Zadanie 0. *Niech* $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ *będzie ciągiem skończonych miar borelowskich na* $[0,1]$*. Pokazać, że jeżeli odwzorowanie*

$$\mathcal{C}[0,1] \ni f \to \int_0^1 f d\mu_n \in l^2$$

jest poprawnie określone, to jest ono ciągłe.

Zadanie 1. *Pokazać, że przestrzeń Banacha, która jest* σ*-zwarta (tzn. jest sumą przeliczalnej ilości zbiorów zwartych) jest skończenie wymiarową. Czy założenie zupełności jest istotne?*

Zadanie 2. *Niech* $\mathcal{B}([0,1])$ *będzie przestrzenią wszystkich funkcji rzeczywistych i ograniczonych na odcinku* $[0,1]$ *z normą supremową. Wykazać, że istnieje funkcjonał* $\phi : B([0,1]) \to \mathbb{R}$ *liniowy i ciągły o normie* $\frac{1}{6}$ *taki, że*

$$\phi(f) = \int_{1/3}^{1/2} f(t)dt$$

dla wszystkich funkcji f *ciągłych na* $[0,1]$*.*

Zadanie 3. *Niech* $\mathcal{H}$ *będzie rzeczywistą przestrzenią Hilberta z normą* $\|\cdot\|_2$*. Zbadać dla jakich ciagłych funkcjonałów* $\psi : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ *odwzorowanie* $\|\cdot\|$ *spełniające równanie*

$$\|x\| = \|x\|_2 - |\psi(x)| \quad \text{dla } x \in \mathcal{H},$$

jest normą pochodzącą od iloczynu skalarnego? Jeśli odwzorowanie $\|\cdot\|$ *jest normą pochodzącą od iloczynu skalarnego, to czy* $(H, \|\cdot\|)$ *jest przestrzenią Hilberta?*

Zadanie 4. *Niech dany bedzie wektor* $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$*. Wykazać, że istnieje operator ograniczony* $A : l^1 \to l^1$ *taki, ze* $A(a) = \{|a_n|^{2015}\}_{n=1}^{\infty}$*.*