Notatki do Wykładu pt.

Trochę teorii modeli i geometrii

Krzysztof Jan Nowak

Seminarium "Teoria Osobliwości" 2008/09

1. Struktury matematyczne. Można bez wątpliwości stwierdzić, że głównym przedmiotem zainteresowania teorii modeli są struktury matematyczne. Zresztą, również każdy matematyk w swojej zwykłej, codziennej pracy stale je napotyka. Są nimi na przykład różne abstrakcyjne struktury algebraiczne (jak grupy, pierścienie, ciała, moduły, przestrzenie wektorowe, przestrzenie Hilberta, Banacha itp.), różne struktury porządkowe czy w końcu konkretne struktury liczbowe. Przez strukturę matematyczną

$$\mathfrak{M} = (M, \{c_i\}, \{f_j\}, \{R_k\})$$

rozumiemy układ złożony z niepustego zbioru $M \neq \emptyset$ (zwanego *uniwersum* lub *zbiorem podkładowym*) oraz wyróżnionych pewnych stałych, globalnych funkcji i relacji:

$$c_i \in M, \quad f_j : M^{m_j} \longrightarrow M, \quad R_k \subset M^{n_k}, \quad m_j, n_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\};$$

stałe c_i można traktować jako funkcje 0-argumentowe.

Należy jednak od początku zwrócić uwagę na podstawowy fakt, że teorię modeli cechuje odmienne podejście do struktur w porównaniu z pracą "zwykłego matematyka". Różnica polega tu przede wszystkim na tym, iż ich badanie łączy się w teorii modeli z uwzględnianiem języka, w którym struktury te są opisywane, i jego analizą. Nie jest to spowodowane pedanterią wynikającą np. z faktu, że teoria modeli jest odgałęzieniem logiki. Chodzi tu raczej o wydobycie fundamentalnych współzależności semantycznych pomiędzy teorią w danym języku $\mathcal{L}$, a własnościami struktur będącymi modelami tej teorii.

Nie wnikając z braku czasu w precyzyjne definicje, język to po pierwsze ogół używanych w nim symboli; następnie zaś zasady składni, za pomocą których tworzymy termy (czyli wyrażenia nazwowe) i formuły (czyli formy zdaniowe). Formalne definicje, choć być może nieco nużące, mają charakter elementarnej indukcji ze względu na złożoność. Ograniczymy się przy tym (za wyjątkiem informacyjnych sekcji 2 i 3) do języków pierwszego rzędu, w których formuły są zawsze pewnymi skończonymi ciągami symboli, zaś zmienne przebiegają jedynie elementy zbioru podkładowego M. Natomiast logika drugiego rzędu posługuje się zmiennymi przebiegającymi również relacje (czyli podzbiory produktu zbioru M) i globalne funkcje określone na produktach zbioru M; logika trzeciego rzędu zezwala zaś na kwantyfikowanie zbioru relacji i zbioru funkcji, itd.

Do symboli języka $\mathcal{L}$ zaliczamy:

- symbole logiczne, takie jak nawiasy, przecinki, nieskończony ciąg zmiennych oraz $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \exists, \forall, =$;
- jego sygnaturę, tzn. symbole stałych $c, \ldots$, funkcji $f, \ldots$ i relacji $R, \ldots$ potrzebnych do opisu danej struktury.

Przez formułę atomiczną rozumiemy formułę postaci:

$$t_1(x) = t_2(x) \quad lub \quad R(t_1(x), \ldots, t_n(x)),$$

gdzie $t_1, t_2, \ldots, t_n$ są $\mathcal{L}$-termami i R symbolem relacji n-argumentowej

W sensie teorii modeli, struktura $\mathfrak{M}$ języka $\mathcal{L}$ ($\mathcal{L}$-struktura) jest parą złożoną z niepustego zbioru M oraz operacji interpretacji

$$c \mapsto c^{\mathfrak{M}}, \quad f \mapsto f^{\mathfrak{M}}, \quad R \mapsto R^{\mathfrak{M}};$$

piszemy wtedy

$$\mathfrak{M} = (M, c^{\mathfrak{M}}, \ldots, f^{\mathfrak{M}}, \ldots, R^{\mathfrak{M}}, \ldots).$$

Zwróćmy uwagę, że sygnatura języka może być dowolnie dużej mocy. Idąc za przykładem A.I. Malcewa można nie nakładać żadnych ograniczeń na to, co może służyć jako symbol języka (nazwa stałej, funkcji i relacji); i tak jako nazwy mogą służyć liczby porządkowe, a także dowolny obiekt matematyczny może być nazwą samego siebie.

Znowu nie będę tu przedstawiał podstawowych definicji semantycznych (pochodzących od A. Tarskiego), takich jak pojęcie spełniania czy prawdziwości, które i w tym przypadku mają charakter elementarnej indukcji ze względu na złożoność. Przypomnę tylko podstawowe oznaczenia. Niech $\varphi(x)$ będzie $\mathcal{L}$-formułą, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, ψ $\mathcal{L}$-zdaniem, $t(x)$ $\mathcal{L}$-termem, $\mathfrak{M}$ $\mathcal{L}$-strukturą i $a = (a_1, \ldots, a_n) \in M^n$.

$t[a]$	wartość termu t na ciągu a;
$\models \varphi[a]$	formuła $\varphi(x)$ jest spełniona w strukturze $\mathfrak{M}$ przez ciąg a;
$\models \psi$	zdanie ψ jest prawdziwe w strukturze $\mathfrak{M}$.

Jeśli T jest teorią w języku $\mathcal{L}$ (tzn. pewnym zbiorem $\mathcal{L}$-zdań) i $\mathfrak{M}$ jest $\mathcal{L}$-strukturą, to $\mathfrak{M} \models T$ oznacza, że każde zdanie teorii T jest prawdziwe w $\mathfrak{M}$; lub innymi słowy, że $\mathfrak{M}$ jest modelem teorii T. Piszemy $T \models \psi$, gdy zdanie ψ jest prawdziwe w każdym modelu $\mathfrak{M}$ teorii T.

2. Pomiędzy logiką pierwszego i drugiego rzędu. Wiele podstawowych twierdzeń klasycznej matematyki (algebry, analizy czy nawet analizy funkcjonalnej) może być sformułowanych i udowodnionych już w ramach arytmetyki $\mathbf{Z}_2$ drugiego rzędu. W arytmetyce tej wszystkie obiekty muszą być oczywiście reprezentowane bądź to przez liczby naturalne, bądź przez zbiory liczb naturalnych. Z perspektywy formalnego rozwijania np. klasycznych fragmentów analizy, nie miałoby istotnego znaczenia zastąpienie $\mathbf{Z}_2$ przez mocniejszy system infinitarnej matematyki, jak $\mathbf{Z}_3$, $\mathbf{Z}_4$,..., czy nawet przez teorię mnogości. Użycie systemu $\mathbf{Z}_2$ narzuca jedynie konieczność kodowania w liczbach naturalnych; a zatem, pary liczb naturalnych, a stad i liczby wymierne mogą być tak kodowane; funkcje między nimi mogą być kodowane jako zbiory par, a więc zbiory liczb naturalnych; dalej, liczby rzeczywiste kodowane jako ciągi Cauchy'ego liczb wymiernych. W systemie tym nie można mówić o funkcjach rzeczywistych, ani o zbiorach liczb rzeczywistych. Ponieważ jednak ciągłe funkcje są wyznaczone przez ich wartości na liczbach wymiernych, także one mogą być kodowane. Podobnie, badane i opisywane w arytmetyce drugiego rzędu mogą być zbiory otwarte liczb rzeczywistych, a nawet zbiory borelowskie i funkcje borelowskie.

Powodem, dla którego jest często rzeczą pożyteczną ograniczenie się do logiki drugiego rzędu, jest zwiększanie się mocy wyrażania wraz ze wzrostem rzędu logiki. Niezwykle skomplikowane zbiory liczb naturalnych mogą być zdefiniowane za pomocą prostych formuł teorii mnogości, jeśli nie ma ograniczenia dla kwantyfikowania formuł. W ramach arytmetyki drugiego rzędu mamy natomiast ścisłe związki pomiędzy złożonością formuły (jej analityczną hierarchią), a stopniem "nie-obliczalności" zbioru liczb naturalnych przez nią definiowanego (rezultaty typu twierdzenia E.L. Posta).

Podamy teraz kilka użytecznych przykładów, wykraczania poza logikę pierwszego rzędu. Pierwszym jest tzw. logika pierwszego rzędu z wieloma zbiorami podkładowymi. Tylko pozornie jest ona silniejsza od zwykłej logiki pierwszego rzędu i może być do niej sprowadzona poprzez wprowadzenie dodatkowych predykatów unarnych dla wyróżnienia poszczególnych zbiorów podkładowych. Naturalność oraz korzyści płynące z jej używania były podkreślane m.in. przez A.I. Malcewa i S. Fefermana.

Drugim przykładem jest $\mathcal{N}$-logika, tzn. logika pierwszego rzędu z zadaną z góry ustaloną strukturą $\mathcal{N}$. Jeśli jej zbiór podkładowy jest nieskończony, to

$\mathcal{N}$-logika jest silniejsza od logiki pierwszego rzędu; w szczególności nie zachodzi dla niej twierdzenie o zwartości. Za najbardziej typowe przykłady może służyć $\mathbb{N}$-logika (dogodna do badania struktur algebraicznych, np. pierscieni euklidesowych) lub $\mathbb{R}$-logika (dogodna do badania przestrzeni metrycznych, przestrzeni Hilberta, Banacha itp.). Dla $\mathbb{N}$-logiki zachodzi tw. Löwenheima–Skolema.

Przypomnijmy, iż tw. o zwartości stwierdza, że dowolny zbiór zdań T ma model wtedy i tylko wtedy, gdy model ma każdy jego skończony podzbiór. Jest to niewątpliwie najbardziej fundamentalny rezultat teorii modeli (pierwszego rzędu), od którego w mniejszym lub większym stopniu zależy większość jej wyników. Tw. Löwenheima–Skolema mówi natomiast o istnieniu dla dowolnej teorii niesprzecznej T modeli o różnych mocach; i tak, o mocy dowolnie dużej mówi twierdzenie górne, zaś o mocy dowolnie małej acz nie mniejszej niż $\sharp\,\mathcal{L}$ — dolne.

Choć tw. Löwenheima–Skolema stanowi o braku jednoznaczności dla modeli pierwszego rzędu, jego charakter nie jest w istocie negatywny. Jest ono np. podstawą dla rachunku *infinitezymalnych*. Rachunek ten, tzw. analiza niestandardowa, jest formalną realizacją, dokonaną przez A. Robinsona, idei Leibniza uniwersalnego rachunku symbolicznego.

Jeszcze inną możliwość wyjścia poza logikę pierwszego rzędu daje idea A. Mostowskiego wprowadzenia nowych kwantyfikatorów, np. *istnieje nieskończenie wiele* lub *istnieje nieprzeliczalnie wiele*. W pierwszym przypadku otrzymujemy logikę równoważną z $\mathbb{N}$-logiką; w przypadku drugim logikę, dla której zachodzą twierdzeia o zupełności i zwartości (o ile język $\mathcal{L}$ jest co najwyżej przeliczlny; H.J. Keisler 1970), ale nie zachodzi tw. Löwenheima–Skolema (dolne). Choć pojęcie "nieprzeliczalnie wiele" wydaje się należeć raczej do dziedziny matematyki niż logiki, rezultat Keislera skłania do traktowania go jako prawie logicznego.

Brak jednoczesnego zachodzenia twierdzeń o zwartości i Löwenheima–Skolema nie jest rzeczą przypadkową. Wynika on bowiem z jednego z pierwszych twierdzeń abstrakcyjnej teorii modeli, a mianowicie tw. Lindströma, które charakteryzuje logikę pierwszego rzędu jako jedyną logikę, która spełnia oba powyższe twierdzenia. Podsumowując, pomimo swej siły wyrażania, logika pierwszego rzędu jest zbyt słaba aby odróżniać liczby kardynalne. Niemniej, możemy skutkiem tego konstruować wiele różnych modeli danej teorii pierwszego rzędu, albo też, przeprowadzać jeden model w inny, o bardziej pożądanych w danym kontekście własnościach. Ponadto, mamy tu do dyspozycji najpotężniejsze chyba narzędzie jakim jest twierdzenie o zwartości. Z kolei bardzo istotnym jest fakt, że ogromna liczba pojęć matematycznych może być wyrażona (bądź bezpośrednio bądź też poprzez różnego rodzaju redukcje) za pomocą formuł pierwszego rzędu. Wszystko to razem przyczynia się do tego, że teoria modeli pierwszego rzędu jest sercem całej teorii modeli.

3. Program Hilberta obecnie. Choć w świetle twierdzeń Gödla o niezupełności, program Hilberta redukcji do matematyki finitarnej (motywowany chęcią obrony Cantora teorii mnogości i rozjaśnienia roli nieskończoności w matematyce) nie może zostać w pełni zrealizowany, pozostaje jednak ciągle wyzwaniem dla poszukiwania rozwiązań częściowych. Program ten składa się, mówiąc bardzo krótko, z trzech punktów: wyizolować nie nastręczającą problemów, finitarną porcję matematyki; ukonstytuować pozostałą matematykę infinitarną jako jeden wielki system formalny; i na koniec dostarczyć finitarny dowód niesprzeczności dużego systemu.

Za ucieleśnienie idei finitarnej matematyki nakreślonej w tym programie wielu matematyków uważa bezkwantyfikatorową arytmetykę Skolema (jest to arytmetyka funkcji pierwotnie rekursywnych, otrzymywanych za pomocą superpozycji i rekursji prostej). Niesprzeczność arytmetyki Skolema, a także arytmetyki Peano z aksjomatem indukcji ograniczonym do formuł egzystencjalnych, może być udowodniona na gruncie arytmetyki Peano.

Natomiast niesprzeczność arytmetyki Peano została udowodniona przez G. Gentzena, jednak na gruncie arytmetyki Skolema wzbogaconej o zasadę bezkwantyfikatorowej indukcji pozaskończonej do liczby ε_0, granicy ciągu

$$\omega,\ \omega^{\omega},\ \omega^{\omega^{\omega}},\ \ldots .$$

Zasada ta mówi, że żadna bezkwantyfikatorowa formuła $\varphi(x)$ nie może definiować nieskończonego, malejącego ciągu liczb porządkowych mniejszych od ε_0 (dobre uporządkowanie ε_0); zaś dla jej formalnego wprowadzenia potrzebne jest uprzednie zakodowanie tych liczb porządkowych przez liczby naturalne.

Przykładem uogólnienia programu Hilberta mogą być propozycje P. Bernaysa (zastąpienie redukcji finitarnej argumentami o charakterze konstruktywnym), G. Gentzena (użycie indukcji pozaskończonej), K. Gödla (wprowadzenie pierwotnie rekursywnych funkcjonałów wyższych typów), czy w końcu

S. Fefermana (tzw. redukcjonizm predykatywny). Ten ostatni akceptował pełną logikę klasyczną i dopuszczał zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ jako kompletną nieskończoną całość, jednak silnie ograniczał kwantyfikowanie podzbiorów w $\mathbb{N}$. Matematyka wsteczna ("reverse mathematics"; H. Friedman, S.G. Simpson) wydaje się zaś być pewną, z konieczności częściową, aczkolwiek płodną realizacją tego programu. Poszukuje ona aksjomatów, które są niezbędne dla dowodu konkretnych, podstawowych twierdzeń matematycznych. Pracę rozpoczyna się tutaj od wskazania pewnego słabego systemu bazowego, który jest jednak na tyle silny, aby móc w nim wyrazić badane twierdzenia. Celem jest znalezienie naturalnego silniejszego systemu aksjomatów, który jest równoważny nad systemem bazowym z danym konkretnym twierdzeniem. Trzeba zatem wyprowadzić to twierdzenie ze wskazanych aksjomatów, a następnie wykazać, że implikuje ono ten system (kierunek odwrotny).

Podsystemy arytmetyki drugiego rzędu zawierają zazwyczaj arytmetykę Robinsona (wskazaną przez R.M. Robinsona jako przykład nierozstrzygalnej teorii skończenie aksjomatyzowalnej, z aksjomatami pierwszego rzędu arytmetyki Peano bez schematu aksjomatu indukcji) oraz pewne formuły drugiego rzędu podpadające pod schemat aksjomatów indukcji i schemat aksjomatów wyróżniania zbiorów. Systemem bazowym bywa najczęściej drugiego rzędu arytmetyka wyróżniania obliczalnego, dla której aksjomat indukcji jest ograniczony do arytmetycznych formuł egzystencjalnych, a aksjomat wyróżniania do arytmetycznych formuł wyznaczających zbiory o obliczalnych funkcjach charakterystycznych. Przypomnijmy, że funkcje obliczalne są otrzymywane za pomocą superpozycji, rekursji prostej i operacji minimum efektywnego. Silniejszym systemem jest arytmetyka wyróżniania arytmetycznego, dla której aksjomat indukcji i wyróżniania jest ograniczony do formuł arytmetycznych. Jest ona konserwatywnym rozszerzeniem arytmetyki Peano.

Innym, pośrednim przykładem jest tzw. system WKL_0 arytmetyki wyróżniania obliczalnego wraz ze słabym lematem Königa (równoważnym zwartości przestrzeni Cantora $2^{\mathbb{N}}$). Oba słabsze systemy są konserwatywnymi rozszerzeniami arytmetyki Peano z indukcją ograniczoną do formuł egzystencjalnych, a także są konserwatywnymi rozszerzeniami arytmetyki Skolema ze względu na zdania induktywne (tzn. postaci $\forall\exists$). Ich niesprzeczność jest wywiedlna na gruncie pełnej arytmetyki Peano pierwszego rzędu. Matematyka wsteczna wiąże te systemy z wieloma ważnymi twierdzeniami z algebry, analizy i analizy funkcjonalnej, takimi jak:

1) podstawowe własności zbioru liczb całkowitych i wymiernych (np. że są to pierścienie uporządkowane), rzeczywistych (np. że jest to nieprzeliczalne, archimedesowe ciało uporządkowane), tw. Baire'a dla zupełnych, ośrodkowych przestrzeni metrycznych, własność Darboux dla ciągłych funkcji rzeczywistych, tw. Banacha–Steinhausa dla ośrodkowych przestrzeni Banacha, istnienie algebraicznego domknięcia dla ciał przeliczalnych (ale już nie jego jednoznaczność), istnienie i jednoznaczność rzeczywistego domknięcia dla przeliczalnych ciał uporządkowanych.

2) tw. o zwartości dla zupełnych, całkowicie ograniczonych, ośrodkowych przestrzeni metrycznych, podstawowe własności ciągłych funkcji na tych przestrzeniach (np. osiąganie kresów), aproksymacja wielomianowa ciągłych funkcji na domkniętych prostokątach w $\mathbb{R}^n$, całkowalność w sensie Riemanna tych funkcji, podstawowe prawa rachunku różniczkowego dla funkcji zmiennych rzeczywistych (np. tw. o wartości średniej, wzór Taylora, tw. o funkcjach uwikłanych), tw. o lokalnym istnieniu rozwiązań układu równań różniczkowych zwyczajnych, twierdzenia Hahna–Banacha i Banacha–Alaoglu dla ośrodkowych przestrzeni Banacha, jednoznaczność algebraicznego domknięcia, każde przeliczalne ciało rzeczywiste można uporządkować, istnienie ideałów pierwszych w przeliczalnych pierścieniach przemiennych, tw. Gödla o pełności dla języków przeliczalnych, słaby lemat Königa.

3) zupełność ciała liczb rzeczywistych, tw. Bolzano–Weierstrassa, tw. Ascoli'ego dla ciągu równociągłych funkcji na domkniętym prostokącie w $\mathbb{R}^n$, istnienie ideałów maksymalnych w przeliczalnych pierścieniach przemiennych, istnienie bazy dla przeliczalnych przestrzeni wektorowych, istnienie bazy przestępnej dla ciał przeliczalnych, lemat Königa.

Zauważmy teraz, że wraz z ważnymi redukowanymi twierdzeniami, całe gałęzie matematyki stają się redukowalnymi do odpowiednich słabych podsystemów arytmetyki drugiego rzędu. Większość bowiem dziedzin matematyki polega w istocie na kilku fundamentalnych niekonstruktywnych rezultatach, zaś pozostałe wyniki uzyskuje się już poprzez standardowe rozumowania o konstruktywnym charakterze. Szacuje się, że zdecydowana większość istniejącej matematyki może być sformalizowana w ramach takich podsystemów. Dzieje się tak np. z obszernymi fragmentami klasycznego rachunku różniczkowego i całkowego.

4. Geometria zbiorów definiowalnych. Dla pewnej ustalonej $\mathcal{L}$-struktury $\mathfrak{M}$ możemy wyróżnić rodziny $\mathcal{S}_n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, podzbiorów definiowalnych (za pomocą $\mathcal{L}$-formuł pierwszego rzędu) w M^n. Oczywiście operacjom boolowskim na $\mathcal{L}$-formułach odpowiadają operacje boolowskie na zbiorach przez nie definiowanych. Podobnie użycie bloku kwantyfikatorów egzystencjalnych odpowiada stosownej projekcji zbioru definiowalnego. Dlatego otrzymany w ten sposób system $(\mathcal{S}_n)_n$ zbiorów definiowalnych, zwany niekiedy systemem Tarskiego, jest generowany poprzez operacje boolowskie oraz operacje rzutowań $M^n \longrightarrow M^m$, $n \geqslant m$, ze zbiorów definiowalnych formułami atomicznymi.

Powyższe pokazuje, że teorię modeli można traktować jako pewnego rodzaju geometrię zbiorów definiowalnych w danej strukturze. Należy jednak podkreślić, że bardzo często rezultaty dotyczące jednego, ustalonego modelu danej teorii T są uzyskiwane dzięki analizie rodziny modeli tej teorii; albo też poprzez analizę par jej modeli. Przykładów dostarczają tutaj różne kryteria eliminacji kwantyfikatorów lub modelowej zupełności.

Inną teorio-modelową techniką dowodzenia twierdzeń dotyczących konkretnej struktury $\mathfrak{M}$ jest tzw. zasada przeniesienia. Polega ona na zbudowaniu pewnego nowego modelu $\mathfrak{N}$, który jest lepszy z punktu widzenia uzyskania danego rezultatu i dla którego prawdziwość danego twierdzenia może być przeniesiona do wyjściowej struktury $\mathfrak{M}$. Przykładem może tu być konstruowanie nasyconych rozszerzeń elementarnych danej struktury $\mathfrak{M}$.

Do jednych z najważniejszych zagadnień teorii modeli należą:

- porównywanie dwóch struktur danego języka i konstruowanie struktur o pewnych szczególnych własnościach;
- badanie zachowania modeli przy operacjach na nich; np. syntaktyczne charakteryzacje niezmienniczości względem rozszerzeń (J. Łoś), podstruktur (A. Tarski, J. Łoś), sumy łańcuchów (J. Łoś, R. Suszko i C.C. Chang), obrazów homomorficznych (R.C. Lyndon) itp.

Konstruowanie nowych modeli często wykorzystuje wymienione poniżej kluczowe metody i fundamentalne twierdzenia:

- wzbogacanie języka o nowe stałe oraz metoda diagramów (L.A. Henkin, A. Robinson);

- metoda łańcuchów elementarnych i naprzemiennych (alternujących) (A. Tarski, R. Vaught);
- technika funkcji wyboru (skolemowskich), tw. Löwenheima–Skolema;
- twierdzenie o zwartości (K. Gödel, A.I. Malcew);
- ultraprodukty (T. Skolem, J. Łoś, A. Tarski);
- metoda omijania typów (L. Henkin, A. Ehrenfeucht, R. Vaught);
- modele nasycone, jednorodne, uniwersalne czy specjalne (B. Jonsson, M. Morley, R. Vaught);
- amalgamaty (A. Robinson, D. Lascar, B. Poizat);
- forcing (P. Cohen, A. Robinson, J. Barwise).

5. Eliminacja kwantyfikatorów. To zagadnienie było pierwszym systematycznym programem teorii modeli (lata 20-te i 30-te ubiegłego stulecia). Sam ten termin został wprowadzony przez A. Tarskiego na jego Warszawskim Seminarium 1926–28. Wymienimy teraz kilka historycznych wyników tego programu, a mianowicie eliminację kwantyfikatorów dla teorii:

- gęstego porządku liniowego bez końców; C.H. Langford, *Some theorems on decidability*, Ann. Math. **28** (1926), 16–40;
- ciał rzeczywiście domkniętych (tw. Tarskiego–Seidenberga); A. Tarski, *A decision method for elementary algebra and geometry*, 2-nd edition Berkeley 1951;
- ciał algebraicznie domkniętych (tw. Tarskiego–Chevalleya); A. Tarski, *Arithmetical classes and types of algebraically closed fields and real closed fields*, Bull. AMS **55** (1964), 1192.
- (uporządkowanych) grup abelowych; W. Szmielew, *Elementary properties of abelian groups*, Fund. Math. **41** (1955), 203–271.

Mówimy, że teoria T dopuszcza eliminację kwantyfikatorów w języku $\mathcal{L}$, gdy dla każdej $\mathcal{L}$-formuły $\varphi(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, istnieje bezkwantyfikatorowa $\mathcal{L}$-formuła $\psi(x)$ taka, że

$$T \models \forall\, x\ [\varphi(x) \Leftrightarrow \psi(x)].$$

Teoria T jest dopuszcza eliminację kwantyfikatorów egzystencjalnych (równoważnie, uniwersalnych) w języku $\mathcal{L}$, gdy dla każdej $\mathcal{L}$-formuły $\varphi(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, istnieje uniwersalna (bądź egzystencjalna) $\mathcal{L}$-formuła $\psi(x)$ taka, że

$$T \models \forall\, x\ [\varphi(x) \Leftrightarrow \psi(x)].$$

Powyższa własność teorii T jest równoważna jej modelowej zupełności. Pojęcie to zostało wprowadzone przez A. Robinsona wraz z jego charakteryzacją (Kryterium 2 poniżej). Podobnie, charakteryzacja eliminacji kwantyfikatorów wskazuje, że własność ta pokrywa się z tzw. *podmodelową zupełnością*.

Eliminacja kwantyfikatorów jest bardzo mocną własnością danej teorii. Ogólnie mamy przeliczalną hierarchię $\mathcal{L}$-formuł: najpierw formuły bezkwantyfikatorowe, potem zaś egzystencjalne $\exists$ i uniwersalne $\forall$, a następnie postaci $\exists\forall$, $\forall\exists$, $\exists\forall\exists$, $\forall\exists\forall$ itd. W przypadku, gdy teoria T dopuszcza eliminację kwantyfikatorów, hierarchia ta redukuje się modulo T do formuł bezkwantyfikatorowych. Jeśli zaś teoria T jest modelowo zupełna, to hierarchia ta redukuje się do formuł pierwszych dwóch typów. Powyższe przekłada się bezpośrednio na hierarchię zbiorów definiowalnych w modelach teorii T.

Modelowa zupełność jest oczywiście własnością słabszą od eliminacji kwantyfikatorów. W następnej sekcji zobaczymy, że w obu powyższych przykładach, modelowa zupełność jest równoważna, odpowiednio, Nullstellensatz Hilberta i rzeczywistemu Nullstellensatz. A zatem oba twierdzenia o zerach mogą być uzyskane na drodze eliminacji kwantyfikatorów, która oznacza w tych przypadkach tw. Chevalleya o rzucie zbioru konstruowalnego i tw. Tarskiego–Seidenberga o rzucie zbioru semialgebraicznego.

6. Pewne kryteria eliminacji kwantyfikatorów i ich zastosowania. Będziemy rozważali pewną teorię T w języku (pierwszego rzędu) $\mathcal{L}$.

Kryterium 1. *Następujące warunki są równoważne:*

i) T dopuszcza eliminację kwantyfikatorów;

ii) T jest podmodelowo zupełna, tzn. dla dowolnego jej modelu $\mathfrak{N}$ i jego podstruktury $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$, teoria $T \cup \mathcal{D}(\mathfrak{M})$ jest zupełna w języku $\mathcal{L}_M$ diagramu $\mathcal{D}(\mathfrak{M})$ struktury $\mathfrak{M}$;

iii) jeśli $\mathfrak{N}$ i $\mathfrak{N}'$ są dwoma modelami teorii T, $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$ jest podstrukturą, $f : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{N}'$ zanurzeniem izomorficznym, $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ formułą prymitywną *(tzn. formułą postaci* $\exists y\ \alpha(y, x_1, \ldots, x_n)$*, gdzie* $y = y_1$*,* α *jest koniunkcją formuł atomicznych lub ich zaprzeczeń), i jeśli* $(a_1, \ldots, a_n) \in M^n$*, to zachodzi równoważność*

$$\mathfrak{N} \models \varphi\,[a_1, \ldots, a_n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{N}' \models \varphi\,[f(a_1), \ldots, f(a_n)].$$

Kryterium 2. (A. Robinson) *Następujące warunki są równoważne:*

i) T *dopuszcza eliminację kwantyfikatorów uniwersalnych (równoważnie, egzystencjalnych);*

ii) T *jest modelowo zupełna, tzn. dla dowolnego modelu* $\mathfrak{M}$ *teorii* T*, teoria* $T \cup \mathcal{D}(\mathfrak{M})$ *jest zupełna w języku* $\mathcal{L}_M$ *diagramu* $\mathcal{D}(\mathfrak{M})$ *struktury* $\mathfrak{M}$*;*

iii) dla dowolnych dwóch modeli $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$ *teorii* T *zachodzi* $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$*;*

iv) T *jest egzystencjalnie zupełna (test Robinsona), tzn. dla dowolnych dwóch jej modeli* $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$*, dowolnej formuły egzystencjalnej*

$$\exists y\ \alpha(x, y), \quad x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_m),$$

i elementów $a = (a_1, \ldots, a_n) \in M^n$ *zachodzi równoważność*

$$\mathfrak{N} \models \exists y\ \alpha(a, y) \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{M} \models \exists y\ \alpha(a, y).$$

Dowody obydwu kryteriów bazują na twierdzeniu o zwartości i wykorzystują pojęcie diagramu, który jest odpowiednikiem tabelki działania grupowego w przypadku teorii grup.

Dla Kryterium 2, interesującą jest jedynie implikacja *iv)* $\Rightarrow$ *i)*. Wystarczy udowodnić, że dowolna $\mathcal{L}$-formuła egzystencjalna $\varphi(x)$ jest równoważna pewnej fomule uniwersalnej $\psi(x)$. Traktując zmienne x jako nowe stałe c, można przyjąć, że $\varphi = \varphi(c)$ jest zdaniem egzystencjalnym.

Dla dowodu, rozważmy zbiór uniwersalnych konsekwencji S teorii $T \cup \{\varphi\}$. Dzięki tw. o zwartości, wystarczy oczywiście wykazać, że $T \cup S \models \varphi$.

Niech więc $\mathfrak{M}$ będzie modelem dla $T \cup S$. Znowu wykorzystując zwartość, można udowodnić, że teoria

$$T \cup \{\varphi\} \cup \mathcal{D}(\mathfrak{M})$$

ma model; pozostawimy to jako pouczające ćwiczenie. Dowolny jej model $\mathfrak{N}$ można traktować jako rozszerzenie struktury $\mathfrak{M}$. Na mocy warunku (iv), otrzymujemy $\mathfrak{M} \models \varphi$, co kończy dowód.

Dla Kryterium 1, interesująca jest jedynie implikacja $iii) \Rightarrow i)$. Wystarczy udowodnić, że dowolna formuła prymitywna $\varphi(x)$ jest równoważna pewnej formule bezkwantyfikatorowej $\psi(x)$. Jak wyżej, można przyjąć, że $\varphi = \varphi(c)$ jest zdaniem prymitywnym.

Dla dowodu, rozważmy zbiór bezkwantyfikatorowych konsekwencji S teorii $T \cup \{\neg\varphi(c)\}$. Dzięki tw. o zwartości, wystarczy oczywiście wykazać, że $T \cup S \models \neg\varphi(c)$.

Niech więc $\mathfrak{N}$ będzie modelem dla $T \cup S$. Przypuśćmy, dla dowodu nie wprost, że $\mathfrak{M} \models \varphi(c)$ i niech $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$ będzie podstrukturą generowaną przez $c^{\mathfrak{N}}$. Na mocy warunku iii), otrzymujemy $T \cup \mathcal{D}(\mathfrak{M}) \models \varphi$. Znowu wykorzystując zwartość, znajdziemy skończoną liczbę zdań $\psi_1(c), \ldots, \psi_n(c) \in \mathcal{D}(\mathfrak{M})$ takich, że

$$T \models (\psi_1(c) \wedge \ldots \wedge \psi_n(c)) \Rightarrow \varphi(c).$$

Ale wtedy $\neg(\psi_1(c) \wedge \ldots \wedge \psi_n(c)) \in S$, skąd $\mathfrak{M} \models \neg(\psi_1(c) \wedge \ldots \wedge \psi_n(c))$, co jest sprzeczne z diagramem $\mathcal{D}(\mathfrak{M})$.

Stosunkowo łatwym ćwiczeniem jest zademonstrowanie powyższych kryteriów na przykładzie teorii gęstego porządku liniowego bez końców oraz ciał algebraicznie domkniętych i rzeczywiście domkniętych. Wprowadzimy przy tym jeszcze jedną definicję. Mówimy, że teoria T jest prawie uniwersalna, gdy dla dowolnych dwóch jej modeli $\mathfrak{N}$ i $\mathfrak{N}'$, dowolny izomorfizm pomiędzy podstrukturami w $\mathfrak{N}$ i $\mathfrak{N}'$ można przedłużyć do izomorfizmu pomiędzy ich podmodelami. Łatwo wykazać, że dla teorii prawie uniwersalnej pojęcia modelowej i podmodelowej zupełności pokrywają się. Stąd otrzymujemy następujący

Wniosek. *Dla teorii prawie uniwersalnej T, warunkiem koniecznym i wystarczającym dla eliminacji kwantyfikatorów jest aby dla dowolnych dwóch jej modeli $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$, dowolnej formuły prymitywnej $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ i elementów $(a_1, \ldots, a_n) \in M^n$ zachodziła równoważność*

$$\mathfrak{N} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{M} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n].$$

Pokażemy teraz, w jaki sposób twierdzenia o zerach dla ciał algebraicznie domkniętych i rzeczywiście domkniętych wynikają z modelowej zupełności teorii tychże ciał.

Twierdzenia o zerach. *Niech K będzie ciałem algebraicznie (odp. rzeczywiście) domkniętym, a J ideałem w pierścieniu wielomianów $K[X]$, $X = (X_1, \dots, X_n)$. Wtedy $I = I(V(J)) \quad \Leftrightarrow \quad J$ jest ideałem radykalnym (odp. rzeczywistym).*

Jedynie implikacja ($\Leftarrow$) jest interesująca. Ponieważ każdy ideał radykalny (rzeczywisty) jest przecięciem skończonej liczby ideałów pierwszych (rzeczywistych ideałów pierwszych), można założyć, że $J = \mathfrak{p}$ jest ideałem pierwszym (rzeczywistym ideałem pierwszym). Niech L będzie domknięciem algebraicznym (rzeczywistym) ciała ułamków pierścienia ilorazowego $K[X]/\mathfrak{p}$.

Mamy udowodnić, że $I(V(\mathfrak{p})) \subset \mathfrak{p}$. Niech więc $f \in K[X] \setminus \mathfrak{p}$; mamy wykazać, że $f \notin V(I(\mathfrak{p}))$. Rozważmy generatory $g_1, \dots, g_k$ ideału $\mathfrak{p}$ oraz następujący układ równań w nowych zmiennych $T = (T_1, \dots, T_n)$ i S:

$$g_1(T) = \ldots = g_k(T) = 0, \quad S \cdot f(T) = 1.$$

Układ ten ma rozwiązanie nad ciałem L, a mianowicie

$$T_i = X_i \bmod \mathfrak{p}, \quad i = 1, \dots, k, \quad S = \frac{1}{f(X) \bmod \mathfrak{p}}.$$

Dzięki modelowej zupełności, ma on również pewne rozwiązanie w ciele K, powiedzmy

$$T_i = a_i, \quad i = 1, \dots, k, \quad S = b.$$

Wtedy oczywiście $a = (a_1, \dots, a_n) \in V(\mathfrak{p})$ i $f(a) = 1/b \neq 0$, a więc $f \notin I(V(\mathfrak{p}))$, co kończy dowód twierdzenia.

7. Typy logiczne. Mówimy, że pewne dwa n-elementy $a = (a_1, \dots, a_n)$ i $b = (b_1, \dots, b_n)$ w $\mathcal{L}$-strukturach $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$, odpowiednio, mają ten sam typ, gdy spełniają te same formuły, tzn. dla dowolnej $\mathcal{L}$-formuły $\varphi(x)$ zachodzi równoważność

$$\mathfrak{M} \models \varphi(a) \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{N} \models \varphi(b).$$

Typem n-elementu a $\mathcal{L}$-struktury $\mathfrak{M}$ nazywamy ogół $\mathcal{L}$-formuł spełnionych przez a:

$$\mathrm{tp}_{\mathfrak{M}}(a) := \{\varphi(x) : \mathfrak{M} \models \varphi(a)\}.$$

Przestrzeń $S_n = S_n(x)$ wszystkich n-typów języka $\mathcal{L}$ może więc być utożsamiana ze zbiorem wszystkich zupełnych teorii niesprzecznych w języku $\mathcal{L} \cup \{x_1, \dots, x_n\}$. Przez przestrzeń n-typów $S_n(T)$ teorii T rozumiemy zbiór typów n-elementów modeli tej teorii.

Dla teorii zupełnej T, zbiorem parametrów nazywamy podzbiór A pewnego modelu $\mathfrak{M}$ tej teorii. Nie chodzi tu jednak o nagi zbiór A, ale raczej o zbiór pewnych elementów właśnie jako elementów większej struktury $\mathfrak{M}$. W tym sensie zbiór parametrów może być utożsamiany z diagramem elementarnym $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{M}_A)$ struktury $\mathfrak{M}$ (w języku $\mathcal{L}_A$). Możemy w związku z tym powiedzieć, że jeśli rozważamy rozszerzenie elementarne $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$, to zbiór parametrów $A \subset M$ względem $\mathfrak{M}$ jest taki sam jak względem $\mathfrak{N}$.

Przez n-typ z parametrami ze zbioru A (względem struktury $\mathfrak{M}$), lub n-typ nad A, rozumiemy zupełną teorię niesprzeczną w języku $\mathcal{L}_A \cup \{x_1, \ldots, x_n\}$ zawierającą diagram elementarny $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{M}_A)$. W sposób równoważny możemy zdefiniować n-typ nad A jako (*) maksymalny zbiór $\mathcal{L}_A$-formuł $\varphi(a, x)$, których każdy skończony fragment jest realizowany w $\mathfrak{M}$. Oznaczmy przez $S_n(A)$ przestrzeń typów nad A.

Rozważmy teraz pewien n-typ $p(x) \in S_n(A)$ i jego model $\mathfrak{N}$. Oczywiście struktury $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ są elementarnie równoważne: $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$. Dzięki poniższemu lematowi (który jest łatwym ćwiczeniem na zastosowanie tw. o zwartości), typy nad A (względem $\mathfrak{M}$) są zawsze realizowane w pewnym rozszerzeniu elementarnym struktury $\mathfrak{M}$.

Lemat. *Jeśli $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$ (tzn. $Th\,(\mathfrak{M}) = Th\,(\mathfrak{N})$), to $\mathfrak{N}$ można zanurzyć elementarnie w pewne rozszerzenie elementarne struktury $\mathfrak{M}$.*

W świetle twierdzenia Gödla o pełności, przestrzeń typów może być też utożsamiana z przestrzenią Stone'a ultrafiltrów na algebrze Lindenbauma $\mathcal{L}_A$-formuł i wyposażona w topologię Stone'a, której bazą są zbiory postaci

$$\langle \varphi(a, x) \rangle := \{p(x) \in S_n(A) : \varphi(a, x) \in p(x)\},$$

gdzie $\varphi(a, x)$ jest $\mathcal{L}_A$-formułą. Przypomnijmy, że topologia Stone'a to taka, która jest zwarta (Hausdorffa) i zerowymiarowa (tzn. ma bazę złożoną ze zbiorów otwarto-domkniętych). Charakteryzacja (*) typów oznacza, że typy z $S_n(A)$ zrealizowane w strukturze $\mathfrak{M}$ stanowią gęsty podzbiór w $S_n(A)$.

Wykorzystując eliminację kwantyfikatorów, można sprawdzić (jest to nietrudne ćwiczenie), że przestrzeń Stone'a $S_n(K)$ dla ciała algebraicznie domkniętego (rzeczywiście domkniętego) jest izomorficzna ze spektrum (spektrum rzeczywistym) pierścienia wielomianów $K[X_1, \ldots, X_n]$ wyposażonym w topologię konstruowalną.

Rozważmy teraz rozszerzenia elementarne $A \prec B \prec D$. Niech d będzie n-elementem w D,

$$p = p(x) = \mathrm{tp}_D(d/A) \quad \text{i} \quad q = q(x) = \mathrm{tp}_D(d/B)$$

będą typami z parametrami ze zbiorów A i B, odpowiednio. Mówimy, że q jest dziedzicznym rozszerzeniem typu p (dziedzicznym nad p, "heir"), jeśli dla każdej $\mathcal{L}_A$-formuły $\varphi(x, y)$ i ciągu elementów b z B istnieje ciąg elementów a w A taki, że

$$\varphi(x, b) \in q \;\Rightarrow\; \varphi(x, a) \in p.$$

Mówimy, że q jest konserwatywnym rozszerzeniem typu p (konserwatywnym nad p, "coheir"), jeśli dla każdej $\mathcal{L}$-formuły $\varphi(x, y)$ i ciągu elementów b z B istnieje ciąg elementów a w A taki, że

$$\varphi(x, b) \in q \;\Rightarrow\; B \models \varphi(a, b).$$

Powyższe rodzaje rozszerzania typów wiążą się z pojęciem amalgamatu dziedzicznego, które przedstawimy w następnej sekcji. Amalganaty dziedziczne będą przez nas wykorzystywane w dowodzie własności waluacyjnej dla wielomianowo ograniczonych struktur o-minimalnych z wyróżnionym podpierścieniem wypukłym.

Pojęcie dziedzicznego rozszerzenia typów ("heir") jest dla nas ważne również dlatego, że z jego pomocą można scharakteryzować typy definiowalne. Charakteryzację tą można z kolei wykorzystać do dowodu ważnego twierdzenia Markera–Steinhorna dotyczącego struktur o-minimalnych. Bazuje ona na twierdzeniu Svenoniusa, które wiąże semantyczne pojęcie definiowalności ze strukturalno-algebraicznym pojęciem niezmienniczości względem automorfizmów.

Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego
30-348 Kraków, ul. Profesora Łojasiewicza 6
e-mail address: nowak@im.uj.edu.pl