Zadanie 1. *Niech X będzie przestrzenią wektorową wyposażoną w topologię τ taką, że działanie dodawania $+ : X \times X \ni (x, y) \mapsto x + y \in X$ jest ciągłe.*

Czy wtedy działanie mnożenia przez skalar $\cdot : \mathbb{R} \times X \ni (\lambda, x) \mapsto \lambda x \in X$ musi być ciągłe?

Zadanie 2. *Niech $(X, \| \cdot \|)$ będzie przestrzenią unormowaną.*

Wykaż, że norma $\| \cdot \|$ pochodzi od iloczynu skalarnego wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

dla dowolnych $x, y \in X$.

Zadanie 3. *Czy klasyczne normy w przestrzeniach l^2, l^1 lub l^∞ pochodzą od iloczynu skalarnego?*

Zadanie 4. *Rozważmy przestrzeń $\mathcal{C}([0, 1])$ oraz normy*

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int\limits_0^1 |f(t)|^2 dt}.$$

Czy normy $\| \cdot \|_\infty$, $\| \cdot \|_2$ pochodzą od iloczynu skalarnego?

Zadanie 5. *Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta oraz niech $h \in \mathcal{H}$. Określamy $\phi(x) := \langle x, h \rangle$, $x \in \mathcal{H}$. Dowiedz, że ϕ jest funkcjonałem liniowym i ciągłym na $\mathcal{H}$ oraz $\|\phi\| = \|h\|$.*

Zadanie 6. *Sprawdź, czy następujące funkcjonały liniowe na rzeczywistych przestrzeniach unitarnych są postaci $\phi(h) = \langle h, h_0 \rangle$, $h \in X$ z pewnym h_0, gdzie $\langle \cdot, - \rangle$ jest iloczynem skalarnym na X. Wyznacz h_0 jeśli istnieje.*

(1) $X = c_{00}$, $\langle \{x_n\}_n, \{y_n\}_n \rangle = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$, $\phi(\{x_n\}_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x_n$,

(2) $X = \mathcal{C}([0, 1])$, $\langle f, g \rangle = \int\limits_0^1 f(t)g(t)dt$,

- $\phi(f) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt$,
- $\phi(f) = \int\limits_0^1 f(t)dt$,
- $\phi(f) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} (2t - 1)f(t)dt$,

(3) $X = l^2$, $\phi(\{x_n\}_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n = 2014x_{2013} - 2013x_{2014}$ *względem iloczynów skalarnych*

- $\langle \{x_n\}_n, \{y_n\}_n \rangle = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$,
- $\langle \{x_n\}_n, \{y_n\}_n \rangle = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n}) x_n y_n$

(4) $X = \mathcal{P}_n$ *(przestrzeń wielomianów rzeczywistych stopnia co najwyżej n)*, $\langle p, q \rangle = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_k$, *gdzie* $p = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ *oraz* $q = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k x^k$, $\phi(p) = p(x)$, *gdzie* $x \in \mathbb{R}$ *jest ustaloną liczbą.*

Zadanie 7. *Niech normy* $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ *będą określone na przestrzeni* X. *Wykaż, że normy* $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ *są równoważne, wtedy i tylko wtedy gdy istnieją stałe* $C, c > 0$ *takie, że*

$$c\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C\|x\|_1$$

dla $x \in X$.

Zadanie 8. *Wykaż, że wzór*

$$\langle \{x_n\}_n, \{y_n\}_n \rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} 5x_n y_n + 3x_n y_{n+1} + 3x_{n+1} y_n + 2x_{n+1} y_{n+1}$$

określa iloczyn skalarny w przestrzeni l^2, *a norma przez niego zadana jest równoważna zwykłej normie na* l^2.

Wykaż, że równanie

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 1, \\ 3x_{n-1} + 7x_n + 3x_{n+1} = 0, \qquad \text{dla } n \geqslant 2. \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie w $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_+} \in l^2$. *Czy istnieją inne rozwiązania tego układu?*

Wskazówka: proszę rozważyć funkcjonał $l^2 \ni \{x_n\}_n \mapsto x_1 \in \mathbb{R}$.