1.

Nierówność Łojasiewicza. Ujęcie algebraiczne.

Tadeusz Krasiński
Uniwersytet Łódzki

Warszawa, styczeń 2007
Seminarium "Teoria osobliwości"

A. Nierówność Łojasiewicza

Problem, dzieki któremu pojawiła sie nierówność Łojasiewicza, to problem dzielenia z teorii dystrybucji.

Problem Dzielenia (L.Schwartz ~1950) *Niech $G \subset R^n$ będzie zbiorem otwartym i $F : G \to R$ funkcją analityczną rzeczywistą nie równą tożsamościowo zero w żadnej składowej spójnej G. Wówczas dla dowolnej dystrybucji T w G istnieje dystrybucja S w G taka, że*

$$F \cdot S = T.$$

Rozwiązania problemu dzielenia:

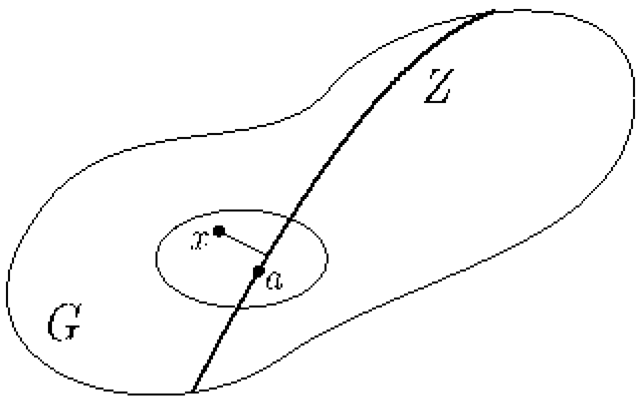
1. L. Schwartz (1955) - w przypadku gdy $F = |f|^2$, f - funkcja holomorficzna zespolona w $G \subset \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$,
2. L. Hörmander (1958) - w przypadku gdy F jest wielomianem,
3. S. Łojasiewicz (1959, 1961) - w całej ogólności.

Główny problem w dowodzie: opis struktury zbiorów analitycznych rzeczywistych. Wcześniej znane były opisy: lokalne zbiorów analitycznych zespolonych i globalny opis zbiorów algebraicznych.Opis tej struktury podał S.Łojasiewicz. Z tego opisu wynika nierówność Łojasiewicza

Twierdzenie 1(Nierówność Łojasiewicza) *Niech $G \subset R^n$ będzie zbiorem otwartym i $F : G \to R$ funkcją analityczną rzeczywistą. Niech $Z = V(F)$ będzie zbiorem zer F w G. Wówczas dla dowolnego punktu $a \in G$ istnieją stałe $\nu \geq 0$ i $C > 0$ takie, że*

$$|F(x)| \geq C\rho(x, Z)^\nu$$

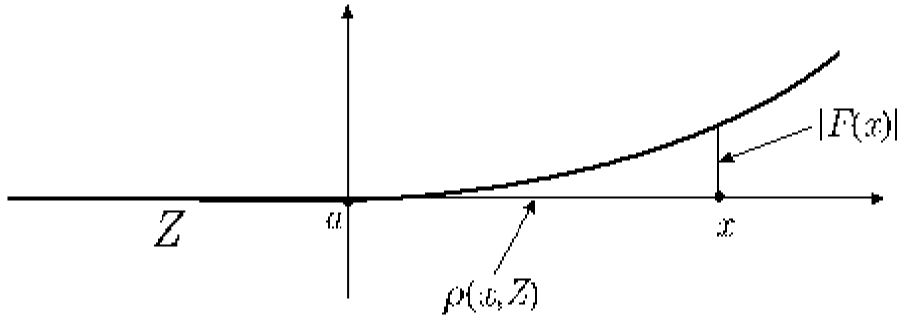
dla każdego x w pewnym otoczeniu punktu a



Uwaga. W wielu wariantach nierówności Łojasiewicza najlepszy wykładnik ν w powyższym wzorze nazywamy **wykładnikiem Łojasiewicza.**

Przykład 1. Nierówność Łojasiewicza nie zachodzi dla funkcji klasy C^∞. Weźmy pod uwagę funkcję klasy C^∞

$$F(x) := \begin{cases} e^{-1/x} & \text{dla} \quad x > 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x \leq 0 \end{cases}.$$



Mamy tutaj: $Z = \{x \leq 0\}$. Dla $a = 0$ w żadnym otoczeniu a nie zachodzi nierówność Łojasiewicza

$$|F(x)| = e^{-1/x} \geq Cx^{\nu} = C\rho(x, Z)^{\nu}$$

gdyż byłoby to równoważne nierówności (dla $x = 1/t$)

$$e^t \leq Ct^{\nu} \quad \text{dla} \quad t \gg 0,$$

oczywiście nieprawdziwej.

Przykład 2.

Dla $n = 1$ i funkcji analitycznej F w punkcie $a = 0 \in \mathbb{R}$ mającej rozwinięcie w szereg potęgowy zbieżny

$$F(x) = a_k x^k + a_{k+1}x^{k+1} + ..., \qquad a_k \neq 0, \qquad k > 0$$

mamy: $Z = \{0\}$ i

$$|F(x)| = |x|^k |a_k + a_{k+1}x + ...| \geq C |x|^k = C\rho(x, Z)^k$$

w otoczeniu 0.

Uwaga.

Nierówność Łojasiewicza jest uogólnieniem ostatniego przykładu na funkcje analityczne rzeczywiste wielu zmiennych. Wtedy zbiór Z może być "wielowymiarowy".

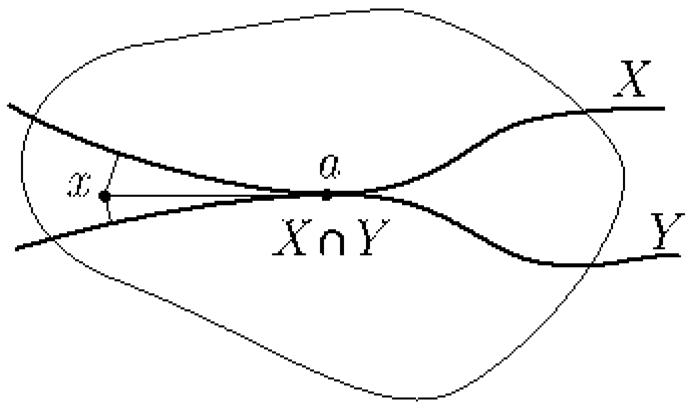
Nierówność Łojasiewicza wynika ze znacznie ogólniejszego twierdzenia wynikającego z opisu struktury zbiorów analitycznych rzeczywistych. Jest to tzw. **twierdzenie o separacji regularnej**.

Twierdzenie (o separacji regularnej).

Dla dowolnych zbiorów analitycznych rzeczywistych $X, Y \subset G$ i dowolnego $a \in G$ istnieją stałe $\nu \geq 0$, $C > 0$ takie, że

$$\rho(x, X) + \rho(x, Y) \geq C\rho(x, X \cap Y)^{\nu}$$

dla każdego x w pewnym otoczeniu punktu a.



Warianty nierówności Łojasiewicza

I. Odwzorowania holomorficzne

Niech

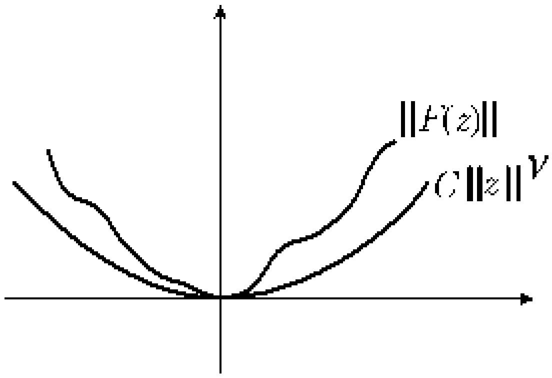
$$F : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$$

będzie odwzorowaniem holomorficznym określonym w otoczeniu 0 o izolowanym zerze w punkcie 0. Wtedy:

$$\begin{aligned} Z(F) &= \{0\}, \\ \rho(z, Z(F)) &= \|z\| \end{aligned}$$

i nierówność Łojasiewicza przyjmuje postać

$$\|F(z)\| \geq C\|z\|^\nu.$$



W tym przypadku najlepszy wykładnik ν (najmniejszy) nazywamy **wykładnikiem Łojasiewicza F w** 0 i oznaczamy

$$\mathcal{L}_0(F).$$

Precyzyjnie

$$\mathcal{L}_0(F) := \inf\{\nu \in \mathbb{R} : \|F(z)\| \geq C\|z\|^\nu \quad \text{w otoczeniu punktu } 0\}.$$

W tym przypadku istnienie ν wynika łatwo z lokalnego twierdzenia Hilberta o zerach.

■

II. Gradient funkcji holomorficznej - osobliwość izolowana

Szczególnym przypadkiem powyższego wariantu jest przypadek, gdy

$$F = \operatorname{grad} f = (\frac{\partial f}{\partial z_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial z_n}) : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0),$$

gdzie $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ jest funkcją holomorficzną o izolowanym punkcie krytycznym w 0. Kiełek takiej funkcji nazywamy wtedy **osobliwością.** Wykładnik Łojasiewicza $\mathcal{L}_0(\operatorname{grad} f)$ odgrywa bardzo ważną rolę w teorii osobliwości.

Uwaga. Warianty I i II będą omówione w referacie prof. A. Płoskiego. Zastosowanie wykładnika w teorii osobliwości omówi dr hab. S. Spodzieja.

■

III. Odwzorowania wielomianowe

Niech

$$F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$$

będzie odwzorowaniem wielomianowym o skończonym zbiorze zer. Wtedy

$$\begin{aligned} Z(F) &= \{z_1, \dots, z_k\} \text{ – zbiór skończony,} \\ \rho(z, Z(F)) &\approx \|z\| \quad \text{dla } \|z\| \gg 0 \end{aligned}$$

i nierówność Łojasiewicza w otoczeniu nieskończoności (tzn. poza pewnym zbiorem zwartym) przyjmuje postać

$$\|F(z)\| \geq C\|z\|^\nu.$$

W tym przypadku najlepszy wykładnik ν (największy) nazywamy **wykładnikiem Łojasiewicza F w nieskończoności** i oznaczamy

$$\mathcal{L}_\infty(F).$$

Precyzyjnie

$$\mathcal{L}_\infty(F) := \sup\{\nu \in \mathbb{R} : \|F(z)\| \geq C\|z\|^\nu \quad \text{w otoczeniu nieskończoności}\}.$$

Uwaga. Wariant III był omówiony w moim referacie na poprzednim seminarium.

■

IV. Separacja regularna zbiorów algebraicznych i analitycznych zespolonych

Gdy zbiory $X, Y \subset \mathbb{C}^n$ (lub $\mathbb{CP}^n$) są zbiorami algebraicznymi, to można badać globalny wykładnik separacji regularnej, "dobry" w każdym punkcie przestrzeni tzn najlepszy wykładnik ν taki, że dla każdego $x \in \mathbb{C}^n$(lub $\mathbb{CP}^n$)

$$\rho(x, X) + \rho(x, Y) \geq C\rho(x, X \cap Y)^\nu.$$

■

Uwaga. W ośrodkach krakowskim, kieleckim i łódzkim powstało wiele prac o wykładniku Łojasiewicza w każdym z przedstawionych wariantów. W szczególności

1. Efektywne wzory (zwłaszcza w 2-wymiarowym przypadku).
2. Oszacowania w terminach innych liczbowych niezmienników.
3. Zastosowania w teorii osobliwości.
4. Zastosowania w hipotezie jakobianowej.

B. Ujęcie algebraiczne nierówności Łojasiewicza

W przypadku holomorficznym (lokalnym; wariant I) nierówność Łojasiewicza można opisać algebraicznie. Jest to zawarte w pracy
M.Lejeune-Jalabert, B. Teissier "Cloture integrale des ideaux et equisingularite" Grenoble 1974.

Przedstawimy toujecie w najprostszym, choć nietrywialnym przypadku.

Założenia podstawowe:

$$F = (f, g) : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$$

odwzorowanie holomorficzne (kiełek) dwóch zmiennych o izolowanym zerze w 0 tzn. $F^{-1}(0) = \{0\}$.

Przykład 3.

$$F(x, y) := (y^2 - x^3, y^3).$$

■

Jedną z metod otrzymania oszacowania od dołu odwzorowania F tzn. nierówności Łojasiewicza postaci

$$\|F(z)\| \geq C\|z\|^\nu, \quad z = (x, y)$$

w otoczeniu zera, jest zastosowanie **lokalnego twierdzenia Hilberta o zerach.** Ponieważ x i y zerują się na zbiorze zer funkcji f i g, bo $Z(F) = Z(f, g) = \{0\}$, więc z tego twierdzenia

$$\begin{array}{rcl} x^n & \in & (f, g) \quad \text{w} \quad \mathcal{O}^2, \\ y^m & \in & (f, g) \quad \text{w} \quad \mathcal{O}^2, \end{array}$$

dla pewnych $n, m \in \mathbb{N}$ (gdzie przez $\mathcal{O}^2$ oznaczyliśmy pierścień kiełków funkcji holomorficznych w punkcie 0) tzn.

$$\begin{array}{rcl} x^n & = & Af + Bg \quad \text{w} \quad \mathcal{O}^2, \\ y^m & = & Cf + Dg \quad \text{w} \quad \mathcal{O}^2, \end{array}$$

dla pewnych $A, B, C, D \in \mathcal{O}^2$. Stąd w otoczeniu zera

$$\begin{array}{rcl} |x|^n & \leq & |A|\,|f| + |B|\,|g| \leq C'(|f| + |g|) \leq C''\|F(x, y)\|, \\ |y|^m & \leq & |C|\,|f| + |D|\,|g| \leq C_1(|f| + |g|) \leq C_2\|F(x, y)\| \end{array}$$

Stąd dla $\nu := \max(n, m)$ łatwo otrzymujemy nierówność Łojasiewicza

$$\|F(x, y)\| \geq C\|(x, y)\|^\nu$$

w otoczeniu zera.

Przykład 3a. W powyższym przykładzie tzn.

$$F(x, y) := (y^2 - x^3, y^3),$$

mamy

$$\begin{array}{rcl} x^6 & = & f^2 + g^2 + 2y^2 f + yg, \\ y^3 & = & g. \end{array}$$

Stąd dla $6 = \max(6,3)$ mamy
$$\|F(z)\| \geq C\|z\|^6$$
w otoczeniu zera. Zatem w tym przykładzie
$$\mathcal{L}_0(F) \leq 6.$$
Nie jest to najlepsze oszacowanie. Liczba 6 nie jest wykładnikiem Łojasiewicza F (zob. dalej).

■

Powyższą zależność algebraiczną
$$x^n = Af + Bg \quad \text{w} \quad \mathcal{O}^2,$$
można sformulować w postaci: funkcja x jest pierwiastkiem równania
$$T^n - (Af + Bg) = 0 \quad \text{w} \quad \mathcal{O}^2,$$
lub inaczej: funkcja x jest pierwiastkiem równania
$$T^n - a = 0, \quad \text{gdzie} \quad a \in (f,g)\mathcal{O}^2.$$
Wtedy to implikuje potrzebną nierowność w otoczeniu zera
$$|x|^n \leq C\|(f,g)(x,y)\| = \|F(x,y)\|.$$
Podobnie jeśli funkcja x spełnia ogólniejsze równanie postaci
$$T^n + a_1T^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \quad a_i \in (f,g)^i \subset \mathcal{O}^2,$$
to zachodzi nierówność
$$|x| \leq C\|(f,g)(x,y)\| = \|F(x,y)\|.$$
w otoczeniu zera. Wynika to z elementarnej nierówności

Lemat. Jeśli α jest pierwiastkiem równania
$$T^n + a_1T^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \quad a_i \in \mathbb{C},$$
to
$$|\alpha| \leq 2^n \max_i \sqrt[i]{|a_i|}.$$

■

Z powyższego wynika, że ważna jest następująca algebraiczna definicja.

Definicja. (całkowita zależność elementu pierścienia względem ideału). Niech R będzie pierścieniem noetherowskim, $h \in R$ i $I \subset R$ dowolnym ideałem. Mówimy, że h jest całkowity nad I w R, gdy zachodzi zależność
$$h^n + a_1h^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \quad a_i \in I^i, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$
Piszemy wtedy
$$h \in \bar{I}.$$

■

Aby związać pojęcie całkowitej zależności elementu pierścienia względem ideału z wykładnikiem Łojasiewicza wprowadzamy pojęcie wykładnika Łojasiewicza odwzorowania F względem funkcji $h \in \mathcal{O}^2$.

Definicja. Wykładnikiem Łojasiewicza F względem funkcji $h \in \mathcal{O}^2$, $h(0) = 0$, nazywamy
$$\mathcal{L}_F(h) := \inf\{\nu \in \mathbb{R}_+ : \|F(x,y)\| \geq C\,|h(x,y)|^\nu \ \text{ w otoczeniu zera}\}.$$

Uwaga. Związek między wykładnikiem Łojasiewicza odwzorowania F i powyższym jest następujący

$$\mathcal{L}_0(F) = \max(\mathcal{L}_F(x), \mathcal{L}_F(y)).$$

Twierdzenie. Algebraiczna charakteryzacja nierówności Łojasiewicza (M. Lejeune-Jalabert, Teissier). Przy powyższych założeniach o $F = (f, g)$ i h, następujące warunki są równoważne:

1. $h^p \in \overline{(f,g)^q}$,
2. h^p spełnia równanie
$$T^n + a_1 T^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \quad a_i \in (f,g)^{qi},\ i = 1, 2, \ldots, n,$$
3. zachodzi nierówność Łojasiewicza
$$\|(f,g)\| \geq C\,|h|^{p/q}$$

w otoczeniu zera.

Wniosek.

$$\mathcal{L}_F(h) = \inf\{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} : \text{zachodzi jeden z równoważnych warunków 1, 2 lub 3}\}.$$

Co więcej, infimum to jest osiągnięte. Stąd zawsze $\mathcal{L}_F(h) \in \mathbb{Q}$.

Wniosek. Z Uwagi wynika

$$\mathcal{L}_0(F) = \max(\mathcal{L}_F(x), \mathcal{L}_F(y)).$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_F(x) &= \min\{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} : x^p \in \overline{(f,g)^q} \quad \text{w } \mathcal{O}^2\},\\
\mathcal{L}_F(y) &= \min\{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} : y^p \in \overline{(f,g)^q} \quad \text{w } \mathcal{O}^2\}.
\end{aligned}$$

Przykład 3b. W powyższym przykładzie

$$F(x,y) := (y^2 - x^3, y^3),$$

mamy

$$\begin{aligned}
x^9 &\in (f,g)^2, \quad \text{bo}\\
x^9 &= g^2 - 3ygf + 3y^2 f^2 - f^3
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
y^3 &\in (f,g), \quad \text{bo}\\
y^3 &= g.
\end{aligned}$$

Zatem

$$\mathcal{L}_0(F) = \max(\mathcal{L}_F(x), \mathcal{L}_F(y)) \leq \max(9/2, 3) = 9/2.$$

Oznacza to, że

$$\|F(z)\| \geq C\|z\|^{9/2} \text{ w otoczeniu zera.}$$

Można wykazać że jest to optymalny wykładnik tzn.

$$\mathcal{L}_0(F) = 9/2.$$

■

W pracy M.Lejeune-Jalabert i B. Teissiera rozważana jest o wiele ogólniejsza sytuacja:

1. Przestrzeń $\mathbb{C}^2$ jest zamieniona na dowolną przestrzeń analityczną $(X, \mathcal{O}_X)$,
2. Odwzorowanie F jest zamienione na dowolny koherentny snop ideałów $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}_X$ na X,
3. Funkcja h jest dowolnym cięciem snopa $\mathcal{O}_X$ tzn. $h \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, zerującym się na zbiorze zer snopa $\mathcal{F}$.