Analiza matematyczna 3

Rok akademicki 2023/2024

Piotr Tworzewski

Rozdział 1. Preliminaria.

§1. Uwagi ogólne

1. Ogólna charakterystyka przedmiotu

Analiza Matematyczna 3, kontynuując dwa poprzednie wykłady AM1 i AM2, jest prewszą częścią „dorosłego" rachunku różniczkowego i całkowego obejmującego AM3 i AM4, z których każda ma 60 godzin wykładów i 60 godzin ćwiczeń. Krótko możemy stwierdzić, że będziemy się w tym semestrze zajmować rachunkiem różniczkowym w przestrzeniach Banacha oraz ogólnym przygotowaniem do dalszych zadań.
Podobnie jak w poprzednich dwóch częściach, tam gdzie to jest możliwe, teoria będzie budowana nad $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$ oznaczanych wspólnym symbolem $\mathbb{K}$.
Po uzupełnieniu wiadomości z zakresu teorii przestrzeni unormowanych, przejdziemy do rachunku różniczkowego odwzorowań między przestrzeniami Banacha, obejmującego: pierwszą pochodną, wyższe pochodne, wzory Taylora oraz ekstrema lokalne. Na koniec zajmiemy się teorią tak zwanych podrozmaitości przestrzeni $\mathbb{K}^m$ obejmującą badanie ekstremów warunkowych, oraz przygotowaniem do teorii form różniczkowych.

2. Literatura.

Pozycje literatury będą podawane sukcesywnie, w trakcie rozwoju materiału. Jednak jest kilka „ponadczasowych" pozycji, wśród których należy wymienić podane niżej podręczniki, posiadające wiele wydań w różnych językach:

[Ca] H. Cartan, Calcul différentiel. Formes différentielles.

[Fe] H. Federer, Geometric measure theory.

[Ma] K. Maurin, Analiza cz. I i II.

[Rd] W. Rudin, Analiza rzeczywista i zespolona.

[Sp] M. Spivak, Analiza na rozmaitościach.

W tym zestawieniu [Ca] to formalnie dwie książki, które zwykle są tłoczone w zestawie i podawane w tej formie jak mu to miejsce w tłumaczeniu rosyjskim.

W całym wykładzie będę odwoływał się do dwóch pierwszych jego części AM1 i AM2 dostępnych na mojej stronie WWW.

3. Kontynuacje

Kontynuacją tego przedmiotu jest w pierwszej kolejności Analiza matematyczna 4 w semestrze letnim tego roku akademickiego. W jej ramach zostaną przedstawione związki rachunku różniczkowego i całkowego z teorią miary oraz formami różniczkowymi z „kultowym" Twierdzeniem Stokesa podanym w bardzo ogólnej wersji.

§2. Sprawy organizacyjne

1. Ćwiczenia.

Poza aktywnością na zajęciach i pracami pisemnymi ważnym elementem jest utrzymanie standardów obecności na zajęciach. Przekroczenie limitów w tym zakresie skutkuje uzyskaniem wpisu NZAL wykluczającym możliwość zaliczenia przedmiotu.

Limity nieobecności ustalamy w takiej samej wysokości jak w przypadku AM1 i AM2 przyjmując że w semestrze jest 60 godzin lekcyjnych ćwiczeń. W tej sytuacji limit nieobecności nieusprawiedliwionych wynosi 12 godzin zaś ogólny limit nieobecności (nieusprawiedliwionych i usprawiedliwionych) to 30 godzin, przy czym zawsze mówimy tutaj o godzinach lekcyjnych. Obowiązuje zasada, że nieobecności z wcześniej zapowiedzianymi pracami pisemnymi muszą być usprawiedliwione.

Limity te, w szegolnych sytuacjach, mogą byc' modyfikowane przez prowadzącego cwiczenia, w porozumieniu z wykładowcą. Powodami takich korekt mogą byc' rownolegle studia na innych kierunkach lub innych uczelniach. Czasami takie zmiany wymuszane są przez choroby. Podstawowym warunkiem uzyskania modyfikacji omawianych limitow jest wczesne zgłoszenie problemu.

2. Egzamin

Wszystkie osoby uzyskujące zaliczenie ćwiczeń na ocenę w zakresie 2,0-5,0 mogą przystąpić do egzaminu ustnego. Otrzymanie NZAL wyklucza przystąpienie do egzaminu.

Nie będzie organizowany egzamin pisemny. Podstawą ustalenia oceny z egzaminu będzie ocena z ćwiczeń, w podobnym sensie jak to było przy AM1 i AM2, aktywnosc' na wykładach oraz odpowiedzi na pytania zadane w trakcie egzaminu ustnego.

3. Zasady wykorzystania na zajęciach narzędzi opartych na sztucznej inteligencji (SI)

Potrzeba takich ustaleń wynika z Zarządzenia Rektora UJ z dnia 7 lipca 2023 roku w sprawie: wykorzystania w dydaktyce narzędzi opartych na sztucznej inteligencji

W związku z tym Zarządzeniem ustalamy, że aktualnie na zajęciach AM3 narzędzi opadtych na SI nie stosujemy. Jeśli jednak znajdziemy możliwości takich zastosowań, to forma i zakres ich wykorzystania zostanie określona przez prowadzących zajęcia.

4. Uwagi ogólne i zalecenia:

(1) Dbać o zdrowie !!!
(2) Dużo się uczyć !!!
(3) Nie przekraczać limitów!
(4) Przy kłopotach z opanowaniem materiału stosować (2) oraz korzystać z konsultacji.

Rozdział 2. Szczególne własności przestrzeni unormowanych i przestrzeni Banacha

§1. Naturalne izometrie przestrzeni unormowanych

1. Podstawowe fakty.

Niech (X,d), (Y,ϱ) będą przestrzeniami metrycznymi i niech $f: X \longrightarrow Y$ będzie odwzorowaniem między nimi.

Definicja 2.01 Odwzorowanie f nazywamy:

(1) izometrią, jeśli f jest bijekcją oraz
$\forall x_1, x_2 \in X : \varrho(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2)$,

(2) izometrycznym, jeśli odwzorowanie $f: X \longrightarrow f(X)$ jest izometrią.

W tej części wykładu będą nas interesowały izometrie liniowe $I: E \longrightarrow F$ między przestrzeniami unormowanymi. Spotykamy tutaj dwie sytuacje:

(1) $E = \{0\} \Leftrightarrow F = \{0\}$ i wtedy $I = 0$, $\|I\| = 0$.

(2) $E \neq \{0\} \Leftrightarrow F \neq \{0\}$, a wtedy
$\forall v \in E : \|I(v)\| = \|v\|$ skąd dostajemy

(*) $\|I\| \leq 1$ i $\|I^{-1}\| \leq 1$

Jednak z (*) dla izomorfizmu I łatwo dostać informację, że I jest izometrią (ćw.).

Warunek (*) jest jednak spełniony również w przypadku (1) więc ogólnie zachodzi następujący.

Lemat 2.02

Z: E, F - przestrzenie unormowane nad $\mathbb{K}$

$I: E \to F$ izomorfizm, $\|I\| \leq 1$, $\|I^{-1}\| \leq 1$

T: I jest izometrią.

Generalnie, fakt ten jest bardzo wygodny do sprawdzania, że odwzorowania są izometriami; gdyż szacowanie norm odwzorowań liniowych jest zwykle o wiele łatwiejsze niż ich dokładne liczenie.

2. Podstawowe identyfikacje.

(A) Niech F będzie przestrzenią unormowaną nad $\mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Odwzorowania

$I: \mathcal{L}_m(\mathbb{K}; F) \ni f \longrightarrow f(1, \dots, 1) \in F$

$J: F \ni a \longrightarrow J(a) \in \mathcal{L}_m(\mathbb{K}; F)$, gdzie

$$J(a)(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = a \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_m$$

są wzajemnie odwrotne i są izomorfizmami.

Mamy $\|I(f)\| = \|f(1, \dots, 1)\| \leq \|f\| \cdot 1^q = \|f\|$

czyli $\|I\| \leq 1$

Ponadto $\|J(a)(\lambda_1, \dots, \lambda_m)\| = \|a \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_m\| =$

$$= \|a\| |\lambda_1| \cdot \dots \cdot |\lambda_m|,$$

skąd $\|J(a)\| \leq \|a\|$, czyli $\|J\| \leq 1$

Dostajemy zatem izometrię

$I: \mathcal{L}_m(\mathbb{K}; F) \longrightarrow F$ dla $m \geq 1$

(B) E_1, E_2, F_1, F_2 - przestrzenie unormowane nad $\mathbb{K}$.
$\Phi: E_1 \longrightarrow E_2$, $\Psi: F_1 \longrightarrow F_2$ izometrie liniowe.

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\Phi} & E_2 \\ f \downarrow & \circlearrowright & \downarrow I(f) \\ F_1 & \xrightarrow{\Psi} & F_2 \end{array}$$

Określamy odwzorowanie

$$I: \mathcal{L}(E_1; F_1) \ni f \longrightarrow I(f) = \Psi \circ f \circ \Phi^{-1} \in \mathcal{L}(E_2; F_2)$$

Zauważmy, że $\|I(f)\| \leq \|\Psi \circ f \circ \Phi^{-1}\| \leq \|f\|$ skąd dostajemy $\|I\| \leq 1$. Łatwo tutaj wskazać odwzorowanie J odwrotne do I i sprawdzić, że $\|J\| \leq 1$ (ćw.)
Zatem I jest izometrią.

(C) $E_1, \dots, E_m, F$ - przestrzenie unormowane nad $\mathbb{K}$, $m \geq 2$

Określamy odwzorowanie

$$I: \mathcal{L}(E_1; \mathcal{L}(E_2, \dots, E_m; F)) \longrightarrow \mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$$

przyjmując dla $f \in \mathcal{L}(E_1; \mathcal{L}(E_2, \dots, E_m; F))$.

$$I(f)(v_1, \dots, v_m) = (f(v_1))(v_2, \dots, v_m), \quad v_i \in E_i, \ i = 1, \dots, m$$

Oczywiście I jest liniowe i zauważmy, że.

$$\|I(f)(v_1, \dots, v_m)\| \leq \|f(v_1)\| \|v_2\| \cdot \dots \cdot \|v_m\| \leq$$
$$\leq \|f\| \|v_1\| \cdot \dots \cdot \|v_m\|, \quad v_i \in E_i, \ i = 1, \dots, m.$$

Stąd dostajemy informację, że $I(f)$ jest ciągłe oraz szacowanie $\|I(f)\| \leq \|f\|$, więc $\|I\| \leq 1$

Rozpatrzmy następnie odwzorowanie.

$$J : \mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F) \ni g \longrightarrow J(g) \in \mathcal{L}(E_1; \mathcal{L}(E_2, \dots, E_m; F))$$

gdzie $([J(g)](v_1))(v_2, \dots, v_m) = g(v_1, \dots, v_m)$,
dla $v_i \in E_i$, $i = 1, \dots, m$

Łatwo sprawdzić, że J jest odwzorowaniem odwrotnym do I (ćw.). Zatem I i J są izomorfizmami.
Ponadto $\|(J(g)(v_1))(v_2, \dots, v_m)\| \leq \|g\| \|v_1\| \cdot \dots \cdot \|v_m\|$
dla $v_i \in E_i$, $i = 1, \dots, m$. Zatem $\|J(g)(v_1)\| \leq \|g\| \|v_1\|$
dla $v_1 \in E_1$ czyli $\|J(g)\| \leq \|g\|$ dla $g \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$.
Zatem $\|J\| \leq 1$

Na podstawie Lematu 2.02 I jest więc izometrią.

Przed opisem kolejnej grupy izometrii wprowadzimy oznaczenie, które pozwoli nam na znaczne ograniczenie liczby nawiasów w zapisie.

Uwaga 2.03 Jeśli $L : E \longrightarrow F$ jest odwzorowaniem liniowym między przestrzeniami wektorowymi oraz $v \in E$, to wprowadzamy oznaczenie. $L.v := L(v)$

(D) $E_1, \dots, E_m, F$ - przestrzenie unormowane nad $\mathbb{K}$, $m \geq 2$
Określamy odwzorowanie.

$$I : \mathcal{L}(E_1; \mathcal{L}(E_2; \dots ; \mathcal{L}(E_m, F))) \ni g \to I(g) \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$$

gdzie $I(g)(v_1, \dots, v_m) = ((g.v_1).v_2 \dots).v_m$
dla $v_i \in E_i$, $i = 1, \dots, m$.

Naturalną izometrię (D) możemy skonstruować w oparciu o serię konstrukcji naturalnych izometrii typów (B) i (C). Zauważmy, że z (C) dostajemy naturalną izometrię.

$$\mathcal{L}(E_{m-1}; \mathcal{L}(E_m; F)) \longrightarrow \mathcal{L}(E_{m-1}, E_m; F)$$

Biorąc następnie E_{m-2} dostajemy kolejne naturalne izometrie z procedur (B) i (C).

(*)
$$\mathcal{L}(E_{m-2}; \mathcal{L}(E_{m-1}; \mathcal{L}(E_m; F)))$$
$$\downarrow (B)$$
$$\mathcal{L}(E_{m-2}; \mathcal{L}(E_{m-1}, E_m; F))$$
$$\downarrow (C)$$
$$\mathcal{L}(E_{m-2}, E_{m-1}, E_m; F)$$

Po złożeniu tych izometrii dostajemy izometrię

$$\mathcal{L}(E_{m-2}; \mathcal{L}(E_{m-1}; \mathcal{L}(E_m; F))) \longrightarrow \mathcal{L}(E_{m-2}, E_{m-1}, E_m; F),$$

dla której powtarzamy (*) z przestrzenią E_{m-3}, a następnie $E_{m-4}, \ldots, E_1$ dochodząc do wyjściowej izometrii.

3. Zastosowania naturalnych izometrii

Podane identyfikacje będziemy stosować głównie w rachunku różniczkowym traktując pochodne wyższych rzędów jako odwzorowania wielokrotne. Warto też zauważyć, że dzięki (D), z faktu, że F jest przestrzenią Banacha łatwo wynika, że $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$ jest także przestrzenią Banacha.

§2. Specjalne własności izomorfizmów topologicznych przestrzeni Banacha.

1. Podstawowe fakty.

Z teorii algebr Banacha z jedynką tutaj wynika.

Twierdzenie 2.04

Z: E - przestrzeń Banacha nad $\mathbb{K}$

T: (1) $Isom(E;E)$ jest podzbiorem otwartym $\mathcal{L}(E;E)$.

(2) $\xi : Isom(E;E) \ni f \longrightarrow \xi(f) = f^{-1} \in Isom(E;E)$ jest homeomorfizmem.

D: Stosując Twierdzenie 7.27 z AM2 do algebry Banacha z jedynką $A = \mathcal{L}(E;E)$, w której mamy $G(A) = Isom(E;E)$ dostajemy tezę.

2. Izomorfizmy topologiczne przestrzeni Banacha.

Twierdzenie 2.05

Z: E, F - przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$, $Isom(E;F) \neq \emptyset$

T: (1) $Isom(E;F)$ i $Isom(F;E)$ są podzbiorami otwartymi odpowiednio $\mathcal{L}(E;F)$ i $\mathcal{L}(F;E)$.

(2) $\eta : Isom(E;F) \ni g \longrightarrow \eta(g) = g^{-1} \in Isom(F;E)$ jest homeomorfizmem.

D: Ustalmy $\varphi \in Isom(F;E)$ i rozpatrzmy odwzorowania

$$\varphi^* : \mathcal{L}(E;E) \ni f \longrightarrow f \circ \varphi \in \mathcal{L}(F;E)$$
$$\varphi_* : \mathcal{L}(E;F) \ni g \longrightarrow \varphi \circ g \in \mathcal{L}(E;E)$$

Łatwo pokazać, że φ^* i φ_* są izomorfizmami topologicznymi oraz, że:

$$\varphi^*(Isom(E;E)) = Isom(F;E).$$
$$\varphi_*(Isom(E;F)) = Isom(E;E).$$

Stąd, na podstawie 2.04 dostajemy punkt (1) tezy dowodzonego twierdzenia.

Rozpatrzmy następnie diagram

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{L}(E;F) \supset Isom(E;F) & \xrightarrow{\eta} & Isom(F;E) \subset \mathcal{L}(F;E) \\
\varphi_* \downarrow \quad \varphi_*|G_1 \downarrow & \odot & \uparrow \varphi^*|G_2 \quad \uparrow \varphi^* \\
\mathcal{L}(E;E) \supset Isom(E;E) & \xrightarrow{\xi} & Isom(E;E) \subset \mathcal{L}(E;E)
\end{array}$$

(G_1 = $Isom(E;F)$, G_2 = $Isom(E;E)$, (Tw. 2.04))

Jeśli teraz $g \in Isom(E;F)$, to

$$(\varphi^* \circ \xi \circ \varphi_*)(g) = (\varphi \circ g)^{-1} \circ \varphi = g^{-1} = \eta(g).$$

Stąd wynika, że $\eta = (\varphi^*|G_2) \circ \xi \circ (\varphi_*|G_1)$ jest złożeniem trzech homeomorfizmów, co daje nam punkt (2) tezy twierdzenia.

Rozdział 3. Pochodna odwzorowania między przestrzeniami Banacha.

§1. Pochodna funkcji w punkcie.

1. Podstawowe pojęcia.

Uwaga 3.01 W ramach rachunku różniczkowego będziemy wyłącznie odwzorowania pomiędzy przestrzeniami Banacha. Czasami początek tej teorii buduje się dla odwzorowań pomiędzy przestrzeniami unormowanymi, ale chcąc przejść już do ciekawszych wyników, musimy założyć ich zupełność.

Niech E, F - przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$, $A \subset E$, $f: A \to F$, $a \in A$

Definicja 3.02 Odwzorowanie f nazywamy różniczkowalnym w punkcie a jeśli $a \in \operatorname{int} A$ oraz istnieje $L \in \mathcal{L}(E;F)$ takie, że

$$(*)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists r > 0 : (h \in E, \|h\| < r, a+h \in A) \Rightarrow (\|f(a+h) - f(a) - L.h\| \leq \varepsilon \|h\|)$$

Odwzorowanie L spełniające ten warunek nazywamy pochodną f w punkcie a i oznaczamy $f'(a)$.

Uwaga 3.03 Jeśli w powyższej definicji istnieje $f'(a)$, to jest ona wyznaczona jednoznacznie.

D: Niech $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(E;F)$ będą pochodnymi f w punkcie a. Oznaczmy dla $h \in A-a$:

$$A_1(h) = f(a+h) - f(a) - L_1 \cdot h,$$
$$A_2(h) = f(a+h) - f(a) - L_2 \cdot h.$$

Na podstawie definicji dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $r > 0$ takie, że $\overline{K}(a,r) \subset A$ oraz:

$$\|A_1(h)\| \leq \varepsilon/2 \|h\|,$$
$$\|A_2(h)\| \leq \varepsilon/2 \|h\| \text{ dla } h \in \overline{K}(0,r).$$

Wtedy dla $h \in \overline{K}(0,r)$ mamy

$$\|(L_1 - L_2)\cdot h\| = \|A_1(h) - A_2(h)\| \leq \varepsilon \|h\|$$

Zatem dla $v \in E \setminus \{0\}$ mamy $\| r \frac{v}{\|v\|} \| = r$, czyli

$$\|(L_1 - L_2)\cdot (r\tfrac{v}{\|v\|})\| \leq \varepsilon \| r \tfrac{v}{\|v\|} \| \text{ skąd},$$
$$\|(L_1 - L_2)\cdot v\| \leq \varepsilon \|v\| \text{ dla } v \in E \setminus \{0\}, \text{ a zatem}.$$
$$\|L_1 - L_2\| \leq \varepsilon \text{ dla dowolnego } \varepsilon > 0 \text{ skąd}$$
$$L_1 = L_2$$

Uwagi 3.04

(1) Odwzorowania różniczkowalne w punkcie a są w nim ciągłe.

(2) Różniczkowalność i pochodna w ustalonym punkcie nie zależy od zmiany norm na równoważne.

(3) W książce [Cz] spotykamy definicję gdzie zakłada się ciągłość f w punkcie a bez założenia ciągłości odwzorowania liniowego $L: E \to F$. To powoduje do tego samego wyniku.

(4) Pochodna w punkcie jest również nazywana różniczką w tym punkcie i oznaczana przykładowo: Daf, d_af, Taf itp.

2. Warunki równoważne istnienia pochodnej

Warunek (*) w definicji 3.02 można zapisać także "z przesunięciem" $x = a + h$

(**) $\underline{\forall \varepsilon > 0 \; \exists r > 0 : (x \in K(a,r) \cap A) \Rightarrow (\|f(x) - f(a) - L.(x-a)\| \leq \varepsilon \|x-a\|)}$

Wprost z definicji można uzyskać warunki podobne do tych, które pojawiły się przy pochodnych funkcji jednej zmiennej z $\mathbb{K}$, w których $L = f'(a) \in \mathcal{L}(E;F)$

(A) $\underline{f(a+h) = f(a) + L.h + \xi(h)\|h\|}$ dla $h \in A - a$, gdzie $\xi : A - a \longrightarrow F$, $\xi(0) = 0$, ξ - jest ciągła w punkcie 0.

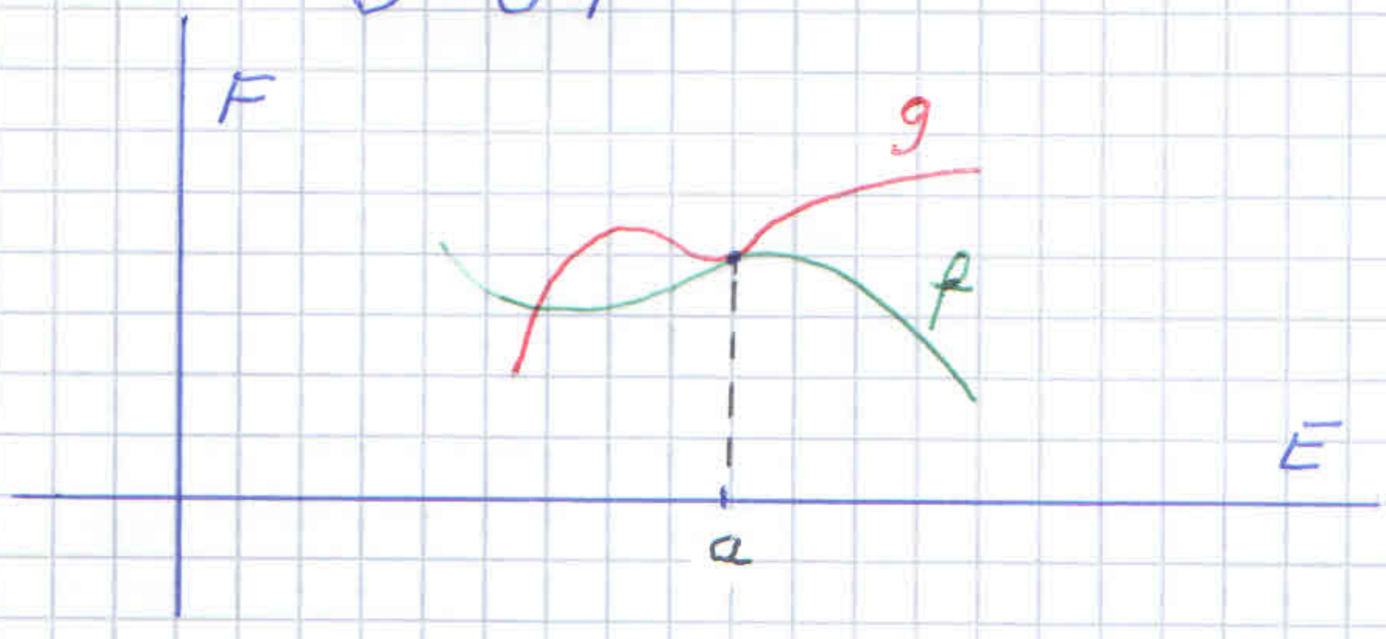
(B) $\underline{f(x) = f(a) + L.(x-a) + \eta(x)\|x-a\|}$ dla $x \in A$, gdzie $\eta : A \longrightarrow F$, $\eta(a) = 0$, η - jest ciągła w punkcie a.

Funkcje ξ i η można wyliczyć z podanej równości, odpowiednio (A) i (B) poza punktami 0 i a.
Łatwo zauważyć, że po zadaniu $\xi(0) = 0$, $\eta(a) = 0$, to że $f'(a) = L$ oznacza dokładnie ciągłość ξ w punkcie 0 i odpowiednio η w punkcie a (ćw.)

3. Pochodna a styczność

E, F - przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$,
Rozpatrujemy $A, B \subset E$ oraz dwa odwzorowania
$f : A \longrightarrow F$, $g : B \longrightarrow F$, dla których określimy styczność w punkcie $a \in E$

3-04



Definicja 3.05 Odwzorowania f i g nazywamy stycznymi w punkcie a jeśli $a \in int(A \cap B)$ oraz

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists r > 0 : (x \in A \cap B, \|x-a\| < r) \Rightarrow (\|f(x)-g(x)\| \leq \varepsilon \|x-a\|)$$

Piszemy wtedy $f \tilde{a} g$.

Podstawowe własności relacji styczności w tej sytuacji:
(1) $\tilde{a}$ jest relacją równoważności w $\{f : A \to F \mid a \in int A\}$,
(2) $f \tilde{a} g \Rightarrow f(a) = g(a)$,
(3) $f \tilde{a} g \Rightarrow [(f\text{-ciągłe w p. } a) \Leftrightarrow (g\text{-ciągłe w p. } a)]$,
(4) $(f, g\text{-liniowe}, f \tilde{a} g) \Rightarrow f = g$,
(5) styczność nie zmienia się po zamianie norm na równoważne.

Wykazanie tych własności, to proste ćwiczenie.

Wykorzystując pojęcie styczności odwzorowań możemy różniczkowalność f w punkcie a oraz fakt, że $f'(a) = L \in \mathcal{L}(E; F)$ zapisać na następujące sposoby:

$$f \tilde{a} (E \ni x \to L(x-a) + f(a) \in F),$$

$$L \overset{\sim}{0} (A - a \ni h \to f(a+h) - f(a) \in F)$$

4. Lokalna o-symbolika przy różniczkowalności (informacyjnie)

W całym tym punkcie rozpatrujemy sytuację w której:

(X,d) - przestrzeń metryczna, a - ustalony punkt X

F, G - przestrzenie unormowane (mogą być nad różnymi ciałami)

$A, B \subset X$ takie, że $a \in \operatorname{int}(A \cap B)$

$f: A \to F$, $g: B \to G$

Wtedy piszemy $f = o(g)$ jeśli spełniony jest warunek:

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists U\text{-ot. } a,\ U \subset A \cap B \; \forall x \in U : \|f(x)\| \leq \varepsilon \|g(x)\|$.

Dostajemy w ten sposób, przy ustalonym punkcie $a \in X$ relację dwuargumentową w $\{(f,g) \mid f: A \to F, g: B \to G, A, B \subset X\}$

$$f \, R \, g \iff f = o(g)$$

Korzystając z tego zapisu, w sytuacji Definicji 3.2, fakt, że $f'(a) = L \in \mathcal{L}(E;F)$ możemy zapisać jako

$$f(a+h) - f(a) - L.h = o(h) \text{ w punkcie } 0.$$

Podobnie możemy warunek (**) z punktu 2 zapisać

$$f(x) - f(a) - L.(x-a) = o(x-a) \text{ w punkcie } a$$

Czasami idąc jeszcze dalej określa się relację trójargumentową, rozpatrując w sytuacji powyższej trójki odwzorowań $f_1: A_1 \to F$, $f_2: A_2 \to F$, $g: B \to G$ z punktem $a \in \operatorname{int}(A_1 \cap A_2 \cap B)$. Wtedy różnica $f_1 - f_2$ jest określona na $A_1 \cap A_2$ i przyjmujemy nową relację $f_2 = f_1 + o(g) \iff f_2 - f_1 = o(g)$. Wtedy powyższe warunki zapisujemy

$$f(a+h) = f(a) + L.h + o(h) \text{ w punkcie } 0$$

$$f(x) = f(a) + L.(x-a) + o(x-a) \text{ w punkcie } a.$$

5. Podstawowe przykłady i zastosowania.

(A) E, F - przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$, $A \subset E$
$f: A \longrightarrow F$ odwzorowanie stałe, $a \in \operatorname{int} A$.
Wtedy $f'(a) = 0$ bo $\|f(a+h) - f(a) - 0\| = 0$
dla $h \in A - a$.

(B) E, F - przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$, $A \subset E$
$f \in \mathcal{L}(E; F)$, $g = f|A$, $a \in \operatorname{int} A$
Wtedy $g'(a) = f$ bo $\|g(a+h) - g(a) - f.h\| = 0$
dla $h \in A - a$.

(C) F - przestrzeń Banacha nad $\mathbb{K}$, $A \subset \mathbb{K}$
$f: A \longrightarrow F$, $a \in \operatorname{int} A$, $v \in F$, to wtedy
następujące warunki są równoważne:

(1) f - jest różniczkowalne w punkcie a oraz
$f'(a).\lambda = v \cdot \lambda$ dla $\lambda \in \mathbb{K}$,

(2) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = v$.

Faktycznie, warunek (1) oznacza, że
$$\frac{\|f(x) - f(a) - v(x-a)\|}{|x-a|} \longrightarrow 0 \quad (x \to a)$$
równoważnie dostajemy
$$\left\| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - v \right\| \longrightarrow 0 \quad (x \to a)$$
co jest równoważne (2). Stąd dostajemy poprzez
identyfikację $F \ni v \longrightarrow (\mathbb{K} \ni \lambda \to v\lambda \in F) \in \mathcal{L}(\mathbb{K}; F)$
zgodność starej i nowej pochodnej odwzorowania w p. a

(D) W oparciu o zgodność wykazaną w (C) możemy wszystkie wyniki z zakresu rachunku różniczkowego jednej zmiennej przedstawione w AM2 przenosić do pełnej wersji rachunku różniczkowego w oparciu o identyfikację

$$F \ni v \longrightarrow (\mathbb{K} \ni \lambda \longrightarrow v\lambda \in F) \in \mathcal{L}(\mathbb{K}; F),$$

$$\mathcal{L}(\mathbb{K}; F) \ni l \longrightarrow l(1) \in F,$$

które jak wiemy z przypadku $m = 1$ w punkcie 2(A) tego paragrafu są izometriami!

Warto zwrócić szczególną uwagę, że w ten sposób możemy wykorzystywać przedstawioną w AM2 teorię całki Cauchy'ego

§2. Odwzorowanie pochodne

1. Podstawowe pojęcia

E, F - przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$, $A \subset E$, $f: A \to F$

$A^{(1)} := \{x \in A : f$ - jest różniczkowalna w punkcie $x\}$

Wtedy $A^{(1)} \subset \operatorname{int} A$

Definicja 3.6 Odwzorowanie.

$$f': A^{(1)} \ni x \longrightarrow f'(x) \in \mathcal{L}(E; F)$$

nazywamy odwzorowaniem pochodnym lub pochodną odwzorowania f.

Definicja 3.7 Odwzorowanie f nazywamy różniczkowalnym jeśli jest różniczkowalne w każdym punkcie $x \in A$.

Łatwo zauważyć, że gdy f jest różniczkowalne to zbiór A musi być otwarty i mamy $\operatorname{int} A = A = A^{(1)}$

2. Odwzorowania klasy C^1.

Rozpatrujemy E, F - p. Banacha nad $\mathbb{K}$, $A \subset E$, $f: A \to F$

Definicja 3.8 Odwzorowanie f nazywamy $kl\, C^1$ jeśli jest różniczkowalne oraz f' jest ciągłe

Przykłady 3.9

(1) $A = \Omega$ - otwarty w E, $f: \Omega \to F$ - stałe jest $kl\, C^1$

(2) $f \in \mathcal{L}(E; F)$, $A = \Omega$ - otwarty w E $g = f|\Omega$ jest $kl.\, C^1$

bo $g': \Omega \ni x \longrightarrow g'(x) = f \in \mathcal{L}(E; F)$ jest stałe

§3. Operacje na odwzorowaniach różniczkowalnych.

Mówiąc o odwzorowaniach różniczkowalnych w sensie Definicji 3.7 zwykle na wstępie zakładać będziemy, że dziedziny są otwarte oznaczając je zwykle symbolami D, G, U, V, Ω.

1. Zacieśnienie

E, F - przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$, $B \subset A \subset E$
$f: A \to F$, $a \in B$. Porównując różniczkowalność w punkcie a łatwo dostajemy.

Twierdzenie 3.10

Z: W powyższej sytuacji niech $a \in \operatorname{int} B$
T: Jeśli jedno z odwzorowań f, $f|B$ jest różniczkowalne w punkcie a, to jest również drugie oraz $f'(a) = (f|B)'(a)$.

D: Wystarczy zauważyć, że $f \tilde{a} (f|B)$.

Twierdzenie 3.11

Z: U, V - otwarte w E, $U \subset V$, $f: V \to F$ klasy C^1
T: $f|U$ klasy C^1 oraz $(f|U)' = f'|U$.
D: Oczywiste

Uwagi 3.12

(1) Mówiąc o różniczkowalności zawsze możemy odwzorowanie ograniczyć do wnętrza zbioru i rozpatrywać funkcję $f|\operatorname{int} A$.

(2) Pochodna funkcji w punkcie jest pojęciem lokalnym w tym sensie, że zależy od pojęcia „kiełka" funkcji w punkcie. Kiełki funkcji można rozpatrywać bardzo ogólnie:

Ustalmy X - p. topologiczną, $a \in X$, Y - zbiór i niech. $\widetilde{\mathcal{F}} = \{f : A \to Y \mid a \in \operatorname{int} A\}$. Wprowadzamy w $\widetilde{\mathcal{F}}$ relację równoważności przyjmując dla $f, g \in \widetilde{\mathcal{F}}$

$$f \sim g \iff \exists\, U\text{-otoczenie } a : f|U = g|U$$

zwo. w dziedzinach f i g

Wtedy $\widetilde{\mathcal{F}}/\sim$ kiełki funkcji w punkcie a. Zwykle w badanych sytuacjach rodziny kiełków mają dobre własności algebraiczne.

2. Składanie

TWIERDZENIE 3.13

Zł: E, F, G - przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$, $A \subset E$, $B \subset F$

$f : A \to F$, $g : B \to G$, $f(A) \subset B$

f - różniczkowalne w p. $a \in A$, g - różn. w punkcie $f(a)$

T: (1) $g \circ f$ - jest różniczkowalne w punkcie a,

(2) $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a)$

D: Oznaczmy $b = f(a)$. Korzystając z równoważnych definicji pochodnej wówczas możemy napisać:

$f(x) = f(a) + f'(a).(x-a) + \eta_1(x)\|x-a\|$ dla $x \in A$

gdzie $\eta_1 : A \to F$, $\eta_1(a) = 0$, η_1 - ciągła w p. a.

$g(y) = g(b) + g'(b).(y-b) + \eta_2(y)\|y-b\|$ dla $y \in B$

gdzie $\eta_2 : B \to G$, $\eta_2(b) = 0$, η_2 - ciągła w p. b.

Dokonując złożenia dostajemy. dla $x \in A$

$$g(f(x)) = g(b) + g'(b).(f(x)-f(a)) + \eta_2(f(x))\|f(x)-f(a)\|$$

$$= g(b) + g'(b).(f'(a).(x-a) + \eta_1(x)\|x-a\|) +$$
$$+ \eta_2(f(x))\|f'(a).(x-a) + \eta_1(x)\|x-a\|\| =$$

$$= g(b) + g'(b).(f'(a)).(x-a)) + g'(b).(\eta_1(x)\|x-a\|) +$$
$$+ \eta_2(f(x))\|f'(a).(x-a) + \eta_1(x)\|x-a\|\| =$$

$$= \underline{(g\circ f)(a) + (g'(f(a))\circ f'(a)).(x-a)} +$$
$$(g'(b).(\eta_1(x))).\|x-a\| + \eta_2(f(x))\|f'(a).(x-a) + \eta_1(x)\|x-a\|\|$$

Szacujemy dwa ostatnie składniki tej sumy.

$$\|g'(b).(\eta_1(x))\|x-a\| + \eta_2(f(x))\|f'(a).(x-a) + \eta_1(x)\|x-a\|\|\|$$

$$\leq \|g'(b)\|\|\eta_1(x)\|\|x-a\| + \|\eta_2(f(x))\|(\|f'(a)\|\|x-a\| + \|\eta_1(x)\|\|x-a\|)$$

$$= \underbrace{(\|g'(b)\|\|\eta_1(x)\| + \|\eta_2(f(x))\|(\|f'(a)\| + \|\eta_1(x)\|))}_{\mu(x)}\|x-a\|$$

Możemy teraz skorzystać z definicji pochodnej w punkcie. Składniki znajdujące się powyżej w nawiasie wszystkie zmierzają do zera gdy x dąży do a.

Zatem

$$g'(f(a))\circ f'(a)$$

jest pochodną funkcji $g\circ f$ w punkcie a.

Z przeprowadzonych obliczeń mamy szacowanie.

$$\|(g\circ f)(x) - (g\circ f)(a) - (g'(f(a))\circ f'(a)).(x-a)\| \leq \mu(x)\|x-a\|$$

To kończy dowód.

Złożenia odwzorowań klasy C^1

Twierdzenie 3.14

Z: E, F, G - przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$
U - otwarty w E, V - otwarty w F
$f: U \longrightarrow F$ kl C^1, $g: V \longrightarrow G$ kl C^1, $f(U) \subset V$

T: $g \circ f$ jest kl C^1

D: Dla $x \in U$ mamy równość $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x)$.
Musimy teraz sprawdzić jak zależy pochodna od argumentów $x \in U$ stanowiąc się wyłącznie odwzorowaniu zachowującego ciągłość

Określmy na wstępie odwzorowanie
$\Phi: \mathcal{L}(F;G) \times \mathcal{L}(E;F) \ni (v,u) \longrightarrow v \circ u \in \mathcal{L}(E;G)$,
które jest dwuliniowe ciągłe. Teraz pochodną złożenia możemy zapisać jako
$$(g \circ f)' = \Phi \circ (g' \circ f, f'),$$
gdzie w nawiasie dokonujemy zestawienia odwzorowań ciągłych. Ponieważ zestawienia i składanie zachowują ciągłość więc $(g \circ f)'$ jest ciągłe, co kończy dowód.

3. Kombinacja liniowa

Rozpatrujemy E, F przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$ oraz $A \subset E$ i układ odwzorowań $f_i: A \to F$, $i = 1, \dots, m$ oraz stałych $\alpha_i \in \mathbb{K}$ $i = 1, \dots, m$.

Twierdzenie 3.15 W rozpatrywanej sytuacji:

(1) Jeśli $f_1, \dots, f_m$ są różniczkowalne w punkcie $a \in A$, to $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i$ jest różniczkowalne oraz

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i\right)'(a) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i'(a).$$

(2) Jeśli $f_1, \dots, f_m$ są klasy C^1, to $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i$ jest kl. C^1.

D: (1) Z różniczkowalności $f_1, \dots, f_m$ w punkcie a dostajemy przedstawienie

$$f_i(x) = f_i(a) + f_i'(a)\cdot(x-a) + \eta_i(x)\|x-a\|, \quad x \in A$$

dla $i = 1, \dots, m$ gdzie $\eta_i(a) = 0$ i η_i - ciągłe w punkcie a dla $i = 1, \dots, m$. Stąd przedstawienie

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i\right)(x) = \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i\right)(a) + \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i'(a)\right)\cdot(x-a) + \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \eta_i(x)\right)\|x-a\|$$

kończące dowód (1)

(2) Z punktu (1) dostajemy

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i\right)' = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i'$$

co przy ciągłości pochodnych odwzorowań daje natychmiast ciągłość pochodnej kombinacji liniowej.

4. Zestawienie

Niech $E, F_1, \dots, F_m$ p. Banacha nad $\mathbb{K}$, $m \geq 2$
$A \subset E$, $f = (f_1, \dots, f_m) : A \longrightarrow F_1 \times \dots \times F_m$
$F = F_1 \times \dots \times F_m$, $p_i : F \longrightarrow F_i$ rutowanie $i = 1, \dots, m$.
$v_i : F_i \ni x_i \longrightarrow (0, \dots, x_i, \dots, 0) \in F_1 \times \dots \times F_m$ $i = 1, \dots, m$.
zanurzenia.

Twierdzenie 3.16. W rozpatrywanej sytuacji następujące warunki są równoważne dla ustalonego $a \in A$:
(1) f - jest różniczkowalne w punkcie a,
(2) $f_1, \dots, f_m$ są różniczkowalne w punkcie a.
Jeśli te warunki zachodzą to $f'(a) = (f_1'(a), \dots, f_m'(a))$

D: (1) $\Rightarrow$ (2) $f_i = p_i \circ f$, $i = 1, \dots, m$ więc wystarczy zastosować Tw. 3.13

(2) $\Rightarrow$ (1) $f = \sum_{i=1}^{m} v_i \circ f_i$ więc

$$f'(a) = \sum_{i=1}^{m} v_i'(f_i(a)) \circ f_i'(a) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} v_i \circ f_i'(a) = (f_1'(a), \dots, f_m'(a)).$$

na podstawie 3.13 i 3.15. To kończy dowód.

Twierdzenie 3.17 Następujące warunki są równoważne:
(1) f - jest klasy C^1,
(2) $f_1, \dots, f_m$ są klasy C^1.

D: (1) $\Rightarrow$ (2) $f_i = p_i \circ f$ dla $i = 1, \dots, m$.
(2) $\Rightarrow$ (1) $f'(x) = \sum_{i=1}^{m} v_i \circ f_i'(x)$ dla $x \in A$

Uwaga 3.18 Należy zachować ostrożność ze względu na pojawiającą się symbolikę - czasami ona nie jest jednoznaczna. W twierdzeniu 3.16 w punktach różniczkowalności składowych i zestawienia mamy.

$$f'(x) = (f_1'(x), \dots, f_m'(x)) \quad \text{dla } x \in A^{(1)}.$$

Mamy jednak kłopot po usunięciu argumentu z zapisem

$$f' = (f_1', \dots, f_m'),$$

bo $f_i' : A^{(1)} \longrightarrow \mathcal{L}(E; F_i)$ dla $i = 1, \dots, m$;

więc $(f_1'(x), \dots, f_m'(x)) \in \mathcal{L}(E; F_1) \times \dots \times \mathcal{L}(E; F_m)$

a nie do $\mathcal{L}(E; F_1 \times \dots \times F_m)$.

Mamy tutaj (domyślnie) operację zestawienia, która wymaga odwzorowania.

$$\xi : \mathcal{L}(E; F_1) \times \dots \times \mathcal{L}(E; F_m) \ni (l_1, \dots, l_m) \mapsto \sum_{i=1}^{m} v_i \circ l_i = (l_1, \dots, l_m) \in \mathcal{L}(E; F_1 \times \dots \times F_m)$$

Teraz patrząc formalnie mamy

$$f' = \xi \circ (f_1', \dots, f_m')$$

gdzie dla $x \in A^{(1)}$

$$f'(x) = \xi (f_1'(x), \dots, f_m'(x)),$$

co widzieliśmy zresztą w dowodzie 3.16 ((2) $\Rightarrow$ (1))

5. Iloczyny kartezjańskie

Niech $E_1, \dots, E_m, F_1, \dots, F_m$ będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$, $m \geq 2$ i $E = E_1 \times \dots \times E_m$, $F = F_1 \times \dots \times F_m$

p_i, q_i - rzutowania w E i F oraz v_i, v_i - zanurzenia w E i F dla $i = 1, \dots, m$

Rozważamy podzbiory niepuste $A_1 \subset E_1, \dots, A_m \subset E_m$ oraz ich produkt $A = A_1 \times \dots \times A_m$

Jeśli $f_i : A_i \longrightarrow F_i$ $i = 1, \dots, m$ są odwzorowaniami to $f = f_1 \times \dots \times f_m : A \longrightarrow F$. Wybierzmy $a = (a_1, \dots, a_m) \in A$

Twierdzenie 3.19 W powyższej sytuacji następujące warunki są równoważne:

(1) f - jest różniczkowalne w punkcie a,

(2) f_i - jest różniczkowalne w a_i dla $i = 1, \dots, m$

Jeśli warunki te zachodzą, to $f'(a) = f_1'(a_1) \times \dots \times f_m'(a_m)$

D: (1) $\Rightarrow$ (2) Jeśli $a \in \operatorname{int} A$, to $a_i \in \operatorname{int} A_i$

niech $\tilde{a}_i = (a_1, \dots, \underset{(i)}{0}, \dots, a_m)$ $i = 1, \dots, m$.

Wtedy $f_i = q_i \circ f \circ (\tilde{a}_i + v_i / A_i)$

Teza wynika z Tw. 3.13 (o złożeniu).

(2) $\Rightarrow$ (1) Jeśli $a_i \in \operatorname{int} A_i$, $i = 1, \dots, m$, to $a \in \operatorname{int} A$.

Mamy $f = \sum_{i=1}^{m} v_i \circ f_i \circ (p_i / A)$ stąd wynika (1) oraz dostajemy

$$f'(a) = \sum_{i=1}^{m} v_i \circ f_i'(a_i) \circ p_i$$

skąd dostajemy też wymagany wzór na pochodną.

Twierdzenie 3.20 W rozpatrywanej sytuacji następujące warunki są równoważne:

(1) f - jest klasy C^1,

(2) f_i - jest klasy C^1 dla $i = 1, \dots, m$.

D: Ćwiczenie (obowiązkowe). Przy okazji warto znaleźć dobry zapis odwzorowania pochodnego uwzględniający problemy opisane w 3.18.

§4. Różniczkowanie wybranych klas odwzorowań

1. Odwzorowania wielolinioowe ciągłe

Twierdzenie 3.21

Z: E_1, E_2, F - p. Banacha nad $\mathbb{K}$, $\Phi \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$.

T: (1) Dla $a, h \in E_1 \times E_2$ $a = (a_1, a_2)$, $h = (h_1, h_2)$ mamy $\overline{\Phi}'(a).h = \overline{\Phi}(a_1, h_2) + \overline{\Phi}(h_1, a_2)$,

(2) $\overline{\Phi}$ jest klasy C^1.

D: (1) Mamy równość $\overline{\Phi}(a+h) = \Phi(a_1+h_1, a_2+h_2) =$
$= \overline{\Phi}(a_1, a_2) + \overline{\Phi}(a_1, h_2) + \overline{\Phi}(h_1, a_2) + \overline{\Phi}(h_1, h_2)$

Skąd dostajemy szacowanie.

$\| \overline{\Phi}(a+h) - \overline{\Phi}(a) - \overline{\Phi}(a_1, h_2) - \overline{\Phi}(h_1, a_2) \| \leq \|\overline{\Phi}\| \|h\|^2$

gdzie $\|h\| = \|h_1\| + \|h_2\|$ normą produktową w $E_1 \times E_2$

Odwzorowanie

$E_1 \times E_2 \ni (h_1, h_2) \longrightarrow \overline{\Phi}(a_1, h_2) + \overline{\Phi}(h_1, a_2) \in F$

jest liniowe ciągłe, więc uzyskane szacowanie daje nam (1).

(2) Na podstawie (1) dostajemy

$\Phi' : E_1 \times E_2 \ni (a_1, a_2) \longrightarrow (E_1 \times E_2 \ni (h_1, h_2) \longrightarrow \Phi(a_1, h_2) + \Phi(h_1, a_2) \in F) \in \mathcal{L}(E_1 \times E_2; F)$

Zatem odwzorowanie pochodne jest sumą dwóch odwzorowań liniowych:

$L_1 : E_1 \times E_2 \ni (a_1, a_2) \longrightarrow ((h_1, h_2) \longrightarrow \Phi(a_1, h_2)) \in \mathcal{L}(E_1 \times E_2; F)$,

$L_2 : E_1 \times E_2 \ni (a_1, a_2) \longrightarrow ((h_1, h_2) \longrightarrow \Phi(h_1, a_2)) \in \mathcal{L}(E_1 \times E_2; F)$,

których ciągłość możemy łatwo sprawdzić (ćw.).

Wynika stąd ciągłość Φ' co kończy dowód (2).

Uwaga 3.22 Według tej idei można łatwo powtórzyć postać odwzorowania pochodnego dla odwzorowań m-liniowych ciągłych przy $m \geq 3$ (ćwiczenie).

2. Iloczyn odwzorowań

Twierdzenie 3.23

Z: E, E_1, E_2, F - przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$

$A \subset E$, $f : A \longrightarrow E_1$, $g : A \longrightarrow E_2$, $\Phi \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$

$\varphi : A \ni x \longrightarrow \Phi(f(x), g(x)) \in F$.

T: (1) Jeśli f i g są różniczkowalne w $a \in A$, to φ również oraz

$\varphi'(a).h = \Phi(f(a), g'(a).h) + \Phi(f'(a).h, g(a))$ dla $h \in E$.

(2) Jeśli f i g są klasy C^1, to φ jest klasy C^1.

D: (1) Mamy $\varphi(x) = (\Phi \circ (f,g))(x)$ dla $x \in A$

zatem φ jest różniczkowalne w punkcie a oraz

$$\varphi'(a).h = (\Phi'((f(a),g(a))) \circ (f'(a),g'(a))).h =$$
$$= \Phi'((f(a),g(a))).(f'(a).h, g'(a).h) =$$
$$= \Phi(f(a), g'(a).h) + \Phi(f'(a).h, g(a))$$

co kończy sprawdzenie równości (1)

(2) Możemy zapisać $\varphi = \Phi \circ (f,g)$. Jeśli f i g są klasy C^1, to ich zestawienie również jest klasy C^1. Jak wiemy Φ jest klasy C^1, więc φ też będzie klasy C^1.

Uwaga 3.24 W sytuacji gdy wszystkie rozpatrywane w 3.23 przestrzenie są ciałem $\mathbb{K}$, zaś Φ zwykłym mnożeniem, to otrzymujemy dla $a,h \in \mathbb{K}$

$$\varphi'(a).h = (f(a)g'(a) + f'(a)g(a))h$$

Przy identyfikacji $\mathcal{L}(\mathbb{K};\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}$ mam stąd klasyczny wzór

$$(f \cdot g)'(a) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a).$$

3. Różniczkowanie klasycznych odwzorowań w algebrach Banacha.

Niech A będzie algebrą Banacha z jedynką 1 nad $\mathbb{K}$ oraz $\xi : G(A) \ni x \longrightarrow \xi(x) = x^{-1} \in G(A) \subset A$

Twierdzenie 3.25 W rozpatrywanej sytuacji:

(1) Dla $a \in G(A), h \in A$ mamy $\xi'(a).h = -a^{-1}ha^{-1}$

(2) ξ jest klasy C^1

D: Bez straty ogólności możemy rozpatrywać sytuację $A \neq \{0\}$

Przechodząc do dowodu (1), gdy $\|h\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}$, to $a+h \in G(A)$.
oraz mamy równość:

$$\underline{\xi(a+h) - \xi(a) + a^{-1}ha^{-1}} = (a+h)^{-1} - a^{-1} + a^{-1}ha^{-1} =$$

$$= (a+h)^{-1}(1 - (a+h)a^{-1}) + a^{-1}ha^{-1} =$$

$$= (a+h)^{-1}(1 - (1+ha^{-1})) + a^{-1}ha^{-1} =$$

$$= -(a+h)^{-1}ha^{-1} + a^{-1}ha^{-1} =$$

$$= \underline{(a^{-1} - (a+h)^{-1})ha^{-1}}$$

Zatem

$$(*)\quad \underline{\|\xi(a+h) - \xi(a) + a^{-1}ha^{-1}\| \leq \|a^{-1}\|\|\xi(a+h) - \xi(a)\|\|h\|}$$

Odwzorowanie $A \ni h \longrightarrow -a^{-1}ha^{-1} \in A$ jest liniowe,
oraz ciągłe; a ponadto $\|\xi(a+h) - \xi(a)\| \to 0$ $(h \to 0)$.
W tej sytuacji nierówność $(*)$ kończy dowód (1).

(2) Niech $\underline{\Phi : A \times A \ni (x,y) \longrightarrow \Phi(x,y) \in \mathcal{L}(A;A)}$
gdzie $\underline{\Phi(x,y)h = xhy \text{ dla } h \in A}$.
Odwzorowanie Φ jest dwuliniowe, a ponadto
$\|\Phi(x,y)h\| \leq \|x\|\|y\|\|h\|$ więc $\|\Phi(x,y)\| \leq \|x\|\|y\|$
dla $x,y \in A$ skąd wynicka, że Φ jest ciągłe.
Mamy ponadto $\underline{\xi' = \Phi \circ (-\xi, \xi)}$, więc z ciągłości ξ
wynicka ciągłość ξ', co daje (2).

Twierdzenie 3.26

Z: E, F przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$, $Isom(E;F) \neq \emptyset$
$\eta : Isom(E;F) \ni g \longrightarrow g^{-1} \in Isom(F;E)$
T: (1) Dla $g \in Isom(E,F)$, $h \in \mathcal{L}(E;F)$ mamy $\eta'(g).h = -g^{-1} \circ h \circ g^{-1}$
(2) η - jest klasy C^1.

D: Jeśli $E=F$, to 3.26 jest wnioskiem z 3.25.
W przypadku ogólnym wystarczy skorzystać z metody użytej w dowodzie Tw. 2.05 przywołanej w oparciu o usytuowany $\varphi \in Isom(F;E)$ (ćwiczenie).

Przykłady 3.27

(1) Gdy $A=\mathbb{K}$, $\xi: \mathbb{K}\setminus\{0\} \ni z \to \frac{1}{z} \in \mathbb{K}$
mamy $\xi'(z).w = -z^{-1}wz^{-1} = -\frac{w}{z^2}$
Zatem po identyfikacji $\mathcal{L}(\mathbb{K};\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}$.
dostajemy $\xi'(z) = -\frac{1}{z^2}$, $z \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$.

(2) Gdy A jest przemienną algebrą Banacha z jedynką.
to dla odwzorowania $exp: A \ni x \to exp(x) \in A$
otrzymujemy $(exp)'(a).h = exp(a)\cdot h$.

Mamy szacowanie dla $a,h \in A$
$\|exp(a+h)-exp(a)-exp(a)\cdot h\| \leq$

$\leq \|exp(a)\|\|exp(h)-1-h\| =$

$= \|exp(a)\| \left\| \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} h^n \right\| \leq$

$\leq \|exp(a)\|\|h\|^2 \left\| \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\|h\|^{n-2}}{n!} \right\| \leq \dots$

więc gdy $\|h\|<1$

$\dots \leq \|exp(a)\|\|h\|^2 \cdot e \leq e^{\|a\|+1}\|h\|^2$

Stąd tutaj dostajemy uzasadnienie poprawności wzoru $(exp)'(a).h = exp(a)\cdot h$.
Tutaj można sprawdzić, że $exp: A \to A$ jest w tej sytuacji klasy C^1 (ćwiczenie).

§5. Pochodne kierunkowe

1. Pojęcie pochodnej kierunkowej

E, F - p. Banacha nad $\mathbb{K}$, $A \subset E$, $f: A \to F$
$a \in A$, $h \in E$
Określamy $A_h := \{t \in \mathbb{K} : a + th \in A\} \subset \mathbb{K}$
Na zbiorze A_h mamy określone odwzorowanie.
(*) $A_h \ni t \longrightarrow f(a+th) \in F$

Definicja 3.28 Jeśli $0 \in \operatorname{int} A_h$ oraz istnieje granica $\lim\limits_{t \to 0} \frac{f(a+th)-f(a)}{t} \in F$,

to nazywamy ją pochodną kierunkową funkcji f w punkcie a w kierunku $h \in E$ i oznaczamy $f_h'(a)$.

Jak łatwo zauważyć jeśli pochodna kierunkowa istnieje, to jest to pochodna odwzorowania (*).
w punkcie 0, po identyfikacji $\mathcal{L}(\mathbb{K}; F) \cong F$.

2. Pochodne kierunkowe odwzorowań różniczkowalnych

Twierdzenie 3.29

Z: E, F - p. Banacha, $A \subset E$, $f: A \to F$ jest różniczkowalna w ustalonym punkcie $a \in A$, $h \in E$
T: (1) Istnieje $f_h'(a)$.
(2) $f_h'(a) = f'(a) \cdot h$

D: Niemy, że gdy $h \neq 0$, to

$$\lim_{t \to 0} \frac{\| f(a+th) - f(a) - f'(a)\cdot(th) \|}{\|th\|} = 0 .$$ Zatem

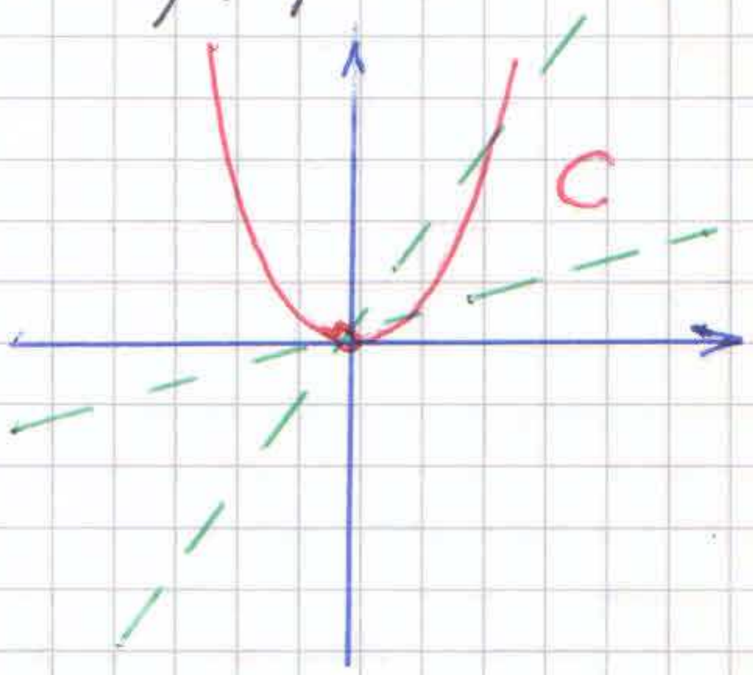
$$\lim_{t \to 0} \left\| \frac{f(a+th) - f(a)}{t} - f'(a)\cdot h \right\| = 0$$

Stąd dostajemy tezę gdyż dla $h = 0$ jest ona zawsze spełniona.

Uwagi 3.30

(1) Z istnienia w punkcie wszystkich pochodnych kierunkowych nie wynika nawet ciągłość wyjściowej funkcji. Rozpatrzmy następujący przykład. $C = \{(x, x^2) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$. Funkcję $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadajemy równością

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in C \\ 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus C \end{cases}$$



Jak łatwo zauważyć mamy. $f_h'(0) = 0$ dla $h \in \mathbb{R}^2$ zaś f w punkcie $0 \in \mathbb{R}^2$ nie jest ciągła.

(2) Można poczytać (np. w [Ma]) o słabych pochodnych (pochodnej Gateaux) określanych przy pomocy pochodnych kierunkowych. Nasza (silna) pochodna jest nazywana czasami pochodną Frecheta.

(3) Pochodne kierunkowe są bardzo dobrym narzędziem do efektywnego wyliczenia pochodnej w punkcie, ale wynik uzyskany z pochodnych kierunkowych trzeba następnie sprawdzić z definicji.

Przykład 3.31. Przeprowadźmy poszukiwanie pochodnej w przypadku odwzorowania ξ z Tw. 3.25

A - algebra Banacha, $a \in G(A)$, $h \in A$

Biorąc $A_h := \{t \in \mathbb{K} : a + th \in G(A)\}$ widzimy, że jest otwarty, więc $0 \in \operatorname{int} A_h$. Mamy przeliczyć

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left[(a+th)^{-1} - a^{-1}\right]$$

Przekształcamy szukając wygodnej postaci dla $t \neq 0$

$$\frac{1}{t}\left[(a+th)^{-1} - a^{-1}\right] = \frac{1}{t}\left[(a(1+a^{-1}th)^{-1} - a^{-1}\right] =$$

$$= \frac{1}{t}\left[(1+a^{-1}th)^{-1}a^{-1} - a^{-1}\right] = \frac{1}{t}\left[(1+a^{-1}th)^{-1} - 1\right]a^{-1} =$$

jeśli $\|a^{-1}th\| < 1$, to

$$\ldots = \frac{1}{t}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-a^{-1}th)^n\right)\cdot a^{-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-a^{-1}h)^n t^{n-1} a^{-1}$$

Łatwo zauważyć, że $(\xi)'_h(a) = -a^{-1}ha^{-1}$.

W tej sytuacji jedynym możliwym kandydatem na pochodną $\xi'(a)$ może być odwzorowanie

$$A \ni h \longrightarrow -a^{-1}ha^{-1} \in A,$$

i w tw. 3.25 sprawdziliśmy, że jest to faktycznie poszukiwana pochodna.

§6. Pochodne cząstkowe

1. Podstawowe definicje.

$E_1, \dots, E_m, F$ - przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$, $m \geq 2$

$A \subset E = E_1 \times \dots \times E_m$, $a = (a_1, \dots, a_m) \in A$, $f: A \to F$

Ustalamy $i \in \{1, \dots, m\}$

$v_i : E_i \longrightarrow E_1 \times \dots \times E_m$ zanurzenie

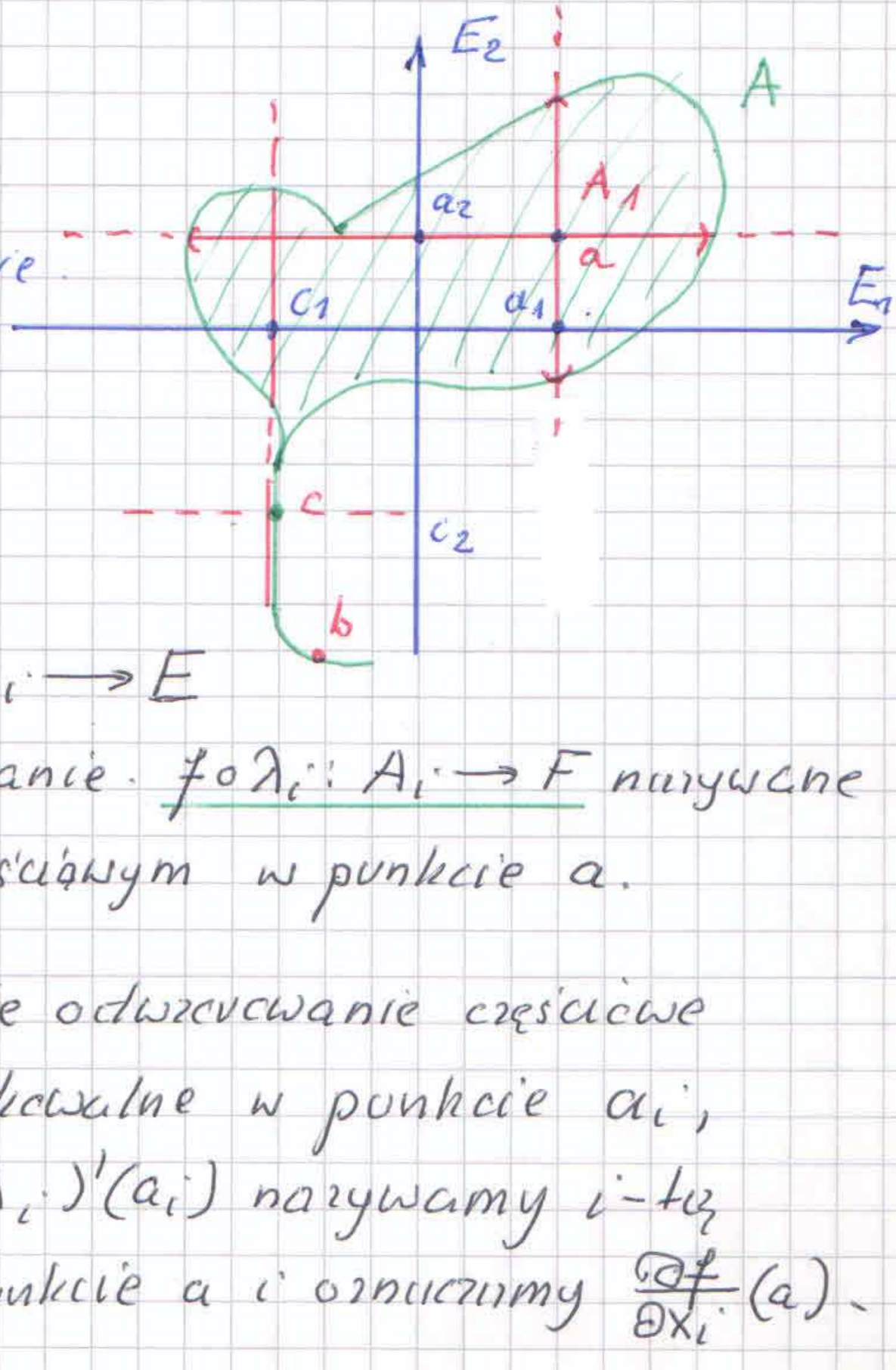
$\tilde{a}_i = (a_1, \dots, \underset{(i)}{0}, \dots, a_m)$

$\tilde{v}_i = \tilde{a}_i + v_i : E_i \ni x_i \longrightarrow (a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_m) \in E$

Niech $A_i := (\tilde{v}_i)^{-1}(A)$

Jak widać $A_i = \{x_i \in E_i : (a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_m) \in A\}$,
jest przekrojem zbioru A prostą $x_1 = a_1, \dots, x_{i-1} = a_{i-1}, x_{i+1} = a_{i+1}, \dots, x_m = a_m$.

Zdarzają się różne sytuacje z wnętrzami przekrojów takie jak na przykład dla punktów: a, b, c



Określamy $\lambda_i := \tilde{v}_i / A_i : A_i \longrightarrow E$

oraz finalnie odwzorowanie $f \circ \lambda_i : A_i \to F$ nazywane i-tym odwzorowaniem cząstkowym w punkcie a.

Definicja 3.32 Jeśli i-te odwzorowanie cząstkowe w punkcie a jest różniczkowalne w punkcie a_i, to jego pochodną $(f \circ \lambda_i)'(a_i)$ nazywamy i-tą pochodną cząstkową f w punkcie a i oznaczamy $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Uwagi 3.33

(1) Do istnienia pochodnych cząstkowych nie wymagany jest warunek $a \in \operatorname{int} A$ a jedynie $a_i \in \operatorname{int} A_i$ dla odpowiednich wskaźników, względem których liczymy pochodne cząstkowe.

(2) Mamy $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \in \mathcal{L}(E_i; F)$ gdy $i \in \{1, \dots, m\}$ i istnieje podana pochodna cząstkowa.

2. Pochodne cząstkowe odwzorowania różniczkowalnego

Twierdzenie 3.34

$Z: E_1, \dots, E_m, F$ - p. Banacha nad $\mathbb{K}$

υ_i, p_i - zanurzenia i projekcje w $E = E_1 \times \dots \times E_m$

$A \subset E$, $f: A \to F$, $a \in A$, f - różniczkowalne w p. a

T: (1) Istnieją $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)$ oraz

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f'(a) \circ \upsilon_i \quad \text{dla } i = 1, \dots, m$$

(2) $$f'(a) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \circ p_i.$$

D: (1) Odwzorowanie $f \circ \lambda_i$ jest różniczkowalne w punkcie a_i, bo $\lambda_i(a_i) = a$ a ponadto

$$(f \circ \lambda_i)'(a_i) = f'(a) \circ \lambda_i'(a_i) = f'(a) \circ \upsilon_i$$

(2) Na podstawie (1) $\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \circ p_i =$

$$= \sum_{i=1}^{m} f'(a) \circ \upsilon_i \circ p_i = \sum_{i=1}^{m} f'(a) \circ (\upsilon_i \circ p_i) =$$

$$= f'(a) \circ \left(\sum_{i=1}^{m} \upsilon_i \circ p_i \right) = f'(a) \circ id_E = f'(a).$$

To kończy dowód.

Uwaga 3.35 W pełnym zapisie z argumentami mamy.

$$f'(a)\cdot(h_1,\dots,h_m) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\cdot h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\cdot h_m$$

dla $h=(h_1,\dots,h_m)\in E = E_1\times\dots\times E_m$

Uwaga 3.36. Na ogół Tw. 3.34 nie można odwrócić. Z istnienia pochodnych cząstkowych zwykle nie wynika różniczkowalność odwzorowania. Jeśli, przykładowo

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & \text{gdy } xy=0,\\ 1, & \text{gdy } xy\neq 0.\end{cases} \qquad f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},$$

to $\frac{\partial f}{\partial x}((0,0))=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}((0,0))=0$ a f nie jest ciągła w 0.

3. Interpretacja macierzowa.

Rozważmy sytuację z ostatniego twierdzenia. Uzyskany wzór na pochodną możemy zilustrować macierzowo określając specjalne „$\cdot$" mnożenie „macierzy":

$$\underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\right]}_{\text{„}\cdot\text{"}}\text{„}\cdot\text{"}\underbrace{\begin{bmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_m\end{bmatrix}}_{\text{„macierzy"}} = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i = f'(a)\cdot h$$

W szczególnym przypadku gdy wszystkie przestrzenie Banacha są równe $\mathbb{K}$ $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\in\mathcal{L}(\mathbb{K};\mathbb{K})=\mathbb{K}$.

Wtedy, identyfikując odwzorowania $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ z ich współczynnikami, dostajemy macierz skalarną reprezentującą macierz $f'(a)$ gdy w $\mathbb{K}^m$ i $\mathbb{K}$ rozpatrujemy bazy kanoniczne.

Warto też zauważyć, że mamy wtedy związki $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f'_{e_i}(a)$ gdzie $e_1,\dots,e_m$ baza kanoniczna $\mathbb{K}^m$, $i=1,\dots,m$

Przykład 3.37 Niezależnie od różniczkowalności odwzorowania f, istnienie jego pochodnych pozwala zaproponować kandydata na pochodną. Biorąc:

$$f: \mathbb{R}^3 \ni (x,y,z) \longrightarrow xy^2e^z \in \mathbb{R}$$

dostajemy:

$$f'(x,y,z) \sim [y^2e^z,\ 2xye^z,\ xy^2e^z]$$

Czyli $f'(x,y,z).(a,b,c) = y^2e^z a + 2xye^z b + xy^2e^z c$

Bez trudu można jednak stwierdzić, że odwzorowanie f jest klasy C^1, czyli pochodne cząstkowe odtwarzają pochodną.

4. Ciągłość pochodnych cząstkowych a klasa C^1 odwzorowania różniczkowalnego

Twierdzenie 3.38

Z: $E_1, E_2, \dots, E_m, F$ – przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$

Ω otwarty w $E = E_1 \times \dots \times E_m$

$f: \Omega \longrightarrow F$ różniczkowalna.

T: Następujące warunki są równoważne:

(1) f jest klasy C^1,

(2) $\frac{\partial f}{\partial x_i}: \Omega \longrightarrow \mathcal{L}(E_i; F)$ są ciągłe dla $i = 1, \dots, m$.

D: (1) $\Rightarrow$ (2) $f': \Omega \longrightarrow \mathcal{L}(E; F)$ jest ciągłe.

Określmy $\psi_i: \mathcal{L}(E; F) \ni l \longrightarrow l \circ v_i \in \mathcal{L}(E_i; F)$

dla $i = 1, \dots, n$.

. Są to jak łatwo zauważyć odwzorowania ciągłe.

Skoro $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \psi_i \circ f'$ dla $i = 1, \dots, m$ to mamy (2).

(2) $\Rightarrow$ (1) Liczymy podobnie (Ćw.).

5. Odwzorowania między produktami przestrzeni Banacha.

Niech $E_1, \dots, E_m$, $F_1, \dots, F_k$ będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$, $m, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Oznaczmy p_i, v_i rzutowania i zanurzenie w $E = E_1 \times \dots \times E_m$ dla $i = 1, \dots, m$, oraz przez q_j, v_j rzutowania i zanurzenie w produkcie $F = F_1 \times \dots \times F_k$, $j = 1, \dots, k$

Niech $A \subset E$, $a \in A$, $f = (f_1, \dots, f_k) : A \longrightarrow F$

Jeśli f jest różniczkowalne w punkcie a, to $f_1, \dots, f_k$ są w tym punkcie różniczkowalne. i mają wszystkie pochodne cząstkowe. Mamy równość

$$f_j'(a) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \circ p_i$$

a zatem

$$f'(a) = \sum_{j=1}^{k} v_j \circ f_j'(a) = \sum_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,k}} v_j \circ \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \circ p_i$$

Wynik możemy zapisać wygodnie w formie „macierzy"

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_m}(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix} = f'(a) \cdot h$$

(k – wiersze, m – kolumn)

dla $h \in E$

Postępując podobnie jak poprzednio warto określić sposób mnożenia macierzy uzyskując wygodną i łatwą do zapamiętania interpretację.

Jeśli wszystkie przestrzenie są równe $\mathbb{K}$ oraz w miejscach pochodnych cząstkowych weźmiemy ich współczynniki kierunkowe, to uzyskana macierz składowa będzie macierzą $f'(a)$ w bazach kanonicznych przestrzeni $\mathbb{K}^m$ i $\mathbb{K}^k$ zwaną macierzą Jakobiego. W przypadku $m=k$ wyznacznik tej macierzy nazywa się jakobianem odwzorowania f w punkcie a.

Przykład 3.39

$f: (0,+\infty)^2 \ni (x,y) \longrightarrow \left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right) \in \mathbb{R}^2$.

Wtedy f jest różniczkowalne oraz

$$f'((x,y)) \sim \begin{bmatrix} \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{bmatrix}$$

6. Różniczkowanie złożeń

Rozpatrujemy układy przestrzeni Banacha nad $\mathbb{K}$, rzutowań i zanurzeń w ich produktach.

$E_1, \dots, E_m$, $E = E_1 \times \dots \times E_m$, p_i, u_i - $i = 1, \dots, m$.

$F_1, \dots, F_k$, $F = F_1 \times \dots \times F_k$, q_j, v_j $j = 1, \dots, k$

$G_1, \dots, G_l$, $G = G_1 \times \dots \times G_l$, r_s, w_s $s = 1, \dots, l$

Zmienne w E oznaczać będziemy przez $x = (x_1, \dots, x_m)$. zaś w F $y = (y_1, \dots, y_k)$.

3-31

Niech $A \subset E$, $f = (f_1, \dots, f_k) : A \to F$, $a \in A$

$B \subset F$; $g = (g_1, \dots, g_l) : B \to G$, $f(A) \subset B$, $b = f(a)$

Jeśli f jest różniczkowalne w a oraz g w b, to

$$f'(a) = \sum_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,k}} v_j \circ \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \circ p_i$$

$$g'(b) = \sum_{\substack{t=1,\dots,k \\ s=1,\dots,l}} w_s \circ \frac{\partial g_s}{\partial y_t}(b) \circ q_t$$

Dla $h = g \circ f$ dostajemy

$$h'(a) = \sum_{i,j,t,s} w_s \circ \frac{\partial g_s}{y_t}(b) \circ q_t \circ v_j \circ \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \circ p_i$$

ale $q_r \circ v_j = \begin{cases} 0, & t \neq j \\ id_{F_j}, & t = j \end{cases}$

zatem

$$h'(a) = \sum_{i,j,s} w_s \circ \frac{\partial g_s}{\partial y_j}(b) \circ \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \circ p_i$$

Jeśli zapiszemy teraz $h = (h_1, \dots, h_l)$, to

$$\frac{\partial h_s}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial g_s}{\partial y_j}(b) \circ \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)$$

dla $s = 1, \dots, l$, $i = 1, \dots, m$.

Biorąc interpretację macierzową $f'(a)$ i $g'(b)$ możemy stąd dostać mnożenie macierzy jako drogę do otrzymania macierzy złożenia.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(b) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_k}(b) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_l}{\partial y_1}(b) & \cdots & \frac{\partial g_l}{\partial y_k}(b) \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_k}{\partial x_m}(a) \end{bmatrix} = g'(b) \circ f'(a).$$

W sytuacji gdy $l = 1$ dostajemy wzory.

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial g}{\partial y_j}(b) \circ \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a), \quad i = 1, \ldots, m$$

gdzie $h(x_1, \ldots, x_m) = g(f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_m))$

§7. Zmiana ciała podstawowego przy różniczkowaniu.

1. Podstawowe fakty

Niech E, F będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{C}$.
Możemy je traktować jako przestrzenie nad $\mathbb{R}$
Rozważamy. $A \subset E$, $f: A \longrightarrow F$, $a \in \operatorname{int} A$, $E \neq \{0\}$

Ustalając $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ lub $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dostajemy warunek.

różniczkowalności

f - jest różniczkowalna w punkcie a ($\mathbb{K}$-różniczkowalna)
jeśli istnieje $L \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E; F)$ takie, że

$$(*) \quad \lim_{x \to a} \frac{\|f(x) - f(a) - L.(x-a)\|}{\|x - a\|} = 0$$

Jak widać jedyna różnica to wymaganie aby odwzorowanie L było $\mathbb{C}$-liniowe lub $\mathbb{R}$-liniowe.

Twierdzenie 3.40

Z: E, F - przestrzenie Banacha nad $\mathbb{C}$

$A \subset E$, $f: A \to F$, $a \in A$

T: Następujące warunki są równoważne.

(1) f - jest $\mathbb{C}$-różniczkowalna w punkcie a.

(2) f - jest $\mathbb{R}$-różniczkowalna w a i $f'(a)$ jest $\mathbb{C}$-liniowe

D: Fakt jest oczywisty z analizowanego wcześniej warunku (*) bo przy $E = \{0\}$ pochodne, zawsze zawsze istnieją.

2. Przykłady.

Przykład 3.41 $f: \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \to (x,0) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$

$f'(a) = f$ dla $a \in \mathbb{R}^2$ dla $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ale f nie jest $\mathbb{C}$-liniowe więc f nie ma pochodnej zespolonej w żadnym punkcie.

Przykład 3.42. $f: \mathbb{C} \ni \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \to (x^2 - y^2, 2xy) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$

$f'(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}$. Zauważmy, że $f'((x,y)).(h,k) =$

$= 2 \cdot (xh - yk, yh + xk) = 2(x+iy)(h+ik)$

Czyli $f'(z).w = 2zw$ więc f jest $\mathbb{C}$-różniczkowalne, ale inaczej zapisując $f(z) = z^2$ dla $z \in \mathbb{C}$ więc $\mathbb{C}$-różniczkowalność jest oczywista.

Rozdział 4. Podstawowe zastosowania twierdzenia o przyrostach.

§1. Twierdzenie o przyrostach.

1. Uwagi o wersji podstawowej twierdzenia o przyrostach.

W ramach Analizy Matematycznej 2 wykazaliśmy następujące Twierdzenie 3.44 nazywane później twierdzeniem o przyrostach.

Twierdzenie

Z: F - przestrzeń Banacha nad $\mathbb{K}$

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

$f: [a,b] \longrightarrow F$ - ciągłe.

$g: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ - ciągłe

S - podzbiór co najwyżej przeliczalny $[a,b]$

$\forall t \in [a,b] \setminus S$: istnieją $f'_+(t)$ i $g'_+(t)$ oraz $\|f'_+(t)\| \leq g'_+(t)$.

T: $\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$

Uwagi 4.01

(1) Pojawiające się w powyższym twierdzeniu pochodne prawostronne często zastępuje się pochodnymi.

(2) Twierdzenie istotnie wykorzystywaliśmy w teorii całki Cauchy'ego oraz w twierdzeniu o wzorze Taylora.

(3) Stosując to twierdzenie w rachunku różniczkowym wykorzystujemy praktycznie sytuację gdy $S = \{a,b\}$ zaś f i g są różniczkowalne na (a,b).

2. Szczególne wersje twierdzenia o przystach.

Podobnie jak w rachunku różniczkowym jednej zmiennej rozważania rozpoczniemy od przygotowania kilku „wygodnych" wersji głównego twierdzenia. Bazować będziemy wytrwanie na jego głównej wersji (AM2 Tw. 3.44).

Rozważania rozpoczniemy od podstawowych definicji wprowadzonych dla E przestrzeni wektorowej nad $\mathbb{K}$

Definicja 4.02 Odcinkiem o końcach $a, b \in E$ nazywamy zbiór $[a,b] = \{a + t(b-a) \in E : t \in [0,1]\}$

Definicja 4.03. Podzbiór C przestrzeni E nazywamy wypuklym jeśli $(a,b \in C) \Rightarrow ([a,b] \subset C)$.

Przykład 4.04 Jeśli E jest przestrzenią unormowaną to kule otwarte i kule domknięte są wypukłe.

Faktycznie jeśli $a,b \in K(c,r)$, $r>0$, to mamy $\|a-c\|<r$ i $\|b-c\|<r$, a wtedy dla $t \in [0,1]$

$\|(a+t(b-a))-c\| = \|(1-t)(a-c)+t(b-c)\| \leq$

$\leq (1-t)\|a-c\| + t\|b-c\| < r$. Dla kuli domkniętej dowód jest analogiczny (ćwiczenie).

Twierdzenie 4.05

Z: E, F - przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$

Ω - otwarty w E, $f: \Omega \longrightarrow F$ różniczkowalne.

$a, b \in E$, $[a,b] \subset \Omega$, $K \in [0, +\infty)$

$x \in [a,b] \Rightarrow \|f'(x)\| \leq K$

T: $\|f(b) - f(a)\| \leq K \|b-a\|$

D: Do funkcji ciągłych:

$$\tilde{f} : [0,1] \ni t \longrightarrow f(a + t(b-a)) \in F$$

$$g : [0,1] \ni t \longrightarrow K\|b-a\| t \in \mathbb{R}$$

stosujemy podstawową wersję twierdzenia o przyrostach. (AM2, Tw. 3.44) gdzie dla $t \in (0,1)$ mamy.

$$\|\tilde{f}_+'(t)\| = \|\tilde{f}'(t) \cdot 1\| = \|f'(a + t(b-a)) \cdot (b-a)\| \leq$$

$$\leq K\|b-a\| = g_+'(t)$$

Mamy zatem $\|\tilde{f}(1) - \tilde{f}(0)\| \leq K\|b-a\|(1-0)$ czyli:

$\|f(b) - f(a)\| \leq K\|b-a\|$ co kończy dowód.

Twierdzenie 4.06

Z: E, F - przestrzenie Banacha, Ω - otwarty i wypukły w E

$f: \Omega \longrightarrow F$ różniczkowalna, $K \in [0, +\infty)$

$\|f'(x)\| \leq K$ dla $x \in \Omega$

T: Jeśli $a, b \in \Omega$, to $\|f(b) - f(a)\| \leq K\|b-a\|$

D: Wybierając $a, b \in \Omega$ mamy $[a,b] \subset \Omega$, więc po zastosowaniu 4.05 dostajemy tezę

Twierdzenie 4.07

Z: E, F - przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$

D - podzbiór otwarty i spójny E (obszar)

$f: D \longrightarrow F$ różniczkowalna

$\forall x \in D : f'(x) = 0$

T: f - jest funkcją stałą.

D: Jeśli $x \in D$, $r > 0$ i $K(x,r) \subset D$, to z poprzedniego twierdzenia wiemy, że $f | K(x,r)$ jest stała.

Ustalmy $a \in D$ i rozważmy zbiór

$$\tilde{D} = \{x \in D : f(x) = f(a)\}$$

Skoro f jest ciągła więc $\tilde{D} = f^{-1}(f(a))$ jest podzbiorem domkniętym D. Na podstawie wstępnej obserwacji dowodu jeśli $x \in \tilde{D}$, to dla $r > 0$ takiego, że $K(x,r) \subset D$ mamy $K(x,r) \subset \tilde{D}$. Zatem $\tilde{D}$ jest podzbiorem otwartym D. Wynika stąd, że $\tilde{D}$ jest otwarto-domknięty w D spójnym. Skoro $\tilde{D} \neq \emptyset$, bo $a \in \tilde{D}$, więc $\tilde{D} = D$, co kończy dowód.

Twierdzenie 4.08

Z: E, F - przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$

Ω - otwarty w E, $f: \Omega \longrightarrow F$ różniczkowalna.

$a \in \Omega$, $h \in E$, $[a, a+h] \subset \Omega$

f' - jest ograniczona na $[a, a+h]$

T: $\|f(a+h) - f(a) - f'(a).h\| \leq \left(\sup_{x \in [a,a+h]} \|f'(x) - f'(a)\|\right) \|h\|$

D: Rozważamy funkcję

$$T : \Omega \ni x \longrightarrow T(x) = f(x) - f'(a).(x-a) \in F$$

Wtedy dla $x \in \Omega$ mamy.

$$T'(x) = f'(x) - f'(a)$$

Niech $K := \sup_{x \in [a, a+h]} \| f'(x) - f'(a) \| \in [0, +\infty)$

Dostajemy zatem $\| T'(x) \| \leq K$ dla $x \in [a, a+h]$,
więc Twierdzenie 4.06 daje nam.

$$\| T(a+h) - T(a) \| \leq K \|h\| .$$

Stąd

$$\| f(a+h) - f'(a).h - f(a) \| \leq K \|h\| ,$$

więc dostajemy tezę.

§2. Ciągi i szeregi funkcji różniczkowalnych.

1. Główne twierdzenia

Twierdzenie 4.09

Zł: E, F - przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$
D - podzbiór otwarty, wypukły i ograniczony E
$f_n : D \longrightarrow F$ różniczkowalne dla $n \in \mathbb{N}$
$g : D \longrightarrow \mathcal{L}(E;F)$
$f_n' \rightrightarrows g \ (n \to +\infty)$
$x_0 \in D$, $\{f_n(x_0)\}$ jest zbieżny w F

T: (1) $f_n \rightrightarrows f \ (n \to +\infty)$ dla pewnego $f : D \longrightarrow F$
(2) f - jest różniczkowalne
(3) $f' = g$

D: W ramach przygotowania ustalmy $m, n \in \mathbb{N}$ oraz $x, a \in D$. Wtedy:

$$(*) \quad \|(f_m - f_n)(x) - (f_m - f_n)(a)\| \leq \sup_{y \in D} \|f_m'(y) - f_n'(y)\| \, \|x - a\|$$

jeśli tylko $f_m' - f_n'$ jest ograniczone na D.
Możemy dalej założyć, że $E \neq \{0\}$, $D \neq \emptyset$.
Mamy wtedy $d = \operatorname{diam} D = \sup\{\|u - v\| : u, v \in D\} \in (0, +\infty)$

Niech teraz $x \in D$ zaś x_0 będzie punktem podanym w założeniach. Wtedy dla $m, n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\|f_m(x) - f_n(x)\| \leq \|(f_m - f_n)(x) - (f_m - f_n)(x_0)\| + \|(f_m - f_n)(x_0)\|$$

Zatem

$$\|f_m(x) - f_n(x)\| \leq d \sup_{y \in D} \|f_m'(y) - f_n'(y)\| + \|f_m(x_0) - f_n(x_0)\| \leq \dots$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$ i wybierzmy $N \in \mathbb{N}$, tak aby dla $m, n \geq N$ zachodziły nierówności

$$\sup_{y \in D} \|f_m'(y) - f_n'(y)\| < \frac{\varepsilon}{2d} \quad \text{oraz}$$

$$\|f_m(x_0) - f_n(x_0)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wtedy dla $m, n \geq N$ oraz $x \in D$ dostajemy

$$\|f_m(x) - f_n(x)\| < \varepsilon.$$

Wynika stąd natychmiast punktowa zbieżność ciągu funkcyjnego $\{f_n\}$ do pewnej funkcji $f : D \to F$. Po przejściu w ostatniej nierówności z m do $+\infty$ dostajemy $\|f(x) - f_n(x)\| \leq \varepsilon$ dla $x \in D$ oraz $n \geq N$, a zatem $f_n \rightrightarrows f$ $(n \to +\infty)$ co daje punkt (1) tezy.

Przejdziemy teraz do równoczesnego dowodu punktów (2) i (3) tezy twierdzenia pokazując, że dla dowolnego $a \in D$ mamy $f'(a) = g(a)$. Dla ustalonego $a \in D$, $x \in D$ oraz $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\|f(x) - f(a) - g(a) \cdot (x-a)\| \leq$$

$$\leq \|(f(x) - f(a)) - (f_n(x) - f_n(a))\| +$$
$$+ \|f_n(x) - f_n(a) - f_n'(a) \cdot (x-a)\| +$$
$$+ \|f_n'(a) \cdot (x-a) - g(a) \cdot (x-a)\| \leq \dots$$

$$\ldots \leq \|(f-f_n)(x)-(f-f_n)(a)\| +$$
$$+ \|f_n(x)-f_n(a)-f_n'(a)\cdot(x-a)\| +$$
$$+ \|f_n'(a)-g(a)\|\,\|x-a\|$$

Przechodząc w $(*)$ z n do $+\infty$ mamy

$$\|(f-f_n)(x)-(f-f_n)(a)\| \leq \sup_{y\in D}\|g(y)-f_n'(y)\|\,\|x-a\|$$

dla dostatecznie dużych $n\in\mathbb{N}$. Zatem

$$\|f(x)-f(a)-g(a)\cdot(x-a)\| \leq$$
$$\leq \left(\sup_{y\in D}\|g(y)-f_n'(y)\| + \|f_n'(a)-g(a)\|\right)\|x-a\| +$$
$$+ \|f_n(x)-f_n(a)-f_n'(a)\cdot(x-a)\| \leq \ldots$$

Ustalając teraz $\varepsilon>0$ wybierzmy $N\in\mathbb{N}$, tak aby czynnik w nawiasie dla $n=N$ był mniejszy od $\varepsilon/2$. Wtedy dostajemy

$$\ldots \leq \frac{\varepsilon}{2}\|x-a\| + \|f_N(x)-f_N(a)-f_N'(a)\cdot(x-a)\| \leq \ldots$$

Ponieważ f_N jest różniczkowalna w punkcie a więc dobierzemy $r>0$ tak aby dla $\|x-a\|<r$ drugi składnik sumy był mniejszy od $\frac{\varepsilon}{2}\|x-a\|$.

Dostajemy stąd, dla $\|x-a\|<r$,

$$\|f(x)-f(a)-g(a)\cdot(x-a)\| < \varepsilon\|x-a\|,$$

czyli $f'(a)=g(a)$. To kończy dowód

Twierdzenie 4.10

Z: E, F - przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$

D - podzbiór otwarty i spójny E (tzw. obszar)

$f_n : D \to F$ różniczkowalne dla $n \in \mathbb{N}$

$g : D \to \mathcal{L}(E;F)$

$f_n' \to g$ $(n \to +\infty)$ lokalnie jednostajnie w D

$x_0 \in D$, $\{f_n(x_0)\}$ jest zbieżny w F

T: (1) $f_n \to f$ $(n \to +\infty)$ lok. jednost. dla pewnego $f : D \to F$

(2) f - jest różniczkowalna.

(3) $f' = g$

D: Niech $D_0 = \{x \in D : \{f_n(x)\} \text{ jest zbieżny}\}$. Wiemy, że $D_0 \neq \emptyset$ bo $x_0 \in D_0$. Na podstawie 4.09 bez trudu pokazujemy, że D_0 jest otwarto-domknięty w D (ćw.) Skoro D jest spójny więc $D_0 = D$ co łatwo kończy dowód.

2. Szeregi funkcji różniczkowalnych.

Twierdzenie 4.11

Z: E, F - przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$, D - obszar w E

$f_n : D \to F$ różniczkowalne dla $n \in \mathbb{N}$

szereg funkcyjny $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' f_n'$ jest lok. jedn. zb. w D

$x_0 \in D$, szereg $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' f_n(x_0)$ jest zbieżny.

T: (1) Szereg funkcyjny $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' f_n$ jest lok. jedn. zb. w D.

(2) $\sum_{n=0}^{+\infty}{}' f_n$ jest różniczkowalna

(3) mamy równość $\left(\sum_{n=0}^{+\infty}{}' f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty}{}' f_n'$

D: Twierdzenie wynika natychmiast z 4.10 zastosowanego do ciągu sum częściowych szeregu funkcyjnego $\{f_n\}$.

Twierdzenie 4.12.

Z: $z_0 \in \mathbb{K}$, $\{a_n\}$ ciąg w $\mathbb{K}$, $K = K(z_0, R)$, $R > 0$
K - jest zawarte w kole zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$

T: (1) Funkcja $f: K \ni z \longrightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \in \mathbb{K}$ jest różniczkowalna.

(2) $f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$ dla $z \in K$

D: Weźmy $z, z_1 \in K$ tak aby $|z-z_0| < |z_1-z_0|$
Wtedy dla $z \neq z_0$ mamy. przy $n \geq 1$

$$|n a_n (z-z_0)^{n-1}| = |a_n (z_1-z_0)^n| \frac{n}{|z-z_0|} \cdot \left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n$$

Zatem szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$ jest bezwzględnie zbieżny w K. Dla szeregu potęgowego mamy stąd zbieżność lokalnie jednostajną. Teraz. na podstawie 4.11 dostajemy tezę.

Wniosek 4.13 Funkcja analityczna określona na zbiorze otwartym w $\mathbb{K}$ jest różniczkowalna oraz jej pochodna jest funkcją analityczną.

§3. Pochodne cząstkowe a różniczkowalność

1. Twierdzenie o różniczkowaniu w punkcie

TWIERDZENIE 4.14

Z: $E_1, \dots, E_m, F$ - przestrzenie Banacha nad K, $m \geq 2$.

Ω - otwarty w $E = E_1 \times \dots \times E_m$

$f: \Omega \longrightarrow F$, $a \in \Omega$

Odwzorowanie f ma w Ω wszystkie pochodne cząstkowe oraz odwzorowania

$\frac{\partial f}{\partial x_i}: \Omega \longrightarrow \mathcal{L}(E_i; F)$ są ciągłe w a dla $i = 1, \dots, m$

T: Odwzorowanie f jest różniczkowalne w punkcie a.

D: Dla ustalonego $\varepsilon > 0$ wybieramy $r > 0$ tak aby spełnione były warunki:

(1) $K(a_1, r) \times \dots \times K(a_m, r) \subset \Omega$, $a = (a_1, \dots, a_m)$

(2) $\| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \| < \varepsilon$ dla

$x \in K(a_1, r) \times \dots \times K(a_m, r)$ oraz $i = 1, \dots, m$

Dla $x \in K(a_1, r) \times \dots \times K(a_m, r) = U$ określamy

$$S(x) = f(x) - f(a) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot (x_i - a_i) =$$

$$= f(x_1, \dots, x_m) - f(a_1, x_2, \dots, x_m) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdot (x_1 - a_1) +$$

$$f(a_1, x_2, \dots, x_m) - f(a_1, a_2, x_3, \dots, x_m) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \cdot (x_2 - a_2) +$$

$$+ \dots +$$

$$+ f(a_1, \dots, a_{m-1}, x_m) - f(a_1, \dots, a_m) - \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \cdot (x_m - a_m)$$

Ustalmy następnie dowolny punkt $x \in U$

Rozpatrujemy odwzorowania

$$\varphi_i : K(a_i; r) \ni \xi_i \longrightarrow f(a_1, \dots, a_{i-1}, \xi_i, x_{i+1}, \dots x_m) - f(a_1, \dots, a_i, x_{i+1}, \dots x_m) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot (\xi_i - a_i) \in F$$

dla $i = 1, \dots, m$.

Mamy $\varphi_i(a_i) = 0$, $i = 1, \dots, m$ oraz

$$\varphi_i'(\xi_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_{i-1}, \xi_i, x_{i+1}, \dots, x_m) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

gdzie $\xi_i \in K(a_i; r)$ dla $i = 1, \dots, m$

Zatem $\underline{\|S(x)\| \leq \|\varphi_1(x_1)\| + \dots + \|\varphi_m(x_m)\| =}$

$$= \|\varphi_1(x_1) - \varphi_1(a_1)\| + \dots + \|\varphi_m(x_m) - \varphi_m(a_m)\| \leq$$

$\leq \varepsilon \|x_1 - a_1\| + \dots + \varepsilon \|x_m - a_m\|$ ze względu na wyjściowy warunek (2) i twierdzenie o przyrostach w wersji 4.06.

W przestrzeni rozpatrujemy standardową normę, będącą sumą norm współrzędnych, a zatem mamy oszacowanie

$$\underline{\|S(x)\| \leq \varepsilon \|x - a\| \quad \text{dla } x \in U}$$

$K(a, r) \subset U$ zatem $\underline{\|S(x)\| \leq \varepsilon \|x - a\| \text{ gdy } \|x - a\| < r}$

co kończy dowód różniczkowalności f w punkcie a.

Uwaga 4.15. Czasami poszukiwane są silniejsze twierdzenia o różniczkowalności w punkcie, dające się przy słabszych założeniach. Informacje na ten temat można znaleźć na przykład w książce [Ma]. W przyjętym tutaj dowodzie tutaj wprowadzić modyfikację pozwalającą na wymaganie od $\frac{\partial f}{\partial x_m}$ jedynie istnienia w punkcie a przy ciągłości pozostałych.

2. Klasa C^1 odwzorowania a ciągłość pochodnych cząstkowych:

TWIERDZENIE 4.16

Z: $E_1, \dots, E_m, F$ – przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$, $m \geq 2$
Ω otwarty w $E_1 \times \dots \times E_m$, $f: \Omega \to F$

T: Następujące warunki są równoważne:
(1) f jest klasy C^1,
(2) f ma ciągłe pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ w Ω dla $i = 1, \dots, m$

D: (1) $\Rightarrow$ (2) dostajemy z Tw. 3.38
(2) $\Rightarrow$ (1) po zastosowaniu 4.14 mamy dodatkową informację, że f jest różniczkowalne. Teraz teza wynika z 3.38.

§4 Dyfeomorfizmy

1 Różniczkowanie odwzorowań odwrotnych.

Twierdzenie 4.17

Z: E, F - przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$

$a \in A \subset E$, $b \in B \subset F$

$f: A \longrightarrow B$ bijekcja $f(a) = b$

f - jest różniczkowalne w a zaś f^{-1} różniczk. w b

T: (1) $f'(a) \in Isom(E; F)$

(2) $(f^{-1})'(b) = [f'(a)]^{-1}$

D: $f \circ f^{-1}: B \longrightarrow B$ jest różniczkowalne w b

oraz $f \circ f^{-1} = id_B$, zatem:

$(f \circ f^{-1})'(b) = id_F$ skąd $f'(a) \circ (f^{-1})'(b) = id_F$

Analogicznie mamy $(f^{-1})'(b) \circ f'(a) = id_E$ skąd, z ostatnich dwóch równości dostajemy tezę.

Twierdzenie 4.18

Z: E, F - p. Banacha nad $\mathbb{K}$.

$A \subset E$, $B \subset F$, $a \in Int A$, $b \in Int B$

$f: A \longrightarrow B$ bijekcja $f(a) = b$

f - jest różniczkowalne w a.

f^{-1} - jest ciągłe w b

T: Następujące warunki są równoważne:

(1) f^{-1} - jest różniczkowalne w b

(2) $f'(a) \in Isom(E; F)$

D: (1) $\Rightarrow$ (2) jest bezpośrednią konsekwencją 4.17

(2) $\Rightarrow$ (1) Zauważmy na wstępie, że:

(3) $f(x) = f(a) + f'(a).(x-a) + \eta(x)\|x-a\|$ dla $x \in A$

gdzie $\eta : A \longrightarrow F$, η-ciągłe w a i $\eta(a) = 0$.

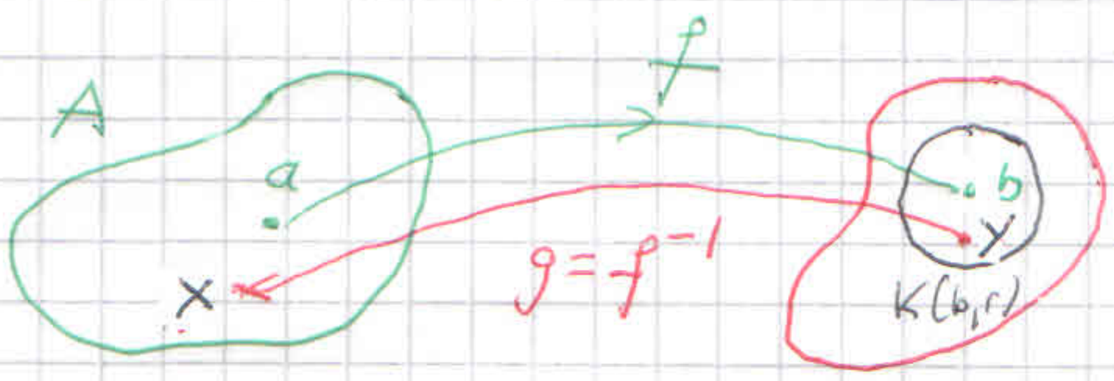
(4) Skoro $f'(a) \in Isom(E;F)$, to istnieje $m > 0$ takie, że $m\|v\| \leq \|f'(a).v\|$ dla $v \in E$ a zatem wtedy $\|[f'(a)]^{-1}\| \leq \frac{1}{m}$

Ustalmy $\varepsilon > 0$ i wybierzmy $r > 0$ tak aby:

(5) $K(b,r) \subset B$,

(6) $\|\eta(f^{-1}(y))\| \leq \frac{m}{2} \min(1, \varepsilon m)$ dla $y \in K(b,r)$.

Oznaczmy $g := f^{-1}$, ustalmy $y \in K(b,r)$. oraz oznaczmy $x = g(y)$.



Pokażemy, według klasycznego schematu, że $[f'(a)]^{-1}$ jest pochodną g w punkcie b szacując w dwóch etapach:

(I) $f'(a).(x-a) = f(x) - f(a) - \eta(x)\|x-a\|$

$f'(a).(x-a) = (y-b) - \eta(x)\|x-a\|$ skąd

na podstawie przygotowania (3) – (6)

$m\|x-a\| \leq \|f'(a).(x-a)\| \leq \|y-b\| + \|\eta(x)\|\|x-a\|$

Zatem $m\|x-a\| \leq \|y-b\| + \frac{m}{2}\|x-a\|$ czyli

$\frac{m}{2}\|x-a\| \leq \|y-b\|$

(II) $\|g(y)-g(b)-[f'(a)]^{-1}\cdot(y-b)\| =$

$= \|x-a-[f'(a)]^{-1}(f(x)-f(a))\| =$

$= \|[f'(a)]^{-1}\cdot(f(x)-f(a)-f'(a)\cdot(x-a))\| \leq$

$\leq \frac{1}{m}\|\eta(x)\|\|x-a\| \leq \frac{1}{m}\cdot\frac{\varepsilon m^2}{2}\cdot\frac{2}{m}\|y-b\| = \varepsilon\|y-b\|$

Ostatnie szacowanie zachodzi dla dowolnego $y \in K(b,r)$ więc kończy ono dowód.

2. Podstawowe informacje o dyfeomorfizmach

Niech E, F będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$ zaś U, V otwartymi podzbiorami odpowiednio przestrzeni E i F

Definicja 4.19 Odwzorowanie $f: U \to V$ nazywamy dyfeomorfizmem jeśli:

(1) f - jest bijekcją,

(2) f - jest klasy C^1,

(3) f^{-1} - jest klasy C^1.

Uwaga 4.20 Jak łatwo zauważyć każdy dyfeomorfizm jest homeomorfizmem. Jednak implikacja przeciwna nie jest prawdziwa gdy zażądamy klasy C^1 wyjściowego odwzorowania. Funkcja

$$f: \mathbb{R} \ni x \to x^3 \in \mathbb{R},$$

jest homeomorfizmem kl C^∞ ale odwzorowanie odwrotne nie jest różniczkowalne w punkcie $0 \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 4.21

Z: E, F - przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$
U - otwarty w E, V - otwarty w F
$f: U \longrightarrow V$ homeomorfizm klasy C^1

T: Następujące warunki są równoważne:
(1) f - jest dyfeomorfizmem,
(2) $\forall x \in U : f'(x) \in Isom(E;F)$.

D: (1) $\Rightarrow$ (2) Wynika wprost z definicji i 4.17
(2) $\Rightarrow$ (1) Różniczkowalność f^{-1} dostajemy z 4.18. Aby wykazać ciągłość pochodnej zauważamy, że $(f^{-1})'(y) = [f'(f^{-1}(y))]^{-1}$.
Odwzorowanie $\eta \in Isom(E;F) \longrightarrow Isom(F;E)$ takie, że $\eta(L) = L^{-1}$ jest ciągłe, zatem $(f^{-1})' = \eta \circ f' \circ f^{-1}$ jest ciągłe

3. Twierdzenie o lokalnym dyfeomorfizmie

Twierdzenie 4.22 (o lokalnym dyfeomorfizmie)

Z: E, F - przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$,
Ω - otwarty podzbiór E, $f: \Omega \longrightarrow F$ klasy C^1
$a \in \Omega$, $f'(a) \in Isom(E;F)$

T: Istnieją otoczenia:
- U punktu a w Ω,
- V punktu $f(a)$ w F
takie, że $f(U) = V$ oraz odwzorowanie $f|U: U \longrightarrow V$ jest dyfeomorfizmem:

D: Twierdzenie na wstępie pokażemy dla odwzorowania $g = [f'(a)]^{-1} \circ f : \Omega \longrightarrow E$.
Aby dostać dowód podstawowej wersji wystarczy uzyskane odwzorowanie obtoczyć $f'(a) \in Isom(E;F)$, które nie zmieni poszukiwanych własności.

Zauważmy kolejno, że:

(1) g jest klasy C^1

(2) $g'(a) = id_E$

Oznaczmy $c = g(a)$ i rozważmy odwzorowanie.

$$\varphi : \Omega \ni x \longrightarrow x - g(x) \in E,$$

i zauważmy, że:

(3) φ - jest klasy C^1

(4) $\varphi'(a) = 0$

Istnieje zatem $r > 0$, takie, że:

(5) $\overline{K}(a,r) \subset \Omega$

(6) $\|\varphi'(x)\| \leq \frac{1}{2}$ dla $x \in \overline{K}(a,r)$

Wówczas mamy:

(7) $\|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|$ dla $x_1, x_2 \in \overline{K}(a,r)$

(8) $g'(x) = id_E - \varphi'(x) \in Isom(E;E)$ dla $x \in \overline{K}(a,r)$

Własność (7) wynika z twierdzenia o przyrostach stosowanego dla odcinka $[x_1, x_2] \subset \Omega$ zaś (8) jest konsekwencją opisu $G(\mathcal{L}(E;E))$ opartego o własność $\|\varphi'(x)\| < 1$ w algebrze Banacha $\mathcal{L}(E;E)$.

Po tym przygotowaniu pokazujemy, że:

$$\underline{\forall y \in K(c, \tfrac{1}{2}r)\ \exists! x \in K(a,r) : g(x) = y}$$

Ustalmy więc $y \in K(c, \frac{1}{2}r)$

$$g(x) = y \Leftrightarrow y + x - g(x) = x \Leftrightarrow y + \varphi(x) = x$$

Rozważmy odwzorowanie

$$\underline{h : \overline{K}(a,r) \ni x \longrightarrow y + \varphi(x) \in \overline{K}(a,r)}.$$

gdzie y jest ustalone jak wcześniej. Dla $x \in \overline{K}(a,r)$ mamy

$$\|h(x) - a\| = \|y + \varphi(x) - a\| = \|y - c + g(a) + \varphi(x) - a\|$$
$$= \|(y-c) + (\varphi(x) - \varphi(a))\| \leq \|y - c\| + \tfrac{1}{2}r < r$$

Zatem obraz leży w $\overline{K}(a,s) \subsetneq K(a,r)$

Z twierdzenia Banacha o punkcie stałym mamy więc

$$\underline{\exists! x \in K(a,r) : g(x) = y}$$

Określmy więc $U := K(a,r) \cap g^{-1}(K(c, \frac{1}{2}r))$ i zauważmy, że $g/U : U \longrightarrow K(c, \frac{1}{2}r)$ jest bijekcją klasy C^1.

Biorąc $x_1, x_2 \in U$ mamy

$$\|(x_1 - x_2) - (g(x_1) - g(x_2))\| \leq \tfrac{1}{2}\|x_1 - x_2\|$$
$$\|x_1 - x_2\| - \|g(x_1) - g(x_2)\| \leq \tfrac{1}{2}\|x_1 - x_2\|$$

Skąd $\underline{\|x_1 - x_2\| \leq 2\|g(x_1) - g(x_2)\|}$ skąd widzimy ciągłość odwzorowania odwrotnego do g/U.

Korzystając z 4.21 dostajemy informację, że $g/U : U \longrightarrow K(c, \frac{1}{2}r)$ jest dyfeomorfizmem.

Biorąc zatem $V = f'(a)(K(c, \frac{1}{2}r))$ dostajemy $f/U : U \to V$.

Wtedy $f|U = (f'(a)|K(c,\frac{1}{2}r)) \circ (g|U) : U \to V$ jest dyfeomorfizmem, co kończy ten dowód.

Twierdzenie 4.23

Z: E, F - przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$,
Ω - otwarty w E, $f: \Omega \to F$ injekcja klasy C^1
$\forall x \in \Omega : f'(x) \in Isom(E;F)$

T: (1) $f(\Omega)$ jest otwarty w F
(2) $f: \Omega \to f(\Omega)$ jest dyfeomorfizmem

D: Z 4.22 dostajemy tezę (1) oraz informację, że f^{-1} jest lokalnie klasy C^1, co kończy dowód

4. Problem Kellera

W pewnych klasach odwzorowań zdarza się, że w sytuacji jak w Tw. 4.23, wywnek $\forall x \in \Omega : f'(x) \in Isom(E;F)$ pociąga injektywność odwzorowania f. Jest tak przykładowo gdy $E = F = \mathbb{R}$ oraz Ω jest przedziałem otwartym w $\mathbb{R}$.

W 1939 r. Ott-Heinrich Keller sformułował problem, nazywany aktualnie Keller's Jacobian Conjecture, który po ewolucji, jest aktualnie zapisywany w postaci

Jeśli $f: \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m$, $m \geq 1$ jest odwzorowaniem wielomianowym oraz $\forall x \in \mathbb{K}^m : \det f'(x) = 1$, to f jest injekcją.

W przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ można wtedy również wykazać, że f będzie automorfizmem wielomianowym, czyli bijekcją o odwzorowaniu odwrotnym f^{-1} wielomianowym.

Problem Kellera do tej pory nie został rozwiązany zuś częściowe, ciekawe wyniki w tym zakresie uzyskali w szczególności:

(A) A. V. Yagzhev (1980) podał redukcję problemu do wielomianów postaci

$$f: \mathbb{K}^m \ni z \longrightarrow z + H(z) \in \mathbb{K}^m,$$

gdzie $H = (h_1, \dots, h_m)$ jest zestawieniem wielomianów jednorodnych stopnia 3. Należy zaznaczyć, że przy takich redukcjach zwiększa się liczba zmiennych w sposób zależący od wyjściowego wielomianu. Zatem aby rozwiązać problem tą metodą trzeba to zrobić dla wszystkich m przy tak opracowanej postaci!

(B) S. Pinchuk (1994) podał przykład wielomianu $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ o jakobianie różnym od zera, ale nie stałym, stopnia 40, który nie jest injekcją. W tej pracy, która ostatecznie ogranicza badania do wielomianów o stałym jakobianie, była też podana możliwość zmniejszenia stopnia takiego wielomianu do 35. W kolejnych latach stopień takiego wielomianu został zmniejszony do 25 zaś F. Fernandes (2020) zmniejszył go do 15 (!).

(C) L. M. Drużkowski (2005) z IMUJ podał redukcję podobną do (A), w której formy h_i, $i = 1, \dots, m$, są trzecimi potęgami form liniowych. Jest to, tak zwana, forma liniowo-kubiczna Problemu Kellera.

Ponadto w ostatnich latach pojawiły się preprinty. prac z rozwiązaniami w przypadku R^2 dla stałego jakobianu. Jednak warto poczekać na weryfikację tych wyników, bo dość często pojawiały się rozwiązania fałszywe - z których jedno przetrwało 17 lat!

W Krakowie Problem Kellera spopularyzował w 1976 r. Kamil Rusek przy moim współudziale jako studenta II roku. W późniejszych latach Kamil Rusek uzyskał kilka ciekawych wyników dotyczących automorfizmów wielomianowych

We wstępnych rozważaniach, prowadzonych w IM UJ w związku z Problemem Kellera, rozważany był wpływ surjektywności na injektywność odwzorowań holomorficznych $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ (tzw. funkcje całkowite) takich, że $\forall z \in \mathbb{C}: f'(z) \neq 0$. Z czasem pojawił się wtedy ciekawy, następujący przykład.

Przykład 4.24 Niech $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ będzie pierwotną funkcji e^{z^2} taką, że $f(0)=0$. Wtedy jak łatwo zauważyć

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)\,n!},$$

jest funkcją nieparzystą. Jeśli skorzystamy teraz z tak zwanego, Małego Twierdzenia Picarda.

$$(f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}),\ \#(\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{C})) > 1) \Rightarrow (f \text{ - jest stała}),$$

to łatwo sprawdzimy, że f jest surjekcją.

Oczywiście mamy warunek $f'(z) = e^{z^2} \neq 0$ dla $z \in \mathbb{C}$, więc f lokalnie jest dyfeomorfizmem oraz jest surjekcją. Czy jednak f nie jest injekcją? Wtedy f byłoby dyfeomorfizmem (biholomorfizmem). W trakcie dyskutowania tego przykładu na wykładzie takie pytanie zadał Vadym Koval.

Generalnie brak injektywności jest tutaj wynikiem nieskończonego rozwinięcia funkcji f oraz, tak zwanego Wielkiego Twierdzenia Picarda, ale czy w tym konkretnym przypadku nie ma prostszego uzasadnienia?
Wynikiem ogłoszonego na wykładzie konkursu stało się, przedstawione na następnym wykładzie, brawurowe uzasadnienie przedstawione przez Radosława Żaka.

Na wstępie zauważmy, że $f(i\mathbb{R}) \subset i\mathbb{R}$ oraz dla $t \in \mathbb{R}$ mamy $f(it) = ig(t)$, gdzie

$$g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)n!} \quad \text{dla } t \in \mathbb{R}.$$

Wtedy $g'(t) = e^{-t^2}$ dla $t \in \mathbb{R}$ i jak łatwo sprawdzić $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ograniczoną! Wynika stąd, że

(#) $f(i\mathbb{R})$ jest zbiorem ograniczonym.

Następnie zauważmy, że gdyby f było injekcją, to wtedy $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ byłoby homeomorfizmem. Wtedy jednak zarówno f jak i f^{-1} przekształcałyby zbiory ograniczone na ograniczone, co tutaj nie ma miejsca ze względu na stwierdzoną sytuację w (#).

§5. Funkcje uwikłane

1. Główne twierdzenie

TWIERDZENIE 4.25 (o funkcjach uwikłanych).

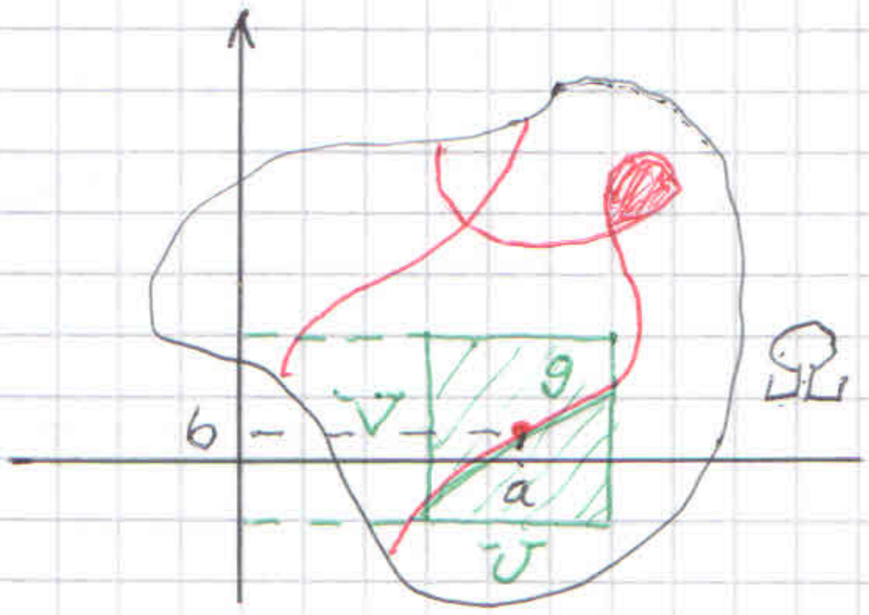
Z: E, F, G - przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$,
Ω otwarty w $E \times F$,
$f: \Omega \ni (x,y) \longrightarrow f(x,y) \in G$ kl C^1
$(a,b) \in \Omega$, $f(a,b) = 0$
$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \in Isom(F;G)$

T: Istnieją: U - otoczenie a w E,
V - otoczenie b w F,
$g: U \longrightarrow V$ klasy C^1
takie, że: (1) $U \times V \subset \Omega$
(2) $f^{-1}(0) \cap (U \times V) = g$

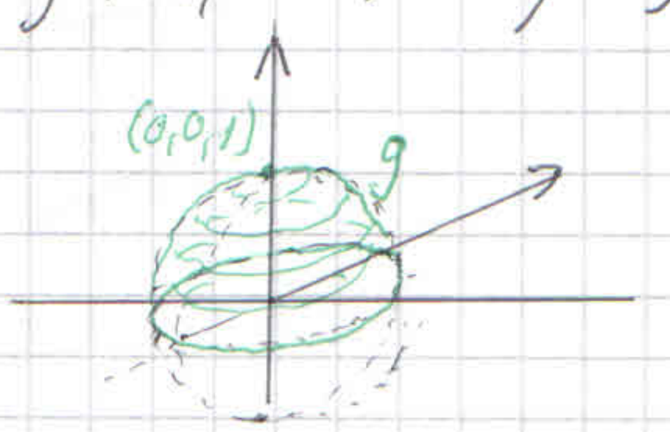
Uwagi 4.26

(1) $g = \{(x, g(x)) \in U \times V : x \in U\}$ - to wykres funkcji g

(2) Teza 4.25 opisuje nam postać zbioru zer funkcji f w dobrze dobranym otoczeniu punktu (a,b).



(3) Proplemy związane są z rozwiązywaniem równań postaci $f(x,y)=0$, czyli na przykład układów równań. Podział na zmienne dokonujemy tak aby móc zastosować gotowe twierdzenie
Zbadajmy przykładowo równanie $\underline{u^2+v^2+w^2=1 \text{ w } \mathbb{R}^3}$
Tworzymy funkcję
$$\underline{f: \mathbb{R}^3 \ni (u,v,w) \longrightarrow u^2+v^2+w^2-1 \in \mathbb{R}}$$
Przedstawmy $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$
$$\mathbb{R}^3 \ni (u,v,w) = ((u,v),w) = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$$
Interesuje nas więc $\frac{\partial f}{\partial w}(u,v,w) = 2w$
w punktach zerowania się funkcji f.
Weźmy przykładowo $a=(0,0)$, $b=1$ gdzie.
$$\frac{\partial f}{\partial w}(0,0,1) = 2 \neq 0$$
Z Tw 4.25 mamy informację, że w pewnym otoczeniu punktu $(0,0,1)$ zbiór zer f jest wykresem funkcji. Twierdzenie nie daje nam informacji jak dobrać otoczenia, ale w tym przypadku możemy wyliczyć funkcję
$g: U \longrightarrow V$ dla dowolnego $U \subset \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2+v^2<1\}$
oraz $V = (0,1\infty)$ dostając
$$\underline{g(u,v) = \sqrt{1-u^2-v^2}}.$$
Dostaliśmy w ten sposób górną część sfery jednostkowej w $\mathbb{R}^3$



D: Niech.

$$\Phi : \Omega \ni (x,y) \longrightarrow (x, f(x,y)) \in E \times G$$

Odwzorowanie Φ jest klasy C^1 jako zestawienie odwzorowań klasy C^1.

Zauważmy, że pochodną Φ w punkcie (a,b) możemy zapisać w interpretacji macierzowej następująco

$$\Phi'(a,b) = \begin{bmatrix} id_E & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \end{bmatrix}$$

Na wstępie pokażemy, że $\Phi'(a,b) \in Isom(E \times F; E \times G)$

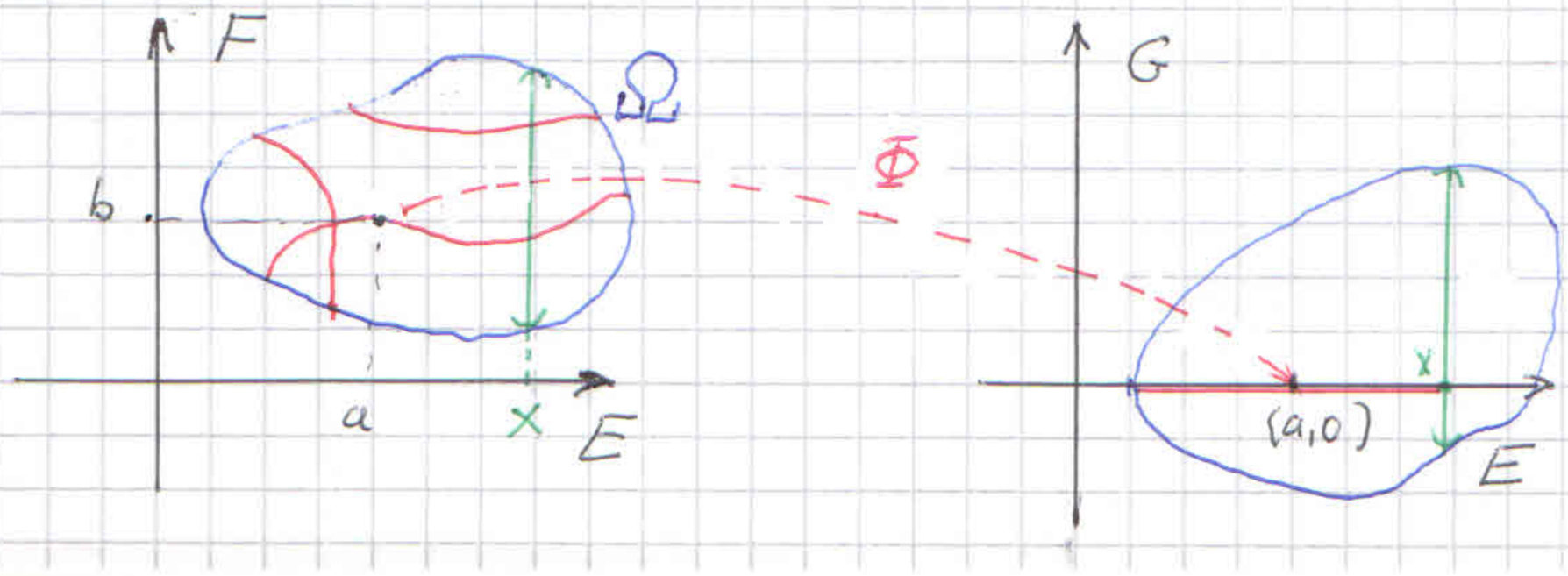
Niech $A = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$, $B = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$.

Odwzorowania A, B są ciągłe oraz.

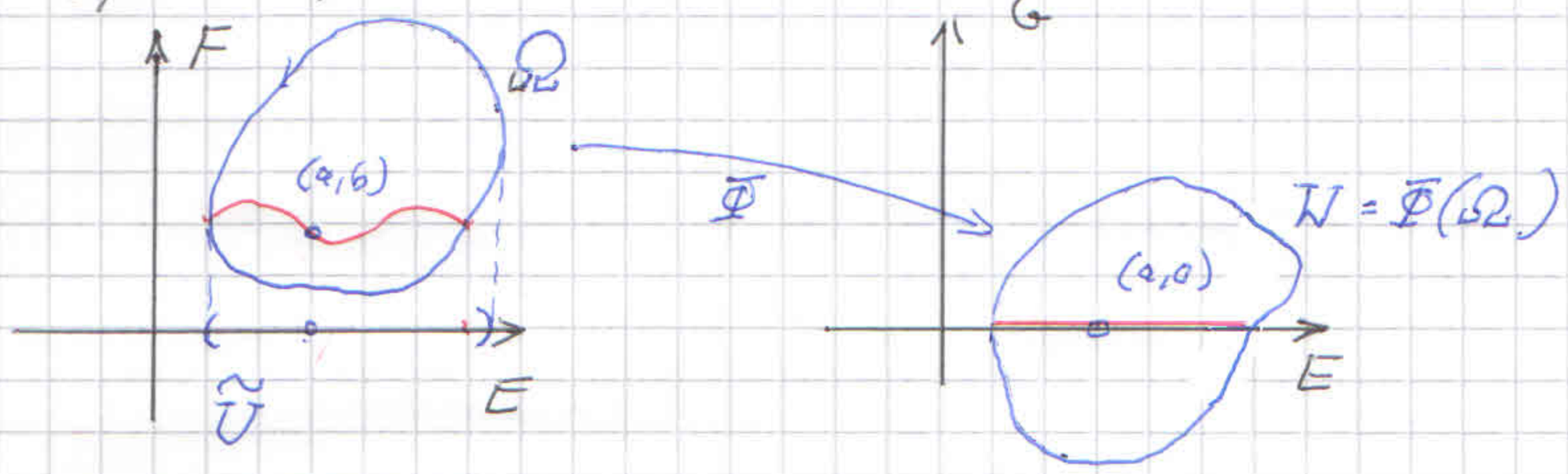
$$\Phi'(a,b).(h,k) = (h, Ah + Bk) = L(h,k)$$

Pokażemy, że L jest izomorfizmem wykażemy odwzorowanie odwrotne. Jeśli $L(h,k) = (h',k')$ to $h = h'$ oraz $Ah + Bk = k'$ więc $Bk = k' - Ah$ czyli $k = B^{-1}(k' - Ah')$, $h = h'$

Zatem $L^{-1}(h',k') = (h', B^{-1}(k' - Ah'))$. Skoro z założenia $B \in Isom(F;G)$, to B^{-1} jest ciągłe. To tutaj daje ciągłość L^{-1}. Zatem $\Phi'(a,b) \in Isom(E \times F; E \times G)$ i możemy w punkcie (a,b) zastosować Tw. 4.22



Na podstawie twierdzenia 4.22 możemy dalej przyjąć (zmniejszając Ω), że odwzorowanie Φ jest dyfeomorfizmem.



Niech $\tilde{U} = \{x \in E : (x,0) \in W\}$

$\Psi = (\Psi_1, \Psi_2) = \Phi^{-1} : W \longrightarrow \Omega$ jest dyfeomorfizmem.

Określamy odwzorowanie klasy C^1

$$\tilde{g} : \tilde{U} \ni x \longrightarrow \Psi_2(x,0) \in F$$

Jak widać $\tilde{g} = f^{-1}(0)$ oraz $\tilde{g}(a) = b$

Wybierzmy U otoczenie a i V otoczenie b tak aby:

$U \subset \tilde{U}$, $U \times V \subset \Omega$ oraz $\tilde{g}(U) \subset V$ co łatwo uzyskać na podstawie ciągłości $\tilde{g}$. Wtedy funkcja

$$g = \tilde{g}|U : U \longrightarrow V$$ spełnia tezę dowodzonego twierdzenia 4.25

2. Pochodna funkcji uwikłanej.

Przypuśćmy, że spełnione są założenia twierdzenia 4.25 oraz $g : U \longrightarrow V$ jest otrzymaną funkcją.

Zauważmy, że odwzorowanie

$$T : U \ni x \longrightarrow f(x, g(x)) \in G$$

jest stale równe zero. Zatem $T'(x) = 0$ dla $x \in U$

Mamy zatem dla $x \in \bar{U}$

$$0 = T'(x) = f'(x, g(x)) \circ (id_E, g'(x)) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \circ g'(x)$$

W punkcie a mamy zatem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \circ g'(a) = 0$$

Czyli $g'(a) = -\left[\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\right]^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$

Jednak, skoro $Isom(F; G)$ jest otwarty. to $\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \in Isom(F; G)$ dla $x \in U_1$ gdzie U_1 jest pewnym otoczeniem a. Przy konstrukcji z dowodu mamy $U_1 = U$. Zatem dla $x \in U$, dostajemy związek

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \circ g'(x) = 0,$$

skąd wyliczamy dla $x \in U_1$

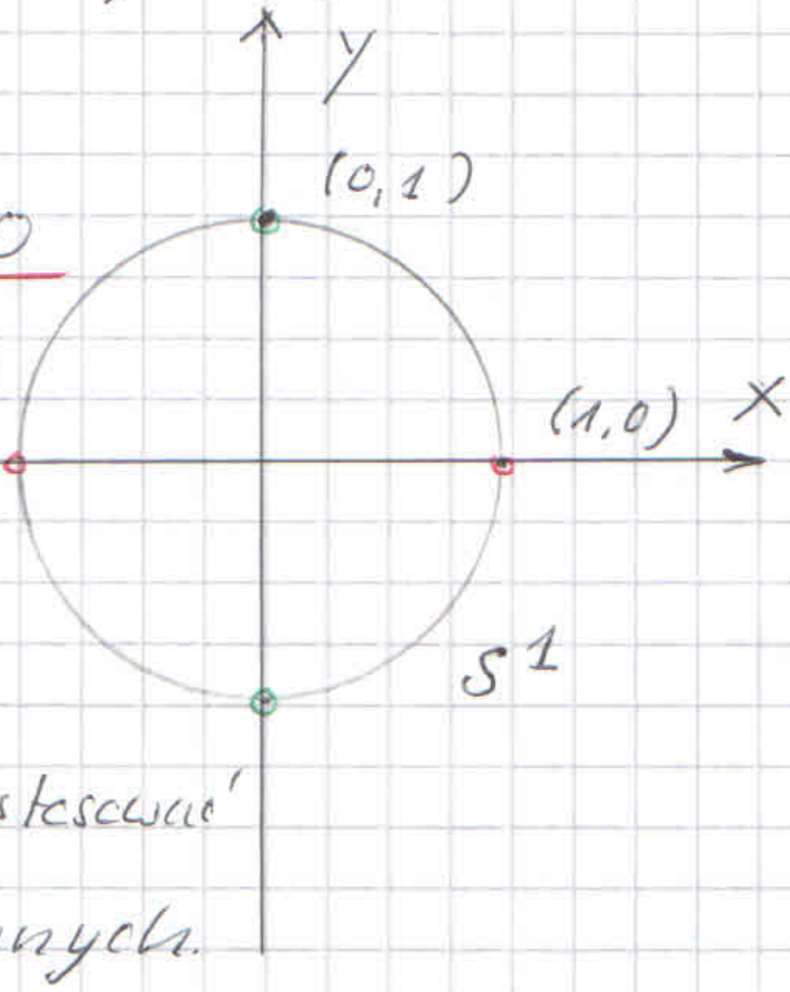
$$g'(x) = -\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))\right]^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))$$

Zachowanie się pochodnej mamy więc ustalić w pewnym, dostatecznie małym otoczeniu punktu a. Taka informacja jednak wystarcza do badań lokalnych czyli własności lokalnych funkcji g w punkcie a.

3. Przykłady i zastosowania.

Przykład 4.27. $f: \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longrightarrow f(x,y) = x^2+y^2-1 \in \mathbb{R}$

$$f^{-1}(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\} = S^1$$



- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 0$

W "większości" punktów mamy stosowanie twierdzenie o funkcjach uwikłanych względem dwóch zmiennych.

Inne równanie opisujące ten zbiór $(x^2+y^2-1)^2 = 0$ nie daje możliwości stosowania twierdzenia o funkcjach uwikłanych.

Uwaga 4.28 Jeśli Ω - otw. w $\mathbb{K}^m$, $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{K}^n$ klasy C^1 oraz $m > n$, to dla $f = (f_1, \dots, f_n)$ dostajemy. dla zbioru $f^{-1}(0) \subset \Omega$ układ równań:

$$\begin{cases} f_1(z_1, \dots, z_m) = 0 \\ f_2(z_1, \dots, z_m) = 0 \\ \vdots \\ f_n(z_1, \dots, z_m) = 0 \end{cases}$$

Wybierzmy $a \in \Omega$ takie, że $f(a) = 0$. Aby móc zastosować 4.25 w punkcie a musimy mieć po identyfikacji $f'(a)$ z macierzą $\operatorname{rank}_a f'(a) = n$.

Mając taki wawunek poszukujemy minorów maksymalnego rędu „n" macierzy $f'(a)$, które nie zerują się w punkcie a.

$$f'(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n}(a) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial z_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial z_n}(a) \end{bmatrix}$$

x — $y_1 \ldots y_n$ — y

Przy takim uporządkowaniu zmiennych mamy w ramach $f'(0)$ współrzędne y wyznaczać lokalnie jako funkcje zmienny x. Dostajemy „powierzchnię wymiaru $m-n$".

Przykład 4.29. Często w postaci uwikłanej dostajemy np. rozwiązania równań różniczkowych. Jednak to nie wyklucza badania przebiegu takich funkcji. Przykładowo weźmy równanie:

$$3y^5 + y(x^2+1) = 4x \quad , (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Tworzymy funkcję opisującą

$$f: \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longrightarrow 3y^5 + y(x^2+1) - 4x \in \mathbb{R}$$

Zauważmy, że $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 15y^4 + x^2 + 1 > 0$

dla wszelkich $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

Ponieważ przy ustalonym $x \in \mathbb{R}$, względem y $f(x,y)$ jest rosnącym silnie wielomianem stopnia 5, to równanie $f(x,y) = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie $y = g(x)$. Zatem istnieje funkcja $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że

$$f^{-1}(0) = g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3y^5 + y(x^2+1) - 4x = 0\}$$

Stosując w każdym punkcie $(a,b) \in g$ twierdzenie o funkcjach uwikłanych zauważamy, że g jest funkcją klasy C^1. Ponadto łatwo zauważyć, że $g(0)=0$ oraz g - jest funkcją nieparzystą.

Wstawiając funkcję g do równania dostajemy.

$$(*)\quad 3(g(x))^5 + g(x)(x^2+1) = 4x \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Skąd $15g'(x)(g(x))^4 + g'(x)(x^2+1) + 2xg(x) = 4$

Zatem $g'(x)(15(g(x))^4 + x^2 + 1) = 4 - 2xg(x)$.

Skąd dostajemy $g'(x) = 0 \Leftrightarrow xg(x) = 2$

Z $(*)$ $3(g(x))^6 + (g(x))^2(x^2+1) = 4xg(x)$

Czyli:

$$3(g(x))^6 + 4 + g^2(x) = 8$$

$$3(g(x))^6 + (g(x))^2 = 4$$

Niech $t = (g(x))^2$ wtedy $3t^3 + t = 4$ czyli

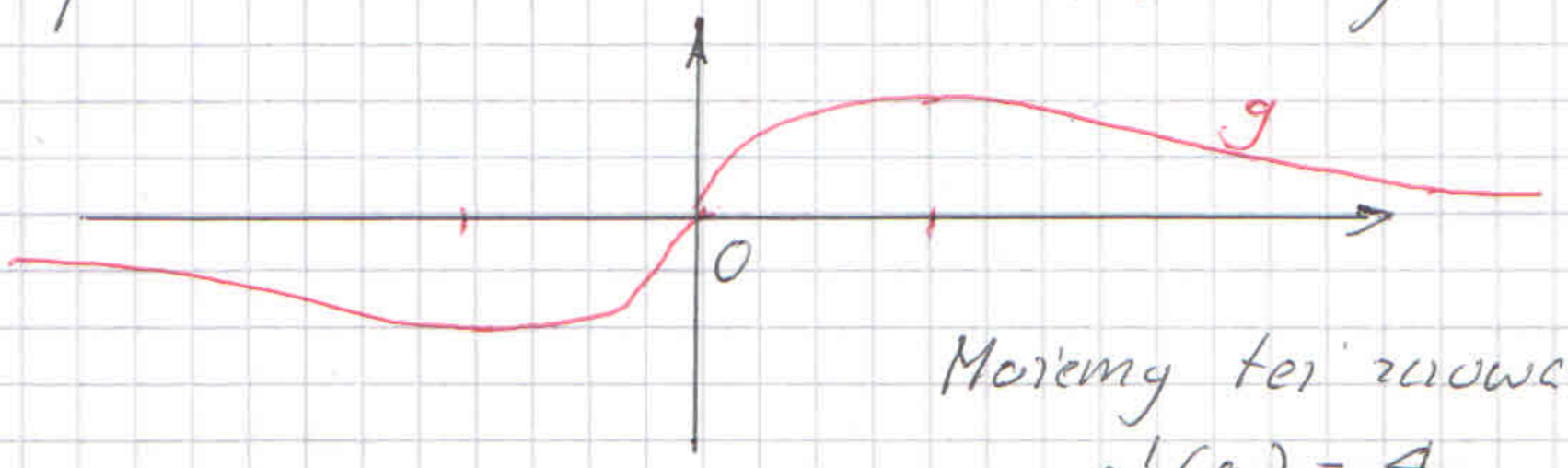
$t = 1$ skąd $g(x) = 1$ lub $g(x) = -1$.

Gdy $g(x) = 1$, to $3 + x^2 + 1 = 4x$, $(x-2)^2 = 0$, a zatem $x = 2$. Dla $g(x) = -1$ mamy $x = -2$

Zauważmy także, że.

$$g(x) = \frac{4x}{3g^4(x) + x^2 + 1} \longrightarrow 0 \quad (x \to \pm\infty).$$

To daje możliwość naszkicowania wykresu.



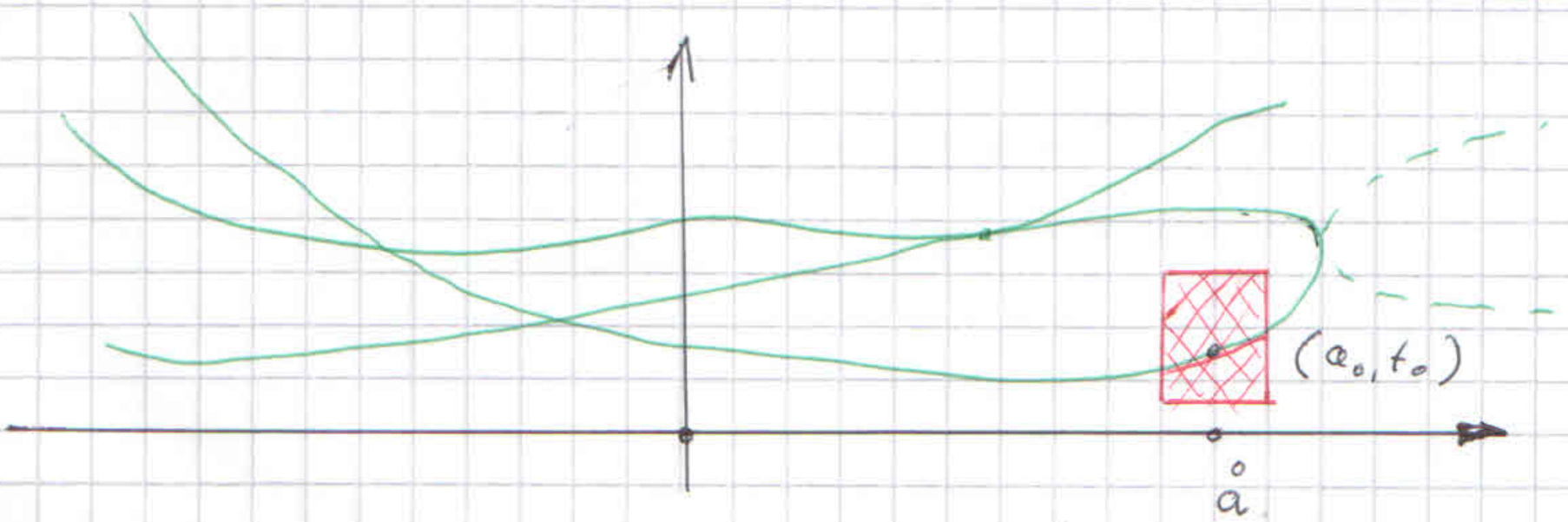
Możemy też zauważyć, że $g'(0) = 4$.

Uwaga 4.30. Korzystając z twierdzenia o funkcjach uwikłanych możemy badać zachowanie pierwiastków wielomianów jednej zmiennej w zależności od ich współczynników

Niech $P: \mathbb{K}^n \times \mathbb{K} \ni ((a_1, \dots, a_n), t) \longrightarrow P(a,t) \in \mathbb{K}$.

gdzie $P(a,t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$, $n \geq 1$.

Rozpatrujemy zbiór $X = \{(a,t) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K} : P(a,t) = 0\}$



Jeśli $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, to dla każdego $a \in \mathbb{K}^n$, $X_a = \{t \in \mathbb{K} : (a,t) \in X\}$ ma nie więcej niż n elementów - dokładnie n liczonych z krotnościami pierwiastków. Dla $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ możemy tylko stwierdzić, że $\# X_a \leq n$ dla $a \in \mathbb{R}^n$.

Ustalając $(a^\circ, t^\circ) \in X$ takie, że $\frac{\partial P}{\partial t}(a^\circ, t^\circ) \neq 0$ dostajemy możliwość zastosowania twierdzenia o funkcjach uwikłanych względem $y = t$.

Jak widać taką możliwość dają nam jednokrotne pierwiastki wielomianu $P(a, \cdot)$ względem drugiej zmiennej

Rozdział 5. Pochodne wyższych rzędów.

§1. Podstawowe pojęcia.

1. Wstępne definicje

E, F - przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$, $A \subset E$
$f: A \longrightarrow F$. Konstruujemy na kolejnych poziomach:

(0) $A^{(0)} := A$,
$f^{(0)} := f$.

(1) $A^{(1)} = \{x \in A^{(0)} : f^{(0)}$ - jest różniczkowalne w $x\}$,
$f^{(1)} := (f^{(0)})' : A^{(1)} \longrightarrow \mathcal{L}(E; F)$.

(2) $A^{(2)} := \{x \in A^{(1)} : f^{(1)}$ - jest różniczkowalne w $x\}$,
$f^{(2)} := (f^{(1)})' : A^{(2)} \longrightarrow \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; F))$

$\vdots$

(n) $A^{(n)} := \{x \in A^{(n-1)} : f^{(n-1)}$ - jest różniczkowalne w $x\}$
$f^{(n)} := (f^{(n-1)})' : A^{(n)} \longrightarrow \mathcal{L}(E; \underbrace{\ldots \mathcal{L}(E; F)\ldots}_{\times n})$

Uwagi 5.01

(1) Dostajemy ciągi zbiorów i odwzorowań, które od pewnego miejsca mogą być puste.

(2) Dla zbiorów mamy inkluzje:
$A^{(0)} \supset \operatorname{int} A^{(0)} \supset A^{(1)} \supset \operatorname{int} A^{(1)} \supset \ldots \supset A^{(n)} \supset \operatorname{int} A^{(n)} \supset \ldots$

Definicja 5.2 Jeśli $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ oraz $a \in A^{(n)}$, to f nazywamy n-krotnie różniczkowalnym w punkcie a zaś $f^{(n)}(a)$ n-tą pochodną f w punkcie a. Odwzorowanie $f^{(n)}$ określone na $A^{(n)}$ nazywamy n-tą pochodną f.

Uwaga 5.3 W miarę potrzeb używać będziemy klasycznego oznaczenia to znaczy $f'(a) = f^{(1)}(a)$, $f''(a) = f^{(2)}(a)$ $f'''(a) = f^{(3)}(a)$ przenosząc je również na symbole odwzorowań f', f'', f'''.

Definicja 5.4 Jeśli $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ oraz $A^{(n)} = A$, to f nazywamy n-krotnie różniczkowalnym na A.

2. Klasa odwzorowań różniczkowalnych.

Definicja 5.5 Przy ustalonych w poprzedniej części oznaczeniach, odwzorowanie f nazywamy klasy C^n dla $n \in \mathbb{N}$, jeśli $A^{(n)} = A$ oraz $f^{(n)}$ jest ciągłe.

Uwaga 5.6 Klasa C^0 to ciągłość odwzorowania f zaś dla $n \geq 1$ klasa C^n daje klasy $C^0, C^1, \ldots, C^{n-1}$.

Definicja 5.7 Odwzorowanie f nazywamy klasy C^∞ jeśli jest klasy C^n dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

3. Identyfikacje

Niech E, F przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$.
$A \subset E$ $a \in A$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
$f: A \longrightarrow F$ jest n-krotnie różniczkowalna w punkcie a. Mamy identyfikację (naturalną izometrię)

$$f^{(n)}(a) \in \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; \ldots; \mathcal{L}(E; F))) \cong \mathcal{L}_n(E; F)$$

Wartości pochodnej w punkcie w wersji oryginalnej sprawiają sporo kłopotów, więc często zastępujemy ją przez $f^{(n)}(a) \in \mathcal{L}_n(E; F)$. Wtedy zgodnie z wcześniejszymi ustaleniami

$$f^{(n)}(a)(h_1, \ldots, h_n) = ((f^{(n)}(a) \cdot h_1) \cdot h_2, \ldots) \cdot h_n$$

Jeśli $E = \mathbb{K}$ to dysponujemy kolejną identyfikacją. $\mathcal{L}_n(\mathbb{K}; F) \cong F$. Wtedy pochodne, to elementy przestrzeni docelowej $f'(a) \in F$, $f''(a) \in F$ itd. W szczególności dostajemy zgodność z sytuacją gdy $E = F = \mathbb{K}$ gdzie pochodne w punkcie, to elementy $\mathbb{K}$ (po identyfikacji)
Jeśli wyjściowa przestrzeń $E = \mathbb{K}^m$, $m \geq 1$, to już trudno nam wyobrazić dobre uproszczenia dla pochodnych, ale jak się okazuje pomogą nam tym razem pochodne cząstkowe.

§2. Pochodne cząstkowe wyższych rzędów.

1. Podstawowe definicje

$E_1, \dots, E_m, F$ - przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$, $m \geq 2$

$A \subset E = E_1 \times \dots \times E_m$, $f : A \longrightarrow F$

W tej sytuacji przeprowadzimy konstrukcję indeksowaną $\mathbb{N}$

(0) $A^{(0)} := A$

$f^{(0)} := f$

(1) Dla $i_1 \in \{1, \dots, m\}$ określamy.

$A^{(1)}_{i_1} := \{x \in A^{(0)} : \text{istnieje } \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} \text{ w punkcie } x\}$.

$\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} : A^{(1)}_{i_1} \ni x \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(x) \in \mathcal{L}(E_{i_1}; F)$.

(2) Dla $i_2 \in \{1, \dots, m\}$ określamy

$A^{(2)}_{(i_2, i_1)} := \{x \in A^{(1)}_{i_1} : \text{istnieje } \frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}\right) \text{ w } x\}$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_1}} : A^{(2)}_{(i_2, i_1)} \ni x \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}\right) \in \mathcal{L}(E_{i_2}; \mathcal{L}(E_{i_1}; F))$

$\vdots$

(n) Dla $i_n \in \{1, \dots, m\}$ określamy.

$A^{(n)}_{(i_n, \dots, i_1)} := \{x \in A^{(n-1)}_{(i_{n-1}, \dots, i_1)} : \text{istnieje } \frac{\partial}{\partial x_{i_n}}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{n-1} \dots \partial x_{i_1}}\right) \text{ w } x\}$

$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \dots \partial x_{i_1}} : A^{(n)}_{(i_n, \dots, i_1)} \ni x \hookrightarrow \frac{\partial}{\partial x_{i_n}}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_{n-1}} \dots \partial x_{i_1}}\right)(x) \in \mathcal{L}(E_{i_n}; \dots \mathcal{L}(E_{i_1}; F))$

Definicja 5.8 Jeśli $a \in A^{(n)}_{(i_n,\dots,i_1)}$, to $\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n}\dots\partial x_{i_1}}(a)$ nazywamy n-tą pochodną cząstkową lub pochodną cząstkową rzędu n odwzorowania f w punkcie a względem zmiennych $x_{i_1},\dots,x_{i_n}$. Odwzorowanie

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n}\dots\partial x_{i_1}} : A^{(n)}_{(i_n,\dots,i_1)} \longrightarrow \mathcal{L}(E_{i_n};\dots\mathcal{L}(E_{i_1};F))$$

nazywamy n-tą pochodną cząstkową lub pochodną rzędu n względem zmiennych $x_{i_1},\dots,x_{i_n}$.

2. Identyfikacje związane z pochodnymi cząstkowymi

Rozpatrując sytuację z poprzedniego punktu oraz biorąc $a \in A^{(n)}_{(i_n,\dots,i_1)}$ dostajemy.

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n}\dots\partial x_{i_1}}(a) \in \mathcal{L}(E_{i_n};\dots\mathcal{L}(E_{i_1};F))$$

Przestrzeń docelowa jest identyfikowana (izometrią) z $\mathcal{L}(E_{i_n},\dots,E_{i_1};F)$. Po identyfikacji pochodnej cząstkowej z odwzorowaniem n-liniowym będziemy rozpatrywać jej wartości na wektorach wektorów. $(h^{(n)}_{i_n},\dots,h^{(1)}_{i_1}) \in E_{i_n}\times\dots\times E_{i_1}$ czyli $\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n}\dots\partial x_{i_1}}(a)(h^{(n)}_{i_n},\dots,h^{(1)}_{i_1})$

Jeśli $E_1 = \dots = E_m = \mathbb{K}$, to mamy identyfikację $\mathcal{L}(\mathbb{K},\dots,\mathbb{K};F) = \mathcal{L}_n(\mathbb{K};F) \cong F$. Jeśli dodatkowo $F = \mathbb{K}$, to pochodne cząstkowe mogą być identyfikowane ze skalarami z ciała $\mathbb{K}$.

Uwaga 5.9. Dla ułatwienia zapisu będziemy zwykle odwracać numerowanie indeksów dostając:

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}}(a) \cdot (h_{i_1}^{(1)}, \dots, h_{i_n}^{(n)})$$

co nie zmienia a jedynie ułatwia zapis, bo po takim wyborze $(i_1, \dots, i_n)$ wykonujemy na wstępie różniczkowanie po zmiennej x_{i_n} zaś na końcu po x_{i_1}.

3. Związki pochodnych z pochodnymi cząstkowymi

Twierdzenie 5.10

Z: $E_1, \dots, E_m, F$ - przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$, $m \geq 2$

$A \subset E = E_1 \times \dots \times E_m$, $f: A \longrightarrow F$

f - jest n-krotnie różniczkowalna w punkcie $a \in A$

T: Odwzorowanie f ma wszystkie pochodne cząstkowe rzędu n w punkcie a oraz po naturalnych identyfikacjach $f^{(n)}(a)$ oraz pochodnych cząstkowych z odwzorowaniami n-liniowymi zadanymi wzory:

(1) $$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}}(a) = f^{(n)}(a) \circ (U_{i_1} \times \dots \times U_{i_n})$$ dla $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, m\}$,

(2) $$f^{(n)}(a) = \sum_{i_1, \dots, i_n = 1}^{m} \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}}(a) \circ (p_{i_1} \times \dots \times p_{i_n})$$,

gdzie U_j, p_j dla $j = 1, \dots, m$ oznaczają naturalne zanurzenia i projekcje w produkcie $E = E_1 \times \dots \times E_m$.

D: Pokażemy, że zachodzi (2) bez identyfikacji czyli, że dla $(h^{(1)}, \dots, h^{(n)}) \in E^n$ mamy równość

$$((f^{(n)}(a).h^{(1)})\dots).h^{(n)} =$$

$$= \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{m} ((\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_n}}(a).h^{(1)}_{i_1})\dots)h^{(n)}_{i_n}$$

Stąd dostajemy (2) i następnie przez podstawienie. poszczególnych $v_{i_1} \times \dots \times v_{i_n}$, $i_1,\dots,i_n \in \{1,\dots,m\}$ punkt (1).

Dowód przeprowadzimy względem n indukcyjnie.

Dla $n=1$ twierdzenie zachodzi wynikając z 3.34

Załóżmy, że wzór zachodzi dla $n-1$ gdzie $n \geq 2$.

Zatem dla punktów $x \in U$, gdzie U jest otoczeniem a, w którym istnieje $n-1$ pochodna mamy równość

$$(*)\quad f^{(n-1)}(x) = \sum_{i_2,\dots,i_n=1}^{m} \left(T_{(i_2,\dots,i_n)} \circ \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_n}}\right)(x)$$

gdzie

$$T_{(i_2,\dots,i_n)} : \mathcal{L}(E_{i_2};\dots;\mathcal{L}(E_{i_n};F)) \longrightarrow \mathcal{L}(E;\dots;\mathcal{L}(E;F))$$

gdzie $(T_{(i_2,\dots,i_n)}(l).h^{(2)})\dots).h^{(n)} = ((l.h^{(2)}_{i_2})\dots).h^{(n)}_{i_n}$

Jak łatwo zauważyć odwzorowania $T_{(i_2,\dots,i_n)}$ dla $i_2,\dots,i_n \in \{1,\dots,m\}$ są liniowe i ciągłe. (cw.).

Różniczkując (*) w punkcie a dostajemy

$$f^{(n)}(a) = \sum_{i_2,\dots,i_n=1}^{m} T(i_2,\dots,i_n) \circ \left(\sum_{i_1=1}^{m} \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_n}}(a) \circ p_{i_1} \right)$$

$$= \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{m} T(i_2,\dots,i_n) \circ \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_n}}(a) \circ p_{i_1}$$

Wstawiając argumenty $h^{(1)},\dots,h^{(n)} \in E$ otrzymujemy wymaganą równość.

Twierdzenie 5.11

Z: $E_1,\dots,E_m,F$ przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$, $m \geq 2$
Ω - otwarty w $E = E_1 \times \dots \times E_m$, $f: \Omega \to F$
$n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

T: Następujące warunki są równoważne
(1) f - jest klasy C^n.
(2) istnieją i są ciągłe w Ω wszystkie pochodne cząstkowe rzędu n.

D: (1) => (2) Konsekwencja poprzedniego twierdzenia bo istnienie wynika wprost z tezy zaś ciągłość ze wzoru 5.10 (1).

(2) => (1) Dowód indukcyjny względem n.
Dla $n=1$ twierdzenie wynika z 4.16.
Niech teraz $n>1$ oraz przypuśćmy, że twierdzenie zachodzi dla $n-1$. Biorąc zatem dowolną pochodną cząstkową rzędu $n-1$ widzimy, że ma ona pierwsze pochodne cząstkowe ciągłe więc musi być klasy C^1

a zatem ciągłą. Z założenia indukcyjnego f jest więc klasy C^{n-1} oraz mamy wzór

$$f^{(n-1)}(x) = \sum_{i_1,\dots,i_{n-1}=1}^{m} \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{n-1}}}(x) \circ (p_{i_1} \times \dots \times p_{i_{n-1}}).$$

Skoro wszystkie pochodne cząstkowe w powyższym wzorze są klasy C^1, to $f^{(n-1)}$ jest klasy C^1 skąd f jest klasy C^n.

9. Interpretacja macierzowa drugiej pochodnej

Niech $E_1, \dots, E_m, F$ - p. Banacha nad $\mathbb{K}$, $m \geq 2$. $A \subset E$, $f: A \longrightarrow F$, f - dwukrotnie różniczkowalna w punkcie $a \in A$. Wtedy:

$$f''(a).(h,k) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).(h_i, k_j) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).h_i\right).k_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).h_i\right).k_j$$

Wynikowi temu można nadać formę mnożenia macierzy.

$$[k_1 \dots k_m] \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_m}(a) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).h_i\right).k_j$$

mnożenie polegające na braniu wartości odwzorowania na wektorze

Jeśli $E_1 = \dots = E_m = \mathbb{K}$, to dostajemy macierz o współczynnikach z F i mnożenie będące mnożeniem elementów z F przez skalary. Gdy $F = \mathbb{K}$ jest to zwykłe mnożenie macierzy skalarnych.

Przykład 5.12 Niech

$$f: \mathbb{R}^3 \ni (x,y,z) \longrightarrow f(x,y,z) = xe^{y+z} \in \mathbb{R}.$$

$$f''(x,y,z) = \begin{bmatrix} 0 & e^{y+z} & e^{y+z} \\ e^{y+z} & xe^{y+z} & xe^{y+z} \\ e^{y+z} & xe^{y+z} & xe^{y+z} \end{bmatrix}$$

Okazuje się, że powstała przy tej interpretacji macierz symetryczna. Jest to jednak jak się przekonamy, charakterystyczna cecha drugich pochodnych funkcji dwukrotnie różniczkowalnych a zwykle sama możliwość wyliczenia drugich pochodnych cząstkowych tutaj nie wystarczy.

§3. Symetria pochodnych.

1. Symetria drugiej pochodnej

Twierdzenie 5.13

Z: E, F - przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$.
$A \subset E$, $f: A \longrightarrow F$, $a \in A$
f - jest dwukrotnie różniczkowalna w punkcie a.

T: $f''(a) \in \mathcal{L}_2(E; F)$ jest odwzorowaniem dwuliniowym symetrycznym czyli bez. identyfikacji $\forall\, h, k \in E: (f''(a).h).k = (f''(a).k).h$

D: Etap A

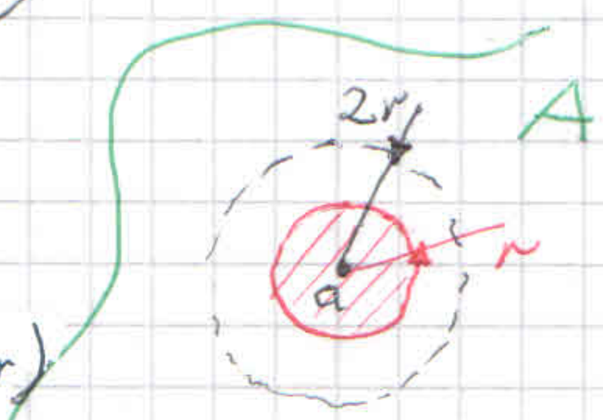
Wybieramy $r > 0$ tak aby:
(1) $K(a, 2r) \subset A$
(2) $\forall x \in K(a,r)$: f - jest różniczkowalna w x.

Określamy funkcję.
$H: K(0,r) \times K(0,r) \ni (u,v) \longrightarrow H(u,v) \in F$
gdzie:
$H(u,v) = f(a+u+v) - f(a+u) - f(a+v) + f(a) - (f''(a).u).v$

Pokażemy następnie, że

$$(\#) \lim_{(u,v)\to 0} \frac{\|H(u,v)\|}{(\|u\| + \|v\|)^2} = 0$$

Jak widać funkcja H jest dobrze określona w $K(0,r) \times K(0,r)$



Wybierzmy $\varepsilon > 0$. Ponieważ f' jest różniczkowalna w punkcie a więc istnieje $\delta > 0$ takie, że:

(3) $2\delta < r$

(4) $\|f'(x) - f'(a) - f''(a).(x-a)\| \leq \varepsilon/2 \, \|x-a\|$

gdy $\|x-a\| < 2\delta$



Ustalmy teraz $u \in K(0,\delta)$ oraz $v \in K(0,\delta)$

i rozważmy funkcję $g_u : K(0,\delta) \ni x \longrightarrow H(u,x) \in F$

Zauważmy, że

$g_u(x) = f(a+u+x) - f(a+u) - f(a+x) + f(a) - (f''(a).u).x$

$g_u'(x) = f'(a+u+x) - f'(a+x) - f''(a).u =$

$= f'(a+u+x) - f'(a) - f''(a).(u+x)$

$-(f'(a+x) - f'(a) - f''(a).x)$

Zatem

$\|g_u'(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|u+x\| + \frac{\varepsilon}{2}\|x\| \leq \varepsilon(\|u\|+\|x\|)$

Zatem dla $x \in [0,v]$ - odcinek w $K(0,\delta)$, mamy.

$\|g_u'(x)\| \leq \varepsilon(\|u\|+\|v\|)$.

Stąd dostajemy.

$\|g_u(v)\| = \|g_u(v) - g_u(0)\| \leq \varepsilon(\|u\|+\|v\|)\|v\| \leq \varepsilon(\|u\|+\|v\|)^2$

Czyli dla $(u,v) \in K(0,\delta) \times K(0,\delta)$ mamy.

$\|H(u,v)\| \leq \varepsilon(\|u\|+\|v\|)^2$

co daje (#).

Etap B. Na podstawie Etapu A wiemy, że.

$$\frac{\|(f''(a).u).v-(f''(a).v).u\|}{(\|u\|+\|v\|)^2} = \frac{\|H(u,v)-H(v,w)\|}{(\|u\|+\|v\|)^2} \to 0 \quad (u,v)\to 0$$

dla $u,v \in K(0,r)$.

Biorąc $h,k \in E$ weźmy ciąg $\{(\frac{h}{n},\frac{k}{n})\}$ gdzie $n \geq N$ takiego aby $\frac{h}{n},\frac{k}{n} \in K(0,r)$.

Dostajemy.

$$\frac{(f''(a).(\frac{h}{n})).(\frac{k}{n})-(f''(a).(\frac{k}{n})).(\frac{h}{n})}{\frac{1}{n^2}(\|h\|+\|k\|)^2} \longrightarrow 0 \quad (n\to+\infty)$$

Zatem $(f''(a).h).k-(f''(a).k).h=0$ co kończy dowód symetrii drugiej pochodnej.

2. Symetria pochodnych wyższych rzędów.

Twierdzenie 5.14.

Z: E,F - przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$.

$A \subset E$, $f: A \longrightarrow F$, f - n-krotnie różniczkowalna.

w punkcie $a \in A$, $n \geq 2$.

T: $f^{(n)}(a)$ po identyfikacji z elementem $\mathcal{L}_n(E;F)$ jest odwzorowaniem n-liniowym symetrycznym.

D: Tezę twierdzenia można zapisać następująco:

Dla permutacji $\sigma \in S_n$ oraz $h_1,\dots,h_n \in E$

$$f^{(n)}(a).(h_1,\dots,h_n) = f^{(n)}(a).(h_{\sigma(1)},\dots,h_{\sigma(n)})$$

Dowód przeprowadzimy indukcją względem $n \geq 2$.
Dla $n = 2$ teza wynika z 5.13.
Dowodzimy więc dla $n \geq 3$ wiedząc, że jest to prawda dla $n-1$.
Wystawcy ten fakt pokazać dla tak zwanych transpozycji sąsiednich, to znaczy permutacji wymieniających dwie sąsiednie pozycje elementów.
Ustalmy więc $h_1, \dots, h_n$ i transpozycję σ. Rozważmy dwa przypadki:

(I) $\sigma(1) = 1$.

Określamy

$$g: A^{(n-1)} \ni x \longrightarrow I(f^{(n-1)}(x)) \cdot (h_2, \dots, h_n) - I(f^{(n-1)}(x))(h_{\sigma(2)}, \dots, h_{\sigma(n)}) \in F$$

gdzie I to identyfikacja. $\mathcal{L}(E; \dots; \mathcal{L}(E; F)) \simeq \mathcal{L}_{n-1}(E; F)$
Z założenia indukcyjnego $g = 0$ więc
również $g'(a) \cdot h_1 = 0$, a zatem

$$I(f^{(n)}(a) \cdot h_1) \cdot (h_2, \dots, h_n) = I(f^{(n)}(a) \cdot h_1)(h_{\sigma(2)} \dots, h_{\sigma(n)})$$

Czyli $f^{(n)}(a) \cdot (h_1, \dots, h_n) = f^{(n)}(a) \cdot (h_{\sigma(1)}, \dots, h_{\sigma(n)})$.

(II) $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 1$ i $\sigma(k) = k$ dla $k \geq 3$

Wtedy $f^{(n-2)}: A^{(n-2)} \longrightarrow \mathcal{L}(E; \dots; \mathcal{L}(E; F))$
jest dwukrotnie różniczkowalne w punkcie a.
Na podstawie 5.13

$$((f^{(n-2)})''(a) \cdot h_1) \cdot h_2 = ((f^{(n-2)})''(a) \cdot h_2) \cdot h_1$$

Czyli $(f^{(n)}(a) \cdot h_1) \cdot h_2 = (f^{(n)}(a) \cdot h_2) \cdot h_1$

Po dopisaniu $h_3, \dots, h_n$ i identyfikacji
dostajemy potrzebną równość.

3. Symetria pochodnych a pochodne cząstkowe.

Twierdzenie 5.15

Z: $A \subset \mathbb{K}^m$, $m \geq 2$, F - przestrzeń Banacha nad $\mathbb{K}$
$i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, m\}$, $n \geq 2$, $\sigma \in S_n$
$f: A \longrightarrow F$ jest n-krotnie różniczkowalne w $a \in A$

T: Identyfikując pochodne cząstkowe z elementami przestrzeni F dostajemy.

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_{\sigma(1)}} \dots \partial x_{i_{\sigma(n)}}}(a) = \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}}(a)$$

D: Wystarczy zauważyć, że.

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}}(a) = f^{(n)}(a).(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$$

gdzie $e_1, \dots, e_m$ baza kanoniczna $\mathbb{K}^m$.

Uwagi 5.16

(1) Dla odwzorowania $f: \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longrightarrow xy \in \mathbb{R}$ mamy.

$$f''(a)((h_1,h_2),(k_1,k_2)) = [k_1,k_2]\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\end{bmatrix} = k_1h_2 + k_2h_1$$

Dwa odwzorowania reprezentujące pochodne cząstkowe.
nierzadko mają tutaj same współczynniki.
ale jak widać reprezentują one różne odwzorowania.
tak jak to mamy w 5.15

(2) Istnieje wiele klasycznych twierdzeń o symetrii drugiej pochodnej, często są one tyciche.
z nazwiskiem Schwarza.

(3) Inne wersje twierdzeń o symetrii wyższych pochodnych można znaleźć w [Ma].

(4) Bez istnienia drugiej pochodnej w punkcie nie musi zachodzić 5.15. Przykładem może być (ćw.)

$$f: \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longrightarrow \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq 0 \\ 0, & x=y=0 \end{cases} \in \mathbb{R}.$$

Uwaga 5.17

W sytuacji takiej jak w twierdzeniu 5.15 można skracać zapis grupując pochodne cząstkowe względem tych samych zmiennych i zaznaczając ich liczbę wykładnikiem, to znaczy:

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}}(a) = \frac{\partial^n f}{\underbrace{\partial x_1 \dots \partial x_1}_{\times \alpha_1} \dots \underbrace{\partial x_m \dots \partial x_m}_{\times \alpha_m}}(a) = \frac{\partial^n f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}(a) = \frac{\partial^n f}{\partial x^\alpha}(a) = \dots$$

gdzie $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Oznaczając $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$ dostajemy dalej

$$\dots = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(a)$$

Przy tej symbolice jeśli w wielowskaźniku α występuje na pozycji 0, to oznacza, że według zmiennej o tym wskaźniku nie różniczkujemy. Jeśli przyjmiemy $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_m!$ to wszystkich permutacji zmiennych $x_1, \dots, x_m$ dających ten sam symbol $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(a)$ będziemy mieć $|\alpha|!/\alpha!$ (ćw.).

§4. Operacje na odwzorowaniach wielokrotnie różniczkowalnych.

1. Podstawowe fakty

Przykłady 5.18

(1) E, F - przestrzenie Banacha, $L \in \mathcal{L}(E;F)$, Ω otw. w E
$f: \Omega \ni x \longrightarrow c + L(x) \in F$ gdzie $c \in F$
$f' = L$ - stałe, $f'' = 0$, ... itd, f - klasy C^∞

(2) $f \in \mathcal{L}(E, F; G)$ gdzie E, F, G - przestrzenie Banacha.
f' - jest liniowe ciągłe, f'' - stałe, $f''' = 0$ więc.
f - jest klasy C^∞.

(3) A - przemienna algebra Banacha z jedynką.
$\exp: A \longrightarrow A$ jest klasy C^∞ gdyż
$\exp^{(n)}(a) \cdot (h_1, \dots, h_n) = (\exp a) \cdot h_1 \cdots h_n$ (ćw.)

Twierdzenie 5.19

Z: E, F, G - przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$.
$A \subset E$, $g \in \mathcal{L}(F;G)$, $n \geq 1$, $a \in A$
$f: A \longrightarrow F$, n-kr. różn. w a (klasy C^n) [klasy C^∞]

T: $g \circ f$ jest n-kr. różn. w a (klasy C^n) [klasy C^∞]

D: Pokazujemy twierdzenie w wersji podstawowej.
Mamy dla $x \in A^{(1)}$ równość
$$(g \circ f)'(x) = g \circ f'(x).$$
Biorąc $\Phi: \mathcal{L}(E;F) \ni l \longrightarrow g \circ l \in \mathcal{L}(E;G)$.
dostajemy $(g \circ f)' = \Phi \circ f'$

Dowodzimy indukcyjnie względem $n \geq 1$

Dla $n = 1$ twierdzenie zachodzi

Niech $n > 1$ i zakładamy prawdziwość twierdzenia dla $n-1$.

Dostajemy kolejno:

- f' jest $(n-1)$ krotnie różniczkowalne w punkcie a,
- $\Phi \circ f'$ jest $(n-1)$ krotnie różniczkowalne w punkcie a. na podstawie założenia indukcyjnego,
- $(g \circ f)'$ jest $(n-1)$ krotnie różniczkowalne w punkcie a,
- $g \circ f$ jest n-krotnie różniczkowalne w punkcie a,

co kończy dowód wersji podstawowej.

Ten sam schemat biegnie dla klasy C^n. Mając twierdzenie dla klasy C^n łatwo pokazujemy dla klasy C^∞.

2. Różniczkowanie zestawień

Twierdzenie 5.20

Z: $E, F_1, \dots, F_m$ - przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$

$A \subset E$, $f_i : A \longrightarrow F_i$ dla $i = 1, \dots, m$, $a \in A$, $n \geq 1$

dla $i = 1, \dots, m$ f_i - n-kr. różn. w a $(f_i$ - kl $C^n)$ $[f_i$ - kl $C^\infty]$

T: $f = (f_1, \dots, f_m)$ - n-kr. różn. w a (kl. C^n) [kl C^∞]

D: $f'(x) = (f_1'(x), \dots, f_m'(x))$ gdy $f_1, \dots, f_m$ są różniczkowalne w punkcie $x \in A$

Niech

$\Phi : \mathcal{L}(E; F_1) \times \ldots \times \mathcal{L}(E; F_m) \ni (L_1, \ldots, L_m) \mapsto$

$\mapsto (L_1, \ldots, L_m) \in \mathcal{L}(E; F_1 \times \ldots \times F_m)$

Wtedy $\underline{f' = \Phi \circ (f_1', \ldots, f_m')}$, Φ - liniowe i ciągłe.

Dowodzimy indukcyjnie wersję podstawową.

Dla $n = 1$ twierdzenie zachodzi.

Niech $n > 1$ i zakładamy prawdziwość tego twierdzenia dla $n-1$.

Dostajemy kolejno:

- $f_1', \ldots, f_m'$ - $(n-1)$ krotnie różniczkowalne w punkcie a,
- $(f_1', \ldots, f_m')$ jest $(n-1)$ krotnie różniczkowalne w a,
- $\Phi \circ (f_1', \ldots, f_m')$ jest $(n-1)$ krotnie różniczkowalne w punkcie a na podstawie 5.19
- f' jest $(n-1)$ krotnie różniczkowalne w punkcie a,
- f jest n - krotnie różniczkowalne w a.

Tym samym schematem pokazujemy twierdzenie dla klasy C^n. Mając wersję dla klasy C^n tutaj dostajemy twierdzenie dla klasy C^∞

3. Różniczkowanie złożenia

Twierdzenie 5.21

Z: E, F, G - przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$
$A \subset E$, $B \subset F$, $f: A \to B$, $g: B \to G$
$n \geq 1$, $a \in A$, $b = f(a)$
f - jest n-kr. różn. w a oraz g w b (f, g - kl C^n) [f, g - kl C^∞]

T: $g \circ f$ - jest n-kr. różn. w a (klasy C^n) [klasy C^∞]

D: Zauważmy, że gdy f jest różniczkowalne w $x \in A$ oraz g w $f(x)$, to $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x)$
Oznaczając

$$\Phi: \mathcal{L}(F; G) \times \mathcal{L}(E; F) \ni (U, V) \to U \circ V \in \mathcal{L}(E; G),$$

widzimy, że Φ jest dwuliniowe ciągłe oraz dla punktów $x \in A$ takich, że f jest różniczkowalne w x oraz g w punkcie $f(x)$ mamy równość

$$(*) \quad (g \circ f)' = \Phi \circ (g' \circ f, f')$$

Teraz wykażemy indukcyjnie wariant dla klasy C^n.
Dla $n = 1$ twierdzenie zachodzi
Niech $n \geq 1$ i zakładamy prawdziwość tego twierdzenia dla $(n-1)$

Dostajemy kolejno:
- f', g' są klasy C^{n-1}
- $g' \circ f, f'$ klasy C^{n-1}
- $\Phi \circ (g' \circ f, f')$ kl C^{n-1} na podstawie 5.20 i zał. ind.
- $(g \circ f)'$ kl C^{n-1} z $(*)$
- $g \circ f$ klas C^n co kończy dowód.

Wariant podstawowy dowodzimy podobnie jak dla klasy C^n. Dla klasy C^∞ dowód tatwo dostajemy gdy dysponujemy twierdzeniem dla klasy C^n. Mianowicie, jeśli f i g są klasy C^∞, to są klasy C^n dla wszelkich $n \in \mathbb{N}$ więc $g \circ f$ jest klasy C^n dla wystkich $n \in \mathbb{N}$, cigli $g \circ f$ jest klasy C^∞.

Uwaga 5.22 Dysponując 5.21 możemy wykazywać wiele twierdzeń o klasach odwzorowań o charakterze ogólnym (np. dotyczących iloczynów kanonicznych) jak i faktów szczegółowych.

4. Różniczkowanie odwzorowań w algebrach Banacha.

Twierdzenie 5.23

Z: A - algebra Banacha z jedynką,

$$\xi : G(A) \ni x \longrightarrow \xi(x) = x^{-1} \in G(A) \subset A$$

T: ξ - jest klasy C^∞

D: Pokażemy, że ξ jest klasy C^n dla $n \in \mathbb{N}$

Wcześniej przypomnijmy, że dla $x \in G(A)$

$$\xi'(x) : A \ni h \longrightarrow -x^{-1} h x^{-1} \in A$$

Określając odwzorowanie $\Phi : A \times A \longrightarrow \mathcal{L}(A; A)$ poprzez $\Phi(x, y) : A \ni h \longrightarrow -xhy \in A$ widzimy, że:

(1) Φ - jest dwuliniowe ciągłe,

(2) $\xi' = \Phi \circ (\xi, \xi)$.

Dalej dowód przeprowadzimy indukcyjnie względem n.

Dla $n=1$ już wiemy, że twierdzenie zachodzi.
Niech $n>1$ i załóżmy, że twierdzenie
zachodzi dla $n-1$.
Jeśli wiemy, że ξ jest klasy $n-1$ to otrzymujemy
kolejno:
- (ξ,ξ) jest klasy C^{n-1} na podstawie 5.20
- $\Phi\circ(\xi,\xi)$ jest klasy C^{n-1} na podstawie 5.21
- $\xi' = \Phi\circ(\xi,\xi)$ jest klasy C^{n-1}
- ξ jest klasy C^n, co kończy dowód indukcyjny.

Skoro wiemy, że ξ jest klasy C^n dla $n\in\mathbb{N}$, to
w takim razie ξ jest klasy C^∞.

Twierdzenie 5.24

Z: E, F - przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$
$Isom(E;F)\neq\emptyset$
$\eta: Isom(E;F)\ni f \longrightarrow \eta(f)=f^{-1}\in Isom(F;E)$

T: η - jest odwzorowaniem klasy C^∞.

D: Ćwiczenie.

5. C^n, C^∞ dyfeomorfizmy

E, F - przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$
U - zbiór otwarty w E, V - zbiór otwarty w F
$f: U \longrightarrow V$, $n \in \mathbb{N}$

Definicja 5.25 Odwzorowanie f nazywamy C^n (C^∞) dyfeomorfizmem jeśli:
(1) f - jest bijekcją,
(2) f i f^{-1} są klasy C^n (C^∞).

Uwaga 5.26 Przy powyższej definicji C^1 dyfeomorfizmy, to dotychczasowe dyfeomorfizmy.

Twierdzenie 5.27
Z: E, F - przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$
U - otwarty w E, V - otwarty w F, $n \geqslant 1$
$f: U \longrightarrow V$ dyfeomorfizm klasy C^n (C^∞)

T: f jest C^n (C^∞) dyfeomorfizmem.

D: Oznaczmy $g = f^{-1}: V \longrightarrow U$. Zauważmy, że dla $y \in V$ mamy równość

$$g'(y) = [f'(g(y))]^{-1}$$

Niech $\eta: Isom(E;F) \ni f \longrightarrow f^{-1} \in Isom(F;E)$.
Na podstawie 5.24 wiemy, że η jest klasy C^∞.
Jak łatwo zauważyć

(#) $g' = \eta \circ f' \circ g$

Na wstępie pokażemy indukcyjnie, względem n, twierdzenie dla klasy C^n.

Dla $n=1$ twierdzenie zachodzi wprost z definicji dyfeomorfizmu

Niech $n>1$ i załóżmy, że jest ono prawdziwe dla $n-1$.

Jeśli f jest klasy C^n to kolejno dostajemy:
- f' klasy C^{n-1} oraz f jest klasy C^{n-1},
- f' klasy C^{n-1} oraz g jest klasy C^{n-1} (z założenia ind.)
- $g' = \eta \circ f' \circ g$ jest klasy C^{n-1} z # oraz 5.21
- g jest klasy C^n, co kończy dowód.

Dysponując twierdzeniem dla klasy C^n, $n \geq 1$ łatwo pokazujemy twierdzenie dla klasy C^∞.

6 - Twierdzenia o lokalnym dyfeomorfizmie i funkcjach uwikłanych dla odwzorowań wyższych klas.

Twierdzenie 5.28

Z: E, F - przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$, $n \geq 1$
Ω - otwarty w E, $f: \Omega \to F$ kl C^n (C^∞)
$a \in \Omega$, $f'(a) \in Isom(E;F)$

T: Istnieją otoczenia:
- U punktu a w Ω,
- V punktu $f(a)$ w F,

takie, że $f(U) = V$ oraz odwzorowanie $f|U: U \to V$ jest C^n (C^∞) dyfeomorfizmem.

D: Na podstawie twierdzenia o lokalnym dyfeomorfizmie (4.22) dostajemy wymagane otoczenia U, V takie, że $f|U: U \to V$ jest dyfeomorfizmem. W tej sytuacji 5.27 kończy dowód.

Twierdzenie 5.29

Zł: E, F, G - przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$,
Ω - otwarty w $E \times F$, $n \geq 1$,
$f: \Omega \ni (x,y) \longrightarrow f(x,y) \in G$ klasy $C^n (C^\infty)$
$(a,b) \in \Omega$, $f(a,b) = 0$
$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \in Isom(F;G)$

Teza: Istnieją:
- U - otoczenie a w E,
- V - otoczenie b w F,
- odwzorowanie $g: U \to V$ klasy $C^n (C^\infty)$,

takie, że:
(1) $U \times V \subset \Omega$,
(2) $f^{-1}(0) \cap (U \times V) = g$.

D: Powtarzając dowód twierdzenia o funkcjach uwikłanych (4.25) dostajemy określany tam dyfeomorfizm Φ klasy $C^n (C^\infty)$ oraz odwrotny do niego $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)$ także klasy $C^n (C^\infty)$. W tej sytuacji odwzorowanie

$$\tilde{g}: U \ni x \longrightarrow \Psi_2(x, 0) \in F$$

jest klasy $C^n (C^\infty)$. Na koniec odwzorowanie $g = \tilde{g}|U: U \to V$ będzie więc klasy $C^n (C^\infty)$

Uwaga 5.30 Ostatnie dwa twierdzenia są kluczowe dla wielu teorii i dąży się aby utrzymać własności wyjściowych odwzorowań dla odwzorowania odwrotnego oraz uzyskiwanej funkcji „uwikłanej". Typowe przykłady to teorie funkcji analitycznych i algebraicznych.

Uwaga 5.31 Jeśli E, F - są przestrzeniami wektorowymi nad $\mathbb{K}$ oraz $\varphi: E^k \longrightarrow F$ jest odwzorowaniem k-liniowym, $k \geqslant 1$, to dla $h \in E$ oznaczamy.

$$\varphi \cdot (h)^k := \varphi(\underbrace{h, \ldots, h}_{\times k}).$$

Rozdział 6. Wzór Taylora i jego podstawowe zastosowania.

§1. Podstawowe wersje wzoru Taylora.

1. Wzór Taylora z resztą Peano

Twierdzenie 6.1 (o wzorze Taylora z resztą Peano)

Zł: E, F p. Banacha nad $\mathbb{K}$, $A \subset E$, $a \in A$, $n \geq 1$
$f: A \to F$ jest n-krotnie różniczkowalna w p. a.

T: Istnieje $\xi: A-a \to F$ ciągła w punkcie 0, $\xi(0)=0$ taka, że dla $h \in A-a$ zachodzi równość

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{1!} f^{(1)}(a).h + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(h)^n + \xi(h)\|h\|^n.$$

Uwaga 6.2 Tezę powyższego twierdzenia możemy także zapisać w postaci

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{1!} f^{(1)}(a).h + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a).(h)^n + o(\|h\|^n)$$

D: Mamy $0 \in \operatorname{int}(A-a)$ oraz zawsze możemy określić funkcję ξ z tezy tak aby $\xi(0)=0$ oraz zachodziła równość. Określamy na wstępie

$$T_n(h) = f(a) + \frac{1}{1!} f^{(1)}(a).h + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a).(h)^n,$$

a następnie

$$\xi(h) = \begin{cases} 0, & h=0, \\ \frac{1}{\|h\|^n}\left(f(a+h) - T_n(h)\right), & h \in (A-a)\setminus\{0\}. \end{cases}$$

Pozostaje do sprawdzenia ciągłość funkcji ξ w punkcie 0, przy czym gdy $E=\{0\}$, to twierdzenie zachodzi. Dalej rozpatrujemy przypadek $E \neq \{0\}$.

Dowód przeprowadzimy indukcyjnie względem $n \geq 1$

Dla $n = 1$ mamy równość

$$f(a+h) = f(a) + f^{(1)}(a).h + \xi(h)\|h\|,$$

w której ciągłość ξ w punkcie 0 wynika z definicji pochodnej w punkcie a.

Dalej, dla $n \geq 2$ przypuścimy, że twierdzenie zachodzi w pełnej ogólności dla $n-1$. Zastosujemy je więc dla funkcji $f' : A^{(1)} \to \mathcal{L}(E;F)$, która w punkcie a jest $n-1$ krotnie różniczkowalna. Mamy więc $a \in \operatorname{int} A^{(1)}$ oraz

$$(\#) \quad f'(a+h) = f'(a) + \sum_{k=1}^{n-1}{}' \frac{1}{k!} (f')^{(k)}(a).(h)^k + \xi_1(h)\|h\|^{n-1}$$

gdzie $\xi_1 : A^{(1)} - a \to \mathcal{L}(E;F)$, $\xi_1(0) = 0$ oraz funkcja ξ_1 jest ciągła w punkcie 0.

Wybierzmy teraz $\varepsilon > 0$. Istnieje wówczas $r > 0$ takie, że $K(0,r) \subset A^{(1)} - a$ oraz $\|\xi_1(h)\| < \varepsilon$ dla $h \in K(0,r)$

Rozważmy następnie funkcję

$$R : K(0,r) \ni h \to f(a+h) - f(a) - \sum_{k=1}^{n}{}' \frac{1}{k!} f^{(k)}(a).(h)^k \in F$$

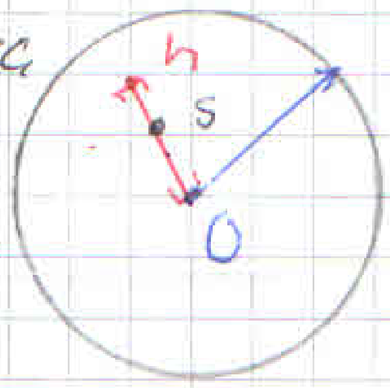
Funkcja ta jest różniczkowalna oraz dla $s \in K(0,r)$ mamy

$$R'(s) = f'(a+s) - f'(a) - \sum_{k=2}^{n}{}' \frac{1}{(k-1)!} (f')^{(k-1)}(a).(s)^{k-1}$$

$$= f'(a+s) - f'(a) - \sum_{k=1}^{n-1}{}' \frac{1}{k!} (f')^{(k)}(a).(s)^k$$

Z $(\#)$ mamy więc $\|R'(s)\| \leq \varepsilon \|s\|^{n-1}$ dla $s \in K(0,r)$

Wybierzmy teraz $h \in K(0,r)$ i zastosujmy twierdzenie o przyrostach dla odcinka $[0,h]$, dla którego każdego punktu s mamy szacowanie $\|R'(s)\| \leq \varepsilon \|h\|^{n-1}$.



Dostajemy zatem dla $h \in K(0,r)$ nierówność:

$$\|R(h) - R(0)\| \leq \varepsilon \|h\|^n,$$

skąd wynika, że

$$\|f(a+h) - T_n(h)\| \leq \varepsilon \|h\|^n.$$

To kończy dowód.

2. Przygotowanie do kolejnych wersji wzoru Taylora.

Niech U będzie otwartym, niepustym podzbiorem $\mathbb{R}$, F przestrzenią Banacha nad $\mathbb{K}$, traktowaną tutaj jako przestrzeń rzeczywistą. Niech $n \in \mathbb{N}$ i niech $v: U \longrightarrow F$ będzie funkcją $n+1$ krotnie różniczkowalną. Identyfikując pochodne funkcji v w punktach $t \in U$ z elementami F określmy funkcję

$$\varphi: U \ni t \longrightarrow \varphi(t) = v(t) + \frac{(1-t)}{1!} v^{(1)}(t) + \ldots + \frac{(1-t)^n}{n!} v^{(n)}(t) \in F,$$

której własności pozwolą nam budować kolejne wersje wzoru Taylora, podobnie jak w AM2, R3, §5.

Lemat 6.3 Funkcja φ jest różniczkowalna oraz dla $t \in U$

$$\varphi'(t) = \frac{(1-t)^n}{n!} v^{(n+1)}(t)$$

D: (ćw.)

Lemat 6.4

Z: $[0,1] \subset U$, $M \in [0,+\infty)$

$\|v^{(n+1)}(t)\| \leq M$ dla $t \in [0,1]$

T: $\|\varphi(1) - \varphi(0)\| \leq \frac{M}{(n+1)!}$

D: Niech $g: U \ni t \longrightarrow g(t) = -M\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} \in \mathbb{R}$

Wtedy $g'(t) = M\frac{(1-t)^n}{n!}$ dla $t \in U$

Zatem $\|\varphi'(t)\| \leq g'(t)$ dla $t \in [0,1]$.

Na podstawie 3.44 z AM2, podstawowej wersji twierdzenia o przyrostach dostajemy.

$$\|\varphi(1) - \varphi(0)\| \leq g(1) - g(0) = \frac{M}{(n+1)!}$$

Lemat 6.5

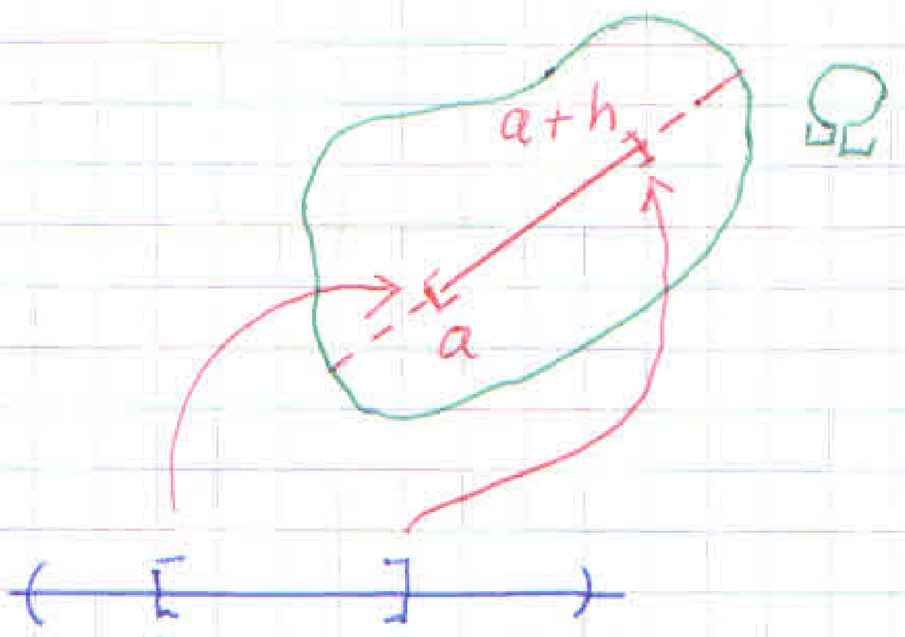
Z: $[0,1] \subset U$, v - jest klasy C^{n+1} na U

T: $\varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} v^{(n+1)}(t)\,dt$, gdzie po prawej stronie równości znajduje się całka Cauchy'ego z funkcji ciągłej.

D: Jak wynika z Lematu 6.3 funkcja podcałkowa ma na przedziale $[0,1]$ pierwotną, którą jest $\varphi|[0,1]$. W tej sytuacji teza lematu wynika wprost z definicji całki Cauchy'ego.

Przechodząc do kolejnych dwóch wersji wzoru Taylora będziemy rozważać na wstępie:

- E, F - przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$
- Ω zbiór otwarty w E taki, że dla $a, h \in E$ mamy $[a, a+h] \subset \Omega$ oraz
- $f : \Omega \longrightarrow F$ funkcję k-krotnie różniczkowalną w Ω gdzie $k \geq 1$.



Określmy w tej sytuacji

$$U = \{ t \in \mathbb{R} : a + th \in \Omega \}$$

dostając $[0,1] \subset U$

Niech $\underline{v : U \ni t \longrightarrow v(t) = f(a+th) \in F}$

Wtedy dostajemy dla $t \in U$

$$v'(t) = f'(a+th) \cdot h$$

$$v''(t) = (f''(a+th) \cdot h) \cdot h = f''(a+th)(h,h) = f''(a+th) \cdot (h)^2$$

$$\vdots$$

$$\underline{v^{(k)}(t) = f^{(k)}(a+th)\underbrace{(h,\dots,h)}_{\times k} = f^{(k)}(a+th) \cdot (h)^k}$$

Uzyskane równości wykorzystamy w dowodach dwóch kolejnych wersji wzoru Taylora.

3. Wzór Taylora z resztą Lagrange'a.

Twierdzenie 6.6 (o wzorze Taylora z resztą Lagrange'a)

Zł: E, F - przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$

Ω - otwarty w E, $a, h \in E$, $[a, a+h] \subset \Omega$,

$n \in \mathbb{N}$, $f: \Omega \longrightarrow F$ jest $n+1$ krotnie różniczkowalne

$M \in [0, +\infty)$, $\|f^{(n+1)}(x)\| \leq M$ dla $x \in [a, a+h]$

Tł: $\| f(a+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) \cdot (h)^k \| \leq \frac{M \|h\|^{n+1}}{(n+1)!}$

D: Określmy, na wstępie, tak jak w przygotowaniu. funkcję

$$V: U \ni t \longrightarrow f(a+th) \in F$$

gdzie $U = \{t \in \mathbb{R} : a + th \in \Omega\}$.

Bezpośrednio z Lematu 6.4 dostajemy.

$$\|\varphi(1) - \varphi(0)\| \leq \frac{M \|h\|^{n+1}}{(n+1)!}$$

gdyż $\|V^{(n+1)}(t)\| = \|f^{(n+1)}(a+th) \cdot (h)^{n+1}\| \leq M \|h\|^{n+1}$.

Rozpisując funkcję φ dostajemy:

$$\varphi(1) - \varphi(0) = f(a+h) - \sum_{k=0}^{n} \cdot \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) \cdot (h)^k,$$

skąd już tatwo wynika teza.

Uwaga 6.7 Jeśli $F = \mathbb{R}$, to można resztę nadać postać zbliżoną do klasycznej reszty Lagrange'a z AM2, 3.53.

4. Wzór Taylora z resztą całkową.

Twierdzenie 6.8 (o wzorze Taylora z resztą całkową)

Z: E, F - przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$.

Ω - otwarty w E, $a, a+h \in E$, $[a, a+h] \subset \Omega$

$n \in \mathbb{N}$, $f: \Omega \longrightarrow F$ klasy C^{n+1}

$$T: f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) \cdot (h)^k + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+th) \cdot (h)^{n+1} dt$$

D: Określamy $\varphi(t) = f(a+th)$ dla $t \in U$

gdzie: $U = \{t \in \mathbb{R} : a+th \in \Omega\}$

Na podstawie lematu 6.5 otrzymujemy

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \varphi^{(n+1)}(t)\, dt,$$

co daje natychmiast tezę dowodzonego twierdzenia.

Podany wzór jest podstawą kolejnych wersji wzoru Taylora. Mamy w tezie 6.8 równość, co oznacza, że nie tracimy w tej wersji żadnych informacji.

§2. Przypadek $\mathbb{K}^m$, $m \geq 1$.

Zajmować będziemy się wzorem Taylora dla $E = \mathbb{K}^m$, $m \geq 1$, F - p. Banacha nad $\mathbb{K}$. Dla uproszczenia zajmiemy się wersją Peano - oczywiście wszystko można powtórzyć dla innych reszt. Interesować nas będzie zapis: część

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a).(h)^k$$

w pochodnych cząstkowych

1. Przedstawienia pochodnych

Ω otwarty w $\mathbb{K}^m$, $m \geq 1$, $a \in \Omega$, $f: \Omega \to F$ jest n-krotnie różniczkowalna w a. Weźmy $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$

Wybierając $h^{(1)}, \dots, h^{(k)} \in \mathbb{K}^m$ gdzie $h^{(i)} = (h_1^{(i)}, \dots, h_m^{(i)})$ dla $i = 1, \dots, k$ mamy

$$f^{(k)}(a).(h^{(1)}, \dots, h^{(k)}) = \sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^{m} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a)\, h_{i_1}^{(1)} \cdot \dots \cdot h_{i_k}^{(k)}$$

Zatem dla $h = (h_1, \dots, h_m)$ dostajemy.

$$f^{(k)}(a).(h)^k = \sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^{m} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a)\, h_{i_1} \cdot \dots \cdot h_{i_k}$$

Korzystając z 5.17, możemy grupując pochodne względem kolejnych zmiennych oraz wprowadzając symbol $h^\alpha = h_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot h_m^{\alpha_m}$, zapisać

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a)\, h_{i_1} \dots h_{i_k} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^\alpha x}(a) \cdot h^\alpha$$

dla pewnych $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ t. że $\alpha_1 + \dots + \alpha_m = k$

Po spowodzeniu, że $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(a)$ dostaniemy w zapisie k-tej pochodnej $\frac{k!}{\alpha!}$ razy, $\alpha! = \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_m!$ dostajemy

$$f^{(k)}(a) \cdot (h)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^\alpha x}(a) \cdot h^\alpha$$

W tej sytuacji stosowane są również wygodne symbole $D^\alpha f(a)$ gdzie $D^0 f(a) = f(a)$ oraz dla $|\alpha| \geq 1$

$$D^\alpha f(a) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(a) \in F$$

Wtedy dostajemy równość

$$f^{(k)}(a) \cdot (h)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(a) \cdot h^\alpha$$

2. Wzór Taylora w $\mathbb{K}^m$

Rozpatrując sytuację określoną we wstępie tego paragrafu, dla funkcji $f: A \longrightarrow F$ $A \subset \mathbb{K}^m$, $m \geq 1$ n-krotnie różniczkowalnej w punkcie $a \in A$, $n \geq 1$ dostajemy równość

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) \cdot (h)^k + o(\|h\|^n) =$$

$$= f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left(\sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(a) \cdot h^\alpha \right) + o(\|h\|^n) =$$

$$= \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a) \cdot h^\alpha + o(\|h\|^n) \quad \text{gdzie } h^0 := 1$$

gdyż mamy również $D^0 f(a) = f(a)$.

§3. Wzór Taylora a wielomiany

1. Wielomiany jednorodne

E, F - przestrzenie wektorowe nad $\mathbb{K}$

Definicja 6.9 Odwzorowanie $\varphi : E \to F$ nazywamy wielomianem jednorodnym stopnia $k \in \mathbb{N}$ jeśli:

(1) gdy $k = 0$, φ - jest stałe.

(2) gdy $k \geqslant 1$, istnieje odwzorowanie $\psi : E^k \to F$ k-liniowe takie, że $\varphi = \psi \circ \Delta_k$ gdzie $\Delta_k : E \ni x \to (x, x, \dots x) \in E^k$

Zbiór wielomianów jednorodnych stopnia k z E do F będziemy dalej oznaczać przez $Q^k(E; F)$

Uwagi 6.10

(1) $Q^k(E; F)$ ma naturalną strukturę przestrzeni wektorowej nad $\mathbb{K}$,

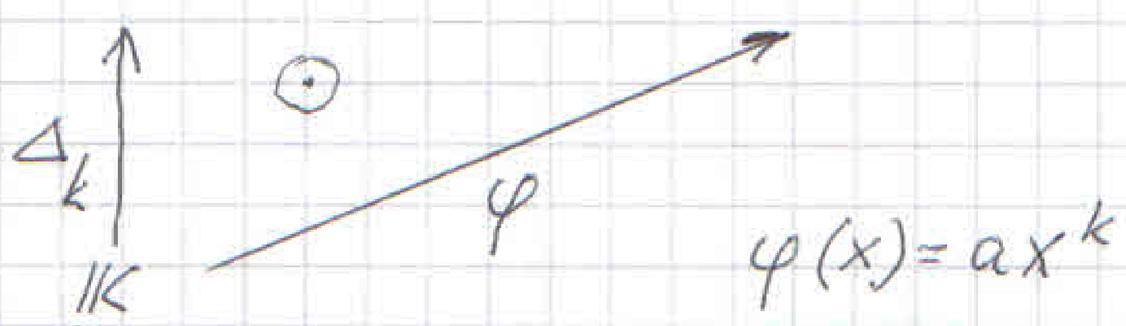
(2) $0 \in Q^k(E; F)$ dla wszelkich $k \in \mathbb{N}$,

(3) Tę teorię można znaleźć na przykład w [Ca].

Przykłady 6.11

(1) $E = F = \mathbb{K}$, $\quad \mathbb{K}^k \ni (x_1, \dots, x_k) \xrightarrow{\psi} a \cdot x_1 \cdot \dots \cdot x_k \in \mathbb{K}$

$a \in \mathbb{K}$



(2) $E = \mathbb{K}^2$, $F = \mathbb{K}$, $\varphi(x, y) = x^2 y$

Jako odwzorowanie ψ możemy wziąć

$\psi : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \ni ((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)) \to x_1 \cdot y_2 \cdot x_3 \in \mathbb{K}$.

2. Odwzorowania wieloliniowe symetryczne.

związane z wielomianami jednorodnymi:

Twierdzenie 6.12

Z: E, F - przestrzenie wektorowe nad $\mathbb{K}$.

$\varphi \in Q^k(E;F)$, $k \geq 2$

T: $\exists! \tilde{\varphi} : E^k \to F$, k-liniowe symetryczne : $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \Delta_k$.

D: (Zarys dowodu).

Istnienie

Jeśli $\varphi = \psi \circ \Delta_k$, to określając $\tilde{\varphi}$

$$\tilde{\varphi}(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \psi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}),$$

dostajemy $\tilde{\varphi}$ - symetryczne, takie że $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \Delta_k$

Jednoznaczność

Zacznijmy analizę od przypadku odwzorowań dwuliniowych. Jeśli $\tilde{\varphi}$ jest dwuliniowe symetryczne zadające φ to dla $x, y \in E$ mamy.

$$\tilde{\varphi}(x+y, x+y) = \tilde{\varphi}(x,x) + \tilde{\varphi}(y,y) + 2\tilde{\varphi}(x,y) =$$

$$= \varphi(x) + \varphi(y) + 2\tilde{\varphi}(x,y)$$

Zatem dostajemy formułę

$$\tilde{\varphi}(x,y) = \frac{1}{2}[\varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y)]$$

Ten sam kierunek można przyjąć dla wyższych stopni uzyskując tak zwaną formułę polaryzacyjną.

$$\tilde{\varphi}(x_1,\dots,x_k)=\frac{1}{k!}\sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k=0}^{1}(-1)^{k-(\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_k)}\varphi(\varepsilon_1x_1+\dots+\varepsilon_kx_k)$$

Proponuję wyliczenie tej równości jako ćwiczenie, ale w dalszych zastosowaniach wystawcy nam zwykle znajomość następującej implikacji:

$$(\tilde{\varphi}\text{ - }k\text{-liniowe, symetryczne, }\tilde{\varphi}\circ\Delta_k=0)\Rightarrow(\tilde{\varphi}=0)$$

Proponuję konkurs na najładniejszy dowód tej implikacji (najszybszy) bez stosowania formuły polaryzacyjnej.

3. Wielomiany

Niech E,F będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $\mathbb{K}$

Definicja 6.13 Odwzorowanie $\varphi: E\to F$ nazywamy wielomianem jeśli istnieje $k\in\mathbb{N}$ oraz istnieją $\varphi_i\in Q^i(E;F)$ dla $i=0,\dots,k$ takie, że

$$\varphi=\varphi_0+\varphi_1+\dots+\varphi_k.$$

Przy ustalonym $k\in\mathbb{N}$ wyżej określone odwzorowania tworzą przestrzeń wektorową oznaczamy $W^k(E;F)$ nazywamy przestrzenią wielomianów stopnia co najwyżej k.

Uwagi 6.14

(1) Jeśli w 6.12 $\varphi_k \neq 0$, to k - nazywamy stopniem φ. Jako stopień wielomianu 0 przyjmujemy dowolne $k \in \mathbb{N}$

(2) Łatwo sprawdzić, że dla $E = \mathbb{K}^m$ oraz $F = \mathbb{K}$ dostajemy $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_m]$ (ćw)

4. Rozwinięcie na wzór Taylora potęgi wielomiany.

Niech E, F - p. Banacha nad $\mathbb{K}$, $A \subset E$, $a \in A$
$f : A \longrightarrow F$ jest n-krotnie różniczkowalne w punkcie a. Wtedy mamy.

$$f(a+h) = \varphi(h) + o(\|h\|^n) \text{ gdzie.}$$

$$\varphi(h) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) \cdot (h)^k$$

Widzimy zatem, że odwzorowania

$$E \ni h \longrightarrow \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) \cdot (h)^k \in F \quad \text{dla } k = 1, \dots, n$$

są wielomianami jednorodnymi stopnia k.
Ponadto podane są one w postaci $\frac{1}{k!} f^{(k)}(a) \circ \Delta_k$
$k = 1, \dots, n$ gdyż pochodne w punkcie a są odwzorowaniami symetrycznymi! Ostatecznie

$$f(a+h) = \varphi(h) + o(\|h\|^n), \quad h \in A - a.$$

gdzie $\varphi \in W^n(E; F)$ i φ - jest ciągłe.

§4. Szereg Taylora.

1. Sytuacja ogólna.

E, F - przestrzenie Banacha nad $\mathbb{K}$, $A \subset E$, $a \in A$

$f: A \to F$ ma w punkcie a pochodne wszystkich rzędów. Możemy wtedy wypisać dla funkcji f wyrażenie szereg funkcyjny na E

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a).(h)^n =$$

$$= f(a) + \frac{1}{1!} f^{(1)}(a).h + \frac{1}{2!} f^{(2)}(a).(h)^2 + \dots$$

związany z funkcją f. W stosownie małych otoczeniach punktu a mamy spełnione założenia wszystkich wzorów Taylora, ale czy wiadomo jaki jest związek tego szeregu z funkcją f? W ogólnym przypadku trudno o tym mówić poza jednym tylko niewątpliwym faktem, że dla $h = 0$ mamy jego zbieżność do $f(a)$.

2. Szereg Taylora funkcji na $\mathbb{K}^m$

Będąc w przypadku $E = \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, $F = \mathbb{R}$, $a = 0$ $A = \mathbb{R}^m$ rozpatrujemy funkcje $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ kl C^∞. Oznaczmy zbiór tych funkcji przez $C^\infty(\mathbb{R}^m)$

Biorąc $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ tworzymy

$$T(f) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} \frac{1}{\alpha!} (D^\alpha f)(a) X^\alpha$$

rozpatrywany jako rodzina funkcji indeksowanych $\alpha \in \mathbb{N}^m$

Patrząc algebraicznie możemy napisać, że $T(f) \in \mathbb{R}[[X_1, \dots, X_m]]$, to znaczy, że $T(f)$ jest tak zwanym szeregiem formalnym m-zmiennych rzeczywistych.

Sytuację, którą tu dostajemy dobrze opisuje słynne

Twierdzenie Borela

Odwzorowanie $T : C^\infty(\mathbb{R}^m) \ni f \longrightarrow T(f) \in \mathbb{R}[[X_1, \dots, X_m]]$ jest surjekcją.

Możemy zatem dla funkcji $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ z góry zadać wszystkie pochodne w ustalonym punkcie. Jak tutaj w punkcie $a = 0$

W przypadku $C^\infty(\mathbb{C}^m)$ dostajemy przestrzeń $\mathcal{O}(\mathbb{C}^m)$ cudzysłowitych funkcji holomorficznych i otrzymywane szeregi będą zbieżne na $\mathbb{C}^m$, czyli na pewno odwzorowanie takie nie jest surjekcją. W przypadku $\mathbb{C}^m$ i funkcji mających wszystkie pochodne w ustalonym punkcie a np. $a = 0$ też jako wynik brania szeregu $T(f)$ dostaniemy szeregi potęgowe o środku w punkcie a, zbieżne w pewnym otoczeniu a.

Z teorii funkcji holomorficznych wynika, że funkcja f - nieskończenie razy różniczkowalna w punkcie a jest holomorficzna w otoczeniu tego punktu, co pewnie będzie dowodzone w przyszłym roku akademickim.

Zatem szeregi Taylora w sensie zespolonym w punkcie $a \in \mathbb{C}^m$ mają funkcje określone w otoczeniu a mające w a kiełek holomorf.

3. Szeregi Taylora funkcji jednej zmiennej

Niech $a \in A \subset \mathbb{K}$, $f: A \to \mathbb{K}$ ma wszystkie pochodne w punkcie a. Jako $T(f)$ dostajemy szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(z-a)^n$.

czyli obiekt, który znamy już dość dokładnie.

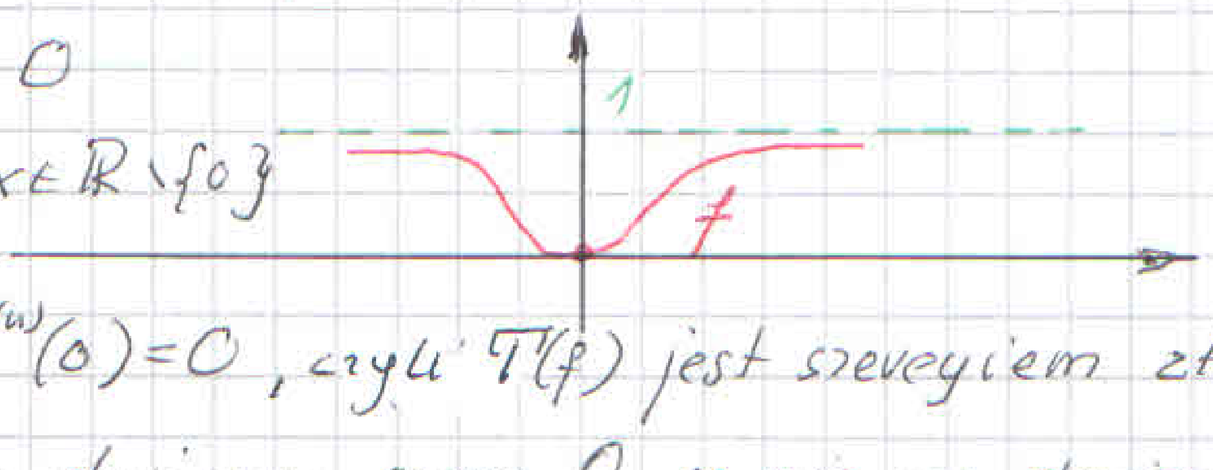
Rozpatrujemy na wstępie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ i przypadki:

(A) $T(f)$ ma zerowy promień zbieżności. Istnienie tych przypadków daje nam Twierdzenie Borela. Nie mamy tutaj sumy szeregu do porównania z wartościami funkcji.

(B) $T(f)$ ma dodatni promień zbieżności. Jeśli f jest analityczna w pewnym otoczeniu U punktu a, to dla $r>0$, takich, że $(a-r, a+r) \subset U$ suma $T(f)$ na tym przedziale odtwarza wartości f. Tak dobrze nie jest jednak zawsze o czym mówi kolejny przypadek

(C) $T(f)$ ma dodatni promień zbieżności, ale jego suma ma niewiele wspólnego z funkcją f. Tak mamy dla.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{cases}$$



Mamy $\forall n \in \mathbb{N}: f^{(n)}(0) = 0$, czyli $T(f)$ jest szeregiem złożonym z funkcji zerowych dającym sumę 0, co nie ma dużego związku z f.

W przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ jeśli f ma drugą pochodną w a więc musi mieć pierwszą pochodną w otoczeniu a, a to z teorii funkcji holomorficznych daje informację, że $\exists U$-ot a : $f|U$ - jest holomorficzna. czyli istnieje $r>0$ takie, że na $K(a,r)$ suma $T(f)$ odtwarza f.

§5. Ekstrema lokalne funkcji rzeczywistych

1. Przygotowanie.

W tym punkcie wykorzystamy klasyczne definicje ekstremów lokalnych wprowadzone w okazji rachunku różniczkowego jednej zmiennej. Można je znaleźć w AM2, Rozdział 3, §6 str. 3-40 dla funkcji określonych na przestrzeni metrycznej. Ta ogólność nam zupełnie wystarcza. W razie potrzeby możemy je przenieść na przestrzenie topologiczne bez istotnych zmian.

Kolejnym pojęciem potrzebnym nam tutaj jest tak zwana określoność wielomianów (form) jednorodnych na przestrzeniach Banacha nad $\mathbb{R}$.

Niech E będzie p. Banacha nad $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ oraz $\varphi \in Q^k(E;\mathbb{R})$

Definicja 6.15. Mówimy, że φ jest:
(1) nieujemny, gdy $\forall h \in E : \varphi(h) \geq 0$,
(2) niedodatni, gdy $\forall h \in E : \varphi(h) \leq 0$,
(3) dodatni, gdy $\forall h \in E \setminus \{0\} : \varphi(h) > 0$,
(4) ujemny, gdy $\forall h \in E \setminus \{0\} : \varphi(h) < 0$,
(5) określony dodatnio, gdy $\exists c > 0 \ \forall h \in E : \varphi(h) \geq c\|h\|^k$
(6) określony ujemnie, gdy $\exists c > 0 \ \forall h \in E : \varphi(h) \leq -c\|h\|^k$

Uwagi 6.16
(1) Jeśli k - nieparzyste i φ spełnia któryś z warunków 6.15 to $\varphi = 0$
(2) Jeśli E - skończenie wymiarowa, to (3) $\Leftrightarrow$ (5), (4) $\Leftrightarrow$ (6) (ćw).
(3) Wprowadzone nazwy nie są jedynymi stosowanymi dla tych obiektów.

2. Warunki konieczne istnienia ekstremów lokalnych

Twierdzenie 6.17

Z: E - przestrzeń Banacha nad $\mathbb{R}$, $A \subset E$, $f: A \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$
$a \in A$, f - jest n-krotnie różniczkowalne w punkcie a.
$f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$, $f^{(n)}(a) \neq 0$
f - ma minimum (maksimum) lokalne w punkcie a

T: $f^{(n)}(a) \circ \Delta_n$ jest nieujemny (niedodatni).

D: Dowód poprowadzimy dla minimum lokalnego w punkcie a. Przypuśćmy, że $h \in E$ i $f^{(n)}(a).(h)^n < 0$
Wybierzmy $\varepsilon > 0$ tak aby $(a - h\varepsilon, a + h\varepsilon) \subset A$ i weźmy funkcję $g: (-\varepsilon, \varepsilon) \ni t \to f(a+th) \in \mathbb{R}$, która ma minimum lokalne w punkcie 0.
Wzór Taylora z resztą Peano w punkcie a dla f daje nam równość

$$f(a+th) = f(a) + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a).(th)^n + \xi(th)\|th\|^n$$

gdzie $\xi: A - a \to \mathbb{R}$, $\xi(0) = 0$, ξ - ciągła w 0.

Mamy zatem

$$g(t) = g(0) + c \cdot t^n + \xi(th)\|h\|^n |t|^n$$

gdzie $c = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a).(h)^n < 0$
Dla $t > 0$ dostajemy.

$$g(t) = g(0) + (c + \xi(th)\|h\|^n) t^n < g(0)$$

dla dostatecznie małych t, co jest sprzeczne z faktem, że g ma minimum lokalne w 0.
Drugi przypadek dowodzimy analogicznie

Uwaga 6.18. Możemy zastosować 6.17 w punkcie dla $n=1$ co dając nieujemność lub nieujemność $f'(a)$ (k nieparzyste) pociąga też $f'(a)=0$

3. Warunki wystarczające istnienia ekstremów lokalnych.

Twierdzenie 6.19

Z: E - przestrzeń Banacha nad $\mathbb{R}$, $A \subset E$, $f: A \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$
$a \in A$, f - n-krotnie różniczkowalna w punkcie a
$f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$
$f^{(n)}(a) \circ \Delta_n$ jest określona dodatnio (ujemnie)

T: f - ma silne minimum (maksimum) lokalne w punkcie a.

D: Załóżmy, że $f^{(n)}(a) \circ \Delta_n$ jest dodatnio określona.
czyli istnieje $c > 0$ takie, że
$\forall h \in E: \frac{1}{n!} f^{(n)}(a).(h)^n \geq c\|h\|^n$

Ze wzoru Taylora z resztą Peano mamy.

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a).(h)^n + \xi(h)\|h\|^n$$

gdzie $\xi: A-a \to \mathbb{R}$, $\xi(0)=0$, ξ - ciągła w 0
Zatem

$$f(a+h) - f(a) \geq c\|h\|^n + \xi(h)\|h\|^n = (c+\xi(h))\|h\|^n$$

Wybierzmy $r>0$ tak aby $c+\xi(h) > 0$ dla $h \in K(0,r)$
Wtedy dostajemy $f(a+h) - f(a) > 0$ dla $h \in K(0,r) \setminus \{0\}$
co kończy dowód.
Drugi przypadek pokazujemy analogicznie

Uwaga 6.20 Funkcja $f: \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longrightarrow x^2+y^4 \in \mathbb{R}$ ma silne ekstremum bez określoności drugiej pochodnej w punkcie $(0,0)$. Jak widać $f''(0) \circ \Delta_2$ jest tylko nieujemna.

4 Efektywne kryteria dodatniej określoności w przypadku przestrzeni skończenie wymiarowych.

Gdy E jest sk. wymiarowa możemy w jej miejsce rozpatrywać $\mathbb{R}^m$ dla pewnego $m = \dim E \geqslant 1$. W tej sytuacji odwzorowania dwuliniowe i tworzone wielomiany jednorodne są ciągłe zaś badanie określoności sprowadza się do badania dodatniości lub ujemności i wielomości z algebry liniowej.

Ograniczymy się tutaj do komentarzy przy $n=2$ czyli do przypadku $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ dwukrotnie różniczkowalnej w punkcie $a \in A$ dla której mamy spełniony warunek konieczny $f'(a) = 0$. Druga pochodna

$$f''(a) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,m}} = M$$

jest reprezentowana przez symetryczną macierz M wzorem

$$f''(a).(h,k) = [k_1,\dots,k_m] M \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix}$$

Dalej interesuje nas więc forma kwadratowa

$$\varphi(h) = f''(a).(h,h) = [h_1,\dots,h_m] M \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix},$$

czyli inaczej mówiąc wielomian jednorodny stopnia 2,

Po sprowadzeniu φ do postaci kanonicznej w pewnym układzie współrzędnych dostajemy

$$\varphi(y_1, \dots, y_m) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_m y_m^2$$

gdzie $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ są wartościami własnymi macierzy M.

Widzimy więc, że dodatniość φ mamy przy wszystkich wartościach własnych dodatnich zaś ujemność wszystkich wartościach własnych ujemnych.

Inne znane kryterium opiera się na znakach tzw. minorów głównych macierzy M. Można je znaleźć w każdym zaawansowanym kursie algebry liniowej i wielu podręcznikach jak np. A. Mostowski, M. Stark, „Elementy algebry wyższej" czy J. Komorowski, „Od liczb zespolonych do tensorów, spinorów algebr Liego i kwadryk".

Korzystając z pierwszej drogi w przypadku $m=2$ dostajemy równanie charakterystyczne:

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) - \lambda & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

czyli

$$\lambda^2 - \lambda (\mathrm{Tr} M) + \det M = 0$$

Co tutaj daje trzy możliwości:

(1) $\det M > 0$, pierwiastki są tych samych znaków. Dodatnie gdy $\mathrm{Tr} M > 0$ zaś ujemne gdy $\mathrm{Tr} M < 0$. A ponieważ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)\right)^2 > 0$, to o znaku decyduje $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$.

(2) $\det M < 0$ mamy pierwiastki różnych znaków

wtedy funkcja f nie może mieć lokalnego ekstremum.

(3) $\det M = 0$, jest wartość własna zerowa i do badania ekstremum potrzebne są inne techniki.

5. Wartości najmniejsze i największe funkcji na zbiorach zwartych w $\mathbb{R}^m$.

Rozpatrujemy K zwarty w $\mathbb{R}^m$, $f: K \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i różniczkowalna w punktach $\operatorname{int} K$. Poszukujemy wartości największej i najmniejszej funkcji f na K. Taką sytuację spotykamy w wielu problemach analizy matematycznej i innych gałęzi matematyki. Zauważmy jak to możemy wykonać.

Niech $C = \{a \in \operatorname{int} K : f'(a) = 0\}$ oznacza tak zwany zbiór punktów krytycznych f / $\operatorname{int} K$. Wartości najmniejsza i największa na pewno istnieją i jeśli leżą w $\operatorname{int} K$, to mamy w tym punkcie ekstremum lokalne. Stąd tutaj dostajemy inkluzję.

$$\{\min f(K), \max f(K)\} \subset f(C \cup \partial K).$$

Widzimy z niej, że warto zbadać f / ∂K i tam znaleźć wartość najmniejszą i największą, ale do tego poznane metody nie wystarczają. Pomocne będą techniki ekstremów warunkowych (związanych), które pojawią się w ramach AM3 w kolejnym rozdziale.

Rozdział 7. Podrozmaitości $\mathbb{K}^m$

§1. Uwagi o rozmaitościach abstrakcyjnych

1. Podstawowe definicje i przykłady.

Pojęcie pojawiło się w pracach Riemanna w XIX w. Obecnie te obiekty nazywane są powierzchniami Riemanna. Formalne definicje znajdujemy około 1912 roku u Weila zaś teorię rozwiną Whitney dopiero po 1936 roku. W teorii jest wiele pojęć o podobnych nazwach i różnych znaczeniach. Warto ustalić własne nazewnictwo i konsekwentnie je dalej w miarę rozwoju teorii.

Niech M będzie niepustą przestrzenią topologiczną Hausdorffa. Ustalmy $\mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}$ oraz $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

Definicja 7.1 Rodzinę $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ nazywamy *m-wymiarowym atlasem klasy C^k na M* jeśli:

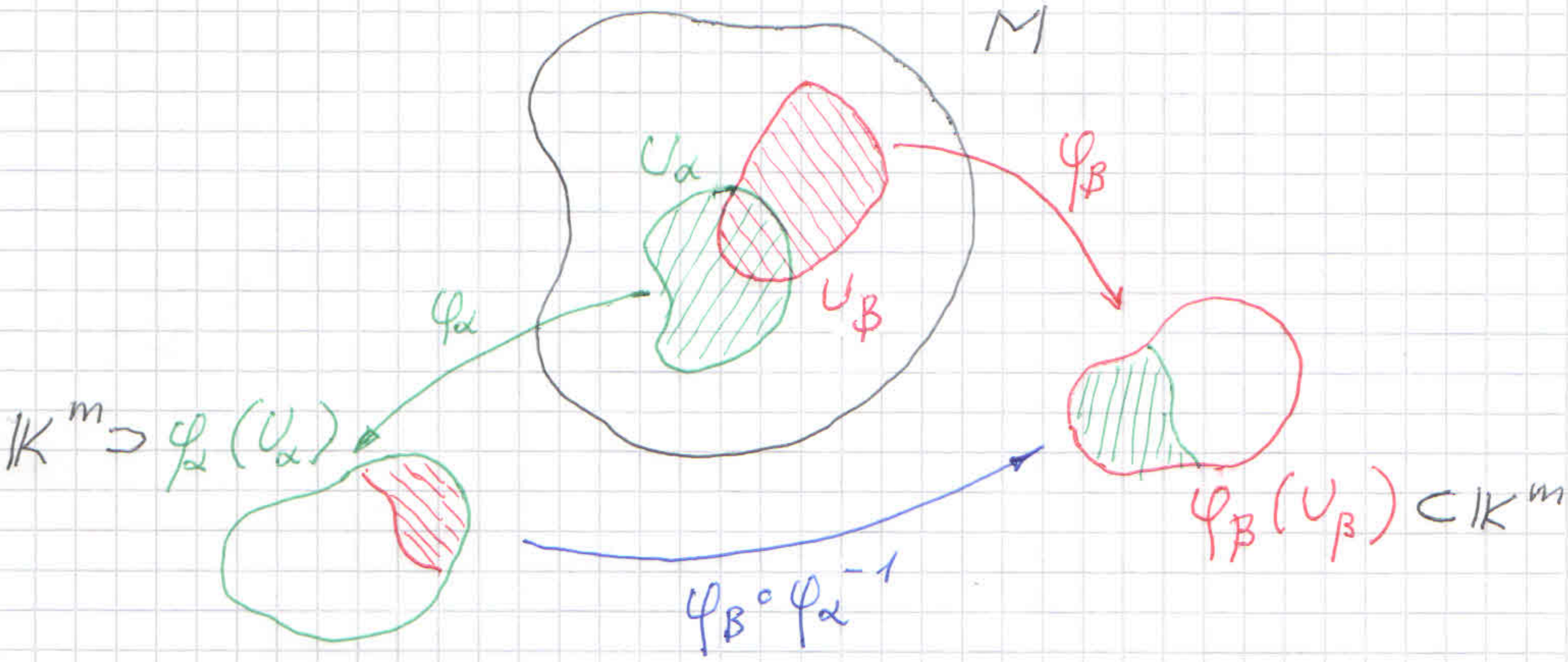
(1) $\forall \alpha \in A$: U_α jest niepustym podzbiorem otwartym M.

(2) $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$.

(3) $\forall \alpha \in A$: φ_α jest homeomorfizmem przekształcającym U_α na pewien otwarty podzbiór $\mathbb{K}^m$.

(4). Jeśli $\alpha, \beta \in A$ i $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ to odwzorowanie $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ jest kl. C^k.

<u>Uwaga 7.2</u> Rozpatrzmy sytuację z punktu (4) poprzedniej definicji 7.1



W zasadzie zamiast $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ powinno się tutaj pojawić złożenie $\varphi_\beta \circ (\varphi_\alpha | U_\alpha \cap U_\beta)^{-1}$, ale jeśli krótszą wersję potraktujemy jako złożenie relacji, to zapis jest poprawny.

Warto również zauważyć, że gdy $k=0$, to punkt (4) definicji jest konsekwencją punktów poprzednich.

Zbiór atlasów określonego wymiaru i klasy na M, przy ustalonym $\mathbb{K}$, jest częściowo uporządkowany względem naturalnej inkluzji. Elementy maksymalne w tej relacji się nazywane <u>strukturami</u> rzeczywistymi (zespolonymi) m-wymiarowymi klasy C^k na M. Bez trudu można pokazać, że każdy atlas zawiera się w dokładnie jednej strukturze i mówimy wtedy, że on ją <u>generuje</u>.

Definicja 7.3 Rzeczywistą (zespoloną), m-wymiarową rozmaitością klasy C^k nazywamy niepustą przestrzeń topologiczną Hausdorffa M wraz z m-wymiarową rzeczywistą (zespoloną) strukturą $\mathcal{A}$ klasy C^k. Elementy struktury $\mathcal{A}$ nazywamy mapami lub lokalnymi układami współrzędnych

Uwagi 7.4

(1) Ze względów formalnych dopuszczamy czasami rozmaitość $M = \emptyset$ z $\mathcal{A} = \emptyset$ przy dowolnej klasie przyjmując $\dim \emptyset = -1$.

(2) Definicja jest identyczna dla $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$. Łatwo stąd dostać informację, że każda rozmaitość zespolona jest rozmaitością rzeczywistą tej samej klasy i dwukrotnie większego wymiaru bo $\mathbb{C}^m = \mathbb{R}^{2m}$. Jednak w klasie rozmaitości zespolonych wszystkie rozmaitości klasy C^1 są klasy C^∞ a nawet analityczne (łatwo określić taką klasę w oparciu o ogólny wzór).

(3) Zawsze przyjmujemy $\mathbb{K}^0 = \{0\}$!

(4) Wspomniane wcześniej powierzchnie Riemanna, to według tego nazewnictwa zespolone, 1-wymiarowe spójne rozmaitości klasy C^1 (więc kl. C^∞ i analityczne). Występuje tutaj bardzo ciekawy fakt, bo okazuje się że spełniają II Ap (słynne Twierdzenie Radó, 1925) Dla wymiaru 2 rozmaitości zespolone spójne nie mają tej własn.

(5) Czasami w definicji rozmaitości opuszcza się założenie T_2 zuś bardzo często utrzymując T_2 dodaje się jeszcze II Ap.

(6) Jeśli $l, k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ oraz $l < k$, to każda rozmaitość klasy C^k ma naturalną strukturę rozmaitości klasy C^l ($\mathbb{K}$ i wymiar ustalone). Rozmaitości klasy C^0 nazywane są topologicznymi.

(7) Stawiane są ogólniejsze definicje, w których $\mathbb{K}^m$ jest zastępowane przestrzenią Banacha. Wtedy konstrukcja rozmaitości jest tutaj stosowana bez większych zmian.

Przykłady 7.5

(1) $\Omega = M$ jest podzbiorem otwartym w $\mathbb{K}^m$.
$\varphi = id_\Omega : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$, $k = \infty$
Atlas $\mathcal{A} = \{(\Omega, \varphi)\}$ wyznacza strukturę klasy C^∞ złożoną z C^∞-dyfeomorfizmów określonych na podzbiorach otwartych Ω.

(2) Zmniejszając w (1) liczbę k generujemy szersze struktury podrozmaitości kl C^k, $k \in \mathbb{N}$ złożone z C^k-dyfeomorfizmów określonych na podzbiorach otwartych zbioru Ω.

(3) $M = \mathbb{R}$, $\varphi : \mathbb{R} \ni x \longrightarrow \varphi(x) = x^3 \in \mathbb{R}$. Wtedy atlas $\{(\mathbb{R}, \varphi)\}$ generuje jednowymiarową strukturę rzeczywistą klasy C^∞. Jednak struktura różna od skonstruowanej w (1) tzn. dla $\varphi = id_{\mathbb{R}}$

(4) Sfera Riemanna. Niech $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ będzie skonstruowaną wcześniej przestrzenią metryczną. Rozpatrujemy na $\hat{\mathbb{C}}$ atlas złożony z dwóch odwzorowań $\varphi_1 : \mathbb{C} \ni z \to z \in \mathbb{C}$, $\varphi_2 : (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\} \ni z \to \begin{cases} 0, & z = \infty \\ 1/z, & z \in \mathbb{C} \end{cases} \in \mathbb{C}$. Są to homeomorfizmy oraz $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \ni z \to 1/z \in \mathbb{C}$, co daje nam strukturę zespoloną, klasy C^∞ (analityczną). Dostajemy tzw. zwartą powierzchnię Riemanna.

(5) Przestrzenie rzutowe i rozmaitości Grassmanna.

Jeśli V jest przestrzenią wektorową, m-wymiarową nad $\mathbb{K}$, $m \geq 1$, to przez $\mathbb{P}(V)$ oznaczamy klasyczną "przestrzeń rzutową" zbudowaną na V, czyli

$$\mathbb{P}(V) = \{\mathbb{P}(V) = \mathbb{K}v : v \in V \setminus \{0\}\}$$ z klasyczną topologią oraz strukturą klasy C^∞.

Jeśli teraz $p \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq m$ to budujemy

$$\widetilde{G}_p(V) = \begin{cases} \mathbb{K}, & p = 0 \\ \{v_1 \wedge \ldots \wedge v_p : v_1, \ldots, v_p \in V\}, & p \geq 1, \end{cases}$$

zwany zbiorem p-wektorów prostych w $\Lambda_p V$, a następnie

$$G_p(V) = \{\xi \subset V : \xi \text{ - jest } p\text{-wymiarową podprzestrzenią } V\} =$$
$$= \{\mathbb{P}(\xi) : \xi \in \widetilde{G}_p(V)\} \subset \mathbb{P}(\Lambda_p V).$$

Na tym zbiorze w naturalny sposób zadajemy topologię i strukturę klasy C^∞ (analityczną) wymiaru $p(m-p)$ $G_p(V)$ - nazywamy rozmaitościami Grassmanna.

(6) Wstęga Möbiusa. Znany od 1858 r., opisany przez Augusta Ferdynanda Möbiusa obiekt, będący dwuwymiarową rzeczywistą rozmaitością, która nie jest orientowalna. Szczegóły pojawią się później przy pojęciu orientowalności.

2. Podrozmaitości rozmaitości abstrakcyjnych.

Wraz z grupami, pierścieniami, ciałami pojawiają się ich podgrupy, podpierścienie, podciała. Podobnie z przestrzeniami topologicznymi metrycznymi czy wektorowymi mamy ich podprzestrzenie.

Analogicznie w teorii rozmaitości pojawi się tuh zwane podrozmaitości

Rozpatrzmy więc rozmaitość M, m-wymiarową klasy C^k ze struktury $\mathcal{A}$. Ustalmy $n \leq m$.

Definicja 7.6 Podzbiór niepusty N rozmaitości M nazywamy jej n-wymiarową podrozmaitością, jeśli dla każdego punktu $a \in N$ istnieje jego otoczenie U oraz określona na nim mapa $\varphi: U \longrightarrow \mathbb{K}^m$ taka, że $U \cap N = \varphi^{-1}(\{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{K}^m : x_{n+1} = \dots = x_m = 0\})$

Uwagi 7.7

(1) Jeśli ϕ traktujemy jako rozmaitość, to należy go również traktować jako podrozmaitość wymiaru -1 każdej rozmaitości.

(2) Wykorzystując mapy występujące w definicji możemy zawsze na podrozmaitości wprowadzić strukturę rozmaitości tej samej klasy co rozmaitość wyjściowa. Wykonujemy to przez zacieśnienia map i odrzucenie zbędnych (zerowych) składowych.

(3) W geometrii różniczkowej jest bardzo wygodna sytuacja gdy obiektem zainteresowań są (zwykle) rozmaitości i podrozmaitości klasy C^∞

(4) W naszym wykładzie zajmować będziemy się podrozmaitościami $\mathbb{R}^m$ a wtedy o klasie podrozmaitości N decydować będą własności N jako zbioru w $\mathbb{R}^m$. W tej sytuacji mapy mogą, ale nie muszą być podstawą wszelkich dociekań.

Przykłady 7.8

(1) Jeśli N jest podzbiorem otwartym rozmaitości M, to będzie jej podrozmaitością tego samego wymiaru co wyjściowa rozmaitość M

(2) Na skończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej V istnieje naturalna struktura rozmaitości klasy C^∞. Podprzestrzenie afiniczne M będą wtedy jej klasycznymi podrozmaitościami.

(3) Sfery w przestrzeniach $\mathbb{R}^m$ względem metryki euklidesowej są $m-1$ wymiarowymi podrozmaitościami kl C^∞.

(4) $N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = |x|^3\}$ jest podrozmaitością klasy C^2, jeśli $\mathbb{R}^2$ rozpatrzymy ze strukturą klasy C^2.

§2. Odwzorowania o stałym rzędzie

1 Główne twierdzenie

Przy ustalonym $\mathbb{K}$, dla $p \in \mathbb{N}$ i $r > 0$ wprowadzamy oznaczenia

$$\Delta^p = \begin{cases} \{0\}, & p = 0 \\ \{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p : |x_i| < 1, i = 1, \dots, p\}, & p \geq 1 \end{cases}$$

$$\Delta_r^p = r \cdot \Delta^p$$

Zachodzi następujące kluczowe twierdzenie

Twierdzenie 7.9 (o rzędzie)

Z: Ω - otwarty w $\mathbb{K}^n$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}^m$ klasy C^k, gdzie $n, m \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, 2, \dots, \infty\}$

$d \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \Omega : \operatorname{rzęd} f'(x) = d$, $a \in \Omega$

T: Istnieją:

- U otoczenie otwarte punktu a w Ω,
- W otoczenie otwarte $f(a)$ w $\mathbb{K}^m$,
- dyfeomorfizmy $v : \Delta^n \longrightarrow U$, $w : W \longrightarrow \Delta^m$ klasy C^k

takie, że $f(U) \subset W$ oraz odwzorowanie $g = w \circ (f/U) \circ v$ ma postać $g : \Delta^n \ni (x_1, \dots, x_n) \longrightarrow (x_1, \dots, x_d, 0, \dots, 0) \in \Delta^m$.

D: Jeśli wśród liczb n, m, d jest 0, to odwzorowanie f jest stałe w pewnym otoczeniu punktu a oraz. teza zachodzi w oczywisty sposób. Dalej rozpatrujemy sytuację gdy $m, n, d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Bez straty ogólności możemy założyć, że $a = 0$ i $f(a) = 0$ oraz, że dla $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ mamy

(#) $f'(0) \cdot (x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_d, 0, \dots, 0)$.

Aby doprowadzić do takiej sytuacji dokonamy podstawienia w f odwzorowania $L_1 + a : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ gdzie $L_1 : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ jest izomorfizmem liniowym oraz obtożenia f odwzorowaniem $L_2 - f(a) : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m$ gdzie $L_2 : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m$ jest izomorfizmem liniowym. W tej sytuacji należy dobrać L_1 i L_2 tak aby odwzorowanie $L_2 \circ f'(a) \circ L_1$ miało postać (#).

Konstrukcję rozpoczynamy wybierając bazy:

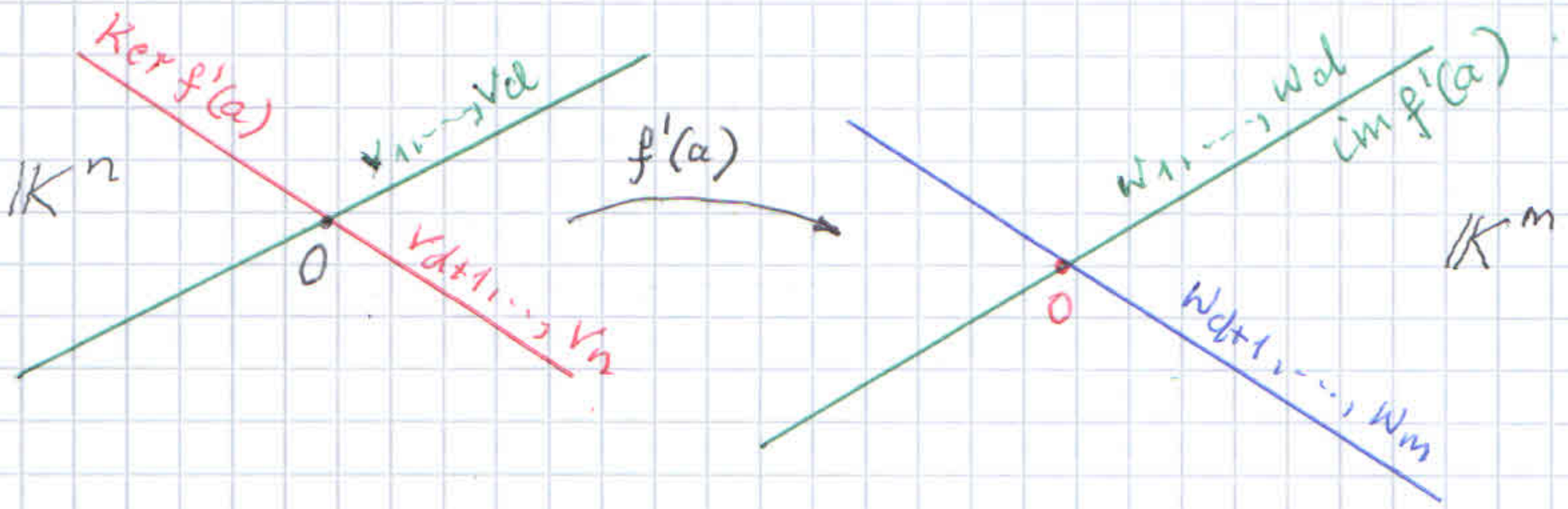
$v_1, \dots, v_n$ w $\mathbb{K}^n$,

$w_1, \dots, w_m$ w $\mathbb{K}^m$,

tak aby $v_{d+1}, \dots, v_n \in \operatorname{Ker} f'(a)$ oraz

$w_i = f'(a) \cdot v_i$ dla $i = 1, \dots, d$.

Jest to możliwe gdyż $\dim \operatorname{Ker} f'(a) = n - d$



Aby zakończyć konstrukcję zadajemy L_1 i L_2 tak aby:

- baza kanoniczna $\mathbb{K}^n$ przeszła przez L_1 w $v_1, \dots, v_n$,
- baza $w_1, \dots, w_m$ przeszła w bazę kanoniczną $\mathbb{K}^m$

Wtedy elementy $e_1, \dots, e_d$ bazy kanonicznej $\mathbb{K}^n$ przechodzą w pierwszych d elementów bazy kanonicznej $\mathbb{K}^m$ zaś pozostałe przejdą w $0 \in \mathbb{K}^m$, co dla nam (#).

Określamy następnie odwzorowanie.

$$V: \Omega \ni x \longrightarrow (f_1(x), \dots, f_d(x), x_{d+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$$

gdzie $f = (f_1, \dots, f_m)$. Łatwo zauważyć, że V jest klasy C^k oraz $V'(0) = id_{\mathbb{K}^n}$. Zatem na podstawie twierdzenia o lokalnym dyfeomorfizmie istnieje U otoczenie 0 w Ω oraz $r > 0$ takie, że odwzorowanie $V/U : U \longrightarrow \Delta_r^n$ jest C^k dyfeomorfizmem. Dostajemy wtedy odwzorowania określone na $\tilde{U}$:

$$\tilde{U} \ni x = (x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{f/U} (f_1(x), \dots, f_d(x), f_{d+1}(x), \dots, f_m(x)) \in \mathbb{K}^m$$

$$\xrightarrow{V/U} (f_1(x), \dots, f_d(x), x_{d+1}, \dots, x_n) \in \Delta_r^n$$

Wtedy określając $\tilde{v} = (V/U)^{-1} : \Delta_r^n \longrightarrow \tilde{U}$ widzimy, że złożenie $f \circ \tilde{v}$ ma postać

$$(f \circ \tilde{v})(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_d, g_{d+1}(x), \dots, g_m(x))$$

dla $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Delta_r^n$ gdzie $g_{d+1}, \dots, g_m$ są klasy C^k.

Skoro $f'(x)$ ma rząd d dla $x \in \tilde{U}$, to również

$$\forall x \in \Delta_r^n : \text{rząd } (f \circ \tilde{v})'(x) = d$$

Analizując zatem postać macierzy pochodnej dla $x \in \Delta_r^n$

$$(f \circ \tilde{v})'(x) = \begin{array}{c} \\ d \\ m-d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} d & n-d \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} * & & * \\ \vdots & & \vdots \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}\right] \end{array}$$

← Ta część musi być równa 0

dostajemy informację, że $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) = 0$ dla $x \in \Delta_r^n$ oraz $i = d+1, \dots, m$ $j = d+1, \dots, n$.

Stąd otrzymujemy równość

$$g_i(x_1,\dots,x_n) = g_i(x_1,\dots,x_d,0,\dots,0)$$

dla $i = d+1,\dots,m$ oraz $x \in \Delta_r^n$.

Rozpatrujemy następnie odwzorowanie

$$\tilde{N} : \Delta_r^d \times \mathbb{K}^{m-d} \ni (y_1,\dots,y_m) \longmapsto$$

$$\longmapsto (y_1,\dots,y_d, y_{d+1} - g_{d+1}(y_1,\dots,y_d,0,\dots,0),\dots, y_m - g_m(y_1,\dots,y_d,0,\dots,0)) \in$$

$$\in \Delta_r^d \times \mathbb{K}^{m-d}$$

Łatwo zauważyć, że $\tilde{N}$ jest C^k dyfeomorfizmem, a ponadto dostajemy

$$(\tilde{w} \circ (f \circ \tilde{U}))(x_1,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_d,0,\dots,0) \text{ dla } x \in \Delta_r^n$$

W tej sytuacji określamy:

$$N = \tilde{N}^{-1}(\Delta_r^d \times \Delta^{m-d}),$$

$$N = (\tfrac{1}{r}\tilde{N}_1,\dots,\tfrac{1}{r}\tilde{N}_d, \tilde{N}_{d+1},\dots,\tilde{N}_m) \text{ dla } \tilde{N} = (\tilde{N}_1,\dots,\tilde{N}_m)$$

$$U : \Delta^n \ni x \longrightarrow \tilde{U}(rx) \in U$$

Wtedy $(W \circ (f|U) \circ U)(x_1,\dots,x_n) = (W \circ (f \circ U))(x_1,\dots,x_n) =$

$$= (x_1,\dots,x_d,0,\dots,0) \text{ dla } x \in \Delta^n,$$

co kończy dowód.

2. Immersje i submersje.

Niech E, F będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$, Ω otwarty w E.

Definicja 7.10 Odwzorowanie $f : \Omega \to F$ nazywamy immersją (submersją) jeśli f jest klasy C^1 oraz $\forall x \in \Omega : f'(x)$ jest injekcją (surjekcją).

Uwaga 7.11 Jeśli Ω jest otwarty w $\mathbb{K}^n$, $f:\Omega \to \mathbb{K}^m$ jest klasy C^1 i dla pewnego $a\in\Omega$ rząd $f'(a)=n$ (rząd $f'(a)=m$), to różniczka jest spełniona ze względu na ciągłość pochodnej w pewnym otoczeniu U punktu a, $U\subset\Omega$. Wtedy $f|U: U\to\mathbb{K}^m$ jest immersją (submersją).

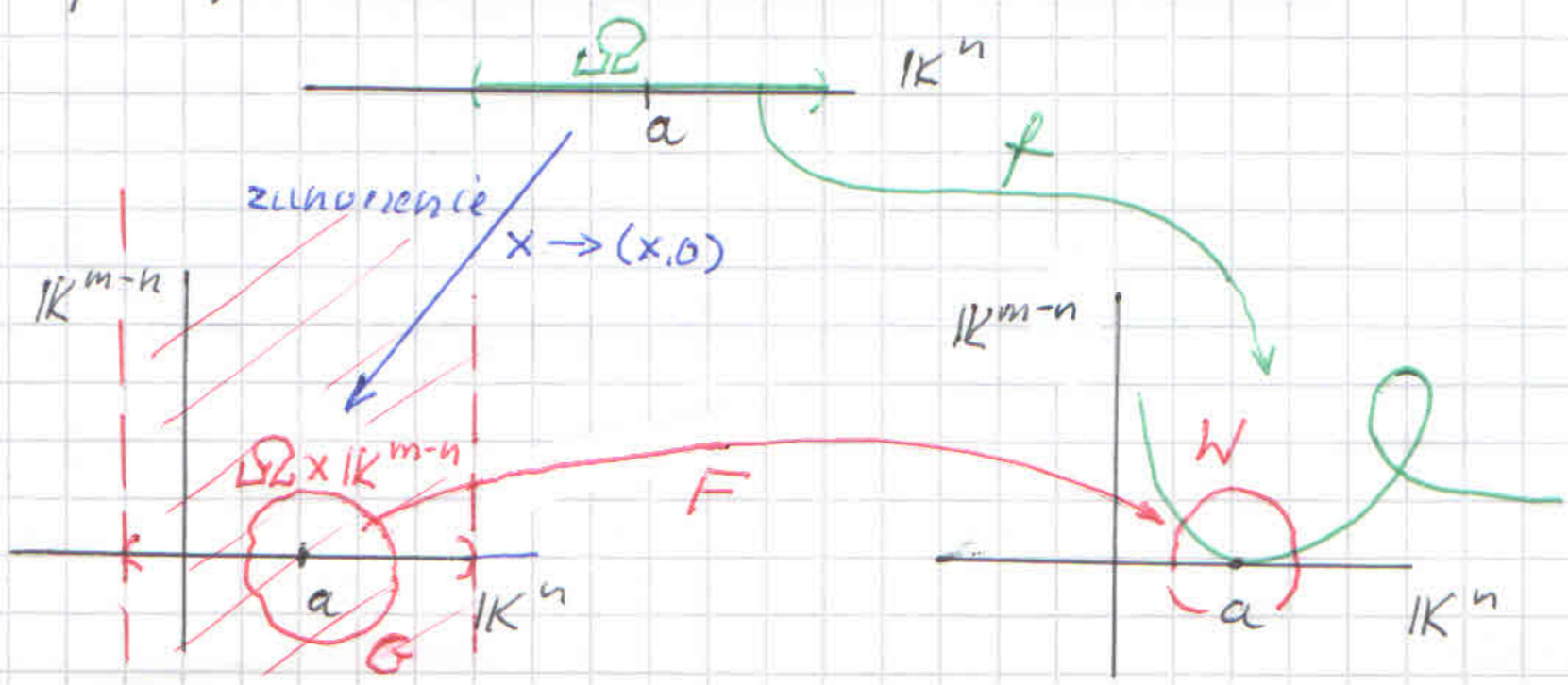
Twierdzenie 7.12 (o immersji).

Z: Ω - otwarty w $\mathbb{K}^n$, $f:\Omega\to\mathbb{K}^m$ immersja klasy C^k
$n,m\in\mathbb{N}$, $k\geq 1$, $a\in\Omega$

T: Istnieją: U otoczenie punktu a w Ω,
W otoczenie punktu $f(a)$ w $\mathbb{K}^m$,
G otwarty w $\mathbb{K}^m$,
$\omega: W\to G$ C^k-dyfeomorfizm
takie, że $f(U)\subset W$ oraz $(\omega\circ(f|U))(x_1,\dots,x_n)=(x_1,\dots,x_n,0,\dots,0)$
dla $(x_1,\dots,x_n)\in U$

D: W tej sytuacji $n\leq m$. Przypadki $n=0$ oraz $n=m$ są oczywiste, więc dalej zajmiemy się sytuacjami gdy $1\leq n<m$. Wykonując wstępnie translację i przekształcenie $\mathbb{K}^m$ przez dyfeomorfizm możemy rozpatrywać dalej przypadki gdy: (1) $f(a)=(a,0)\in\mathbb{K}^n\times\mathbb{K}^{m-n}$
(2) $f'(a).h=(h,0)$ dla $h\in\mathbb{K}^n$

Rozpatrujemy układ odwzorowań



Określamy odwzorowanie

$F: \Omega \times \mathbb{K}^{m-n} \ni (x,y) \longrightarrow (f_1(x), \dots, f_n(x), y_1 + f_{n+1}(x), \dots, y_{m-n} + f_m(x)) \in \mathbb{K}^m$

Mamy $F(a,0) = (a,0)$ oraz $F'(a,0) = id_{\mathbb{K}^m}$

Zatem z twierdzenia o lokalnym dyfeomorfizmie istnieją otoczenia G i W punktu $(a,0)$ takie, że $F|G : G \longrightarrow W$ jest C^k-dyfeomorfizmem. Określamy $w = (F|G)^{-1} : W \longrightarrow G$ oraz dobieramy U, otoczenie punktu a w Ω tak aby $f(U) \subset W$ oraz $U \times \{0\} \subset G$. Biorąc teraz $x \in U$ mamy $f(x) = F(x,0) = (F|0)(x,0)$ skąd $(x,0) = (w \circ f)(x)$ co kończy dowód

Twierdzenie 7.13 (o submersji)

Z: Ω otwarty w $\mathbb{K}^n$, $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{K}^m$ submersja klasy C^k gdzie $n, m \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, $a \in \Omega$

T: Istnieją: U otoczenie otwarte a w Ω,
G otwarty podzbiór $\mathbb{K}^n$,
$v: G \longrightarrow U$ C^k-dyfeomorfizm,
takie, że $(f \circ v)(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m)$ dla $(x_1, \dots, x_n) \in G$

D: W tej sytuacji $m \leq n$. Przypadki $m = 0$ oraz $m = n$ są oczywiste, więc dalej rozpatrujemy sytuację gdy $1 \leq m < n$.
Określamy $F: \Omega \ni x \longrightarrow (f(x), L(x)) \in \mathbb{K}^m \times \mathbb{K}^{n-m}$ gdzie $L: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^{n-m}$ jest liniowe i tak dobrane aby pochodna $F'(a): \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ była izomorfizmem. Dobieramy U - ot. a w Ω oraz G otwarty w $\mathbb{K}^n$ tak, aby $F|U: U \longrightarrow G$ było dyfeomorfizmem kl C^k. Przyjmując teraz $v := (F|U)^{-1} : G \longrightarrow U$ dostajemy tezę.

§3. Podstawowe informacje o podrozmaitościach $\mathbb{K}^m$.

1. Podstawowe definicje

Twierdzenie 7.14

Z: $n, m \in \mathbb{N}$, $n \leq m$, $a \in N \subset \mathbb{K}^m$, $k \in \{1, 2, \ldots, \infty\}$

T: Następujące warunki są równoważne:

(1) Istnieją: V otoczenie otwarte a w $\mathbb{K}^m$,
W otwarty w $\mathbb{K}^m$,
$F: V \longrightarrow W$ C^k dyfeomorfizm.
takie, że $N \cap V = F^{-1}(\{x \in \mathbb{K}^m : x_{n+1} = \ldots = x_m = 0\})$.

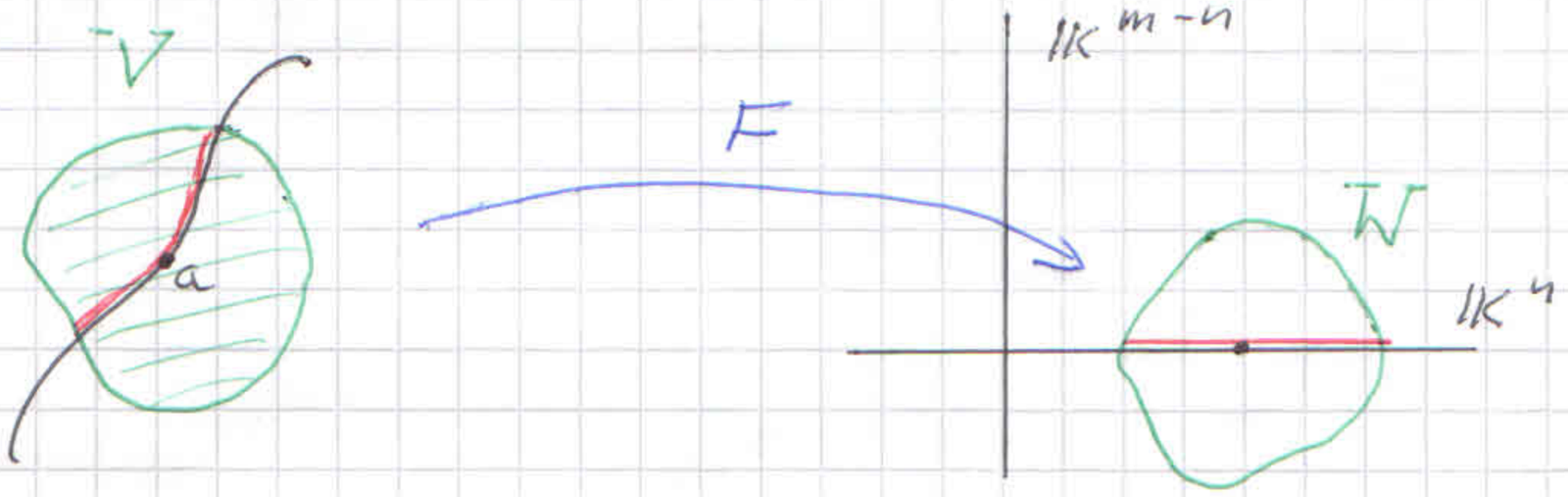
(2) Istnieją: V otoczenie otwarte a w $\mathbb{K}^m$,
$h: V \longrightarrow \mathbb{K}^{m-n}$ submersja klasy C^k,
takie, że $N \cap V = \{x \in V : h(x) = 0\}$.

(3) Istnieją: V otoczenie otwarte a w $\mathbb{K}^m$,
E, F podprzestrzenie $\mathbb{K}^m$, przy czym E jest generowana przez pewne n elementów bazy kanonicznej $\mathbb{K}^m$ zaś F przez pozostałe jej elementy
U zbiór otwarty w E,
$f: U \longrightarrow F$ klasy C^k,
takie, że $N \cap V = \{x + f(x) : x \in U\}$

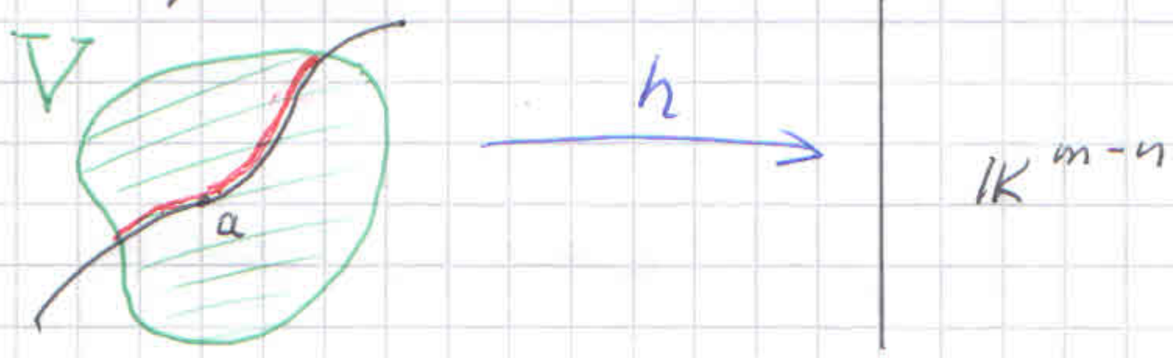
(4) Istnieją: V otoczenie otwarte a w $\mathbb{K}^m$,
G otwarty w $\mathbb{K}^n$,
$g: G \longrightarrow \mathbb{K}^m$ immersja klasy C^k
takie, że $N \cap V = g(G)$ oraz $g: G \longrightarrow g(G)$ jest homeomorfizmem.

Uwaga 7.15 Przed przystąpieniem do dowodu przedstawimy interpretację podany wcześniej.

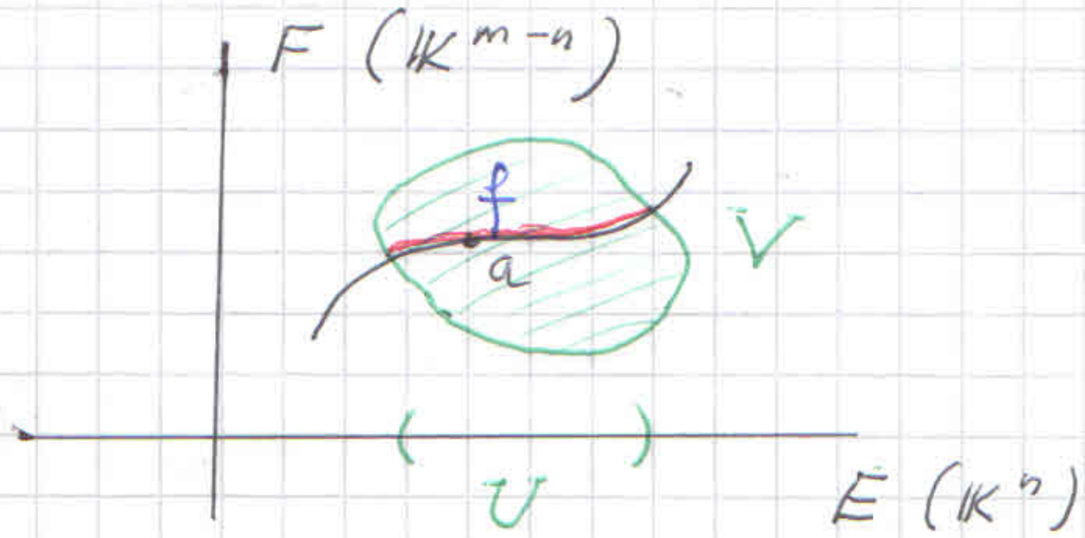
(1) - daje możliwość lokalnego „wypostawania" zbioru N



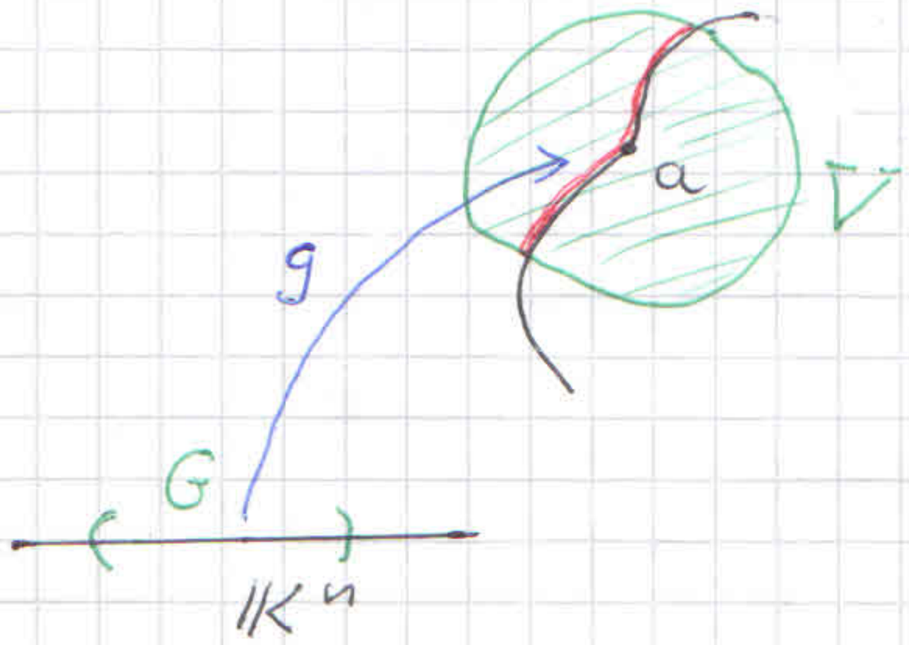
(2) mówi o możliwości wygodnego opisu zbioru N w pobliżu punktu a.



(3) informuje, że N jest lokalnie wykresem funkcji kl C^k



(4) mówi o istnieniu lokalnej parametryzacji zbioru N w pobliżu a.



Dowód twierdzenia 7.14.

Jeśli $n=0$, to każdy z warunków daje tę samą informację, że a jest punktem izolowanym zbioru N. Gdy $n=m$ każdy z warunków oznacza, że $a \in \operatorname{int} N$. Dalej rozpatrywać będziemy więc sytuacje gdy $1 \leq n < m$.

(1) $\Rightarrow$ (2) Niech $F=(F_1,\dots,F_m)$. Przyjmujemy $h=(F_{n+1},\dots,F_m): V \longrightarrow \mathbb{K}^{m-n}$ i widzimy, że dla niego jest spełniony warunek (2).

(2) $\Rightarrow$ (3) Implikacja jest bezpośrednią konsekwencją twierdzenia o funkcjach uwikłanych. Wystarczy tak wybrać zmienne do przestrzeni F aby względem tego zespołu można było zastosować wspomniane twierdzenie. W tym celu wybieramy zmienne tak aby odpowiadający im minor rzędu n macierzy $h'(a)$ (w bazach kanonicznych) nie zerował się.

(3) $\Rightarrow$ (4) Po identyfikacji E z $\mathbb{K}^n$ wybieramy $G=U$ oraz $g: G \ni x \longrightarrow x+f(x) \in N \cap \bar{V}$ (odw. wyliczes). Łatwo sprawdzamy potrzebne warunki.

(4) $\Rightarrow$ (1) Do odwzorowania g stosujemy twierdzenie o immersji dostając potrzebny nam dyfeomorfizm przestający w pewnym otoczeniu punktu a.

Wykazane implikacje kończą dowód. Warto zauważyć, że przy implikacjach (1) $\Rightarrow$ (2) i (3) $\Rightarrow$ (4) nie musimy zmieniać zbioru $\bar{V}$ zaś przy pozostałych może być potrzebne zmniejszenie.

Ustalmy teraz $n, m \in \mathbb{N}$, $n \leq m$ oraz $k \in \{1, 2, \ldots, \infty\}$

Definicja 7.16 Niepusty zbiór $N \subset \mathbb{K}^m$ nazywamy *n-wymiarową podrozmaitością $\mathbb{K}^m$ klasy C^k* jeśli w każdym punkcie $a \in N$ spełnione są warunki równoważne twierdzeniu 7.14.

Uwaga 7.17 Czasami zbiór pusty także nazywamy podrozmaitością nadając mu wymiar -1 oraz dowolną klasę.

Uwagi 7.18

(1) Definicja jest zgodna z podaną wcześniej definicją abstrakcyjną, jeśli na $\mathbb{K}^m$ rozpatrujemy strukturę rozmaitości klasy C^k zadaną przez atlas $\{(\mathbb{K}^m, id_{\mathbb{K}^m})\}$.

(2) Podrozmaitości traktujemy w tym wykładzie mnogościowo nie mówiąc o ich strukturach, które faktycznie można zbudować. Topologię zawsze indukujemy z $\mathbb{K}^m$.

(3) Według identycznego schematu budowane są definicje podrozmaitości analitycznych.

(4) Wymiar podrozmaitości jest określony jednoznacznie.

(5) Dla ustalonej podrozmaitości istnieje największy element ze zbioru $\{1, 2, \ldots, \infty\}$, który jest jej klasą.

(6) Podrozmaitości topologiczne można określić poprzez warunek (1) zamieniając dyfeomorfizm na homeomorfizm.

Uwaga 7.19 Warto bezpośrednio sprawdzić punkty (4) i (5) w 7.18 oraz zauważyć, że podrozmaitości $\mathbb{C}^m$ są podrozmaitościami $\mathbb{R}^{2m} \cong \mathbb{C}^m$ o dwukrotnie większym wymiarze (rzeczywistym).

2. Przykłady podrozmaitości $\mathbb{K}^m$

Przykłady 7.20

(1) $\mathbb{K}^m$ jest m-wymiarową podrozmaitością $\mathbb{K}^m$ klasy C^∞.

(2) Niepuste podzbiory otwarte podrozmaitości $\mathbb{K}^m$ są też podrozmaitościami $\mathbb{K}^m$ tej samej klasy i wymiaru.

(3) $\emptyset \neq N \subset \mathbb{K}^m \Rightarrow ((N \text{ - podrozmaitość } 0\text{-wymiarowa}) \Leftrightarrow (N \cap N' = \emptyset))$

(4) Podprzestrzenie afiniczne $\mathbb{K}^m$ są podrozmaitościami klasy C^∞ i wymiarze równym wymiarowi liniowemu.

(5) $S^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m : x_1^2 + \ldots + x_m^2 = 1\}$ możemy uzyskać jako zbiór zer submersji $h : \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \ni x \longrightarrow |x|^2 - 1 \in \mathbb{R}$

(6) $N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x|x|\}$ jest jednowymiarową podrozmaitością $\mathbb{R}^2$ klasy C^1, lecz C^2 już nie jest.

(7) Jeśli N_1, N_2 są podrozmaitościami $\mathbb{K}^{m_1}, \mathbb{K}^{m_2}$ wymiarów n_1, n_2 i klasy k, to $N_1 \times N_2$ jest podrozmaitością $\mathbb{K}^{m_1+m_2} = \mathbb{K}^{m_1} \times \mathbb{K}^{m_2}$ klasy C^k i wymiaru $n_1 + n_2$. Produkty możemy brać większej długości jak przykładowo

$$T^n = S^1 \times \ldots \times S^1 \subset \mathbb{R}^2 \times \ldots \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^{2n}$$

Uwaga 7.21 W formie ćwiczenia warto opracować model dwuwymiarowego torusa w $\mathbb{R}^3$ oraz tak zwanej wstęgi Möbiusa.

3. Lokalne parametryzacje

Niech N będzie n-wymiarową podrozmaitością klasy C^k przestrzeni $\mathbb{K}^m$. Niech $G \neq \emptyset$ będzie podzbiorem otwartym $\mathbb{K}^n$, $m, n \in \mathbb{N}$, $n \leq m$

Definicja 7.22 Odwzorowanie $g : G \longrightarrow \mathbb{K}^m$ nazywamy **lokalną parametryzacją** N jeśli:

(1) g jest immersją klasy C^k,
(2) $g(G)$ jest podzbiorem otwartym N oraz $g : G \to g(G)$ jest homeomorfizmem.

Uwagi 7.23

(1) Zwykle w powyższej sytuacji $g(G)$ będziemy oznaczać przez U. Oczywiście $U = N \cap \bar{V}$ gdzie $\bar{V}$ jest otwarty w $\mathbb{K}^m$. Często będziemy pisać $g : G \longrightarrow U = N \cap V$, tracąc z g pewien podzbiór otwarty $\mathbb{K}^m$. Oczywiście wybór $\bar{V}$ nie jest jednoznaczny.

(2) Lokalne parametryzacje nazywane są także opisami parametrycznymi lub mapami odwrotnymi.

(3) Dla każdego punktu $a \in N$ istnieje lokalna parametr. zawierająca a w obrazie (wniosek (9) 7.14)

(4) Dla podrozmaitości N, jej skraj $S = \bar{N} \setminus N$ jest domknięty w $\mathbb{K}^m$ (ćw.) Biorąc więc w punkcie (1) zbiór V mamy go zastąpić przez $V \setminus S$. Wtedy mamy dodatkowo $N \cap V$ jest domknięty w V

(5) Lokalne parametryzacje tutaj dostajemy poprzez modyfikacje dyfeomorfizmów przestających, które występują w 7.14 (1).

Definicja 7.24 Rodzinę $\{g_\alpha\}_{\alpha \in A}$ parametryzacji lokalnych podrozmaitości N nazywamy atlasem odwrotnym jeśli $\bigcup_{\alpha \in A} g_\alpha(G_\alpha) = N$

Uwaga 7.25 Każda podrozmaitość posiada atlas odwrotny co najwyżej przeliczalny. Podrozmaitości zwane są atlasy odwrotne skończone

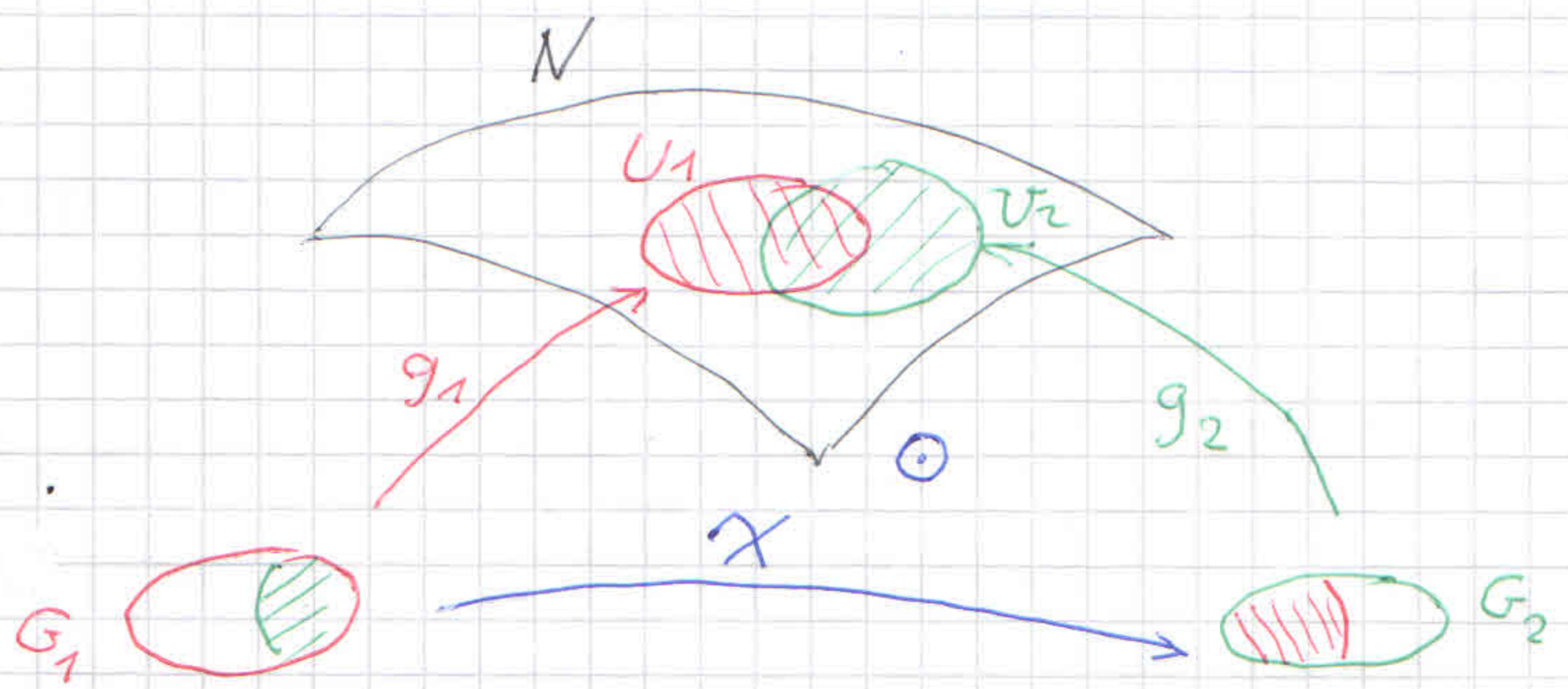
Odwzorowania przejścia między lokalnymi parametryzacjami podrozmaitości

Rozpatrujemy podrozmaitość N jak wprowadzona na początku tego punktu. Niech

$g_1 : G_1 \longrightarrow U_1 = N \cap V_1$, $g_2 : G_2 \longrightarrow U_2 = N \cap V_2$

będą lokalnymi parametryzacjami na N.

W sytuacji gdy $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ dostajemy naturalne odwzorowanie



$\chi : g_2^{-1} \circ (g_1 | g_1^{-1}(U_1 \cap U_2)) : g_1^{-1}(U_1 \cap U_2) \longrightarrow g_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$

Odwzorowanie X zazwyczaj oznaczamy $g_2^{-1} \circ g_1$ co jest poprawnym zapisem jako złożenie relacji. Nazywamy je odwzorowaniem przejścia między g_1 i g_2.

Twierdzenie 7.26 Jeśli N jest podrozmaitością klasy C^k, to odwzorowania przejścia między lokalnymi parametryzacjami N są C^k dyfeomorfizmami.

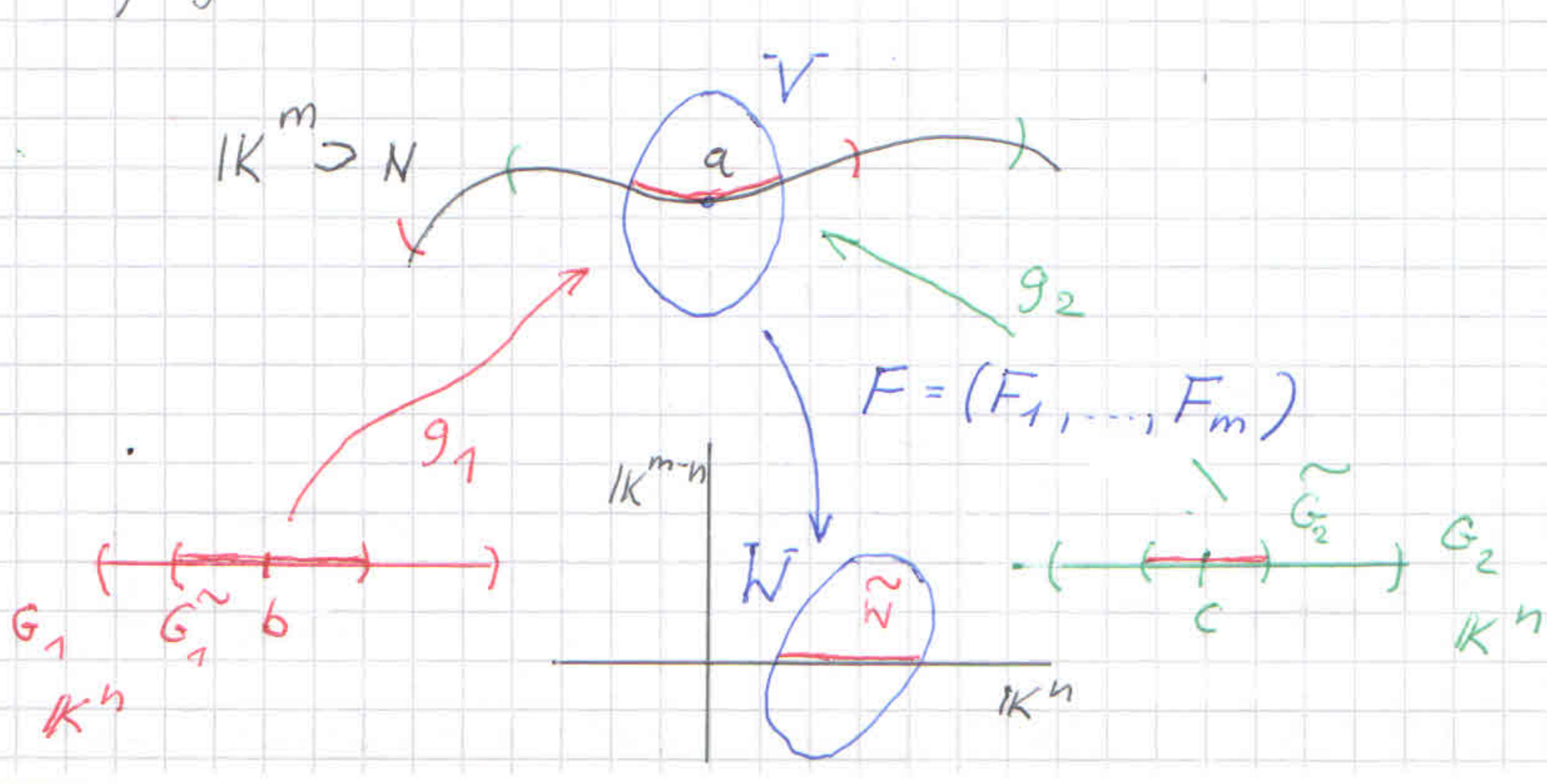
D: Przypuścimy, że rozpatrujemy przejście między parametryzacjami rozpatrywanymi przed chwilą. Oczywiście X jest bijekcją między zbiorami otwartymi więc wystarczy pokazać, że X i X^{-1} są klasy C^k.

Sprawdzenie przeprowadzimy lokalnie, więc ustalmy punkt $b \in g_1^{-1}(U_1 \cap U_2)$ oraz oznaczmy $a = g_1(b)$ oraz $c = g_2^{-1}(a)$. Istnieją wówczas otoczenia $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2$ punktów b i c oraz otoczenie V punktu a takie, że

(1) $g_1(\tilde{G}_1) = g_2(\tilde{G}_2) = N \cap V$,

(2) dla V spełniony jest warunek (1) z 7.14

Niech więc $F: V \longrightarrow W$ będzie dyfeomorfizmem „prostującym" z warunku (1) z 7.14



Oznaczmy: $\widetilde{W} = \{x \in \mathbb{K}^n : (x,0) \in W\}$

$\widetilde{F} = (F_1, \ldots, F_n) \,|\, V \cap N : V \cap N \longrightarrow \widetilde{W}$

W tej sytuacji odwzorowania:

$\widetilde{F} \circ \widetilde{g}_1 : \widetilde{G}_1 \longrightarrow \widetilde{W}$, $\widetilde{F} \circ \widetilde{g}_2 : \widetilde{G}_2 \longrightarrow \widetilde{W}$

są dyfeomorfizmami klasy C^k gdyż są to homeomorfizmy na obraz oraz uzyskano je z odwzorowań $F \circ \widetilde{g}_1 : \widetilde{G}_1 \longrightarrow W$, $F \circ \widetilde{g}_2 : \widetilde{G}_2 \longrightarrow W$ będących immersjami przez odrzucenie zerujących się składowych.

Zatem $(\widetilde{F} \circ \widetilde{g}_2)^{-1} \circ (\widetilde{F} \circ \widetilde{g}_1) : \widetilde{G}_1 \longrightarrow \widetilde{G}_2$ jest C^k dyfeomorfizmem jednak.

$(\widetilde{F} \circ \widetilde{g}_2)^{-1} \circ (\widetilde{F} \circ \widetilde{g}_1) = \widetilde{g}_2^{-1} \circ (g_1 | \widetilde{G}_1) : \widetilde{G}_1 \longrightarrow \widetilde{G}_2$

czyli odwzorowanie przejścia jest w pewnym otoczeniu $(\widetilde{G}_1)$ punktu b kl C^k. To kończy dowód

§4. Przestrzenie styczne i stożki styczne

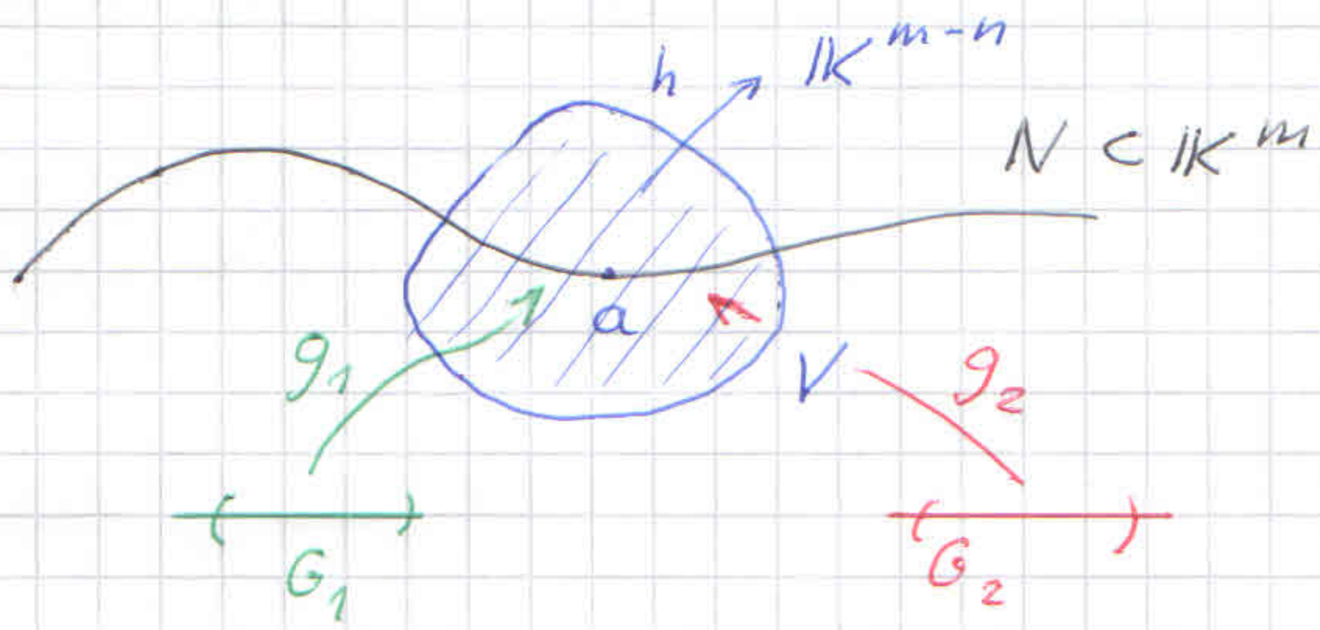
1. Przestrzenie styczne

Niech N będzie n-wymiarową podrozmaitością klasy C^k przestrzeni $\mathbb{K}^m$.

Definicja 7.27 Przestrzenią styczną do N w punkcie $a \in N$ nazywamy n-wymiarową podprzestrzeń $\mathbb{K}^m$ określoną równością $T_a N = g'(g^{-1}(a))(\mathbb{K}^n)$ gdzie g jest dowolną lokalną parametryzacją na N, która przeprowadza punkt a w swoim otoczeniu

Uzasadnienie poprawności definicji

Przypuśćmy, że $g_1 : G_1 \longrightarrow U_1$, $g_2 : G_2 \longrightarrow U_2$ są lokalnymi parametryzacjami oraz $a \in U_1 \cap U_2$.
Bez straty ogólności możemy założyć, że $U_1 = U_2 = N \cap V$ gdzie V jest dobrane do otoczenia (2) z 7.14.



Otrzymujemy $h \circ g_i = 0$ dla $i = 1, 2$.
Zatem $h'(a) \circ g_i'(g_i^{-1}(a)) = 0$, $i = 1, 2$
więc $g_i'(g_i^{-1}(a))(\mathbb{K}^n) \subset \operatorname{Ker} h'(a)$ dla $i = 1, 2$.

Skoro $h'(a)$ jest epimorficznem to $\dim \operatorname{Ker} h'(a) = m - (m-n) = n$. Czyli ze względu na ten sam wymiar

$$g_i'(g_i(a))(\mathbb{K}^n) = \operatorname{Ker} h'(a), \quad i = 1, 2.$$

co pokazuje równość $g_1'(g_1^{-1}(a))(\mathbb{K}^n) = g_2'(g_2^{-1}(a))(\mathbb{K}^n)$.

Uwagi 7.28

(1) Jeśli h jest lokalnym opisem podrozmaitości N w otoczeniu punktu $a \in N$, to $T_a N = \operatorname{Ker} h'(a)$.

(2) Zespolona przestrzeń styczna jest rzeczywistą przestrzenią stycznią po zmianie ciała z $\mathbb{C}$ na $\mathbb{R}$.

(3) Przestrzeń afiniczna $a + T_a N$ nazywana jest płaszczyzną styczną do N w punkcie a.

(4) Rozpatrując w $\mathbb{K}^m$ kanoniczny iloczyn skalarny określamy $N_a N = (T_a N)^{\perp} = \{y \in \mathbb{K}^m : \forall x \in T_a N : (x|y) = 0\}$

Określona przestrzeń NaN jest nazywana przestrzenią normalną do N w punkcie a i odgrywać będzie ważną rolę w dalszych rozważaniach.

(5) Warto zbudować postać przestrzeni stycznej do podrozmaitości w oparciu o warunki (1) i (3) z 7.14.

Przykłady 7.29.

(1) $a \in \mathbb{K}^m$, $T_a \mathbb{K}^m = \mathbb{K}^m$

(2) N - podrozmaitość, $a \in N$, U - otwarty podzbiór N wtedy $T_a U = T_a N$

(3) N - podrozmaitość 0-wymiarowa $\mathbb{K}^m$, $a \in N$, $T_a N = \{0\}$

(4) N - podprzestrzeń afiniczna $\mathbb{K}^m$, $a \in N$, $T_a N = N - a$

(5) $S^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m : |x|^2 = 1\}$, $a = (a_1, \dots, a_m) \in S^{m-1}$

$h : \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \ni x \longrightarrow |x|^2 - 1 \in \mathbb{R}$ submersja opisująca S^{m-1}

$h'(a) = 2[a_1, \dots, a_m]$ czyli $T_a S^{m-1} = \{(y_1, \dots, y_m) : \sum_{i=1}^{m} a_i y_i = 0\} =$

$= \{y \in \mathbb{R}^m : (a|y)\} = (\mathbb{R}a)^{\perp}$

(6) Jeśli N_1, N_2 są podrozmaitościami $\mathbb{K}^{n_1}$ i $\mathbb{K}^{n_2}$, $a_1 \in N_1$, $a_2 \in N_2$ to $T_{(a_1, a_2)}(N_1 \times N_2) = (T_{a_1} N_1) \times (T_{a_2} N_2)$ (cw.)

Uwaga 7.30 Wraz z podrozmaitościami można określić odwzorowania między nimi różnych klas, pochodne tych odwzorowań w punktach i odwzorowania pochodne. Jako odwzorowania pomiędzy tak zwanymi wiązkami stycznymi. Dalszy rozwój teorii w tym kierunku będzie kiedyś przedstawiony w ramach „Geometrii różniczkowej".

2. Stożki styczne do zbiorów w punkcie

Zacznijmy od ogólnej sytuacji według książki Federera [Fe] (sekcja 3.1.21)

Niech E będzie przestrzenią wektorową unormowaną nad ciałem $\mathbb{K}$, $S \subset E$, $a \in E$

Definicja 7.31 Wektor $v \in E$ nazywamy stycznym do zbioru S w punkcie a jeśli istnieją ciągi $\{s_\nu\}$ punktów zbioru S i $\{\lambda_\nu\}$ liczb rzeczywistych dodatnich takie, że:

(1) $s_\nu \to a \quad (\nu \to +\infty)$

(2) $\lambda_\nu (s_\nu - a) \to v \quad (\nu \to +\infty)$.

Zbiór $\mathrm{Tan}(S,a) = \{v \in E : v\text{-styczny do } S \text{ w punkcie } a\}$ nazywamy stożkiem stycznym zbioru S w punkcie a.

Uwagi 7.32

(1) $v \in \mathrm{Tan}(S,a)$, $\lambda > 0 \Rightarrow \lambda v \in \mathrm{Tan}(S,a)$,

(2) $\mathrm{Tan}(S,a) = \emptyset \Leftrightarrow a \notin \overline{S}$,

(3) $\mathrm{Tan}(S,a) \neq \{0\} \Rightarrow a \in S'$

(4) Jeśli E jest skończenie wymiarowa to $(a \in S' \Rightarrow \mathrm{Tan}(S,a) \neq \{0\})$

(5) Pojęcie stożka stycznego jest zgodne z intuicją, przykładowo naszkicowany zbiór S ma stożek styczny T



(6) Można spotkać inne definicje stożka stycznego do zbioru, więc należy zwracać uwagę na definicję przyjmowane przez autorów książek.

3. Związki stożków stycznych z przestrzeniami stycznymi

Twierdzenie 7.33

Z: N - n-wymiarowa podrozmaitość klasy C^1 przestrzeni $\mathbb{K}^m$, $a \in N$, $v \in \mathbb{K}^m$

T: Następujące warunki są równoważne:

(1) $v \in \overline{T}_a N$

(2) Istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że dla $\Delta_\varepsilon = \{t \in \mathbb{K} : |t| < \varepsilon\}$ istnieje $\gamma : \Delta_\varepsilon \longrightarrow \mathbb{K}^m$ klasy C^1 takie, że $\gamma(\Delta_\varepsilon) \subset N$, $\gamma(0) = a$, $\gamma'(0) = v$.

(3) $v \in \mathrm{Tan}(N, a)$.

D: (1) $\Rightarrow$ (2) Niech $g : G \longrightarrow U$ będzie lokalną parametryzacją N taką, że $a \in U$. Wtedy dla $b = g^{-1}(a)$ mamy $v = g'(b).w$ dla pewnego $w \in \mathbb{K}^n$. Wybierzmy $\varepsilon > 0$ tak aby $b + tw \in G$ dla $t \in \Delta_\varepsilon$ i określmy

$$\gamma : \Delta_\varepsilon \ni t \longrightarrow g(b + tw) \in U.$$

Mamy wtedy $\gamma(\Delta_\varepsilon) \subset N$, $\gamma(0) = a$, $\gamma'(0) = v$.

(2) ⇒ (3) Określimy ciągi $\{s_\nu\}$ i $\{\lambda_\nu\}$ korzystając z krzywej γ. Mamy

$$\frac{\gamma(t)-\gamma(0)}{t} \longrightarrow v \quad (t \to 0)$$

Więc $$\frac{\gamma\left(\frac{\varepsilon}{\nu+2}\right)-a}{\frac{\varepsilon}{\nu+2}} \longrightarrow v \quad (\nu \to +\infty).$$

Zatem $$\frac{\nu+2}{\varepsilon}\left(\gamma\left(\frac{\varepsilon}{\nu+2}\right)-a\right) \longrightarrow v \quad (\nu \to +\infty).$$

Biorąc $s_\nu = \gamma\left(\frac{\varepsilon}{\nu+2}\right)$, $\lambda_\nu = \frac{\nu+2}{\varepsilon}$ dla $\nu \in \mathbb{N}$ dostajemy $\lambda_\nu(s_\nu - a) \longrightarrow v \quad (\nu \to +\infty)$.

(3) ⇒ (1) Niech $v \in T_a(N, a)$ i wybierzmy lokalną parametryzację N $g: G \to U = N \cap V$ tak aby $a \in U$ i oznaczmy $b = g^{-1}(a)$.

Poszukujemy $w \in \mathbb{K}^n$ takiego, że $g'(b).w = v$

Mamy $s_\nu = a + h_\nu$, $h_\nu \to 0 \quad (\nu \to 0)$, $s_\nu \in U$ dla $\nu \in \mathbb{N}$ $\lambda_\nu > 0$ dla $\nu \in \mathbb{N}$ oraz $\lambda_\nu h_\nu \longrightarrow v \quad (\nu \to +\infty)$.

Mamy również ciąg $\{k_\nu\}$ taki, że $g(b + k_\nu) = a + h_\nu$ dla $\nu \in \mathbb{N}$. W tej sytuacji $k_\nu \in G - b$ dla $\nu \in \mathbb{N}$ oraz $k_\nu \to 0 \quad (\nu \to +\infty)$.

Korzystając z różniczkowalności funkcji g w b dostajemy $g(b + k_\nu) = g(b) + g'(b).k_\nu + \xi(k_\nu)|k_\nu|$ gdzie $\xi: G - b \to \mathbb{K}^m$, $\xi(0) = 0$ i ξ - ciągła w punkcie 0.

Stąd mamy $h_\nu = g'(b).k_\nu + \xi(k_\nu)|k_\nu|$ dla $\nu \in \mathbb{N}$

a zatem

(*) $\lambda_\nu h_\nu = g'(b).(\lambda_\nu k_\nu) + \xi(k_\nu)|\lambda_\nu k_\nu|$ dla $\nu \in \mathbb{N}$

$g'(b)$ jest monomorfizmem, więc istnieje $m > 0$ stała taka, że $|g'(b).v| \geq m|v|$ dla $v \in \mathbb{R}^n$ (ćw.) a zatem z (*)

$$|\lambda_\nu h_\nu| \geq m|\lambda_\nu k_\nu| - |\xi(k_\nu)||\lambda_\nu k_\nu| =$$
$$= (m - \xi(k_\nu))|\lambda_\nu k_\nu| \text{ dla } \nu \in \mathbb{N}$$

Wynika stąd, że ciąg $\{\lambda_\nu k_\nu\}$ jest ograniczony. Wracając do (*) dostajemy.

$$-g'(b)(\lambda_\nu k_\nu) = \lambda_\nu h_\nu - \xi(k_\nu)|\lambda_\nu k_\nu| \longrightarrow v \quad (\nu \to +\infty)$$

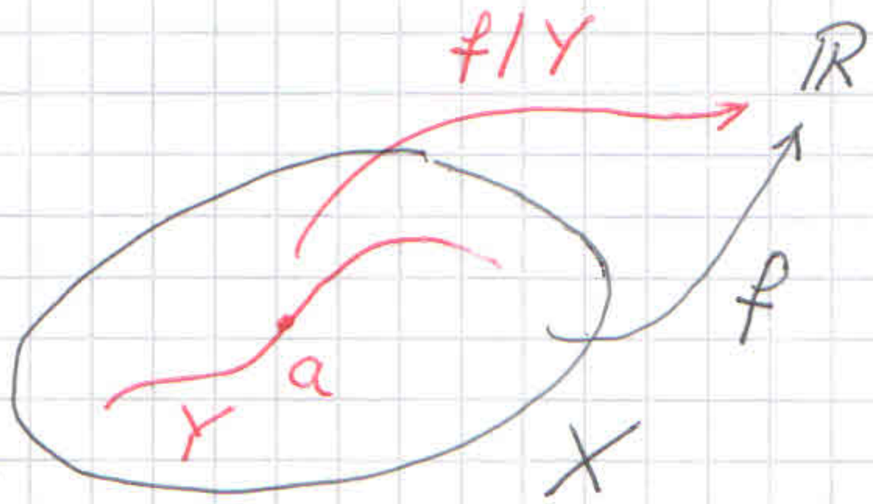
Zatem $\lambda_\nu k_\nu \longrightarrow w = (g'(b))^{-1}(v)$ $(\nu \to +\infty)$, czyli $g'(b).w = v$, co kończy dowód.

Wniosek 7.34 Jeśli N jest podrozmaitością $\mathbb{R}^m$ klasy C^1 i $a \in N$, to $T_a N = Tan(N, a)$.

§5. Ekstrema warunkowe

1. Uwagi wstępne.

Niech X będzie przestrzenią topologiczną oraz $f: X \to \mathbb{R}$.
Ustalmy $Y \subset X$. Interesują nas ekstrema lokalne funkcji f w punktach $a \in Y$, ale pod warunkiem, że „zajmujemy się wyłącznie punktami zbioru Y". Oznacza to, że <u>badamy po prostu ekstrema lokalne $f|_Y: Y \to \mathbb{R}$</u> zaś przestrzeń X może nam w tych dociekaniach ucieleć pomocy. Nie wymagane są zatem żadne nowe definicje pojęć. Często Y zadawany jest opisującymi go warunkami np. układem równań, stąd słowo „warunkowe" pojawiające się w podobnym znaczeniu jak w rachunku prawdopodobieństwa.



Problemy tego typu pojawiają się w analizie często w sytuacjach gdy $X = \mathbb{R}^m$, $Y = N$ - podrozmaitość X klasy C^k, $k \geq 1$. Przedstawiony fragment materiału jest „średnią" pomiędzy [Ca] i [Ma] z odcieniem prac magisterskich Małgorzaty Sąsiur i Agnieszki Wiewiórskiej przygotowywanych pod moją opieką. Wiele przedstawionych tutaj faktów można przenieść na wyższe pochodne.

2. Warunki konieczne istnienia ekstremów warunkowych.

Twierdzenie 7.35

Z: $a \in S \subset A \subset \mathbb{R}^m$ gdzie $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ n-krotnie różniczkowalna w p. a, $n \geq 1$

oraz $f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$

f/S ma minimum (maksimum) lokalne w a.

T: $\forall v \in Tan(S,a): f^{(n)}(a) \cdot (v)^n \geq 0 \quad (\leq 0)$

D: Załóżmy, że f/S ma w punkcie a minimum lokalne i wybierzmy $v \in Tan(S,a)$. Istnieją ciągi $\{h_\nu\}$ w $\mathbb{R}^m$ oraz $\{\lambda_\nu\}$ w $(0, +\infty)$ takie, że:

(1) $a + h_\nu \in S$ i $f(a+h_\nu) \geq f(a)$ dla $\nu \in \mathbb{N}$,

(2) $h_\nu \to 0 \ (\nu \to +\infty)$,

(3) $\lambda_\nu h_\nu \to v \ (\nu \to +\infty)$.

Na podstawie wzoru Taylora z resztą Peano mamy

$$f(a+h_\nu) = f(a) + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \cdot (h_\nu)^n + \xi(h_\nu) |h_\nu|^n, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

gdzie $\xi: A - a \longrightarrow \mathbb{R}$, $\xi(0) = 0$, ξ - ciągła w punkcie 0.

Otrzymujemy $\frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \cdot (h_\nu)^n + \xi(h_\nu) |h_\nu|^n \geq 0$

dla $\nu \in \mathbb{N}$. Mnożąc przez $\lambda_\nu^n > 0$, $\nu \in \mathbb{N}$ dostajemy

$$f^{(n)}(a) \cdot (\lambda_\nu h_\nu)^n + n! \xi(h_\nu) |\lambda_\nu h_\nu|^n \geq 0, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

Po przejściu do granicy mamy $f^{(n)}(a) \cdot (v)^n \geq 0$, co kończy dowód.

Twierdzenie 7.36

Z: $a \in N \subset A \subset \mathbb{R}^m$ gdzie $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, N - podrozmaitość klasy C^1 przestrzeni $\mathbb{R}^m$, $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ n-krotnie różniczkowalna w a, $n \geq 1$ oraz $f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$ f/N ma minimum (maksimum) lokalne w p. a.

T: Forma jednorodna $T_aN \ni v \longrightarrow f^{(n)}(a).(v)^n \in \mathbb{R}$ jest nieujemna (niedodatnia)

D: $T_aN = Tan(N,a)$ więc tezę dostajemy wprost z 7.35. Warto zwrócić uwagę, że pochodne w a do rzędu $n-1$ mają znikać na $\mathbb{R}^m$ a nie wystarczy na T_aN!

Przykład 7.37 Rozpatrujemy $f: \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longrightarrow y - x^3 + x^4 \in \mathbb{R}$ oraz $N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^3\}$ oraz $a = (0,0) \in N$.
Jak łatwo zauważyć $T_aN = \mathbb{R} \times \{0\}$

$f: N \ni (x,y) \longrightarrow y - x^3 + x^4 = x^4 \in \mathbb{R}$ więc f ma w punkcie a minimum lokalne (nawet właściwe najmniejsze)
Mamy $f'(0)/T_aN = 0$, $f''(0) = 0$ ale forma $T_aN \ni v \longrightarrow f'''(0).(v)^3 \in \mathbb{R}$ nie jest nieujemna.
Jest to efekt spowodowany tym, że $f'(0) \neq 0$. Aby móc używać wyższych pochodnych do badania ekstremów warunkowych należy mieć gwarancję, że wszystkie poprzednie pochodne zerują się na całej przestrzeni a nie tylko na przestrzeni stycznej T_aN. W powyższym przykładzie f można zastąpić na N funkcją $\tilde{f}(x,y) = x^4$.

3. Warunki wystarczające istnienia ekstremów warunkowych

Twierdzenie 7.38

Z: $a \in S \subset A \subset \mathbb{R}^m$ gdzie $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ jest n-krotnie różniczkowalna w p. a, $n \geq 1$

oraz $f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$

$\forall v \in \mathrm{Tan}(S,a) \setminus \{0\} : f^{(n)}(a) \cdot (v)^n > 0 \ (< 0)$

T: $f|S$ ma w punkcie a silne minimum (maksimum) lokalne.

D: Przypuśćmy, że $f|S$ nie ma silnego minimum lokalnego w punkcie a. Wtedy istnieje ciąg $\{h_\nu\}$ w $\mathbb{K}^m$ taki, że: (1) $a + h_\nu \in S$, $f(a+h_\nu) \leq f(a)$, $h_\nu \neq 0$ dla $\nu \in \mathbb{N}$

(2) $h_\nu \longrightarrow 0$ $(\nu \to 0)$

Wtedy biorąc $\lambda_\nu = |h_\nu|^{-1}$ dla $\nu \in \mathbb{N}$ dostajemy podciąg ciągu $\{\lambda_\nu h_\nu\}$ (zwartego w sferze jednostkowej) do pewnego $v \in \mathrm{Tan}(S,a) \setminus \{0\}$ (w szczególe $|v| = 1$)

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $\lambda_\nu h_\nu \to v$ $(\nu \to +\infty)$

Wtedy z wzoru Taylora z resztą Peano

$$f(a+h_\nu) - f(a) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \cdot (h_\nu)^n + \xi(h_\nu)|h_\nu|^n$$

gdzie $\xi : A - a \longrightarrow \mathbb{R}$, $\xi(0) = 0$, ξ - ciągła w punkcie 0.

Stąd

$$f^{(n)}(a) \cdot (h_\nu)^n + n!\,\xi(h_\nu)|h_\nu|^n \leq 0 \quad \text{dla } \nu \in \mathbb{N}$$

czyli

$$f^{(n)}(a) \cdot (\lambda_\nu h_\nu)^n + n!\,\xi(h_\nu)|\lambda_\nu h_\nu|^n \leq 0, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

Przechodząc do granicy dostajemy $f^{(n)}(a)(v)^n \leq 0$ co nam daje sprzeczność z założeniem. Drugi przypadek dowodzimy analogicznie.

Twierdzenie 7.39

Z: $a \in N \subset A \subset \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, N$ - podrozmaitość klasy C^1 przestrzeni $\mathbb{R}^m$, $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ n-krotnie różniczkowalne w punkcie a, $n \geq 1$ oraz $f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$
Forma jednorodna $T_a N \ni v \longrightarrow f^{(n)}(a).(v)^n \in \mathbb{R}$ jest dodatnia (ujemna)

T: $f|N$ ma silne minimum (maksimum) lokalne w p. a

D: Teza wynika natychmiast z 7.38

Przykład 7.40

Rozpatrujemy $N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$, $a = (0,0) \in N$
oraz funkcje: (1) $f: \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longrightarrow y + x^3 + y^7 \in \mathbb{R}$
(2) $f: \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longrightarrow y - x^2 + x^3 \in \mathbb{R}$

Dla (1) mamy $f'(a) \neq 0$ ale biorąc opis N, $h(x,y) = y - x^2$ i rozpatrując $\tilde{f} = f - h$, mamy $\tilde{f}|N = f|N$ oraz $\tilde{f}(x,y) = x^2 + x^3 + y^7$. Teraz już $\tilde{f}'(a) = 0$ oraz $\tilde{f}''(a).(v,0)^2 = 2v^2 > 0$ gdy $v \neq 0$ więc $\tilde{f}$ i f mają silne minimum lokalne w punkcie a.

Dla (2) znów mamy $f'(a)|T_a N = 0$ ale $f'(a) \neq 0$
Więc stały znak $f''(a).(v)^2$ dla $v \in T_a N \setminus \{0\}$ nie oznacza istnienia ekstremum lokalnego w p. 0.
Faktycznie $f|N = \tilde{f}|N$ gdzie $\tilde{f}(x,y) = x^3$ zaś $\tilde{f}$ nie ma lokalnego ekstremum na N w p. 0

3. Badanie ekstremów warunkowych - mnożniki Lagrange'a.

Przedstawimy tutaj kierunek działań prowadzący do zbadania ekstremów warunkowych na podrozmaitościach przestrzeni $\mathbb{R}^m$. Wykorzystamy do tego pierwszą oraz drugą pochodną funkcji oraz własności podrozmaitości klasy zwykle C^1. W tym fragmencie przez n oznaczać będziemy wymiar podrozmaitości N przestrzeni $\mathbb{R}^m$.

Ustalmy więc układ $a \in N \subset A \subset \mathbb{R}^m$, gdzie N jest n-wymiarową podrozmaitością kl C^1 przestrzeni $\mathbb{R}^m$, $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $n < m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Szukając ekstremów funkcji $f|N: N \longrightarrow \mathbb{R}$ zawsze możemy do tego wykorzystać lokalne prozmetryzacje i badać złożenia $f \circ g: G \longrightarrow \mathbb{R}$ gdzie $g: G \longrightarrow U$ jest lokalną parametryzacją na N. Wtedy jeśli f i N są klasy C^1 lub C^2, to możemy do badań wykorzystać zwykłe techniki z zakresu funkcji wielu zmiennych. Nasze rozważania pójdą jednak w nieco innym kierunku. Zaczynamy od następującego lematu

Lemat 7.41

Z.: W wyżej opisanej sytuacji załóżmy, że $f_1, f_2: A \to \mathbb{R}$ są dwukrotnie różniczkowalne w punkcie a,

- $f_1|N = f_2|N$, $f_1'(a) = f_2'(a)$

T: $f_1''(a)|T_aN \times T_aN = f_2''(a)|T_aN \times T_aN$

D: Dla $f = f_1 - f_2$ mamy $f|N = 0$ oraz $f'(a) = 0$ więc na podstawie 7.36 (warunek konieczny). odwzorowanie $T_a N \ni v \longrightarrow f''(a) \cdot (v)^2 \in \mathbb{R}$ jest formą nieujemną i niedodatnią, zatem. $f''(a) \cdot (v)^2 = 0$ dla $v \in T_a N$, co pociąga. $f''(a) \mid T_a N \times T_a N = 0$.

W prezentowanej metodzie wychodząc od funkcji $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ będziemy starać się przejść do jej modyfikacji $\tilde{f}: A \longrightarrow \mathbb{R}$ takiej, że $\tilde{f}|N = f|N$ przy uzyskaniu warunku $\tilde{f}'(a) = 0$. Takich modyfikacji jest wiele, ale jak wynika z 7.41 otrzymana forma kwadratowa.

$$T_a N \ni v \longrightarrow \tilde{f}''(a) \cdot (v)^2 \in \mathbb{R}$$

nie zależy od wyboru modyfikacji (!) i może pomóc w zbadaniu ekstremum lokalnego w punkcie a. Na wstępie zajmiemy się wyszukiwaniem punktów „podejrzanych" o lokalne ekstrema $f|N$. W tych punktach następnie, przy mocniejszych założeniach dotyczących różniczkowania, będzie można zbadać czy spełniony jest warunek wystarczający, przy którym decyduje już druga pochodna w punkcie a. Generalnie rozpatrywać będziemy „warunek" zadany przez dodatkowy układ równań, czyli w innym języku, założoną zadaną submersją.

Zatem rozważamy sytuację, w której:

Ω - otwarty, niepusty podzbiór $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$h : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{m-n}$ submersja, $0 \leq n < m$

$N = h^{-1}(0) \neq \emptyset$ n-wymiarowa podrozmaitość klasy C^1 przestrzeni $\mathbb{R}^m$

$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcja różniczkowalna w tych punktach $a \in N$, w których zamierzamy ją badać

Uwaga 7.42 Jeśli $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$, $A \subset \mathbb{K}^m$, $a \in A$, $m \geq 1$ i f jest różniczkowalna w punkcie a to jej gradientem w tym punkcie nazywamy wektor

$$\operatorname{grad}_a f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\right) \in \mathbb{K}^m.$$

Lemat 7.43

Z: $a \in N \subset A \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, N - n-wymiarowa podrozmaitość $\mathbb{R}^m$ kl C^1, $0 \leq n < m$, $f : A \to \mathbb{R}$ różniczk. w p. a.

T: (1) $(f|A$ - ma ekstr. lok. w p. $a) \Rightarrow (f'(a)|T_aN = 0)$

(2) $(f'(a)|T_aN = 0) \Leftrightarrow (\operatorname{grad}_a f \in N_a N)$

D: (1) $f'(a)|T_aN$ jest z warunku koniecznego nieujemna lub niedodatnia ale stopnia nieparzystego więc zerowa. Można to zobaczyć również skonstruując f z lokalną parametryzację $g : G \to U$, takiej, że $a \in U$. Wtedy $(f \circ g)'(g^{-1}(a)) = 0$ skąd $f'(a)|g'(g^{-1}(a))(\mathbb{R}^n) = 0$ czyli $f'|T_aN = 0$.

(2) Rozpisując lewą stronę równoważności, dla $v = (v_1, \dots, v_m) \in T_aN$ mamy $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) v_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) v_m = 0$, co jest równoważne stw. prawej

Lemat 7.44

Z: Ω - otwarty w $\mathbb{R}^m$, $n \in \mathbb{N}$, $n < m$

$h = (h_1, \dots, h_{m-n}) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{m-n}$ submersja.

$N = h^{-1}(0)$ n-wymiarowa podrozmaitość kl C^1 $\mathbb{R}^m$.

$a \in N$

T: grad$_a$ $h_1, \dots,$ grad$_a$ h_{m-n} są bazą $N_a N$

D: Dla $i = 1, \dots, m-n$ $h_i | N = 0$ więc $h_i'(a) | T_a N = 0$.

Zatem z 7.43(2) grad$_a$ $h_i \in N_a N$ dla $i = 1, \dots, m-n$.

Skoro rząd $h'(a) = m-n$, więc wektory.

grad$_a h_1, \dots,$ grad$_a h_{m-n}$ są liniowo niezależne w $N_a N$. Ponieważ dim $N_a N = m-n$ więc wektory te stanowią bazę $N_a N$.

Widzimy więc, że jeśli $f'(a) | T_a N = 0$ i N jest zadana przez submersję h, to istnieje dokładnie jeden układ skalarów $\lambda_1, \dots, \lambda_{m-n}$ takich, że

$$(*) \quad \text{grad}_a f = \sum_{i=1}^{m-n} \lambda_i \, \text{grad}_a h_i$$

Patrząc na to samo od strony podstawowego twierdzenia o epimorfizmie

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^m & \xrightarrow{f'(a)} & \mathbb{R} \\ \text{epimorfizm} \downarrow h'(a) & \nearrow \lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_{m-n}] & \\ \mathbb{R}^{m-n} & & \end{array}$$

Mamy: $f'(a) | T_a N = 0$

$T_a N = \text{Ker} h'(a)$

Istnieje λ takie, że $f'(a) = \lambda \circ h'(a)$.

co dokładnie daje (*) z jednoznacznością λ

Twierdzenie 7.45

Z: Ω otwarty w $\mathbb{R}^m$, $h: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{m-n}$ submersja, $0 \le n < m$,
$a \in N = h^{-1}(0)$, $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna.
w punkcie a, $f|N$ ma ekstremum lokalne w punkcie a.

T: Istnieje dokładnie jeden układ liczb rzeczywistych.
$(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-n})$ zwanych mnożnikami Lagrange'a.
dla punktu a takich, że

$$f'(a) = \sum_{i=1}^{m-n} \lambda_i h_i'(a),$$

co równoważnie można zapisać

$$\operatorname{grad}_a f = \sum_{i=1}^{m-n} \lambda_i \operatorname{grad}_a h_i.$$

D: Wynika to natychmiast z wcześniej poczynionych rozważań.

W oparciu o powyższe twierdzenie szukamy punktów „podejrzanych" o wystąpienie w nich ekstremum lokalnego, a następnie budujemy do każdego punktu wygodną modyfikację $\tilde{f}$ funkcji f taką, że $\tilde{f}|N = f|N$ oraz $\tilde{f}'(a) = 0$ a nie tylko $f'(a)|T_aN = 0$.

(#) Ustalmy Ω otw w $\mathbb{R}^m$, $h: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{m-n}$ submersja
$0 \le n < m$, $N = h^{-1}(0) \neq \emptyset$, $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ różniczkowalna
w punktach zbioru Ω. Niech $h = (h_1, \dots, h_{m-n})$. Tworzymy funkcję pomocniczą.

$$F: \Omega \times \mathbb{R}^{m-n} \ni (x, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-n}) \hookrightarrow f(x) - \lambda_1 h_1(x) - \dots - \lambda_{m-n} h_{m-n}(x) \in \mathbb{R}$$

Dla F poszukujemy w $\Omega \times \mathbb{R}^{m-n}$ punktów krytycznych, czyli takich, że $F'(x,\lambda)=0$ dostając układ równań

$$\begin{cases} h_1(x)=0, \\ \vdots \\ h_{m-n}(x)=0, \\ f'(x)-\sum_{i=1}^{m-n} \lambda_i h_i'(x)=0. \end{cases}$$

Pierwsze $m-n$ równań ustalają warunek $x\in N$ zaś ostatnie $f'(x)|T_xN=0$. Jak widać jako rozwiązanie dostajemy punkty N podejrzane o występowanie ekstremum lokalnego i dopuszczalne do nich mnożniki Lagrange'a.

Twierdzenie 7.46

Z: W sytuacji $\#$, $a\in N$ i $f|N$ ma ekstremum lok. w a.

T: Istnieje dokładnie jeden układ $\lambda_1^a,\dots,\lambda_{m-n}^a$ taki, że $F'(a,\lambda_1^a,\dots,\lambda_{m-n}^a)=0$.

D: Fakt już dokładnie opisany w przygotowaniu.

Po ustaleniu $a,\lambda_1^a,\dots,\lambda_{m-n}^a$ z 7.46 zauważmy, że

$$\tilde{f}:\Omega\ni x\longrightarrow f(x)-\sum_{i=1}^{m-n}\lambda_i^a h_i(x)\in\mathbb{R}$$

ma własność $\tilde{f}|N=f|N$ oraz $\tilde{f}'(a)=0$. Zatem $\tilde{f}$ jest modyfikacją f o zerowej pochodnej w $\mathbb{R}^m$. Jeśli zatem h i f są w punkcie a dwukrotnie różniczkowalne, to możemy badania w tym punkcie kontynuować przy wsparciu drugiej pochodnej, która na $T_aN\times T_aN$ nie zależy od wyboru modyfikacji o zerowej pochodnej w punkcie a.

Przykład 7.47 Nierówność między średnią geometryczną i arytmetyczną.

Ustalmy $c \in (0, +\infty)$, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^m : x_i > 0,\ i = 1, \dots, m\}$ oraz $h : \Omega \ni x \longrightarrow x_1 + \dots + x_m - c \in \mathbb{R}$, submersja,

$f : \Omega \ni x \longrightarrow x_1 \cdot \dots \cdot x_m \in \mathbb{R}$,

$N = h^{-1}(0)$.

Jeśli $\hat{f}$ to rozszerzenie f na $\mathbb{R}^m$ z tym samym przepisem, to $\hat{f}|\bar{N}$ osiąga wartość największą, ze względu na zwartość $\bar{N}$ i musi być ona dodatnia. Jednak $\hat{f}|\bar{N} \setminus N = 0$ więc największa wartość $f|N$ jest osiągana w pewnym punkcie zbioru N, co pozwala wychwycić punkt jej osiągania metodą mnożników Lagrange'a.

Tworzymy funkcję pomocniczą.

$$F : \Omega \times \mathbb{R} \ni (x, \lambda) \longrightarrow x_1 \cdot \dots \cdot x_m - \lambda(x_1 + \dots + x_m - c) \in \mathbb{R}$$

Dostajemy w $\Omega \times \mathbb{R}$ układ równań

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_m = c \\ x_1 \cdot \dots \cdot x_{i-1} \cdot x_{i+1} \cdot \dots \cdot x_m = \lambda, \quad i = 1, \dots, m \end{cases}$$

Stąd dla rozwiązań mamy.

$$\lambda x_i = x_1 \cdot \dots \cdot x_m = \lambda x_j \text{ dla } i, j = 1, \dots, m.$$

Skoro $\lambda \neq 0$, więc $x_1 = \dots = x_m$

Korzystając z pierwszego równania dostajemy jeden punkt $x_i = \frac{c}{m}$, $i = 1, \dots, m$ oraz $\lambda = \left(\frac{c}{m}\right)^{m-1}$

Punkt ten jest największą wartością f więc

$$x_1 \cdot \dots \cdot x_m \leq \left(\frac{c}{m}\right)^m \text{ dla } x \in \Omega, \text{ skąd}$$

zatem $\sqrt[m]{x_1 \cdot \dots \cdot x_m} \leq \frac{x_1 + \dots + x_m}{m}$ dla $x_1 > 0, \dots, x_m > 0$

Przykład 7.48 Rozpatrujemy odwzorowanie liniowe $L: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $m,n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gdzie. w $\mathbb{R}^m$ i $\mathbb{R}^n$ zadane są normy euklidesowe. Stawiamy się wyliczyć normę L w przestrzeni $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$. Korzystamy z równości

$$\|L\| = \sup\{|L(x)| : |x| = 1\}$$

Mamy zatem wyliczyć wartość największą funkcji $|L(x)|$ na sferze jednostkowej w $\mathbb{R}^m$. Zauważmy, że sferę jednostkową możemy zadać submersją.

$$h: \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \ni x = (x_1, \dots, x_m) \longrightarrow (x|x) - 1 = x_1^2 + \dots + x_m^2 - 1 \in \mathbb{R}$$

i wstępnie stawiać się wyliczyć wartość największą na niej funkcji

$$f: \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \ni x \longrightarrow f(x) = (Lx|Lx) \in \mathbb{R}.$$

Niech A będzie macierzą L w bazach kanonicznych i utwórzmy funkcję pomocniczą

$$F: (\mathbb{R}^m \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \ni (x, \lambda) = (Ax|Ax) - \lambda((x|x) - 1) \in \mathbb{R}$$

Zgodnie z opisaną metodą dostajemy równania.

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, \lambda) = (x|x) - 1 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, \lambda)\, h = 0 \quad \text{dla} \quad h \in \mathbb{R}^m$$

Pierwsze z nich daje informację, że x jest elementem sfery jednostkowej.

Z drugiego dostajemy po wyliczeniu pochodnej cząstkowej (ćw.)

$$2(Ax|Ah) - 2\lambda(x|h) = 0 \quad \text{czyli}$$

$$(A^T \circ Ax|h) - \lambda(x|h) = 0 \quad \text{dla } h \in \mathbb{R}^m.$$

To daje $(A^T \circ Ax - \lambda x|h) = 0$ dla $h \in \mathbb{R}^m$,

skąd dostajemy

$$\underline{A^T \circ Ax - \lambda x = 0} \quad \text{oraz}$$

$$\underline{(x|x) = 1} \quad \text{z pierwszego równania.}$$

Jeśli x spełnia ten układ równań, to jest wektorem własnym $A^T \circ A : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ leżącym na sferze jednostkowej, dla którego dostajemy wartość funkcji

$$\underline{f(x) = (Ax|Ax) = (A^T \circ Ax|x) = \lambda(x|x) = \lambda}.$$

Zatem wartość ta jest wartością własną, która odpowiada wektorowi własnemu x.

Macierz $A^T \circ A$, jak wiemy z algebry liniowej, ma wyłącznie rzeczywiste, nieujemne wartości własne zatem

$$\underline{\|L\|^2 = \max\{\lambda : \lambda - \text{wartość własna } A^T \circ A\} = \Lambda}$$

Więc $\underline{\|L\| = \sqrt{\Lambda}}$, co sygnalizowane było już dawno temu w AM2 Rozdział 2, §3, p.4.

Rozdział 8. Potęgi zewnętrzne przestrzeni wektorowych i ich geometria.

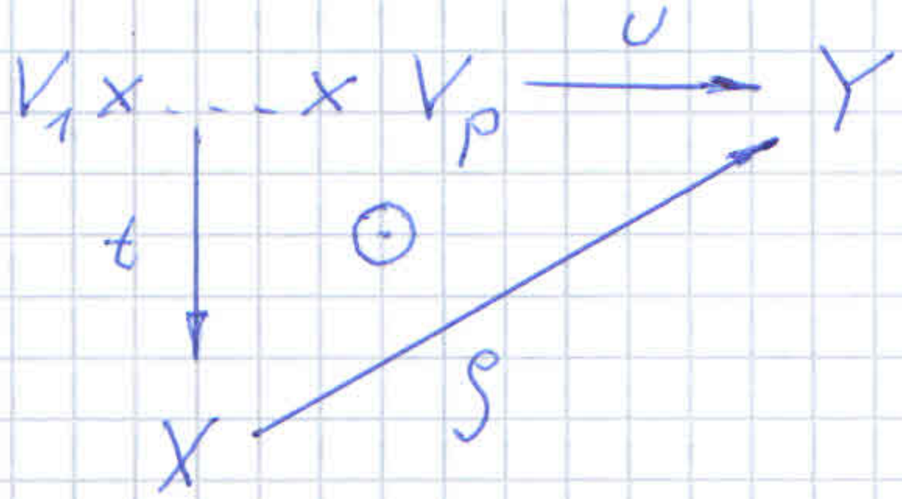
§1. Potęgi zewnętrzne przestrzeni wektorowych.

1. Iloczyny tensorowe.

Niech $V_1, \dots, V_p$, $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ będą przestrzeniami wektorowymi nad $\mathbb{K}$.

Definicja 8.1 *Iloczynem tensorowym przestrzeni* $V_1, \dots, V_p$ nazywamy parę (X, t) złożoną z przestrzeni wektorowej X nad $\mathbb{K}$ oraz odwzorowania p-liniowego $t: V_1 \times \dots \times V_p \longrightarrow X$, która spełnia następujący warunek:

Dla dowolnej pary (Y, u) złożonej z przestrzeni wektorowej Y nad $\mathbb{K}$ oraz odwzorowania p-liniowego $u: V_1 \times \dots \times V_p \longrightarrow Y$
$\exists! g: X \longrightarrow Y$ liniowe takie, że następujący diagram jest przemienny



Uwagi 8.2.

(1) Przestrzeń X jest zwykle oznaczana symbolem $V_1 \otimes \dots \otimes V_p$ zaś wartość t na układzie $v_1, \dots, v_p$, gdzie $v_i \in V_i$, $i = 1, \dots, p$ przez $v_1 \otimes \dots \otimes v_p$.

(2) Podana w definicji własność (warunek) bywa nazywana „własnością jednoznacznej uniwersalnej faktoryzacji".

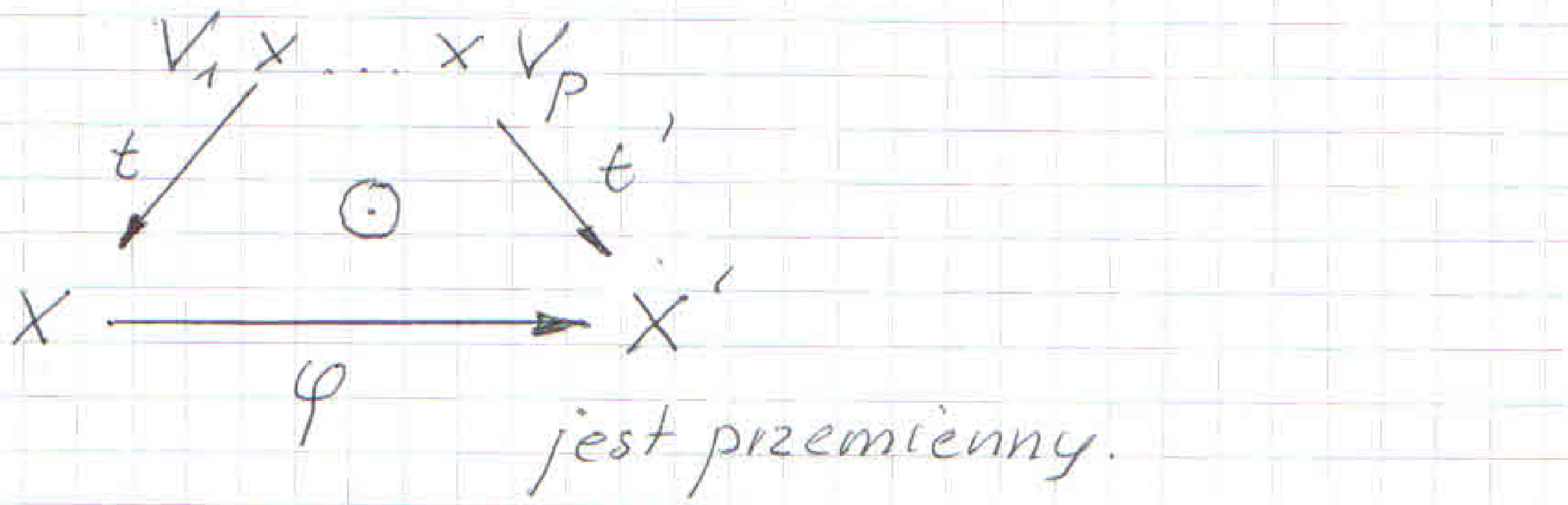
Podstawowe znaczenie w zakresie teorii iloczynów tensorowych ma twierdzenie następujące:

Twierdzenie 8.3

Z: $V_1, \dots, V_p$ przestrzenie wektorowe nad $\mathbb{K}$, $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

T: (1) Istnieje (X, t) iloczyn tensorowy $V_1, \dots, V_p$.

(2) Jeśli (X, t) i (X', t') są iloczynami tensorowymi $V_1, \dots, V_p$, to $\exists! \varphi: X \longrightarrow X'$ izomorfizm liniowy taki, że diagram



jest przemienny.

D: Twierdzenie dowodzone w ramach [AG3]

2. Iloczyn tensorowy odwzorowań liniowych

Niech dla $i = 1, \dots, p$, $p \geq 1$, V_i, W_i - przestrzenie wektorowe nad $\mathbb{K}$ oraz $f_i : V_i \longrightarrow W_i$ odwzorowania liniowe. Istnieje wówczas jednoznacznie wyznaczone odwzorowanie liniowe $\varsigma : V_1 \otimes \dots \otimes V_p \longrightarrow W_1 \otimes \dots \otimes W_p$ takie, że następujący diagram jest przemienny.

$$\begin{array}{ccc} V_1 \times \dots \times V_p & \xrightarrow{f_1 \times \dots \times f_p} & W_1 \times \dots \times W_p \\ \downarrow t & \circlearrowleft & \downarrow \tilde{t} \\ V_1 \otimes \dots \otimes V_p & \xrightarrow{\varsigma} & W_1 \otimes \dots \otimes W_p \end{array}$$

$t, \tilde{t}$ - iloczyny tensorowe

Odwzorowanie $f_1 \otimes \dots \otimes f_p := \varsigma$ nazywamy iloczynem tensorowym $f_1, \dots, f_p$.

3. Potęga zewnętrzna przestrzeni wektorowej

Niech V, W będą przestrzeniami wektorowymi nad $\mathbb{K}$ oraz $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Definicja 8.4 Odwzorowanie p-liniowe $f : V \times \dots \times V \longrightarrow W$ nazywamy antysymetrycznym jeśli dla wszelkich $v_1, \dots, v_p \in V$ oraz $\sigma \in S_p$ zachodzi równość $f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) = \operatorname{sgn}(\sigma) f(v_1, \dots, v_p)$.

Twierdzenie 8.5

Z: V, W - przestrzenie wektorowe nad $\mathbb{K}$, $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
$f : V^p \longrightarrow W$ p-liniowe

T: Następujące warunki są równoważne:
(1) f - jest antysymetryczne,
(2) dla dowolnych $i, j \in \mathbb{N}$ takich, że $1 \leq i < j \leq p$ oraz $v_1, \dots, v_p \in V$ mamy równość
$f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots v_p) = -f(v_1, \dots, v_p)$,
(3) jeśli $v_1, \dots, v_p \in V$ oraz $v_i = v_j$ dla pewnych $i \neq j$, to $f(v_1, \dots, v_p) = 0$.

D: Ćwiczenie

Niech następnie V będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$ oraz, $p \in \mathbb{N}$.

Definicja 8.6 Jeśli $p \geq 1$, to p-tą potęgą zewnętrzną przestrzeni V nazywamy parę (X, a) złożoną z przestrzeni wektorowej X oraz odwzorowania p-liniowego antysymetrycznego $a : V^p \longrightarrow X$, która spełnia następującą własność:

Dla dowolnej pary (Y, u) złożonej z przestrzeni wektorowej Y oraz odwzorowania p-liniowego antysymetrycznego $u : V^p \longrightarrow Y$ istnieje dokładnie jedno odwzorowanie liniowe $g : X \longrightarrow Y$, dla którego diagram

$$\begin{array}{ccc} V^p & \xrightarrow{u} & Y \\ {\scriptstyle a}\downarrow & \circlearrowleft & \nearrow {\scriptstyle g} \\ X & & \end{array}$$

jest przemienny.

D: [AG3]

Uwagi 8.7

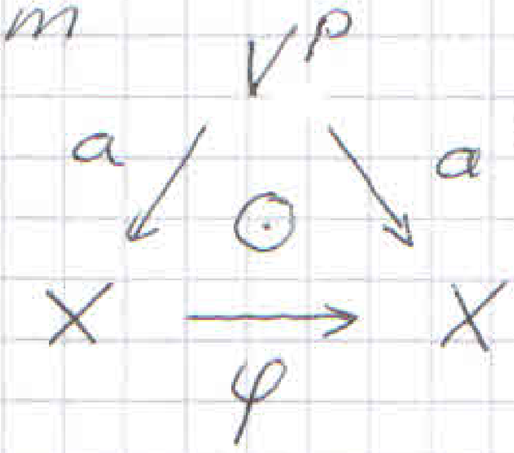
(1) Zwykle zapisujemy $\Lambda_p V := X$, $\Lambda_p := a$
oraz $\Lambda_p : V^p \ni (v_1, \dots, v_p) \longrightarrow v_1 \wedge \dots \wedge v_p \in \Lambda_p V$,
czyli $v_1 \wedge \dots \wedge v_p := \Lambda_p (v_1, \dots, v_p)$

(2) Dodatkowo przyjmujemy oznaczenie $\Lambda_0 V := \mathbb{K}$
nie oliwesłrzając dla 0.-potęgi zewnętrznej
odwzorowania.

Twierdzenie 8.8

Z: V - przestrzeń wektorowa nad $\mathbb{K}$, $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

T: (1) Istnieje (X, a) - p-ta potęga zewnętrzna V.
(2) Jeśli (X, a) i (X', a') są p-tymi potęgami
zewnętrznymi V, to istnieje dokładnie
jeden izomorfizm $\varphi : X \longrightarrow X'$ taki, że
diagram



jest przemienny.

D: W ramach przedmiotu „Algebra liniowa
z geometrią 3" [AG3].

Wprowadzamy następnie ważne oznaczenie
dla przestrzeni wektorowej V nad $\mathbb{K}$ oraz $p \in \mathbb{N}$

$$\widetilde{G}_p(V) = \begin{cases} \mathbb{K} , & p = 0 \\ \{ v_1 \wedge \dots \wedge v_p : v_1, \dots, v_p \in V \} , & p \geq 1 \end{cases}$$

Definicja 8.9 Elementy zbioru $\widetilde{G}_p(V)$ nazywamy p-wektorami prostymi.

Uwaga 8.10 Zbiór $\widetilde{G}_p(V)$ jest podzbiorem jednorodnym $\Lambda_p V$, to znaczy $\lambda \widetilde{G}_p(V) \subset \widetilde{G}_p(V)$ dla $\lambda \in \mathbb{K}$, oraz generuje $\Lambda_p V$.

4. Potęgi zewnętrzne odwzorowań liniowych.

Niech $f: V \longrightarrow W$ będzie odwzorowaniem liniowym między przestrzeniami wektorowymi nad $\mathbb{K}$ oraz niech $p \in \mathbb{N}$

Jeśli $p=0$, to p-tą potęgą zewnętrzną f nazywamy $id_{\mathbb{K}}: \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$, wtedy mamy $\Lambda_0 V = \Lambda_0 W = \mathbb{K}$.

Jeśli $p \geq 1$, to rozpatrujemy diagram

$$\begin{array}{ccc} V^p & \xrightarrow{f \times \ldots \times f} & W^p \\ {\scriptstyle \Lambda_p}\downarrow & \circlearrowright & \downarrow{\scriptstyle \Lambda_p} \\ \Lambda_p V & \xrightarrow[\Lambda^p f]{} & \Lambda_p W \end{array}$$

$\Lambda^p f$ jest odwzorowaniem liniowym dla którego ten diagram jest przemienny, czyli dla którego $(\Lambda^p f)(v_1 \wedge \ldots \wedge v_p) = f(v_1) \wedge \ldots \wedge f(v_p)$.

Wprost z definicji 8.6 wynika, że $\Lambda^p f$ jest wyznaczone jednoznacznie. Odwzorowanie $\Lambda^p f$ nazywamy p-tą potęgą zewnętrzną odwzorowania f.

5. Algebra zewnętrzna przestrzeni wektorowej

Niech V będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$. W tym fragmencie zbudujemy strukturę „tączącą" wszystkie potęgi zewnętrzne V. Ustalmy $p, q \in \mathbb{N}$. Naszym celem będzie określenie odwzorowania

$$\underline{\wedge : \Lambda_p V \times \Lambda_q V \ni (\xi, \eta) \to \xi \wedge \eta \in \Lambda_{p+q} V,}$$

które pomimo oznaczenia „$\wedge$" nie będzie koniecznie antysymetryczne (!).

Rozpatrując możliwe przypadki określamy odwzorowanie dwuliniowe:

(A) $p = 0, q = 0$

$$\wedge : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \ni (x, y) \longrightarrow x \cdot y \in \mathbb{K}$$

(B) $p = 0, q \geq 1$

$$\wedge : \mathbb{K} \times \Lambda_q V \ni (x, \zeta) \longrightarrow x \cdot \zeta \in \Lambda_q V$$

(C) $p \geq 1, q = 0$

$$\wedge : \Lambda_p V \times \mathbb{K} \ni (\xi, y) \longrightarrow y \cdot \xi \in \Lambda_p V$$

(D) $p, q \geq 1$. Wtedy istnieje dokładnie jedno odwzorowanie dwuliniowe

$$\underline{\wedge : \Lambda_p V \times \Lambda_q V \ni (\xi, \eta) \longrightarrow \xi \wedge \eta \in \Lambda_{p+q} V}$$

spełniające warunek.

$$(*) \begin{cases} \underline{(v_1 \wedge \dots \wedge v_p) \wedge (v_{p+1} \wedge \dots \wedge v_{p+q}) = v_1 \wedge \dots \wedge v_{p+q}} \\ \text{dla dowolnych } v_1, \dots, v_{p+q} \in V \end{cases}$$

Jednoznaczność jest oczywista ze względu na zadanie warunki na generatorach. Istnienie dowodzimy przepuw adzając następującą konstrukcję. Ustalając $v_1, \dots, v_p \in V$ określamy

$$f_{v_1,\dots,v_p} : V^q \ni (v_{p+1}, \dots, v_{p+q}) \to v_1 \wedge \dots \wedge v_{p+q} \in \Lambda_{p+q} V$$

Jest to odwzorowanie q-liniowe antysymetryczne więc istnieje

$$F_{v_1,\dots,v_p} : \Lambda_q V \longrightarrow \Lambda_{p+q} V \text{ - liniowe.}$$

takie, że $F_{v_1,\dots,v_p}(v_{p+1} \wedge \dots \wedge v_{p+q}) = v_1 \wedge \dots \wedge v_{p+q}$

Następnie rozpatrujemy.

$$g : V^p \ni (v_1, \dots, v_p) \longrightarrow F_{v_1,\dots,v_p} \in \mathcal{L}(\Lambda_q V; \Lambda_{p+q} V)$$

gdzie $\mathcal{L}(I; J) = \{f : I \to J \mid f \text{ - liniowe}\}$, I, J - p.w. nad K. Symbolem $\mathcal{L}$ oznaczamy uogólnione odwzorowanie liniowe. ($\mathcal{L}$ - zaverowane dla ciągłych).

Odwzorowanie g jest p-liniowe antysymetryczne, zatem istnieje odwzorowanie liniowe.

$$G : \Lambda_p V \longrightarrow \mathcal{L}(\Lambda_q V; \Lambda_{p+q})$$

takie, że $(G(v_1 \wedge \dots \wedge v_p))(v_{p+1} \wedge \dots \wedge v_q) = v_1 \wedge \dots \wedge v_{p+q}$ dla wszelkich $v_1, \dots, v_{p+q} \in V$

Teraz określamy $\wedge : \Lambda_p V \times \Lambda_q V \longrightarrow \Lambda_{p+q} V$ wzorem.

$$\xi \wedge \eta = (G(\xi))(\eta)$$

Jest to poszukiwane odwzorowanie dwuliniowe spełniające (*)

Uwaga 8.11 Jeśli $\xi \in \Lambda_p V$, $\eta \in \Lambda_q V$, to
$$\xi \wedge \eta = (-1)^{pq} \eta \wedge \xi$$

Po obydwu stronach mamy odwzorowanie dwuliniowe o wartościach w $\Lambda_{p+q} V$ zatem równość wystarczy sprawdzić na wektorach. pustych $\xi = v_1 \wedge \dots \wedge v_p$, $\eta = v_{p+1} \wedge \dots \wedge v_{p+q}$
Mamy $\xi \wedge \eta = v_1 \wedge \dots \wedge v_{p+q}$
$$\eta \wedge \xi = v_{p+1} \wedge \dots \wedge v_{p+q} \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_p = (-1)^{pq} \xi \wedge \eta$$
co kończy uzasadnienie 8.11.

Określone dwuliniowe mnożenie pozwala wprowadzić strukturę algebry na zbiorze $\Lambda V = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \Lambda_p V$
Zauważmy, że jeśli $\dim V = m \in \mathbb{N}$ to $\Lambda_p V = 0$ dla $p > m$ i ΛV jest skończenie wymiarowa.

Dla $(\alpha_0, \alpha_1, \dots)$, $(\beta_0, \beta_1, \dots)$ określamy ich mnożenie poprzez
$$(\alpha_0, \alpha_1, \dots) \wedge (\beta_0, \beta_1, \dots) = (\alpha_0 \wedge \beta_0, \alpha_0 \wedge \beta_1 + \beta_0 \wedge \alpha_1, \dots)$$

Otrzymujemy w ten sposób strukturę algebry w przestrzeni ΛV. Nie będziemy z niej dalej korzystać, używając jedna często pojedynczych mnożeń elementów $\Lambda_p V$ i $\Lambda_q V$.

6. Przykłady

Przykład 8.12 $p, m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq m$. Wybierzmy w $\Lambda(m,p) := \{\lambda : \{1,\dots,p\} \to \{1,\dots,m\} : \lambda(1) < \dots < \lambda(p)\}$ porządek liniowy (np. leksykograficzny) i określmy

$$(\mathbb{K}^m)^p \ni (v_1,\dots,v_p) \xrightarrow{\chi} (M_{\lambda_1},\dots,M_{\lambda_{\binom{m}{p}}}) \in \mathbb{K}^{\binom{m}{p}}$$

gdzie $M_{\lambda_1},\dots,M_{\lambda_{\binom{m}{p}}}$ są minorami macierzy

$$\begin{bmatrix} v_{11} & \dots & v_{p1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{1m} & \dots & v_{pm} \end{bmatrix}$$

o wierszach określonych obrazami $\lambda_1,\dots,\lambda_{\binom{m}{p}}$

Widzimy, że wychodząc od bazy kanonicznej $e_1,\dots,e_m$ dostaniemy jako $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda(m,p)}$ bazę kanoniczną przestrzeni $\mathbb{K}^{\binom{m}{p}}$. Łatwo stąd zauważyć, że χ jest p-tą potęgą zewnętrzną $\mathbb{K}^m$.

Przykład 8.13 (iloczyn wektorowy)

Niech $m \geq 3$, $p = m-1$.

Ustalając $v_1,\dots,v_{m-1} \in \mathbb{R}^m$ określamy

$$\varphi_{v_1,\dots,v_{m-1}} : \mathbb{R}^m \ni v \longrightarrow \det(v_1,\dots,v_{m-1},v) \in \mathbb{R}$$

gdzie $\det(w_1,\dots,w_m) = \begin{vmatrix} w_{11} & \dots & w_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{1m} & \dots & w_{mm} \end{vmatrix}$ dla $w_1,\dots,w_m \in \mathbb{R}^m$.

Zatem $\exists! w \in \mathbb{R}^m \ \forall v \in \mathbb{R}^m : \varphi_{v_1,\dots,v_{m-1}}(v) = (w|v)$

Uzyskany $w \in \mathbb{R}^m$ nazywany jest iloczynem wektorowym $v_1,\dots,v_{m-1}$ i oznaczany $v_1 \times \dots \times v_{m-1}$. Można pokazać (ćw.) że $\mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m \ni (v_1,\dots,v_{m-1}) \to v_1 \times \dots \times v_{m-1} \in \mathbb{R}^m$ to $m-1$ pod. zew. $\mathbb{R}^m$

Przykład 8.14 Dla $T \neq \emptyset$ i $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ rozpatrujemy odwzorowanie

$$\chi : (\mathbb{K}^T)^p \ni (f_1, \dots, f_p) \longrightarrow (T^p \ni (x_1, \dots, x_p) \to \det [f_i(x_j)]_{i,j=1\dots p} \in \mathbb{K}) \in \mathbb{K}^{T^p}$$

Jak łatwo zauważyć χ - jest p-liniowe antysymetryczne.
Sprawdzić (Ćw.) czy $\chi : (\mathbb{K}^T)^p \to Lin(\chi((\mathbb{K}^T)^p))$ jest p-tą potęgą zewnętrzną $\mathbb{K}^T$ i czy $\chi((\mathbb{K}^T)^p)$ generuje $\mathbb{K}^{T^p}$

7. Potęgi zewnętrzne przestrzeni skończenie wymiarowych

Niech V, W będą p. wektorowymi nad $\mathbb{K}$, skończenie wymiarowymi oraz niech $p \in \mathbb{N}$. Wprowadzamy oznaczenie

$$\mathcal{A}_p(V; W) = \begin{cases} W, & p = 0, \\ \{f : V^p \to W \mid f \text{ - jest } p\text{-liniowe, antysym.}\}, & p \geq 1 \end{cases}$$

oraz dodatkowo

$$\mathcal{A}_p(V) = \mathcal{A}_p(V; \mathbb{K})$$

Mamy wtedy $\mathcal{A}_0(V) = \mathbb{K}$, $\mathcal{A}_1(V) = V^*$ - przestrzeń dualna do V.

Ustalmy następnie $p, m \in \mathbb{N}$ tak aby $1 \leq p \leq m$, i niech

$$\Lambda(m,p) = \{\lambda : \{1, \dots, p\} \to \{1, \dots, m\} : \lambda(1) < \dots < \lambda(p)\}$$

Jeśli teraz V jest m-wymiarową przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$ oraz $e_1, \dots, e_m$ jest bazą V, $p \in \mathbb{N}$ i $1 \leq p \leq m$ określamy dla $\lambda \in \Lambda(m,p)$ $e_\lambda = e_{\lambda(1)} \wedge \dots \wedge e_{\lambda(p)} \in \bigwedge_p V$ otrzymując w $\bigwedge_p V$ układ $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda(m,p)}$.

Twierdzenie 8.15

Z: V - p.w. nad $\mathbb{K}$, sk. wymiarowa, $p \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq m = \dim V$

T: (1) Jeśli $e_1, \dots, e_m$ baza V, to $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda(m,p)}$ baza $\bigwedge_p V$

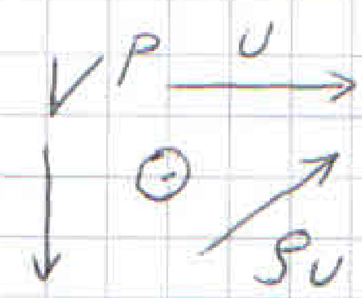
(2) $\dim \mathcal{A}_p(V; W) = \binom{m}{p} \dim W$ dla W sk. wym p.w. nad $\mathbb{K}$,

(3) Jeśli $v_1, \dots, v_p \in V$, to $v_1, \dots, v_p$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy gdy $v_1 \wedge \dots \wedge v_p \neq 0$

D: (1) Odwzorowanie p-liniowe antysymetryczne.

$$v : V^p \longrightarrow Y$$ gdzie Y p.w. nad $\mathbb{K}$, są jednoznacznie określone przez zadanie ich wartości na układach $(e_{\lambda(1)}, \dots, e_{\lambda(p)}) \in V^p$ gdzie $e_1, \dots, e_m$ jest dowolną ustaloną bazą V. Stąd tutaj dostajemy (1)

(2) Rozpatrując diagram



przemienny.

widzimy, że $I : \mathcal{A}_p(V; W) \ni v \longrightarrow \varphi_v \in \mathcal{L}(\bigwedge^p V; W)$ jest izomorfizmem skąd dostajemy równość.

(3) (ćw.)

Twierdzenie 8.16

Z: V, X - skończenie wymiarowe przestrzenie wektorowe nad $\mathbb{K}$, $p \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq m = \dim V$

$a : V^p \longrightarrow X$ odwzorowanie p-liniowe antysymetryczne.

T: Następujące warunki są równoważne:

(1) (X, a) - p-ta potęga zewnętrzna V,

(2) Dla każdej bazy $e_1, \dots, e_m$ przestrzeni V układ $\{a(e_{\lambda(1)}, \dots, e_{\lambda(p)})\}_{\lambda \in \Lambda(m,p)}$ jest bazą X

(3) Istnieje baza $e_1, \dots, e_m$ przestrzeni V taka, że układ $\{a(e_{\lambda(1)}, \dots, e_{\lambda(p)})\}_{\lambda \in \Lambda(m,p)}$ jest bazą X.

D: (1) $\Rightarrow$ (2) wynika z definicji potęgi zewnętrznej;

(2) $\Rightarrow$ (3) oczywiste,

(3) $\Rightarrow$ (1) sprawdzamy wprost z definicji.

8. Wyznacznik endomorfizmu przestrzeni skończenie wymiarowej

Niech V będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$. i niech $\dim V = m \in \mathbb{N}$. Dla endomorfizmu $L: V \to V$ rozpatrujemy $\Lambda^m L : \Lambda_m V \to \Lambda_m V$

Jeśli $m=0$, to $\Lambda^0 L = id_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ zatem gdy $m \geqslant 1$, to $\dim \Lambda_m V = 1$ istnieje $d \in \mathbb{K}$ takie, że $\Lambda^m L = d \cdot id_{\Lambda_m V}$. Jak stąd widać dla $m \in \mathbb{N}$

$$\exists! d \in \mathbb{K} : \Lambda^m L = d\, id_{\Lambda_m V}$$

Definicja 8.17 Wyżej określoną liczbę $d \in \mathbb{K}$ nazywamy wyznacznikiem endomorfizmu L i oznaczamy $\det L$.

Gdy $m=0$, to zawsze $\det L = 1$. Jeśli $m \geqslant 1$, to wybierzmy bazę $e_1, \dots, e_m$ przestrzeni V i zapiszmy L w tej bazie (ta sama baza w przestrzeni wyjściowej i docelowej) za pomocą macierzy

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ a_{m1} & & a_{mm} \end{bmatrix} \quad \text{gdzie } L(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} e_j,\ i = 1, \dots, m$$

Mamy $(\Lambda^m L)(e_1 \wedge \dots \wedge e_m) = L(e_1) \wedge \dots \wedge L(e_m) =$

$$= \Big(\sum_{j_1=1}^{m} a_{j_1 1} e_{j_1}\Big) \wedge \dots \wedge \Big(\sum_{j_m=1}^{m} a_{j_m m} e_{j_m}\Big) = \sum_{j_1, \dots, j_m = 1}^{m} a_{j_1 1} \cdots a_{j_m m}\, e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_m} =$$

$$= \Big(\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1) 1} \cdots a_{\sigma(m) m}\Big)\, e_1 \wedge \dots \wedge e_m =$$

$$= (\det A)\, e_1 \wedge \dots \wedge e_m = (\det L)\, e_1 \wedge \dots \wedge e_m,$$

gdzie $\det A$ jest znanym wyznacznikiem macierzy A

Wniosek 8.18 Jeśli $m = \dim V \geqslant 1$ oraz A jest macierzą endomorfizmu L w ustalonej bazie $e_1, \dots, e_m$ p. V, to $\det A = \det L$

9. Podstawowe identyfikacje

Niech V będzie przestrzenią wektorową skończoną wymiarową nad $\mathbb{K}$. Skonstruujemy kanoniczne identyfikacje dla dowolnego $p \in \mathbb{N}$

$$(\Lambda_p V)^* \overset{(1)}{\cong} \mathcal{A}_p(V) \overset{(2)}{\cong} \Lambda_p V^*$$

gdzie dla skończonej wymiarowej przestrzeni wektorowej W nad $\mathbb{K}$ przez W^* oznaczamy przestrzeń dualną do W czyli $W^* = L(W; \mathbb{K}) = \mathcal{L}(W; \mathbb{K})$. Ostatnia równość wynika z możliwości wyposażenia W w dowolną normę (wszystkie są równoważne) i rozważania odwzorowań liniowych ciągłych (wszystkie liniowe).

Gdy $p = 0$, to identyfikacje dostajemy z równości $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} = \mathbb{K}$ specjalnie w tym przypadku oczywistych. $(\Lambda_0 V)^* = \mathbb{K}^*$, $\mathcal{A}_0(V) = \mathbb{K}$, $\Lambda_0 V^* = \mathbb{K}$

Jeśli $p \geq 1$, to dla konstrukcji (1) wykorzystujemy definicję potęgi zewnętrznej i podobnie. w ten sposób odwzorowanie.

$$\begin{array}{ccc} V^p & \xrightarrow{f} & \mathbb{K} \\ \Lambda_p \downarrow & \odot & \nearrow \varphi_f \\ \Lambda_p V & & \end{array}$$

określone następująco

$$\varphi : \mathcal{A}_p(V) \ni f \longrightarrow \varphi_f \in (\Lambda_p V)^*$$

Jest to jak łatwo zauważyć izomorfizm

Pozostając przy $p \geq 1$, dla uzyskania (2), rozpatrujemy

$$V^* \times \dots \times V^* \ni (f_1, \dots, f_p) \longrightarrow \left(V^p \ni (v_1, \dots, v_p) \to \det [f_i(v_j)]_{i,j=1,\dots,p} \in \mathbb{K}\right).$$

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge_p & \odot & \\ \downarrow & & \uparrow \\ \bigwedge_p V^* & \xrightarrow{I} & \mathcal{A}_p(V) \end{array}$$

I - izomorfizm budowany.
z definicji p-tej potęgi zew. V^*

I - jest odwzorowaniem liniowym wprost z definicji.
Mamy. $\dim \bigwedge_p V^* = \dim \mathcal{A}_p(V) = \binom{m}{p}$ gdzie.
$m = \dim V$.
Ustalając $e_1, \dots, e_m$ bazę V oraz $e_1^*, \dots, e_m^*$
bazę dualną. rozpatrujemy $\{e_\lambda^*\}_{\lambda \in \Lambda(m,p)}$ bazę.
$\bigwedge_p V^*$. Po identyfikacji $I(e_\lambda^*)(e_{\mu(1)}, \dots, e_{\mu(p)}) = \delta_{\lambda\mu}$.
Zatem $\{I(e_\lambda^*)\}_{\lambda \in \Lambda(m,n)}$ musi być bazą $\mathcal{A}_p(V)$
skąd wynika, że I jest izomorfizmem.

Uwagi 8.19

(1) Jeśli to potrzebne skończone przestrzenie identyfikujemy
utożsamiając (1) i (2).

(2) W przypadku nieskończonego wymiaru sytuacja
się komplikuje (ćw.)

(3) Identyfikację pozwalają upuścić obliczenia, głównie.
w zakresie często wykorzystywanej w analizie.
przestrzeni $\mathcal{A}_p(V)$.

10. Mnożenie zewnętrzne form antysymetrycznych.

Niech V będzie p.w. sk. wymiarowej nad $\mathbb{K}$, $p,q \in \mathbb{N}$
Dzięki identyfikacjom mnożenie zewnętrzne możemy określić w przestrzeniach form antysymetrycznych.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_p(V) \times \mathcal{A}_q(V) & \xrightarrow{\wedge} & \mathcal{A}_{pq}(V) \\ \| & \odot & \| \\ \bigwedge_p V^* \times \bigwedge_q V^* & \xrightarrow{\wedge} & \bigwedge_{p+q} V^* \end{array}$$

Wszelkie własności przenoszą się przez identyfikację, ale czasami potrzebna jest efektywna formuła na mnożenie elementów $\mathcal{A}_p(V)$ i $\mathcal{A}_q(V)$.

Niech więc $f \in \mathcal{A}_p(V)$, $g \in \mathcal{A}_q(V)$
Jeśli $p=0$ lub $q=0$, to co najmniej jeden z elementów f, g jest skalarem i mnożenie jest zwykłym mnożeniem przez skalar $f \wedge g = f \cdot g$

Jeśli $p \geq 1$, $q \geq 1$, to zachodzi równość

$$(f \wedge g)(v_1, \dots, v_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \operatorname{sgn}(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) g(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)})$$

Uwaga 8.20

(1) Sprawdźić powyższą równość stanowiącą podstawę teorii przedstawionej w [Ca]

(2) Poszukiwany element można dostać ze wzoru sekwencyjnego $f_1 \wedge \dots \wedge f_p = f_1 \wedge (f_2 \wedge \dots (f_{p-1} \wedge f_p))$, ale nie jest to przyjemna drogą.

(3) W geometrii różniczkowej przy identyfikacjach

pojawia się współczynnik $\frac{1}{p!}$ co prowadzi do nieco innych wzorów oraz licznych nieporozumień w pojawiającej analizy i geometrii różniczkowej.

Identyfikacje pozwalają bardzo sprawnie liczyć i działać elastycznie. Biorąc $f_1, \dots, f_p \in V^*$ mamy:

(1) $f_1 \wedge \dots \wedge f_p \in \Lambda_p V^*$ zaś dostajemy możliwość potwierdzenia go jako

(2) $f_1 \wedge \dots \wedge f_p \in (\Lambda_p V)^*$ wtedy piszemy $(f_1 \wedge \dots \wedge f_p)(v_1 \wedge \dots \wedge v_p) = \dots$ i co najważniejsze.

(3) $f_1 \wedge \dots \wedge f_p \in A_p(V)$ a wtedy $(f_1 \wedge \dots \wedge f_p)(v_1, \dots, v_p) = \det [f_i(v_j)]_{i,j=1..p}$

Szczególną rolę odgrywają identyfikacje przy konstrukcji baz $A_p(V)$ gdy $\dim V = m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Biorąc $e_1, \dots, e_m$ bazę V tworzymy bazę dualną $e_1^*, \dots, e_m^*$ i otrzymujemy

$\{e_\lambda^*\}_{\lambda \in \Lambda(m,p)}$ - bazę w $\Lambda_p V^* \cong A_p(V)$

Wtedy $e_\lambda^*(v_1, \dots, v_p) = \begin{vmatrix} v_{1\lambda(1)} & \dots & v_{p\lambda(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{1\lambda(p)} & & v_{p\lambda(p)} \end{vmatrix}$

Przykład 8.21 W $A_2(\mathbb{K}^2)$ baza jest jednoelementowa złożona z odwzorowania

$$(e_1^* \wedge e_2^*)((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

11. Podprzestrzenie p-wektorów.

Niech V będzie m-wym. p.w nad $\mathbb{K}$ $p \in \mathbb{N}$
Ustalmy $\xi \in \Lambda_p V$

Definicja 8.22 Podprzestrzenią p-wektora ξ w V nazywamy $T_\xi = \{v \in V : v \wedge \xi = 0\}$

Uwaga 8.23. W powyższej sytuacji:
(1) T_ξ jest podprzestrzenią wektorową V,
(2) Jeśli $p \geq m$, to $T_\xi = V$
(3) Jeśli $p = 0$, to $T_\xi = \{0\}$ gdy $\xi \neq 0$ oraz.
$T_\xi = V$ gdy $\xi = 0$.

Twierdzenie 8.24

Z: $\dim V = m$, $p \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq m$
$\xi \in \Lambda_p V$, $\xi \neq 0$

T: (1) $\dim T_\xi \leq p$,
(2) $\dim T_\xi = p \Leftrightarrow \xi \in \tilde{G}_p(V)$,
(3) $(\xi \in \tilde{G}_p(V), \xi = v_1 \wedge \ldots \wedge v_p) \Rightarrow (T_\xi = \mathrm{Lin}\{v_1, \ldots, v_p\})$

D: (1) Jeśli $\dim T_\xi = 0$, to $\dim T_\xi \leq p$.
Jeśli $\dim T_\xi \geq 1$, to wybierzmy $e_1, \ldots, e_k$ bazę T_ξ i jej uzupełnienie $e_{k+1}, \ldots, e_m$ do bazy przestrzeni V. Wtedy $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda(m,p)}$ jest bazą $\Lambda_p V$ a zatem $\xi = \sum_{i=1} a_i e_{\lambda_i}$, przy czym możemy założyć, że $a_1 \neq 0, \ldots, a_r \neq 0$.

Mamy $\xi \wedge e_i = 0$ dla $i = 1, \dots, k$ więc $e_1 \wedge \dots \wedge e_k$ musi być początkiem każdego e_{λ_i} dla $i = 1, \dots, r$ więc $\xi = (e_1 \wedge \dots \wedge e_k) \wedge \eta$ gdzie $\eta \in \Lambda_{p-k} V$. Stąd $k \leq p$.

(2) Korzystając z (1), jeśli $k = p$ to $\eta \in \Lambda_0 V = \mathbb{K}$ czyli $\xi = a \cdot (e_1 \wedge \dots \wedge e_k)$ stąd mamy ($\Rightarrow$). Dla dowodu ($\Leftarrow$) jeśli $\xi = v_1 \wedge \dots \wedge v_p \in \widetilde{G}_p(V)$ to $\mathrm{Lin}\{v_1, \dots, v_p\} \subset T_\xi$, ale $v_1, \dots, v_p$ są liniowo niezależne, więc $\dim T_\xi \geq p$. Z punktu (1) $\dim T_\xi \leq p$ co kończy dowód.

(3) Wynika z analizy przeprowadzonej w (2)

Twierdzenie 8.25

Z: $\dim V = m$, $p \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq m$.
$\xi, \eta \in \widetilde{G}_p(V) \cup \{0\}$

T: $T_\xi = T_\eta \iff \exists a \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : \eta = a \cdot \xi$

D: ($\Leftarrow$) Oczywiste

($\Rightarrow$) Jeśli $\xi = v_1 \wedge \dots \wedge v_p$, $\eta = w_1 \wedge \dots \wedge w_p$, to $v_1, \dots, v_p$ oraz $w_1, \dots, w_p$ są bazami $T_\xi = T_\eta$. Wtedy $\eta = a \cdot \xi$ dla pewnego $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Uwaga 8.26 Otrzymujemy identyfikację dla $1 \leq p \leq m$

$$G_p(V) = \{\mathbb{K} \cdot \xi : \xi \in \widetilde{G}_p(V) \cup \{0\}\} \underset{\psi}{\sim} \{T : T \text{ - } p\text{-wym. podprz. } V\}$$

$$\lambda = \mathbb{K} \cdot \xi \longrightarrow T_\xi$$

gdzie $G_p(V) \subset \mathbb{P}(\Lambda_p V)$.

§2. Geometria potęg zewnętrznych przestrzeni unitarnych

1. Podstawowe fakty, iloczyny skalarne w przestrzeniach dualnych.

Dalej, w ramach ćwiczeń nurtu wykładu, działać będziemy w skończenie wymiarowych przestrzeniach unitarnych nad $\mathbb{R}$. Jeśle V jest taką przestrzenią z iloczynem skalarnym $(\cdot|\cdot)$, $\dim V = m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, to układ jej elementów $e_1, \ldots, e_m$ nazywamy bazą ortonormalną jeśli $(e_i|e_j) = \delta_{ij}$ dla $i,j \in \{1,\ldots,m\}$. Ważną rolę dalej odgrywać będzie następujące twierdzenie.

Twierdzenie 8.27

Z: V - przestrzeń unitarna nad $\mathbb{R}$, $\dim V = m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

$S : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ dwuliniowe symetryczne

T: Istnieje baza ortonormalna $e_1, \ldots, e_m$ przestrzeni V taka, że $S(e_i, e_j) = 0$ dla $i,j \in \{1,\ldots,m\}$, $i \neq j$.

D: $C_1 = \{x \in V : |x| = 1\}$ jest podzbiorem zwartym V oraz $C_1 \ni x \longrightarrow S(x,x) \in \mathbb{R}$ odwzorowaniem ciągłym, więc wybieramy $e_1 \in C_1$ tak, aby $S(e_1,e_1) \geqslant S(x,x)$ dla $x \in C_1$.

Następnie, kolejno dla $i = 2,3,\ldots,m$ określamy

$C_i = \{x \in V : |x| = 1,\ (x|e_k) = 0 \text{ dla } k = 1,\ldots,i-1\}$

oraz wybieramy $e_i \in C_i$ tak, aby $S(e_i,e_i) \geqslant S(x,x)$ dla $x \in C_i$

Dostajemy w ten sposób bazę ortonormalną $e_1,\ldots,e_m$ przestrzeni V, która spełnia warunki tezy.

Faktycznie, wybierzmy $i, j \in \{1, \dots, m\}$, $(i \neq j)$ i sprawdźmy, że $S(e_i, e_j) = 0$. Bez straty ogólności możemy dalej założyć, że $i < j$.

Zauważmy, że układzie

$$e_1, \dots, e_i, \dots, e_j, \dots, e_m.$$

e_i oraz e_j są prostopadłe do $e_1, \dots, e_{i-1}$, które występują w definicji zbioru C_i. W tej sytuacji, tworząc wektory

$$v_t = e_i + t e_j \quad \text{dla } t \in \mathbb{R},$$

mamy ich prostopadłość do $e_1, \dots, e_{i-1}$.

Zgodnie z określeniem C_i dostajemy.

$$S(e_i, e_i) \geq S\left(\frac{v_t}{|v_t|}, \frac{v_t}{|v_t|}\right) \text{ dla } t \in \mathbb{R}$$

Po rozpisaniu otrzymamy

$$(1+t^2) S(e_i, e_i) \geq S(e_i + t e_j, e_i + t e_j) \text{ dla } t \in \mathbb{R}.$$

Po uporządkowaniu dostajemy stąd.

$$t^2 (S(e_i, e_i) - S(e_j, e_j)) - 2t S(e_i, e_j) \geq 0 \text{ dla } t \in \mathbb{R}$$

Jak łatwo zauważyć, nierówność ta może być spełniona dla wszelkich $t \in \mathbb{R}$ wyłącznie gdy $S(e_i, e_j) = 0$, co kończy dowód Twierdzenia 8.27

Przedstawione twierdzenie będziemy stosować kilka razy w dalszych częściach wykładu. W ramach algebry liniowej jest ono dowodzone innymi metodami.

Ustalmy następnie V skończenie wymiarową przestrzeń unitarną nad $\mathbb{R}$

Definicja 8.28. Odwzorowanie.

$$\beta: V \ni v \longrightarrow \beta(v) = (v \mid \cdot) \in V^*$$

nazywamy polaryzacją wyjściowego iloczynu skalarnego

Ponieważ $\dim V = \dim V^*$ oraz $\operatorname{Ker}\beta = \{0\}$, więc β jest izomorfizmem (kanonicznym)

Definicja 8.29. Iloczyn skalarny określony na V^* przez.

$$V^* \times V^* \ni (f, g) \longrightarrow (f \mid g) = (\beta^{-1}(f) \mid \beta^{-1}(g)) \in \mathbb{R}$$

nazywamy indukowanym na V^*.

Łatwo zauważyć, że jeśli $m = \dim V \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $e_1, \ldots, e_m$ jest bazą ortonormalną V, to $(\beta(e_i))(e_j) = \delta_{ij}$ dla $i, j = 1, \ldots, m$, więc $\beta(e_1), \ldots, \beta(e_m)$ jest bazą dualną do $e_1, \ldots, e_m$. oznaczaną zwykle $e_1^*, \ldots, e_m^*$. Jest to oczywiście baza ortonormalna V^*

Uwaga 8.30 W przestrzeni V^* mamy dwie naturalne normy:

(1) norma zadana przez iloczyn skalarny oznaczana $|f|$,

(2) $\|f\| = \sup\{|f(v)| : |v| \leq 1, v \in V\}$.

Można pokazać (ćw.) że $|f| = \|f\|$ dla wszelkich $f \in V^*$

2. Iloczyny skalarne indukowane na potęgach zewnętrznych.

Rozpatrujemy skończenie wymiarową przestrzeń unitarną V nad $\mathbb{R}$ oraz polaryzację $\beta: V \longrightarrow V^*$. Ustalając $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ rozważamy

$$\Lambda^p\beta : \Lambda_p V \longrightarrow \Lambda_p V^* \cong (\Lambda_p V)^*$$

Określamy odwzorowanie.

$$(*)\ \Lambda_p V \times \Lambda_p V \ni (\xi,\eta) \longrightarrow (\xi|\eta) = ((\Lambda^p B)(\xi))(\eta) \in \mathbb{R}$$

Oznaczyliśmy jego wartość $(\xi|\eta)$ tak jak iloczyn skalarny i chcemy pokazać, że jest to iloczyn skalarny na $\Lambda_p V$. Warto rozpatrywać sytuację $1 \le p \le m = \dim V$

Na wstępie zauważmy, że jest to odwzorowanie dwuliniowe. Biorąc teraz dwa p-wektory proste: $\xi = v_1 \wedge \dots \wedge v_p$, $\eta = w_1 \wedge \dots \wedge w_p$ mamy.

$$(\xi|\eta) = ((\Lambda^p B)(\xi))(\eta) = (B(v_1) \wedge \dots \wedge B(v_p))(w_1 \wedge \dots \wedge w_p) =$$

$$= \det[(B(v_i))(w_j)]_{i,j=1\dots p} = \det\begin{bmatrix} (v_1|w_1) & \dots & (v_1|w_p) \\ (v_p|w_1) & \dots & (v_p|w_p) \end{bmatrix}$$

Biorąc teraz bazę ortonormalną $e_1, \dots, e_m$ przestrzeni V $m = \dim V$, dla $\lambda, \mu \in \Lambda(m,p)$ dostaniemy.

$$(e_\lambda | e_\mu) = \det[(e_{\lambda(i)} | e_{\mu(j)})]_{i,j=1\dots p} = \delta_{\lambda,\mu}.$$

Zatem dla $\xi = \sum'_{\lambda \in \Lambda(m,p)} a_\lambda e_\lambda$, $\eta = \sum'_{\lambda \in \Lambda(m,p)} b_\lambda e_\lambda$

dostaniemy. $(\xi|\eta) = \sum'_{\lambda \in \Lambda(m,p)} a_\lambda b_\lambda$

Stąd widać, że odwzorowanie (*) jest symetryczne. oraz dodatnio określone.

Definicja 8.31 Iloczyn skalarny (*) wprowadzony na $\Lambda_p V$ nazywamy indukowanym przez iloczyn skalarny z V

Uwagi 8.32 Jeśli $1 \leq p \leq m = \dim V$, to:

(1) $\wedge^p B$ jest polaryzacją iloczynu skalarnego na $\wedge_p V$

(2) Jeśli $e_1, \dots, e_m$ jest bazą ortonormalną V, to $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda(m,p)}$ jest bazą ortonormalną w $\wedge_p V$ z tak wprowadzonym iloczynem skalarnym.

(3) Dla układów $v_1, \dots, v_p \in V$, $w_1, \dots, w_p \in V$ mamy.

$$(v_1 \wedge \dots \wedge v_p \mid w_1 \wedge \dots \wedge w_p) = \det [(v_i \mid w_j)]_{i,j=1,\dots,p}.$$

D: Oczywiste wnioski wynikające z przeprowadzonej konstrukcji.

Uwaga 8.33 Na przestrzeni $\wedge_p V^*$ możemy wprowadzić iloczyn skalarny co najmniej dwoma równoważnymi sposobami (ćw.)

$$V \rightsquigarrow V^* \rightsquigarrow \wedge_p V^* \xleftarrow{\text{Identyfikując, która będzie izometrią.}} \wedge_{p\,sil} V^*$$
$$V \rightsquigarrow \wedge_p V \rightsquigarrow (\wedge_p V)^*$$

3. Nierówność Hadamarda.

Twierdzenie 8.34 (Nierówność Hadamarda)

Niech: V - skończenie wymiarowa, rzeczywista przestrzeń unitarna.

$\xi \in \Lambda_p V$, $\eta \in \Lambda_q V$, $p, q \in \mathbb{N}$

T: Jeśli przynajmniej jeden z wektorów ξ, η jest prosty, to zachodzi nierówność

$$|\xi \wedge \eta| \leq |\xi| \cdot |\eta|.$$

D: Bez straty ogólności możemy założyć, że $1 \leq p, q \leq m = \dim V$. Przypuśćmy, że ξ jest prosty. Wybierzmy $e_1, \dots, e_p$ bazę ortonormalną T_ξ i rozszerzmy ją przez $e_{p+1}, \dots, e_m$ do bazy ortonormalnej przestrzeni V. Wtedy mamy:

$\xi = a e_1 \wedge \dots \wedge e_p$, $\eta = \sum_{\lambda \in \Lambda(m,q)}' b_\lambda e_\lambda$ więc

$$\xi \wedge \eta = \sum_{\lambda \in \Lambda(m,q)}' a b_\lambda e_1 \wedge \dots \wedge e_p \wedge e_\lambda =$$

$$= \sum_{\lambda \in A}' a b_\lambda e_1 \wedge \dots \wedge e_p \wedge e_\lambda$$

gdzie $A = \{\lambda \in \Lambda(m,q) : \operatorname{im} \lambda \cap \{1, \dots, p\} = \emptyset\}$.

Stąd dostajemy.

$$|\xi \wedge \eta|^2 = \sum_{\lambda \in A}' a^2 b_\lambda^2 \leq a^2 \left(\sum_{\lambda \in \Lambda(m,q)}' b_\lambda^2 \right) = |\xi|^2 |\eta|^2.$$

co kończy dowód.

Uwagi 8.35

(1) Założenie, że przynajmniej jeden z wektorów jest prosty jest istotne. Przykładu można szukać dla $\dim V \geq 6$. Jeśli $e_1, \dots, e_6$ jest bazą kanoniczną w $\mathbb{R}^6$ ze zwykłym iloczynem skalarnym, to biorąc $\xi = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + e_5 \wedge e_6$ mamy $|\xi| = \sqrt{3}$ oraz $|\xi \wedge \xi| = |2e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 + 2e_1 \wedge e_2 \wedge e_5 \wedge e_6 + 2e_3 \wedge e_4 \wedge e_5 \wedge e_6| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} > 3 = |\xi| \cdot |\xi|$.

(2) Istnieje wiele wersji nierówności Hadamarda oraz jej uogólnień. Wśród lokalnych osiągnięć studenckich które uzyskały nagrody w Konkursie im. J. Mycielskiego należy wymienić Annę Wach (1990, III nagroda) oraz Bronisława Zmiję (2015, wyróżnienie). Pierwsze z tych uogólnień mówi, że można założyć, że $\xi \wedge \eta$ jest prosty w miejsce tego, że ξ lub η jest prosty z tym samym efektem (ćw.).

(3) Ciągle otwarty jest problem wyliczenia normy odwzorowania dwuliniowego

$$\wedge : \bigwedge_p V \times \bigwedge_q V \longrightarrow \bigwedge_{p+q} V,$$

gdzie V jest m-wymiarową przestrzenią unitarną nad $\mathbb{R}$ w zależności od $p, q, m \in \mathbb{N}$. Szacowania mamy wskazać dość szybko lub poszukać w [FE]. Pomimo postawienia tego problemu około 1979 r. w ramach „Herbacianej Szkockiej" KMS UJ i ufundowania nagrody (2 szampany) do tej pory nie dostał on rozwiązania!

Twierdzenie 8.36

Z: V - m-wymiarowa przestrzeń unitarna nad $\mathbb{R}$

$p \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq m$, $v_1, \dots, v_p \in V$

T: $|v_1 \wedge \dots \wedge v_p| \leq |v_1| \cdot \dots \cdot |v_p|$

D: Nierówność dowodzimy tutaj indukcyjnie.
w oparciu o 8.34 zwiększając liczbę wektorów,
z których każdy jest prosty.

Wniosek 8.37

Z: $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$.

$v_i = (v_{i1}, \dots, v_{im})$ dla $i = 1, \dots, m$.

T: $|\det(v_1, \dots, v_m)| = |\det[v_{ij}]_{i,j=1,\dots,m}| \leq |v_1| \cdot \dots \cdot |v_m|$

D: Odwzorowanie

$\wedge : (\mathbb{R}^m)^m \ni (v_1, \dots, v_m) \longrightarrow \det(v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{R}$

jest m-tą potęgą zewnętrzną $\mathbb{R}^m$, w której iloczyn skalarny w $\mathbb{R}$ jest indukowany z $\mathbb{R}^m$, więc nierówność wynika natychmiast z 8.36.
Warto zauważyć, że odwzorowanie $\wedge$ pojawiło się już wcześniej w przykładach 8.12 i 8.13. Należy też wspomnieć, że nierówność z 8.37 można spotkać w podręcznikach algebry liniowej, ale zwykle w końcowych ich rozdziałach.

§3. Normy potęg zewnętrznych odwzorowań liniowych oraz ich zastosowania.

1. Podstawowe fakty.

Twierdzenie 8.38

Z: V, W skończenie wymiarowe przestrzenie unitarne nad $\mathbb{R}$
$\dim V = n$, $\dim W = m$, $1 \leq n \leq m$
$L, \tilde{L} : V \longrightarrow W$ liniowe
$\forall v \in V : |L(v)| \leqslant |\tilde{L}(v)|$

T: $\|\Lambda^n L\| \leqslant \|\Lambda^n \tilde{L}\|$

D: Interesują nas normy odwzorowań
$\Lambda^n L, \Lambda^n \tilde{L} : \Lambda_n V \longrightarrow \Lambda_n W$,
przy czym mamy $\dim \Lambda_n V = 1$ (!).

Na podstawie Tw. 8.27 dla odwzorowania dwuliniowego symetrycznego

$S : V \times V \ni (v, w) \longrightarrow (\tilde{L}(v) | \tilde{L}(w)) \in \mathbb{R}$

istnieje baza ortonormalna $e_1, \ldots, e_n$ przestrzeni V taka, że $S(e_i, e_j) = 0$ dla $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ $i \neq j$.
Wynika stąd, że (*) układ $\tilde{L}(e_1), \ldots, \tilde{L}(e_n)$ jest ortogonalny w przestrzeni W. Otrzymujemy wtedy.

$\|\Lambda^n L\| = |(\Lambda^n L)(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n)| = |L(e_1) \wedge \ldots \wedge L(e_n)| \leqslant \ldots$

z nierówności Hadamarda.

$\ldots \leqslant |L(e_1)| \cdot \ldots \cdot |L(e_n)| \leqslant |\tilde{L}(e_1)| \cdot \ldots \cdot |\tilde{L}(e_n)| =$ (wynika z (*)) $=$
$= |\tilde{L}(e_1) \wedge \ldots \wedge \tilde{L}(e_n)| = \|\Lambda^n \tilde{L}\|$, co kończy dowód

Przejdźmy następnie do wyliczenia efektywnego normy n-tej potęgi zewnętrznej odwzorowania liniowego

$$L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad 1 \leq n \leq m,$$

na podstawie jego macierzy A w bazach kanonicznych.

Jeśli $e_1, \dots, e_n$ i $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_m$ są bazami kanonicznymi odp. w $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$, to

$$L(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \tilde{e}_j \quad \text{dla } i = 1, \dots, n$$

gdzie

$$L \sim \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = A,$$

jest macierzą L w bazach kanonicznych.

Wtedy

$$\|\Lambda^n L\| = |(\Lambda^n L)(e_1 \wedge \dots \wedge e_n)| = |L(e_1) \wedge \dots \wedge L(e_n)| =$$

$$= \left| \left(\sum_{j_1=1}^{m} a_{j_1 1} \tilde{e}_{j_1} \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{j_n=1}^{m} a_{j_n n} \tilde{e}_{j_n} \right) \right| =$$

$$= \left| \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^{m} a_{j_1 1} \cdot \dots \cdot a_{j_n n} \, \tilde{e}_{j_1} \wedge \dots \wedge \tilde{e}_{j_n} \right| =$$

$$= \left| \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda(m,n) \\ \sigma \in S_n}}' a_{\lambda(\sigma(1))1} \cdot \dots \cdot a_{\lambda(\sigma(n))n} \, \tilde{e}_{\lambda(\sigma(1))} \wedge \dots \wedge \tilde{e}_{\lambda(\sigma(n))} \right| =$$

$$= \left| \sum_{\lambda \in \Lambda(m,n)}' \left(\sum_{\sigma \in S_n}' (\operatorname{sgn} \sigma) a_{\lambda(\sigma(1))1} \cdot \dots \cdot a_{\lambda(\sigma(n))n} \right) \tilde{e}_\lambda \right| =$$

$$= \left| \sum_{\lambda \in \Lambda(m,n)}' M_\lambda \tilde{e}_\lambda \right| \quad \text{gdzie}$$

M_λ jest minorem A o wierszach $\lambda(\{1, \dots, n\})$

Stąd otrzymujemy

$$\| \Lambda^n L \| = \sqrt{\sum_{\lambda \in \Lambda(m,n)} M_\lambda^2}$$

Przeliczenie to możemy zorganizować nieco inaczej.

$$\| \Lambda^n L \|^2 = (L(e_1) \wedge \dots \wedge L(e_n) \,/\, L(e_1) \wedge \dots \wedge L(e_n)) =$$

$$= \det \left[(L(e_i) \,/\, L(e_j)) \right]_{i,j=1,\dots,n} =$$

$$= \det \left[A^T \circ A \right].$$

Definicja 8.39 W powyższej sytuacji dla odwzorowania $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $1 \leq n \leq m$ określamy symbol:

$$|L| = \left(\sum_{\lambda \in \Lambda(m,n)} M_\lambda^2 \right)^{1/2}$$

gdzie M_λ, $\lambda \in \Lambda(m,n)$ są minorami L w bazach kanonicznych odpowiadającymi $\lambda \in \Lambda(m,n)$

Uwaga 8.40 W powyższej sytuacji mamy równość

$$\| \Lambda^n L \|^2 = |L|^2 = \det \left[(L(e_i) \,/\, L(e_j)) \right]_{i,j=1,\dots,n} = \det \left[A^T \circ A \right]$$

Wniosek 8.41 Jeśli $L, \tilde{L} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ są liniowe, $1 \leq n \leq m$ oraz $\forall v \in \mathbb{R}^n : |L(v)| \leq |\tilde{L}(v)|$, to $|L| \leq |\tilde{L}|$.

D: Wynika natychmiast z 8.38 i 8.39

Wniosek 8.42 Jeśli $H : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ są liniowe oraz $1 \leq n \leq m$, to $|L \circ H| = |L| \, |\det H|$

D: $\Lambda^n (L \circ H) = (\Lambda^n L) \circ (\Lambda^n H)$, co kończy dowód.

Uwaga 8.43 Czasami $|L|$ nazywany jest uogólnionym wyznacznikiem L.

2. Zastosowania uogólnionych wyznaczników.

Zagadnienia związane z uogólnionym wyznacznikiem (Grama) są badane już od końca XIX w. Jak później pokażemy, dla $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ liniowego $1 \leq n \leq m$, $|L|$ jest współczynnikiem określającym transformację miary Lebesgue'a podzbioru $\mathbb{R}^n$ do miary Hausdorffa (n-wymiarowej) obrazu tego podzbioru przez L.
Dokładniej, dla $A \subset \mathbb{R}^n$ mamy równość:

$$\mathcal{H}^n(L(A)) = |L| \mathcal{H}^n(A) = |L| \mathcal{L}^n(A)$$

W ramach AM2 sygnalizowałem następujące twierdzenie (AM2 6.25)

Twierdzenie

Z: Ω - otwarty w $\mathbb{R}^n$, $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ klasy C^1, $1 \leq n \leq m$
$E \subset \Omega$, E - $\mathcal{L}^n$ mierzalny, $f|E$ injekcja.

T: $\mathcal{H}^n(f(E)) = \int_E |f'(x)| \, d\mathcal{L}^n(x)$

D: Poznamy w Rozdziale 4 wykładu AM4.

Całkowana funkcja $|f'(x)| = J_n f(x)$, $x \in \Omega$ jest nazywana najczęściej n-tym jakobianem f. Mówimy tutaj o uogólnionym wyznaczniku macierzy Jacobiego odwzorowania f.

Rozdział 9. Formy różniczkowe

§1. Podstawowe definicje i fakty

1. Pojęcie formy różniczkowej

Niech U będzie podzbiorem otwartym przestrzeni $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{R}^0 := \{0\}$) oraz $n \in \mathbb{N}$

Definicja 9.1 Formą różniczkową rzędu n (krócej n-formą) na zbiorze U nazywamy odwzorowanie

$$\omega : U \longrightarrow \Lambda_n(\mathbb{R}^m).$$

Mówimy, że forma ω jest klasy C^k dla $k \in \{0, 1, \ldots, \infty\}$ jeśli jest klasy C^k jako odwzorowanie U w przestrzeń Banacha $\Lambda_n(\mathbb{R}^m)$. Symbolami

$$\Omega_n(U) \text{ i } \Omega_n^{(k)}(U),$$

oznaczać będziemy odpowiednio przestrzenie n-form i n-form klasy C^k na U

Przykłady 9.2 Ustalmy U-otwarty w $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$

(1) Funkcję $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ możemy traktować jako 0-formę bo $\Lambda_0(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Jeśli f jest kl. C^k, to jako forma $f \in \Omega_0^{(k)}(U)$.

(2) Dla $\omega \in \Omega_m(U)$ mamy $\omega = f \cdot \omega_0$ gdzie $\omega_0 = e_1^* \wedge \ldots \wedge e_m^*$ jest formą stałą zaś $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Łatwo to zauważyć bo $\dim \Lambda_m(\mathbb{R}^m) = 1$.

(3) Jeśli $f: U \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją różniczkowalną, to $f' = \omega : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}) = \mathcal{A}_1(\mathbb{R}^m)$ jest 1-formą. Jeśli f jest klasy C^k, to wtedy $f' \in \Omega_1^{(k-1)}(U)$, dla $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Uwagi 9.3

(1). Teorię form buduje się często znacznie szerzej, nad ciałem $\mathbb{K}$ i dla przestrzeni Banacha, a nawet unormowanych. Wtedy symbol $\mathcal{A}_n(E; F)$ oznacza przestrzeń ciągłych odwzorowań n-liniowych, antysymetrycznych o wartościach w F, zaś n-formą o wartościach w F to odwzorowanie.

$$\omega : U \longrightarrow \mathcal{A}_n(E; F),$$

gdzie U - otwarty w E, zaś E i F są przestrzeniami Banacha (unormowanymi) (zob. [Ca]).
Jednak przechodząc do przypadku ogólniejszego napotykamy cały szereg kłopotów, które w naszej sytuacji rozwiązują identyfikacje oparte na teorii potęg zewnętrznych.

(2). Wracając do naszej sytuacji, dla formy $\omega \in \Omega_n(U)$, U - otwarty w $\mathbb{R}^m$, $m, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ wprowadzamy zapis. dla $x \in \Omega$, $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$.

$$\omega(x; v_1, \ldots, v_n) := \omega(x)(v_1, \ldots, v_n)$$

2. Postać kanoniczna formy różniczkowej - wersja wstępna

Każdą formę różniczkową możemy zapisać w dość prostej, bardzo wygodnej postaci, korzystając z bazy kanonicznej przestrzeni $\mathbb{R}^m$ przy $1 \leq n \leq m$, gdzie n jest rzędem formy.

Ustalając $\lambda \in \Lambda(m,n)$, odwzorowanie $e^*_\lambda \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}^m)$. możemy, dla dowolnego zbioru otwartego U w $\mathbb{R}^m$, potraktować jako stałą formę różniczkową. o tej własnie własności, czyli

$$e^*_\lambda : U \ni x \longrightarrow e^*_\lambda \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}^m).$$

Teraz dla dowolnej n-formy ω na U i $x \in U$ mamy

$$\omega(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda(m,n)}{}' \omega_\lambda(x) e^*_\lambda$$

gdzie $\omega_\lambda(x) \in \mathbb{R}$ dla $\lambda \in \Lambda(m,n)$

Mamy zatem przedstawienie dla $\omega \in \Omega_n(U)$

$$\omega = \sum_{\lambda \in \Lambda(m,n)}{}' \omega_\lambda e^*_\lambda \quad , \quad \omega_\lambda \in \Omega_0(U)$$

Jak łatwo zauważyć uzyskujemy w $\Omega_n(U)$ strukturę $\Omega_0(U)$ modułu.

W przyszłości znajdziemy jeszcze wygodniejszy zapis formy, w którym formy e^*_λ otrzymają postać dx_λ opartą na pojęciu różniczki (pochodnej) zewnętrznej.

Uwaga 9.4 W powyższej sytuacji dla $k \in \{0,1,\dots,\infty\}$

$$\omega \in \Omega_n^{(k)}(U) \Leftrightarrow \forall \lambda \in \Lambda(m,n) : \omega_\lambda \text{ jest klasy } C^k$$

D: ($\Rightarrow$) Zauważmy, że dla $\lambda \in \Lambda(m,n)$ i $x \in U$

$$\omega_\lambda(x) = \omega(x)(e_{\lambda(1)}, \dots, e_{\lambda(n)}).$$

Biorąc zatem odwzorowanie liniowe

$$L_\lambda : A_n(\mathbb{R}^m) \ni g \longrightarrow g(e_{\lambda(1)}, \dots, e_{\lambda(n)}) \in \mathbb{R}$$

mamy $\omega_\lambda = L_\lambda \circ \omega$ co kończy dowód

($\Leftarrow$) Odwzorowanie $\mathbb{R} \times A_n(\mathbb{R}^m) \ni (a,g) \to ag \in A_n(\mathbb{R}^m)$ jest dwuliniowe ciągłe, a zatem lokalnie. $\omega_\lambda e_\lambda^*$ są klasy C^k więc ich suma również.

W dalszym ciągu tego paragrafu zajmiemy się podstawowymi operacjami na formach różniczkowych takimi jak mnożenie oraz różniczkowanie zewnętrzne. Następnie, po przygotowaniu, poświęcimy do bardziej zaawansowanych operatorów i ich własności

3. Iloczyn zewnętrzny form różniczkowych.

Ustalmy w tym punkcie zbiór otwarty $U \subset \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$.

Definicja 9.5 Iloczynem zewnętrznym form. $\alpha \in \Omega_p(U)$, $\beta \in \Omega_q(U)$, gdzie $p, q \in \mathbb{N}$ nazywamy $p+q$ - formę $\alpha \wedge \beta$ na U określoną równością:

$$(\alpha \wedge \beta)(x) := \alpha(x) \wedge \beta(x) \text{ dla } x \in U$$

Uwagi 9.6. Niech $p, q, r \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

(1) Jeśli $k \in \{0, 1, \ldots, \infty\}$ oraz $\alpha \in \Omega_p^{(k)}(U)$, $\beta \in \Omega_q^{(k)}(U)$, to $\alpha \wedge \beta \in \Omega_{p+q}^{(k)}(U)$.

(2) Jeśli $\alpha \in \Omega_p(U)$, $\beta \in \Omega_q(U)$, to $\beta \wedge \alpha = (-1)^{p \cdot q} \alpha \wedge \beta$

(3) Jeśli α, β, γ są odpowiednio p, q, r formami na U, to $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$.

(4) Jeśli $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Omega_1(U)$, to określając $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n := \alpha_1 \wedge (\alpha_2 \wedge \ldots (\alpha_{n-1} \wedge \alpha_n))$, dostajemy $(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n)(x; v_1, \ldots, v_n) = \det [\alpha_i(x; v_j)]_{i,j=1,\ldots,n}$ (Ćw.)

(5) Jeśli $\alpha \in \Omega_0(U)$ lub $\beta \in \Omega_0(U)$, to $(\alpha \wedge \beta)(x) = \alpha(x) \cdot \beta(x)$ i piszemy zwykle $\alpha\beta$ zamiast $\alpha \wedge \beta$.

(6) Możemy według klasycznego schematu określić algebrę $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n(U)$ dostając dla $k \in \{0, 1, \ldots, \infty\}$ jej naturalne podalgebry $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n^{(k)}(U)$.

4. Różniczka zewnętrzna formy różniczkowej

Ustalmy w tym punkcie podzbiór otwarty U przestrzeni $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$

Biorąc $\omega \in \Omega_n^{(1)}(U)$ mamy odwzorowanie.

$$\omega : U \longrightarrow \Lambda_n(\mathbb{R}^m) \quad kl\ C^1.$$

Wtedy dla każdego $x \in U$ dostajemy pochodną ω w x

$$\omega'(x) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \Lambda_n(\mathbb{R}^m) \text{ liniowe.}$$

Zajmiemy się następnie własnościami odwzorowania.

$$(*)\quad (\mathbb{R}^m)^{n+1} \ni (v_0, \dots, v_n) \longrightarrow \sum_{i=0}^{n}{}' (-1)^i (\omega'(x).v_i)(v_0, \dots, \check{v}_i, \dots, v_n) \in \mathbb{R}$$

przy ustalonym $x \in U$, gdzie przez $\check{v}_i$ oznaczamy brak v_i w rozpatrywanym układzie dla $i = 0, \dots, n$.

Łatwo zauważyć, że $(*)$ jest $n+1$ liniowe. Pokażemy jego antysymetrię. Przypuśćmy, że $v_p = v_q = v$ dla pewnych $p < q$, $p, q \in \{0, 1, \dots, n\}$. Ze względu na antysymetrię względem ostatnich n pozycji z sumy określającej wartość $(*)$ pozostaną dwa składniki: $(-1)^p(\omega'(x).v_p)(v_0, \dots, \check{v}_p, \dots, v_n)$ oraz $(-1)^q(\omega'(x).v_q)(v_0, \dots, \check{v}_q, \dots, v_n)$

Kładąc $\alpha = \omega'(x).v_p = \omega'(x).v_q = \omega'(x).v$ dostajemy składniki: $(-1)^p \alpha(v_0, \dots, v_{p-1}, v_{p+1}, \dots, v_n)$ oraz

$$(-1)^q \alpha(v_0, \dots, v_{q-1}, v_{q+1}, \dots, v_n) =$$

$$= (-1)^q \alpha(v_0, \dots, v_p, \dots, v_{q-1}, v_{q+1}, \dots, v_n) =$$

$= (-1)^q \cdot (-1)^{q-1-p} \alpha(v_0, \dots, v_{p-1}, v_{p+1}, \dots, v_n)$, czyli w sumie jest 0.

Definicja 9.7 *Różniczką zewnętrzną formy.*
$\omega \in \Omega_n^{(1)}(U)$ nazywamy $n+1$-formę $d\omega$ na U określoną równością.

$$(d\omega)(x; v_0, \dots, v_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\omega'(x).v_i)(v_0, \dots, \overset{\vee}{v_i}, \dots, v_n)$$

Uwagi 9.8

(1) Zamiennie, różniczkę zewnętrzną formy nazywamy jej pochodną zewnętrzną.

(2) Do postawienia definicji wystarcza w zasadzie. różniczkowalność formy, ale taka operacja nie. daje istotnych zastosowań

(3) Pokażemy w przystępniejszej (bliższej) dla $\omega \in \Omega_n^{(k)}(U)$, $k \geq 1$, że $d\omega \in \Omega_{n+1}^{(k-1)}(U)$. Dobierając stosowne założenia można to pokazać na tym etapie (Ćw.)

Przykłady 9.9 Niech U, m, n oraz $\omega \in \Omega_n^{(1)}(U)$ jak na wstępie

(1) Jeśli ω jest formą stałą, to $\omega' = 0$ i wtedy $d\omega = 0$

(2) Niech $n = 0$, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R})$ oraz $\omega = f/U$.
Wtedy $(d\omega)(x; v) = \omega'(x).v = f.v$ dla $x \in U$
Zatem $d\omega$ jest formą stałą.

(3) Na U rozpatrujemy 0-formy.
$x_i : U \ni (x_1, \dots, x_m) \longrightarrow x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$.
Wtedy $dx_i : U \ni x \longrightarrow e_i^* \in \mathcal{A}_1(\mathbb{R}^m)$ są.
1-formami stałymi, $i = 1, \dots, m$

(4). Rozpatrujemy 0-formę $f: U \longrightarrow \mathbb{R}$ kl C^1.
Mamy $(df)(x) = f'(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) e_1^* + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m} e_m^*$
Możemy zatem, korzystając z (3) zapisać

$$\underline{df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m} \quad \text{lub równoważnie}$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \wedge dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \wedge dx_m .$$

5. Postać kanoniczna formy różniczkowej

Zajmijmy się U otwartym w $\mathbb{R}^m$ oraz n-formą $\omega \in \Omega_n(U)$ w sytuacji gdy $1 \leq n \leq m$. Jeśli $n = 0$, to ω jest funkcją zaś gdy $n > m$, to ω się zeruje zatem rozpatrywany zakres $1 \leq n \leq m$ obejmuje przypadki form, które są nam mniej znane.
Dla $\omega \in \Omega_n(U)$ dostajemy zawsze

$$\underline{\omega = \sum_{\lambda \in \Lambda(m,n)}{}' \omega_\lambda e_\lambda^*,}$$

gdzie ω_λ są funkcjami na U, zaś e_λ^* formami stałymi $e_\lambda^* = e_{\lambda(1)}^* \wedge \ldots \wedge e_{\lambda(n)}^*$ dla $\lambda \in \Lambda(m,n)$.

Dzięki wprowadzonym formom dx_i, $i = 1, \ldots, m$ możemy już bez identyfikacji zapisać ω w tak zwanej postaci kanonicznej

$$\boxed{\omega = \sum_{\lambda \in \Lambda(m,n)}{}' \omega_\lambda dx_{\lambda(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\lambda(n)}}$$

lub równoważnie $\omega = \sum_{\lambda \in \Lambda(m,n)}{}' \omega_\lambda \wedge dx_{\lambda(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\lambda(n)}$
Określając dla skrócenia zapisu symbole dla $\lambda \in \Lambda(m,n)$ $dx_\lambda := dx_{\lambda(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\lambda(n)}$ dostajemy $\underline{\omega = \sum_{\lambda \in \Lambda(m,n)}{}' \omega_\lambda dx_\lambda}$

Należy zwrócić uwagę, że w ostatnim, najkrótszym zapisie

$$\omega = \sum_{\lambda \in \Lambda(m,n)}{}' \omega_\lambda dx_\lambda ,$$

„dx_λ" dla $\lambda \in \Lambda(m,n)$ to tylko symbole a nie wynik działania „d" na „x_λ".

6. Własności różniczkowania zewnętrznego

Twierdzenie 9.10

Z: U - zbiór otwarty w $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$ oraz $n \in \mathbb{N}$

T: (1) $d : \Omega_n^{(1)}(U) \ni \omega \longrightarrow d\omega \in \Omega_{n+1}(U)$ jest liniowe.

(2) $f \in \Omega_0^{(1)}(U)$, $\omega \in \Omega_n(U)$ - forma stała $\Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{d(f \cdot \omega) = df \wedge \omega}$

(3) $k \in \{1, \dots, \infty\} \Rightarrow \underline{d(\Omega_n^{(k)}(U)) \subset \Omega_{n+1}^{(k-1)}(U)}$

D: (1) jest prostą konsekwencją definicji.

(2) i (3) gdy $n = 0$ lub $n > m$ są oczywiste.

Dalej zajmiemy się sytuacją gdy $1 \leq n \leq m$.

(2) Wystarczy pokazać, że dla $\lambda \in \Lambda(m,n)$ zachodzi równość $d(f\,dx_\lambda) = df \wedge dx_\lambda$, gdyż reszta wynikanie wtedy z liniowości d.

Dla $x \in U$ mamy $(f\,dx_\lambda)(x) = f(x) e_\lambda^*$, więc pomocniczo rozpatrzmy odwzorowanie.

$$\underline{F : \mathbb{R} \ni t \longrightarrow t e_\lambda^* \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}^m)}.$$

Wtedy $f \cdot dx_\lambda = F \circ f$ i zgodnie z definicją otrzymujemy

$$d(f\,dx_\lambda)(x;v_0,\dots,v_n) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i ((F\circ f)'(x).v_i)(v_0,\dots,\overset{\vee}{v_i},\dots,v_n) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (f'(x).v_i)\, e^*_\lambda(v_0,\dots,\overset{\vee}{v_i},\dots,v_n)$$

Z drugiej strony dostajemy:

$$(df\wedge dx_\lambda)(x;v_0,\dots,v_n) = (f'(x)\wedge e^*_\lambda)(v_0,\dots,v_n) =$$

$$= (f'(x)\wedge e^*_{\lambda(1)}\wedge\dots\wedge e^*_{\lambda(n)})(v_0,\dots,v_n) =$$

$$= \begin{vmatrix} f'(x).v_0 & \dots & f'(x).v_n \\ e^*_{\lambda(1)}(v_0) & \dots & e^*_{\lambda(1)}(v_n) \\ \vdots & & \\ e^*_{\lambda(n)}(v_0) & \dots & e^*_{\lambda(n)}(v_n) \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+1}(f'(x).v_0)(e^*_{\lambda(1)}\wedge\dots\wedge e^*_{\lambda(n)})(\overset{\vee}{v_0},v_1,\dots,v_n) +$$

$$+ \dots + (-1)^{1+(n+1)}(f'(x).v_n)(e^*_{\lambda(1)}\wedge\dots\wedge e^*_{\lambda(n)})(v_0,\dots,\overset{\vee}{v_n}) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (f'(x).v_i)\, e^*_\lambda(v_0,\dots,\overset{\vee}{v_i},\dots,v_n)$$

Zatem mamy równość $d(f\wedge dx_\lambda) = df\wedge dx_\lambda$, co kończy uzasadnienie (2).

(3) Jeśli $k\in\{1,\dots,\infty\}$, to inkluzja $d(\Omega^{(k)}_n(U)) \subset \Omega^{(k-1)}_{n+1}(U)$ jest oczywista przy $n=0$ lub $n>m$. Dla $1\le n\le m$ mamy:

$$\omega = \sum_{\lambda\in\Lambda(m,n)} {}' \omega_\lambda dx_\lambda, \text{ więc } d\omega = \sum_{\lambda\in\Lambda(m,n)} {}' d\omega_\lambda\wedge dx_\lambda.$$

Ponieważ $d\omega_\lambda = \frac{\partial\omega_\lambda}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial\omega_\lambda}{\partial x_m}dx_m$ więc po wymnożeniu tutaj dostajemy tezę.

Twierdzenie 9.11

Zł: U - otwarty w $\mathbb{R}^m$, $\alpha \in \Omega_p^{(1)}(U)$, $\beta \in \Omega_q^{(1)}(U)$
gdzie $m, p, q \in \mathbb{N}$

Tł: $d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (d\beta)$

D: Jeśli $p = 0$ lub $q = 0$ tezę dostajemy z 9.10 lub wzoru na pochodną iloczynu (Ćw.)
Jeśli $p > m$ lub $q > m$, to obydwie strony rozpatrywanej równości zerują się.

Zajmiemy się więc przypadkiem $1 \le p, q \le m$.
Mamy przedstawienia α i β

$$\alpha = \sum_{\lambda \in \Lambda(m,p)}{}' \alpha_\lambda dx_\lambda \,, \quad \beta = \sum_{\mu \in \Lambda(m,q)}{}' \beta_\mu dx_\mu$$

zatem $\alpha \wedge \beta = \sum_{\lambda,\mu}{}' (\alpha_\lambda \beta_\lambda) dx_\lambda \wedge dx_\mu$, λ, μ zakresy j.w

Na podstawie 9.10 dostajemy więc

$$d(\alpha \wedge \beta) = \sum_{\lambda,\mu}{}' d(\alpha_\lambda \beta_\mu) \wedge dx_\lambda \wedge dx_\mu =$$

$$= \sum_{\lambda,\mu}{}' (d\alpha_\lambda \beta_\mu + \alpha_\lambda d\beta_\mu) \wedge dx_\lambda \wedge dx_\mu =$$

$$= \sum_{\lambda,\mu}{}' d\alpha_\lambda \wedge dx_\lambda \wedge \beta_\mu dx_\mu +$$

$$+ (-1)^p \sum_{\lambda,\mu}{}' \alpha_\lambda dx_\lambda \wedge (d\beta_\mu \wedge dx_\mu)$$

$$= (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (d\beta)$$

co kończy dowód.

Twierdzenie 9.12

Z: U - otwarty w $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$

$\omega \in \Omega^{(2)}_n(U)$, $n \in \mathbb{N}$

T: $d(d\omega) = 0$

D: Jeśli $n > m$, to równość zachodzi gdyż $\Omega_{n+2}(U) = \{0\}$.

Jeśli $1 \leq n \leq m$, to skorzystamy z postaci kanonicznej formy ω. Jednak ze względu na liniowość różniczkowania zewnętrznego wystarczy równość sprawdzić dla form postaci

$\omega = f\, dx_\lambda$ gdzie $\lambda \in \Lambda(m,n)$.

W tej sytuacji dostajemy.

$$d\omega = df \wedge dx_\lambda = \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) \wedge dx_\lambda =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_\lambda$$

Zatem

$$d(d\omega) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j\right) \wedge dx_i \wedge dx_\lambda =$$

$$= \left(\sum_{\substack{i<j \\ i,j \in \{1,\dots,m\}}} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) dx_j \wedge dx_i\right) \wedge dx_\lambda$$

$= 0$ ze względu na symetrię drugiej pochodnej!

Jeśli $n = 0$, to powyższe jest identyczne jw. bez czynnika (bierznego) dx_λ. To kończy dowód.

7. Operacja podstawiania i jej własności

Niech U będzie otwarty w $\mathbb{R}^m$, G otwarty w $\mathbb{R}^p$, $g: G \longrightarrow U$ będzie różniczkowalne, $m, p \in \mathbb{N}$ i niech $n \in \mathbb{N}$.

Definicja 2.13 Jeśli $\omega \in \Omega_n(U)$, to przez $g^*\omega$ oznaczamy n-formę na G określoną równością $(g^*\omega)(x; v_1, \dots, v_n) = \omega(g(x); g'(x).v_1, \dots, g'(x).v_n)$ dla $x \in G$ oraz $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^p$. Odwzorowanie

$$g^*: \Omega_n(U) \ni \omega \longrightarrow g^*\omega \in \Omega_n(G),$$

nazywamy podstawieniem g.

Na wstępie zajmiemy się opisem podstawiania w formach w postaci kanonicznej.

Jeśli $n = 0$, to podstawianie jest zwykłym składaniem.
Jeśli $n > m$, to dostajemy formy zerowe.
Jeśli $1 \le n \le m$, to rozważmy:

$$g = (g_1, \dots, g_m), \quad \omega = \sum_{\lambda \in \Lambda(m,n)}{}' \omega_\lambda dx_\lambda.$$

Wtedy dostajemy

$$(g^*\omega)(x; v_1, \dots, v_n) = \omega(g(x); g'(x).v_1, \dots, g'(x).v_n) =$$

$$= \sum_{\lambda \in \Lambda(m,n)}{}' \omega_\lambda(g(x))(e^*_{\lambda(1)} \wedge \dots \wedge e^*_{\lambda(n)})(g'(x).v_1, \dots, g'(x).v_n) =$$

$$= \sum_{\lambda \in \Lambda(m,n)}{}' \omega_\lambda(g(x)) \det[g'_{\lambda(i)}(x).v_j]_{i,j=1,\dots,n} =$$

$$= \sum_{\lambda \in \Lambda(m,n)}{}' \omega_\lambda(g(x))(g'_{\lambda(1)}(x) \wedge \dots \wedge g'_{\lambda(n)}(x))(v_1, \dots, v_n)$$

Zatem, bez argumentów $(v_1, \dots, v_n)$ dostajemy.

$$(g^*\omega)(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda(m,n)}{}' \omega_\lambda(g(x)) g'_{\lambda(1)}(x) \wedge \dots \wedge g'_{\lambda(n)}(x)$$

Czyli, finalnie, dostajemy.

$$g^*\omega = \sum_{\lambda \in \Lambda(m,n)}{}' (\omega_\lambda \circ g)\, dg_{\lambda(1)} \wedge \dots \wedge dg_{\lambda(n)}.$$

Inaczej mówiąc, pod zmienne $x_1, \dots, x_m$ wstawiamy. składowe $g_1, \dots, g_m$ odwzorowania g!
Dalej możemy wynik przekształcać wykorzystując. równości

$$dg_i = \frac{\partial g_i}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial g_i}{\partial x_p} dx_p \quad , i = 1, \dots, m$$

doprowadzając całość do postaci kanonicznej w $G \subset \mathbb{R}^p$, którą dostaniemy po uporządkowaniu.

$$g^*\omega = \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda(m,n) \\ i_1, \dots, i_n = 1, \dots, p}}{}' (\omega_\lambda \circ g) \frac{\partial g_{\lambda(1)}}{\partial x_{i_1}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial g_{\lambda(n)}}{\partial x_{i_n}} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}$$

Uwagi 9.14

(1). Przy wykonywaniu operacji podstawiania warto w praktycznym podejściu zróżnicować oznaczenie zmiennych w U i G.

(2) Jeśli $n = 0$, to $\omega : U \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją oraz $g^*\omega = \omega \circ g$
W tej sytuacji założenie różniczkowalności g nie jest w zasadzie potrzebne

(3) Jeśli $m = p = n \geq 1$, to forma $\omega \in \Omega_n(U)$ jest postaci

$$\omega = f\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m,$$

gdzie $f: U \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją.

Podobną postać ma również

$$g^*\omega = h\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m = (f \circ g)\, dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_n$$

gdzie $h: G \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją.

W tej sytuacji mamy

$$h(x) = f(g(x))\,(g_1'(x) \wedge \ldots \wedge g_n'(x))\,(e_1, \ldots, e_n) =$$

$$= f(g(x))\, \det\left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)\right]_{i,j=1,\ldots,n} =$$

$$= f(g(x))\, \det g'(x).$$

Czyli $g^*\omega = (f \circ g)\, \det g'\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$

Twierdzenie 9.15 (Podstawowe własności podstawiania)

Zł: U - otwarty w $\mathbb{R}^m$, G - otwarty w $\mathbb{R}^p$, $m, p \in \mathbb{N}$

$g: G \longrightarrow U$ różniczkowalne, $n \in \mathbb{N}$

Tł: (1) $g^*: \Omega_n(U) \longrightarrow \Omega_n(G)$ jest liniowe.

(2) Jeśli $n \geq 1$, to dla $k \in \mathbb{N}$ przy g - klasy C^{k+1} mamy $g^*(\Omega_n^{(k)}(U)) \subset \Omega_n^{(k)}(G)$ oraz. $g^*(\Omega_n^{(\infty)}(U)) \subset \Omega_n^{(\infty)}(G)$ gdy g - klasy C^∞.

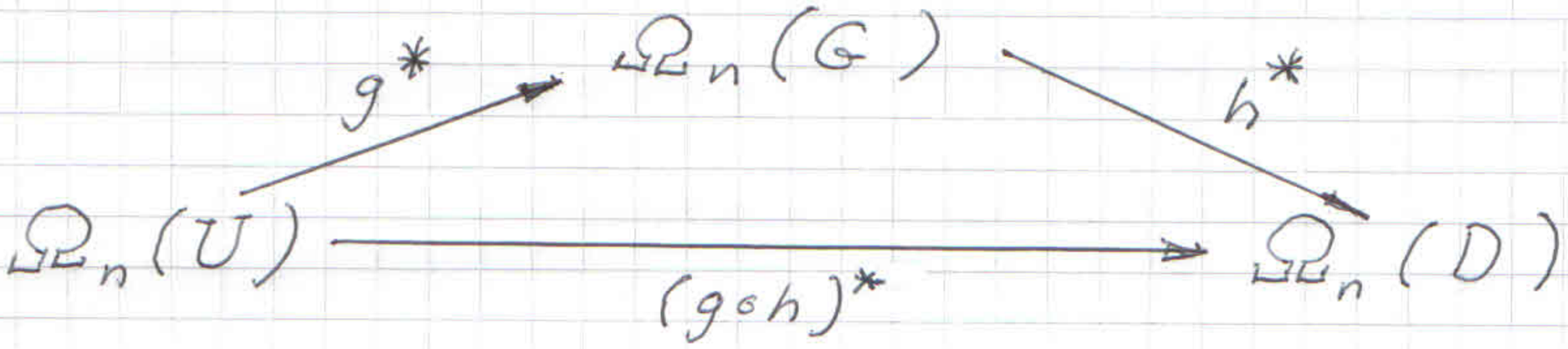
(3) Jeśli g jest klasy C^k, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, to $g^*(\Omega_0^{(k)}(U)) \subset \Omega_0^{(k)}(G)$.

D: Własności oczywiste gdy $n = 0$ lub $n > m$. Dla $1 \leq n \leq m$ dostajemy je tutwo analizując współczynniki po podstawieniu w postaci kanonicznej

Niech U, G, D będą zbiorami otwartymi odpowiednio w $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q$, $m, p, q \in \mathbb{N}$ oraz niech

$$g: G \to U, \quad h: D \to G$$

będą różniczkowalne. Dla $n \in \mathbb{N}$ mamy odwzorowania



Twierdzenie 9.16 W powyższej sytuacji $(g \circ h)^* = h^* \circ g^*$

D: Dla $\omega \in \Omega_n(U)$ mamy przy $n \geq 1$, $x \in G$

$$(g^*\omega)(x; w_1, \ldots, w_n) = \omega(g(x))(g'(x).w_1, \ldots, g'(x).w_n),$$

a zatem dla $y \in D$

$$h^*(g^*\omega)(y; v_1, \ldots, v_n) = (g^*\omega)(h(y))(h'(y).v_1, \ldots, h'(y).v_n) =$$

$$= \omega(g(h(y)))(g'(h(y)).(h'(y).v_1), \ldots, g'(h(y)).(h'(y).v_n))$$

czyli

$$((h^* \circ g^*)(\omega))(y)(v_1, \ldots, v_n) =$$

$$= \omega((g \circ h)(y))((g \circ h)'(y).v_1, \ldots, (g \circ h)'(y).v_n) =$$

$$= ((g \circ h)^* \omega)(y; v_1, \ldots, v_n).$$

Wszystko zatem wynika ze wzoru na pochodną złożenia funkcji różniczkowalnych.

Twierdzenie 9.17

Z: U - otwarty w $\mathbb{R}^m$, G - otwarty w $\mathbb{R}^d$, $m, d \in \mathbb{N}$

$g: G \longrightarrow U$ różniczkowalne

$\alpha \in \Omega_p(U)$, $\beta \in \Omega_q(U)$, $p, q \in \mathbb{N}$

T: $g^*(\alpha \wedge \beta) = (g^*\alpha) \wedge (g^*\beta)$

D: Jeśli $1 \leq p \leq m$, $1 \leq q \leq m$, to korzystając z przedstawienia w postaci kanonicznej mamy.

(#) $\alpha = \sum_{\lambda \in \Lambda(m,p)} \alpha_\lambda dx_\lambda$, $\beta = \sum_{\mu \in \Lambda(m,q)} \beta_\mu dx_\mu$.

Ze względu na dwuliniowość mnożenia zewnętrznego równość wystarczy pokazać dla składników w (#) czyli, że.

$$g^*(\alpha_\lambda \beta_\mu dx_\lambda \wedge dx_\mu) = g^*(\alpha_\lambda dx_\lambda) \wedge g^*(\beta_\mu dx_\mu).$$

dla $\lambda \in \Lambda(m,p)$ i $\mu \in \Lambda(m,q)$. Wystarczy więc sprawdzić, że.

$$((\alpha_\lambda \cdot \beta_\mu) \circ g)\, dg_\lambda \wedge dg_\mu = ((\alpha_\lambda \circ g)\, dg_\lambda) \wedge ((\beta_\mu \circ g)\, dg_\mu)$$

gdzie $dg_\lambda = dg_{\lambda(1)} \wedge \dots \wedge dg_{\lambda(p)}$ dla $\lambda \in \Lambda(m,p)$.

$dg_\mu = dg_{\mu(1)} \wedge \dots \wedge dg_{\mu(q)}$ dla $\lambda \in \Lambda(m,q)$.

Ta równość jest jednak oczywista.

Jeśli $p = 0$ lub $q = 0$, to powyższe obliczenia upraszczają się. Jeśli $p > m$ lub $q > m$, to równość z tezy zeruje się.

8. Przemienność różniczkowania zewnętrznego i podstawiania.

Twierdzenie 9.18

Z: U - otwarty w $\mathbb{R}^m$, G - otwarty w $\mathbb{R}^p$, $m,p \in \mathbb{N}$

$g: G \to U$, $\omega \in \Omega_n^{(1)}(U)$, $n \in \mathbb{N}$

$(n=0$, g - klasy $C^1)$ lub $(n \geq 1$, g - klasy $C^2)$

T: $g^*(d\omega) = d(g^*\omega)$

D: Jeśli $n > m$, to obydwie strony równości zerują się.

Jeśli $n=0$ i g - jest kl C^1, to $\omega: U \to \mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^1 oraz $g^*\omega = \omega \circ g$.

Zatem dla $x \in G$ dostajemy

$(d(g^*\omega))(x) = (d(\omega \circ g))(x) = \omega'(g(x)) \circ g'(x) =$

$= (g^*(d\omega))(x)$ co daje równość przy pierwszym wnioskowaniu założeń

Jeśli $1 \leq n \leq m$ oraz g jest klasy C^2, to po zapisaniu ω w postaci kanonicznej mamy.

$$\omega = \sum_{\lambda \in \Lambda(m,n)}{}' \omega_\lambda \, dx_{\lambda(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\lambda(n)}.$$

$$g^*\omega = \sum_{\lambda \in \Lambda(m,n)}{}' (\omega_\lambda \circ g) \, dg_{\lambda(1)} \wedge \ldots \wedge dg_{\lambda(n)}.$$

Zatem:

$$d(g^*\omega) = \sum_{\lambda \in \Lambda(m,n)}{}' d(\omega_\lambda \circ g) \wedge dg_{\lambda(1)} \wedge \ldots \wedge dg_{\lambda(n)} +$$

$$+ \sum_{\lambda \in \Lambda(m,n)}{}' (\omega_\lambda \circ g) \, d(dg_{\lambda(1)} \wedge \ldots \wedge dg_{\lambda(n)}) =$$

$= \ldots$

Zauważmy, że dla $\lambda \in \Lambda(m,n)$ mamy.

$$d(dg_{\lambda(1)} \wedge \dots \wedge dg_{\lambda(n)}) = \underbrace{d(dg_{\lambda(1)})}_{=0} \wedge dg_{\lambda(2)} \wedge \dots \wedge dg_{\lambda(n)} -$$

$$- dg_{\lambda(1)} \wedge d(dg_{\lambda(2)} \wedge \dots \wedge dg_{\lambda(n)}) = \dots$$

$= 0$ ze względu na tatwe postępowanie indukcyjne

Zatem.

$$d(g^*\omega) = \sum_{\lambda \in \Lambda(m,n)}{}' d(\omega_\lambda \circ g) \wedge dg_{\lambda(1)} \wedge \dots \wedge dg_{\lambda(n)} =$$

$$= \sum_{\lambda \in \Lambda(m,n)}{}' g^*(d\omega_\lambda) \wedge dg_{\lambda(1)} \wedge \dots \wedge dg_{\lambda(n)} =$$

$$= g^*\left(\sum_{\lambda \in \Lambda(m,n)}{}' (d\omega_\lambda) \wedge dx_{\lambda(1)} \wedge \dots \wedge dx_{\lambda(n)}\right) =$$

$$= g^*(d\omega), \text{ co kończy dowód.}$$

§2. Formy zamknięte i formy dokładne

1. Wstępne definicje i przykłady.

U - podzbiór otwarty $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$ oraz $n \in \mathbb{N}$

Definicja 9.19 Formę $\omega \in \Omega_n^{(1)}(U)$ nazywamy zamkniętą jeśli $d\omega = 0$

Definicja 9.20 Jeśli $n \geq 1$, to formę $\omega \in \Omega_n(U)$ nazywamy dokładną jeśli istnieje $\alpha \in \Omega_{n-1}^{(1)}(U)$ takie, że $d\alpha = \omega$. W tej sytuacji α nazywamy pierwotną ω.

Definicja 9.21 Jeśli $n \geq 1$, to formę $\omega \in \Omega_n(U)$ nazywamy lokalnie dokładną jeśli:

$\forall a \in U \; \exists V$-otoczenie a : $V \subset U$, $\omega|V$ jest dokładna.

Uwagi 9.22

(1) Formy dokładne i lokalnie dokładne są ciągłe.

(2) Trudno gwarantować, że przy dokładności ω, forma pierwotna α jest wyższej klasy niż ω.

(3) Czasami formy dokładne są nazywane zupełnymi

Przykłady 9.23

(1) $\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy \in \Omega_1^{(\infty)}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$

gdzie przez x i y oznaczamy rzutowanie na osie $\mathbb{R}^2$. Wtedy

$$d\omega = -\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy\wedge dx + \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\wedge dy =$$

$$= \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy\wedge dx + \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\wedge dy = 0$$

Zatem ω jest formą zamkniętą.

Rozpatrzmy w zbiorze $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ funkcję

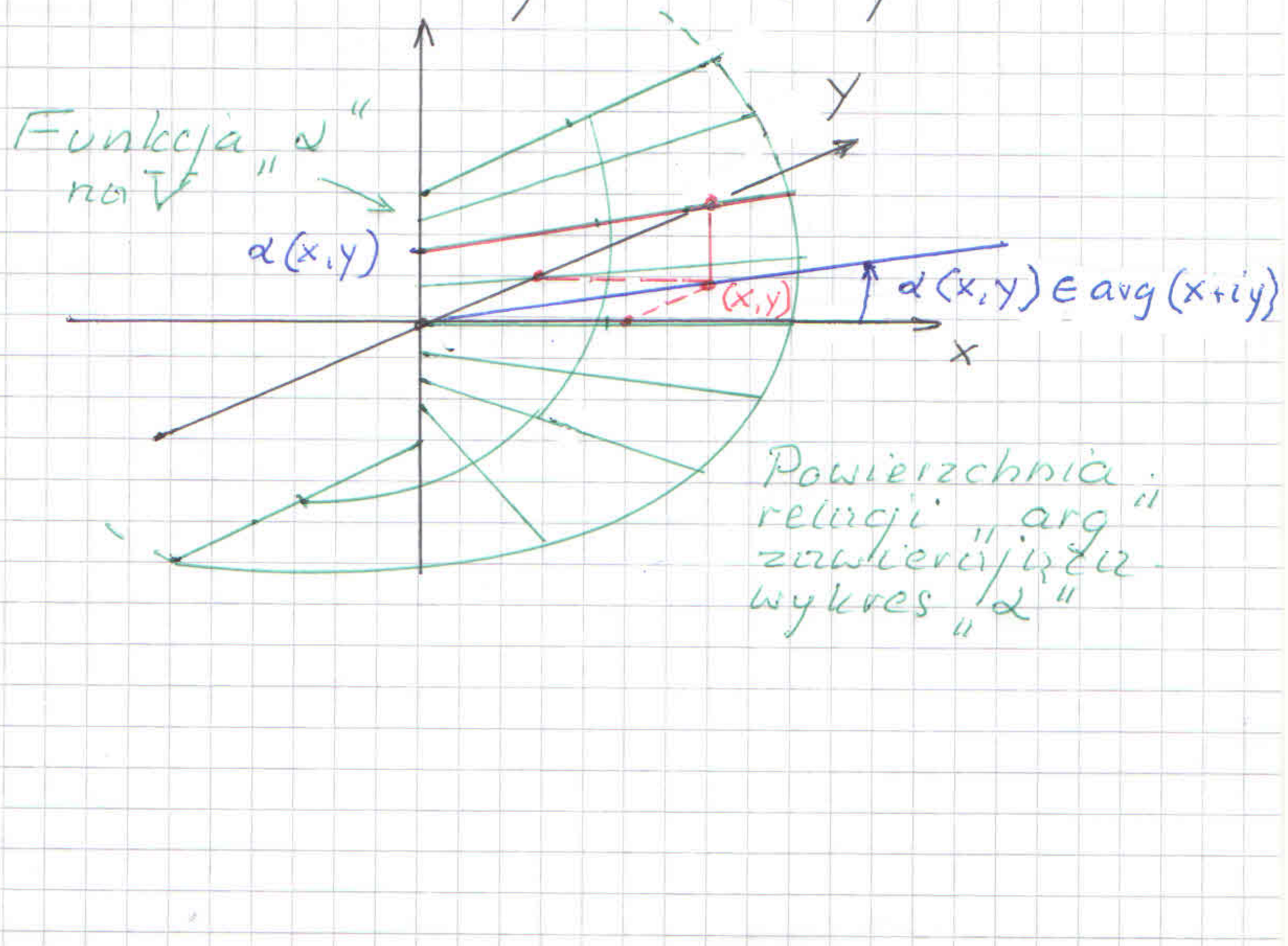
$$\alpha : V \ni (x,y) \longrightarrow \alpha(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \in \mathbb{R}.$$

Warto odnotować, że $\alpha(x,y) \in \arg(x+iy)$.

Mamy

$$d\alpha = -\frac{y}{x^2}\,\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\,dx + \frac{1}{x}\,\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\,dy =$$

$$= -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = \omega$$



Powierzchnia relacji „arg" zawierająca wykres „α"

W podobny sposób możemy budować pierwotne. formy ω w innych obszarach płaszczyzny, ale. czy ω ma pierwotną w $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$?

Przypuśćmy, że istnieje $\beta \in \Omega_0^{(1)}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ taka, że $\omega = d\beta$ i rozpatrzmy odwzorowanie

$$g : \mathbb{R} \ni t \longrightarrow g(t) = (\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Określmy

$$f : \mathbb{R} \ni t \longrightarrow (g^*\omega)(t; e_1) \in \mathbb{R}.$$

Jest to odwzorowanie ciągłe więc możemy wyliczyć całkę Cauchy'ego

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \int_0^{2\pi} (g^*(d\beta))(t, e_1)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} d(g^*\beta)(t, e_1)\,dt = \int_0^{2\pi} (g^*\beta)'(t)\,dt =$$

$$= (g^*\beta)(2\pi) - (g^*\beta)(0) = 0$$

Jednak mamy.

$$f(t) = (-\sin t\, d(\cos t) + \cos t\, d(\sin t)) \cdot e_1 =$$

$$= ((\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt) \cdot e_1 = 1,$$

więc $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 2\pi$ co daje sprzeczność.

Wynika stąd, że forma ω jest zamknięta, ale nie jest formą dokładną.

(2) Dość łatwo uzyskiwać w podzbiorach otwartych. U w $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$ formy zamknięte. Wystarczy wziąć funkcję $f: U \longrightarrow \mathbb{R}$ klasy C^2 i wyliczyć $\omega = df = f'$. Wtedy ω jest oczywiście formą zamkniętą, ale jest to też formą dokładną. Czy można jednak budować formy takie jak w (1) czyli zamknięte, ale nie będące formami dokładnymi? Warto zwrócić uwagę na jedną z możliwości w tym zakresie, którą dalej przedstawiamy.

Niech U będzie otwarty w $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ oraz niech $f: U \longrightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją $\mathbb{C}$-analityczną. Rozpiszmy formalnie $f = u + iv$, $dz = dx + i\,dy$ i rozpatrzmy „formę holomorficzną"

$$f(z)\,dz = (u+iv)(dx+i\,dy) =$$

$$= (u\,dx - v\,dy) + i\,(v\,dx + u\,dy)$$

Interesują nas uzyskane części rzeczywiste i urojona będące 1-formami klasy C^∞ w zwykłym sensie. Wyliczmy ich różniczki zewnętrzne

$$d(u\,dx - v\,dy) = du \wedge dx - dv \wedge dy =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) \wedge dx - \left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) \wedge dy =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial y}\,dy \wedge dx - \frac{\partial v}{\partial x}\,dx \wedge dy = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dy \wedge dx$$

$$\underline{d(v\,dx + u\,dy)} = dv \wedge dx + du \wedge dy =$$

$$= \left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) \wedge dy =$$

$$= \frac{\partial v}{\partial y}dy \wedge dx + \frac{\partial u}{\partial x}dx \wedge dy = \underline{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx \wedge dy}$$

Jednak f jest $\mathbb{C}$-różniczkowalna oraz jej pochodna

$$f' = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

w każdym punkcie ma macierz będącą odwzorowaniem $\mathbb{C}$-liniowym co daje nam równania

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (C.R.)$$

Skąd dostajemy

$$\underline{d(u\,dx - v\,dy) = 0}$$
$$\underline{d(v\,dx + u\,dy) = 0}$$

Czyli obydwie rozpatrywane formy są zamknięte.

Przykładowo biorąc $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
oraz $f(z) = \frac{1}{z}$ dla $z \in U$ dostaniemy.

$$f(z)dz = \frac{dz}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}(dx + i\,dy) =$$

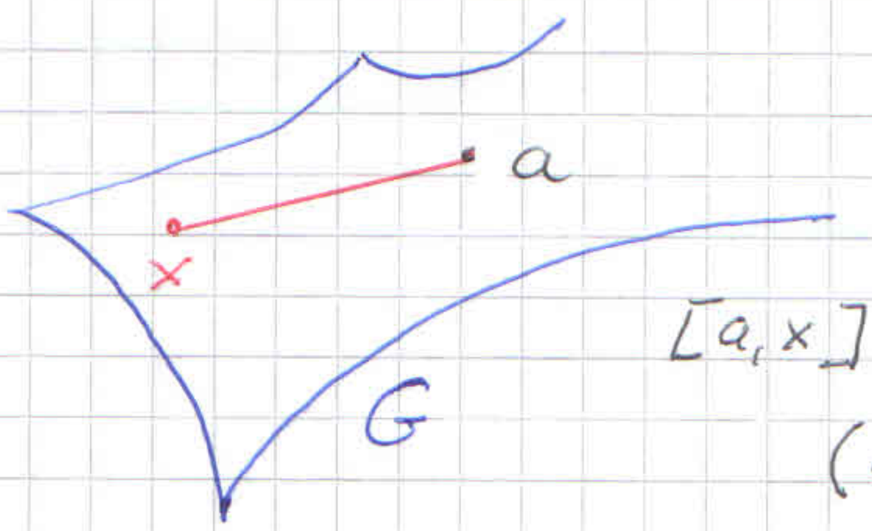
$$= \frac{x - iy}{x^2+y^2}(dx + i\,dy) =$$

$$= \left(\frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy\right) + i\left(\frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy\right)$$

Zatem przykład (1) analizuje część urojoną powyższej, formalnej formy $f(z)dz$.

2. Operator Poincarégo

Definicja 9.24 Podzbiór G przestrzeni $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$ nazywamy gwiaździstym względem swojego punktu a jeśli $\forall x \in G : [a,x] \subset G$



$$[a,x] = \{a + t(x-a) : t \in [0,1]\}$$

(odcinek o końcach a i x)

Ustalmy następnie zbiór G otwarty w $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$ i gwiaździsty względem $0 \in G$. Dla $\omega \in \Omega_n^{(0)}(G)$ gdzie $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ określamy $H\omega \in \Omega_{n-1}(G)$ równością

$$(H\omega)(x; v_2, \dots, v_n) = \int_0^1 t^{n-1} \omega(tx; x, v_2, \dots, v_n)\, dt$$

dla $x \in G$ oraz $v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$. W definicji funkcję ciągłą całkujemy w sensie Cauchy'ego (Riemanna). Łatwo tutaj zauważyć $n-1$ liniowość oraz antysymetrię dla $(H\omega)(x)$, $x \in G$, więc powyższa definicja jest poprawna.

Definicja 9.25 W powyższej sytuacji odwzorowanie

$$H : \Omega_n^{(0)}(G) \ni \omega \longrightarrow H\omega \in \Omega_{n-1}(G)$$

nazywamy operatorem Poincarégo.

Na wstępie sprawdźmy działanie operatora H na formach postaci

$$\omega = f\, dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_n} \in \Omega_n^{(0)}(G),$$

gdzie $f: G \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą oraz $j_1, \dots, j_n \in \{1, \dots, m\}$

Otrzymujemy

$$(H\omega)(x; v_2, \dots, v_n) = \left(\int_0^1 t^{n-1} f(xt)\,dt\right)(e^*_{j_1} \wedge \dots \wedge e^*_{j_n})(x, v_2, \dots, v_n)$$

Rozpisując drugi czynnik dostajemy.

$$(e^*_{j_1} \wedge \dots \wedge e^*_{j_n})(x, v_2, \dots, v_n) = \begin{vmatrix} x_{j_1} & (v_2)_{j_1} & \dots & (v_n)_{j_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{j_n} & (v_2)_{j_n} & \dots & (v_n)_{j_n} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_{j_i} (e^*_{j_1} \wedge \dots \wedge \check{e}^*_{j_i} \wedge \dots \wedge e^*_{j_n})(v_2, \dots, v_n) \quad \text{skąd}$$

$$(\#)\quad H\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_{j_i} \left(\int_0^1 t^{n-1} f(tx)\,dt\right) dx_{j_1} \wedge \dots \wedge \check{dx}_{j_i} \wedge \dots \wedge dx_{j_n}$$

Twierdzenie 9.26

Zł: G - otwarty w $\mathbb{R}^m$, gwiaździsty względem $0 \in G$, $m \in \mathbb{N}$

$\omega \in \Omega_n^{(k)}(G)$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

Tz: (1) $H\omega \in \Omega_{n-1}^{(k)}(G)$,

(2) $H: \Omega_n^{(k)}(G) \ni \omega \to H\omega \in \Omega_{n-1}^{(k)}(G)$ jest liniowe.

D: Jeśli $n > m$, to H jest zerowe i twierdzenie zachodzi.

Jeśli $1 \le n \le m$, $\omega = \sum_{\lambda \in \Lambda(m,n)} \omega_\lambda\, dx_\lambda$, to wystarczy sprawdzić, że $H(\omega_\lambda\, dx_\lambda)$ jest klasy C^k dla $\lambda \in \Lambda(m,n)$.

Z wstępnego przygotowania poprzedzającego twierdzenie mamy

$$H(\omega_\lambda\, dx_\lambda) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_{\lambda(i)} \left(\int_0^1 t^{n-1} \omega_\lambda(tx)\,dt\right) \check{dx}^i_\lambda,$$

gdzie $\check{dx}^i_\lambda := dx_{\lambda(1)} \wedge \dots \wedge \check{dx}_{\lambda(i)} \wedge \dots \wedge dx_{\lambda(n)}$ dla $\lambda \in \Lambda(m,n)$.

Do sprawdzenia punktu (1) tezy należy wykazać, że uzyskane funkcje, dla $\lambda \in \Lambda(m,n)$,

$$G \ni x \longrightarrow \int_0^1 t^{n-1} \omega_\lambda(tx)\, dt \in \mathbb{R}$$

są klasy C^k, wiedząc z założeń, że ω_λ są klasy C^k.

Rozpatrzymy sytuację nieco ogólniejszą, w której G jest podzbiorem otwartym $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ oraz $f: G \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła.
Tworzymy wtedy odwzorowanie

$$g: G \ni x \longrightarrow \int_0^1 f(x,t)\, dt \in \mathbb{R}$$

w którym całkę traktujemy jako całkę Cauchy'ego lub równoważnie, jako całkę Riemanna.

Lemat 9.27

Z.: W powyższej sytuacji dla dowolnego m-wskaźnika α takiego, że $|\alpha| \leq k$ istnieje i jest ciągła.

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} : G \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

T: (1) g - jest klasy C^k

(2) $\dfrac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial x^\alpha}(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(x,t)\, dt$, $x \in G$, $|\alpha| \leq k$.

D: Aby wykazać powyższy lemat wystarczy rozpatrzyć jedynie dwa przypadki $k=0$ i $k=1$.

Dla $k=0$ ustalmy $a \in G$ oraz $r>0$ tak, aby $\overline{K}(a,r) \subset G$.
Skoro $f | \overline{K}(a,r) \times [0,1]$ jest jednostajnie ciągła,
więc dla $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że $\delta < r$
oraz $|f(x,t) - f(a,t)| < \varepsilon/2$ dla $x \in K(a,\delta)$, $t \in [0,1]$.
Wtedy

$$|g(x) - g(a)| \leq \int_0^1 \varepsilon/2 \, dt = \varepsilon/2 < \varepsilon,$$

co kończy dowód.

Dla $k=1$ ustalmy $j \in \{1,\dots,m\}$. Wystarczy teraz pokazać, że:

$$(*) \quad \frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t)\,dt$$

Odwzorowanie $\frac{\partial f}{\partial x_j} : G \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągłe
Ustalmy $a \in G$ oraz $r>0$ tak, aby $\overline{K}(a,r) \subset G$.
Wybierzmy następnie $\varepsilon > 0$. Skoro $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ jest jednostajnie ciągłe na $\overline{K}(a,r) \times [0,1]$, więc istnieje $\delta \in (0,r)$ takie, że

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a,t) \right| < \varepsilon/2$$

dla $x \in K(a,\delta)$ i $t \in [0,1]$. Stąd dostajemy dla $|h| < \delta$

$$\left| \frac{g(a+he_j) - g(a)}{h} - \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(a,t)\,dt \right| =$$

$$= \frac{1}{|h|} \left| \int_0^1 \left(f(a+he_j,t) - f(a,t) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a,t)\,h \right) dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|h|} \left(\sup_{s \in [0,h]} \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(a+se_j,t) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a,t) \right| \right) |h| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$$

To kończy sprawdzenie (*) zaś dysponując możliwością stosowania tej równości względem każdej zmiennej indukcyjnie dostajemy tezę (2), więc również (1).

Stosując Lemat 9.27 tutaj sprawdzamy, że rozpatrywane w dowodzie twierdzenia funkcje

$$G \ni x \longrightarrow \int_0^1 t^{n-1}\omega_\lambda(tx)\,dt \in \mathbb{R},$$

są klasy C^k dla $\lambda \in \Lambda(m,n)$, co kończy dowód punktu (1). W tej sytuacji punkt (2) jest oczywisty.

Uwagi 9.28

(1) W sytuacji rozpatrywanej w dowodzie Tw. 9.26 przy $1 \le n \le m$ oraz $\omega = \sum_{\lambda \in \Lambda(m,n)} \omega_\lambda dx_\lambda \in \Omega_n^{(k)}(G)$ dostajemy wzór:

$$H\omega = \sum_{\lambda \in \Lambda(m,n)} \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_{\lambda(i)} \left(\int_0^1 t^{n-1}\omega_\lambda(tx)\,dt \right) dx_\lambda^{\check{i}} \right)$$

gdzie $dx_\lambda^{\check{}} = dx_{\lambda(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\lambda(i)}^{\check{}} \wedge \ldots \wedge dx_{\lambda(n)}$ dla $\lambda \in \Lambda(m,n)$, $i = 1, \ldots, n$.

(2) Operator Poincarégo H jest różnie oznaczany. Na przykład w [Ca] ma symbol „k". Symbol H, który przyjmujemy, jest prawdopodobnie związany z jednym z imion Poincarégo - Henri.

(3) Poincaré, to Jules Henri Poincaré i we wszystkich książkach nazwisko to jest zapisywane z akcentem (silnym) nad e. Innym matematykiem, który nauczył wydawców pisania „ł" jest, jak wiadomo, Stanisław Łojasiewicz.

3. Twierdzenie Poincarégo i jego konsekwencje

Twierdzenie 9.29 (Poincarégo)

Z: G otwarty w $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$ i gwiaździsty względem $0 \in G$

$\omega \in \Omega_n^{(1)}(G)$, $n \in \mathbb{N}$

T: (1) Jeśli $n \geq 1$, to $\underline{H(d\omega) + d(H\omega) = \omega}$,

(2) Jeśli $n = 0$, to $\underline{H(d\omega) + \omega(0) = \omega}$.

Przed przystąpieniem do dowodu, który ma charakter obliczeniowy, zwrócimy uwagę na konsekwencje tego twierdzenia dotyczące badania form zamkniętych. Zauważmy, że. jeśli w powyższej sytuacji $\underline{d\omega = 0, \text{ przy } n \geq 1}$, to dostajemy równość

$$\underline{d(H\omega) = \omega}.$$

Zatem dla formy zamkniętej ω forma $H\omega$ jest pierwotną!

D: $\underline{(1) \text{ Jeśli } n > m}$, to wszystkie składniki tej równości zerują się.

$\underline{\text{Jeśli } 1 \leq n \leq m}$, to możemy rozpatrywać formę ω w postaci kanonicznej

$$\omega = \sum_{\lambda \in \Lambda(m,n)}{}' \omega_\lambda dx_\lambda$$

Ze względu na liniowość dowód wystarczy przeprowadzić dla jednego składnika $\omega_\lambda dx_\lambda$, $\lambda \in \Lambda(m,n)$.
Korzystając z uzyskanej wcześniej równości (#) oraz wprowadzonych oznaczeń dostajemy:

$$\underline{d(H(\omega_\lambda dx_\lambda))} =$$

$$= d\left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_{\lambda(i)} \left(\int_0^1 t^{n-1}\omega_\lambda(tx)dt\right) dx_\lambda^{\check{i}}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^1 t^{n-1}\omega_\lambda(tx)dt\right)(-1)^{i-1} dx_{\lambda(i)} \wedge dx_\lambda^{\check{i}} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} (-1)^{i-1} x_{\lambda(i)} \left(\int_0^1 t^{n-1}\frac{\partial \omega_\lambda}{\partial x_j}(tx)\,t\,dt\right) dx_j \wedge dx_\lambda^{\check{i}}\right) =$$

$$= n\left(\int_0^1 t^{n-1}\omega_\lambda(tx)dt\right) dx_\lambda +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (-1)^{i-1} x_{\lambda(i)} \left(\int_0^1 t^{n}\frac{\partial \omega_\lambda}{\partial x_j}(tx)dt\right) dx_j \wedge dx_\lambda^{\check{i}}$$

$$\underline{H(d(\omega_\lambda dx_\lambda))} = H\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \omega_\lambda}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_\lambda\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} H\left(\frac{\partial \omega_\lambda}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_\lambda\right) \overset{(*)}{=}$$

(*) stosujemy (#) ze str. 9-26

$$= \sum_{j=1}^{m} \left(x_j \left(\int_0^1 t^{n}\frac{\partial \omega_\lambda}{\partial x_j}(tx)dt\right)\right) dx_\lambda$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i} x_{\lambda(i)} \left(\int_0^1 t^{n}\frac{\partial \omega_\lambda}{\partial x_j}(tx)dt\right) dx_j \wedge dx_\lambda^{\check{i}}$$

Po dodaniu wyników powyższych dwóch przedziałem drugie składniki skracają się i dostajemy:

$$\underline{H(d(\omega_\lambda dx_\lambda)) + d(H(\omega_\lambda dx_\lambda))} =$$

$$= n\left(\int_0^1 t^{n-1}\omega_\lambda(tx)dt\right) dx_\lambda +$$

$$+ \left(\sum_{j=1}^{m} x_j \left(\int_0^1 t^{n}\frac{\partial \omega_\lambda}{\partial x_j}(tx)dt\right)\right) dx_\lambda =$$

$$= \left(\int_0^1 \left(n t^{n-1} \omega_\lambda(tx) + \sum_{j=1}^{m}{}' x_j \cdot \frac{\partial \omega_\lambda}{\partial x_j}(tx) t^n \right) dt \right) dx_\lambda =$$

$$= \left(\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \left(t^n \omega_\lambda(tx) \right) dt \right) dx_\lambda = \underline{\omega_\lambda dx_\lambda}$$

To kończy dowód (1).

(2). Niech $n = 0$.

Jeśli $m = 0$, to ω jest stała i dostajemy $\omega(0) = \omega(0)$

Jeśli $m \geq 1$, to $\omega : G \to \mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^1

Wtedy.

$$\underline{H(d\omega)} = \sum_{j=1}^{m}{}' x_j \cdot \left(\int_0^1 \frac{\partial \omega}{\partial x_j}(tx)\, dt \right) =$$

$$= \int_0^1 \sum_{j=1}^{m}{}' x_j \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_j}(tx)\, dt$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} (\omega(tx))\, dt = \underline{\omega - \omega(0)}$$

To kończy dowód (2).

Twierdzenie 9.30

Z: G - otwarty w $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$ gwiaździsty względem 0

$\omega \in \Omega_n^{(k)}(G)$, $n \geq 1$, $k \in \{1, 2, \ldots, \infty\}$

ω - zamknięta.

T: (1) ω - dokładna.

(2) $\exists \alpha \in \Omega_{n-1}^{(k)}(G) : d\alpha = \omega$

D: Mamy $n \geq 1$, więc na podstawie 2.29 zawsze $H(d\omega) + d(H\omega) = \omega$. Skoro $\underline{d\omega = 0}$, więc biorąc $\alpha = H\omega$ dostajemy $\underline{d\alpha = \omega}$, co kończy dowód.

Lemat 9.31

Z: D, G - zbiory otwarte w $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$
$\varphi: D \to G$ C^2-dyfeomorfizm, $n \geq 1$

T: Następujące warunki są równoważne:
(1) Każda n-forma zamknięta w D jest dokładna.
(2) Każda n-forma zamknięta w G jest dokładna.

D: Ze względu na symetrię wystarczy pokazać (1) $\Rightarrow$ (2)

Jeśli ω - jest zamknięta w G, to $\varphi^*\omega$ jest zamknięta w D bo $d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega) = 0$.
Zatem $\varphi^*\omega$ ma pierwotną w D - oznaczmy ją przez β. Biorąc $\alpha = (\varphi^{-1})^*\beta$ dostajemy

$$d\alpha = d((\varphi^{-1})^*\beta) = (\varphi^{-1})^* d\beta = (\varphi^{-1})^*\varphi^*\omega = \omega,$$

co kończy dowód.

Twierdzenie 9.32

Z: D otwarty w $\mathbb{R}^m$, C^2-dyfeomorficzny z otwartym, gwiaździstym względem pewnego swojego punktu, zbiorem w $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

T: Każda n-forma zamknięta w D jest dokładna.

D: Istnieje G - otwarty, gwiaździsty względem 0 podzbiór $\mathbb{R}^m$ oraz $\varphi: D \to G$ dyfeomorfizm.
Teza wynika wtedy z 9.30 i 9.31.

Uwaga 9.33 Dla $m \leq 2$ mamy pełną charakteryzację zbiorów z 9.32 - są to zbiory jednospójne w $\mathbb{R}^m$

4. Wstępne uwagi o kohomologiach DeRhama

Niech U będzie niepustym podzbiorem otwartym przestrzeni $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$. Rozpatrujemy ciąg

$$0 \longrightarrow \Omega_0^{(\infty)}(U) \xrightarrow{d} \Omega_1^{(\infty)}(U) \xrightarrow{d} \Omega_2^{(\infty)}(U) \xrightarrow{d} \dots$$

gdzie d jest operatorem różniczkowania zewnętrznego. Określamy przestrzenie wektorowe dla $n \in \mathbb{N}$

$$Z_n^{(\infty)}(U) = \{\omega \in \Omega_n^{(\infty)}(U) : d\omega = 0\}$$

formy zamknięte (kocykle, closed forms)

$$B_n^{(\infty)}(U) = \{d\alpha \in \Omega_n^{\infty}(U) : \alpha \in \Omega_{n-1}^{\infty}(U)\}$$

dla $n \geq 1$ oraz $B_0^{(\infty)}(U) = \{0\}$

formy dokładne (kobrzegi, exact forms)

Skoro $d \circ d = 0$, to $B_n^{(\infty)}(U) \subset Z_n^{(\infty)}(U)$, i możemy wprowadzić

$$H_{DR}^n(U) = Z_n^{(\infty)}(U) / B_n^{(\infty)}(U),$$

przestrzeń wektorową nazywaną n-tą grupą kohomologii DeRhama. Jest to przestrzeń wektorowa nad $\mathbb{R}$.

Dość łatwo zbadać początek tego ciągu grup. Kocykle zerowe, to funkcje stałe na składowych spójnych U więc

$$H_{DR}^0(U) = \mathbb{R}^\mu \text{ gdzie}$$

$\mu \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \cup \{\infty\}$ moc zbioru składowych spójnych U.

Wniosek 9.34 Jeśli U jest C^2-dyfeomorficzny ze zbiorem otwartym, gwiaździstym względem swojego punktu, to $H^n_{DR}(U) = \{0\}$ dla $n \geq 1$.

Uwagi 9.35

(1) Przy zachowaniu ogólnej idei pojęcie kohomologii De Rhama wprowadza się dla form gładkich na rozmaitościach gładkich (gładki := klasy C^∞)

(2) Istnieją liczne uogólnienia przy zmianie wyjściowego ciągu, tak jak na przykład: kohomologie Dolbeaulta, kohomologie snopa, symplicjalne itd.

(3) Na najbliższych wykładach będziemy działać głównie w zakresie 1-form, zajmując się spełnami związanymi ze strukturą $H^1_{DR}(U)$.

§3. Całkowanie 1-form

1. Całka krzywoliniowa

Niech $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, $m \in \mathbb{N}$.

Definicja 9.36 Odwzorowanie γ nazywamy:

(1) **krzywą**, jeśli γ jest ciągłe,

(2) **drogą**, jeśli γ jest krzywą "kawałkami kl. C^1", to znaczy istnieje podział $a=t_0<t_1<\ldots<t_p=b$ przedziału $[a,b]$ taki, że $\gamma | [t_{i-1}, t_i]$ można rozszerzyć na otoczenie $[t_{i-1}, t_i]$ do odwzorowania klasy C^1 dla $i=1,\ldots,p$.

(3) **krzywą (drogą) zamkniętą**, jeśli jest krzywą (drogą) oraz $\gamma(a)=\gamma(b)$

Definicja 9.37 Długością drogi $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ nazywamy

$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt,$$

gdzie funkcję γ' w punktach podziału nadajemy dowolne wartości właściwe i wyliczamy całkę Cauchy'ego na $[a,b]$

Uwaga 9.38 W 9.37 przyjmuje się czasami równoważnie

$$l(\gamma) = \sum_{i=1}^{p} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\gamma'(t)|\,dt.$$

Funkcja wyskakująca w 9.37 jest prosta. Niekoniecznie mamy równość $l(\gamma) = \mathcal{H}^1(\gamma([a,b]))$

Wśród dróg szczególnie wygodne są tak zwane. łamane budowane w oparciu o układ punktów. $a_0, \dots, a_p \in \mathbb{R}^m$

Definicja 9.39 Łamaną o wierzchołkach. $a_0, \dots, a_p$ nazywamy $\gamma : [0,p] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ taką, że

$$\gamma(t) = a_{j-1} + (t-j+1)(a_j - a_{j-1}) \text{ dla } t \in [j-1, j].$$

przy $j = 1, \dots, p$. Piszemy wtedy $\gamma = [a_0, \dots, a_p]$
łamaną nazywamy zamkniętą gdy $a_0 = a_p$
Odcinek, to łamana $\gamma = [a_0, a_1]$ zaś trójkąt łamana $\gamma = [a_0, a_1, a_2, a_3]$. taka, że $a_0 = a_3$.
W powyższej sytuacji odcinek może się degenerować do punktu, zaś trójkąt może mieć obraz w postaci odcinka bądź punktu. Warto zauważyć, że dla. łamanej $\gamma = [a_0, \dots, a_p]$ mamy

$$dt(\gamma) = \sum_{j=1}^{p} |a_j - a_{j-1}|$$

Niech teraz U będzie otwarty w $\mathbb{R}^m$.
$\gamma : [a,b] \longrightarrow U$ będzie drogą oraz $\omega \in \Omega_1^{(0)}(U)$

Definicja 9.40 Całką formy ω po drodze γ nazywamy $\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t); \gamma'(t))\, dt$,

gdzie w punktach podziału drogi γ nadajemy. dowolne wartości γ' z $\mathbb{R}^m$ i wyliczamy całkę Cauchy'ego z otrzymanej funkcji prostej

Twierdzenie 9.41

Z: U - otwarty w $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$

$f: U \to \mathbb{R}$ klasy C^1, $\gamma: [a,b] \to U$ droga.

T: $\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$

D: Wystarczy rozpatrywać przypadek gdy γ jest klasy C^1 w otoczeniu $[a,b]$. Wtedy

$$\int_\gamma df = \int_a^b (df)(\gamma(t); \gamma'(t))\,dt =$$

$$= \int_a^b f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)),$$

bo $f \circ \gamma$ jest pierwotną funkcji podcałkowej.

2. Doktadność 1-form

Twierdzenie 9.42

Z: U - otwarty i spójny w $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega_1^{(0)}(U)$.

T: Następujące warunki są równoważne.

(1) ω jest dokładna.

(2) $\int_\gamma \omega = 0$, dla dowolnej drogi zamkniętej γ w U,

(3) $\int_\gamma \omega = 0$, dla dowolnej łamanej zamkniętej γ w U,

Ponadto gdy U jest gwiaździsty względem $a \in \mathbb{R}^m$ to warunki te są równoważne warunkowi:

(4) $\int_T \omega = 0$, dla dowolnego trójkąta T o wierzchołku a.

D: Dowód prowadzimy według planu.

$$\begin{array}{ccc} (1) & \Rightarrow & (2) \\ \Uparrow & & \Downarrow \\ (4) & \Leftarrow & (3) \end{array}$$

gdy U gwiaździsty wzgl. a

Implikacja $\underline{(1) \Rightarrow (2)}$ wynika z 9.41, zaś implikacje $\underline{(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4)}$ są oczywiste.

Pokazujemy, że $\underline{(3) \Rightarrow (1)}$.

Wybieramy $a \in U$ (jeśli U jest gwiaździsty, to wybieramy jako a punkt względem którego U jest gw.)

Niech $\gamma_{a,x}$ oznacza dowolną łamaną $\gamma = [a_0, \dots, a_p]$, taką, że $\gamma(0) = a$, $\gamma(p) = x \in U$ określamy.

$$\underline{f(x) := \int_{\gamma_{a,x}} \omega, \text{ dostając } f: U \longrightarrow \mathbb{R}}.$$

Zauważmy, że definicja jest poprawna bo zwarcie. a potrafimy z dowolnym $x \in U$ łamaną (ćw.), zaś $f(x)$ nie zależy od wyboru łamanej łączącej punkty a i x. Faktycznie, mając dwie takie łamane: $\gamma^1_{a,x} = [a_0, \dots, a_p]$

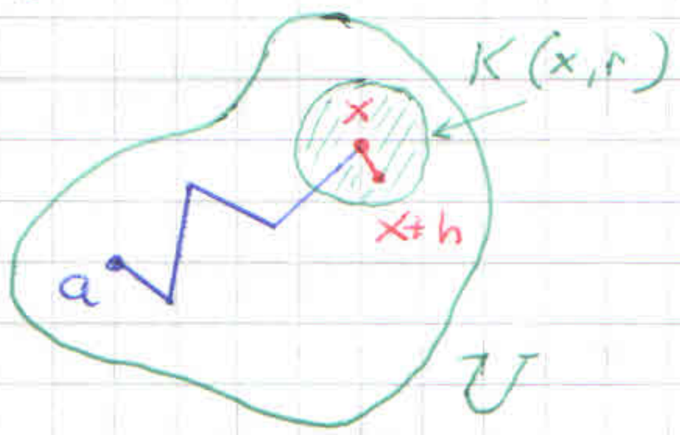
$\gamma^2_{a,x} = [b_0, \dots, b_q]$, gdzie $a_0 = b_0 = 0$ oraz $a_p = b_q = x$, tworzymy.

$$\underline{\gamma = [a_0, \dots, a_p, b_{q-1}, \dots, b_0]}$$

Jest to łamana zamknięta więc $\int_{\gamma} \omega = 0$ z (3).

Mamy. $\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma^1_{a,x}} \omega - \int_{\gamma^2_{a,x}} \omega = 0$, czyli definicja f nie zależy od wyboru łamanej.

Ustalmy teraz $x \in U$. Pokażemy, że $f'(x) = \omega(x)$.
Wybierzmy $r > 0$ tak, aby $K(x,r) \subset U$



Niech $|h| < r$. Wtedy $x+h \in K(x,r)$. oraz.

$$|f(x+h) - f(x) - \omega(x;h)| =$$

$$= \left| \int_{[x,x+h]} \omega - \omega(x;h) \right| =$$

$$= \left| \int_0^1 \omega(x+th;h)\,dt - \int_0^1 \omega(x;h)\,dt \right| =$$

$$= \left| \int_0^1 (\omega(x+th;h) - \omega(x,h))\,dt \right| \leq$$

$$\leq \sup_{t\in[0,1]} \|\omega(x+th) - \omega(x)\| |h| \text{, ale.}$$

$$\sup_{t\in[0,1]} \|\omega(x+th) - \omega(x)\| \longrightarrow 0 \quad (h \to 0),$$ skąd.

wynika, że $f'(x) = \omega(x)$.

Pokazujemy (4) $\Rightarrow$ (1) gdy U jest gwiaździsty.

W tym przypadku określamy.

$$f(x) = \int_{[a,x]} \omega,$$

gdzie a jest punktem względem którego U jest gwiaździsty.. Następnie pokazujemy, że $df = \omega$. tak jak przy (3) => (1). Nie mamy tutaj problemów z poprawnością definicji f.

Twierdzenie 9.43

Z: U - otwarty w $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$
$\omega \in \Omega_1^{(0)}(U)$

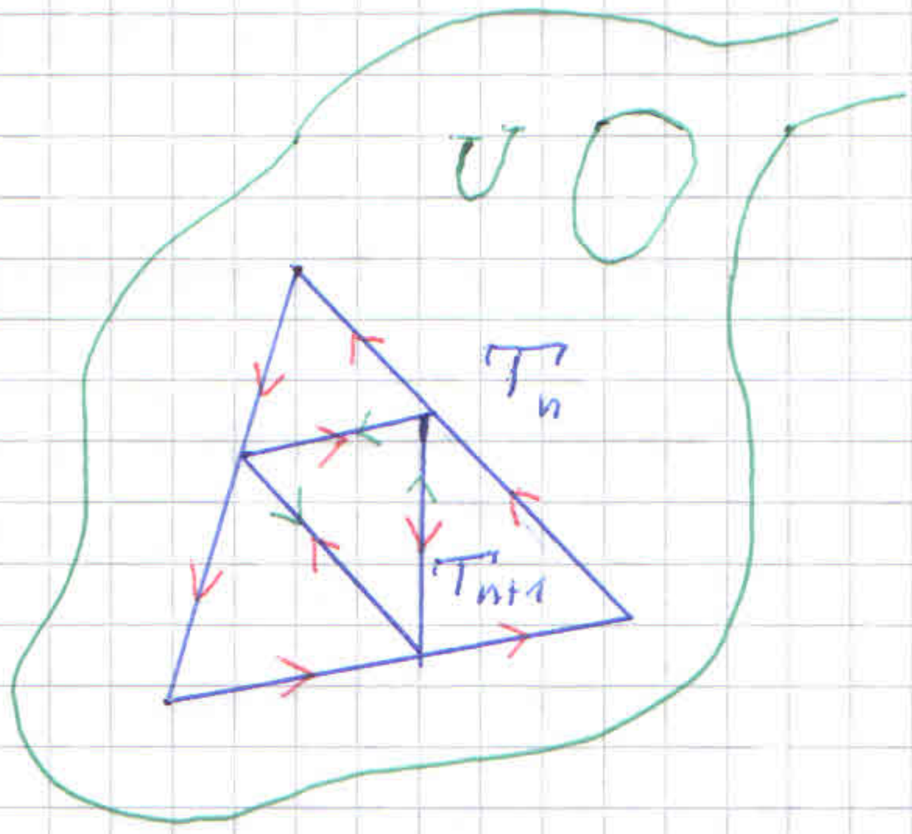
T: Następujące warunki są równoważne:

(1) ω - lokalnie dokładna.

(2) dla dowolnej domkniętej trójkątnej T takiej, że $\operatorname{conv}(T([0,3]) \subset U$ mamy

$$\int_{-,T} \omega = 0$$

D: (1) $\Rightarrow$ (2)



Wybieramy ciąg domkniętych trójkątnych $\{T_n\}$ tak, aby $T_0 = T$ oraz:

- $\operatorname{conv}(T_{n+1}([0,3])) \subset \operatorname{conv}(T_n([0,3])) = \widetilde{T_n}$
- $\operatorname{diam} \widetilde{T_n} \to 0$ $(n \to +\infty)$.
- $\left|\int_T \omega\right| \leq 4^n \left|\int_{T_n} \omega\right|$ dla $n \in \mathbb{N}$ (ćw.)

Niech $\{a\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \widetilde{T_n}$, $a \in U$, $K(a,r) \subset U$ oraz

$\omega | K(a,r)$ - dokładna, wtedy $\int_{T_n} \omega = 0$ gdy $\widetilde{T_n} \subset K(a,r)$.

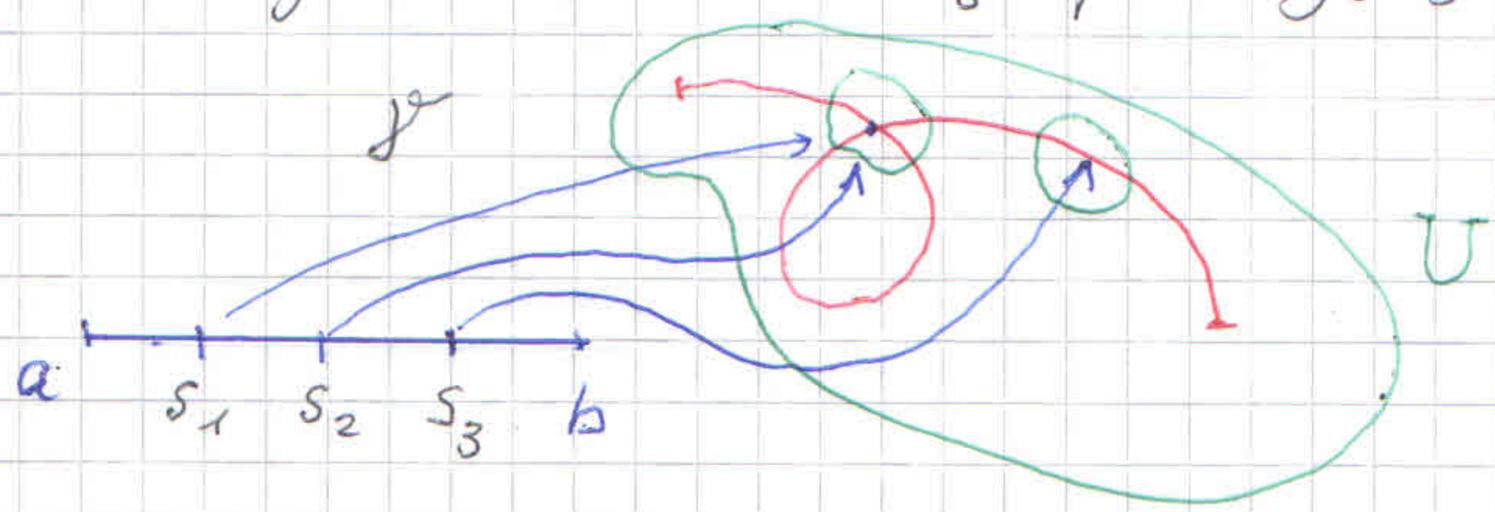
Stąd wynika, że $\int_\gamma \omega = 0$, co kończy dowód.

(2) $\Rightarrow$ (1) Wystarczy wziąć otoczenie gwiaździste. punktu i zastosować (4) $\Rightarrow$ (1) 9.42

3. Pierwotna formy wzdłuż krzywej

Niech U będzie otwarty w $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$
$\omega \in \Omega_1^{(0)}(U)$, $\gamma : [a,b] \longrightarrow U$ krzywa.

Definicja 9.44 Mówimy, że funkcja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest *pierwotną wzdłuż krzywej γ formy ω* jeśli dla każdego $s \in [a,b]$ istnieją: (1) V_s - ot. spójne $\gamma(s)$ w U,
(2) g_s - pierwotna ω / V_s,
(3) H_s - otoczenie s w $[a,b]$,
takie wybrane, że $\forall t \in H_s : f(t) = g_s(\gamma(t))$



$\gamma(s_1) = \gamma(s_2)$.

Lemat 9.45

Z: W powyższej sytuacji f_1, f_2 pierwotne w wzdłuż γ
T: *$f_1 - f_2$ jest funkcją stałą*.

D: Wybierzmy $s \in [a,b]$, V - otoczenie $\gamma(s)$ oraz g_1, g_2 - pierwotne w/ V takie, że $f_1(t) = g_1(\gamma(t))$ oraz $f_2(t) = g_2(\gamma(t))$ w pewnym otoczeniu S.

Jednak $g_1 - g_2$ jest stała w pewnym otoczeniu s, bo $d(g_1 - g_2) = 0$. Zatem funkcja $f_1 - f_2$ jest lokalnie stała na $[a,b]$, więc jest stała.

Twierdzenie 9.46

Z: U - otwarty w $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$
$\omega \in \Omega^{(0)}_1(U)$ lokalnie dokładna w U
$\gamma : [a,b] \longrightarrow U$ krzywa.

T: ω ma pierwotną wzdłuż γ

D: Dla $s \in [a,b]$ możemy wybrać:
(1) V_s - otoczenie spójne $\gamma(s)$ w U,
(2) g_s - pierwotną ω / V_s,
(3) I_s - przedział otwarty w $[a,b]$ taki, że $s \in I_s \subset \overline{I}_s \subset \gamma^{-1}(V_s)$.

Dla $s \in \{a,b\}$ będą to przedziały typu $[a, a+\varepsilon)$, $(b-\varepsilon, b]$ otwarte w $[a,b]$

Wybieramy $I_{s_1}, \dots, I_{s_p}$ pokrycie przedziału $[a,b]$.
Następnie wybieramy takie przedziały $I_1, \dots, I_k$ z tego układu, że: $- a \in I_1$,
$- (I_1 \cup \dots \cup I_j) \cap I_{j+1} \neq \emptyset$, $j = 1, \dots, k-1$,
$- I_1 \cup \dots \cup I_k = [a,b]$.

Na każdym I_j mamy pierwotną $\tilde{f}_j$, $j = 1, \dots, j = 1, \dots, k$ i po popraweniu ich o stałą, dostaniemy f_j, które można skleić.

Uwaga 9.47 Twierdzenie 9.46 można też wykazać procedurą opartą o istnienie tak zwanego pomiaru Lebesgue'a płaskiej przestrzeni zwartej (Ćw.)

Niech U będzie otwarty w $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$
$\gamma : [a,b] \longrightarrow U$ krzywa.
$\omega \in \Omega_1^{(0)}(U)$ forma lokalnie dokładna.

Definicja 9.48 Całką formy ω po krzywej γ nazywamy

$$\int_\gamma \omega := f(b) - f(a),$$

gdzie f jest dowolną pierwotną ω wzdłuż γ.

Uwagi 9.49

(1) Jeśli γ jest drogą, to poza punktami podziału, dla formy lokalnie dokładnej i pierwotnej f
$f'(t) = (g \circ \gamma)'(t) = \omega(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \omega(\gamma(t); \gamma'(t))$
Więc f jest pierwotną funkcji podcałkowej w

$$\int_a^b \omega(\gamma(t); \gamma'(t))\,dt = \int_\gamma \omega \text{ - wzdłuż drogi}$$

Zatem wyżej określona całka stanowi rozszerzenie definicji całki „krzywoliniowej" od przypadku drogi do dowolnej krzywej ale wyłącznie dla form lokalnie dokładnych.

(2) Jeśli ω jest dokładna oraz g jest jej pierwotną, to mówimy globalnie określoną $f = g \circ \gamma$.

§4. Krzywe homotopijne i obszary homotopijnie jednospójne

1. Podstawowe definicje

Niech U będzie otwarty w $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$

$\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \longrightarrow U$ krzywe.

Definicja 9.50 Mówimy, że krzywe γ_0 i γ_1 są homotopijne w U jeśli istnieje odwzorowanie ciągłe $h : [a,b] \times [0,1] \longrightarrow U$, zwane homotopią, takie, że: (1) $h(t,0) = \gamma_0(t)$ dla $t \in [a,b]$,

(2) $h(t,1) = \gamma_1(t)$ dla $t \in [a,b]$.

Uwaga 9.51 Łatwo zauważyć, że wprowadzamy w ten sposób relację równoważności w rodzinie krzywych w U. Mając ustaloną homotopię h będziemy oznaczać $\gamma_s = h(\cdot, s)$ dla $s \in [0,1]$.

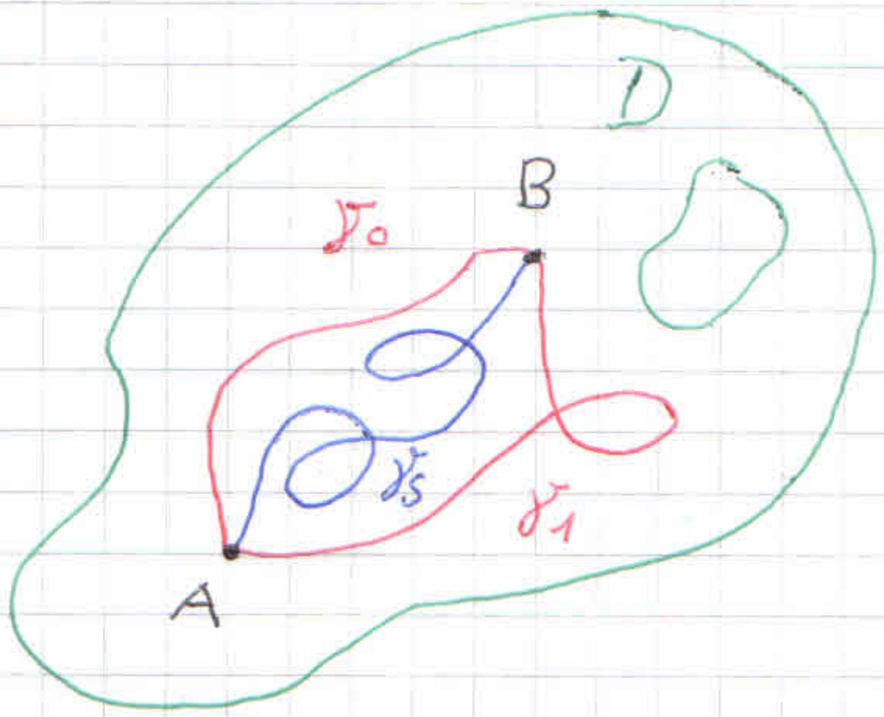
Zwykle wśród krzywych w U wyróżniamy rodzinę krzywych $\mathcal{K}$ o specjalnych własnościach, życząc sobie aby homotopia dwóch krzywych $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathcal{K}$ realizowana była poprzez $\gamma_s \in \mathcal{K}$ przy $s \in [0,1]$

Najczęściej spotykamy tutaj dwie takie rodziny:

(1) $\mathcal{K} = \{\gamma : [a,b] \to U \mid \gamma(a) = \gamma(b)\}$ - tak zwane krzywe zamknięte

(2) $\mathcal{K} = \{\gamma : [a,b] \to U \mid \gamma(a) = A, \gamma(b) = B\}$ gdzie $A, B \in U$ są ustalonymi punktami U - krzywe o ustalonych końcach A, B.

Definicja 9.52 Obszar $D \subset \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$ (podzbiór otwarty i spójny) nazywamy homotopijnie jednospójnym jeśli dowolne dwie krzywe, o wspólnym początku i końcu, są homotopijne w D względem rodziny krzywych w D o tak ustalonych końcach



A, B - ustalone w D dowolnie !!!

Uwaga 9.53 Obszar D jest homotopijnie jednospójny dokładnie wtedy, gdy każda krzywa zamknięta jest homotopijna w D krzywej stałej względem rodziny krzywych zamkniętych (ćw.)

2. Pierwotne form względem homotopii

U - otwarty w $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$

$h: [a,b] \times [0,1] \longrightarrow U$ ciągłe. (homotopia).

$\omega \in \Omega_1^{(0)}(U)$

Definicja 9.54. Mówimy, że $f: [a,b] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest **pierwotną ω względem h** dla każdego $x \in [a,b] \times [0,1]$ istnieją: (1) V_x - spójne otoczenie $h(x)$ w U,

(2) g_x - pierwotna w V_x formy ω / V_x,

(3) H_x - otoczenie x w $[a,b] \times [0,1]$,

takie, że

$$\forall y \in H_x : f(y) = g_x(h(y)).$$

Uwaga 9.55 Jeśli, w powyższej sytuacji, f jest pierwotną względem homotopii h formy ω, to:

(1) $\forall s \in [0,1]$: $f(\cdot, s)$ jest pierwotną ω wzdłuż γ_s,

(2) $\forall t \in [a,b]$: $f(t, \cdot)$ jest pierwotną ω wzdłuż krzywej $[0,1] \ni s \longrightarrow h(t,s) \in U$.

Lemat 9.56

Z: W sytuacji na wstępie tego punktu, f_1 i f_2 są pierwotnymi formy ω względem h

T: $f_1 - f_2$ jest funkcją stałą.

D: Na podstawie 9.45 funkcja $f_1 - f_2$ jest odcinkowo stała, więc jest stała.

Twierdzenie 9.57

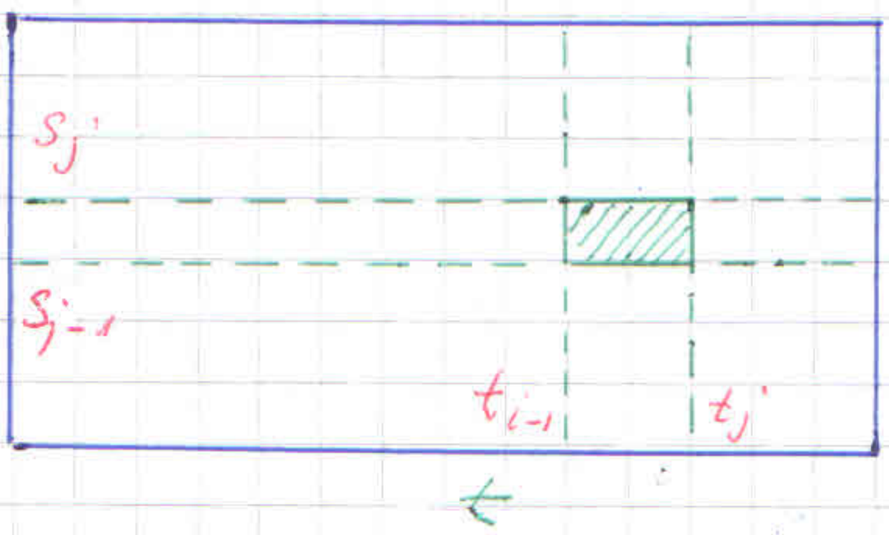
Z: U - otwarty w $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$

$h: [a,b] \times [0,1] \longrightarrow U$ ciągłe

$\omega \in \Omega_1^{(0)}(U)$, ω - lokalnie dokładna w U

T: Istnieje $f: [a,b] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ pierwotna w względem h.

D: Postępujemy według idei 9.46 w oparciu o 9.47.
Wybieramy pokrycie $\{V_x\}$, otwarte spójne $h([a,b] \times [0,1])$ takie, że V_x otoczenie $h(x)$ dla $x \in [a,b] \times [0,1]$. Wtedy zbiory $H_x = h^{-1}(V_x)$ gdzie $x \in [a,b] \times [0,1]$ stanowią pokrycie $[a,b] \times [0,1]$.
Z 9.47 dobieramy promień $r > 0$ tak, aby każda kula o promieniu r leżała w pewnym ze zbiorów rodziny $\{H_x\}$ (uwaga! - działamy w $[a,b] \times [0,1]$).
Wykonujemy podziały $t_0 < t_1 < \ldots < t_p$ przedziału $[a,b]$ oraz $s_0 < s_1 < \ldots < s_q$ przedziału tak aby każdy przedział postaci $[t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j]$, $i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, q$ leżał w pewnej kuli o promieniu r.



Na każdym z przedziałów $I_{i,j} = [t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j]$, $i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, q$ mamy pierwotną względem $h / I_{(i,j)}$.
Dobierając stałe tutaj je sklejamy na cały przedział.

3. Całki wzdłuż krzywych homotopijnych.

Twierdzenie 9.58

Z: U - otwarty w $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega_1^{(0)}(U)$ lokalnie dokładne

$\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to U$ krzywe wspótkończone (zamknięte), homotopijne jako krzywe wspótkończone (zamknięte).

$$T: \int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$$

D: Niech f będzie pierwotną ω względem homotopii h krzywych wspótkończonych.

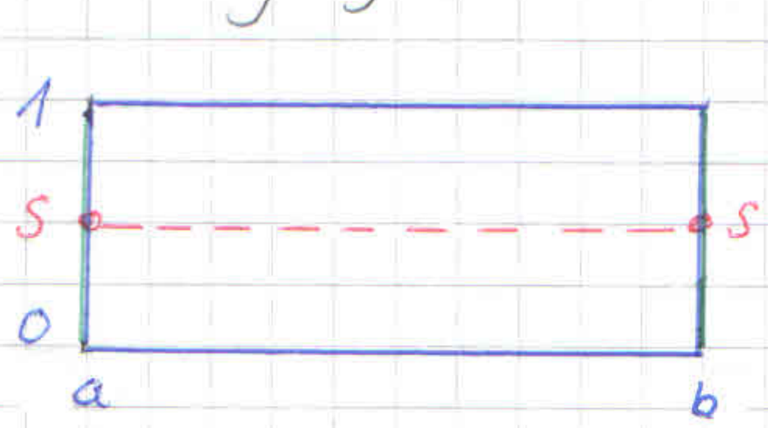
Mamy

$$\int_{\gamma_0} \omega = f(b,0) - f(a,0),$$

$$\int_{\gamma_1} \omega = f(b,1) - f(a,1).$$

W tej sytuacji f jest stała względem s przy ustalonym a i b więc $f(b,0) = f(b,1)$ i $f(a,0) = f(a,1)$, co kończy dowód.

Dla krzywych zamkniętych mamy $h(a,s) = h(b,s)$ dla $s \in [0,1]$.



Zatem $f(a,s) - f(b,s)$ jest funkcją stałą względem $s \in [0,1]$.

$$\int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega = (f(b,1) - f(a,1)) - (f(b,0) - f(a,0)) =$$

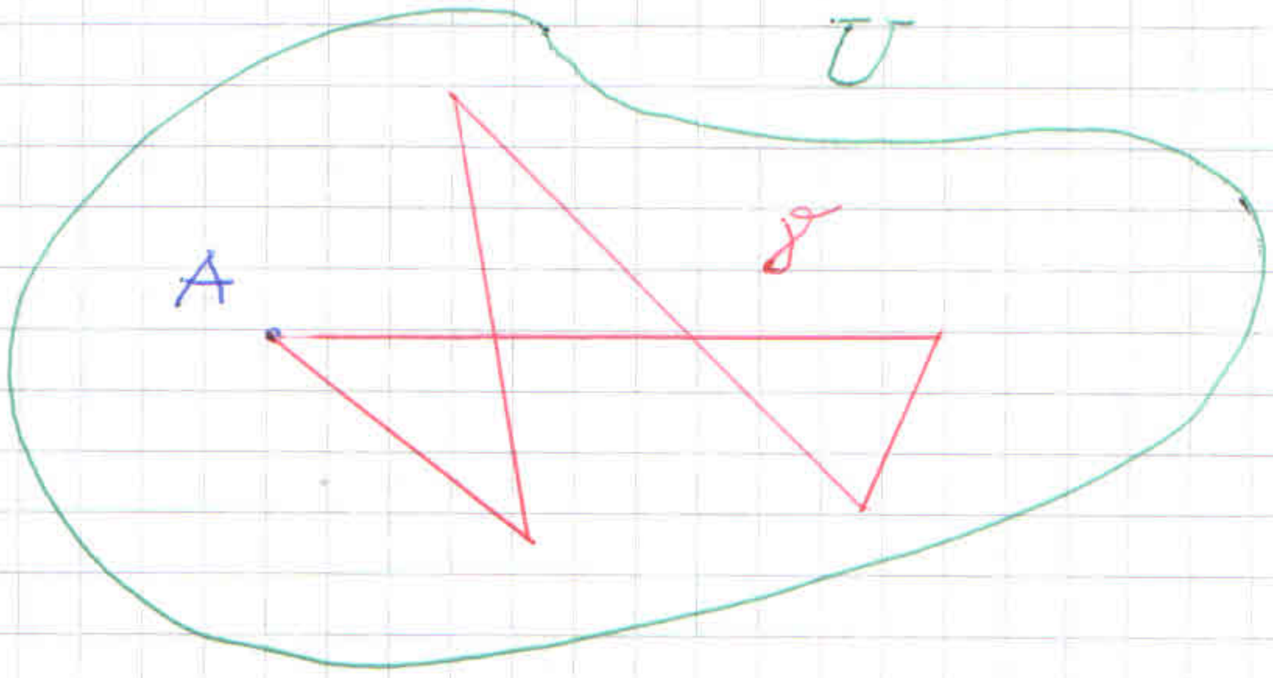
$$= (f(b,1) - f(b,0)) - (f(a,1) - f(a,0)) = 0.$$

Twierdzenie 9.59

Z: D - obszar homotopijnie jednospójny w $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$
$\omega \in \Omega_1^{(0)}(D)$, ω - lokalnie dokładna w D

T: ω jest dokładna w D

D: Weźmy dowolną łamaną zamkniętą γ w D.
Jest ona homotopijna z łamaną stałą
względem rodziny krzywych wspólnikowych,
o początku i końcu w punkcie $A = \gamma(a) = \gamma(b)$



Mamy więc $\int_\gamma \omega = \int_{[A,A]} \omega = 0$. Teraz z 9.42 wynika, że ω jest dokładna.

Wniosek 9.60

Z: D - obszar homotopijnie jednospójny w $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$

T: (1) $(\omega \in \Omega_1^{(1)}(D), d\omega = 0) \Rightarrow (\omega$ - dokładna$)$

(2) $H^1_{DR}(D) = 0$