Zadanie 1. *Niech X będzie przestrzenią unormowaną. Wykaż, że* $\operatorname{codim}\ker(f) = 1$, *dla dowolnego funkcjonału liniowego $f : X \to \mathbb{K}$. Przez* codim *oznaczamy kowymiar przestrzeni, a przez* $\ker(f)$ *oznaczamy jądro funkcjonału f.*

Zadanie 2. *Wykaż, że każde odwzorowanie liniowe na przestrzeni skończenie wymiarowej jest ciągłe.*

Zadanie 3. *Pokaż, że norma funkcjonału liniowego*

$$\phi : l^1 \ni \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \big(1 - \frac{1}{n}\big) x_n \in \mathbb{K}.$$

jest równa 1*, ale nie istnieje ciąg $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^1$ taki, że $\|\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\| \leqslant 1$ oraz $|\phi(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})| = 1$.*

Zadanie 4. *Pokaż, że norma funkcjonału liniowego*

$$\phi : \mathcal{C}[0,1] \ni f \mapsto \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)dt \in \mathbb{K}.$$

jest równa 1 *względem normy $\|\cdot\|_\infty$ w $\mathcal{C}[0,1]$, ale nie istnieje $f \in \mathcal{C}[0,1]$ takie, że $\|f\| \leqslant 1$ oraz $|\phi(f)| = 1$. Czy to samo zachodzi dla normy $\|\cdot\|_1$ w $\mathcal{C}[0,1]$?*

Zadanie 5. *Rozważmy rzeczywistą przestrzeń $L^2_{\mathbb{R}}[0, 2\pi]$. Wykaż, że ciąg*

$$\big\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} cosx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} sinx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} cos2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} sin2x, \dots\big\}$$

jest bazą ortonormalną. Rozwiń funkcję $f(x) = x^2$ w szereg Fouriera względem tej bazy.