Pierwiastki aproksymatywne niecharakterystyczne

S. Brzostowski

Definicja pierwiastka aproksymatywnego.

Definicja pierwiastka aproksymatywnego.

Definicja 1.

R - pierścień przemienny z 1,
$f \in R[Y]$ - wielomian moniczny zmiennej Y stopnia k,
$l \in \mathbb{N}$ - dzielnik k taki, że $1/l \in R$.

Definicja pierwiastka aproksymatywnego.

Definicja 1.

R - pierścień przemienny z 1,
$f \in R[Y]$ - wielomian moniczny zmiennej Y stopnia k,
$l \in \mathbb{N}$ - dzielnik k taki, że $1/l \in R$.

Wielomian moniczny $g \in R[Y]$ spełniający warunek

$$\deg_Y(f - g^l) < k - k/l$$

jest zwany pierwiastkiem aproksymatywnym l-ego stopnia z f.

Będziemy go oznaczać przez $\sqrt[l]{f}$.

Definicja pierwiastka aproksymatywnego.

Definicja 1.

R - pierścień przemienny z 1,
$f \in R[Y]$ - wielomian moniczny zmiennej Y stopnia k,
$l \in \mathbb{N}$ - dzielnik k taki, że $1/l \in R$.

Wielomian moniczny $g \in R[Y]$ spełniający warunek

$$\deg_Y(f - g^l) < k - k/l$$

jest zwany pierwiastkiem aproksymatywnym l-ego stopnia z f.

Będziemy go oznaczać przez $\sqrt[l]{f}$.

Twierdzenie 1. *Przy powyższych założeniach l-ty pierwiastek aproksymatywny $\sqrt[l]{f}$ z f istnieje i jest wyznaczony jednoznacznie.*

Przykład 1.

* *Dla* $f = Y^k + a_1 Y^{k-k/l} + ... + a_{k-k/l}$

Przykład 1.

* *Dla* $f = Y^k + a_1 Y^{k-k/l} + ... + a_{k-k/l}$

$$\sqrt[l]{f} = Y^{k/l} + \frac{a_1}{l},$$

gdyż

$$(\sqrt[l]{f})^l = (Y^{k/l}+\frac{a_1}{l})^l = Y^l+a_1Y^{k-k/l}+składniki\, niższego\, stopnia$$

Przykład 1.

* *Dla* $f = Y^k + a_1 Y^{k-k/l} + ... + a_{k-k/l}$

$$\sqrt[l]{f} = Y^{k/l} + \frac{a_1}{l},$$

gdyż

$$(\sqrt[l]{f})^l = (Y^{k/l} + \frac{a_1}{l})^l = Y^l + a_1 Y^{k-k/l} + składniki\,niższego\,stopnia$$

* *Dla* $f = Y^k + a_1 Y^{k-1} + ... + a_k$

Przykład 1.

* *Dla* $f = Y^k + a_1 Y^{k-k/l} + \ldots + a_{k-k/l}$

$$\sqrt[l]{f} = Y^{k/l} + \frac{a_1}{l},$$

gdyż

$$(\sqrt[l]{f})^l = (Y^{k/l} + \frac{a_1}{l})^l = Y^l + a_1 Y^{k-k/l} + sk\text{ł}adniki\, ni\dot{z}szego\, stopnia$$

* *Dla* $f = Y^k + a_1 Y^{k-1} + \ldots + a_k$

$$\sqrt[k]{f} \quad = \quad Y + \frac{a_1}{k},$$

Przykład 1.

* *Dla* $f = Y^k + a_1 Y^{k-k/l} + \ldots + a_{k-k/l}$

$$\sqrt[l]{f} = Y^{k/l} + \frac{a_1}{l},$$

gdyż

$$(\sqrt[l]{f})^l = (Y^{k/l} + \frac{a_1}{l})^l = Y^l + a_1 Y^{k-k/l} + składniki\, niższego\, stopnia$$

* *Dla* $f = Y^k + a_1 Y^{k-1} + \ldots + a_k$

$$\begin{aligned} \sqrt[k]{f} &= Y + \frac{a_1}{k}, \\ \sqrt[1]{f} &= f. \end{aligned}$$

* *Dla* $f = Y^6 + 6Y^5 + 9Y^4 + 6Y^3 + 19Y^2 - Y + 12$

* *Dla* $f = Y^6 + 6Y^5 + 9Y^4 + 6Y^3 + 19Y^2 - Y + 12$ *mamy*

$$f = ((Y+1)^3 - 3Y + 2)^2 + Y^2 - Y + 3,$$

* *Dla* $f = Y^6 + 6Y^5 + 9Y^4 + 6Y^3 + 19Y^2 - Y + 12$
mamy

$$f = ((Y+1)^3 - 3Y + 2)^2 + Y^2 - Y + 3,$$

a więc

$$\sqrt[2]{f} \quad = \quad (Y+1)^3 - 3Y + 2,$$

* *Dla* $f = Y^6 + 6Y^5 + 9Y^4 + 6Y^3 + 19Y^2 - Y + 12$ *mamy*

$$f = ((Y+1)^3 - 3Y + 2)^2 + Y^2 - Y + 3,$$

a więc

$$\begin{aligned} \sqrt[2]{f} &= (Y+1)^3 - 3Y + 2, \\ \sqrt[6]{f} &= (Y+1). \end{aligned}$$

* *Dla* $f = Y^6 + 6Y^5 + 9Y^4 + 6Y^3 + 19Y^2 - Y + 12$ *mamy*

$$f = ((Y+1)^3 - 3Y + 2)^2 + Y^2 - Y + 3,$$

a więc

$$\begin{aligned} \sqrt[2]{f} &= (Y+1)^3 - 3Y + 2, \\ \sqrt[6]{f} &= (Y+1). \end{aligned}$$

Ponadto

$$f = (Y^2 + 2Y - 1)^3 + 10Y^3 + 28Y^2 - 7Y + 13$$

* *Dla* $f = Y^6 + 6Y^5 + 9Y^4 + 6Y^3 + 19Y^2 - Y + 12$ *mamy*

$$f = ((Y+1)^3 - 3Y + 2)^2 + Y^2 - Y + 3,$$

a więc

$$\begin{aligned} \sqrt[2]{f} &= (Y+1)^3 - 3Y + 2, \\ \sqrt[6]{f} &= (Y+1). \end{aligned}$$

Ponadto

$$f = (Y^2 + 2Y - 1)^3 + 10Y^3 + 28Y^2 - 7Y + 13$$

czyli

$$\sqrt[3]{f} = (Y^2 + 2Y - 1).$$

Ciągi charakterystyczne i twierdzenie Abhankara i Moha.

Ciągi charakterystyczne i twierdzenie Abhankara i Moha.

Założenia Podstawowe.

$f = Y^k + a_1(X)Y^{k-1} + \ldots + a_k$ - nierozkładalny i moniczny element $\mathbb{K}((X))[Y]$,
$\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$, $\operatorname{char}\mathbb{K} = 0$, $\deg_Y f = k$.

Ciągi charakterystyczne i twierdzenie Abhankara i Moha.

Założenia Podstawowe.

$f = Y^k + a_1(X)Y^{k-1} + ... + a_k$ - nierozkładalny i moniczny element $\mathbb{K}\left(\left(X\right)\right)\left[Y\right]$,
$\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$, $\mathrm{char}\,\mathbb{K} = 0$, $\deg_Y f = k$.

Na mocy twierdzenia Newtona,

$$f\left(t^k, Y\right) = \prod_{\varepsilon \in U_k(\mathbb{K})} \left(Y - y\left(\varepsilon t\right)\right) \text{ dla pewnego } y\left(t\right) \in \mathbb{K}\left(\left(t\right)\right),\ y\left(t\right) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} y_j t^j$$

(przez $U_k\left(\mathbb{K}\right)$ oznaczamy zbiór $\{\varepsilon \in \mathbb{K} : \varepsilon^k = 1\}$).

Następnie, niech

$$m = (m_0, \dots, m_h) \text{ - charakterystyka } f,$$

Następnie, niech

$$m = (m_0, \ldots, m_h) \text{ - charakterystyka } f,$$

$d = (d_1, \ldots, d_{h+1}),$ gdzie $d_{h+1} = 1$, - malejący ciąg podzielników liczby k określony wzorami

$$d_i = \gcd(m_0, \ldots, m_{i-1}) \text{ dla } 1 \leqslant i \leqslant h+1,$$

tzn. w szczególności

$$k = d_1 < d_2 < ... < d_{h+1} = 1.$$

Określamy również następujące pochodne ciągi charakterystyczne:

$$s = (s_0, \ldots, s_{h+1}),$$

kładąc $s_0 := m_0$, $s_i := m_1 d_1 + \sum_{2 \leqslant j \leqslant i} (m_j - m_{j-1})\, d_j$, dla $1 \leqslant i \leqslant h$, oraz $s_{h+1} := +\infty$;

Określamy również następujące pochodne ciągi charakterystyczne:

$$s = (s_0, \dots, s_{h+1}),$$

kładąc $s_0 := m_0$, $s_i := m_1 d_1 + \sum_{2 \leqslant j \leqslant i} (m_j - m_{j-1})\, d_j$, dla $1 \leqslant i \leqslant h$, oraz $s_{h+1} := +\infty$;

$$r = (r_0, \dots, r_{h+1}),$$

kładąc $r_0 := m_0$, $r_i := \frac{s_i}{d_i}$, dla $1 \leqslant i \leqslant h$, oraz $r_{h+1} := +\infty$;

Określamy również następujące pochodne ciągi charakterystyczne:

$$s = (s_0, \ldots, s_{h+1}),$$

kładąc $s_0 := m_0$, $s_i := m_1 d_1 + \sum_{2 \leqslant j \leqslant i} (m_j - m_{j-1})\, d_j$, dla $1 \leqslant i \leqslant h$, oraz $s_{h+1} := +\infty$;

$$r = (r_0, \ldots, r_{h+1}),$$

kładąc $r_0 := m_0$, $r_i := \frac{s_i}{d_i}$, dla $1 \leqslant i \leqslant h$, oraz $r_{h+1} := +\infty$;

$$n = (n_1, ..., n_h),$$

kładąc $n_i = \frac{d_i}{d_{i+1}}$, dla $1 \leqslant i \leqslant h$.

Określamy również następujące pochodne ciągi charakterystyczne:

$$s = (s_0, \ldots, s_{h+1}),$$

kładąc $s_0 := m_0$, $s_i := m_1 d_1 + \sum_{2 \leqslant j \leqslant i} (m_j - m_{j-1})\, d_j$, dla $1 \leqslant i \leqslant h$, oraz $s_{h+1} := +\infty$;

$$r = (r_0, \ldots, r_{h+1}),$$

kładąc $r_0 := m_0$, $r_i := \frac{s_i}{d_i}$, dla $1 \leqslant i \leqslant h$, oraz $r_{h+1} := +\infty$;

$$n = (n_1, ..., n_h),$$

kładąc $n_i = \frac{d_i}{d_{i+1}}$, dla $1 \leqslant i \leqslant h$.

Przy powyższych oznaczeniach będziemy mówić, że $\sqrt[l]{f}$ jest „charakterystyczny” bądź że jest „charakterystycznego stopnia”, jeśli $l = d_j$ przy pewnym $j \in \{1, ..., h+1\}$.

Twierdzenie 2. [Abhyankar-Moh] *Niech będą spełnione Założenia Podstawowe. Jeśli* $\sqrt[l]{f}$ *jest charakterystyczny, tzn.* $l = d_i$ *przy pewnym* $1 \leqslant i \leqslant h+1$, *wtedy:*

Twierdzenie 2. [Abhyankar-Moh] *Niech będą spełnione Założenia Podstawowe. Jeśli $\sqrt[l]{f}$ jest charakterystyczny, tzn. $l = d_i$ przy pewnym $1 \leqslant i \leqslant h+1$, wtedy:*

1. $\sqrt[l]{f}$ *jest nierozkładalnym elementem pierścienia* $\mathbb{K}\left(\left(X\right)\right)\left[Y\right]$,

Twierdzenie 2. [Abhyankar-Moh] *Niech będą spełnione Założenia Podstawowe. Jeśli $\sqrt[l]{f}$ jest charakterystyczny, tzn. $l = d_i$ przy pewnym $1 \leqslant i \leqslant h+1$, wtedy:*

1. $\sqrt[l]{f}$ *jest nierozkładalnym elementem pierścienia* $\mathbb{K}((X))[Y]$,

2. *jeśli* $2 \leqslant i \leqslant h+1$ *to dla dowolnego pierwiastka Puiseux* $z(t)$ *wielomianu* $\sqrt[l]{f}(t, Y)$ *istnieje* $\varepsilon \in U_k(\mathbb{K})$ *taki, że*

$$\operatorname{ord}_t \left(y(\varepsilon t) - z\left(t^k\right)\right) = m_i,$$

Twierdzenie 2. [Abhyankar-Moh] *Niech będą spełnione Założenia Podstawowe. Jeśli* $\sqrt[l]{f}$ *jest charakterystyczny, tzn.* $l = d_i$ *przy pewnym* $1 \leqslant i \leqslant h+1$, *wtedy:*

1. $\sqrt[l]{f}$ *jest nierozkładalnym elementem pierścienia* $\mathbb{K}\left(\left(X\right)\right)\left[Y\right]$,

2. *jeśli* $2 \leqslant i \leqslant h+1$ *to dla dowolnego pierwiastka Puiseux* $z(t)$ *wielomianu* $\sqrt[l]{f}\left(t, Y\right)$ *istnieje* $\varepsilon \in U_k\left(\mathbb{K}\right)$ *taki, że*

$$\mathrm{ord}_t\left(y\left(\varepsilon t\right) - z\left(t^k\right)\right) = m_i,$$

3.

$$\mathrm{ord}_t\left(\sqrt[l]{f}\left(t^k, y\left(t\right)\right)\right) = r_i.$$

Wyniki i przykłady.

Wyniki i przykłady.

Twierdzenie 3. *Niech będą spełnione Założenia Podstawowe. Jeśli* $\sqrt[l]{f}$ *jest niecharakterystyczny, tzn.* l *jest liczbą naturalną taką, że* $l|k$, $l \notin \{d_1, ..., d_{h+1}\}$, *to przyjmując* $i := max\{1 \leqslant j \leqslant h+1 : l|d_j\}$, *mamy:*

Wyniki i przykłady.

Twierdzenie 3. *Niech będą spełnione Założenia Podstawowe. Jeśli* $\sqrt[l]{f}$ *jest niecharakterystyczny, tzn.* l *jest liczbą naturalną taką, że* $l|k$, $l \notin \{d_1, ..., d_{h+1}\}$, *to przyjmując* $i := max\{1 \leqslant j \leqslant h+1 : l|d_j\}$, *mamy:*

1. punkt 1. twierdzenia 2 nie jest prawdziwy (poniżej podamy stosowne przykłady),

Wyniki i przykłady.

Twierdzenie 3. *Niech będą spełnione Założenia Podstawowe. Jeśli* $\sqrt[l]{f}$ *jest niecharakterystyczny, tzn.* l *jest liczbą naturalną taką, że* $l|k$, $l \notin \{d_1, ..., d_{h+1}\}$, *to przyjmując* $i := max\{1 \leqslant j \leqslant h+1 : l|d_j\}$, *mamy:*

1. punkt 1. twierdzenia 2 nie jest prawdziwy (poniżej podamy stosowne przykłady),

2. dla każdego pierwiastka Puiseux $z(t)$ *wielomianu* $\sqrt[l]{f}(t, Y)$ *istnieje* $\varepsilon \in U_k(\mathbb{K})$ *taki, że*

$$\operatorname{ord}_t \left(y(\varepsilon t) - z\left(t^k\right) \right) \geqslant m_i,$$

Wyniki i przykłady.

Twierdzenie 3. *Niech będą spełnione Założenia Podstawowe. Jeśli* $\sqrt[l]{f}$ *jest niecharakterystyczny, tzn.* l *jest liczbą naturalną taką, że* $l|k$, $l \notin \{d_1, ..., d_{h+1}\}$, *to przyjmując* $i := max\{1 \leqslant j \leqslant h+1 : l|d_j\}$, *mamy:*

1. punkt 1. twierdzenia 2 nie jest prawdziwy (poniżej podamy stosowne przykłady),

2. dla każdego pierwiastka Puiseux $z(t)$ *wielomianu* $\sqrt[l]{f}(t, Y)$ *istnieje* $\varepsilon \in U_k(\mathbb{K})$ *taki, że*

$$\operatorname{ord}_t \left(y(\varepsilon t) - z\left(t^k\right)\right) \geqslant m_i,$$

3.

$$\operatorname{ord}_t \left(\sqrt[l]{f}\left(t^k, y(t)\right)\right) \geqslant r_i \frac{d_i}{l}.$$

(Nie)rozkładalność niecharakterystycznych pierwiastkw aproksymatywnych

Przykład 2. $X = t^{48}$, $Y = t^{-36} + t^{-6} + t^{-5}$ - *parametryzacja*

(Nie)rozkładalność niecharakterystycznych pierwiastkw aproksymatywnych

Przykład 2. $X = t^{48}, Y = t^{-36} + t^{-6} + t^{-5}$ - *parametryzacja*

$f = Y^{48} + a_1(X)Y^{47} + ... + a_{48}(X) \in \mathbb{C}\left(\left(X\right)\right)\left[Y\right]$ - *nierozkładalny i moniczny wielomian wiążący tą parametryzację*

(Nie)rozkładalność niecharakterystycznych pierwiastkw aproksymatywnych

Przykład 2. $X = t^{48}, Y = t^{-36} + t^{-6} + t^{-5}$ - *parametryzacja*

$f = Y^{48} + a_1(X)Y^{47} + ... + a_{48}(X) \in \mathbb{C}((X))[Y]$ - *nierozkładalny i moniczny wielomian wiążący tą parametryzację*

Można sprawdzić, że dla $l = 2$, $\sqrt[l]{f} = Y^{24} + ...$ *rozszczepia się na trzy nierozkładalne czynniki nad* $\mathbb{C}((X))[Y]$:

$$f = f_1 f_2 f_3,$$

(Nie)rozkładalność niecharakterystycznych pierwiastkw aproksymatywnych

Przykład 2. $X = t^{48}$, $Y = t^{-36} + t^{-6} + t^{-5}$ - *parametryzacja*

$f = Y^{48} + a_1(X)Y^{47} + \ldots + a_{48}(X) \in \mathbb{C}((X))[Y]$ - *nierozkładalny i moniczny wielomian wiążący tą parametryzację*

Można sprawdzić, że dla $l = 2$, $\sqrt[l]{f} = Y^{24} + \ldots$ *rozszczepia się na trzy nierozkładalne czynniki nad* $\mathbb{C}((X))[Y]$*:*

$$f = f_1 f_2 f_3,$$

przy czym każdy z nich ma pierwiastek Puiseux postaci

$$t^{-3/4} + t^{-1/8} + \theta\, t^{1/8} + \textit{składniki wyższego rzędu}.$$

Ciąg dalszy przykładu ...

$$X = t^{48}, Y = t^{-36} + t^{-6} + t^{-5}$$ - *rozważana parametryzacja*

Ciąg dalszy przykładu ...

$X = t^{48}, Y = t^{-36} + t^{-6} + t^{-5}$ - *rozważana parametryzacja*

Obserwacja: dzielnik $l = 2$ *wydaje się być bardzo „regularny”, gdyż tutaj*

$$d = (d_1, d_2, d_3, d_4) = (48, 12, 6, 1)$$

Ciąg dalszy przykładu ...

$$X = t^{48}, Y = t^{-36} + t^{-6} + t^{-5} \text{ - rozważana parametryzacja}$$

Obserwacja: dzielnik $l = 2$ wydaje się być bardzo „regularny”, gdyż tutaj

$$d = (d_1, d_2, d_3, d_4) = (48, 12, 6, 1)$$

czyli

$$d_4 = 1 | 2 | d_3 = 6,$$

Ciąg dalszy przykładu ...

$$X = t^{48}, Y = t^{-36} + t^{-6} + t^{-5} \text{ - rozważana parametryzacja}$$

Obserwacja: dzielnik $l = 2$ wydaje się być bardzo „regularny", gdyż tutaj

$$d = (d_1, d_2, d_3, d_4) = (48, 12, 6, 1)$$

czyli

$$d_4 = 1|2|d_3 = 6,$$

a więc można o niego uzupełnić wyjściowy ciąg d bez zmiany innych wyrazów tego ciągu, a pomimo to własność nierozkładalności się nie zachowuje.

Ciąg dalszy przykładu ...

$$X = t^{48}, Y = t^{-36} + t^{-6} + t^{-5} \text{ - rozważana parametryzacja}$$

Obserwacja: dzielnik $l = 2$ *wydaje się być bardzo „regularny”, gdyż tutaj*

$$d = (d_1, d_2, d_3, d_4) = (48, 12, 6, 1)$$

czyli

$$d_4 = 1|2|d_3 = 6,$$

a więc można o niego uzupełnić wyjściowy ciąg d *bez zmiany innych wyrazów tego ciągu, a pomimo to własność nierozkładalności się nie zachowuje.*

Zauważmy jednak, że nie można „uzupełnić” tej parametryzacji w taki sposób, by uzyskać ciąg podzielników charakterystycznych postaci $d' = (48, 12, 6, 2, 1)$.

Przykład 3. *Łatwo jest również podać przykłady idące w przeciwnym kierunku.*

$X = t^{18}, Y = t^{-12} + t^{-2} + t^{-1}$ - *parametryzacja*

Przykład 3. *Łatwo jest również podać przykłady idące w przeciwnym kierunku.*

$X = t^{18}, Y = t^{-12} + t^{-2} + t^{-1}$ *- parametryzacja*

$f = Y^{18} + ...$ *- minimalny wielomian moniczny tej parametryzacji*

Przykład 3. *Łatwo jest również podać przykłady idące w przeciwnym kierunku.*

$X = t^{18}, Y = t^{-12} + t^{-2} + t^{-1}$ - *parametryzacja*

$f = Y^{18} + ...$ - *minimalny wielomian moniczny tej parametryzacji*

$l = 3$

Przykład 3. *Łatwo jest również podać przykłady idące w przeciwnym kierunku.*

$X = t^{18}, Y = t^{-12} + t^{-2} + t^{-1}$ *- parametryzacja*

$f = Y^{18} + ...$ *- minimalny wielomian moniczny tej parametryzacji*

$l = 3$

Mamy

$$\mathrm{inco}_t \sqrt[l]{f}\left(t^6, t^{-4} + Ut\right) = 9U^2 - 6,$$

co oznacza, że $\sqrt[l]{f}$ *jest nierozkładalny.*

Twierdzenie 4. *Niech będą spełnione Założenia Podstawowe. Niech* $\sqrt[l]{f}$ *będzie niecharakterystyczny, tzn.* l *jest liczbą naturalną taką, że* $l|k$, $l \notin \{d_1, ..., d_{h+1}\}$. *Przyjmijmy* $i := max\{1 \leqslant j \leqslant h+1 : l|d_j\}$. *Jeśli* $l > d_{i+1}$, *to:*

Twierdzenie 4. *Niech będą spełnione Założenia Podstawowe. Niech* $\sqrt[l]{f}$ *będzie niecharakterystyczny, tzn.* l *jest liczbą naturalną taką, że* $l|k$, $l \notin \{d_1, ..., d_{h+1}\}$. *Przyjmijmy* $i := max\{1 \leqslant j \leqslant h+1 : l|d_j\}$. *Jeśli* $l > d_{i+1}$, *to:*

2'. dla każdego pierwiastka Puiseux $z(t)$ *wielomianu* $\sqrt[l]{f}(t, Y)$ *istnieje* $\varepsilon \in U_k(\mathbb{K})$ *taki, że*

$$\mathrm{ord}_t\left(y(\varepsilon t) - z\left(t^k\right)\right) = m_i,$$

Twierdzenie 4. *Niech będą spełnione Założenia Podstawowe. Niech* $\sqrt[l]{f}$ *będzie niecharakterystyczny, tzn.* l *jest liczbą naturalną taką, że* $l|k$, $l \notin \{d_1, ..., d_{h+1}\}$. *Przyjmijmy* $i := max\{1 \leqslant j \leqslant h+1 : l|d_j\}$. *Jeśli* $l > d_{i+1}$, *to:*

2'. *dla każdego pierwiastka Puiseux* $z(t)$ *wielomianu* $\sqrt[l]{f}(t, Y)$ *istnieje* $\varepsilon \in U_k(\mathbb{K})$ *taki, że*

$$\operatorname{ord}_t\left(y(\varepsilon t) - z\left(t^k\right)\right) = m_i,$$

3'.

$$\operatorname{ord}_t\left(\sqrt[l]{f}\left(t^k, y(t)\right)\right) = r_i \frac{d_i}{l}.$$

Przykład 4. *Niech* $X = t^{18}$, $Y = t^{-12} + at^{-3} + bt^{-1}$, *gdzie* a, b *są zmiennymi nad* $\mathbb{C}$, *i niech* $l = 2$. *Wtedy* $l = 2 < d_{i+1} = 3$, *więc założenie twierdzenia* 4 *nie jest spełnione.*

Przykład 4. *Niech* $X = t^{18}$, $Y = t^{-12} + at^{-3} + bt^{-1}$, *gdzie* a, b *są zmiennymi nad* $\mathbb{C}$, *i niech* $l = 2$. *Wtedy* $l = 2 < d_{i+1} = 3$, *więc założenie twierdzenia 4 nie jest spełnione. Pomimo tego*

$$\operatorname{inco}_t \sqrt[l]{f}\left(t^6, t^{-4} + Zt^{-1}\right) = -27/2 \cdot Z(-2Z^2 + 3a^2).$$

Przykład 4. *Niech* $X = t^{18}$, $Y = t^{-12} + at^{-3} + bt^{-1}$, *gdzie* a, b *są zmiennymi nad* $\mathbb{C}$, *i niech* $l = 2$. *Wtedy* $l = 2 < d_{i+1} = 3$, *więc założenie twierdzenia 4 nie jest spełnione. Pomimo tego*

$$\mathrm{inco}_t \sqrt[l]{f}\left(t^6, t^{-4} + Zt^{-1}\right) = -27/2 \cdot Z(-2Z^2 + 3a^2).$$

Wnioskujemy, że $\sqrt[l]{f}$ *ma dwa niesprzężone pierwiastki Puiseux. Jeden z nich jest bardzo ciekawej postaci:*

$$z_1(t) = t^{-2/3} + \sqrt{6}/2 \cdot a \cdot t^{-1/6} + składniki\, wyższego\, rzedu.$$

Przykład 4. *Niech* $X = t^{18}$, $Y = t^{-12} + at^{-3} + bt^{-1}$, *gdzie* a, b *są zmiennymi nad* $\mathbb{C}$, *i niech* $l = 2$. *Wtedy* $l = 2 < d_{i+1} = 3$, *więc założenie twierdzenia 4 nie jest spełnione. Pomimo tego*

$$\mathrm{inco}_t \sqrt[l]{f}\left(t^6, t^{-4} + Zt^{-1}\right) = -27/2 \cdot Z(-2Z^2 + 3a^2).$$

Wnioskujemy, że $\sqrt[l]{f}$ *ma dwa niesprzężone pierwiastki Puiseux. Jeden z nich jest bardzo ciekawej postaci:*

$$z_1(t) = t^{-2/3} + \sqrt{6}/2 \cdot a \cdot t^{-1/6} + składniki\, wyższego\, rzedu.$$

Wobec $y(t) = t^{-12} + at^{-3} + bt^{-18}$, *mamy w konsekwencji*

$$\mathrm{info}_t\left(y\left(t\right) - z_1\left(t^{18}\right)\right) = a \cdot (1 - \sqrt{6}/2)t^{-3}.$$

Przykład 4. *Niech* $X = t^{18}$, $Y = t^{-12} + at^{-3} + bt^{-1}$, *gdzie* a, b *są zmiennymi nad* $\mathbb{C}$, *i niech* $l = 2$. *Wtedy* $l = 2 < d_{i+1} = 3$, *więc założenie twierdzenia 4 nie jest spełnione. Pomimo tego*

$$\mathrm{inco}_t \sqrt[l]{f}\left(t^6, t^{-4} + Zt^{-1}\right) = -27/2 \cdot Z(-2Z^2 + 3a^2).$$

Wnioskujemy, że $\sqrt[l]{f}$ *ma dwa niesprzężone pierwiastki Puiseux. Jeden z nich jest bardzo ciekawej postaci:*

$$z_1(t) = t^{-2/3} + \sqrt{6}/2 \cdot a \cdot t^{-1/6} + \textit{składniki wyższego rzedu}.$$

Wobec $y(t) = t^{-12} + at^{-3} + bt^{-18}$, *mamy w konsekwencji*

$$\mathrm{info}_t\left(y\left(t\right) - z_1\left(t^{18}\right)\right) = a \cdot (1 - \sqrt{6}/2)t^{-3}.$$

Ponadto mamy także $\mathrm{ord}_t\left(\sqrt[l]{f}\left(t^{18}, y\left(t\right)\right)\right) = r_2\frac{d_2}{l} = -81$, *dla każdego niezerowego* a.

Problemy

Problem 1. *Czy można opuścić założenie $l > d_{i+1}$ w twierdzeniu 4?*

Problemy

Problem 1. *Czy można opuścić założenie $l > d_{i+1}$ w twierdzeniu 4?*

Problem 2. *Jeśli $\sqrt[l]{f}$ jest rozkładalny w $\mathbb{K}((X))[Y]$, to czy stopnie jego czynników dzielą k?*

Problemy

Problem 1. *Czy można opuścić założenie $l > d_{i+1}$ w twierdzeniu 4?*

Problem 2. *Jeśli $\sqrt[l]{f}$ jest rozkładalny w $\mathbb{K}((X))[Y]$, to czy stopnie jego czynników dzielą k?*

Problem 3. *Jak przenieść powyższe rezultaty na przypadek rozkładalnego wielomianu f?*

Problemy

Problem 1. *Czy można opuścić założenie $l > d_{i+1}$ w twierdzeniu 4?*

Problem 2. *Jeśli $\sqrt[l]{f}$ jest rozkładalny w $\mathbb{K}((X))[Y]$, to czy stopnie jego czynników dzielą k?*

Problem 3. *Jak przenieść powyższe rezultaty na przypadek rozkładalnego wielomianu f?*

Problem 4. *Czy dla dowolnego rozkładalnego $f \in \mathbb{K}((X))[Y]$ istnieje nierozkładalny $F \in \mathbb{K}((X))[Y]$ taki, że*

$$\sqrt[l]{F} = f$$

dla pewnej liczby naturalnej $l | \deg_Y F$?

Literatura

[A] Abhyankar, S. S. *Expansion Techniques in Algebraic Geometry*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1977.

[A-M 1] Abhyankar, S. S. & Moh, T. T. *Newton-Puiseux expansion and generalized Tschirnhausen transformation I, II*, J. reine angew. Math. 260, 47-83 and 261, 29-54 (1973).

[A-M 2] Abhyankar, S. S. & Moh, T. T. *Embeddings of the Line in the Plane*, J. reine angew. Math. 276, 148-166 (1975).

[G-P] Gwoździewicz, J., Płoski, A. *On the approximate roots of polynomials*, Annales Polonici Mathematici LX.3, 199-210 (1995)

[M] Moh, T. T. *On the Concept of Approximate Roots for Algebra*, Journal of Algebra 65, 347-360 (1980).

[P1] Płoski, A. *Pierwiastki aproksymatywne wielomianów według S. S. Abhyankara i T. T. Moha*, Materiały XIV Konferencji Szkoleniowej z Teorii Zagadnień Ekstremalnych, Wyd. UŁ., Łódź, 45-52 (1993).

[P2] Płoski, A. *Twierdzenia podstawowe o pierwiastkach aproksymatywnych wielomianów*, Materiały XV Konferencji Szkoleniowej z Analizy i Geometrii Zespolonej, Wyd. UŁ., Łódź, 51-61 (1994).

[S] Sathaye, A. *Generalized Newton-Puiseux Expansions and Abhyankar-Moh Semigroup Theorem*, Invent. math. 74, 149-157 (1983).