Zadanie 1. *Przestrzeń* c_{00} *jest wyposażona w normę z* l^∞*. Pokazać, że odwzorowanie liniowe*

$$A : c_{00} \ni \{x_n\}_n \mapsto \{\frac{x_n}{n+1}\}_n \in c_{00}$$

jest bijekcją ciągłą, i wyznaczyć $\|A\|$*. Czy* A^{-1} *jest odwzorowaniem ciągłym?*

Zadanie 2. *Niech* X *i* Y *będą przestrzeniami Banacha, a* $f : X \to Y$ *liniową i ciągłą surjekcją. Pokazać, że dla każdego ciągu* $\{y_n\}_{n=0}^\infty \subset Y$ *zbieżnego do zera istnieje ciąg* $\{x_n\}_{n=0}^\infty \subset X$ *zbieżny do zera taki, że* $f(x_n) = y_n$ *dla wszystkich* $n \geqslant 0$*.*

Zadanie 3. *Niech* X *będzie przestrzenią liniowo-topologiczną* T_2*, a* Y *- jej podprzestrzenią liniową. Uzasadnić, że jeżeli* Y *jest ograniczonym podzbiorem* X*, to* $Y = \{0\}$*.*

Zadanie 4. *Niech* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *będzie słabo zbieżnym ciągiem elementów przestrzeni unormowanej* X*. Pokazać, że*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\|}{n^\alpha} = 0$$

dla każdego $\alpha > 1$*.*

Zadanie 5. *Niech* $\mathcal{H}$ *będzie rzeczywistą przestrzenią Hilberta,* $\mathcal{H}_0$ *jej domkniętą podprzestrzenią liniową, a* $\phi_0 : \mathcal{H}_0 \to \mathbb{R}$ *funkcjonałem liniowym i ciągłym. Pokazać, że istnieje funkcjonał liniowy i ciągły* $\phi : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ *taki, że* $\phi|_{\mathcal{H}_0} = \phi_0$ *oraz* $\|\phi_0\| = \|\phi\|$*. Rozstrzygnąć, czy taki funkcjonał* ϕ *jest jedyny (podać uzasadnienie).*

Zadanie 6. *Niech* $A : l^2 \to l^2$ *będzie odwzorowaniem liniowym danym wzorem*

$$A(x) = (x_1 + x_2, x_2, x_3, \dots), \quad x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in l^2.$$

Określamy iloczyn skalarny

$$\langle x, y\rangle_A = \langle x, y\rangle_2 + \langle Ax, Ay\rangle_2, \quad x, y \in l^2,$$

względem którego l^2 *jest przestrzenią Hilberta, gdzie* $\langle -, \cdot\rangle_2$ *oznacza standardowy iloczyn skalarny w* l^2*. Pokazać, że istnieje dokładnie jedno* $u \in l^2$ *takie, że* $\langle x, u\rangle_A = x_1$ *dla wszystkich* $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in l^2$*. Obliczyć* $\langle u, u\rangle_A$*.*

Zadanie 7. *Załóżmy, że* l^1 *z pewną normą* $\|\cdot\|$ *taką, że* $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|$ *dla wszystkich* $x \in l^1$*, jest przestrzenią Banacha. Wykazać, że istnieje stała* $M > 0$ *taka, że* $M\|x\|_1 \leqslant \|x\|$ *dla wszystkich* $x \in l^1$*.*

Zadanie 8. *Niech* X_0 *będzie domkniętą liniową podprzestrzenią rzeczywistej przestrzeni unormowanej* X *różną od* X*. Pokazać, że dla każdego funkcjonału liniowego i ciągłego* $\phi_0 : X_0 \to \mathbb{R}$ *o normie* 2008 *istnieje funkcjonał liniowy i ciągły* $\phi : X \to \mathbb{R}$ *o normie* 2009 *taki, że* $\phi|_{X_0} = \phi_0$*.*

Zadanie 9. *Niech* $A : l^{2008} \to l^{2008}$ *będzie odwzorowaniem liniowym, ciągłym i takim, że* $A(x) \in l^{2007}$ *dla wszystkich* $x \in l^{2008}$*. Pokazać, że odwzorowanie*

$$l^{2007} \ni x \mapsto A(x) \in l^{2007}$$

jest również ciągłe. (W przestrzeniach l^{2007} *i* l^{2008} *rozważamy standardowe normy.)*

Zadanie 10. *Niech* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *będzie ciągiem wektorów w przestrzeni Hilberta* $\mathcal{H}$ *takim, że*

$$\sum_{n=1}^\infty \langle x_n, f\rangle < \infty, f \in \mathcal{H}.$$

Pokazać, że istnieje stała $c \in [0; \infty)$ *taka, że*

$$\sum_{n=1}^\infty \langle x_n, f\rangle < c\|f\|, f \in \mathcal{H}.$$