Zadanie 1. *Rozważmy przestrzeń wektorową* $\mathbb{R}^2$*. Czy działania dodawania* $+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x + y \in \mathbb{R}^2$ *oraz mnożenia przez skalar* $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \ni (\lambda, x) \mapsto \lambda x \in \mathbb{R}^2$ *są ciągłe w*

(1) *topologii* τ_1 *zadanej przez metrykę "centrum",*
(2) *topologii* τ_2 *zadanej przez metrykę "rzeki",*
(3) *topologii* τ_3 *zadanej przez metrykę:* $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - y_1|^{\frac{1}{2}} + |x_2 - y_2|^{\frac{1}{2}}$,
(4) *topologii* τ_4 *zadanej przez metrykę:* $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$*?*

Uwaga 1. *W poprzednim zadaniu poprzez ciągłość działania* $+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x + y \in \mathbb{R}^2$ *w topologii* τ *rozumiemy ciągłość działania* $+$*, gdzie w dziedzinie* $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ *rozważamy topologię produktową* $\tau \times \tau$*, a w przeciwdziedzinie* $\mathbb{R}^2$ *topologię* τ*. Poprzez ciągłość działania* $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \ni (\lambda, x) \mapsto \lambda x \in \mathbb{R}^2$ *w topologii* τ *rozumiemy ciągłość działania* $\cdot$*, gdzie w dziedzinie* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ *rozważamy topologię produktową naturalnej topologii na* $\mathbb{R}$ *i* τ*, a w przeciwdziedzinie* $\mathbb{R}^2$ *topologię* τ*.*

Zadanie 2. *Które z przestrzeni rozważanych w Zadaniu 1 są przestrzeniami unormowanymi?*

Zadanie 3. *Rozważmy przestrzeń* $l^\infty := \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^\mathbb{N} : \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$*. Udowodnij, że nieujemna funkcja* $\|\cdot\| : l^\infty \ni \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \in \mathbb{R}_+$ *definiuje normę.*

Zadanie 4. *Rozważmy przestrzenie wektorowe:*

- $c := \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^\mathbb{N} : \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ jest zbieżny}\}$,
- $c_0 := \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^\mathbb{N} : \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ jest zbieżny do } 0\}$,
- $c_{00} := \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \exists k \in \mathbb{N} \forall m > k : x_m = 0\}$

jako podprzestrzenie l^∞*. Które z nich są gęste w* l^∞*?*

Zadanie 5. *Ustalmy* $p \geqslant 1$ *oraz przestrzeń* $l^p := \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^\mathbb{N} : \sum\limits_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$*. Udowodnij, że nieujemna funkcja* $\|\cdot\| : l^p \ni \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \in \mathbb{R}_+$ *definiuje normę.*

Zadanie 6. *Ustalmy* $p \geqslant 1$*. Czy przestrzeń* c_0 *jest podprzestrzenią* l^p*?*

Zadanie 7. *Ustalmy* $p \geqslant 1$*. Czy przestrzeń* c_{00} *z indukowaną normą z* l^p *jest gęsta w* l^p*?*

Zadanie 8. *Ustalmy* $p \geqslant 1$ *oraz przestrzeń*

$$L^p[0,1] := \{f \in \mathbb{K}^{[0,1]} : f \text{ jest całkowalna w sensie Lebesgue'a }, \int\limits_{[0,1]} |f|^p d\mathcal{L} < \infty\}.$$

Udowodnij, że nieujemna funkcja $\|\cdot\| : L^p \ni f \mapsto \in \left(\int\limits_{[0,1]} |f|^p d\mathcal{L}\right)^{\frac{1}{p}} \in \mathbb{R}_+$ *definiuje seminormę.*

Zadanie 9. *Rozważy przestrzeń* $\mathcal{C}[0,1] := \{f \in \mathbb{K}^{[0,1]} : f \text{ jest ciągła na przedziale } [0,1]\}$*. Wykaż, że funkcje*

- $\| \cdot \|_\infty : \mathcal{C}[0,1] \ni f \mapsto \in \sup\limits_{t \in [0,1]} |f(t)| \in \mathbb{R}_+$,
- $\| \cdot \|_1 : \mathcal{C}[0,1] \ni f \mapsto \int\limits_{[0,1]} |f| d\mathcal{L} \in \mathbb{R}_+$

definiują normy na $\mathcal{C}[0,1]$*. Czy są to normy zupełne?*