Zadanie 1. *Sprawdzić, czy następujące odwzorowania liniowe są dobrze określone i ciągłe, i wyznaczyć normę tych, które okażą się ciągłe.*

- $\mathbb{R}[x] \ni p \mapsto xp'(x) \in \mathbb{R}[x]$ *względem normy* $\|p\|_1 = \int_0^1 |p(t)|dt$,
- $\mathcal{C}[-1,1] \ni f \mapsto Pf \in \mathcal{C}[-1,1]$, *gdzie* $Pf(t) = \frac{f(t)+f(-t)}{2}$, $t \in [-1,1]$ *względem normy supremowej,*
- $c_{00} \ni \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} x_{2n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} nx_{2n} \in \mathbb{R}$, *względem normy* $\|\{x_n\}_{n=1}\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ *w* c_{00}.
- $\mathcal{C}[0,1] \ni f \mapsto \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt - f(1) \in \mathbb{R}$ *względem normy supremowej.*

Zadanie 2. *Niech* $(X, \|\cdot\|_X)$ *oraz* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *będą niezerowymi przestrzeniami unormowanymi. Dowieść, że norma* $\|\cdot\|$ *na przestrzeni* $X \times Y$ *dana wzorem*

$$\|\cdot\| = \|\cdot\|_X + \|\cdot\|_Y$$

nie jest zadana przez żaden iloczyn skalarny.

Zadanie 3. *W przestrzeni* $\mathcal{C}[-1,1]$ *określamy*

$$\phi_a(f,g) = \int f(t)\overline{g(t)}dt + (2a^2-1)\overline{f(a)}g(a), f,g \in \mathcal{C}[-1,1], a \in [-1,1].$$

Niech $\Lambda = \{a \in [-1,1] : \phi_a$ *jest iloczynem skalarnym* $\}$. *Wyznaczyć zbiór* Λ *oraz wszystkie te pary* $(a,b) \in \Lambda \times \Lambda$, *dla których* ϕ_a *oraz* ϕ_b *zadają normy równoważne.*

Zadanie 4. *Wykazać, że jeżli* x *i* y *są elementami rzeczywistej przestrzeni unitarnej, to* $\|x+y\| = \|x\|$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $2x+y$ *jest wektorem prostopadłym do* y. *Czy ta sama równoważność zachodzi w zespolonych przestrzeniach unitarnych?*

Zadanie 5. *Niech* $(X; \langle \cdot, - \rangle)$ *będzie przestrzenią unitarną taką, że dla każdego liniowego i ciągłego funkcjonału* $\phi : X \to \mathbb{K}$ *istnieje* $x_0 \in X$ *takie, że* $\phi(x) = \langle x, x_0 \rangle$ *dla wszystkich* $x \in X$. *Wykazać, że* X *jest przestrzenią Hilberta.*