Zadanie 1. *W przestrzeni liniowej*

$$Lip([0;1]) := \{f \in \mathbb{R}^{[0;1]} : \exists C > 0 \forall x, y \in [0;1] : |f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|\}$$

zadajemy normę

$$\|f\|_L := |f(0)| + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}.$$

Wykazać, że istnieje funkcjonał liniowy $\phi : Lip([0;1]) \to \mathbb{R}$ *o normie* 1 *taki, że* $\phi(f) = f'(\frac{1}{2})$, *gdy* f *jest klasy* $\mathcal{C}^1$.

Zadanie 2. *Niech* X *będzie przestrzenią unormowaną. Udowodnić, że* X' *rozdziela punkty (tzn. dla* $\forall x \neq y \exists f \in X' : f(x) \neq f(y)$*).*

Zadanie 3. *Niech* $B([0;1])$ *będzie przestrzenią Banacha wszystkich funkcji rzeczywistych ograniczonych na odcinku* $[0;1]$ *(z normą supremową).*

- *Pokazać, że dla każdego* $x_0 \in [0;1]$ *istnieje funkcjonał* $\phi \in B([0;1])'$ *o normie jeden taki, że* $\phi(f) = \lim_{t \to x_0} f(t)$, *jeżeli* f *ma granicę w* x_0.
- *Pokazać, że istnieje funkcjonał* $\psi \in B([0;1])'$ *o normie* $\frac{3}{4}$ *taki, że* $\psi(f) = \int_{\frac{1}{4}}^{1} f(t)dt$, *jeżeli* f *jest ciągła.*