UNIVERSITATIS IAGELLONICAE ACTA MATHEMATICA, FASCICULUS XLVII
2009

SUR LES ACTIONS SYMPLECTIQUES QUASI-PRIMITIVES

by Michel Nguiffo Boyom

Abstract. A transitive smooth action of a connected Lie group G on a manifold M is called almost primitive (resp. primitive) if G doesn't contain any proper subgroup (resp. any proper normal subgroup) whose induced action on M is transitive as well. The aim of the present work is to investigate some combinatory properties of symplectic actions of completely solvable Lie groups.

Introduction. Les variétés ainsi que les objets considérés sur ces variétés sont lisses. Une loi d'opération transitive d'un groupe de Lie connexe G sur une variété M est dite quasi-primitive (resp. primitive) si G ne contient pas de sous-groupe propre (resp. sous-groupe distingué propre) dont l'action induite par celle de G est transitive. Ce travail est consacré aux actions symplectiques des groupes de Lie complètement résolubles. Si G est un groupe de Lie connexe complètement résoluble on désignera par $\mathcal{F}(G)$ l'ensemble des suites de composition de G. Toute action symplectique transitive de G détermine une application de $\mathcal{F}(G)$ dans un analogue de graphes (resp. diagrammes) de DYNKIN des groupes de Lie complexes semi-simples. Les caractères quasi-primitif ou primitif de l'action symplectique correspondent à des propriètés particulières de certains de ces diagrammes. On peut y déceler en particulier l'existence ou non de feuilletage symplectique ou celle de feuilletage Lagragien invariant par G.
Une variété kahlerienne sera représentée par le triplet (M, ω, J); (M, J) et (M, ω) sont respectivement la structure presque complexe intégrable et la variété symplectique sous-jacentes à la structure kahlerienne. Un groupe de

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 22E25, 22E45, 53A10; Secondary 57S10.

Key words and phrases. Bilagrangiens, diagrammes orientés, graphes, réductions Kahlériennes.

UMR CNRS 5149.

Lie symplectique est un groupe de Lie muni d'une 2-forme symplectique invarainte par les translations à gauche. Une action symplectique avec une application moment est appelés action hamiltonienne. Les valeurs régulières de l'application moment conduisent à des variétés symplectiques de dimension plus petite obténues par un procédé appelé réduction de Marsden-Weinstein [**14**]. Dans les varités kahleriennes le problème de réduction kahlerienne n'a pas toujours de solution [**8, 9**].
Ce travail est consacré à un problème de nature différente. On étudie l'analogue symplectique du problème de réduction de paires riemaniennes au sens de [**22**]. Grosso modo, la question est de recherher les groupes transitifs mininaux parmi les groupes de symplectomorphismes d'une variété symplectique fixée. Cette recherche conduit à des ingrédients utiles pour l'étude de réduction kahlerienne dans certaines variétés kahleriennes. Ce problème de réduction kahlerienne est l'objet de [**20**].
Ce travail est exclusivement consacré aux variétés symplectiques qui sont homogènes sous l'action des groupes de Lie complètement résoluble.

1. Graphes et diagrammes des 2-formes fermées. Les groupes de Lie considérés sont réels, connexes et simplement connexes. L'algèbre de Lie du groupe de Lie G est l'espace vectoriel g constitué des champs de vecteurs tangents invariants par les translations à gauche et muni du crochet de Poisson des champs de vecteurs. On note $\Omega^2_\ell(G)$ l'espace vectoriel des 2-formes différentielles fermées qui sont invariantes par les translations à gauche.

1.1. Graphes d'une 2-forme fermée.
Soit G un groupe de Lie complètement résoluble dont l'algèbre de Lie est notée g. On note $\mathcal{F}(G)$ l'ensemble des suites de composition dans G. Un élément $F \in \mathcal{F}(G)$ est une filtration de G par des sous-groupes G_k, $1 \leq k \leq \dim G$, qui jouissent des propriétés suivantes

$$(i) \qquad dim\, G_k = k;$$

$$(ii) \qquad G_k \text{ est un sous groupe distingué dans } G_{k+1}.$$

Une filtration F qui satisfait les propriétés (i) et (ii) ci-dessus sera dite *normale* si chaque G_k est distingué dans G ; F est alors appelé suite de Jordan–Hölder de G. Un groupe complètement résoluble possède des suites de compositions normales et réciproquement l'existence d'une suite de composition normale satisfaisant la condition (i) entraîne la complète résolubilité. On considère $\omega \in \Omega^2_\ell(G)$ et $F \in \mathcal{F}(G)$. Soit $i_k : G_k \to G$ l'homomorphisme inclusion de G_k dans G et soit $\omega_k = i_k^*\omega$. Si g_k est l'algèbre de Lie de G_k, on note h_k le sous-espace vectoriel des éléments $\xi \in g_k$ qui sont des solutions de $i(\xi)\omega_k = 0$; $i(\xi)$ est le produit intérieur par ξ. Puisque ω_k est fermée, h_k est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie g_k. On note H_k le sous-groupe de Lie connexe associé à la sous-algèbre h_k. On associe ainsi au couple (ω, F) la famille des triplets $[G_k, H_k, \omega_k]$. Les sous-groupes G_k et H_k sont fermés dans G, puisque ce dernier est simplement connexe. De la complète résolubilité de G, on déduit l'existence de relation d'inclusion entre les deux sous-groupes H_k et H_{k+1} (voir [**18, 19**]). On a donc nécessairement un des deux diagrammes commutatifs d'homomorphismes de groupes de Lie suivants

$$\begin{array}{ccc} H_k & \longrightarrow & H_{k+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_k & \longrightarrow & G_{k+1} \end{array} , \tag{1}$$

$$\begin{array}{ccc} H_k & \longleftarrow & H_{k+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_k & \longrightarrow & G_{k+1} \end{array} , \tag{2}$$

Les flèches sont des homomorphismes inclusion. On note M_k le quotient G_k/H_k des classes à droite modulo H_k des éléments de G_k ; M_k hérite de $[G_k, H_k, \omega_k]$ d'une 2-forme symplectique qu'on notera encore ω_k. Naturellement (M_k, ω_k) est une variété symplectique homogène sous l'action à gauche de G_k. Lorsque H_k est inclu dans H_{k+1}, le sous-groupe G_k opère transitivement dans (M_{k+1}, ω_{k+1}), de sorte que $(M_k, \omega_k) = (M_{k+1}, \omega_{k+1})$, (voir [**15**] Lemme 1.1) On a par conséquent le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} H_k & \longrightarrow & H_{k+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_k & \longrightarrow & G_{k+1} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow \\ M_k & \longrightarrow & M_{k+1} \end{array} . \tag{3}$$

Dans le diagramme (3) ci-dessus l'application différentiable π est la projection canonique de G_k sur G_k/H_k et la flèche $M_k \to M_{k+1}$ est un difféomorphisme symplectique. Lorsque le sous-groupe H_{k+1} est inclu dans le sous-groupe H_k, H_{k+1} est distingué dans H_k et sa codimension ibidem vaut 1. La relation entre M_k et M_{k+1} s'exprime en terme de réduction de phase à la manière de Marsden et Weinstein [**14**]. Plus précisement on a le résultat suivant

Proposition 1.1.1. *Les notations sont celles du diagramme* (2). *Si H_{k+1} est inclu dans H_k alors la variété symplectique (M_k, ω_k) est une réduite de la variété symplectique (M_{k+1}, ω_{k+1}) sous action hamiltonienne d'un sous-groupe de dimension un de H_k.*

Voici une esquisse de démonstration.

Soit $\zeta \in h_k$ tel que H_k est un produit semi-direct du sous-groupe à un paramètre $\{\exp t\zeta / t \in \mathbb{R}\}$ avec H_{k+1}. Puisque les groupes en jeu sont tous simplement connexes, l'action de $\{\exp t\zeta / t \in \mathbb{R}\}$ dans (M_{k+1}, ω_{k+1}) est hamiltonienne et libre. On pose $\bar{\zeta}(x) = \frac{d}{dt}((\exp t\zeta)(x))_{|t=0}$. Le sous-groupe H_{k+1} étant connexe, on fixe une primitive f_ζ de la 1-forme fermée $i\left(\tilde{\zeta}\right)\omega_{k+1}$ où $i\left(\tilde{\zeta}\right)$ est le produit intérieur par le champ des vecteurs $\tilde{\zeta}$. La fonction f : $M_{k+1} \to [h_k/h_{k+1}]^*$ définie par $(x, \zeta) \mapsto f_\zeta(x)$ est une application moment de l'action de $\{\exp t\zeta / t \in \mathbb{R}\}$ dans (M_{k+1}, ω_{k+1}). La variété symplectique (M_k, ω_k) est une variété réduite de cette action hamiltonienne.
On déduit de la proposition 1.1.1 ci-dessus le diagramme commutatif

$$
\begin{tikzcd}
H_k \arrow[d] & H_{k+1} \arrow[l] \arrow[d] \\
G_k \arrow[r] \arrow[d] & G_{k+1} \arrow[d, "\pi"] \\
\mathcal{M}_k \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi"'] & (M_{k+1}, \omega_{k+1}) \\
(M_k, \omega_k) &
\end{tikzcd}
\tag{4}
$$

dans lequel $\mathcal{M}_k$ est l'espace homogène G_k/H_{k+1} .
Les formes symplectiques ω_k et ω_{k+1} sont liées par l'égalité

$$i^* w_{k+1} = \pi^* w_k \tag{5}$$

On voit que dans le cas ci-dessus il n'y a pas de "relation d'incidence" directe entre M_{k+1} et M_k [**19**]. On peut ainsi reécrire (4) sous la forme

$$
\begin{tikzcd}
H_k \arrow[d] & H_{k+1} \arrow[l] \arrow[d] \\
G_k \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & G_{k+1} \arrow[d, "\pi"] \\
M_k & M_{k+1} \arrow[l, "mw"']
\end{tikzcd}
\tag{4'}
$$

où la flèche mw est le procédé de réduction symplectique de Marsden–Weinstein (voir Proposition 1.1.1).

Définition 1.1.2. Le graphe associé au couple $(\omega, F) \in \Omega^2_\ell(G) \times \mathcal{F}(G)$ est le graphe dont l'ensemble Σ des sommets est constitué des ensembles H_k , G_k , M_k et dont l'ensemble $\mathcal{A}$ des arrêtes est constitué des relations d'inclusion entre les sommets, [des diagrammes (1), (2)] et des projections π [des diagrammes (3) et (4′)] .

Compte tenu des conventions adoptées ci-dessus, la portion du graphe associé à $(\omega, F) \in \Omega^2_\ell(G) \times \mathcal{F}(G)$ qui porte les sommets H_{k-1}, H_k et H_{k+1} est l'une des configurations (I), (II), (III), (IV) suivantes

$$
(6)\quad
\begin{array}{llll}
(\mathrm{I}) &
\begin{array}{ccccc}
H_{k-1} & \longleftarrow & H_k & \longleftarrow & H_{k+1}\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
G_{k-1} & \longrightarrow & G_k & \longrightarrow & G_{k+1}\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
M_{k-1} & \xleftarrow{mw} & M_k & \xleftarrow{mw} & M_{k+1}
\end{array} ; &
(\mathrm{II}) &
\begin{array}{ccccc}
H_{k-1} & \longrightarrow & H_k & \longrightarrow & H_{k+1}\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
G_{k-1} & \longrightarrow & G_k & \longrightarrow & G_{k+1}\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
M_{k-1} & \longrightarrow & M_k & \longrightarrow & M_{k+1}
\end{array} ;
\\[2em]
(\mathrm{III}) &
\begin{array}{ccccc}
H_{k-1} & \longrightarrow & H_k & \longleftarrow & H_{k+1}\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
G_{k-1} & \longrightarrow & G_k & \longrightarrow & G_{k+1}\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
M_{k-1} & \longrightarrow & M_k & \xleftarrow{mw} & M_{k+1}
\end{array} ; &
(\mathrm{IV}) &
\begin{array}{ccccc}
H_{k-1} & \longleftarrow & H_k & \longrightarrow & H_{k+1}\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
G_{k-1} & \longrightarrow & G_k & \longrightarrow & G_{k+1}\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
M_{k-1} & \xleftarrow{mw} & M_k & \longrightarrow & M_{k+1}
\end{array} .
\end{array}
$$

On va introduire quelques notions dont la signification géométrique est donnée dans les sous-sections suivantes.

Définition 1.1.3. (a) Le sommet H_k est dit *régulier non réductible dans* (I) et *régulier réductible dans* (II). (b) Dans les configurations (III) et (IV) le sommet H_k est dit respectivement *singulier attractif* et singulier répulsif.

Exemple 1. Soit $\mathcal{G}$ l'espace vectoriel de base c,b,a v,u. On munit $\mathcal{G}$ du crochet suivant:$[a, b] = [u, c] = [v, c] = c, [u, a] = a; [v, b] = b$; les crochets non explicités étant nuls. On désigne par c^*, b^*, a^*, v^*, u^* la base duale de c,b,a v,u et par $F(\mathcal{G})$ le drapeau défini par c,b,a v,u . Soit G le groupe de Lie connexe et simplement connexe dont l'algèbre de Lie est $\mathcal{G}$.
Considérons la 2-forme différentielle invariante à gauche $\omega = a^* \wedge v^* + b^* \wedge u^* + v^* \wedge u^*$. Cette forme est fermée et son noyau est engendré par c. Le sous-espace $vect(a, b, c, v)$ est en fait une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{G}$. On note G_4 le sous-groupe de Lie connexe du groupe G dont l'algèbre de Lie est $vect(a, b, c, v)$. La restriction à G_4 de ω est la 2-forme $\omega_4 = a^* \wedge v^*$. Le noyau de ω_4 est la sous-algèbre de Lie $vect(c, b)$. On note G_3 le sous-groupe de Lie connexe associé à la sous-algèbre de Lie $vect(c, b, a)$. La restriction à G_3 de ω est nulle. On indexe comme il suit les sous-algèbres de Lie décrites ci-dessus:

$$\mathcal{H}_5 = vect(c), \quad \mathcal{H}_4 = vect(c, b), \quad \mathcal{H}_3 = vect(c, b, a) = \mathcal{G}_3$$

Le couple $(\omega, F(\mathcal{G}))$ donne lieu au diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} H_3 \arrow[d] & H_4 \arrow[l] \arrow[d] & H_5 \arrow[l] \arrow[d] \\ G_3 \arrow[r] & G_4 \arrow[r] \arrow[d] & G_5 \arrow[d] \\ & M_4 & M_5 \arrow[l, "mw"'] \end{tikzcd} .$$

Exemple 2. On considère l'espace vectoriel $vect(a, b, c, u)$ muni du crochet suivant: $[u, c] = -c, [u, b] = b; [u, a] = a$; les autres crochets sont nuls; c^*, b^*, a^*, u^* est la base duale de c, b, a, u . Soit $\omega = c^* \wedge b^*$ et soit G le groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathcal{G} = vect(c, b, a, u)$. La 2-forme ω définit dans G un drapeau qui donne lieu au diagramme

$$\begin{tikzcd} H_2 \arrow[r] \arrow[d] & H_3 \arrow[r] \arrow[d] & H_4 \arrow[d] \\ G_2 \arrow[r] & G_3 \arrow[r] & G_4 \end{tikzcd} .$$

1.2. Diagrammes pondérés des 2-formes.

Avant de continuer on va fixer quelques conventions. Il est facile de voir que si deux sommets consécutifs H_k et H_{k+1} sont réguliers alors ils sont du même type (i.e. *non réductible* ou *réductible)*. Cette remarque conduit à contracter les diagrammes en munissant l'arrête joignant deux sommets réguliers consécutifs d'un indice. Par exemple, on écrira $\underset{(m)}{\overset{S \qquad S}{\overline{\qquad\quad}}}$, pour représenter $m + 1$ sommets réguliers consécutifs de même type (S). Cela est commode quand on a l'intention, comme nous nous proposons de faire, d'associer à chaque graphe orienté l'analogue de diagramme de Dynkin pour les systèmes des racines [**5, 24**].

Soit $(\omega, F) \in \Omega^2_\ell(G) \times \mathcal{F}(G)$. Notons $\mathrm{gr}(\omega, F)$ le graphe orienté associé au couple (ω, F) . On considère maintenant le diagramme $d(w, F)$ dont les sommets S_k ont pour coordonnées les couples (G_k, H_k). On convient de relier les deux sommets consécutifs S_k et S_{k+1} par deux arrêtes orientées exprimant les relations d'inclusion ad hoc. On notera que dans les diagrammes commutatifs (5) et (6) la flèche joignant H_k à H_{k-1} (respectivement à H_{k+1}) et celle joignant M_k à M_{k-1} (respectivement M_{k+1}) ont la même orientation. Ainsi compte ténu de notre convention de contraction des diagrammes les configurations (I), (II),

(III) et (IV) deviennent les diagrammes suivants

$$
\text{(I)}\quad \overset{S_{k-1}}{\mathrm{O}} \underset{\longrightarrow}{\longleftarrow} \overset{S_k}{\mathrm{O}} \underset{\longrightarrow}{\longleftarrow} \overset{S_{k+1}}{\mathrm{O}} \quad ; \quad \text{(II)}\quad \mathrm{O} \underset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \overset{S_k}{\mathrm{O}} \underset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \mathrm{O} \quad ;
$$

$$
\text{(III)}\quad \mathrm{O} \underset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \overset{S_k}{\mathrm{O}} \underset{\longrightarrow}{\longleftarrow} \mathrm{O} \quad ; \quad \text{(IV)}\quad \mathrm{O} \underset{\longrightarrow}{\longleftarrow} \overset{S_k}{\mathrm{O}} \underset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \mathrm{O} \quad .
$$

Les inclusions entre les sous-groupes H_k correspondent aux flèches supérieurs. Les flèches inférieures sont les inclusions entre les groupes G_k.
On convient de joindre S_{k-1} à S_k par une ou deux arrêtes suivant que l'on a $H_{k-1} \subset H_k$ ou $H_k \subset H_{k-1}$. Ainsi les diagrammes ci-dessus deviennent les suivants

$$
(7)\qquad
\begin{array}{l}
\text{(I)}\quad \mathrm{O} \underset{\longrightarrow}{\longleftarrow} \overset{S_k}{\mathrm{O}} \underset{\longrightarrow}{\longleftarrow} \mathrm{O} \quad ; \quad \text{(II)}\quad \mathrm{O} \longrightarrow \overset{S_k}{\mathrm{O}} \longrightarrow \mathrm{O} \quad ; \\[2ex]
\text{(III)}\quad \mathrm{O} \longrightarrow \overset{S_k}{\mathrm{O}} \underset{\longrightarrow}{\longleftarrow} \mathrm{O} \quad ; \quad \text{(IV)}\quad \mathrm{O} \underset{\longrightarrow}{\longleftarrow} \overset{S_k}{\mathrm{O}} \longrightarrow \mathrm{O} \quad .
\end{array}
$$

On voit que les sommets S_k des configurations (I) et (II) sont réguliers dans le sens évident suivant: il y a autant d'arrêtes orientées d'origine S_k que d'arrêtes orientés d'extrémité S_k . De ce point de vue la singularité du sommet S_k de (III) (resp. (IV)) est évidente.

Poids des sommets. On va attacher au sommet $S_k = (H_k, G_k)$ le poids $p_k = p\,(S_k) = \frac{\dim H_k}{\text{codim } H_k + 1} = \frac{\dim H_k}{\dim M_k + 1}$. La notion de poids est liée à des propriétés géométriques de (ω, F) . On y reviendra dans les numéros suivants.

1.3. Connexité et simplicité des diagrammes pondérés.
Soit $\omega \in \Omega^2_\ell(G)$. Soit g l'algèbre de Lie du groupe de Lie G et soit h la sous-algèbre de Lie de g qui engendre le noyau de la 2-forme différentielle ω. Si le groupe de Lie G est nilpotent, alors il existe dans G un sous-groupe de Lie $\mathcal{G}$ de dimension $= \dim H + \frac{1}{2}$ codim H jouissant des deux propriétés suivantes

$$
\begin{array}{ll}
\text{(a)} & H \subset \mathcal{G} \\
\text{(b)} & i^*\omega = 0
\end{array}
$$

où i est l'homomorphisme inclusion de $\mathcal{G}$ dans G. Le théorme 1.5.1 de la sous-section suivante est un résultat similaire à celui qui ci-dessus. Naturellement par passage à la variété quotient $M = G/H$ on obtient la variété symplectique notée (M, ω) et la sous-variété $L = \mathcal{G}/H$ coïncide avec la feuille passant par $x_o = \pi(H)$ d'un feuilletage lagrangien $\mathcal{F}$ invariant par l'action de G dans G/H. En fait, il existe une suite de composition $F \in \mathcal{F}(G)$ contenant H et $\mathcal{G}$. Ainsi, le diagramme pondéré $d(\omega, F)$ qui est associé à $gr(\omega, F)$ est l'un des deux diagrammes suivants

(i) $$O \underset{(m)}{\longrightarrow} \overset{S}{O} \underset{(n)}{\leftrightarrows} \overset{S'}{O} \longrightarrow O$$

(ii) $$O \underset{(m)}{\longrightarrow} \overset{S}{O} \underset{(n)}{\leftrightarrows} O$$

Les présentations (i) et (ii) ci-dessus ayant les signification convenues au numéro 1.2. Par exemple, dans (i) l'indice (n) signifie qu'entre S et S' on a une suite de n+1 sommets consécutifs dont deux adjacents sont reliés comme indiqué au dessus de (n). Toujours dans (i), il y m sommets réguliers consécutifs à gauche du sommet S. Le décriptage de (ii) est similaire. Une fois les sommets contractés comme convenu, on peut déduire de (i) et de (ii) l'énoncé suit.

PROPOSITION 1.3.1. *Soit G un groupe de Lie nilpotent connexe, pour toute 2-forme fermée $\omega \in \Omega^2_\ell(G)$, il existe $F \in \mathcal{F}(G)$ tel que $d(\omega, F)$ possède au plus deux sommets singuliers. Lorsque $d(\omega, F)$ possède un seul sommet singulier, celui-ci est attractif.*

Cette proposition 1.3.1 permet une bonne compréhension des graphes des 2-formes fermées $\omega \in \omega^2_\ell(G)$ quand G est complètement résoluble.
Il faut pour cela reformuler le lemme 1.1.1 de [**15**] de la façon qui suit.

PROPOSITION 1.3.2. *Soit G un groupe de Lie complètement résoluble non nilpotent. Soit $\omega \in \Omega^2_\ell(G)$ une 2-forme non nulle. On note H le sous-groupe de Lie connexe dont l'algèbre de Lie h engendre le noyau de ω. Si h est non nulle, alors les affirmations suivantes sont équivalentes.*

(a_1) *Le seul sous-groupe distingué de G qui contient H est G lui-même.*
(a_2) *Le sous-groupe des commutations $\mathcal{D}G$ opère transitivement dans G/H*

ESQUISSE DE DÉMONSTRATION. L'équivalence de (a_1) et (a_2) se déduit aisément de la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
H \cap \mathcal{D}G \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathcal{D}G \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{D}G/H \cap \mathcal{D}G \arrow[d] \\
H \arrow[r, hook] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & G/H \arrow[d] \\
H/H \cap \mathcal{D}G \arrow[r, hook] & G/\mathcal{D}G \arrow[r] & \mathcal{A}
\end{tikzcd} .$$

les trois colonnes ainsi que les trois lignes sont des fibrations différentiables. $\square$

Avant de continuer on se propose de tirer des propositions 1.3.1 et 1.3.2 quelques informations concernant le nombre et la natures des sommets singuliers des diagrammes pondérés $d(\omega, F)$ lorsque G est un groupe de Lie complètement résoluble non nilpotent.
En fait, il résulte de la proposition 1.3.2 que pour toute 2-forme $\omega \in \Omega^2_\ell(G)$ il existe une filtration F de G par des sous-groupes G_k telle que le diagramme pondéré $d(\omega, F)$ a une des deux formes qui suivent

$$\mathrm{O} \longrightarrow \mathrm{O} \underset{\longrightarrow}{\leftarrow} \mathrm{O} \longrightarrow \mathrm{O} \underset{\longrightarrow}{\leftarrow} \mathrm{O} \rightarrow \mathrm{O} \ ,$$

$$\mathrm{O} \longrightarrow \mathrm{O} \underset{\longrightarrow}{\leftarrow} \mathrm{O} \longrightarrow \mathrm{O} \underset{\longrightarrow}{\leftarrow} \mathrm{O} \ .$$

Le Problème de réduction (au sens de [**22**]) de chaque paire symplectique (H_k, G_k) est intimement lié à la nature et au nombre des sommets singuliers des diagrammes pondérés $d(\omega, F)$. On rappelle ceci. Suivant [**22**], réduire la paire symplectique (H_k, G_k) c'est remplacer G_k par un sous-groupe connexe $G \subset G_k$ qui hérite de G_k d'une action transitive sur G_k/H_k. Un autre exemple intéressant. L'existence dans G_k/H_k de feuilletage lagrangien invariant par le groupe G_k correspond à une propriété précise de diagramme. Nos afirmations seront justifiées plus loin.
On observe qu'un sommet singulier de poids nul est nécessairement répulsif.

Les considérations et observations ci-dessus motivent les définitions qui suivent.

Définition 1.3.3. (a) Un diagramme pondéré $d(\omega, F)$ est dit connexe s'il ne possède pas de sommet singulier de poids nul.
(b) Un diagramme pondéré $d(\omega, F)$ est semi-nilpotent si ses sommets singuliers de poids nul sont nilpotents.

De la définition 1.3.3 résulte que tout diagramme pondéré $d(\omega, F)$ est la réunion de ses composantes connexes. Naturellement deux composantes connexes distinctes ont au plus un sommet commun qui est de poid nul. En s'inspirant des propriétés des diagrammes associés aux systèmes de racines des groupes de Lie semi-simples complexes on va poser.

Définition 1.3.4. Un diagramme pondéré $d(\omega, F)$ est *dit simple* s'il est connexe et ne possède pas de sommet répulsif.

Il revient au même de dire que $d(\omega, F)$ est simple s'il possède un seul sommet singulier. Ce dernier est alors nécessairement attractif. Un tel diagramme simple a donc la forme suivante.

$$\mathrm{O} \longrightarrow \mathrm{O} \underset{\longrightarrow}{\leftarrow} \mathrm{O} \ .$$

Pour illustrer les notions qui viennent d'être introduites à l'aide de quelques exemples, la définition qui suit sera utile.

Définition 1.3.5. (a) Un diagramme pondéré $d(\omega, F)$ dont les sommets singuliers de poids nul sont distingués dans G est dit *semi-normal.*

(b) Un diagramme pondéré semi-normal dont les compossantes connexes sont simples est dit *semi-simple.*

Un diagramme pondéré semi-simple a la forme suivante

$$O \underset{(m_1)}{\longrightarrow} O \underset{(n_1)}{\overset{\longleftarrow}{\longrightarrow}} O \cdots O \underset{(m_\ell)}{\longrightarrow} O \underset{(n_\ell)}{\overset{\longleftarrow}{\longrightarrow}} O\,.$$

Les pointillés représentemt les diagrammes pondérés simples semblables à celui-ci

$$O \longrightarrow O \overset{\longleftarrow}{\longrightarrow} O.$$

Compte tenu de la définitions 1.3.3, 1.3.4 et 1.3.5 les sommets singuliers répulsifs sont de poids nul.

1.4. Des exemples.

Exemple 1. On note $G = \left\{ A = \begin{bmatrix} \alpha & u & v \\ 0 & \alpha^2 & w \\ 0 & 0 & \alpha^3 \end{bmatrix}, (\alpha, u, v, w) \in \mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{R}^3 \right\}$.
On note $A(\alpha, u, v, w)$ les éléments de G. Soit $\omega = 2d\alpha \wedge dv - du \wedge dw$. On va filtrer G par les sous-groupes

$$G_1 = \{A(\alpha, u, v, w)/\alpha = 1, u = w = 0\};$$
$$G_2 = \{A(\alpha, u, v, w)/\alpha = 1, u = 0\};$$
$$G_3 = \{A(\alpha, u, v, w)/\alpha = 1\}\,.$$

On voit aisément que

$$H_1 = G_1, H_2 = G_2 \text{ et } H_3 = \{A(1, u, 0, 0)\}\ .$$

A la filtration ci-dessus correspond le diagramme simple suivant

$$\mathrm{O} \underset{(2)}{\longrightarrow} \mathrm{O} \underset{(1)}{\overset{\longleftarrow}{\longrightarrow}} \mathrm{O}\ .$$

Exemple 2. On conserve G et ω de l'exemple 1. On filtre G par les sous-groupes suivants

$$G_1 = \{A(\alpha, u, v, w)/u = v = w = 0\};$$
$$G_2 = \{A(\alpha, u, v, w)/u = v = 0\};$$
$$G_3 = \{A(\alpha, u, v, w)/u = 0\}\ .$$

On a alors $H_1 = G_1; H_2 = \{A(1, 0, 0, 0)\}; H_3 = \{A(1, 0, v, 0)\}$.
Le diagramme correspondant à cette filtration est le suivant

$$\mathrm{O} \longrightarrow \mathrm{O} \overset{\longleftarrow}{\longrightarrow} \overset{S_2}{\mathrm{O}} \longrightarrow \mathrm{O} \overset{\longleftarrow}{\longrightarrow} \mathrm{O}\ .$$

Le sommet $S_2 = (H_2, G_2)$ est de poids nul. Par conséquent $d(\omega, F)$ est semi-simple. En effet il n'est pas connexe. Il a deux composantes connexes simples. Le sommet singulier S_2 est distingué.

Exemple 3. Soit G le groupe de Lie connexe des matrices réelles 5×5 dont l'algèbre de Lie g est l'espace des matrices

$$X(z, y, x, u, v) = \begin{bmatrix} 2u & x+v & -y & -2z & -y \\ 0 & u & v & -y & -x \\ 0 & 0 & u & -x-v & u \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Notons $(e_5, e_4, e_3, e_2, e_1)$ la base canoniquement associée aux coordonnées (z, y, x, u, v) et $(\theta_5, \theta_4, \theta_3, \theta_2, \theta_1)$ la base duale. On considère la 2-forme $\omega = d\theta_5$. On pose $X(z, y, x, u, v) = ze_5 + ye_4 + xe_3 + ue_2 + ve_1$. On a alors

$$\omega(X(z, y, x, u, v), X(z', y', x', u', v')) = xy' - x'y + 2(uz' - u'z) + vy' - v'y\,.$$

Le noyau de ω est engendré par la sous-algèbre de g définie par

$$z = y = u = 0\,, x + v = 0\,.$$

On va filtrer l'algèbre de Lie g du groupe G par les sous-algèbres suivantes

$$F := g(0, 0, x, 0, -x) \subset g(z, 0, x, 0, -x) \subset g(z, 0, x, 0, v) \subset g(z, y, x, 0, v) \subset g\,.$$

Les notations ci-dessus ne prétant pas à ambiguité, puisque

$$g(0, 0, x, 0, -x) = \{X(0, 0, x, 0, -x)/x \in \mathbb{R}\}\,.$$

Le noyau de ω est engendré par $g(0, 0, x, 0, -x)$. Le noyau de la restriction $\omega(z, y, x, 0, v) = \omega_{|g(z,y,x,x,0,v)}$ est $g(z, 0, x, 0, -x)$.
Le diagramme $d(\omega, F)$ est simple. Il a la forme suivante

$$\mathrm{O} \underset{(2)}{\longrightarrow} \overset{S_5}{\mathrm{O}} \underset{\longrightarrow}{\overset{\longleftarrow}{}} \mathrm{O}\,.$$

On conserve G et ω comme ci-dessus, puis on filtre g par les sous-algèbres comme ci-dessous

$$F := g(z, 0, 0, 0, 0) \subset g(z, y, 0, 0, 0) \subset g(z, y, x, 0, 0) \subset g(z, y, x, u, 0) \subset g\,.$$

La restriction à $g(z, y, x, u, 0)$ de ω est alors régulière et le noyau de $\omega(z, y, x, 0, 0)$ est $g(z, 0, 0, 0, 0)$. Le diagramme $d(\omega, F)$ est

$$\mathrm{O} \longrightarrow \mathrm{O} \underset{\longrightarrow}{\overset{\longleftarrow}{}} \overset{S_4}{\mathrm{O}} \longrightarrow \mathrm{O}\,.$$

On peut avoir un diagramme connexe non semi-simple en filtrant g comme ci-dessous

$$F := g(0,y,0,u,0) \subset g(z,y,0,0,0) \subset g(z,y,0,u,0) \subset g(z,y,x,u,-x) \subset g\,.$$

Le noyau de $\omega(z,u,x,u,-x)$ est $g(0,y,x,0,-x)$; le noyau de $\omega(z,y,0,u,0)$ est $g(0,y,0,0,0)$. On a visiblement $\omega(z,y,0,0,0) = 0$. Le diagramme $d(\omega,F)$ est le suivant

$$\mathrm{O} \longrightarrow \mathrm{O} \overset{\longleftarrow}{\longrightarrow} \mathrm{O} \longrightarrow \mathrm{O} \overset{\longleftarrow}{\longrightarrow} \mathrm{O}\,,$$

Ce diagramme est connexe. Il possède un sommet singulier repulsif. Il n'est donc pas semi-simple.
On voit qu'à divers choix de $F \in \mathcal{F}(G)$ correspondent des diagrammes de types différents. On donnera des significations géométriques aux configurations intéressantes.
Nous allons établir un résultat qu'on peut utiliser avec efficacité dans le problème de réduction kählérienne.

1.5. Réduction des diagrammes semi-nilpotents.

Soit G un groupe de Lie complètement résoluble. Notre objectif est la recherche des possibilités d'associer un diagramme simple à une forme fermée $\omega \in \Omega^2_\ell(G)$. Voici un premier résultat.

THÉORÈME 1.5.1. *Soit G un groupe de Lie complètement résoluble. Soit $\omega \in \Omega^2_\ell(G)$. Si ω possède un diagramme pondéré semi-simple et semi-nilpotent $d(\omega,F)$, alors on peut "déformer" F en une filtration F_0 telle que $d\,(\omega,F_0)$ soit un diagramme simple*

$$\mathrm{O} \longrightarrow \mathrm{O} \overset{\longleftarrow}{\longrightarrow} \mathrm{O}\,.$$

DÉMONSTRATION. D'après l'hypothèse ω possède un diagramme semi-simple $d(\omega,F)$ de la forme

$$O \underset{(m_1)}{\longrightarrow} O \underset{(n_1)}{\overset{\longleftarrow}{\longrightarrow}} O \underset{(m_2)}{\longrightarrow} O \underset{(n_2)}{\overset{\longleftarrow}{\longrightarrow}} O \cdots O \underset{(m_\ell)}{\longrightarrow} O \underset{(n_\ell)}{\overset{\longleftarrow}{\longrightarrow}} O\,.$$

Les sommets singuliers répulsifs sont distingués, nilpotents et bien entendu de poids nul. Soit $2n$ le rang de ω et soit $2n+\ell$ la dimension de G. Soit g l'algèbre de Lie du groupe de Lie G. Notons comme auparavant h la sous-algèbre de Lie de g qui engendre le noyau de ω. La dimension de h est égale à ℓ. Soit H le sous-groupe de Lie connexe associé à h.
Il s'agit de montrer qu'il existe une filtration de G par les sous-groupes G_k dont celui de dimension $n+\ell$, viz $G_{n+\ell}$, jouit entre autres des deux propriétés suivantes

(p1) $\qquad H \subset G_{n+\ell}$;

(p2) $\qquad i^*_{n+\ell}\omega = 0.$

On part du diagramme semi-simple semi-nilpotent suivant (qui n'est rien d'autre que celui de l'hypotèse du théorème 1.5.1)

$$O \underset{(m_1)}{\longrightarrow} O \underset{(n_1)}{\leftrightarrows} O \cdots O \underset{(m_\ell)}{\longrightarrow} O \underset{(n_\ell)}{\leftrightarrows} O\,.$$

On peut supposer sans perte de généralité que $d(\omega, F)$ a seulement deux composantes connexes simples. Cette restriction est légitime en vertu des propositions 1.3.1 et 1.3.2. Le diagramme pondéré $d(\omega, F)$ est désormais supposé être le suivant

$$O \underset{(m_1)}{\longrightarrow} \overset{S'}{O} \underset{(n_1)}{\leftrightarrows} \overset{S}{O} \underset{(m_2)}{\longrightarrow} \overset{S''}{O} \underset{(n_2)}{\leftrightarrows} O\,.$$

Dans ce diagramme le sommet répulsif S est de poids nul. Il a pour coordonnées le couple $(G_{2m}, \{e\})$ où G_{2m} est un sous-groupe distingué nilpotent du groupe G; e étant l'élément neutre de G.
La 2-forme $\omega_{2m} = i^*_{2m}\omega$ est symplectique dans G_{2m}. Il en résulte ceci: G est un produit semi-direct $G = G_{2m} \rtimes G^o$ où G^o est un sous-groupe de G de dimension $2(n-m)+\ell$. En outre, le sous-groupe de Lie G^o est l'orthogonal de G_{2m} relativement à la 2-forme ω. Maintenant tenons compte de cette relation d'orthogonalité et de la décomposition en produit semi-direct

$$G = G_{2m} \rtimes G^o.$$

Il en résulte que la forme ω se décompose en deux termes

$$\omega = \omega_{2m} + \omega^o$$

où ω^o est la restriciton à G^o de ω.
Le sommet singulier S'' correspond (pour la filtration F en jeu) à un sous-groupe $G_{n+2m+\ell}$ dans G. Vu sous l'optique du produit semi-direct $G = G_{2m} \rtimes G^o$, le sous-groupe $G_{n+2m+\ell}$ prend la forme

$$G_{n+2m+\ell} = G_{2m} \rtimes G^o_{n-m+\ell}$$

où le sous-groupe $G^o_{n-m+\ell}$ de G^o satisfait les deux conditions suivantes

(c1) $$H \subset G^\circ_{n-m+\ell};$$

(c2) $$i^*_{n-m+\ell}\omega^\circ = 0.$$

Nous sommes maintenant en mesure de construire une filtration F_o telle que $d\,(\omega, F_o)$ soit simple. Pour y parvenir on utilisera le Lemme 1.5.2 suivant.

Lemme 1.5.2. *Le sous-groupe G_{2m} possède une filtration $\tilde{F}\,(G_{2m}) = G_1 \subset G_k \ldots$ jouissant des propriétés suivantes*

(i) chaque G_k est stable par les automorphismes intérieurs de G définis par les éléments de G^o.

(ii) $i^*_m\omega_{2m} = 0$, où i_m est l'homomorphisme inclusion de G_m dans G_{2m}.

Démonstration du Lemme 1.5.2. Soit g_{2m} l'algèbre de Lie du sous-groupe G_{2m} et soit g^o celle du sous-groupe de Lie G^o. L'algèbre de Lie g de G est un produit semi-direct de g^o par g_{2m}. Notons a la sous-algèbre de Lie de g^o qui correspond au sous-groupe de Lie $G^o_{n-m+\ell}$.

1ère Etape. On observe que a est le noyau de la restriction à $g_{2m} \times a$ de ω. On fixe un idéal $g_{2m-1} \subset g_{2m}$ qui est de codimension 1, dans g_{2m} et qui est astreint à vérifier la condition $[g^o, g_{2m-1}] \subset g_{2m-1}$.
Un tel idéal existe parceque G est complètement résoluble d'une part, et d'autre part toute sous-algèbre de codimension 1 dans g_{2m} est un idéal de g_{2m}.
Notons ω_{2m-1} la restriction à g_{2m-1} de ω_{2m}. Le noyau de ω_{2m-1} est de dimension 1. Notons h_1 ce noyau. Puisque g^o agit dans (g_{2m}, ω_{2m}) comme sous-algèbre de $sp\,(\omega_{2m})$ on a nécessairement

$$[g^o, h_1] \subset h_1\,.$$

Naturellement le noyau de la restriction à $g_{2m-1} \times a$ de ω est la sous-algèbre $h_1 \times a$. Il découle l'inclusion

$$[g^o, h_1] \subset h_1.$$

Notons que l'on a aussi

$$[g^o, \mathrm{nor}(h_1)] \subset \mathrm{nor}(h_1) \tag{8}$$

où nor (h_1) est le normalisateur de h_1 dans g_{2m-1}.
On déduit de (8) l'existence d'une sous-algèbre $g_{2m-2} \subset g_{2m-1}$ qui est de codimension 1 dans g_{2m-1}, et qui vérifiant les conditions suivantes

$$h_1 \subset g_{2m-2} \text{ et } [g^o, g_{2m-2}] \subset g_{2m-2}\,.$$

L'existence de g_{2m-2} résulte entre autres de la nilpotence de g_{2m-1}.
Le noyau h_2 de la restriction à g_{2m-2} de ω_{2m-1} est de dimension 2. Comme ci-dessus on a les inclusions suivantes

$$[g^o, h_2] \subset h_2,$$
$$[g^o, \mathrm{nor}\,(h_2)] \subset \mathrm{nor}\,(h_2)$$

où nor (h_2) est le normalisateur de h_2 dans g_{2m-2}.
Le noyau de la restriction à $g_{2m-2} \times a$ de ω est la sous-algèbre $h_2 \times a$. Bien évidemment on a de nouveau une sous-algèbre de Lie $g_{2m-3} \subset g_{2m-2}$ qui est de codimension 1 dans g_{2m-2}, qui contient h_2 et qui vérifie la condition suivante

$$[g^o, g_{2m-3}] \subset g_{2m-3}.$$

On itère mutatis mutandis la procédure utilisée ci-dessus pour obtenir en fin de compte les deux suites croissantes suivantes

$$\begin{aligned} g_m \subset g_{m+1} \subset \cdots \subset g_{2m-j} \subset \cdots \subset g_{2m} \quad &, 1 \leq j \leq m; \\ h_1 \subset h_2 \subset \cdots \subset h_j \subset \cdots \subset h_m \,. & \end{aligned}$$

Notons ω_{2m-j} la restrition à g_{2m-j} de ω_{2m}. Les termes des deux suites ci-dessus sont liés par les relations suivantes

$$(9) \qquad \begin{array}{cc} (i) & h_j \subset g_{2m-j} \quad \text{pour} \quad 1 \leq j \leq m \\ (ii) & [g^o, h_j] \subset h_j. \\ (iii) & ker\omega_{2m-j} = h_j. \\ (iv) & [g^o, g_{2m-j}] \subset g_{2m-j}. \\ (v) & \omega(h_j \times a, h_j \times a) = 0. \end{array}$$

On observe en particulier que pour $j = m$ on a

$$\omega \left(g_m \times a, g_m \times a \right) = 0 \,.$$

2ÈME ETAPE. Notons G_{2m-j} et H_j les sous-groupes de Lie connexes déterminés par les sous-algèbres de Lie g_{2m-j} et h_j respectivement. Ce sont des sous-groupes contenus de G_{2m} qui sont stables par les automorphismes intérieurs de G définis par les éléments de G^o.
Cela résulte des relations (8). Cela achève la preuve du Lemme 1.5.2. □

FIN DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.5.1. A partir des relations (8) on déduit les relations d'inclusions évidentes suivantes

$$(10) \qquad G^o_{n-m+\ell} \subset H_j \times G^o_{n-m+\ell} \subset G_{2m-j} \times G^o_{n-m+\ell} \subset G_{2m} \times G^o_{n-m+\ell} \,.$$

D'un autre côté la filtration originelle F vue sous la forme des produits semi-directs hérités de $G = G_{2m} \times G^o$ prend la forme qui suit

$$(11) \qquad G_{2m} \subset G_{2m} \times G^o_1 \subset \ldots G_{2m} \times G^o_{n-m+\ell} \subset \ldots G_{2m} \times G^o \,.$$

Dans (10) G^o_ℓ n'est pas autre chose que le sous-groupe H dont l'algèbre de Lie engendre le noyau de ω.
On déduit des relations (10) et (11) la filtration $F_o(G)$ suivante

$$(12) \qquad \begin{aligned} & G^o_1 \subset \cdots G^o_{n-m+\ell} \subset H_1 \times G^o_{n-m+\ell} \subset \cdots H_m \times G^o_{n-m+\ell} \cdots \\ & \subset G_{2m} \times G^o_{n-m+\ell} \subset G_{2m} \times G^o_{n-m+\ell+1} \cdots \\ & \subset G_{2m} \times G^o_{n-m+\ell+k} \subset \cdots G_{2m} \times G^o \,. \end{aligned}$$

Pour voir que le diagramme pondéré associé à (12) est simple, il faut s'assurer que le graphe orienté qui lui est associé ne possède qu'un seul sommet singulier, qui est nécessairement attractif.

En fait on a les diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{tikzcd}
H_{j+1} \times G^{o}_{n-m+\ell} \arrow[r] \arrow[d] & H_j \times G^{o}_{n-m+\ell} \arrow[d] \\
G_{2m-j-1} \times G^{o}_{n-m+\ell} \arrow[r, hook] & G_{2m-j} \times G^{o}_{n-m+\ell}
\end{tikzcd} \tag{13}$$

pour $0 \leq j \leq m$ avec $H_m = G_m$; et

$$\begin{tikzcd}
G^{o}_{n-m+\ell-k+1} \arrow[d] & G^{o}_{n-m+\ell-k} \arrow[l] \arrow[d] \\
G_{2m} \times G^{o}_{n-m+\ell+k-1} \arrow[r, hook] & G_{2m} \times G^{o}_{n-m+\ell+k}
\end{tikzcd} \tag{14}$$

pour $1 \leq k \leq n - m$. Dans les diagrammes (13) et (14) les flèches sont des homomorphismes inclusions. Le graphe orienté associé à (12) a donc un seul sommet singulier qui est $H_m \times G_{n-m+\ell}$; voici la portion du graphe $d\,(\omega, F_0)$ qui porte ce sommet singulier

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & H_{m-1} \times G^{o}_{n-m+\ell} \arrow[r] \arrow[d] & H_m \times G^{o}_{n-m+\ell} \arrow[d] & H_{m-1} \times G^{o}_{n-m+\ell} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
{} \arrow[r] & H_{m-1} \times G^{o}_{n-m+\ell} \arrow[r] & G_m \times G^{o}_{n-m+\ell} \arrow[r] & G_{m+1} \times G^{o}_{n-m+\ell} \arrow[r] & {}
\end{tikzcd} .$$

Le diagramme (14) montre que $d(\omega, F_o)$ à la forme contracté suivante

$$O \underset{(n)}{\longrightarrow} O \underset{(m)}{\overset{\longleftarrow}{\longrightarrow}} O .$$

Ainsi le théorème 1.5.1 est démontré. $\square$

Du théorème 1.5.1 on déduit que dans un groupe de Lie complètement résoluble toute 2-forme symplectique invariante par les translations à gauche possède un diagramme simple.

2. Dynamiques différentiables et diagrammes pondérés. Cette section est consacré à deux questions. L'une est de nature topologique, l'autre question concerne la réductibilité des “paires transitives” au sens de A. L. Onishchik [**22**]. Dans la suite on entend par systèmes dynamiques différentiables les actions différentiables des groupes de Lie. Le problème topologique qui nous intéresse est celui de l'existence de feuilletages lagrangiens invariants par des systèmes dynamiques symplectiques. En situation complètement résoluble ce problème est en rapport avec la nature des diagrammes pondérés $d(\omega, F)$ ou si l'on veut des graphes orientés associés, [au sens des définitions 1.3.3 et 1.3.4.

Le problème de "réductibilité" des paires transitives est quant à lui lié à la nature des sommets singuliers des diagrammes pondérés. Nous allons préciser ces relations une fois rappelées les notions de degré primitif et de dégré de symétrie des variétés homogènes, voir [**7**] pour le cas des groupes compactes.

2.1. Degrés primitifs des variétés homogènes.
Une variété M est dite homogène quand elle possède un *groupe de Lie des transformations transitif.* La collection constituée des groupes de Lie des transformations transitifs de M sera désignée par $\mathcal{L}(M)$. Tout $G \in \mathcal{L}(M)$ permet l'identification de M avec une paire (H, G). La paire (H, G) représente l'espace homogène G/H. Dans la représentation $M = (H, G)$ le sous-groupe H est le sous-groupe stabilisateur d'un point dans M. Gardons ces notations et posons

$$d^G(M) = \frac{dimH}{codimH + 1}$$
$$d(M) = \min_{G \in \mathcal{L}(M)}\{d^G(M)\}.$$

Définition 2.1.1. Un couple (H, G) est dit quasi-primitif (resp. primitif) si G ne contient aucun sous-groupe propre G_0 (rep. si G ne aucun sous-groupe distingué propre G_o) satisfaisant la condition $G_o \in \mathcal{L}(G/H)$.

Dans l'esprit de [**7**] et de [**22**] la définition 2.1.1 signifie ceci. Suppons que (H, G) soit quasi-primitif alors les deux conditions $(H', G') = (H, G)$ et $G' \subset G$ entrainent les conséquences suivantes (i) $G' = G$ et (ii) H' est dans la classe de conjugaison de H dans G.
Nous allons maintenant nous restreindre à la sous-collection $\mathcal{R}(M) \subset \mathcal{L}(M)$ constituée des groupes de Lie résolubles. Autrement dit M est une solvariété (solvmanifolds) si $\mathcal{R}(M)$ n'est pas vide. Pour une vision plus large de $\mathcal{R}(M)$ lorsque M est compacte, on renvoie au panorama de L. Auslander [**2**]. On renvoie aux références [**12**] et [**13**] pour des considérations plus ciblées, (e.g. cohomologie ou homotopie des dites variétés.)
Les variétés ayant le degré primitif nul sont les quotients des groupes de Lie par leurs sous-groupes fermés discrets. Quand ces variétés sont compactes, les sous-groupes de Lie stabilisateurs des points de variétés en question sont des réseaux cocompactes [**23**].
Nous allons examiner une notion de dégré relatif qui est suggérée par les notions combinatoires (i.e. graphee et diagrammes qui ont fait l'objet de la section 1.) On fixe un groupe de Lie $G \in \mathcal{L}(M)$, ou ce qui revient au même une géométrie particulière dans la variété M. On désigne par $\mathcal{L}_G(M)$ la sous-collection des $G' \in \mathcal{L}(M)$ avec $G' \subset G$. La question est d'"optimiser" dans un sens à préciser le choix de G' dans $\mathcal{L}_G(M)$. Pour chaque choix $G' \in \mathcal{L}_G(M)$, M est identifié à une paire (H', G') . Le choix de $H' \subset G'$ se fait dans une même classe de

conjugaison des sous-groupes de G'. On associera à la paire (H', G') le nombre rationnel

$$r_{G'}(M) = \frac{dimH'}{codimH' + 1} = \frac{dimH'}{dimM + 1};$$

où M est l'espace homogène G'/H'. Ce nombre ne dépend que de $G' \in \mathcal{L}_G(M)$. Soient G' et G'' dans $\mathcal{L}_G(M)$. Dans l'esprit qui nous anime la comparaison des paires (H', G') et (H'', G'') consiste en la comparaison des deux nombres $r_{G'}(M)$ et $r_{G"}(M)$. (On renvoie à [**22**] pour le cas des paires riemanniennes compactes, c'est à dire les variétés riemanniennes homogènes compactes).
Posons

$$d_G(M) = \min_{G' \in \mathcal{L}_G(M)} \{\tfrac{dimH'}{codimH'}\}$$

Le nombre rationnel (dM) est appelé le dégré primitif de M. Le nombre $d_G(M)$ est appelé le dégré primitif relatif de (G,M).

Il est clair que si G' et G'' sont dans $\mathcal{L}_G(M)$ la relation d'inclusion $G'' \subseteq G'$ entraine à $d_{G''}(M) \leq d_{G'}(M)$.

Exemples. a) Si une variété M possède une structure de groupe de Lie compatible avec sa topologie générale alors $d(M) = 0$.
b) Si Γ est un sous-groupe discret fermé dans un groupe de lie connexe G alors $d(\Gamma \backslash G) = 0$. On a l'inégalité $d(M) \leq d_G(M)$ pour tout $G \in \mathcal{L}(M)$.

Définition 2.1.2. Pour $G \in \mathcal{L}(M)$ on dit que (G, M) est quasi-primitifs si $\mathcal{L}_G(M) = \{G\}$; un groupe de Lie $G \in \mathcal{L}(M)$ est dit non quasi-primitif si le cardinal de $\mathcal{L}_G(M)$ est supérieur à 1.

On voit sans difficulté que les propriétés suivantes sont équivalentes

(i) $G \in \mathcal{L}(M)$ *est quasi-primitif ;*
(ii) $d_G(M) = r_G(M)$

2.2. Réductibilité des diagrammes pondérés.
Désormais on se restreind à la catégorie des groupes de Lie complètement résolubles et à la dynamique de ces groupes dans leurs variétés symplectiques homogènes.

Soit G un groupe de Lie complètement résoluble. Pour une forme $\omega \in \Omega^2_\ell(G)$, on considère la variété symplectique $(G/H, \omega)$ où H est le sous-groupe connexe dont l'algèbre de Lie engendre le noyau de ω. On note encore ω la forme symplectique de G/H héritée de $\omega \in \Omega^2_\ell(G)$. Naturellement $G \in \mathcal{L}(M)$ où M désigne la variété G/H , conformément aux conventions adoptés on identifie M avec la paire (H, G) et le couple (M, ω) avec le triplet (H, G, ω).

Les notations $\mathcal{L}(M,\omega)$ et $\mathcal{L}_G(M,\omega)$ ont un sens évident. On peut parler des degrés primitifs symplectique. Les notations suivantes ont un sens clair.

$$d(M,\omega) = min(d^{G'}(M)),$$
$$G' \in \mathcal{L}_G(M,\omega)$$
$$d_G(M,\omega) = min(r_{G'}(M)),$$
$$G' \in \mathcal{L}(M,\omega)$$

Soit maintenent $(\omega, F) \in \Omega^2_\ell(G) \times \mathcal{F}(G)$. On note (G_k, H_k, ω_k) les sommets du graphe qui est associé à (ω, F). Comme auparavant on pose $M_k = (H_k, G_k)$ et (M_k, ω_k) avec (H_k, G_k, ω_k). Par habituel abus de notations, ω_k désigne tout aussi bien $\omega_k \in \Omega^2_\ell\,(G_k)$ que la forme symplectique de M_k qui en est déduite.
Nous allons établir des liens entre les natures des sommets du graphe orienté $gr(\omega, F)$, (ou du diagramme pondéré $d(\omega, F)$) et le problème de primitivié des (H_k, G_k) dans $\mathcal{L}\,(M_k, \omega_k)$
Les sommets réguliers sont en fait de deux types: Ceux de type (I) sont appelés sommets hyperboliques croissants. Les sommets de type (II) sont appelés sommets hyperboliques décroissants [**19**]. On peut ainsi mettre face à face ce point de vue dynamique et les types de sommet (d'un diagramme) décrits à la section 1. C'est ce qui est représenté ci-dessous (voir [**19**]).
Deux sommets S_k et S_ℓ d'un graphe gr(ω, F) sont *équivalentes* si les variétés G_k/H_k et G_ℓ/H_ℓ sont canoniquement identiques.
Sinon ces sommets sont sont *inéquivalents*.
L'expression canoniquement identiques a le sens suivant: (i) $dimG_k/H_k = dimG_\ell/H_\ell$, (ii) on a l'alternative suivante, soit $G_k \in \mathcal{L}(G_\ell/H_\ell)$ soit $G_\ell \in \mathcal{L}(G_k/H_k)$.
Lorsque deux sommets S_k et S_ℓ sont équivalents on a nécessairement l'une des relations d'inclusion suivantes $(H_k, G_k) \subset (H_\ell, G_\ell)$ ou $(H_\ell, G_\ell) \subset (H_k, G_k)$, (voir [**22**]). Supposons que (G_k, H_k) est équivalent à (G_ℓ, H_ℓ). Si en plus on a la relation d'inclusion $(H_k, G_k) \subset (H_\ell, G_\ell)$, alors la paire (G_ℓ, H_ℓ) est *réductible à la paire* (H_k, G_ℓ). Dans ces conditions tous les sommets situés entre (H_k, G_k) et (H_ℓ, G_ℓ) sont réguliers de type hyperbolique croissant.
Les affirmations qui suivent sont faciles à vérifier.

Proposition 2.2.1.

(i) Un sommet hyperbolique croissant est équivalent aux deux sommets qui lui sont adjacents.
(ii) Un sommet hyperbolique décroissant est non équivalent aux deux sommets qui lui sont adjacents.
(iii) Un sommet singulier attractif est équivalent au sommet qui lui est adjacent à gauche.
(iv) Un sommet singulier répulsif est équivalent au sommet qui lui est adjacent à droite.

Soit G un groupe de Lie complètement résoluble. Soit $\omega \in \Omega^2_\ell(G)$. Soit H le sous-groupe connexe de G dont l'algèbre de Lie engendre le noyau de ω. La variété symplectique $(G/H, \omega)$ est identifiée au triplet (H, G, ω).

Théorème 2.2.2. *On suppose que la paire (H, G) est quasi-primitive, en d'autres termes $r_G(M) = d_G(M))$. Si un diagramme pondéré $d(\omega, F)$ est connexe, alors il possède au plus trois sommets singuliers.*

Esquisse de démonstration. La preuve s'appuie sur les propositions 1.3.1 et 1.3.2. En fait l'égalité $d_G(M) = r_G(M)$ entraîne que le sommet $S = (H, G)$ de $d(\omega, F)$ est hyperbolique décroissant à sa gauche. Puisque $d(\omega, F)$ est connexe il a la forme suivante

$$\mathrm{O} \longrightarrow \mathrm{O} \cdots \mathrm{O} \leftrightarrows \overset{S}{\mathrm{O}}\,.$$

Soit S' le sommet singulier le plus proche du sommet S. Ce sommet S' est attractif. Si $d(\omega, F)$ est simple alors S' est l'unique sommet singulier de $d(\omega, F)$. Alors $d(\omega, F)$ possède un seul sommet singulier. S'il n'en est pas ainsi alors la variété symplectique M' définie par le sommet singulier S' est de dimension > 0. Dans ces conditions la proposition 1.3.2 assure que le sommet S' est équivalent à un sommet singulier S'' qui est nilpotent et répulsif. Puique $d(\omega, F)$ est connexe la proposition 1.3.1 entraîne qu'il existe un et un seul sommet singulier S''' à gauche de S''. Cela achève la démonstration du théorème. $\square$

Remarque 2.2.3. A partir du theorème 2.2.2 on déduit en fait qu'un diagramme connexe possède au plus quatre sommets singuliers. Si on met en oeuvre la convention de contraction des sommets hyperboliques alors les seuls modèles des diagrammes connexes sont les quatre suivants

(α) $\quad O \underset{(m_1)}{\longrightarrow} O \underset{(n_1)}{\leftrightarrows} O \underset{(m_2)}{\longrightarrow} O \underset{(n_2)}{\leftrightarrows} O \underset{(m_3)}{\longrightarrow} O$ associé au graphe

$$\begin{tikzcd}
O \arrow[rr] \arrow[dr] & & O \arrow[dl] & O \arrow[l] \arrow[rr] \arrow[dr] & & O \arrow[dl] & O \arrow[l] \arrow[rr] \arrow[dr] & & O \arrow[dl] \\
& O & & & O & & & O &
\end{tikzcd}$$

(β) $\quad O \underset{(m_1)}{\longrightarrow} O \underset{(n_1)}{\leftrightarrows} O \underset{(m_2)}{\longrightarrow} O \underset{(n_2)}{\leftrightarrows} O$ associé au graphe

$$\begin{tikzcd}
O \arrow[rr] \arrow[dr] & & O \arrow[dl] & O \arrow[l] \arrow[rr] \arrow[dr] & & O \arrow[dl] & O \arrow[l] \arrow[d] \\
& O & & & O & & O
\end{tikzcd}$$

(γ)

$O \underset{(m_1)}{\longrightarrow} O \underset{(n_1)}{\leftrightarrows} O \underset{(m_2)}{\longrightarrow} O$ associé au graphe
$$\begin{tikzcd} O \arrow[rr] \arrow[dr] & & O \arrow[dl] & O \arrow[l] \arrow[rr] \arrow[dr] & & O \arrow[dl] \\ & O & & & O & \end{tikzcd}$$

(δ) $O \underset{(m_1)}{\longrightarrow} O \underset{(n_1)}{\leftrightarrows} O$ associé au graphe
$$\begin{tikzcd} O \arrow[rr] \arrow[dr] & & O \arrow[dl] & O \arrow[l] \arrow[d] \\ & O & & O \end{tikzcd}$$

L'association entre diagramme et graphe doit être comprise cas par cas de la façon qui suit.
(α) Le diagramme possède quatre sommets singuliers. Tous les sommets réguliers compris entre deux sommets singuliers consécutifs sont deux à deux équivalents. Ces sommets réguliers sont répartis en trois classes d'équivalence dont chacune contient plusieurs sommets réguliers.
(β) Le diagramme possède deux sommets singuliers. Il y a trois classes d'équivalence de sommets réguliers. La classe située à l'extrême droite contient un seul sommet régulier.
(γ) Le diagramme possède deux sommets singuliers et il y a deux classes d'q̓uivalence de sommets réguliers dont chacune contient plusieurs sommets réguliers.
(δ) Le diagramme possède un seul sommet singulier. Il y a deux classes d'équivalence de sommets réguliers. La classe située à l'extrême droite contient un seul sommet régulier.

Les cas (α) et (γ) sont des diagrammes des paires non quasi-primitives les cas (β) et (γ) sont ceux des paires quasi-primitives. De plus (γ) est simple

2.3. Sommets singuliers et feuilletages invariants.
Soit (M, ω) une variété symplectique homogène et $\mathcal{L}(M, \omega)$ la collection de ses dynamiques différentiables. Supposons que $\mathcal{R}(M, \omega)$ n'est pas vide. Il contient donc un groupe de Lie complètement résoluble G. On sait que chaque choix d'un point x dans M permet d'identifier M avec une paire (G, H). Deplus (M, ω) est identifié avec le triplet (H, G, ω). A chaque $F \in \mathcal{F}(G)$ correspond les objets combinatoires $\mathrm{gr}(\omega, F)$ et $d(\omega, F)$ ayant $S = (H, G)$ pour *sommet extrémal*.
Nous allons montrer qu'en fait les poids des sommets répulsifs des $d(\omega, F)$ constituent des obstructions à l'existence de feuilletages lagrangiens invariants par G.

2.3.0. *Simplicité des graphes* $\mathrm{gr}(\omega, F)$ *et feuilletages lagrangiens.* Les données (M, ω), $G \in \mathcal{R}(M, \omega)$ sont comme ci-dessus, viz G est complètement résoluble. On identifie M et (M, ω) avec (H, G) et (H, G, ω) respectivement.

Nous conservons l'abus d'écriture convenu, viz ω est l'image inverse de la forme symplectique de (M,ω) par l'identification $G/H \sim M$.

On sait construire dans M d'autres objets géométriques liés à (M,ω). Par exemple:

(i) Feuilletages lagrangiens [**25**].
(ii) Structures bilagrangiennes [**6, 19**].
(iii) Structures kähleriennes affinement plates [**18**].

En général ces structures ne sont pas des invariants de la dynamique donnée $G \in \mathcal{L}(M,\omega)$, bien que celle-ci joue un grand rôle dans leur construction [**19**]. A l'opposé de la dernière remarque, il arrive que l'existence seule d'un certain type de dynamique $G \in \mathcal{L}(M)$ ait des conséquences spectaculaires sur la géométrie globale de la variété M. Les théorèmes de [**3**] et de Dusa Mc Duff [**10**] en sont des exemples frappants. Ces théorèmes disent grosso modo ceci. Soit (M,ω,J) une variété kahlerienne compacte de dimension 2m. Si $\mathcal{L}(M)$ contient un groupe nilpotent de dimension 2m alors M est difféomrphe au tore plat.

Soit G un groupe de Lie complètement résoluble. Fixons une 2-forme $\omega \in \Omega^2_\ell(G)$. Considérons deux séries de compositions F et F' dans $\mathcal{F}(G)$.

La remarque suivante s'impose. Si on fait abstraction de la notion d'indice des arrêtes des graphes qui a été introduite à la sous-section 1.2 et de la notion de poids assigné aux sommets des diagrammes alors les graphes $gr(\omega,F)$ et $gr(\omega,F')$ (resp. $d(\omega,F)$ et $d(\omega,F')$) peuvent donner lieu au même diagramme contracté. Les quantités numériques que sont l'indice d'une arrête et le poids d'un sommet sont donc des éléments de comparaison efficaces. On se propose d'en donner une signification gémétrique. Dans la suite, à chaque arrête d'un diagramme $d(\omega,F)$ est affecté son indice, à chaque sommet de $d(\omega,F)$ est affecté son poids.

Définition 2.3.1. Deux graphes $\mathrm{gr}(\omega,F)$ et $\mathrm{gr}(\omega,F')$ [resp. deux diagrammes pondérés $d(\omega,F)$ et $d(\omega,F')$) sont dits équivalents s'ils ont des sommets singuliers identiques.

Remarque 2.3.2. La correspondance entre les classes d'isomorphisme des algèbres de Lie semi-simples sur un corps algébriquement clos et les *diagrammes* de Dynkin a inspiré la démarche suivie ici.

On notera que les indices des arrêtes des diagrammes contractés permettent de différencier deux graphes donnant lieu au même diagramme contracté *géométrique* simple, c'est à dire un diagramme dont les arrêtes sont dépourvues d'indice. Tout ce que nous disons du sommet $S_k = (H_k, G_k)$ d'un diagramme a une incidence géométrique sur la varité symplectique homogène $M_k = G_k/H_k$.

Par exemple le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \mathrm{O} \arrow[r, "(1)"'] & \overset{S}{\mathrm{O}} \arrow[r, shift right, "(1)"'] & \mathrm{O} \arrow[l, shift right] \end{tikzcd}$$

correspond à une surface orientée. Le graphe complet de cette surface est distinct du graphe qui donne lieu au diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \mathrm{O} \arrow[r, "(2)"'] & \mathrm{O} \arrow[r, shift right, "(2)"'] & \mathrm{O}. \arrow[l, shift right] \end{tikzcd}$$

Ce dernier correspond à une variété symplectique homogène de dimension 4. Par conséquent l'expression “diagramme contracté” s'entendra toujours indices des arrêtes réguliers compris, même si on omet volontairement de d'expliciter ces indices.
Les notations $G, \omega, (M, \omega) = (G, H, \omega)$ sont celles fixées dans les sections et sous-sections précédentes.

Théorème 2.3.3. *Il y a correspondance bijective entre les classes d'équivalence des graphes orientés simples* $\mathrm{gr}(\omega, F)$ *dans* $\{\mathrm{gr}(\omega, F)/F \in \mathcal{F}(G)\}$ *et les feuilletages lagrangiens dans* (M, ω) *qui sont invariants par* G *.*

Démonstration. Soit $\mathrm{gr}(\omega, F)$ un graphe orienté simple. Si $2m$ est la dimension de G/H le diagramme $d(\omega, F)$ possède exactement m sommet hyperboliques décroissants et un seul sommet singulier attractif S. Il a la forme contractée

$$\begin{tikzcd} \mathrm{O} \arrow[r] & \mathrm{O} \arrow[r, shift right] & \mathrm{O}\ . \arrow[l, shift right] \end{tikzcd}$$

Le sommet singulier S a pour coordonnées la paire $S = (G_{m+\ell}, H)$ où $\dim H = \ell$. Bien entendu on a $H \subset G_{m+\ell}$ et $i^*_{m+\ell}\omega = 0$. Le feuilletage de G par les classes à droite $\gamma G_{m+\ell}$ est invariant par les translations à gauche dans G et est projeté en un feuilletage lagrangien dans (M, ω). Le feuilletage ainsi obtenu est invariant par l'action de G dans (M, ω) ; il ne dépend d'autre part que de la classe d'équivalence de $\mathrm{gr}(\omega, F)$.
Réciproquement, supposons que l'on ait dans (M, ω) un feuilletage lagrangien L qui est invariant par G. Soit $x_0 \in M$ un point dont le sous-groupe stabilisateur est H. Notons π la projection orbitale $\gamma \mapsto \gamma x_0$ et $L' = \pi^{-1}(L)$; ce dernier est un feuiletage invariant par les translations à gauche dans G. La feuille $L'(e)$ de L' qui contient l'élément neutre est un sous-groupe de G de dimension $m+\ell$ et contenant H. Puisque G est complètement résoluble, il découle du classique deuxième théorème de Lie qu'il existe une suite de composition $F \in \mathcal{F}(G)$ tel que la feuille $L'(e)$ soit un sommet du graphe $\mathrm{gr}(\omega, F)$.
Puisque H est inclus dans $L'(e)$ et que $i^*_{L'(e)}\omega = 0$, $L'(e)$ est l'unique sommet singulier de $d(\omega, F)$. Cela assure la simplicité de $d(\omega, F)$. Soit $F' \in \mathcal{F}(G)$ contenant le sous-groupe $L'(e)$. L'inclusion $H \subset L'(e)$ entraîne que $L'(e)$ est

le seul sommet singulier de $d(\omega, F')$. Par conséquent F' est dans la classe d'équivalence de F. Cela termine la démonstration du théorème 2.3.3. $\square$

Corollaire 2.3.4. *Si* $\omega \in \Omega^2_\ell(G)$ *possède un diagramme semi-simple* $d(\omega, F)$ *qui est semi-nilpotent, alors* (M, ω) *possède un feuilletage lagrangien invariant par* G.

Preuve. Le théorème 1.5.1 permet de déformer $d(\omega, F)$ en un diagramme simple $d(\omega, F')$. Il suffit donc d'appliquer le théorème 2.3.3 pour termnier la preuve du corollaire. $\square$

Références

1. Auslander L., *Bieberbach's groups on space groups and discrete uniform subgroups of Lie groups* I, Ann. Math., **71** (1960), 579–590.
2. Auslander L., *An exposition of the structures of solvmanifolds*, Bull. of Amer. Math. Soc., **79** (1973), 227–261.
3. Benson C., Gordon C., *Kahler and symplectic structures on nilmanifolds*, Topology, **27** (1988), 513–518.
4. Benson C., Gordon C., *Kahler structures on compact solvmanifolds*, Proc. of the Amer. Math. Soc., **108** (1990), 971–990.
5. Bourbaki N., *Groupes et Algèbres de Lie*, Vol. **7**, Hermann, Paris.
6. Hess H., *Connections on symplectic manifolds and geometric quantization*, Springer LN in Math., **836**, 153–165.
7. Hsiang W. Y., *Cohomology theory of Topological Transformation Groups*, Erg. der Math. und ihrer Gr., Band **85**, Springer-Verlag, 1975.
8. Johnson J. L., *Kaehler submersions and holomorphic foliations*, J. Diff. Geom., **15** (1980), 71-79.
9. Johnson J. L., Witt L. B., *Totally geodesic foliations*, J. Diff. Geom., **15** (1980), 225–235.
10. Mc Duff D., *The moment map for circle action on symplectic manifolds*, JGP, **5** (1988), 149–160.
11. Mc Duff D., *Example of simply connected symplectic manifolds non kählerian*, J. Diff. Geom., **70** (1984), 267–277.
12. Mostow G. D., *Cohomology of topological groups and solomanifolds*, Ann. of Math., **73** (1961), 20–48.
13. Mostow G. D., *Fundamental groups of homogeneous spaces*, Ann. of Math., **66** (1957), 249–255.
14. Marsden J., Weinstein A., *Reduction of symplectic manifolds with symmetry*, Reports on Math. Phys., **5** (1974), 121–130.
15. Nguiffo Boyom M., *Variétés symplectiques affines*, Manuscripta Math., **64** (1989), 1–33.
16. Nguiffo Boyom M., *Structures affines homotpes à zéro*, J. Diff. Geom., **33** (1990), 859–911.
17. Nguiffo Boyom M., *Structures affines isotropes des groupes de Lie*, Annalli Scuo. Norm. Sup. Pisa.
18. Nguiffo Boyom M., *Métriques kählériennes affinement plates*, Proc. London Math. Soc., **3** (1993), 358–380.
19. Nguiffo Boyom M., *Structures localement plates dans certaines variétés symplectiques*, Math Scand., **76** (1995), 61–84.

20. Nguiffo Boyom M., *Sur les réductions kahleriennes dans les groupes de Lie résolubles. Application à la conjecture des tores plats* (Soumis).
21. Nomizu K., *On the cohomology of compact homogeneous spaces of nilpotent Lie groups*, Ann. of Math., **59** (1954), 531–538.
22. Oniscik A. L., *Inclusion relations among transitive compact groups*, Amer. Math. Soc. Translations, S.2 **50** (1966), 5–58.
23. Raghunathan S., *Discrete subgroups of Lie groups*, Ergebnisse der Math., **68**, Springer-Verlag, 1972.
24. Serre J. P., *GAGA*, Ann. Inst. Fourier, **6** (1956), 1–4.
25. Weinstein A., *Symplectic manifolds and their lagrangian submanifolds*, Adv. In Math., **6** (1971), 329–346.

Received May 07, 2009

University Montpellier 2
3, rue du Dahomey
34090 Montpellier, France
e-mail:
michel.nguiffo-boyom@math.univ-montp2.fr