$.

Stąd dostajemy wprost z definicji

$$\varphi(Y) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}}' \varphi(Y_n),$$

co kończy dowód.

## 4. Miary

Niech $X$ będzie zbiorem

**Definicja 6.04** Rodzinę $\mathfrak{M} \subset \mathcal{P}(X)$ nazywamy $\sigma$-ciałem jeśli spełnia warunki:

(1) $\emptyset \in \mathfrak{M}$

(2) $(A \in \mathfrak{M}) \Rightarrow (X \setminus A \in \mathfrak{M})$

(3) $(A_n \in \mathfrak{M}, n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{M}\right)$

**Przykłady 6.05**

(1) $X$ - zbiór, $\mathfrak{M} = \{\emptyset, X\}$

(2) $X$ - zbiór, $\mathfrak{M} = \mathcal{P}(X)$

(3) $(X, d)$ - przestrzeń metryczna, $\mathfrak{M} = B(X)$ najmniejsze $\sigma$-ciało zawierające topologię $X$, nazywamy $\sigma$-ciałem zbiorów borelowskich.

**Definicja 6.06** Trójkę $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ nazywamy przestrzenią z miarą jeśli $\mathfrak{M}$ jest $\sigma$-ciałem podzbiorów $X$ zaś funkcja $\mu: \mathfrak{M} \longrightarrow [0, +\infty]$, zwana miarą, spełnia następujące warunki:

(1) $\mu(\emptyset) = 0$

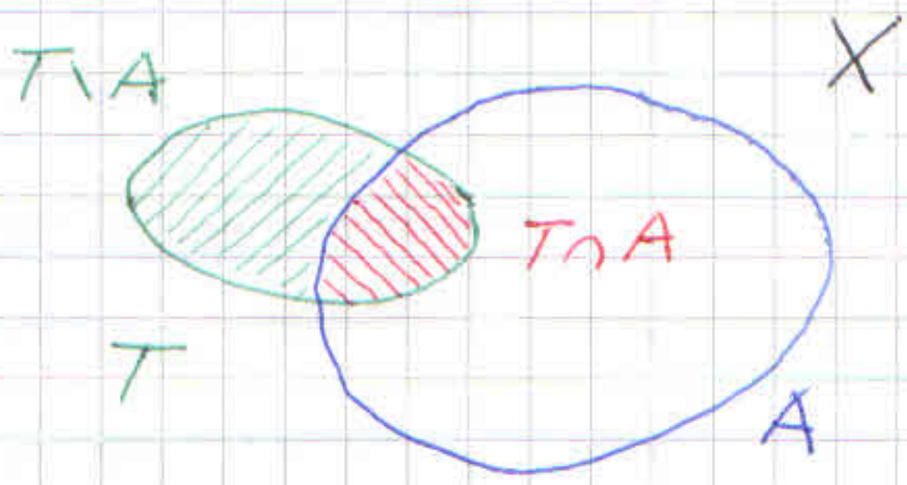
(2) Jeśli $A_n \in \mathfrak{M}$ dla $n \in \mathbb{N}$ są parami rozłączne, to $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$.

**Przykłady 6.06** Wracając do 6.02 widzimy, że w (1) dostajemy miarę zaś (2) nie jest miarą.

Połączenie między teoriami miar zewnętrznych oraz miar daje dwa następujące fakty.

Definicja 6.07 Jeśli $\alpha$ jest miarą zewnętrzną na zbiorze $X$, to zbiór $A \subset X$ nazywamy mierzalnym gdy spełnia następujący warunek Carathéodory'ego

$$\forall T \subset X : \alpha(T) = \alpha(T \cap A) + \alpha(T \setminus A).$$




Zbiór A „dobrze" dzieli wszystkie podzbiory T zbioru X

Powyższa definicja łączna jest z następującym twierdzeniem.

Twierdzenie (Carathéodory'ego) 6.08

Z: $X$ - zbiór, $\alpha$ - miara zewnętrzna na $X$
$\mathcal{M}$ - rodzina wszystkich zbiorów mierzalnych względem $\alpha$.

T: (1) $\mathcal{M}$ - jest $\sigma$-ciałem,
(2) $\alpha / \mathcal{M}$ - jest miarą na $\mathcal{M}$,
(3) $(A \subset X, \alpha(A) = 0) \Rightarrow (A \in \mathcal{M})$

D: Długi, techniczny dowód w tym, z założenia, informacyjnym rozdziale, pomijamy.

## 5. Miary Hausdorffa i miary Lebesgue'a.

Niech $(X,d)$ będzie przestrzenią metryczną, $p \in [0,+\infty)$. Dla $Y \subset X$ określamy.

$$h^p(Y) = \begin{cases} 0, & Y = \emptyset, \\ 2^{-p}\alpha(p)(\mathrm{diam}\, Y)^p, & Y \neq \emptyset. \end{cases}$$

gdzie wartości $(\mathrm{diam}\, Y)^p$ dla dowolnych średnic otrzymujemy przedłużając funkcję

$$(0,+\infty) \ni t \longrightarrow t^p \in (0,+\infty),$$

do ciągłego przekształcenia $[0,+\infty]$

**Definicja 6.09** Miary zewnętrzne $\varphi_\delta$, $\delta \in (0,+\infty]$ oraz $\varphi$ uzyskiwane w konstrukcji Carathéodory'ego z funkcji $h^p: \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,+\infty]$ oznaczamy dalej $\mathcal{H}^p_\delta$, $\mathcal{H}^p$ nazywając $p$-tą $\delta$-aproksymatywną miarą Hausdorffa i $p$-tą miarą Hausdorffa na $X$.

Wprowadzona rodzina miar to aktualnie gotowe narzędzie wykorzystywane w różnych gałęziach matematyki do mierzenia zbiorów. Warto zwrócić uwagę, że $p \in [0,+\infty)$ może przyjmować nie tylko wartości z $\mathbb{N}$, których interpretacja jest naturalna jako: ilość ($p=0$), długość ($p=1$), pole powierzchni ($p=2$), objętość ($p=3$), ..., ale także wartości ułamkowe. Przy interpretacji tych ostatnich pomagają nam tak zwane fraktale.

W przestrzeni $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$ wyróżniamy rodzinę $\mathcal{F}$ złożoną z przedziałów $m$-wymiarowych zwartych, czyli zbiorów postaci

$$P = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_m, b_m], \quad a_i \leq b_i, \; i = 1, \ldots, m.$$

Dla przedziału $P$ określamy

$$\xi(P) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_m - a_m)$$

nazywaną objętością $P$. Dostajemy w ten sposób funkcję

$$\xi : \mathcal{F} \longrightarrow [0, +\infty),$$

która nam posłuży do konstrukcji kolejnej miary zewnętrznej.

Definicja 6.10 Wynik konstrukcji Caratheodory'ego dla funkcji $\xi : \mathcal{F} \ni P \longrightarrow \xi(P) \in [0, +\infty)$, nazywamy $m$-wymiarową, zewnętrzną miarą Lebesgue'a i oznaczamy $\mathcal{L}^m$.

Uwaga 6.11 Z każdej skonstruowanej miary takiej jak $\mathcal{H}^p_\delta$, $\mathcal{H}^p$, $\mathcal{L}^m$ mierzymy przez warunek Caratheodory'ego przejść do miary na pewnym $\sigma$-ciele. Przejścia te są konieczne przy całkowaniu, ale w wielu książkach praktycznie trudne są do zauważenia i traktowane jako automatyczny element teorii

Twierdzenie 6.12 W $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$ mamy $\mathcal{L}^m = \mathcal{H}^m$

D: Chwilowo pomijamy.

Dowód Twierdzenia 6.12 jest dość trudny i długi wymagając, w szczególności, wykazania tak zwanej nierówności izodiametrycznej.

Zwróćmy uwagę na koniec tego fragmentu na miary $\mathcal{H}^0$

Przykład 6.13 Niech $(X,d)$ będzie przestrzenią metryczną i niech $p=0$. Dla $Y \subset X$ i $\delta \in (0,+\infty]$

$$\mathcal{H}^0_\delta(Y) = \inf\left\{ \sum_{i=0}^{+\infty} h_i^0(Y_i) : Y_i \subset X, \operatorname{diam} Y_i \leq \delta, \text{dla } i \in \mathbb{N} \text{ oraz } Y \subset \bigcup_{i=0}^{+\infty} Y_i \right\}$$

Mamy $2^{-p}\alpha(p) = 1$ więc równość powyższą możemy zapisać następująco:

$$\mathcal{H}^0_\delta(Y) = \begin{cases} \text{minimalna liczba zbiorów o średnicy nie większej niż } \delta \text{ pokrywających } Y, \\ \text{o ile istnieje takie pokrycie skończone} \\ +\infty \quad \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

Stąd bez trudu zauważamy, że

$$\mathcal{H}^0(Y) = \begin{cases} \#Y, & Y \text{ - jest skończony}, \\ +\infty, & Y \text{ - jest nieskończony}. \end{cases}$$

Zatem $\mathcal{H}^0$ jest znaną nam już wcześniej miarą liczącą omawianą w 6.03 (1).

## 6. Miary sferyczne

Ustalmy przestrzeń metryczną $(X,d)$, $p \in [0,+\infty)$
Niech

$$\mathcal{F} = \{\bar{K}(a,r) : a \in X, r > 0\}$$

oraz:

$$\xi : \mathcal{F} \ni Y \longrightarrow \xi(Y) = 2^{-p}\alpha(p)(\operatorname{diam} Y)^p \in [0,+\infty]$$

gdzie wartości $(\operatorname{diam} Y)^p$ określamy tak jak przy konstrukcji miar Hausdorffa.

Uwaga 6.14 W przypadku $X = \mathbb{R}^m$ mamy $\operatorname{diam}\bar{K}(a,r) = 2r$ ale w przestrzeniach metrycznych tak nie musi być. Nie należy zatem zamieniać $\xi(Y)$ na $\alpha(p)r^p$ bo może to doprowadzić do kłopotów.

Definicja 6.15 Wynik konstrukcji Carathéodory'ego dla $\xi : \mathcal{F} \to [0,+\infty]$ jak wyżej nazywamy p-wymiarową miarą sferyczną na $X$ i oznaczamy $\mathcal{S}^p$.

Uwagi 6.16

(1) Dość często $\mathcal{S}^p$ jest nazywana miarą Hausdorffa i oznaczana przez $\mathcal{H}^p$.

(2) W $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, $\mathcal{L}^m = \mathcal{H}^m = \mathcal{S}^m$

(3) Zamiana $\mathcal{H}^p$ na $\mathcal{S}^p$ to tylko pozorna korzyść - do czasu dowodzenia trudniejszego twierdzenia, w którym pojawią się deformacje kul do innych zbiorów.

## 7. Wymiar Hausdorffa przestrzeni metrycznej

Niech $(X,d)$ będzie przestrzenią metryczną, $Y \subset X$, $p \in [0,+\infty)$. Dla $Y$ miarę $\mathcal{H}^p(Y)$ możemy liczyć na dwa sposoby:

(a) jako miarę podzbioru przestrzeni $X$,

(b) jako miarę przestrzeni $(Y, d|_{Y\times Y})$, którą rozpatrujemy z metryką indukowaną z $X$.

Te dwa sposoby dają te same wyniki już na poziomie miar $\mathcal{H}^p_\delta$, $\delta \in (0,+\infty]$. Faktycznie, w przestrzeni $X$ zbiór $Y$ ma więcej pokryć niż w $Y$, ale dysponując pokryciem w $X$ zawsze możemy wziąć pokrycie wpisane, uzyskane przez przecięcie zbiorów pokrycia wyjściowego z $Y$.

Dalsze rozważania poprzedzimy następującym lematem.

### Lemat 6.17

Z: $(X,d)$ - przestrzeń metryczna
$p, s \in [0,+\infty)$, $p < s$
$\mathcal{H}^p(X) < +\infty$

T: $\mathcal{H}^s(X) = 0$

D: Ustalmy $\delta \in (0,+\infty)$, wtedy $\mathcal{H}^p_\delta(X) < +\infty$
Weźmy następnie pokrycie $\{Y_n\}$ zbioru $X$ takie, że $\operatorname{diam} Y_n \leq \delta$ dla $n \in \mathbb{N}$

Mamy

$$\sum_{n=0}^{+\infty} h^s(Y_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-s}\alpha(s)(\operatorname{diam} Y_n)^s =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{p-s}2^{-p}\alpha(p)\frac{\alpha(s)}{\alpha(p)}(\operatorname{diam} Y_n)^{s-p}(\operatorname{diam} Y_n)^p$$

$$\leq 2^{p-s}\frac{\alpha(s)}{\alpha(p)}\delta^{s-p}\sum_{n\in\mathbb{N}} h^p(Y_n).$$

Stąd dostajemy

$$\mathcal{H}^s_\delta(X) \leq 2^{p-s}\frac{\alpha(s)}{\alpha(p)}\delta^{s-p}\mathcal{H}^p_\delta(X),$$

a zatem otrzymujemy

$$\mathcal{H}^s_\delta(X) \leq 2^{p-s}\frac{\alpha(s)}{\alpha(p)}\delta^{s-p}\mathcal{H}^p(X).$$

Ponieważ $\mathcal{H}^p(X) < +\infty$ więc stąd, w granicy, będzie $\mathcal{H}^s(X) = 0$, co kończy dowód.

Zauważmy następnie, że z 6.17 wynika implikacja, dla $p < s$

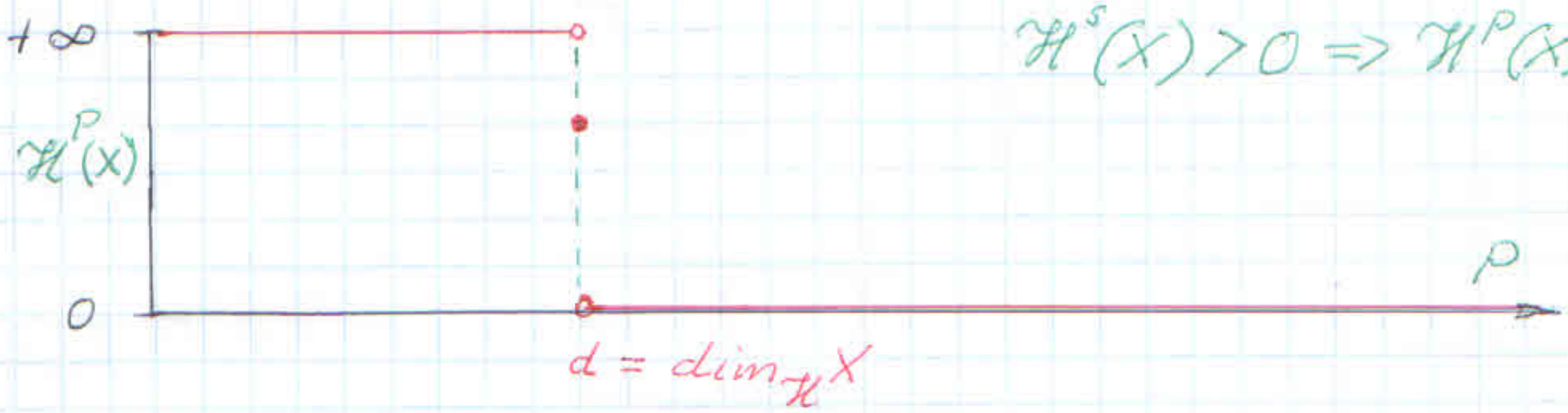
$$\mathcal{H}^s(X) > 0 \Rightarrow \mathcal{H}^p(X) = +\infty.$$

Z ostatnich dwóch faktów łatwo zauważyć, że wykres wielkości $\mathcal{H}^p(X)$ dla $p \in [0, +\infty)$ wygląda następująco:

$p < s$

$\mathcal{H}^p(X) < +\infty \Rightarrow \mathcal{H}^s(X) = 0$

$\mathcal{H}^s(X) > 0 \Rightarrow \mathcal{H}^p(X) = +\infty$




Szczególny punkt „d" może też „uciec" nam do $+\infty$ jeśli weźmiemy zbiór bardzo wysoko wymiaru". Jest to zresztą dość "tafwe do wyobrażenia.

Wprowadzamy następującą definicję.

Definicja 6.18 Wymiarem Hausdorffa przestrzeni metrycznej $(X,d)$ nazywamy

$$\dim_{\mathcal{H}} X = \inf\{p \in [0,+\infty) : \mathcal{H}^p(X) = 0\} \in [0,+\infty]$$

Wymiarem Hausdorffa podzbioru $Y \subset X$ nazywamy jego wymiar jako przestrzeni metrycznej z metryką indukowaną z $X$.

Uwagi 6.19

(1) Wymiar Hausdorffa daje zazwyczaj wyniki zgodne z intuicją geometryczną dotyczącą linii, powierzchni, brył.

(2) Dla $\#X \leq \aleph_0$ mamy $\dim_{\mathcal{H}} X = 0$

(3) Pojawiają się zb. $X$, zwykle zwane fraktalami; dla których $\dim_{\mathcal{H}} X \notin \mathbb{N}$

## 8. Całka Lebesgue'a

W tej części przedstawimy klasyczne podejście do teorii całki zwane całką Lebesgue'a. Mówimy w nim o całkowaniu tak zwanych funkcji mierzalnych względem miary po ustalonym zbiorze. Jednak rozpatrywana miara może być dość dowolna i nie musi być wprowadzona przed chwilą miarą Lebesgue'a w $\mathbb{R}^m$. Aby wprowadzić całkę ustalamy $(X, \mathcal{M}, \mu)$ - przestrzeń z miarą

Definicja 6.20. Jeśli $E \in \mathcal{M}$, to funkcję $f: E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ nazywamy mierzalną ($\mathcal{M}$-mierzalną) jeśli $\forall a \in \mathbb{R}: \{x \in A : f(x) > a\} \in \mathcal{M}$.

Uwaga 6.21 Łatwo wykazać, że dla rozpatrywanej funkcji $f: E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mamy następujące, równoważne warunki mierzalności:

(a) $\forall U$-otw. w $\overline{\mathbb{R}}$ : $f^{-1}(U) \in \mathcal{M}$,

(b) $\forall B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ : $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$.

Definicja 6.22 Funkcję $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$, $E \in \mathcal{M}$ nazywamy schodkową jeśli $f$ jest $\mathcal{M}$ mierzalna oraz $f(E)$ jest skończonym podzbiorem $\mathbb{R}$.

Często przy klasie funkcji schodkowych rozpatruje się tak zwane funkcje charakterystyczne zbioru $A \subset E$ względem $E$ określone jako

$$\chi_{A,E} : E \ni x \longrightarrow \chi_{A,E}(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in E \setminus A \end{cases} \in \mathbb{R}$$

Jeśli $E = X$, to upraszczając piszemy $\chi_A := \chi_{A,X}$.

Jeśli $f$ jest funkcją schodkową na $E$, $f(E) = \{c_1, \dots, c_k\}$, to określając $A_j = f^{-1}(c_j)$ dla $j = 1, \dots, k$. otrzymujemy.

$$(*) \quad f = \sum_{j=1}^{k} c_i \chi_{A_i,E}$$

Jak tutaj zauważyć $A_j \in \mathcal{M}$ dla $j = 1, \dots, k$.
Funkcje schodkowe zwykle oznaczane są literą „$s$".

Rozpatrując następnie $(X, \mathcal{M}, \mu)$ - przestrzeń z miarą.
$E \in \mathcal{M}$ oraz $s : E \longrightarrow [0, +\infty)$ funkcję schodkową.
$\mathcal{M}$-mierzalną, to określamy dla niej przy przedstawieniu $(*)$ symbol

$$I_E(s) = \begin{cases} 0, & E = \emptyset \\ \sum_{j=1}^{k} c_j \mu(A_j), & E \neq \emptyset \end{cases},$$

który można interpretować jako „objętość" podwykresu $s$.

Jeśli teraz $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ jest mierzalna, to całkę Lebesgue'a $f$ po zbiorze $E$ określamy w dwóch krokach.

**Definicja 6.23.**
Jeśli $f : E \longrightarrow [0, +\infty]$ jest mierzalna, to jej całkę określamy jako

$$\int_E f \, d\mu := \sup \{ I_E(s) : s \text{-schodkowa, mierzalna na } E,\ 0 \leq s \leq f \}$$

Jeśli $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ jest mierzalna, to przyjmujemy

$$\int_E f \, d\mu := \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu.$$

## Uwagi 6.24

(1) Zgodnie z przyjętymi umowami całkę Lebesgue'a możemy wyliczyć dla każdej funkcji mierzalnej. Jeśli obydwie całki, z części dodatniej i ujemnej są skończone, to mówimy, że $f$ jest sumowalna.

(2) W przykładach dowiemy się, że jeśli $X = \mathbb{R}$ oraz $\mu = \mathcal{L}^1$, to każda funkcja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, całkowalna w sensie Riemanna jest sumowalna w sensie Lebesgue'a względem $\mathcal{L}^1$.

(3) Jeśli w (2) rozpatrywać będziemy jako $f$ funkcję Dirichleta, to zauważymy, że jest ona w oczywisty sposób (jako funkcja schodkowa) sumowalna w sensie Lebesgue'a nie będąc całkowalną w sensie Riemanna.

(4) Teoria całki Lebesgue'a obejmuje wiele ciekawych twierdzeń. Znajdujemy tam w szczególności twierdzenia dające możliwość przechodzenia do granicy przy zbieżności punktowej, co nie było możliwe przy dwóch poprzednich teoriach całki.

(5) Poza teorią całki Lebesgue'a znajdujemy w matematyce cały szereg innych całek o różnych nazwach.

## §2. Efektywne wyliczanie miar podzbiorów $\mathbb{R}^m$

### 1. Podstawowe wzory (informacyjnie)

Niech $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, $I=[a,b] \subset J$ gdzie $J$ jest otwartym przedziałem w $\mathbb{R}$. Niech następnie $f: J \longrightarrow \mathbb{R}^m$ będzie funkcją klasy $C^1$, $f=(f_1,\dots,f_m)$. Jeśli dodatkowo założymy, że $f|[a,b]$ jest iniekcją, to zachodzi równość

$$(*) \qquad \mathcal{H}^1(f([a,b])) = \int_a^b |f'(t)|\,dt,$$

gdzie $|\cdot|$ to norma w $\mathbb{R}^m$ zadana przez kanoniczny iloczyn skalarny zaś całka po prawej stronie, to całka Cauchy'ego. W tej sytuacji mamy

$$|f'(t)| = \left(\sum_{i=1}^{m} (f_i'(t))^2\right)^{1/2}.$$

Jeśli $f|[a,b]$ nie jest injekcją, to licząc tę całkę dostajemy „długość" toru punktu $f(t)$ w $\mathbb{R}^m$ wykonanego przy $t \in [a,b]$. Wtedy pewne elementy $f([a,b])$ liczymy z kwadratami wynikającymi z wielokrotnym przechodzeniem przez nie. Mówimy wtedy o długości krzywej $\gamma: [a,b] \ni t \longrightarrow f(t) \in \mathbb{R}^m$.

Sytuacja upraszcza się nieco gdy chcemy bez założenia injektywności, wyliczyć długość wykresu odwzorowania $f|[a,b]$ jak wyżej. Wystarczy wtedy rozpatrywać nowe odwzorowanie (wykres)

$$g: J \ni t \longrightarrow (t, f(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m+1}.$$

Jest to jak łatwo zauważyć injekcja i z (*) dostajemy

dostaniemy.

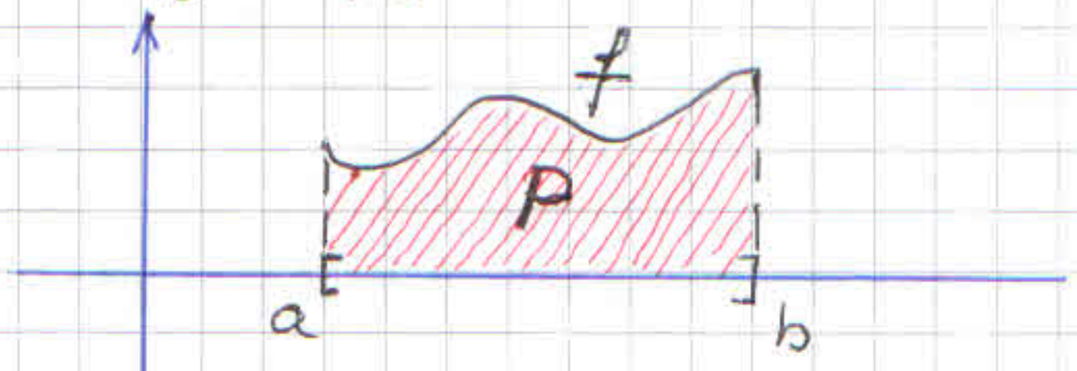
$$\mathcal{H}^1(f/[a,b]) = \int_a^b (1+|f'(t)|^2)^{1/2}\,dt$$

Przechodząc do wyliczania pól powierzchni płaskich w $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ spotykamy zazwyczaj dwie sytuacje:

Pole pod wykresem funkcji.

Rozpatrujemy $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f: [a,b] \longrightarrow [0,+\infty)$. $f \in \mathcal{R}([a,b]; \mathbb{R})$. Określmy.

$$P = \{(x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq f(x)\}$$




Wtedy dostajemy $\mathcal{H}^2(P) = \mathcal{L}^2(P) = \int_{[a,b]} f(x)\,dx$,

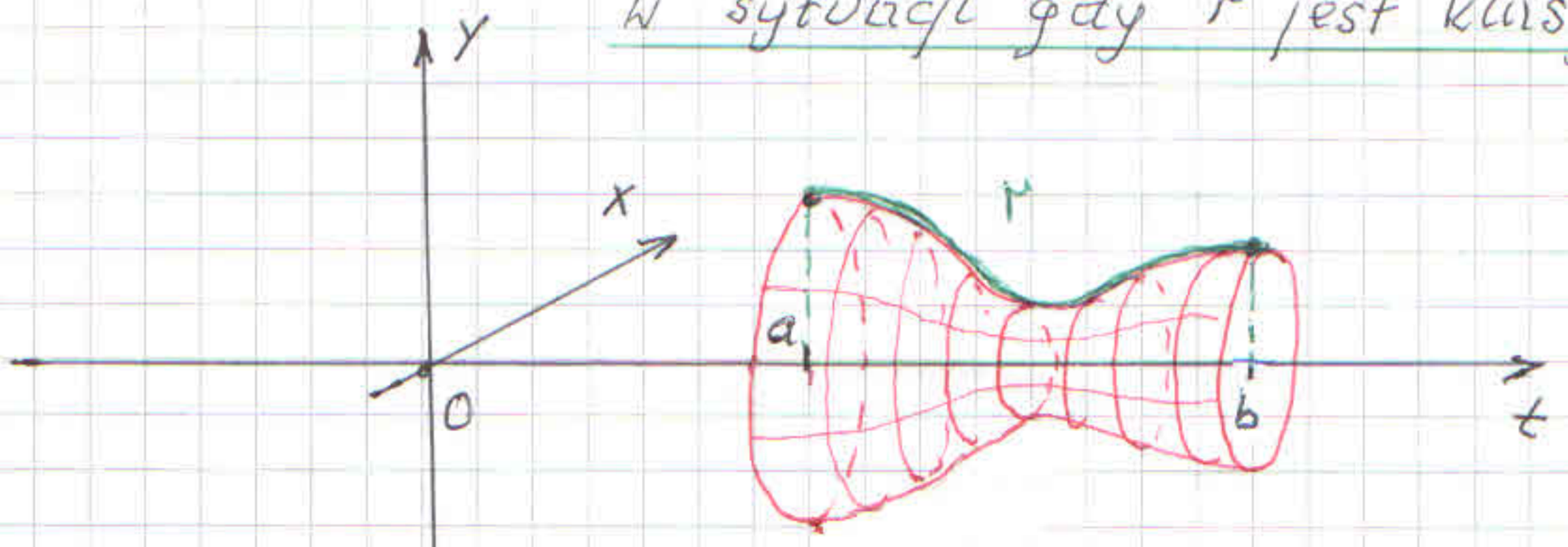
gdzie po prawej stronie równości mamy całkę Riemanna funkcji $f$.
Okazuje się, że taką równość możemy również uzyskać dla funkcji mierzalnej w sensie Lebesgue'a, nieujemnej.

Pole powierzchni obrotowej w $\mathbb{R}^3$

Rozpatrujemy $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a,b] \subset J$, $J$ - otwarty przedział w $\mathbb{R}$ oraz $r: J \ni t \longrightarrow r(t) \in (0,+\infty)$
Stawiamy się wyliczyć pole powierzchni obrotowej.

$$P = \{(t, r(t)\cos\varphi, r(t)\sin\varphi) : t \in [a,b], \varphi \in [0, 2\pi)\},$$

W sytuacji gdy $r$ jest klasy $C^1$.




W tej sytuacji uzyskujemy równość

$$\mathcal{H}^2(P) = 2\pi \int_a^b r(t)\left(1 + (r'(t))^2\right)^{1/2} dt$$

Chcąc uzyskać objętość bryły ograniczonej wyżej rozpatrywaną powierzchnią $P$ zapisujemy.

$$V = \{(t, \varrho r(t)\cos\varphi, \varrho r(t)\sin\varphi : t \in [a,b], \varphi \in [0, 2\pi), \varrho \in [0,1]\}$$

W tej sytuacji dostajemy równość

$$\mathcal{H}^3(V) = \mathcal{L}^3(V) = \pi \int_a^b r^2(t)\,dt$$

Zwykle wszystkie te wzory są uzyskiwane przy pomocy różnych rozumowań, szczególnie skomplikowanych. w sytuacji pola powierzchni obrotowej. W tym przypadku konieczne jest dodatkowe wyjaśnienie jak ją określamy, zwykle bez miary Hausdorffa $\mathcal{H}^2$.

## 2. Wzór ogólny

Większość przedstawionych wzorów daje się uzyskać z jednego, uniwersalnego twierdzenia, które możemy już teraz sformułować.

Rozpatrujemy $\Omega$ podzbiór otwarty $\mathbb{R}^n$ oraz odwzorowanie $f = (f_1, \dots, f_m) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ gdzie $1 \leq n \leq m$. Przypuśćmy następnie, że każde z odwzorowań $f_j$, $j = 1, \dots, m$ można w każdym punkcie $\mathring{x} \in \Omega$ zróżniczkować względem każdej zmiennej $j = 1, \dots, n$ przy ustalonych zmiennych pozostałych, to znaczy potrafimy wyliczyć pochodną funkcji

$$x_i \longrightarrow f_j(\mathring{x}_1, \dots, \mathring{x}_{i-1}, x_i, \mathring{x}_{i+1}, \dots, \mathring{x}_n)$$

w punkcie $\mathring{x}_i$. Taką pochodną, nazywaną pochodną cząstkową $f$ względem $x_i$ w punkcie $\mathring{x}$ nazywamy pochodną cząstkową względem tej zmiennej w tak ustalonym punkcie i oznaczamy symbolem

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathring{x})$$

Po wyliczeniu pochodnych cząstkowych otrzymujemy odwzorowania

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, m \quad i = 1, \dots, n$$

o których dalej zakłada się, że są ciągłe. Przy tym warunku dostajemy, w równoważny sposób, założenie, że wyjściowe odwzorowanie $f$ jest klasy $C^1$. Macierz pochodnych cząstkowych $\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x)\right]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$ można identyfikować z pochodną $f'(x)$ naszego odwzorowania $f$ w bazach kanonicznych $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ (w punkcie $x$).

Wspomniane przed chwilą, uniwersalne twierdzenie można teraz sformułować następująco

Twierdzenie 6.25

Z: $\Omega$ - otwarty w $\mathbb{R}^n$, $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ klasy $C^1$, $1 \leq n \leq m$
$E \subset \Omega$, $E$ - $\mathcal{L}^n$ mierzalny, $f|E$ - injekcja.

T: $$\mathcal{H}^n(f(E)) = \int_E J_n f \, d\mathcal{L}^n$$

gdzie $$J_n f(x) = \left[ \sum_{M_x - \text{minor rzędu } n \text{ } f'(x)} M_x^2 \right]^{1/2}.$$

D: Dowód wymaga wielu faktów pomocniczych i pojawi się w AM4.

Przykład 6.26 Wyprowadzimy w powyższy sposób wzór na pole powierzchni obrotowej opierając się o odwzorowanie z początku strony 6-15

$$f: J \times \mathbb{R} \ni (t, \varphi) \longrightarrow (t, r(t)\cos\varphi, r(t)\sin\varphi) \in \mathbb{R}^3,$$

przy którym poszukujemy pola powierzchni obrotowej: $P = f([a,b] \times [0, 2\pi))$. Aby uzyskać wymaganą injekcję $f|[a,b] \times [0, 2\pi)$, przyjmujemy, że $r(t) > 0$ dla $t \in [a,b]$

Mamy

$$f'(t,\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ r'(t)\cos\varphi & -r(t)\sin\varphi \\ r'(t)\sin\varphi & r(t)\cos\varphi \end{bmatrix} \quad \text{skąd:}$$

$$(J_2 f)(t,\varphi) = \left( (r(t)\cos\varphi)^2 + (r(t)\sin\varphi)^2 + (r'(t)r(t))^2 (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \right)^{1/2} =$$
$$= \left( (r(t))^2 + (r'(t)\, r(t))^2 \right)^{1/2} = r(t)\left(1 + (r'(t))^2\right)^{1/2}$$

Zatem na podstawie 6.21 dostajemy.

$$\mathcal{H}^2(P) = \int_{[a,b]\times[0,2\pi)} r(t)\left(1+(r'(t))^2\right)^{1/2} d\mathcal{L}^2((t,\varphi)) \overset{(*)}{=}$$

$$= \int_{[0,2\pi)} \left( \int_a^b r(t)\left(1+(r'(t))^2\right)^{1/2} dt \right) d\mathcal{L}^1(\varphi) =$$

$$= 2\pi \int_a^b r(t)\left(1+(r'(t))^2\right)^{1/2} dt$$

Przy liczeniu tej całki względem dwóch zmiennych. musimy znać jeszcze tak zwane Twierdzenie Fubiniego pozwalające zamienić całkowanie funkcji dwóch zmiennych na całkowanie fukcji jednej zmiennej (*) W tym miejsco jednak tutwo je sobie wyobrazić gdyż funkcja podcałkowa nie zależy od zmiennej $\varphi$. Dodatkowo, ciągłość funkcji podcałkowej pozwala całkę względem miary Lebesgue'a zamienić na całkę Cauchy'ego.

Przykład 6.27 (Zbiór Vitalego)

Jak widać z tego paragrafu wiele miar zbiorów w $\mathbb{R}^m$ możemy wyliczyć, ale zdarzają się również o wiele trudniejsze sytuacje. Jedną z nich teraz opiszemy.

W $[0,1]$ wprowadzamy relację równoważności przyjmując.

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

Następnie tworzymy zbiór $V \subset [0,1]$ wybierając z każdej klasy równoważności $[0,1]/\sim$ jeden element. Czyli mamy $V \subset [0,1]$ takie, że:

$$\forall A \in [0,1]/\sim \; : \; \#\, A \cap V = 1.$$

Pokażemy teraz, że rozpatrując pierwszą miarę Lebesgue'a, czyli przestrzeń z miarą $(\mathbb{R}, L_1, \mathcal{L}^1)$, mamy $V \notin L_1$, więc $V$ jest zbiorem niemierzalnym.
Ustawmy w tym celu w ciąg $\{r_n\}$ zbiór $[-1,1] \cap \mathbb{Q}$ oraz określmy zbiory

$$V_n = V + r_n = \{v + r_n : v \in V\} \text{ dla } n \in \mathbb{N}$$

Wtedy na wstępie zauważamy, że:

(1) $V_n \cap V_m = \emptyset$ gdy $n \neq m$,

W przeciwnym przypadku $a + r_n = b + r_m$ dla pewnych $a, b \in V$, $n \neq m$. Wtedy $a - b \in \mathbb{Q}$ skąd $a = b \Rightarrow r_n = r_m \Rightarrow n = m$ co daje sprzeczność.

Następnie łatwo sprawdzamy (ćw), że:

(2) $[0,1] \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} V_n \subset [-1,2]$

Teraz jeśli $V \in L_1$, to $V_n \in L_1$ dla $n \in \mathbb{N}$, ze względu na możliwość przesunięcia o translację zbiorów przy liczeniu miary zewnętrznej Lebesgue'a. Niech więc

$$\mathcal{L}^1(V) = c \in [0, +\infty],$$ a wtedy $\mathcal{L}^1(V_n) = c$, $n \in \mathbb{N}$.

oraz z (2) $1 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{L}^1(V_n) \leq 3$,

co przy identycznych miarach zbiorów $V_n$ nie może zajść. Widzimy stąd, że $V \notin L_1$ oraz, że $\mathcal{L}^1(V) > 0$ (miara zewnętrzna).

## §3. Fraktale

### 1. Podstawowe konstrukcje

Niech $(X,d)$ będzie przestrzenią metryczną, niepustą. Wprowadzimy następujące oznaczenia

$$F(X) := \{A \subset X : A \text{ jest domknięty w } X,\ A \neq \emptyset\}$$

$$B(X) := \{A \in F(X) : A \text{ jest ograniczony}\}$$

$$K(X) := \{A \subset X : A \text{ jest zwarty},\ A \neq \emptyset\}$$

Jak łatwo zauważyć mamy zawieranie

$$K(X) \subset B(X) \subset F(X).$$

Popularnym tematem badań są stirowania o wykorzystanie zbiorów $F(X)$, $B(X)$, $K(X)$ po wprowadzeniu w nich struktur topologicznych lub metrycznych.

W największej z tych przestrzeni zwykle wprowadza się topologię, wśród których spotykamy topologię Kuratowskiego. Jednak spotkać można również metrykę, w tym tuk zwaną metrykę Busemanna. Rozpatrywanie tych ogólnych sytuacji chwilowo odkładamy zajmując się dalej dwoma pozostałymi rodzinami $B(X)$ i $K(X)$.

W kolejnej przestrzeni podzbiorów domkniętych, niepustych i ograniczonych $B(X)$ wprowadzi się ogólnie znaną metrykę Hausdorffa. Aby ją określić dla zbioru $A \in B(X)$ przyjmujemy.

$$dist(x, A) = \inf\{d(x,y) : y \in A\} \quad \text{dla } x \in X.$$

Następnie dla pary zbiorów $A, B \in B(X)$, definiujemy

$$h(A,B) = \max\left\{ \sup_{x \in B} d(x,A), \sup_{x \in A} d(x,B) \right\}.$$

Rozpatrując następnie odwzorowanie.

$$h : B(X) \times B(X) \ni (A,B) \longrightarrow h(A,B) \in [0, +\infty),$$

z pewnym trudem sprawdzamy, że $(B(X), h)$ jest przestrzenią metryczną.

Definicja 6.25 Metrykę $h$ w przestrzeni $B(X)$, zbudowaną dla przestrzeni metrycznej $(X,d)$ nazywamy metryką Hausdorffa w $B(X)$.

Metryka ta ma szereg dobrych własności, pozwalających na naturalne spojrzenie na zbieżność ciągów zbiorów. Sytuacja jednak jeszcze się poprawia gdy przestrzeń $B(X)$ zastąpimy przez $K(X)$ czyli zwarte, niepuste podzbiory wyjściowej przestrzeni metrycznej $(X,d)$.

Uzyskana w ten sposób metryka.

$$\underline{h \mid K(X) \times K(X)}$$

jest zwykle oznaczana ponownie symbolem $h$ i jej wyliczanie można nieco dopracyzować dostając dla $A, B \in K(X)$

$$h(A,B) = \max\{\max_{x \in B} dist(x,A), \max_{x \in A} dist(x,B)\}$$

Oczywiście $(K(X), h)$ jest przestrzenią metryczną, ale ponadto mamy następującą „klasyczną" definicję.

Definicja 6.26. Wynik przedstawionej konstrukcji $(K(X), h)$ nazywamy przestrzenią fraktali dla $(X,d)$.

Okazuje się, że przestrzeń ta posiada podobnie jak $(B(X), h)$ wiele własności „dziedziczonych" z przestrzeni $(X,d)$

Twierdzenie 6.27

Z: $(X,d)$ - przestrzeń metryczna.

T: (1) $(X,d)$ - zupełna $\Rightarrow$ $(K(X), h)$ - zupełna,
(2) $(X,d)$ - zwarta $\Rightarrow$ $(K(X), h)$ - zwarta,
(3) $(X,d)$ - spójna $\Rightarrow$ $(K(X), h)$ - spójna.

D: Podręcznik opisujące przestrzeń fraktali.

## 2. Iterowane układy funkcji (IFS)

Jak pamiętamy z Twierdzenia Banacha o punkcie stałym szczególną rolę odgrywały odwzorowania zwężające. Spotykamy je również przy fraktalach.

**Definicja 6.28** Przestrzeń metryczną zupełną $(X,d)$ wraz ze skończonym układem odwzorowań zwężających $w_i : X \longrightarrow X$, $i = 1,\dots,m$ nazywamy iterowanym układem funkcji i oznaczamy przez $\{(X,d); w_1,\dots,w_m\}$

**Uwaga 6.29** Układy takie bywają też nazywane „układami funkcji iterowanych", ale nazwa, którą tutaj proponujemy jest właściwsza.

Dysponując teraz iterowanym układem funkcji $\{(X,d); w_1,\dots,w_m\}$ wprowadzamy odwzorowanie

$$W : K(X) \ni A \longrightarrow W(A) := w_1(A) \cup \dots \cup w_m(A) \in K(X).$$

Jeśli przyjmiemy, że $w_1,\dots,w_m$ mają współczynniki zwężania $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ to okazuje się, że odwzorowanie

$$W : K(X) \longrightarrow K(X),$$

jest zwężające o współczynniku zwężania

$$\lambda := \max\{\lambda_1,\dots,\lambda_m\}$$

Ze względu na 6.27 dostajemy odwzorowanie $W: K(X) \longrightarrow K(X)$, które ma dokładnie jeden punkt stały, czyli:

(1) $\exists! \, T \in K(X) : W(T) = T$

(2) $\forall E \in K(X) : W^{\langle n \rangle}(E) \longrightarrow T \quad (n \to +\infty)$

Ostatnia zbieżność odnosi się do metryki Housdoffa h w $K(X)$. T to tzw. atraktor IFS

## 3. Przykłady konstrukcji fraktali przez IFSy

### Przykład 6.30 (Zbiór Cantora).

Rozpatrujemy $\mathbb{R}$ z metryką naturalną oraz $W_1 : \mathbb{R} \ni x \longrightarrow \frac{1}{3}x \in \mathbb{R}$, $W_2 : \mathbb{R} \ni x \longrightarrow \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \in \mathbb{R}$

Dostajemy dla $W_1, W_2$ i $W$ współczynniki zwężania $1/3$ oraz startując ze zbioru $E_0 = [0,1]$ dostajemy będziemy w kolejnych krokach:

$[0, 1/3] \cup [2/3, 1] = E_1$

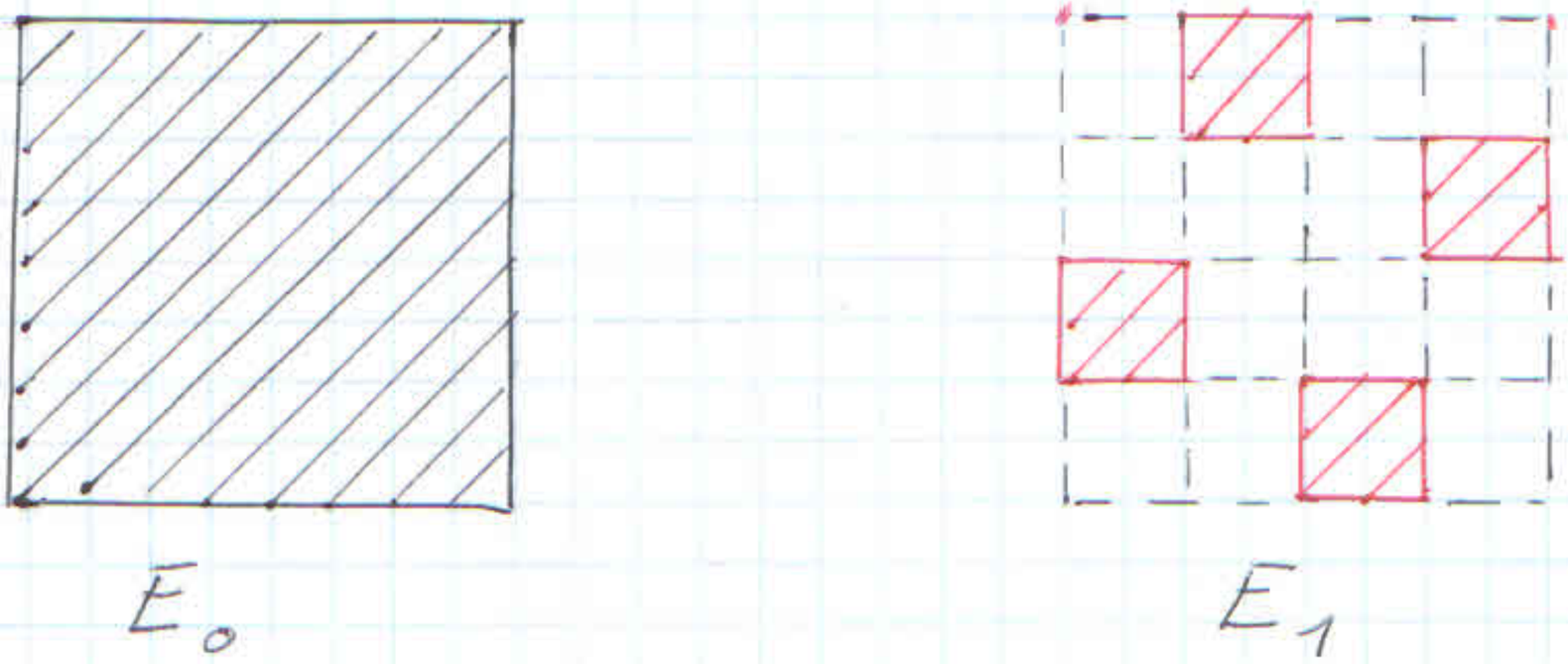
$[0, 1/9] \cup [2/9, 3/9] \cup [6/9, 7/9] \cup [8/9, 1] = E_2$

itd.

Widać, że powstaje zstępujący ciąg zbiorów zwartych a takie ciągi są zbieżne w metryce Housdorffa do swoich przecięć. Powtarzamy w ten sposób klasyczną konstrukcję zbioru Cantora.

Przykład 6.31 (Pył Cantora)

$E_0 = [0,1] \times [0,1]$




Po podziale $E_0$ na 16 kwadratów, odrzucam 12 pozostawiając 4 jak na rysunku. Dostajemy atrakcyjny jako przecięcie zstępującego ciągu $E_0 \supset E_1 \supset \ldots$

Wśród dalszych przykładów znajdujemy też nazwisko Sierpińskiego w zbiorach:
- trójkąt Sierpińskiego,
- dywan Sierpińskiego,
- piramida Sierpińskiego

## 4. Zbiory samopodobne w $\mathbb{R}^n$

Bardzo dobry, szczegółowy opis tego tematu znajdujemy w książkach K. J. Falconera:

- The geometry of fractal sets, Cambridge Univ. Press
- Fractal Geometry, John Wiley & Sons

Rozpatrujemy IFS jak w punkcie 2 tego paragrafu, w którym rozważamy układ odwzorowań tradycyjnie oznaczanych

$$S_1, \dots, S_m : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad n \geq 1,$$

będących podobieństwami $\mathbb{R}^n$, czyli spełniającymi dla $i = 1, \dots, m$ warunek:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : |S_i(x) - S_i(y)| = c_i |x - y|$$

ze współczynnikami podobieństw $c_1, \dots, c_m \in (0, +\infty)$, o których w tej sytuacji zakładamy $c_i \in (0, 1)$, $i = 1, \dots, m$.

Atraktor $T$ tego układu opisany w punkcie 2. nazywany jest zbiorem samopodobnym, będąc sumą pewnej liczby swoich mniejszych kopii. Widzimy to na przykładzie zbioru Cantora, czy pyłu Cantora.

Z takim układem związana jest jednoznacznie określona liczba „s" spełniająca równanie

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{m} c_i^s = 1,$$

która przy spełnieniu dodatkowych warunków okazuje się być wymiarem Hausdorffa atraktora $T$.

Warunki, które mają nam ten wynik zapewnić, powodują, że w sumie

$$T = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(T),$$

sumowane zbiory są „niemal" rozłączne.

Zwykle wprowadzamy jest w tym miejscu rozważany warunek zbioru otwartego (OSC) zwany także warunkiem Morana, mówiący, że:

Istnieje niepusty, ograniczony zbiór $V$ otwarty w $\mathbb{R}^n$ taki, że: (1) $S_i(V) \cap S_j(V) = \emptyset$ dla $i \neq j$, $i,j \in \{1,\dots,m\}$

(2) $S_i(V) \subset V$ $i \in \{1,\dots,m\}$.

W literaturze można spotkać też innego typu warunki jak np. $\mathcal{H}^s(S_i(T) \cap S_j(T)) = 0$ dla $i \neq j$, $i,j \in \{1,\dots,m\}$

W tak opisanej sytuacji zachodzi następujące.

Twierdzenie 6.32 Jeśli rozpatrywany układ $S_1,\dots,S_m$ spełnia OSC, to $\dim_{\mathcal{H}} T = s$, a ponadto $0 < \mathcal{H}^s(T) < +\infty$

D: K.J. Falconer, Fractal Geometry, Tw. 9.3.

Korzystając z tego faktu, bez problemu, liczymy wymiary popularnych fraktali uzyskując równania:

- Zbiór Cantora: $2 \cdot (\frac{1}{3})^s = 1 \Rightarrow s = \ln 2 / \ln 3$.
- Pył Cantora: $4 \cdot (\frac{1}{4})^s = 1 \Rightarrow s = 1$
- Trójkąt Sierpińskiego: $3(\frac{1}{2})^s = 1 \Rightarrow s = \ln 3 / \ln 2$
- Piramida Sierpińskiego: $4(\frac{1}{2})^s = 1 \Rightarrow s = 2$.

## 5. Uwagi końcowe.

Wśród obszernej literatury i prac naukowych dotyczących fraktali warto zwrócić uwagę na

Chaos and Fractals. The Mathematic Behind the Computer Graphic. Proceedings of symposia in applied mathematics, Vol. 39, AMS.

Niewątpliwie zaś w zakresie miar Hausdorffa i całej geometrycznej teorii miary, ciągle wiodącą pozycją jest książka

[Fe] Herbert Federer, Geometric Measure Theory, Springer-Verlag 1969.

W zakresie problemów związanych z wymiarem Hausdorffa i fraktalami znajdujemy w niej następujący ważny fakt

Twierdzenie 6.33

Z: $p \in [0, +\infty)$, K zwarty w $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{H}^p(K) > 0$

T: $\exists A \subset K$ : A zwarty, $0 < \mathcal{H}^p(A) < +\infty$.

D: [Fe] 2.10.47

# Rozdział 7. Zbieżność w przestrzeniach Banacha i przestrzeniach Hilberta, szeregi Fouriera

## §1. Przemienna zbieżność

### 1. Podstawowe pojęcia i fakty.

Niech $E$ będzie przestrzenią unormowaną nad $\mathbb{K}$ oraz wybierzmy ciąg $\{x_n\}$ w $E$

**Definicja 7.01** Szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ nazywamy *przemiennie zbieżnym* jeśli dla dowolnej bijekcji $\sigma: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)}$ jest zbieżny.

**Uwagi 7.02**

(1) Tak postawioną definicję znajdujemy na przykład w książce

[Di] J. Dieudonné, Foundations of Modern Analysis, Academic Press 1969

W większości prac dotyczących tej tematyki spotykamy nazwę „bezwarunkowo zbieżny", która ma korzenie historyczne, ale zdecydowanie gorzej opisuje omawianą zbieżność.

(2) W definicji tej nie mówimy, że sumy szeregu po permutacjach $\sigma: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ są identyczne.

(3) O zbieżności przemiennej mówiliśmy wstępnie w Uwadze 2,67 nawiązując też 2.65.

Dla szeregu $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' x_n$ rozpatrujemy następujące warunki:

(P) Szereg $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' x_n$ jest przemiennie zbieżny.

(P') $\forall \varepsilon>0\ \exists sk.\ J\subset\mathbb{N}\ \forall sk.\ H\subset\mathbb{N}: H\cap J=\emptyset \Rightarrow \| \sum_{n\in H}{}' x_n \| < \varepsilon$

(P'') Szereg $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' x_n$ jest przemiennie zbieżny oraz jego suma nie zależy od permutacji:

Na wstępie wykażemy kluczowy

Lemat 7.03

Z: E - przestrzeń unormowana, $\{x_n\}$ ciąg w E

T: (1) Dla szeregu $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' x_n$ zachodzą wynikania (P'') $\Rightarrow$ (P) $\Rightarrow$ (P')

(2) Jeśli szereg $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' x_n$ jest zbieżny to warunki (P), (P'), (P'') są dla niego równoważne.

D: (1) Implikacja (P'') $\Rightarrow$ (P) jest oczywista.

Implikację (P) $\Rightarrow$ (P') wykażemy przez kontrapozycję.

Warto tutaj zauważyć, że warunek (P') przypomina uogólniony warunek Cauchy'ego dla szeregu, w którym nie ustalimy porządku wyrazów.

Zaprzeczając (P') dla szeregu $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' x_n$ dostajemy

(*) $\exists \varepsilon>0\ \forall sk.\ J\subset\mathbb{N}\ \exists sk.\ H\subset\mathbb{N}: H\cap J=\emptyset,\ \| \sum_{n\in H}{}' x_n \| \geq \varepsilon$

Ustalmy tak uzyskane $\varepsilon>0$ i wybierzmy kolejno:

$J_0=\emptyset$ i $H_0$ z (*) do $J_0$

$J_1=J_0\cup H_0$ i $H_1$ z (*) do $J_1$ ... i tak dalej do

$J_{n+1}=J_n\cup H_n$ i $H_{n+1}$ z (*) do $J_{n+1}$ ...

7-03

Otrzymujemy wyrazy szeregu potączone w grupy: $H_0, H_1, \dots$
Niech $H = \mathbb{N} \setminus \bigcup_{n=0}^{+\infty} H_n$

Tworzymy permutację wyjściowego szeregu (opisowo) numerując na wstępie w naturalnej kolejności elementy $H_0$. Następnie, jeśli $\tilde{H} \neq \emptyset$, bierzemy pierwszy element z $\tilde{H}$. Procedurę powtarzamy numerując elementy $H_1$, a następnie pierwszy element $\tilde{H}$, który nie został wykorzystany. Ten proces powtarzamy dla wszystkich liczb naturalnych, rezygnując ewentualnie z elementów $\tilde{H}$ jeśli już zostały wszystkie wykorzystane

W tak zbudowanej permutacji $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ łatwo zauważyć, że szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)}$ nie spełnia warunku Cauchy'ego, co prowadzi do sprzeczności oraz kończy dowód (1)

(2) Na podstawie (1) mamy $(P'') \Rightarrow (P) \Rightarrow (P')$, więc wystarczy wykazać implikację $(P') \Rightarrow (P'')$

Skoro rozpatrywany szereg jest zbieżny, więc niech $s = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ będzie jego sumą. Pokażemy, że każda permutacja daje zbieżność do tej samej sumy $s$.

Weźmy permutację $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i zauważmy, że

$$\left\| \sum_{n=0}^{N} x_{\sigma(n)} - s \right\| \leq \left\| \sum_{n=0}^{N} x_{\sigma(n)} - \sum_{n=0}^{M} x_n \right\| + \left\| \sum_{n=M+1}^{+\infty} x_n \right\|$$

dla dowolnych $N, M \in \mathbb{N}$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i dobierzmy $J$ z $(P')$ do $\varepsilon/3$. Biorąc $M = \max J$ dostajemy

$$\left\| \sum_{n=0}^{N} x_{\sigma(n)} - s \right\| \leq \left\| \sum_{n=0}^{N} x_{\sigma(n)} - \sum_{n=0}^{M} x_n \right\| + \varepsilon/3$$

Zatem jeśli weźmiemy $N \geq \max \sigma^{-1}(\{0,\dots,M\})$, to z ostatniej nierówności dostaniemy

$$\| \sum_{n=0}^{N} x_{\sigma(n)} - s \| \leq \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon,$$

gdyż pierwszy składnik pod normą będzie zawierał wyrazy o indeksach poza $J$. Stąd mamy $(P'')$.

## Twierdzenie 7.04

Z: $E$ - przestrzeń unormowana, $\{x_n\}$ ciąg w $E$

T: Dla szeregu $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' x_n$:

(1) $(P) \Leftrightarrow (P'')$

(2) Jeśli $E$ jest p. Banacha, to $(P), (P'), (P'')$ są równoważne

D: (1) Zawsze $(P'') \Rightarrow (P)$. Jednak mając $(P)$ z 7.03 (2) dostajemy $(P'')$.

(2) Mamy $(P'') \Rightarrow (P) \Rightarrow (P')$. Wystarczy więc sprawdzić czy $(P')$ pociąga zbieżność szeregu $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' x_n$ bo wtedy z 7.03 (2) dostaniemy $(P'')$.

Jednak sprawdzając dla $\{s_n\}$ warunek Cauchy'ego mamy

$$\|s_q - s_p\| = \|x_{p+1} + \dots + x_q\| < \varepsilon$$

gdy $q > p \geq N = \max J$ oraz $J$ dobierzemy do $\varepsilon > 0$ z warunku $(P')$. Skoro $E$ jest zupełna, to dostaniemy zbieżność szeregu $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' x_n$ co kończy dowód.

Przykład 7.05 W przestrzeni $\tilde{c}_0$ złożonej z ciągów w $\mathbb{K}$ mających prawie wszystkie wyrazy równe 0. z normą supremową rozpatrujemy ciąg: $x_0 = 0$

$$x_n = (\underbrace{0}_{\text{pozycja } 0}, 0, \dots, \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\text{pozycja } n}, 0, \dots) \quad \text{dla } n \geq 1$$

Łatwo zauważyć, że spełniony jest warunek $(P')$ ale szereg $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' x_n$ nie jest zbieżny w $\tilde{c}_0$. Warto odnotować, że szereg ten jest bezwzględnie zbieżny.

## 2. Związki zbieżności bezwzględnej z przemienną.

### Twierdzenie 7.06

Z: $E$ - przestrzeń unormowana, $\{x_n\}$ ciąg w $E$
szereg $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' x_n$ jest zbieżny i bezwzględnie zbieżny

T: Szereg $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' x_n$ jest przemiennie zbieżny.

D: Bezwzględna zbieżność pociąga, jak łatwo zauważyć, następujący warunek

$$(B)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \underset{J\text{-sk.}}{J \subset \mathbb{N}}\ \forall \underset{H\text{-sk.}}{H \subset \mathbb{N}}\ H \cap J = \emptyset \Rightarrow \sum_{n \in H}{}' \|x_n\| < \varepsilon$$

co łatwo wykazać wprost z definicji.
Stąd dostajemy natychmiast warunek $(P')$
Teraz na podstawie 7.03(2) dostajemy $(P)$
czyli zbieżność przemienną

**Twierdzenie 7.07**

Z: $E$ - przestrzeń Banacha, $\{x_n\}$ ciąg w $E$
szereg $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' x_n$ jest bezwzględnie zbieżny

T: Szereg $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' x_n$ jest przemiennie zbieżny.

D: W przestrzeni Banacha z bezwzględną zbieżnością dostajemy zbieżność, więc tezę mamy natychmiast z 7.06.

**Twierdzenie 7.08 (o tasowaniu)**

Z: $E$ - przestrzeń Banacha, $\{x_n\}$ ciąg w $E$,
szeregi $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' x_n$ jest bezwzględnie zbieżny
$\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekcja.

T: (1) Szeregi $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' x_{\sigma(n)}$ jest zbieżny.

(2) $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' x_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty}{}' x_n$

D: Jest to wniosek z 7.07

Uwaga 7.09 W $\mathbb{R}$ zbieżność przemienna jest równoważna bezwzględnej. Można tę równoważność przenieść na przestrzenie skończenie wymiarowe oraz sprawdzić, że charakteryzuje ona skończony wymiar. Jest to już znacznie trudniejszy problem, którym zajmiemy się w kolejnej części tego paragrafu.

## 3. Porównanie typów zbieżności szeregów w przestrzeniach Banacha.

Zwykle tego typu porównania rozważane są w przestrzeniach Banacha. W razie potrzeby możemy informacje dla przestrzeni unormowanych dostać poprzez tak zwane uzupełnienie. Ciało $\mathbb{K}$ nie gra istotnej roli w tych rozważaniach i właściwie zawsze mówimy o przestrzeniach rzeczywistych.

Niech więc $E$ będzie przestrzenią Banacha nad $\mathbb{R}$.
Na potrzeby tej części wykładu wprowadzamy następujące oznaczenia.

$\mathcal{S}_E$ - przestrzeń szeregów o wyrazach z $E$, formalnie podzbiór $E^{\mathbb{N}} \times E^{\mathbb{N}}$, ale można ją identyfikować (tradycyjnie) z $E^{\mathbb{N}}$, czyli z ciągami wyrazów szeregu.

$\mathcal{Z}_E := \{ \sum \in \mathcal{S}_E : \sum$ - jest zbieżny $\}$

$\mathcal{B}_E := \{ \sum \in \mathcal{S}_E : \sum$ - jest bezwzględnie zbieżny $\}$

$\mathcal{P}_E := \{ \sum \in \mathcal{S}_E : \sum$ - jest przemiennie zbieżny $\}$

$\mathcal{W}_E := \mathcal{Z}_E \setminus \mathcal{P}_E$ - szeregi zbieżne warunkowo

Należy w tym momencie wspomnieć, że szeregi z $\mathcal{P}_E$ są często nazywane zbieżnymi bezwarunkowo, co zostało w pewnym sensie przeniesione z $\mathbb{R}$ jako uzupełnienie zbieżności warunkowej.

7-08

Dla każdej przestrzeni Banacha $E$ mamy zawierania.

$$\mathcal{B}_E \subset \mathcal{P}_E \subset \mathcal{Z}_E \subset \mathcal{S}_E$$

Dla każdego $\sum' \in \mathcal{S}_E$ możemy wprowadzić zbiór sum, które produkują jego permutacje, czyli dla $\sum'$ szeregu $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' x_n$ określamy zbiór

$$DS(\sum') = \{x \in E : \exists \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ bijekcja} : x = \sum_{n=0}^{+\infty}{}' x_{\sigma(n)}\}$$

Skrót pochodzi od słów „domain of sums" i jest skracany czasami do litery „S".

Dalsze rozważania dotyczące wprowadzonych obiektów przeprowadzimy w trzech częściach - dla $\mathbb{R}$, skończenie wymiarowych przestrzeniach Banacha oraz na koniec dla wymiaru nieskończonego.

A. $E = \mathbb{R}$

(1) Mamy wtedy $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{P}_{\mathbb{R}}$

(2) Z Twierdzenia Riemanna [1853] wiemy, że:

$$\sum' \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}^{\vee} \Rightarrow DS(\sum') = \mathbb{R}$$

B. $E$ jest skończenie wymiarowe.

(1) Dość łatwo sprawdzić, że $\mathcal{B}_E = \mathcal{P}_E$ (ćw.)

(2.) Na podstawie Tw. Levy'ego - Steinitza [1905-1913] wiadomo, że dla $\sum \in \mathcal{H}_E^{\vee}$ istnieje $v \in E$ oraz $L$ - podprzestrzeń $E$, $\dim L > 0$, że $DS(\sum) = v + L$.

7-09

C. E jest nieskończenie wymiarowa

(1) Formalne pytanie o silną inkluzję $\mathcal{B}_E \neq \mathcal{P}_E$ w każdej przestrzeni nieskończenie wymiarowej znajdujemy w Księdze Szkockiej około 1935 roku zaś odpowiedź w niżej pokazanej pracy z 1950 r.

122) Problemat Ulama-Orlicz

Czy w każdej przestrzeni typu (B) o nieskończenie wielu wymiarach istnieje szereg zbieżny bezwarunkowo lecz nie bezwzględnie ? Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ nazywa się bezwarunkowo zbieżny, gdy jest zbieżny przy każdem uporządkowaniu wyrazów, bezwzględnie zbieżny, gdy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ jest zbieżny.



# ABSOLUTE AND UNCONDITIONAL CONVERGENCE IN NORMED LINEAR SPACES

BY A. DVORETZKY AND C. A. ROGERS

INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY, PRINCETON, N. J.

Communicated by Marston Morse, January 30, 1950

1. Let $B$ be a real Banach space and denote by $||x||$ the norm of an element $x$ of $B$. The series

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu, \quad (x_\nu \in B, \nu = 1, 2, \dots) \tag{1}$$

is called absolutely convergent if $\sum ||x_\nu|| < \infty$; it is called unconditionally convergent if the series $\sum y_\nu$ converges whenever the sequence $(y_\nu)_1^\infty$ is a rearrangement of the sequence $(x_\nu)_1^\infty$. An equivalent definition of unconditional convergence of (1) is obtained by requiring $\sum \pm x_\nu$ to be convergent for every choice of the signs. There are several other equivalent definitions; most of these have been discussed by T. H. Hildebrandt.[1]

It is clear that if $B$ is of finite (linear) dimension then (1) is unconditionally convergent if and only if it is absolutely convergent. The problem of finding the spaces for which these two types of convergence are equivalent is mentioned by S. Banach.[2] The primary aim of this note is to settle this problem by proving the following result.

THEOREM 1. *The unconditionally convergent series coincide with the absolutely convergent series if and only if the space B is of finite dimension.*

(2) Gdy $E$ jest nieskończenie wymiarowa to postać zbioru $DS(\Sigma')$ dla $\Sigma \in \mathcal{W}_E$ jest bardzo trudna do określenia i nie przypomina w żadnym zakresie przypadku skończenie wymiarowego!

W 1954r. w pracy doktorskiej (!) pokazano, że każda przestrzeń nieskończenie wymiarowa $E$ posiada nieskończenie wymiarową zwartą podprzestrzeń $F$. Banacha ma szereg nawarunkowo zbieżny $\Sigma$, dla którego $\#DS(\Sigma) = 1$. Czyli $\Sigma'$ „tudzież" przypomina szereg z $\mathcal{S}_E$, leżący w $\mathcal{W}_E$!

Twierdzenia te następnie uogólniali P.A. Kornilov [1980] i T.O. Wojtaszczyk [2005] na przypadek skończonego zbioru $DS(\Sigma)$, który jak wynika z ostatnich badań może być zupełnie dowolny.

Należy wspomnieć, że kwestia postaci zbioru $DS(\Sigma')$ dla $\Sigma \in \mathcal{W}_E$ była szeroko dyskutowaną przed 1950 r. - przewidywano np. jego wypukłość.

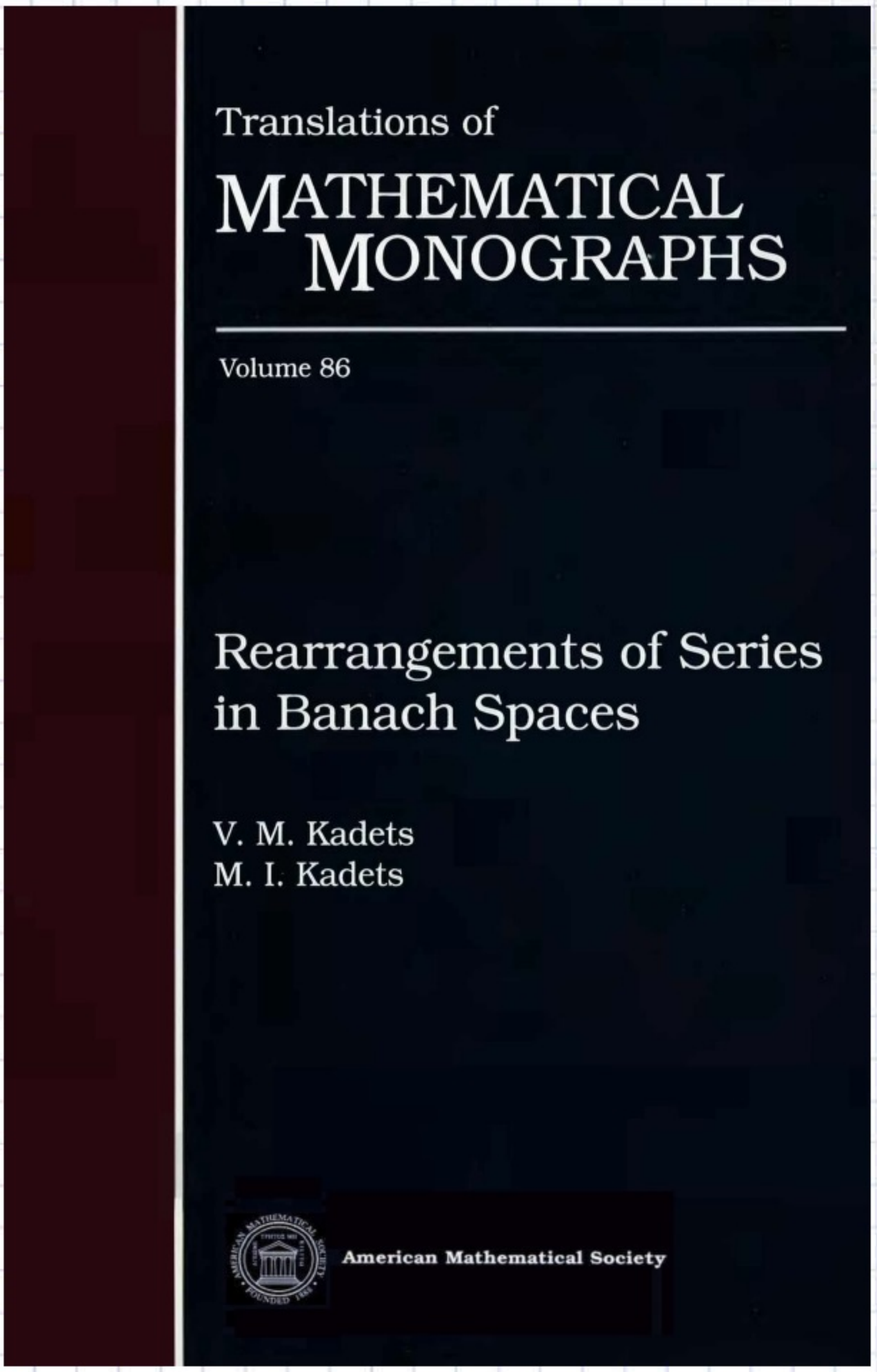
Można znaleźć wiele ciekawych faktów na ten temat zaś proponuję zacząć od artykułu:

I. Jóźwik, M. Terepeta, Polskie spojrzenie na twierdzenie Riemanna o tasowaniu, Wiadomości Matematyczne (2019) T.55, Nr. 1, 143-157.

Znajdujemy tam wiele informacji, jak również obszerną literaturę związaną z tym tematem.

7-11

Obszerne, bardzo szczegółowe rozwinięcie może stanowić niżej położona pozycja.



## §2. Rodziny przemienne sumowalne i rodziny bezwzględnie sumowalne w przestrzeniach unormowanych.

### 1. Podstawowe definicje.

Niech $E$ będzie przestrzenią unormowaną nad $\mathbb{K}$ zaś $A$ przeliczalnym ($\#A = \aleph_0$) zbiorem wskaźników

$\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ - rodzina elementów $E$

**Definicja 7.10** Rodzinę $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ nazywamy bezwzględnie (przemiennie) sumowalną, jeśli istnieje $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow A$ bijekcja taka, że szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} x_{\varphi(n)}$ jest bezwzględnie (przemiennie) zbieżny.

**Uwagi 7.11**

(1) Warto rozważać rodziny przeliczalne bo problemy z rodzin nieprzeliczalnych są redukowane do rodzin przeliczalnych lub skończonych

(2) W definicji 7.10 mały kwantyfikator przed $\varphi$ może być zastąpiony dużym.

(3) Jeśli przy rodzinie bezwzględnie sumowalnej szereg w definicji jest dodatkowo zbieżny, to rodzina ta jest przemiennie sumowalna. oraz suma szeregu nie zależy od $\varphi$. Wynika to z twierdzenia 7.06.

Lemat 7.12

Zł: $E$ - przestrzeń Banacha, $A, B$ - przeliczalne, $B \subset A$
$\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ rodzina bezwzględnie (przemiennie) sumowalna elementów $E$

Tz: (1) $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ jest przemiennie sumowalna.
(2) $\{x_\alpha\}_{\alpha \in B}$ jest bezwzględnie (przemiennie) sumowalna.

D: (1) Wynika z zupełności $E$
(2) Jak łatwo zauważyć jeśli dla $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$, przy dowolnym $\varphi$, spełniony warunek (P') (war. (B)), to będzie on również spełniony dla $\{x_\alpha\}_{\alpha \in B}$, po wyborze dowolnej bijekcji $\tilde{\varphi}: \mathbb{N} \longrightarrow B$.

Definicja 7.13 Jeśli $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ jest rodziną elementów $E$ bezwzględnie (przemiennie) sumowalną oraz przy pewnej bijekcji $\varphi: \mathbb{N} \longrightarrow A$ szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} x_{\varphi(n)}$ jest zbieżny, to jego sumę nazywamy sumą rodziny $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ i oznaczamy $\sum_{\alpha \in A} x_\alpha$

Uwagi 7.14

(1) Jeśli w 7.13 szereg jest zbieżny przy pewnej bijekcji $\varphi$, to również przy każdej bez zmiany sumy.
(2) Sumy rodzin bezwzględnie (przemiennie) sumowalnych są w przestrzeniach Banacha zawsze określone.

Przykład 7.15 Rodzina $\{(0, \dots, 0, \frac{1}{k}, 0, \dots) : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$
w $\tilde{c}_0$ jest przemiennie sumowalna, ← pozycja $|k|$
ale jej podrodzina indeksowana $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ już nie jest.

## 2. Rodziny dwuwskaźnikowe w przestrzeniach Banacha.

Niech $E$ będzie przestrzenią Banacha nad $\mathbb{K}$, $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Ustalając $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ rodzinę elementów przestrzeni $E$ oznaczamy $x_{ij} := x_{(i,j)}$ dla $i, j \in \mathbb{N}$. Otrzymujemy w ten sposób łatwą do wypisania rodzinę.

$$\begin{array}{l} x_{00}\ x_{01}\ x_{02} \ldots \\ x_{10}\ x_{11}\ x_{12} \ldots \\ x_{20}\ x_{21}\ x_{22} \ldots \\ \ldots\ldots \end{array}$$

Załóżmy następnie, że rodzina ta jest bezwzględnie lub przemiennie sumowalna. Wtedy szeregi wyrazów z wierszy są zbieżne i możemy oznaczyć ich sumy przez $y_i = \sum_{j=0}^{+\infty} x_{ij}$ dla $i \in \mathbb{N}$. Przy tak przyjętych oznaczeniach otrzymujemy serię faktów ważnych dla dalszych zastosowań.

### Twierdzenie 7.16

Z: $E$ - przestrzeń Banacha nad $\mathbb{K}$, $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ rodzina przemiennie (bezwzględnie) sumowalna elementów $E$

T: Przy przyjętych oznaczeniach:

(1) Szereg $\sum_{i=0}^{+\infty} y_i$ jest przemiennie (bezwzględnie) zbieżny.

(2) $\sum_{i=0}^{+\infty} y_i = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha$

D: Na wstępie pokażemy twierdzenie dla rodzin przemiennie sumowalnych. Permutacja wiersy rodziny nie wpływa na jej przemienną sumowalność i sumę, a jedynie permutuje szereg $\sum_{i=0}^{+\infty} y_i$.
Aby więc wykazać twierdzenie w tym przypadku wystarczy pokazać punkt (2) jego tezy.

Dla dowodu ustalmy bijekcję $\varphi: \mathbb{N} \longrightarrow A$ i niech $s = \sum_{n=0}^{+\infty} x_{\varphi(n)} = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha$. Zauważmy, że dla dowolnych $N, M, K \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność:

$$\left\| \sum_{i=0}^{N} \left( \sum_{j=0}^{M} x_{ij} \right) - s \right\| \leq \left\| \sum_{i=0}^{N} \left( \sum_{j=0}^{M} x_{ij} \right) - \sum_{n=0}^{K} x_{\varphi(n)} \right\| + \left\| \sum_{n=K+1}^{+\infty} x_{\varphi(n)} \right\|$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$ i dobierzmy z warunku (P') dla szeregu $\sum_{n=0}^{+\infty} x_{\varphi(n)}$ zbiór $J$ do $\varepsilon/3$ i niech $K_0 = \max J$.

Weźmy następnie $N_0$ i $M_0$ tak dobrane aby

$$\varphi(\{0, \dots, K_0\}) \subset \{0, \dots, N_0\} \times \{0, \dots, M_0\}.$$

Wtedy powyższa inkluzja zachodzić też dla wszystkich $N \geq N_0$ oraz $M \geq M_0$, więc z (P') dostajemy

$$\left\| \sum_{i=0}^{N} \left( \sum_{j=0}^{M} x_{ij} \right) - \sum_{n=0}^{K_0} x_{\varphi(n)} \right\| < \varepsilon/3$$

Zatem dla $N \geq N_0$, $M \geq M_0$ mamy nierówność

$$\left\| \sum_{i=0}^{N} \left( \sum_{j=0}^{M} x_{ij} \right) - s \right\| < \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Ustalając teraz $N \geq N_0$ i przechodząc z $M$ do $+\infty$ dostajemy $\left\| \sum_{i=1}^{N} y_i - s \right\| \leq \frac{2}{3}\varepsilon$. Stąd nam natychmiast wynika, że $\sum_{i=0}^{+\infty} y_i = s$, co kończy dowód.

Pozostał nam przypadek gdy wyjściowa rodzina $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ jest bezwzględnie sumowalna. Jednak w przestrzeni Banacha rodziny bezwzględnie sumowalne są przemiennie sumowalne. Więc automatycznie dostajemy punkt (2) tego twierdzenia w tym przypadku. Zatem musimy jedynie uzasadnić bezwzględną zbieżność szeregu $\sum_{n=0}^{+\infty} y_i$ czyli (1).

Rozważmy zatem rodzinę $\{\|x_\alpha\|\}_{\alpha\in A}$ w $\mathbb{R}$. Oznaczmy

$$\tilde{y}_i = \sum_{j=0}^{+\infty} \|x_{ij}\| \text{ dla } i\in\mathbb{N}$$

Z zakończonej części dowodu dla rodzin przemiennie sumowalnych wnioskujemy, że szereg $\sum_{i=0}^{+\infty} \tilde{y}_i$ jest zbieżny. W tej sytuacji nierówność

$$\|y_i\| \le \tilde{y}_i \text{ dla } i\in\mathbb{N}$$

daje bezwzględną zbieżność szeregu $\sum_{i=0}^{+\infty} y_i$, co kończy dowód twierdzenia 7.16.

Aby skorzystać z wykazanego twierdzenia musimy mieć zapewnioną przemienną lub bezwzględną sumowalność rozpatrywanej rodziny. Sprawdzenie przemiennej sumowalności jest zwykle dość trudne zaś w przypadku bezwzględnej sumowalności mamy dość naturalny sposób działania.

Niech $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $A=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ będzie rodziną elementów przestrzeni Banacha $E$. Oznaczmy w tej sytuacji, gdy szeregi $\sum_{j=0}^{+\infty} x_{ij}$ dla $i\in\mathbb{N}$ są bezwzględnie zbieżne,

$$y_i = \sum_{j=0}^{+\infty} x_{ij}, \quad \tilde{y}_i = \sum_{j=0}^{+\infty} \|x_{ij}\| \text{ dla } i\in\mathbb{N}$$

W tak opisanej sytuacji zachodzi następujące.

Twierdzenie 7.17

Z: Szeregi $\sum_{j=0}^{+\infty} \|x_{ij}\|$ dla $i \in \mathbb{N}$ oraz szereg $\sum_{i=0}^{+\infty} \tilde{y}_i$ są zbieżne w $\mathbb{R}$

T: Rodzina $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ jest bezwzględnie sumowalna.

D: Niech $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ będzie bijekcją.

Wtedy dla każdego $N \in \mathbb{N}$ istnieją $i_0, j_0 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\sum_{n=0}^{N} \|x_{\varphi(n)}\| \leq \sum_{i=0}^{i_0} \left( \sum_{j=0}^{j_0} \|x_{ij}\| \right) \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{i_0} \tilde{y}_i \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \tilde{y}_i \in \mathbb{R}$$

Zatem sumy częściowe szeregu $\sum_{n=0}^{+\infty} \|x_{\varphi(n)}\|$ są wspólnie ograniczone, co daje tezę.

Uwaga 7.18 Często, w różnych sytuacjach, zachodzi potrzeba sumowania rodzin przeliczalnych. Wygodne jest w tej sytuacji dobre ponumerowanie elementów w formie rodziny dwuwskaźnikowej. Warto czasami rozpatrywaną rodzinę uzupełnić zerami jeśli pewne wyjściowe grupy do sumowania są skończone. Sytuacja taka była omawiana w AM1 w 6.09, gdzie rozpatrywane były dwuwskaźnikowe rodziny liczbowe. Typowym przypadkiem takiej sytuacji jest iloczyn Cauchy'ego szeregów opisywany we wspomnianym fakcie AM1. Wkrótce spotkamy zupełnie podobną sytuację przy okazji omawiania tzw. algebr Banacha.

## §3. Algebry Banacha

### 1. Podstawowe definicje i przykłady

**Definicja 7.19** Algebrą unormowaną nazywamy przestrzeń unormowaną $A$ wyposażoną w dodatkowe działanie zwane mnożeniem

$$A \times A \ni (x,y) \longrightarrow x \cdot y \in A,$$

które jest dwuliniowe, łączne oraz spełnia warunek

$$\forall x,y \in A : \|x \cdot y\| \leq \|x\|\|y\|.$$

**Definicja 7.20.** Algebrę unormowaną $A$ nazywamy:

(1) algebrą Banacha jeśli $A$ jest przestrzenią Banacha,

(2) algebrą przemienną jeśli mnożenie jest przemienne,

(3) algebrą z jedynką jeśli istnieje element neutralny mnożenia, czyli $\exists 1 \in A \; \forall x \in A : 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$,

(4) algebrą rzeczywistą (zespoloną) jeśli przestrzeń $A$ jest nad $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$).

**Uwagi 7.21**

(1) Podane wyżej pojęcia możemy łączyć dostając np. przemienne algebry Banacha z jedynką –

(2) Jeśli w algebrze unormowanej jest jedynka, to dokładnie jedna. Czasami zakłada się w tym przypadku (my nie zakładamy), że $\|1\| = 1$.

(3) Dla $x \in A$ określamy potęgi: $x^1 := x, \ldots, x^n := x^{n-1} \cdot x$, $n \geq 2$. Gdy w algebrze jest jedynka, to przyjmujemy $x^0 := 1$.

(4) Mnożenie jest odwzorowaniem dwuliniowym ciągłym.

Przykłady 7.22

(1) $A = \mathbb{K}$ ze zwykłym mnożeniem, mamy $|x \cdot y| = |x||y|$, dla $x, y \in A$. Czyli jest to przemienna algebra Banacha z 1.

(2) $X \neq \emptyset$, $A = \mathcal{B}(X; \mathbb{K})$ ze zwykłym mnożeniem funkcji: Jak łatwo zauważyć $\|f \cdot g\| \leq \|f\|\|g\|$ dla $f, g \in A$, więc $A$ jest algebrą Banacha przemienną z jedynką, którą jest funkcja stała równa 1.

(3) Jeśli $X$ jest niepustą przestrzenią metryczną (topologiczną) to $\mathcal{CB}(X; \mathbb{K})$ jest przemienną algebrą Banacha z jedynką. Ponadto gdy $X$ jest zwarta, to $\mathcal{C}(X; \mathbb{K}) = \mathcal{CB}(X; \mathbb{K})$ mają te same własności.

(4) Przestrzeń $c_0$ jest przemienną algebrą Banacha z naturalnym mnożeniem ciągów. W tej algebrze nie mamy jedynki.

(5) $\tilde{c}_0$ jest przemienną algebrą unormowaną bez jedynki.

(6) Szczególnie ważny przykład uzyskujemy ustalając $E$ - przestrzeń unormowaną oraz biorąc $A = \mathcal{L}(E; E)$ zbudowaną w Rozdziale 2, §3 z normą supremową. W przestrzeni unormowanej $A$ wprowadzamy mnożenie

$$A \times A \ni (f, g) \longrightarrow f \circ g \in A,$$

dla którego, jak wiemy, $\|f \circ g\| \leq \|f\|\|g\|$ dla $f, g \in A$ oraz działanie to jest dwuliniowe i ciągłe. Otrzymujemy w $A$ strukturę algebry unormowanej z jedynką $id_E$, zazwyczaj nieprzemiennej. Ponadto jeśli $E$ jest przestrzenią Banacha, to $A$ jest algebrą Banacha. Przykład ten ma szczególne znaczenie w rachunku różniczkowym, o czym przekonamy się w AM3.

## 2. Algebry Banacha z jedynką.

Niech $A$ będzie algebrą unormowaną z jedynką $1$.
Element $x \in A$ nazywamy odwracalnym jeśli
istnieje $y \in A$ takie, że $xy = yx = 1$. Wprowadzamy
oznaczenie

$$G(A) = \{x \in A : x \text{ - jest odwracalny}\}$$

Jeśli $x \in G(A)$, to element $y \in A$, dla którego
$xy = yx = 1$ jest wyznaczony jednoznacznie i będziemy
go dalej oznaczać $x^{-1}$ i nazywać odwrotnym do $x$

Uwaga 7.23 Para $(G(A), \cdot)$, gdzie mnożenie
zacieśniamy z $A$, stanowi grupę (Ćw.), zazwyczaj
nazywaną grupą elementów odwracalnych algebry $A$.

Przykłady 7.24 Wracając do Przykładów 7.22 mamy:

(1) $G(A) = \mathbb{K} \setminus \{0\}$

(2) $G(A) = \{f \in \mathcal{B}(X;\mathbb{K}) : \exists m>0 \ \forall x \in X : |f(x)| \geq m\}$
oraz dla $f \in G(A)$ $f^{-1} : X \ni x \to 1/f(x) \in \mathbb{K}$

(3) Obowiązuje (2) po ograniczeniu się do funkcji
ciągłych. Jeśli $X$ jest zwarta, to wtedy
$G(\mathcal{C}(X;\mathbb{K})) = \{f \in \mathcal{C}(X;\mathbb{K}) : f^{-1}(0) = \emptyset\}$.

(4) Algebra bez jedynki.

(5) Algebra bez jedynki.

(6) $G(A) = Isom(E;E)$, gdzie elementy odwrotne
to zwykłe odwrócenia izomorfizmów topologicznych.

Lemat 7.25

Z: $A$ - algebra Banacha z jedynką 1.

$x \in A$, $\|x\| < 1$

T: (1) $1-x \in G(A)$,

(2) szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ jest bezwzględnie zbieżny.

(3) mamy równość $(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

D: Zaczynamy od (2) gdzie widzimy nierówność $\|x^n\| \leq \|x\|^n$. Skoro $\|x\| < 1$ więc szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ jest bezwzględnie zbieżny więc również zbieżny.

Następnie pokażemy (1) i (3) wykazując, że $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \in A$ jest elementem odwrotnym do $1-x$. Dla sprawdzenia mnożymy

$$(1-x)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = 1,$$

dzięki dwuliniowości i ciągłości mnożenia.

Ten sam wynik otrzymujemy z mnożenia

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)(1-x) = 1$$

co kończy dowód Lematu.

Twierdzenie 7.26

Z: $A$ - algebra Banacha z jedynką

$a \in G(A)$, $a \neq 0$

T: $K\left(a, \frac{1}{\|a^{-1}\|}\right) \subset G(A)$

D: Niech $x \in K\left(a, \frac{1}{\|a^{-1}\|}\right)$. Wtedy możemy zapisać $x = a - v$ gdzie $\|v\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}$. Zauważmy następnie, że $x = a - v = a(1 - a^{-1}v)$.

Skoro $\|v\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}$, więc $\|a^{-1}v\| \leq \|a^{-1}\|\|v\| < 1$, co daje informację, że $1 - a^{-1}v \in G(A)$ na podstawie Lematu 7.25. Wiemy ponadto, że $a \in G(A)$ zatem $x$ jako iloczyn dwóch elementów z $G(A)$ jest również odwracalny.

## Twierdzenie 7.27

Z: $A$ - algebra Banacha z jedynką

T: (1) $G(A)$ jest zbiorem otwartym w $A$,

(2) $\xi: G(A) \ni x \to \xi(x) = x^{-1} \in G(A)$ jest homeomorfizmem

D: Jeśli $A = \{0\}$, to twierdzenie zachodzi.

Dalej rozpatrujemy $A \neq \{0\}$, a wtedy $0 \notin G(A)$ i otwartość $G(A)$ wynika z 7.26

Przechodząc do dowodu (2) ustalmy $a \in G(A)$ i zbadajmy ciągłość $\xi$ w tym punkcie.

Wybierając $x \in K\left(a, \frac{1}{\|a^{-1}\|}\right)$ mamy $x \in G(A)$ oraz $x = a(1 - a^{-1}v)$ gdzie $v = a - x$, $\|v\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}$.

Teraz dostajemy $x^{-1} = (1 - a^{-1}v)^{-1}a^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (a^{-1}v)^n\right) \cdot a^{-1}$

skąd

$$\|\xi(x) - \xi(a)\| = \left\| \sum_{n=0}^{+\infty} (a^{-1}v)^n a^{-1} - a^{-1} \right\| =$$

$$= \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} (a^{-1}v)^n a^{-1} \right\| \leq \|a^{-1}\| \sum_{n=1}^{+\infty} (\|a^{-1}\|\|v\|)^n =$$

$$= \frac{\|a^{-1}\|^2 \|v\|}{1 - \|a^{-1}\|\|v\|} = \frac{\|a^{-1}\|^2 \|a - x\|}{1 - \|a^{-1}\|\|a - x\|}$$

Wybierając teraz ciąg $\{x_n\}$ w $K(a, \frac{1}{\|a^{-1}\|})$ tak, że $x_n \to a$ $(n \to +\infty)$ dostajemy.

$$\|\xi(x_n) - \xi(a)\| \leq \frac{\|a^{-1}\|^2 \|x_n - a\|}{1 - \|a^{-1}\| \|x_n - a\|} \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

Wynika stąd, że $\xi$ jest ciągłe, a $\xi^{-1} = \xi$ a zatem odwzorowanie $\xi$ jest homeomorfizmem co kończy dowód.

## 3. Funkcja „exp" na algebrze Banacha z jedynką

Niech $A$ będzie algebrą Banacha z jedynką 1

**Definicja 7.28** Określamy odwzorowanie.

$$\exp : A \ni x \to \exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n \in A$$

**Uwaga 7.29** Funkcja „exp" jest poprawnie określona.

gdyż dla $x \in A$ mamy $\|x^n\| \leq \|x\|^n$, skąd mamy $\|\frac{1}{n!} x^n\| \leq \frac{\|x\|^n}{n!}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\|x\|^n}{n!}$ jest zbieżny, więc szereg w definicji jest bezwzględnie zbieżny, a zatem zbieżny określając element $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$ algebry $A$.

**Twierdzenie 7.30**

Z: $A$ - algebra Banacha z jedynką 1.

T: (1) exp - jest funkcją ciągłą na $A$,

(2) $\exp(0) = 1$,

(3) jeśli $x, y \in A$ i $xy = yx$, to $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$,

(4) $\exp(A) \subset G(A)$.

D: Jeśli $\|x\| < R$, to $\left\|\frac{x^n}{n!}\right\| \leqslant \frac{R^n}{n!}$, więc z kryterium Weierstrassa (2.70) dostajemy lokalną jednostajną zbieżność rozpatrywanego szeregu funkcyjnego. Składa się on z funkcji ciągłych, więc stąd dostajemy ciągłość jego sumy czyli punkt (1) tezy.

(2) Wynika wprost z definicji „exp"

(3) Rozpatrujemy dla ustalonych $x, y \in A$ rodzinę dwuwskaźnikową $\left\{\frac{x^p y^q}{p!\,q!}\right\}_{p,q \in \mathbb{N}}$

$$\begin{array}{llll}
\frac{x^0y^0}{0!\,0!} & \frac{x^0y^1}{0!\,1!} & \cdots & \frac{x^0y^q}{0!\,q!} \cdots \\
\frac{x^1y^0}{1!\,0!} & \frac{x^1y^1}{1!\,1!} & \cdots & \frac{x^1y^q}{1!\,q!} \cdots \\
\cdots & \cdots & & \cdots \\
\frac{x^py^0}{p!\,0!} & \frac{x^py^1}{p!\,1!} & \cdots & \frac{x^py^q}{p!\,q!} \cdots \\
\cdots & \cdots & & \cdots
\end{array}$$

Łatwo sprawdzamy (ćw.) jej bezwzględną sumowalność i wyliczamy sumę na dwa sposoby:

- sumując wiersze dostajemy

$$s = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^p}{p!} \left( \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{x^q}{q!} \right) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

- grupując rodzinę tak jak przy iloczynie Cauchy'ego szeregów otrzymujemy

$$s = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{p+q=n} \frac{x^p y^q}{p!\,q!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left( \sum_{p+q=n} \binom{n}{p} x^p y^q \right)$$

Jeśli teraz $xy = xy$ to sumy $\sum_{p+q=n} \binom{n}{p} x^p y^q$ dają nam $(x+y)^n$ dla $n \in \mathbb{N}$ co kończy dowód (3)

(4) Dla $x \in A$ $x \cdot (-x) = (-x) \cdot x = -x^2$ stąd z (3) wynika $\exp(x) \cdot \exp(-x) = \exp(0) = 1$, więc $\exp(x) \in G(A)$

## §4. Aproksymacja funkcji ciągłych.

### 1. Twierdzenie Stone'a-Weierstrassa.

W tym paragrafie przez K oznaczać będziemy niepustą, zwartą przestrzeń metryczną (topologiczną). Zajmiemy się szczególnymi własnościami

$$\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(K) := \{ f : K \longrightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ - jest ciągła} \},$$

ze standardową normą supremową. Jak wiemy jest to przemienna algebra Banacha z jedynką. Zbieżność zadawana przez normę to zbieżność jednostajna ciągów funkcyjnych. Zajmujemy się sytuacją dla przypadku gdy K jest przestrzenią metryczną ze względu na wcześniejsze przygotowanie, ale wszystkie tutaj uzyskane wyniki bez kłopotu dostajemy również w przypadku gdy K jest zwartą przestrzenią topologiczną.

**Definicja 7.31** Mówimy, że $A \subset \mathcal{C}_{\mathbb{K}}(K)$:

(1) jest podalgebrą $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(K)$, jeśli A jest podprzestrzenią wektorową $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(K)$ zamkniętą na mnożenie,

(2) rozdziela punkty K, jeśli
$(x, y \in K, x \neq y) \Rightarrow (\exists f \in A : f(x) \neq f(y))$,

(3) nie znika w żadnym punkcie K, jeśli
$(x \in K) \Rightarrow (\exists f \in A : f(x) \neq 0)$

(4) jest samosprzężony, jeśli
$(f \in A) \Rightarrow (\overline{f} \in A)$.

Uwagi 7.32

(1) W tej części wykładu twierdzenia będziemy formułować nad jednym z ciał $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$, rzadko nad $\mathbb{K}$.

(2) Podobne definicje są stawiane ogólniej. Na przykład rozdzielanie punktów zbioru może być określone dla odwzorowań między dowolnymi zbiorami.

Dalej zwykle zajmować będziemy się zbiorami $A$ będącymi podalgebrami $A$, rozdzielającymi punkty $K$ oraz nie znikającymi w żadnym punkcie $K$. Następujący lemat da nam możliwość planowania wartości funkcji w punktach $K$ w ramach zbioru (rodziny) $A$.

Lemat 7.33

Z: $A$ - podalgebra $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(K)$ rozdzielająca punkty, nie znikająca w żadnym punkcie $K$

T: (1) $\underline{(x_0 \in K, c_0 \in \mathbb{K}) \Rightarrow (\exists f \in A : f(x_0) = c_0)}$

(2) $\underline{(x_1, x_2 \in K, x_1 \neq x_2, c_1, c_2 \in \mathbb{K}) \Rightarrow (\exists f \in A : f(x_1) = c_1, f(x_2) = c_2)}$

D: (1) Istnieje $h \in A$ taka, że $h(x_0) \neq 0$, a wtedy funkcja $\underline{f = \frac{c_0}{h(x_0)} h}$ spełnia tezę.

(2) Niech $g, h_1, h_2 \in A$ spełniają warunki: $g(x_1) \neq g(x_2)$, $h_1(x_1) \neq 0$, $h_2(x_2) \neq 0$

Wtedy funkcja

$$\underline{f = c_1 \frac{h_1(g - g(x_2))}{h_1(x_1)(g(x_1) - g(x_2))} + c_2 \frac{h_2(g - g(x_1))}{h_2(x_2)(g(x_2) - g(x_1))}}$$

jest elementem $A$ oraz $f(x_1) = c_1$ i $f(x_2) = c_2$.

Głównym wynikiem tego paragrafu jest następujące.

Twierdzenie 7.34 (Stone'a - Weierstrassa)

Z: $A$ podalgebra $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$ rozdzielająca punkty $K$ i nie znikająca w żadnym punkcie $K$

T: $\overline{A} = \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$

Trudno przecenić znaczenie tego faktu. Na wstępie zwróćmy uwagę na następujący przykład

Przykład 7.35 Niech $K = [0,1] \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oraz

$$A = \{w|[0,1] : w \in \mathbb{R}[t]\}.$$

Widzimy, że $A$ to podalgebra spełniająca założenia 7.35 bo $id_{[0,1]}, 1 \in A$. Zatem, zgodnie z tezą powyższego twierdzenia, zwiększeniami wielomianów będziemy mogli jednostajnie przybliżać funkcje ciągłe. Czyli dla $f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcji ciągłej istnieją $w_n \in \mathbb{R}[t]$ dla $n \in \mathbb{N}$ takie, że $w_n|[0,1] \rightrightarrows f \ (n \to +\infty)$.

Dowód głównego twierdzenia poprzedzimy bardzo ważnym, kluczowym lematem technicznym

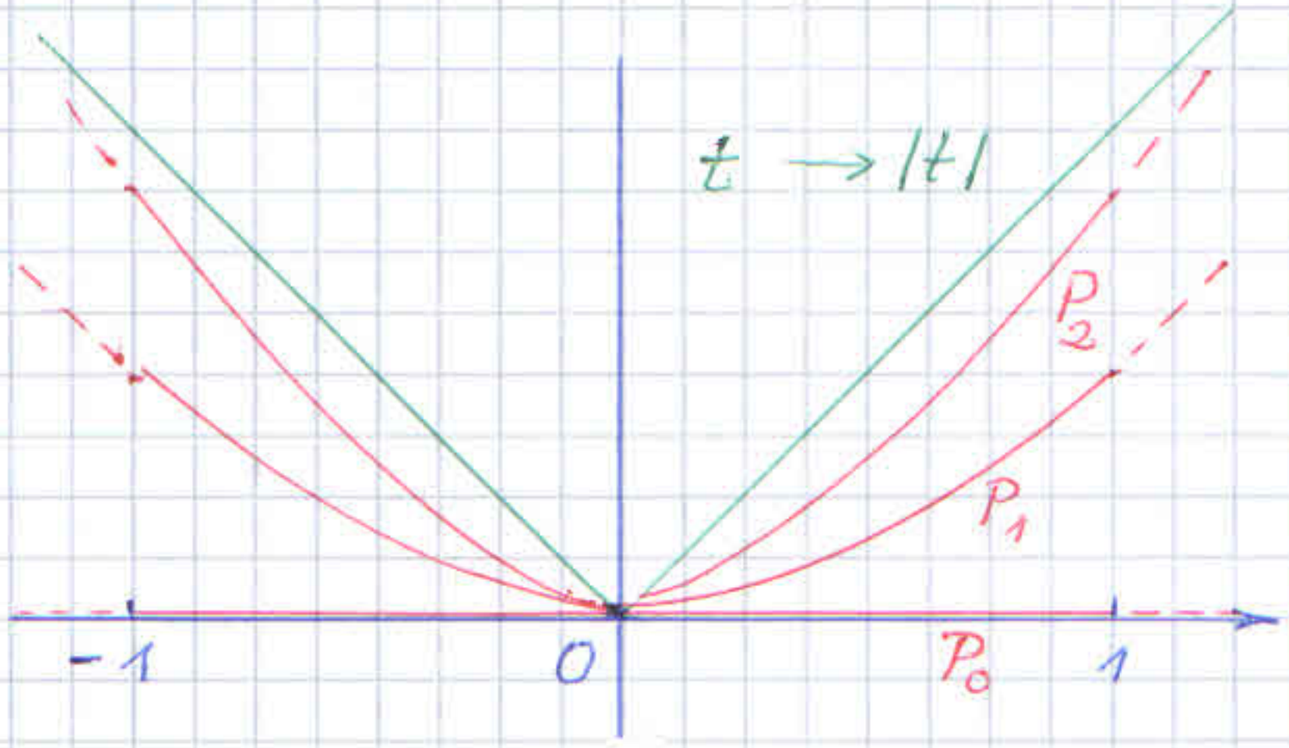
Lemat 7.36 Istnieje ciąg $\{P_n\}$ wielomianów. $P_n: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ takich, że:

(1) $P_n(0) = 0$ dla $n \in \mathbb{N}$

(2) $P_n|[-1,1] \rightrightarrows (\ [-1,1] \ni t \longrightarrow |t| \in \mathbb{R}) \ (n \to +\infty)$

D: Określamy rekurencyjnie ciąg wielomianów:

$$(*)\begin{cases} P_0 = 0 \\ P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}\left(t^2 - P_n^2(t)\right) \text{ dla } t \in \mathbb{R} \text{ i } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$




Na wstępie pokażemy, że:

(a) $P_n(0) = 0$ dla $n \in \mathbb{N}$,

(b) $0 \leq P_n(t) \leq |t|$ dla $t \in [-1,1]$, $n \in \mathbb{N}$

Indukcyjnie widzimy, że $P_n(0) = 0$ dla $n \in \mathbb{N}$ w (a).

W (b) mamy $P_0(t) = 0$ dla $t \in [-1,1]$ oraz

$P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}(|t| - P_n(t))(|t| + |P_n(t)|)$, więc

jeśli $0 \leq P_n(t) \leq |t|$ dla $t \in [-1,1]$, to:

$P_{n+1}(t) \geq 0$, $P_{n+1}(t) \leq P_n(t) + (|t| - P_n(t)) = |t|$ dla

$t \in [-1,1]$ co kończy sprawdzenie (a) i (b).

Następnie z (*) i (b) dostajemy dla $n \in \mathbb{N}$

$$P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}\left(t^2 - P_n^2(t)\right) \geq P_n(t).$$

Zatem $\{P_n / [-1,1]\}$ jest rosnącym i ograniczonym z góry ciągiem funkcji ciągłych na $[-1,1]$. Będzie więc istniała funkcja $g: [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ taka, że $P_n / [-1,1] \longrightarrow g$ $(n \to +\infty)$, $g(0) = 0$ oraz $g(t) \geq 0$, $t \in [-1,1]$

Ze związku rekurencyjnego, po przejściu do granicy, otrzymujemy dla $t \in [-1,1]$ równanie.

$$g(t) = g(t) + \frac{1}{2}(t^2 - g^2(t)).$$

Skąd $g^2(t) = t^2$, więc $g(t) = |t|$ dla $t \in [-1,1]$.

Widzimy więc, że granica $g : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, punktowo zbieżnego ciągu $\{P_n | [-1,1]\}$ funkcji ciągłych jest ciągła, a zatem z Twierdzenia Dinigo z AM1 5.60 dostajemy

$$P_n | [-1,1] \rightrightarrows g \quad (n \to +\infty).$$

To kończy dowód Lematu 7.36

Wniosek 7.37 Jeśli $a > 0$, to istnieje ciąg wielomianów $Q_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ taki, że:

(1) $Q_n(0) = 0$ dla $n \in \mathbb{N}$

(2) $Q_n | [-a,a] \rightrightarrows ([-a,a] \ni t \to |t| \in \mathbb{R})$ $(n \to +\infty)$

D: Na podstawie 7.36 mamy ciąg wielomianów $\{P_n\}$. Określamy teraz dla $n \in \mathbb{N}$ wielomiany

$$Q_n(t) = a P_n\left(\frac{t}{a}\right), \; t \in \mathbb{R}.$$

Uzyskany w ten sposób ciąg $\{Q_n\}$ ma wymagane w tezie własności.

To kończy przygotowania do głównego celu tej części wykładu, którym jest dowód Twierdzenia Stone'a - Weierstrassa.

## Dowód Twierdzenia Stone'a-Weierstrassa

Niech $B = \overline{A}$

Wtedy $B$ jest podzbiorem domkniętym i jak łatwo sprawdzić podalgebrą $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$. Oczywiście $B$ rozdziela punkty $K$ i nie zeruje w żadnym punkcie $K$.

Pokażemy teraz w trzech krokach, że $B = \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$.

### Krok 1. $f \in B \Rightarrow |f| \in B$

Wybierzmy $f \in B$ i niech $a = \|f\|$. Jeśli $a = 0$, to nasza implikacja jest oczywisty, więc dalej rozpatrujemy przypadek $a > 0$. Ustalmy $\varepsilon > 0$, a wtedy z 7.38 wynika, że istnieją $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ takie, że

$$-\varepsilon < \left| \sum_{i=1}^{m} c_i t^i - |t| \right| < \varepsilon \text{ dla } t \in [-a, a]$$

Skoro $|f| \leq a$, więc wstawiając $t = f(x)$, $x \in K$ dostaniemy $\left\| \sum_{i=1}^{m} c_i f^i - |f| \right\| < \varepsilon$.

Mamy $\sum_{i=1}^{m} c_i f^i \in B$, więc $|f|$ może być przybliżany elementami z $B$, a zatem $|f| \in B$.

### Krok 2. $f_1, \dots, f_m \in B$, $m \geq 2 \Rightarrow \min(f_1, \dots, f_m), \max(f_1, \dots, f_m) \in B$

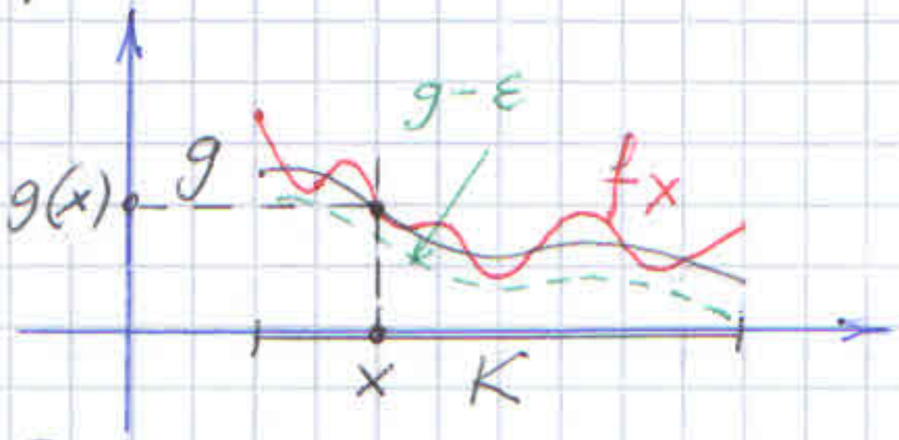
Fakt ten wystarczy pokazać dla $m = 2$, jednak ze względu na następujące dwie równości:

$$\min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|),$$
$$\max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|),$$

wynika on z Kroku 1. Równości proszę sprawdzić jako ćw.

Krok 3 Ustalmy $g \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$ oraz $\varepsilon > 0$. Pokażemy, że $\exists f \in B : \|f - g\| < \varepsilon$, więc z domkniętości $B$ w $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$ dostaniemy $g \in B$, co zakończy dowód.

Na wstępie dla każdego $x \in K$ zbudujemy funkcję $f_x : K \longrightarrow \mathbb{R}$ taką, że: (1) $f_x \in B$,




(2) $f_x(x) = g(x)$

(3) $f_x(y) > g(y) - \varepsilon$ dla $y \in K$.

Przy konstrukcji korzystamy z Lematu 7.33 i dla każdego $y \in K$ znajdujemy funkcję $f_x^y \in B$ taką, że:

(4) $f_x^y(x) = g(x)$,

(5) $f_x^y(y) = g(y)$.

Jeśli $x = y$, to korzystamy tutaj z punktu (1) tezy tego Lematu zaś dla $x \neq y$ z punktu (2). Z ciągłości funkcji

$$\forall y \in K \; \exists U_y \text{ - ot. } y : f_x^y(z) > g(z) - \varepsilon \text{ dla } z \in U_y$$

Wybierzmy następnie z pokrycia $\{U_y\}_{y \in K}$ podpokrycie skończone $\{U_{y_1}, \ldots, U_{y_p}\}$ przestrzeni $K$. Wtedy funkcja

$$f_x := \max(f_x^{y_1}, \ldots, f_x^{y_p}),$$

spełnia na podstawie Kroku 2. i konstrukcji wszystkie wymagane warunki (1), (2), (3).

Zauważmy następnie, że

$$\forall x \in K \; \exists V_x \text{ - ot. } x : f_x(z) < g(z) + \varepsilon \text{ dla } z \in V_x.$$

Z pokrycia $\{V_x\}_{x \in K}$ przestrzeni $K$ wybierzmy podpokrycie skończone $\{V_{x_1}, \ldots, V_{x_q}\}$. Biorąc $f = \min(f_{x_1}, \ldots, f_{x_q})$ mamy $\|f - g\| < \varepsilon$, co kończy Krok 3 i dowód Twierdzenia 7.34.

Przejdźmy następnie do wersji zespolonej Twierdzenia Stone'a-Weierstrassa.

Twierdzenie 7.38

Z: A samosprzężona podalgebra $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(K)$, która rozdziela punkty K i nie znika w żadnym punkcie K.

T: $\overline{A} = \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(K)$

D: Określamy $A_{\mathbb{R}} = \{f \in A : f(K) \subset \mathbb{R}\}$

Łatwo zauważyć, że $A_{\mathbb{R}}$ to podalgebra $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$ oraz, że:

(1) $A_{\mathbb{R}}$ nie znika w żadnym punkcie K. Biorąc bowiem $x_0 \in K$ i $f \in A$ taką, że $f(x_0) = \frac{5}{2}$, którą mamy z 7.33, określamy $g = f + f$. Wtedy $g(K) \subset \mathbb{R}$ oraz $g(x_0) = 5$ (jako dobra wróżba przed sesją letnią), więc $g \in A_{\mathbb{R}}$, $g(x_0) \neq 0$.

(2) $A_{\mathbb{R}}$ rozdziela punkty K. Jeśli $x_1, x_2 \in K$, $x_1 \neq x_2$, to istnieje $f \in A$ (z 7.33) taka, że $f(x_1) = 0$ oraz $f(x_2) = 1$. Wtedy $f + \overline{f} \in A_{\mathbb{R}}$ i rozdziela punkty $x_1, x_2$.

Widzimy więc, że na podstawie Tw. 7.34 dostajemy $A_{\mathbb{R}} = \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$ oraz $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K) = A_{\mathbb{R}} \subset \overline{A}$. Biorąc więc $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(K)$ mamy $f = u + iv$ gdzie $u, v \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K) \subset \overline{A}$. Zatem $f = u + iv \in \overline{A}$, co kończy dowód.

Uwagi 7.39 (do wersji gtowego twierdzenia nad $\mathbb{R}$)

(1) Aktualna wersja Twierdzenia Stone'a-Weierstrassa, to wynik wielokrotnych uogólnień klasycznego Twierdzenia Weierstrassa (1885 r.) o przybliżaniu funkcji ciągłych wielomianami. Kierunek uogólnień zmierzający do współczesnego sformułowania zapoczątkowała M. Stone pracami w latach 1937, 1948.

(2) Twierdzenie Stone'a-Weierstrassa aktualnie spotykamy najczęściej w wersji z podalgebrą A z jedynką. W miejsce Lematu 7.36 jest wtedy wykorzystywany lemat o jednostajnej zbieżności szeregu Taylora funkcji $\sqrt{1-t}$ w punkcie 0, na $[0,1]$. Przyjęty w wykładzie kierunek jest znacznie jaśniejszy i łatwiejszy w realizacji.

(3) Można również spotkać wersje dyskutowane twierdzenia, w których nie zakładamy, że podalgebra A nie znika w punktach K. Wtedy może istnieć $x_0 \in K$, w którym wszystkie funkcje z A zerują się. W tej sytuacji podalgebra okazuje się być gęsta w zbiorze tych funkcji ciągłych na K, które zerują się w $x_0$. Warto zauważyć, że ze względu na rozdzielanie punktów przez A może istnieć nie więcej niż jeden punkt $x_0 \in K$ o takiej własności.

## 2. Podstawowe wnioski

### (A) Klasyczne twierdzenia o aproksymacji

**Twierdzenie 7.40**

Z: $K$ niepusty, zwarty podzbiór $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$
$f: K \longrightarrow \mathbb{R}$ ciągła.

T: Istnieje ciąg $\{W_n\}$ w $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_m]$ taki, że.
$W_n | K \rightrightarrows f \ (n \to +\infty)$.

D: $A = \{W|K : W \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_m]\}$ jest podalgebrą $\mathcal{C}_K(\mathbb{R})$ spełniającą założenia 7.34 gdyż $x_i \in A$, $i = 1, \ldots, m$ oraz $1 \in A$. Stąd dostajemy tezę.

**Twierdzenie 7.41**

Z: $K$-niepusta, zwarta przestrzeń metryczna (topologiczna)
$H$-rodzina funkcji z $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$ rozdzielająca punkty $K$, $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$

T: Istnieje ciąg $\{g_n\}$ w $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$ taki, że:
(1) Każda funkcja $g_n$, dla $n \in \mathbb{N}$ jest postaci
$g_n = W_n \circ (h_1, \ldots, h_l)$ gdzie $h_1, \ldots, h_l \in H$, $l \in \mathbb{N}$ oraz $W_n \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_l]$.
(2) $g_n \rightrightarrows f \ (n \to +\infty)$

D: Rodzina funkcji opisanych w (1) z tezy jest podalgebrą $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$ z jedynką.
Ze względu na własność $H$ rozdziela punkty $K$, więc tezę wynika z 7.34

## (B) Aproksymacja wielomianami trygonometrycznymi

Na $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$ rozpatrujemy wielomiany trygonometryczne będące postaci

$$N(x) = c + \sum_{n=1}^{N}{}' (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

gdzie $N \in \mathbb{N}$ oraz $c \in \mathbb{R}$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ dla $n = 1, \dots, N$
Dostajemy aproksymację funkcji ciągłych $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ gdy $b - a < 2\pi$, co jest wymagane do rozdzielania punktów $[a,b]$ przez podane wyżej wielomiany trygonometryczne.

Rozpatrujemy $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, algebrę $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(T)$ oraz

$$A = \{\sum_{n=-N}^{N} a_n z^n | T : a_n \in \mathbb{C} \text{ dla } n = -N, \dots, N, N \in \mathbb{N}\}.$$

Ponieważ $\overline{z|T} = z^{-1}|T$, więc $A$ jest podalgebrą samosprzężoną $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(T)$ i spełnia założenie 7.38. Zatem $\overline{A} = \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(T)$. Warto zauważyć, że przez parametryzację okręgu dostajemy stąd aproksymację ciągłych funkcji zespolonych na $\mathbb{R}$ o okresie $2\pi$ zespolonymi wielomianami trygonometrycznymi (ćw.).

## (C) Aproksymacje w produktach

Niech $K_1, K_2$ będą niepustymi, zwartymi przestrzeniami metrycznymi (topologicznymi). Rozpatrujemy następującą rodzinę funkcji $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(K_1) \otimes \mathcal{C}_{\mathbb{K}}(K_2)$ postaci

$$K_1 \times K_2 \ni (x,y) \longrightarrow \sum_{i=1}^{p}{}' f_i(x) g_i(y) \in \mathbb{K}$$

gdzie $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $f_1, \dots, f_p \in \mathcal{C}_{\mathbb{K}}(K_1)$, $g_1, \dots, g_p \in \mathcal{C}_{\mathbb{K}}(K_2)$.

Łatwo zauważyć, że w tej sytuacji mamy
zawieranie $\mathcal{C}_{IK}(K_1) \otimes \mathcal{C}_{IK}(K_2) \subset \mathcal{C}_{IK}(K_1 \times K_2)$.
Warto w tej sytuacji sprawdzić kiedy rodzina
$\mathcal{C}_{IK}(K_1) \otimes \mathcal{C}_{IK}(K_2)$ jest gęsta w $\mathcal{C}_{IK}(K_1 \times K_2)$ oraz
kiedy podane dwie rodziny funkcji na $K_1 \times K_2$ są różne.

# §5. Szeregi Fouriera (informacyjnie).

## 1. Podstawowe pojęcia.

Niech $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją okresową, o okresie $2\pi$, to znaczy,

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x+2\pi) = f(x).$$

Przykładami funkcji tego typu są funkcje $\sin(nx)$, $\cos(nx)$ dla $n \in \mathbb{N}$. W paragrafie tym przedstawimy związki funkcji okresowych, o okresie $2\pi$ z funkcjami postaci

$$\mathbb{R} \ni x \longrightarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \in \mathbb{R}$$

gdzie $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ dla $n \in \mathbb{N}$, zwanych szeregami trygonometrycznymi.

Ze względu na okresowość rozważania zacieśnimy do przedziału $[-\pi, \pi]$ (czasami powiedzie się je w przedziale $[0, 2\pi]$)

Dążymy do przedstawienia funkcji okresowej $f$ w postaci sumy szeregu trygonometrycznego.

$$(*) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

przy założeniu zbieżności punktowej na $[-\pi, \pi]$.

Możemy starać się wyliczyć współczynniki $a_0, a_1, \ldots, b_1, b_2, \ldots$, tak aby to było możliwe

Zatrzymy na wstępie, że zbieżność tego szeregu funkcyjnego jest jednostajna. Wtedy funkcja $f$ musi być ciągła oraz, jak wiemy, zbieżność jednostajna pociąga zbieżność całek Riemanna, a zatem całkując równość (*) dostajemy

$$\int_{[-\pi,\pi]} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{[-\pi,\pi]} dx + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \int_{[-\pi,\pi]} \cos(nx)\,dx + b_n \int_{[-\pi,\pi]} \sin(nx)\,dx\right)$$

Jednak (**) $\int_{[-\pi,\pi]} \cos(nx)\,dx = \int_{[-\pi,\pi]} \sin(nx)\,dx = 0$, $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

gdyż bez trudu możemy wyliczyć prymitywne funkcji podcałkowych, odpowiednio

$$\frac{1}{n}\sin(nx),\quad -\frac{1}{n}\cos(nx),$$

które są funkcjami okresowymi o okresie $2\pi$.
Zatem dostajemy równość

$$\int_{[-\pi,\pi]} f(x)\,dx = a_0\pi,$$

z której wyliczamy

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(x)\,dx$$

Wybierzmy następnie $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Będziemy się starać wyliczyć współczynnik $a_m$. Mnożąc lewą stronę (*) przez $\cos(mx)$ i całkując na $[-\pi,\pi]$ dostajemy

$$\int_{[-\pi,\pi]} f(x)\cos(mx)\,dx.$$

Analogicznie z prawej strony mamy.

$$\frac{a_0}{2}\int_{[-\pi,\pi]} \cos(mx)\,dx + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \int_{[-\pi,\pi]} \cos(nx)\cos(mx)\,dx + b_n \int_{[-\pi,\pi]} \sin(nx)\cos(mx)\,dx\right)$$

Pierwsza z powyższych całek zeruje się zaś z pozostałych nie musi się zerować jedynie

$$a_m \int_{[-\pi,\pi]} \cos^2(mx)\,dx = \pi a_m ,$$

co wynika z dwóch równości:

$$\cos(nx)\cos(mx) = \frac{1}{2}\left[\cos((n+m)x) + \cos((n-m)x)\right]$$

$$\sin(nx)\cos(mx) = \frac{1}{2}\left[\sin((n+m)x) + \sin((n-m)x)\right]$$

W szczególności dla $m=n$ mamy:

$\cos^2(mx) = \frac{1}{2}\left[\cos(2mx)+1\right]$, czyli $\int_{[-\pi,\pi]} \cos^2(mx)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx = \pi$.

Z pozostałych składników prawej strony dostajemy całki typu (**), które się zerują.

Porównując więc całkowania dwóch stron dostajemy równość

$$\int_{[-\pi,\pi]} f(x)\cos(mx)\,dx = \pi a_m ,$$

skąd dostajemy $a_m = \frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(x)\cos(mx)\,dx$.

Postępując analogicznie z funkcją $\sin(mx)$ dostaniemy $b_m = \frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(x)\sin(mx)\,dx$

Dostaliśmy zatem wzory na poszukiwane współczynniki

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{[-\pi,\pi]} f(x)\cos(nx)\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(***)

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{[-\pi,\pi]} f(x)\sin(nx)\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Zatem z każdą funkcją całkowalną w sensie Riemanna na $[-\pi,\pi]$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ okresową o okresie $2\pi$ można związać szereg trygonometryczny

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

o współczynnikach określonych przez (***).

Ten szereg funkcyjny nazywany jest szeregiem Fouriera funkcji $f$.

## 2. Zbieżność szeregu Fouriera.

Badanie zbieżności szeregu Fouriera zwykle nie jest łatwe nawet jeśli zakażymy, że wyjściowa funkcja $f$ jest ciągła. Popularne w tym zakresie jest następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 7.42**

Z: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ klasy $C^1$, okresowa o okresie $2\pi$

T: Szereg Fouriera funkcji $f$ (określony wyżej) jest jednostajnie zbieżny do $f$.

Nie dowodzimy tego faktu bo będziemy mieli informacje znacznie ogólniejsze. W tej wersji można dowód spotkać w [F. J t.3
Również z [F.] t.3 pochodzi następujące.

Twierdzenie 7.43 (Kryterium Dirichleta).
Z: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ograniczona, okresowa o okresie $2\pi$, $f|[-\pi,\pi]$ - przedziałami monotoniczna (tzn. istnieje podział $(t_0,\dots,t_k)$ taki, że w każdym $(t_{j-1},t_j)$ $j=1,\dots,k$ jest monotoniczna.) oraz $f$ - ma skończoną ilość punktów nieciągłości w $[-\pi,\pi]$.
T: Szereg Fouriera funkcji $f$ jest zbieżny do $f$ w każdym jej punkcie ciągłości zaś w punktach nieciągłości $x_0$ ma sumę równą

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to x_0^+} f(x) + \lim_{x\to x_0^-} f(x)\right)$$

Uwaga 7.44 Podane fakty to początek tzw. analizy harmonicznej, gałęzi matematyki z pogranicza analizy i analizy funkcjonalnej

## 3. Ogólne spojrzenie na szeregi Fouriera.

Korzystać będziemy ze wstępnych pojęć dotyczących przestrzeni Hilberta, które wprowadziliśmy w AM2 w Rozdziale 2, §2. Przykłady ..., 2. Przestrzenie unitarne i przestrzenie Hilberta.

Jeśli $E$ przestrzeń wektorowa nad $\mathbb{K}$, to odwzorowanie

$$E \times E \ni (x,y) \longrightarrow (x|y) \in \mathbb{K}$$

nazywamy iloczynem skalarnym jeśli dla dowolnych $x, y, z \in E$ i $\lambda \in \mathbb{K}$ spełnia warunki:

(1) $(y|x) = \overline{(x|y)}$,

(2) $(x+y|z) = (x|z) + (y|z)$,

(3) $(\lambda x|y) = \lambda (x|y)$,

(4) $(x|x) \geq 0 \Rightarrow x = 0$

Przestrzeń $E$ z iloczynem skalarnym nazywamy przestrzenią unitarną i wprowadzamy w $E$ normę

$$E \ni x \longrightarrow \|x\| = \sqrt{(x|x)} \in [0, +\infty).$$

Dowód, że odwzorowanie to jest normą, dają nam dwie nierówności, stwierdzające, że dla $x, y \in E$:

(1) $|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|$ (nierówność Schwarza),

(2) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (nierówność Minkowskiego).

Wśród przestrzeni unitarnych wyróżniamy przestrzenie zupełne względem wprowadzonej normy, nazywane przestrzeniami Hilberta i oznaczane zwykle symbolem $H$.

Podstawowe przykłady przestrzeni Hilberta znajdujemy rozpatrując w $\mathbb{K}^m$ iloczyn skalarny wektorów $x=(x_1,\dots,x_m)$ i $y=(y_1,\dots,y_m)$ jako

$$(x|y)=\sum_{n=1}^{m} x_n\overline{y_n}$$

Kolejny przykład pojawił się (infoumacyjnie) w grupie przestrzeni $l^p$ w ciele $\mathbb{K}$. Rozpatrujemy tutaj zbiór

$$l^2=\{\{x_n\}\text{-ciąg w }\mathbb{K}:\sum_{n=0}^{+\infty}|x_n|^2<+\infty\}$$

łatwo pokazać, że jest to przestrzeń wektorowa, w której następnie rozpatrujemy iloczyn skalarny

$$(\{x_n\}|\{y_n\})=\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\overline{y_n}$$

Okazuje się, że jest to przestrzeń Hilberta nad $\mathbb{K}$.

Kolejnym elementem teorii przestrzeni Hilberta są przestrzenie konstruowane przy ustalonej przestrzeni z miarą $(X,\mathcal{M},\mu)$ oznaczane $L^2(\mu)$. Budowane są one w oparciu o teorię całki Lebesgue'a i czasami nazywane „przestrzeniami funkcji całkowalnych z kwadratem (modułu)".

Ustalmy następnie $H$ przestrzeń Hilberta nad $\mathbb{K}$ oraz wybierzmy w $H$ rodzinę elementów $\{v_\alpha\}_{\alpha\in A}$ gdzie $A$ jest pewnym zbiorem.

Definicja 7.45 Rodzinę $\{v_\alpha\}_{\alpha\in A}$ nazywamy układem ortonormalnym w $H$ jeśli dla $\alpha,\beta\in A$

$$(v_\alpha | v_\beta) = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha=\beta, \\ 0, & \alpha\neq\beta. \end{cases}$$

Definicja 7.46 Układ ortonormalny $\{v_\alpha\}_{\alpha\in A}$ w $H$ nazywamy bazą ortonormalną przestrzeni $H$ jeśli jest maksymalny w sensie inkluzji.

Uwaga 7.47 Każdy układ ortonormalny w $H$ daje się rozszerzyć do bazy ortonormalnej.

Przykłady 7.48

(1) Bazą kanoniczną $e_n = (0,\dots,0,\overset{(n)}{1},0,\dots,0)$ $n=1,\dots,m$ stanowi bazę ortonormalną $\mathbb{K}^m$.

(2) W przestrzeni $l^2$, przy ustalonym ciele $\mathbb{K}$, ciągi $x_n = (0,\dots,\overset{(n)}{1},0\dots)$ dla $n\in\mathbb{N}$ stanowią bazę ortonormalną.

Definicja 7.49 Współczynnikami Fourier'a elementu $x$ przestrzeni Hilberta $H$ względem układu ortonormalnego $\{v_\alpha\}_{\alpha\in A}$ nazywamy liczby $x_\alpha = (x|v_\alpha)$ dla $\alpha\in A$. Otrzymujemy w ten sposób funkcję $A\ni\alpha\longrightarrow x_\alpha\in\mathbb{K}$ określoną przez układ ortonormalny $\{v_\alpha\}_{\alpha\in A}$ dla elementu $x$.

## Twierdzenie 7.50

Zł: $H$ - przestrzeń Hilberta nad $\mathbb{K}$, $x \in H$
$\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ układ ortonormalny w $H$

T: (1) $\sum_{\alpha \in A}{}' |x_\alpha|^2 \leq \|x\|^2$ (nierówność Bessela).

(2) Jeśli $\{u_\alpha\}$ jest bazą ortonormalną $H$, to
$\sum_{\alpha \in A}{}' |x_\alpha|^2 = \|x\|^2$ (tożsamość Parsevala).

D: Podręczniki analizy funkcjonalnej

## Uwagi 7.51

(1) Z nierównością Bessela wynika, że w rodzinie
$\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ jest co najwyżej przeliczalnie wiele
współczynników nierównych.

(2) Zachodzenie tożsamości Parsevala dla każdego
$x \in H$ daje informację, że $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ jest bazą
ortonormalną $H$.

**Definicja 7.52** Szeregiem Fouriera elementu $x \in H$ względem układu ortonormalnego $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ nazywamy sumę formalną $\sum_{\alpha \in A}{}' x_\alpha u_\alpha$ gdzie $x_\alpha = (x | u_\alpha)$ dla $\alpha \in A$.

Uwaga 7.53. Suma w 7.52 daje element przestrzeni $H$ w następującym sensie:

(1) Pozostawiamy tylko te wyrazy $x_\alpha u_\alpha$, dla których $x_\alpha \neq 0$. Jest ich co najwyżej przeliczalnie wiele. i ustawiamy je w ciąg $\{\alpha_n\}$ lub układ skończony $\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$.

(2) Przy układzie skończonym sumujemy $\sum_{i=1}^{p}{}' x_{\alpha_j} \cdot u_{\alpha_j} = \tilde{x}$
Przy ciągu rozpatrujemy szereg $\sum_{i=1}^{+\infty}{}' x_{\alpha_j} \cdot u_{\alpha_j} \cdots$, który jest zbieżny do pewnego elementu $\tilde{x} \in H$, który nie zależy od ustalonego porządku wyrazów. (tak zwana przemienna zbieżność)

(3) Piszemy $\tilde{x} = \sum_{\alpha \in A}{}' x_\alpha u_\alpha$

Twierdzenie 7.54

Z: $H$ - przestrzeń Hilberta nad $\mathbb{K}$.
$\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ - baza ortonormalna $H$
$x \in H$

T: $x = \sum_{\alpha \in A}{}' x_\alpha u_\alpha$

D: Podręczniki analizy funkcjonalnej lub wykład z teorii miary i całki w przyszłym roku.

Przykład 7.55

$$l^2 = \{\{x_n\} - \text{ciąg w } \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2 < +\infty\}$$

$$(\{x_n\} \mid \{y_n\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n .$$

Układ: $u_0 = (1, 0, \dots)$,

$u_1 = (0, 1, 0, \dots)$,

$\dots\dots$

$u_n = (0, \dots, \overset{(n+1)}{1}, \dots)$ dla $n \in \mathbb{N}$

jest bazą ortonormalną $l^2_{\mathbb{R}}$

Biorąc element $x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$ dostajemy jego szereg Fouriera $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} u_n$, który jest zbieżny do $x$.

Warto zauważyć, że nie jest to zbieżność bezwzględna.

Przykład 7.56

Rozważmy przestrzeń wektorową.

$$W = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ - ciągła i okresowa o okresie } 2\pi\}$$

z iloczynem skalarnym

$$(f \mid g) = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi]} f(x) g(x)\, dx .$$

W przestrzeni $W$ rozpatrujemy ciąg funkcji

$1, \sqrt{2}\cos x, \sqrt{2}\sin x, \sqrt{2}\cos(2x), \sqrt{2}\sin(2x), \dots$

Zauważmy, że jest to układ ortonormalny, bo funkcje te są parami prostopadłe oraz.

$$(1\,|\,1) = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} 1\,dx = 1 \quad \text{oraz.}$$

$$(\sqrt{2}\cos(nx)\,|\,\sqrt{2}\cos(nx)) = \frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]}\cos^2(nx)\,dx = 1$$

$$(\sqrt{2}\sin(nx)\,|\,\sqrt{2}\sin(nx)) = \frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]}\sin^2(nx)\,dx = 1$$

Biorąc teraz funkcję $f \in W$ znajdujemy jej prawidłowy szereg Fouriera względem takiego układu

$$(f\,|\,1)\,1 = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(x)\,dx = \underline{\frac{a_0}{2}}$$ w sensie punktu 1 tego paragrafu.

$$(f\,|\,\sqrt{2}\cos(nx))\sqrt{2}\cos(nx) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(x)\cos(nx)\,dx = \underline{a_n\cos(nx)}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$(f\,|\,\sqrt{2}\sin(nx))\sqrt{2}\sin(nx) = \underline{b_n\sin(nx)}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Zatem rozpatrywany w punkcie 1 tego paragrafu formalny szereg Fouriera jest szeregiem Fouriera funkcji $f$ względem wybranego układu ortonormalnego.

Problemem jest tutaj to, że $W$ nie jest przestrzenią Hilberta ale tę trudność usuną później poznane fakty dotyczące sygnalizowanych wcześniej przestrzeni $L^2(\mu)$.

## 4. Ogólny model przestrzeni Hilberta.

Okazuje się, że omówione szeregi Fouriera pozwalają zbudować izometrie przestrzeni Hilbeuta z rodziny specjalnie zbudowanych ich modeli o dość pustej, standardowej strukturze

Konstrukcję rozpoczniemy od ustalenia przestrzeni Hilberta $H$ oraz jej bazy ortonormalnej $\{v_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Wraz ze zbiorem $A$ rozpatrujemy przestrzeń z miarą $(A, \mathcal{P}(A), \mathcal{H}^0)$ gdzie $\mathcal{H}^0$ jest miarą liczącą na zbiorze $A$, czyli dla $Y\subset A$ mamy.

$$\mathcal{H}^0(Y) = \begin{cases} \#A, & A \text{ - skończony,} \\ +\infty, & A \text{ - nieskończony.} \end{cases}$$

Następnie rozpatrujemy dla tej miary $\mathcal{H}^0$

$$L^2(\mathcal{H}^0) = \{f: A \to \mathbb{K} \mid \sum_{\alpha\in A}{}' |f(\alpha)|^2 < +\infty\}.$$

Warto tutaj odnotować, że rozpatrywane funkcje mają tylko skończenie lub przeliczalnie wiele wartości różnych od zera. Dla $f, g \in L^2(\mathcal{H}^0)$. określamy ich iloczyn skalarny.

$$(f|g) = \sum_{\alpha\in A}{}' f(\alpha)\overline{g(\alpha)}$$

Korzystając w tym miejscu z nierówności Schwarza. łatwo pokazujemy, że otrzymany szereg jest zawsze bezwzględnie zbieżny oraz określone odwzorowanie powyższym wzorem jest iloczynem skalarnym.

Z ogólnej teorii przestrzeni typu $L^2(\mu)$ wiadomo, że dostajemy przestrzeń Hilberta. Ponadto w tej sytuacji łatwo sprawdzić, że rodzina funkcji

$$(*)\quad \delta_\alpha : A \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \alpha \in A$$

określonych przez

$$\delta_\alpha(\beta) = \delta_{\alpha\beta} \quad \text{dla} \quad \beta \in A$$

jest bazą ortonormalną w $L^2(\mathcal{H}^\circ)$.

Na koniec rozpatrujemy odwzorowanie

$$\mathcal{H} \ni x \longrightarrow (A \ni \alpha \longrightarrow x_\alpha \in \mathbb{K}) \in L^2(\mathcal{H}^\circ),$$ gdzie

$\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ jest rodziną współczynników Fouriera określonych w Definicji 7.99, którą można nazwać "szeregiem Fouriera" elementu $x$.

Dość łatwo zauważyć, że tak określone odwzorowanie jest izometrią, zamieniającą bazę ortonormalną $\{v_\alpha\}_{\alpha \in A}$ wyjściowej przestrzeni $\mathcal{H}$ na bazę $\{\delta_\alpha\}_{\alpha \in A}$ przestrzeni $L^2(\mathcal{H}^\circ)$.

## 5. Szeregi Fouriera w przestrzeniach $L^2(\mu)$

Dysponując przestrzenią z miarą $(X, \mathcal{M}, \mu)$. wprowadzamy teorię całki Lebesgue'a dla funkcji o wartościach zespolonych.

**Definicja 7.57.** Funkcję $f = u + iv : A \longrightarrow \mathbb{C}$, gdzie $A \in \mathcal{M}$ nazywamy *mierzalną*, jeśli $u$ oraz $v$ są funkcjami mierzalnymi.

Dla funkcji mierzalnych $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ łatwo pokazujemy mierzalność $|f|$ co pozwala nam wprowadzić kolejną definicję.

**Definicja 7.58.** Funkcję $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ nazywamy *sumowalną na A* jeśli $\int_A |f| \, d\mu < +\infty$.

Sumowalność $|f|$ dla funkcji $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ jest równoważna sumowalności jej części rzeczywistej i urojonej, co z kolei pozwala nam określić całki funkcji sumowalnych.

**Definicja 7.59** Całkę Lebesgue'a z funkcji $f = u + iv : A \longrightarrow \mathbb{C}$, sumowalnej nazywamy.

$$\int_A f \, d\mu := \int_A u \, d\mu + i \int_A v \, d\mu.$$

Ustalając przestrzeń z miarą $(X, \mathcal{M}, \mu)$ oraz ciało $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ lub $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) wprowadzimy przestrzeń $L^2(\mu)$

A. Struktura przestrzeni welterowej

$\tilde{L}^2(\mu) = \{ f : X \to \mathbb{K} \mid f$ - mierzalna, $|f|^2$ - sumowalna $\}$ jest przestrzenią welterową nad $\mathbb{K}$.

$V = \{ f \in \tilde{L}^2(\mu) : \mu(\{x \in X : f(x) \neq 0\}) = 0 \}$ jest podprzestrzenią welterową $\tilde{L}^2(\mu)$

$L^2(\mu) = \tilde{L}^2(\mu)/V$ jest przestrzenią welterową nad $\mathbb{K}$

Ostatni krok, to równoważnie $L^2(\mu)/\sim$ gdzie $\sim$ jest relacją równoważności $f \sim g \Leftrightarrow f - g \in V$

B. Iloczyn skalarny w $L^2(\mu)$

Wybierając $f, g \in L^2(\mu)$ i oznaczając tymi samymi symbolami $f, g$ ich dowolne reprezentanty określamy

$$(f|g) := \int_X f \cdot \bar{g} \, d\mu .$$

C. Zupełność $L^2(\mu)$

Jest klasycznie dowodzona w podręcznikach takich jak: Walter Rudin, Analiza rzeczywista i zespolona.

W analizie harmonicznej jest badanych wiele przestrzeni Hilberta wyposażonych w różne bazy ortonormalne. Spotykamy tutaj tak zwane: Wielomiany Legendre'a, Wielomiany Czebyszewa, Wielomiany Laguerre'a. Jednak ze względu na podstawowe zastosowania w analizie najważniejszy jest dalej opisywany <u>układ trygonometryczny w $L^2([-\pi,\pi])$ nad $\mathbb{C}$</u>.

Rozpatrujemy $X = [-\pi, \pi] \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{M} = \{A \in L_1 : A \subset X\}$

$\mu = \frac{1}{2\pi} \mathcal{L}^1 / \mathcal{M}$ ustalamy $\mathbb{K}$

i przyjmujemy dla $f, g \in L^2([-\pi,\pi])$

$$(f|g) = \int_{[-\pi,\pi]} f \cdot \bar{g}\, d\mu = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} f \cdot \bar{g}\, d\mathcal{L}^1$$

<u>Definicja 7.59</u> Symbolem $L^2([-\pi,\pi])$ oznaczamy przestrzeń Hilberta wprowadzoną w powyższy sposób dla $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

<u>Dalej skoncentrujemy się nad przypadkiem $\mathbb{K} = \mathbb{C}$</u> i rozpatrywać będziemy układ trygonometryczny

$$\underline{v_n(t) = e^{int},\ t \in [-\pi,\pi],\ n \in \mathbb{Z},}$$

silnie związany z układem rozpatrywanym w przypadku rzeczywistym w 7.56

Uwaga 7.60 Układ $\{v_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ jest bazą ortonormalną przestrzeni $L^2([-\pi,\pi])$.

Ortonormalność wynika z obserwacji:

$$(v_n|v_m) = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} e^{i(n-m)t}\,d\lambda^1(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t}\,dt = \begin{cases} 1, & n=m \\ 0, & n\neq m \end{cases}$$

Ostatnia całka w tej równości to całka Cauchy'ego gdyż jesteśmy w zależności całkowania funkcji ciągłych, dla których teorie całki Cauchy'ego, Reimanna i Lebesgue'a dają te same wyniki. Trzeba tutaj jedynie zauważyć, że dla $n\neq m$ funkcja $[-\pi,\pi]\ni t \longrightarrow e^{i(n-m)t}\in\mathbb{C}$ ma pierwotną, która jest też funkcją o okresie $2\pi$! Fakt, że $\{v_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ jest bazą ortonormalną jest klasycznie dowodzony w podręcznikach takich jak poprzednio cytowana książka W. Rudina.

Wniosek 7.61

Z: $f\in L^2([-\pi,\pi])$ nad $\mathbb{C}$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(t)e^{-int}\,d\lambda^1(t) \quad \text{dla } n\in\mathbb{N}$$

T: (1) $\{c_n e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ jest rodziną przemiennie sumowalną w $L^2([-\pi,\pi])$

(2) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} |f|^2\,d\lambda^1$

D: (1) to konsekwencja tego, że $\{c_n e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ jest szeregiem Fouriera funkcji $f$ po dowolnym ustawieniu $\mathbb{Z}$ w ciąg.

(2) Wynika z (1) i tożsamości Parsevala.

Przykład 7.62 Rozpatrujemy w 7.50 funkcję $f(t) = t$ dla $t \in [-\pi, \pi]$.

Dostajemy:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t e^{-int}\,dt$$ dla $n \neq 0$ wyliczamy.

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\left(\frac{e^{-int}}{-in}\right)'dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\left[t\,\frac{e^{-int}}{-in}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-int}}{-in}\,dt\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\pi\,\frac{e^{-in\pi}}{-in} + \pi\,\frac{e^{in\pi}}{-in}\right] =$$

$$= \frac{1}{-2in}\left[e^{in\pi} + e^{-in\pi}\right] = \frac{2(-1)^n}{-2in} = \underline{\frac{(-1)^n i}{n}},$$

ponadto $c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\,dt = 0$

Czyli z 7.50 (2) mamy.

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}{}' |c_n|^2 = 2\sum_{n=1}^{+\infty}{}' \frac{1}{n^2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

Dostajemy więc równość $\underline{\sum_{n=1}^{+\infty}{}' \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$

Dla $f \in L^2([-\pi, \pi])$ nad $\mathbb{C}$ mamy określony układ współczynników Fouriera

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} f(t) e^{-int} d\lambda^1(t) \quad , n \in \mathbb{Z}$$

Aby badać zbieżność szeregu Fouriera jako ciągu funkcyjnego wprowadza się ciąg funkcyjny sum częściowych w następujący sposób:

$$s_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int} \quad , N \in \mathbb{N}$$

Sztandarowym faktem dotyczącym zbieżności ciągu $\{s_N\}$ jako ciągu funkcyjnego jest następujące

**Twierdzenie 7.63 (Fejera, 1904)**

Z: $f: [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ ciągła $f(-\pi) = f(\pi)$

$$\sigma_N = \frac{1}{N+1}(s_0 + s_1 + \ldots + s_N) \text{ dla } N \in \mathbb{N}$$

T: $\sigma_N \rightrightarrows f \quad (N \longrightarrow +\infty)$

D: Jest dość długi i trudny. Można go znaleźć w wykładach M. Jarnickiego oraz w książce Ludwika M. Drużkowskiego, Analiza matematyczna dla fizyków, Wydawnictwo UJ 1997.