1. Teoria reprezentacji zmiennoprzecinkowej i błędu obliczeń

(1.1) Zapisać liczby

$$0.1,\ 1/3,\ 275,\ 12.125$$

w arytmetyce $\mathbb{M}(2,6,2)$ (zapis dwójkowy, 6 miejsc na mantysę, 2 na wykładnik), $\mathbb{M}(16,4,4)$, $\mathbb{M}(12,2,2)$.

(1.2) (W) Wykaż, że działania w dowolnej arytmetyce $\mathbf{M}(p,q,r)$ nie spełniają praw łączności i rozdzielności.

(1.3) Znajdź eps dla swojego komputera. Wykonaj działania (w ulubionym programie) by uzyskać 'underflow' i 'overflow'.

Następujące dwa zadania należy rozwiązać używając przybliżonego wzoru na przenoszenie się błędów: Jeśli $y(x_1,\ldots,x_n)$ jest funkcją, $\tilde{x}$ jest przybliżeniem numerycznym$x$ oraz $\Delta x_i = \tilde{x}_i - x_i$ i $\Delta y = y(\tilde{x}) - y(x)$ oznaczają błędy, to

$$\Delta y(\tilde{x}) \overset{\sim}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}(\tilde{x})\Delta x_i, \qquad |\Delta y| \overset{\sim}{\leqslant} \sum_{i=1}^{n} |\frac{\partial y}{\partial x_i}(\tilde{x})||\Delta x_i|.$$

(1.4) Chcemy obliczyć wyrażenie $(\sqrt{2}-1)^6$ używając wartości przybliżonej 1.4 pierwiastka z 2. Można podstawić tę wartość do powyższego wzoru albo zastosować jedno z następujących wyrażeń

$$\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6},\quad (3-2\sqrt{2})^3,\quad \frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3},\quad 99-70\sqrt{2},\quad \frac{1}{99+70\sqrt{2}}.$$

Które z przybliżeń będzie najlepsze?

(1.5) Z jaką dokładnością można obliczyć $x+y$ jeśli

$$3x+ay=10, \quad 5x+by=20,$$

gdzie $a = 2.100 \pm 5\cdot 10^{-4}$, $b = 3.300 \pm 5\cdot 10^{-4}$.

(1.6) Z jaką dokładnością można obliczyć $x+y$ jeśli

$$3x+ay=10, \quad 5x+by=20,$$

gdzie $a = 2.100 \pm 5\cdot 10^{-4}$, $b = 3.300 \pm 5\cdot 10^{-4}$.

(1.7) Następujące zadanie pokazuje, że błędy mogą pojawiać się również w czasie obliczeń: Rozwiązać różnymi metodami układ równań

$$0.01x + y = 2 \qquad x + 0.01y = 4,$$

zaokrąglając wszystkie obliczenia do drugiego miejsca po przecinku. Uzyskać co najmniej 3 różne wyniki.

(1.8) Niech dane będzie równanie $x^2 - 2a_1x + a_2 = 0$, $0 < a_2 \ll 1 < a_1$. Problem: znaleźć mniejsze miejsce zerowe

$$x^* = f(a_1,a_2) = a_1 - \sqrt{a_1^2 - a_2}.$$

Algorytm: $y_1 := a_1 \cdot a_1$
$y_2 := y_1 - a_2$,
$y_3 := \sqrt{y_2}$,
$x := y_4 = a_1 - y_3$.
Pokazać, że w podanym zakresie parametrów a_1, a_2 zadanie jest dobrze uwarunkowane (pochodne cząstkowe są ograniczone), natomiast wsteczny błąd przy stosowaniu algorytmu rośnie do nieskończoności dla $a_2 \to 0$.

2. Wstęp do algebry liniowej numerycznej

(2.1) Obliczyć rząd, wyznacznik, ślad i wielomian charakterystyczny macierzy

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix},$$

oraz

$$A_3 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

przy założeniu, że rząd, wyznacznik, ślad i wielomian charakterystyczny macierzy A i B są dane.

(2.2) Rozpatrzmy macierz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pokazać, że wartości własne tej macierzy to $-1, 0, 1$. Znaleźć wektory własne i macierz podobieństwa do macierzy diagonalej. Czy macierz A jest normalna?

(2.3) Wykazać, że jeśli A i B są odwracalnymi macierzami tego samego wymiaru i takimi, że macierz $A + B$ jest odwracalna, to macierz $(A^{-1} + B^{-1})$ jest odwracalna i

$$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A + B)^{-1}B = B(A + B)^{-1}A.$$

(2.4) Wykazać, że jeśli A i B są macierzami tego samego rozmiaru, posiadającymi tylko proste wartości własne i ten sam zbiór wektorów własnych, to $AB = BA$. Pokazać, że odwrotna implikacja nie jest prawdziwa.

(2.5) Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 3x + y & = 2 \\ x + (1/3 + 1/100)y & = 4. \end{cases}$$

Natępnie rozważyć przybliżony układ równań

$$\begin{cases} 3x + y & = 2 \\ x + 0,34y & = 4. \end{cases}$$

i rozwiązać go.

Porównać rezulaty. Z czego wynika tak duży błąd?

(2.6) Niech A będzie macierzą kwadratową i niech p będzie zespolonym wielomianem jednej zmiennej

$$p(z) = \sum c_k z^k.$$

Definiujemy $p(A)$ jako $\sum c_k A^k$. Pokazać, że zachodzi następująca równość zbiorów

$$p(\sigma(A)) = \sigma(p(A)),$$

gdzie $\sigma(B)$ oznacza widmo macierzy B.

(2.7) Wykonać następujące eksperymenty numeryczne (w dowolnym programie np. Matlab, Maple, Mathematica albo i nawet Excel - ale bez używania obliczeń symbolicznych.):

a) Wziąć macierz o nietrywialnej strukturze Jordana A i odwracalną macierz S. Natępnie obliczyć $B = S^{-1}AS$ i obliczyć wartości własne B. Zanalizować otrzymane wyniki!

b) Odwrócić różnymi metodami macierz

$$A = ((i+j)^{-1})_{i,j=1}^{5},$$

a następnie obliczyć AA^{-1}.

3. Eliminacja Gaussa

(3.1) Rozwiązać metodą eliminacji Gaussa układ równań $Ax = b$, gdzie

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(3.2) Dana jest macierz

$$A = \begin{pmatrix} 2+\alpha & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2+\alpha & -1 & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & -1 & 2+\alpha & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2+\alpha \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}),$$

gdzie $\alpha > 0$. Wykazać, że układ $Ax = b$ można sprowadzić metodą Gaussa (bez dzielenia) do postaci $Cx = d$, gdzie

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & -c_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & -c_1 & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & 0 & c_{n-1} & -c_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & c_n \end{pmatrix}, \qquad d = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}.$$

Wskazówka: Uzasadnić, że $c_0 = 1$, $c_1 = 2+\alpha$, $c_{k+1} = (2+\alpha)c_k - c_{k-1}$ dla $k = 1, \dots, n-1$. Podać wzory na współczynniki d_k.

(3.3) Rozwiązać metodą eliminacji Gaussa układ równań $Ax = b$, gdzie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 17 \end{pmatrix}$$

(3.4) Udowodnij, że iloczyn macierzy trójkątnych dolnych/górnych jest macierzą trójkątną dolną/górną.

(3.5) Pokazać, że jeśli weźmiemy dowolną odwracalną macierz A i utworzymy macierz

$$[A|I] := \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right]$$

to stosując metodę eliminacji Gaussa otrzymamy macierz $[I|A^{-1}]$. Obliczyć w ten sposób macierz odwrotną do

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(3.6) Stosując eliminację Gaussa policz macierz odwrotną poniższych macierzy

(3.6.1) $\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, (3.6.2) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$, (3.6.3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$.

(3.7) Stosując metodę eliminacji Gaussa rozwiąż nad ciałem liczb rzeczywistych poniższe układy równań:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 9 \\ x_1 - 10x_2 - 4x_3 = 15 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$$

(3.8) Rozwiąż poniższe układy równań liniowych stosując rozkład LU:

(3.8.1) $2x_1 - x_2 - x_3 = 4,\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11,\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11;$

(3.8.2) $x_1 + x_2 + 2x_3 = -1,\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4,\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2.$

(3.9) Uzasadnić, że (a) w metodzie eliminacji Gaussa wykonuje się rzędu $\frac{n^3}{3}$ operacji, natomiast (b) obliczenie wyznacznika macierzy $n \times n$ bezpośrednio z definicji wymaga $n!(n-1)$ operacji. (c) Porównać ilość operacji potrzebnych do rozwiązania układu równań liniowych $Ax = b$, gdzie $A \in M_n(\mathbb{R})$ jest macierzą nieosobliwą, za pomocą metody eliminacji Gaussa oraz metodą wyznaczników (wzory Cramera).

(3.10) Pokazać, że jeśli weźmiemy dowolną odwracalną macierz A i utworzymy macierz (A, I), to stosując metodę eliminacji Gaussa otrzymamy macierz (I, A^{-1}). Obliczyć w ten sposób odwrotność

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2. \end{pmatrix}$$

(3.11) Rozwiązać metodą eliminacji Gaussa układ równań $Ax = b$, gdzie

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(3.12) Dana jest macierz

$$A = \begin{pmatrix} 2+\alpha & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2+\alpha & -1 & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & -1 & 2+\alpha & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2+\alpha \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}),$$

gdzie $\alpha > 0$. Wykazać, że układ $Ax = b$ można sprowadzić metodą Gaussa (bez dzielenia) do postaci $Cx = d$, gdzie

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & -c_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & -c_1 & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & 0 & c_{n-1} & -c_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & c_n \end{pmatrix}, \qquad d = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}.$$

Wskazówka: Uzasadnić, że $c_0 = 1$, $c_1 = 2 + \alpha$, $c_{k+1} = (2 + \alpha)c_k - c_{k-1}$ dla $k = 1, \dots, n - 1$. Podać wzory na współczynniki d_k.

4. Rozkłady LU, Cholesky'ego i QR

(4.1) Dana jest macierz trójkątna górna U.

(4.1.1) Wyznaczyć ogólne wzory na rozwiązanie układu $Ux = b$. Oszacować ilość wykonywanych operacji.

(4.1.2) Znaleźć rozwiązanie układu $Ux = b$, w przypadku gdy

$$U = \begin{pmatrix} 1 & a & a & \dots & a \\ 0 & 1 & a & \dots & a \\ 0 & 0 & 1 & \dots & a \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(4.1.3) Oszacować współczynniki x_i rozwiązania układu $Ux = e_n$, jeśli $u_{ii} = 1$ oraz $|u_{ij}| \leqslant 1$.

(4.2) W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ definiujemy następujące normy:

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|, \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}.$$

(4.2.1) Uzasadnić, że powyższe normy są parami równoważne i dla każdej pary norm znaleźć optymalne stałe $m, M > 0$, takie że zachodzą nierówności

$$m\|x\|_a \leqslant \|x\|_b \leqslant M\|x\|_a, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ a, b \in \{1, 2, \infty\}.$$

(4.2.2) Dla ustalonej normy $\|.\|_a$ (tutaj $a = 1, 2, \infty$) definiujemy normę macierzową (indukowaną przez $\|.\|_a$) za pomocą wzoru

$$\|A\|_a := \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_a}{\|x\|_a} = \max_{\|x\|_a=1} \|Ax\|_a, \quad A \in M_n(\mathbb{R}).$$

Wykazać, że

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \quad \|A\|_1 = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \quad \|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)},$$

gdzie A^T oznacza transpozycję macierzy A, natomiast $\lambda_{max}(B)$ oznacza największą wartość własną macierzy B.

(4.2.3) Obliczyć normy macierzowe macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4.3) Dana jest macierz $A \in M_n(\mathbb{R})$, jej wiersze oznaczamy przez $W_1, W_2, \dots, W_n$.

(4.3.1) Wypisać macierz L_k zamiany k-tego wiersza W_k macierzy A na kombinację liniową $W_1 + \alpha W_k$ ($\alpha \neq 0$). Znaleźć macierz odwrotną.

(4.3.2) Metodą eliminacji Gaussa, znaleźć rozkład **LU** macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & -10 \end{pmatrix}.$$

(4.3.3) Zapoznać się z innymi metodami rozkładu **LU** macierzy A.

(4.4) Wygenerować losowo dużą macierz i znaleźć jej rozkład LU. Z pomocą tego rozkładu obliczyć wyznacznik.

(4.5) Dana jest macierz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Znaleźć rozkład **LU** macierzy A, stosując metodę eliminacji Gaussa oraz metodę Crouta.
(b) Sprawdzić, czy iloczyn **LU** daje A.
(c) Porównać ilość operacji potrzebnych w obu metodach.

(d) Zastosować rozkład do rozwiązania układu $Ax = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(e) Z rozkładu **LU** wyznaczyć $\det A$.

(4.6) Rozkład Cholesky'ego.

(a) Opisać algorytm znajdowania rozkładu $A = LL^T$ macierzy symetrycznej, dodatnio określonej (*rozkład Cholesky'ego*).
(b) Sprawdzić, że macierz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

jest dodatnio określona.
(c) Znaleźć jej rozkład Cholesky'ego.

(4.7) Przekształć w układ ortonormalny wektory $x_1 = (2,0,0)$, $x_2 = (2,1,3)$, $x_3 = (2,1,1)$.

(4.8) Wykazać, że przekształcenie Householdera $H = I - 2vv^T$, gdzie v jest wektorem jednostkowym ($\|v\|_2 = 1$) jest przekształceniem ortogonalnym. Omówić metodę Householdera rozkładu QR na przykładzie macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Wykorzystując ten rozkład proszę rozwiązać równanie $Ax = (3, 2, -3)^T$.

(4.9) Wykonać rozkład QR metodą odbić Householdera macierzy

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

(4.10) Niech

$$\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \|x\|_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Wskaż jak dobrać c i s tak, by macierz $\left[\begin{smallmatrix} c & s \\ -s & c \end{smallmatrix}\right]$ była ortogonalna i przekształcała $x = (x_1, x_2)^T$ w zadany wyżej sposób.

(4.11) Korzystając z rozwiązania poprzedniego zadania (tzw. *metody obrotów Givensa*) zrób dekompozycję macierzy

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

na iloczyn macierzy QR, gdzie Q jest macierzą ortogonalną zaś R trójkątną górną.

(4.12) Znajdź rozkład QR macierzy dowolna metodą:

(4.12.1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, (4.12.3) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, (4.12.5) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & -5 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 1 \\ 6 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

(4.12.2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, (4.12.4) $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$,

(4.13) a) Znaleźć rozkład QR macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

za pomocą zmodyfikowanej ortogonalizacji Gramma-Schmidta.

b) Znaleźć wektor x_0 minimalizujący $\|Ax - b\|$, gdzie $b = (1, 0, 0, 0)^T$. Należy wykorzystać twierdzenie mówiące, że taki x_0 istnieje i jest jednoznacznie wyznaczony jeśli macierz $A^\top A$ jest nieosobliwa, ponadto x_0 jest jedynym rozwiązaniem układu $A^\top Ax = b$.

c) Niech eps będzie tak małe, że $\text{eps}^2 = 0$ (np. $\text{eps} = 10^{-4}$ a pracujemy w arytmetyce zmiennoprzecinkowej o 5 cyfrach mantysy). Co się wtedy dzieje z macierzą $A^\top A$?

d) Niech $D = Q^T Q$. Pokazać, że $x_0 = D^{-1}Q^T b$. Wykorzystać ten wzór do obliczenia rozwiązania układu równań z punktu b) przyjmując, że $\varepsilon^2 = 0$.

(4.14) Wykazać, że przekształcenie Householdera $H = I - 2ww^T$, gdzie w jest wektorem jednostkowym ($\|w\|_2 = 1$) jest przekształceniem ortogonalnym. Omówić metodę Householdera rozkładu QR na przykładzie macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wykorzystując ten rozkład rozwiązać równanie $Ax = (3,\ 2,\ -3)^T$.

5. Metody iteracyjne

(5.1) Niech $\|.\|_a$ oznacza normę wektorową w $\mathbb{R}^n$ oraz indukowaną przez nią normę macierzową (np. $a = 1, 2, \infty$). Dla nieosobliwej macierzy A definujemy wskaźnik uwarunkowania $\text{cond}_a(A) := \|A\|_a \cdot \|A^{-1}\|_a$.

(5.1.1) Wykazać, że jeśli $\|.\|_a$ oraz $\|.\|_b$ są równoważnymi normami wektorowymi, to istnieją $\alpha, \beta > 0$ takie, że

$$\alpha \cdot \text{cond}_a(A) \leqslant \text{cond}_b(A) \leqslant \beta \cdot \text{cond}_a(A).$$

Ile wynosi α i β, jeśli $a = 1$, $b = 2$?

(5.1.2) Niech $a \in (0, 1)$. Obliczyć wskaźniki uwarunkowania dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & a \\ a & a-1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

korzystając z normy $\|.\|_1$. Dla jakich a macierze stają się źle uwarunkowane?

(5.2) Dany jest układ równań $Ax = b$, gdzie

$$A = \begin{pmatrix} 0.78 & 0.563 \\ 0.913 & 0.659 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0.217 \\ 0.254 \end{pmatrix}.$$

(5.2.1) Obliczyć wartość residuum $r(\tilde{x}) = b - A\tilde{x}$ dla przybliżonych rozwiązań: $x_1 = (0.999, -1.001)^T$ oraz $x_2 = (0.341, -0.087)^T$. Porównać dokładność rozwiązania z wartością residuum.
(5.2.2) Wyznaczyć wskaźnik uwarunkowania macierzy A w normie $\|.\|_1$.
(5.2.3) Wyrazić wektor $\Delta x = \tilde{x} - x$ w zależności od residuum i wyjaśnić wyniki otrzymane w punkcie (a).

Metodę iteracyjną postaci

$$(*) \qquad x^{(0)} \text{ dane}, \quad x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f \quad \text{dla} \quad k \geqslant 0$$

nazywamy *odpowiednią (ang. consistent)* dla problemu $Ax = b$, jeśli $x = Bx + f$ lub równoważnie $f = (I - B)A^{-1}b$. Metodę $(*)$ nazywamy *zbieżną*, jeśli rozwiązania przybliżone $x^{(k)}$ są zbieżne do rozwiązania problemu $Ax = b$ lub równoważnie, jeśli promien spektralny macierzy B jest mniejszy od jeden.

(5.3) Opisać metodę Jacobiego i jej zastosowanie do macierzy

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 4 \end{pmatrix}$$

Dla jakich wartości parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ metoda ta jest zbieżna?

(5.4) Aby rozwiązać układ równań $Ax = b$, gdzie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

stosujemy metodę iteracyjną

$$x^{(k+1)} = B(\theta)x^{(k)} + g(\theta), \quad k \geqslant 0,$$

gdzie θ jest parametrem rzeczywistym, $x^{(0)}$ jest dane oraz

$$B(\theta) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2\theta^2 + 2\theta + 1 & -2\theta^2 + 2\theta + 1 \\ -2\theta^2 + 2\theta + 1 & 2\theta^2 + 2\theta + 1 \end{pmatrix}, \quad g(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \theta \\ \frac{1}{2} - \theta \end{pmatrix}.$$

(5.4.1) Sprawdzić, że powyższa metoda jest odpowiednia dla wyjściowego problemu dla wszystkich $\theta \in \mathbb{R}$.
(5.4.2) Określić, dla jakich parametrów θ metoda jest zbieżna.
(5.4.3) Znaleźć optymalne θ, dla którego zbieżność jest najszybsza ($\rho(B)$ najmniejsze).

(5.5) Dana jest macierz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

i niech $M = \operatorname{diag}(2, \dots, 2)$ i $N = \operatorname{tridiag}(1, 0, 1)$.

(5.5.1) Wykazać, że macierz A jest dodatnio określona.

(5.5.2) Uzasadnić, że metoda Gaussa-Seidla jest zbieżna.

(5.5.3) Opisać algorytm pozwalający obliczać $x^{(k)}$. Uwzględnić kryterium stopu.

(5.5.4) Zastosować algorytm do obliczenia pierwszych sześciu przybliżeń rozwiązania równania

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

startując od $x^{(0)} = (0, 0, 0, 0)^T$.

(5.6) Dana jest macierz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Wykazać, że macierz A jest dodatnio określona. Uzasadnić, że metoda Jacobiego zastosowana do tej macierzy jest zbieżna.

(5.7) Rozwiązać poniższy układ metoda Jacobiego. Obliczyć kolejne trzy przybliżenia rozwiązania.

$$\text{(5.7.1)} \begin{cases} 4x_1 - x_2 = 2 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = 6 \\ -x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases} \qquad \text{(5.7.2)} \begin{cases} 4x_1 - x_2 - 0.2x_3 + 2x_4 = 30 \\ -x_1 + 5x_2 - 2x_4 = 0 \\ 0.2x_1 + x_2 + 10x_3 - x_4 = -10 \\ -2x_2 - x_3 + 4x_4 = 5 \end{cases}.$$

(5.8) Rozwiązać poniższy układ metodą Gaussa-Seidla. Przyjmując za przybliżenie początkowe wektor $x_0 = (3, -1.7, -5)^T$ podać trzy kolejne przybliżenia rozwiązania

$$\begin{cases} 4x_1 - x_3 - x_4 = 3 \\ 4x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 = 7 \\ -x_1 - x_2 + 4x_4 = -5 \end{cases}.$$

Zrób to samo z układem

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 6x_2 + x_3 = 9 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases},$$

przyjmując za przybliżenie początkowe wektor $x_0 = (0,0,0)^T$.

(5.9) Rozważamy metodę iteracyjną

$$x_{k+1} = (I - A)x_k + b, \quad k \geqslant 1.$$

Proszę udowodnić, że jeśli macierz $A = [a_{ij}]_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ jest (silnie) diagonalnie dominująca i ma jedynki na przekątnej, tzn. spełnia nierówności $a_{ii} = 1 > \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$, $1 \leqslant i \leqslant n$, to metoda jest zbieżna.

6. Wartości własne

(6.1) Liczenie wartości własnych macierzy jako pierwiastów wielomianu charakterystycznego może być niestabilne numerycznie.

Rozważamy macierz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \in M(2 \times 2).$$

(6.1.1) Znaleźć współczynniki c_0, c_1 wielomianu charakterystycznego macierzy $p_A(x) = x^2 + c_1 x + c_0$.

(6.1.2) Obliczyć współczynniki c_0, c_1 w arytmetyce dzisiętnej zmiennopozycyjnej o ośmiu cyfrach mantysy, gdy $\alpha = \gamma = 1$ oraz $\beta = 7 \cdot 10^{-5}$.

(6.1.3) W tej samej arytmetyce obliczyć λ_1 i λ_2 jako zera wyznaczonego trójmianu. Porównać wyniki z wartościami dokładnymi $\lambda^*_{max} = 1.00007$, $\lambda^*_{min} = 0.99993$.

(6.1.4) Mamy dany następujący algorytm (V):
$\xi := \alpha + \gamma$, $\delta := \alpha\gamma - \beta^2$, $\omega := \sqrt{(\alpha - \gamma)^2 + 4\beta^2}$
if $\xi = 0$ **then** $[\lambda_{max} := \frac{\omega}{2}$, $\lambda_{min} := -\lambda_{max}]$
else $[\lambda_{max:} = \operatorname{sgn}(\xi)\frac{|\xi|+\omega}{2}$, $\lambda_{min} := \frac{\delta}{\lambda_{max}}]$
Wykazać, że algorytm (V) w realizacji dokładnej wyznacza wartości własne macierzy A, przy czym $|\lambda_{max}| \geqslant |\lambda_{min}|$.

(6.1.5) Obliczyć λ_1 i λ_2 przy tych samych danych, co w punkcie (b), stosując algorytm (V).

(6.2) Korzystając z tego twierdzenia (i innych znanych faktów), zlokalizować widmo macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(6.3) Niech A będzie macierzą diagonalną $A = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ oraz $\tilde{A} = A + E$, gdzie $e_{ii} = 0$ dla $i = 1, \ldots, n$. Wykazać, że jeśli $\lambda \in \sigma(\tilde{A})$, to istnieje takie k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ że zachodzi oszacowanie

$$|a_k - \lambda| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |e_{kj}|.$$

(6.4) Dane są macierze

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}.$$

Obliczyć wartości własne macierzy A oraz macierzy $A + E$. Porównać wyniki z oszacowaniem w punkcie (b).

(6.5) Wylosować dużą macierz (co najmniej 100 na 100) i spróbować wyznaczyć jej widmo poznanymi metodami. Macierz może mieć pewną strukturę, na przykład tylko 3 niezerowe diagonale, macierz symetryczna, itd. Proszę nie używać wbudowanej komendy `eig(A)` w Matlabie, choć dobrze jest porównać swoje wyniki z wartościami zwracanymi przez tą funkcję.

(6.6) Dana jest macierz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Wykazać, że macierz A jest dodatnio określona.
(b) Uzasadnić, że metoda Jacobiego zastosowana do tej macierzy jest zbieżna.
(c) Zilustrować tę metodę obliczając pierwszych sześć przybliżeń rozwiązania równania

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

startując od $x^{(0)} = (0, 0, 0, 0)^T$.

(6.7) Rozważamy metodę iteracyjną

$$x^{(k+1)} = (I - A)x^{(k)} + b, \quad k \geqslant 1.$$

Udowodnić, że jeśli macierz A jest (silnie) diagonalnie dominująca i ma jedynki na diagonali, tzn. spełnia nierówności

$$a_{ii} = 1 > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

to metoda jest zbieżna.

(6.8) Opisać algorytm wyznaczania największej co do modułu wartości własnej macierzy metodą potęgową. Zastosować metodę do macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

startując od wektora $x = (1, 0, 0)^T$.

(6.9) Proszę opisać algorytm wyznaczania największej co do modułu wartości własnej macierzy metodą potęgową. Zastosować tą metodę do macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

startując od wektora $x_0 = (1, 0, 0)^T$.

(6.10) Dana jest macierz $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$. Kołami Gershgorina macierzy A nazywamy zbiory $D_i := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - a_{ii}| \leqslant \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|\}$. Proszę wykazać, że

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ A - \lambda I \text{ jest osobliwa}\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i.$$

(6.11) Zlokalizować $\sigma(A)$ widmo macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

(6.12) Niech A będzie macierzą diagonalną $A = diag(a_1, \ldots, a_n)$ oraz $\tilde{A} = A + E$, gdzie $e_{ii} = 0$ dla $i = 1, \ldots, n$. Wykazać, że jeśli $\lambda \in \sigma(A)$, to istnieje takie k $(1 \leqslant k \leqslant n)$, że zachodzi oszacowanie

$$|a_k - \lambda| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |e_{kj}|.$$

(6.13) Dane są macierze

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix}.$$

Proszę obliczyć wartości własne macierzy A oraz macierzy $A + E$. Porównaj wyniki z oszacowaniem w punkcie (6.12).

(6.14) Zlokalizuj wartości własne poniższej macierzy stosując twierdzenie Gerszgorina

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(6.15) Dana jest macierz:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć przybliżoną wartość własną wykonując 2 kroki iteracji metodą potęgową dla macierzy A i A^{-1}. Przyjąć wektor startowy $x_0 = (0, 1, 0)^T$.

7. Równanie normalne, rozkład SVD

(7.1) Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-3} & 0 \\ 0 & 10^{-3} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 10^{-3} \\ 10^{-3} \end{bmatrix}.$$

a) Rozwiązać zadanie minimalizacji

$$\min_x \|Ax - b\|_2^2.$$

b) Pokazać, że w obliczona w arytmetyce o 6 cyfrach mantysy macierz A^*A jest nieodwracalna.

c) Rozwiązać równanie normalne w arytmetyce o 7 cyfrach mantysy, porównać z rozwiązaniem z punktu a.

d) Rozwiązać problem minimalizacji w arytmetyce o 7 cyfrach mantysy za pomocą rozkładu QR.

(7.2) Pokazać, że istnieje rozkład SVD macierzy wymiaru $n \times 1$ i $1 \times n$ (krok pierwszy dowodu indukcyjnego istnienia rozkładu SVD).

(7.3) Obliczyć rozkład SVD macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-3} & 0 \\ 0 & 10^{-3} \end{bmatrix}.$$

(7.4) Obliczyć wartości własne i singularne macierzy $A + \varepsilon e_n e_1^*$ gdzie A jest blokiem Jordana rozmiaru n o wartości własnej zero (w wersji z jedynkami nad przekątną).

8. Numeryczne wyznaczanie zer

(8.1) Stosując metodę połowienia (bisekcji) wyznaczyć pierwiastek równania $f(x) = x^3 - x + 1$ w przedziale $[-2, 2]$.

(8.2) Znaleźć rozwiązanie równania $x^2 - 1 = 0$ w przedziale $[-1.3, -0.5]$ metodą bisekcji zakładając wielkość błędu równą 0.25.

(8.3) Za pomocą metody Newtona proszę obliczyć pierwiastek $\sqrt{2}$.

(8.4) Rozwiąż podane równanie nieliniowe $x^2 - 1 = 0$ metodą stycznych przyjmując punkt startowy $x_0 = -0.9$ i wielkość błędu równą 0.25.

9. Interpolacja

(9.1) Wyznaczyć wielomian P stopnia 3 dla którego zachodzą warunki: $P(1) = 3, P(\frac{3}{2}) = 1, P(2) = 0, P(3) = 2$. Zapisać P przy pomocy wzoru interpolacyjnego Lagrange'a oraz wzoru interpolacyjnego Newtona.

(9.2) Niech $x_0, \ldots, x_n$ będą różnymi liczbami rzeczywistymi oraz niech $L_0(x), \ldots, L_n(x)$ będą wielomianami stopnia n takimi, że $L_i(x_k) = \delta_{i,k}$ dla $i, k = 0, 1, \ldots, n$. Obliczyć $\sum_{i=0}^{n} L_i(0) x_i^j$ dla $j = 0, 1, \ldots, n+1$.

(9.3) Niech $x_0, x_1, \ldots, x_m$ będą różnymi liczbami rzeczywistymi. Pokazać, że $f[x_0, x_1, \ldots, x_m] = \sum_{i=0}^{m} \frac{f(x_i)}{\Phi'(x_i)}$, gdzie $\Phi(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_m)$.

(9.4) Funkcję $ln(x)$ interpolujemy wielomianem drugiego stopnia w węzłach $10, 11, 12$. Oszacować błąd interpolacji w punkcie 11.1.

(9.5) Niech $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ będzie funkcją klasy $\mathcal{C}^\infty$ taką, że dla pewnej stałej $M > 0$ oraz dla każdego $x \in [a, b]$ oraz $i \in \mathbf{N}$ zachodzi $|f^{(i)}(x)| < M$. Ponadto niech, dla każdego $n \in \mathbf{N}$, A_n będzie $(n+1)$-elementowym podzbiorem $[a, b]$, a P_n wielomianem stopnia n takim, że $P_n|_{A_n} = f|_{A_n}$. Czy ciąg $\{P_n\}$ jest zbieżny jednostajnie do f na $[a, b]$?

(9.6) Dana jest funkcja

$$I(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t) dt.$$

Niech $P_n(x)$ będzie wielomianem stopnia n interpolującym funkcję I w $n + 1$ równoodległych węzłach na przedziale $[0, 1]$. Czy ciąg $\{P_n\}$ jest zbieżny jednostajnie do I na przedziale $[0, 1]$?

(9.7) Wyznaczyć wielomian $Q(x)$ stopnia co najwyżej czwartego taki, że $Q(0) = Q'(0) = 0$, $\quad Q(1) = Q'(1) = 1$, $\quad Q(2) = 1$.

(9.8) Wyznaczyć wielomian $P(x)$ stopnia co najwyżej czwartego taki, że $P(-2) = 3$, $P(-1) = 3$, $P'(-1) = -2$, $P''(-1) = 2$ oraz $P(1) = 3$.

(9.9) Funkcję $f \in \mathcal{C}^{n+1}([-1, 1])$ interpolujemy w węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [-1, 1]$ wielomianem P_n stopnia n. Wtedy $\sup_{x \in [-1,1]} |P_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha$, gdzie

$$\alpha = \frac{\max_{z \in [-1,1]} |f^{(n+1)}(z)| \max_{x \in [-1,1]} |(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)|}{(n+1)!}.$$

W jaki sposób należy wybrać węzły, żeby α było najmniejsze? Wykonać odpowiednie rachunki (obliczyć również α) dla $n = 2$ oraz $f(x) = \frac{1}{x+3}$.

(9.10) Pokazać, że dla $n + 1$ węzłów $0 \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_n < \pi$ oraz wartości $y_0, \ldots, y_n$ istnieje dokładnie jeden wielomian trygonometryczny

$$C(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \cos(jx)$$

taki, że $C(x_k) = y_k$. Czy teza twierdzenia pozostaje prawdziwa jeśli węzły wybieramy z przedziału $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$?

(9.11) Wyznaczyć wielomian P stopnia 3 dla którego zachodzą warunki: $P(1) = 3, P(\frac{3}{2}) = 1, P(2) = 0, P(3) = 2$. Zapisać P przy pomocy wzoru interpolacyjnego Lagrange'a oraz wzoru interpolacyjnego Newtona.

(9.12) Niech $x_0, \ldots, x_n$ będą różnymi liczbami rzeczywistymi oraz niech $L_0(x), \ldots, L_n(x)$ będą wielomianami stopnia n takimi, że $L_i(x_k) = \delta_{i,k}$ dla $i, k = 0, 1, \ldots, n$. Obliczyć $\sum_{i=0}^{n} L_i(0)x_i^j$ dla $j = 0, 1, \ldots, n+1$.

(9.13) Niech $x_0, x_1, \ldots, x_m$ będą różnymi liczbami rzeczywistymi. Pokazać, że $f[x_0, x_1, \ldots, x_m] = \sum_{i=0}^{m} \frac{f(x_i)}{\Phi'(x_i)}$, gdzie $\Phi(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_m)$.

(9.14) Funkcję $ln(x)$ interpolujemy wielomianem drugiego stopnia w węzłach $10, 11, 12$. Oszacować błąd interpolacji w punkcie 11.1.

(9.15) Niech $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ będzie funkcją klasy $\mathcal{C}^\infty$ taką, że dla pewnej stałej $M > 0$ oraz dla każdego $x \in [a, b]$ oraz $i \in \mathbf{N}$ zachodzi $|f^{(i)}(x)| < M$. Ponadto niech, dla każdego $n \in \mathbf{N}$, A_n będzie $(n+1)$-elementowym podzbiorem $[a, b]$, a P_n wielomianem stopnia n takim, że $P_n|_{A_n} = f|_{A_n}$. Czy ciąg $\{P_n\}$ jest zbieżny jednostajnie do f na $[a, b]$?

(9.16) Dana jest funkcja

$$I(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x \sin t)dt.$$

Niech $P_n(x)$ będzie wielomianem stopnia n interpolującym funkcję I w $n+1$ równoodległych węzłach na przedziale $[0, 1]$. Czy ciąg $\{P_n\}$ jest zbieżny jednostajnie do I na przedziale $[0, 1]$?

(9.17) Wyznaczyć wielomian $Q(x)$ stopnia co najwyżej czwartego taki, że $Q(0) = Q'(0) = 0, \quad Q(1) = Q'(1) = 1, \quad Q(2) = 1$.

(9.18) Wyznaczyć wielomian $P(x)$ stopnia co najwyżej czwartego taki, że $P(-2) = 3$, $P(-1) = 3$, $P'(-1) = -2$, $P''(-1) = 2$ oraz $P(1) = 3$.

(9.19) Funkcję $f \in \mathcal{C}^{n+1}([-1, 1])$ interpolujemy w węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [-1, 1]$ wielomianem P_n stopnia n. Wtedy $\sup_{x\in[-1,1]} |P_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha$, gdzie

$$\alpha = \frac{\max_{z\in[-1,1]} |f^{(n+1)}(z)| \max_{x\in[-1,1]} |(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)|}{(n+1)!}.$$

W jaki sposób należy wybrać węzły, żeby α było najmniejsze? Wykonać odpowiednie rachunki (obliczyć również α) dla $n = 2$ oraz $f(x) = \frac{1}{x+3}$.

(9.20) Pokazać, że dla $n+1$ węzłów $0 \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_n < \pi$ oraz wartości $y_0, \ldots, y_n$ istnieje dokładnie jeden wielomian trygonometryczny

$$C(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \cos(jx)$$

taki, że $C(x_k) = y_k$. Czy teza twierdzenia pozostaje prawdziwa jeśli węzły wybieramy z przedziału $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$?

(9.21) Przeprowadzić następujący eksperyment. Wybrać funkcję na odcinku [0,1]. Następnie 1000 razy wybieramy losowo 5 różnych punktów na [0,1] jako węzły interpolacji. Wyznaczyć, która z interpolacji (tzn. który wybór punktów) była najlepsza. Czy jest to zgodne z teorią?

(9.22) Znaleźć wielomian Lagrange'a $L_1^3(x)$, $L_0^3(x)$, $L_3^3(x)$ dla podanych węzłów: $(-2, 3)$, $(0, -1)$, $(1, 1)$, $(2, 5)$.

(9.23) Znaleźć wielomian interpolacyjny Lagrange'a dla funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ dla $x_0 = 2$, $x_1 = 2.5$, $x_2 = 4$.

(9.24) Obliczyć za pomocą interpolacji Lagrange'a następujące wartości danych funkcji:
a) $f(x) = \sqrt{x}$ dla $x = 7$,
b) $f(x) = \frac{16}{x^2}$ dla $x = 5$,
c) $f(x) = \log_{10} x$ dla $x = 30$.

(9.25) Wyznaczyć wielomiany interpolacyjne Lagrange'a stopnia $1, 2, 3, 4$ i obliczyć $f(2.5)$ jeśli: $f(2) = 0.5104$, $f(2.2) = 0.5208$, $f(2.4) = 0.5104$, $f(2.6) = 0.4813$, $f(2.8) = 0.4359$.

(9.26) Obliczyć ilorazy różnicowe dla funkcji, której wartości są następujące: $f(1) = 1$, $f(2) = -1$, $f(4) = 3$, $f(5) = 2$.

(9.27) Znaleźć wielomian interpolacyjny Newtona mając dane węzły: $(-1, -4)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(2, 5)$.

(9.28) Przedstaw wielomiany w postaci Newtona:
a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 6$ dla $x = 1, 2, 3$,
b) $f(x) = 3x^2 - 9x + 8$ dla trzech dowolnie wybranych punktów,
c) $f(x) = x^3 - 2x + 8$ dla czterech dowolnie wybranych punktów.

(9.29) Proszę wyznaczyć wielomian P stopnia 3 dla którego zachodzą następujące warunki: $P(1) = 3$, $P(\frac{3}{2}) = 1$, $P(2) = 0$, $P(3) = 2$. Zapisz P przy pomocy wzoru interpolacyjnego Lagrange'a oraz wzoru interpolacyjnego Newtona.

(9.30) Niech $x_0, \ldots, x_n$ będą różnymi liczbami rzeczywistymi oraz niech $L_0(x), \ldots, L_n(x)$ będą wielomianami stopnia n takimi, że $L_i(x_k) = \delta_{ik}$ dla $i, k = 0, 1, \ldots, n$. Obliczyć $\sum\limits_{i=0}^{n} L_i(0) x_i^j$ dla $j = 0, 1, \ldots, n + 1$.

(9.31) Niech $f\colon [a, b] \to \mathrm{R}$ będzie funkcją klasy $\mathcal{C}^\infty$ taką, że dla pewnej stałej $M > 0$ oraz dla każdego $x \in [a, b]$ oraz $i \in \mathrm{N}$ zachodzi $|f^{(i)}(x)| < M$. Ponadto niech, dla każdego $n \in \mathrm{N}$, A_n będzie $(n + 1)$-elementowym podzbiorem $[a, b]$, a P_n wielomianem stopnia n takim, że $P_n|_{A_n} = f|_{A_n}$. Czy ciąg $\{P_n\}$ jest zbieżny jednostajnie do f na $[a, b]$?

(9.32) Niech $x_0, \ldots, x_n$ będą różnymi liczbami rzeczywistymi. Pokazać, że $f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\Phi'(x_i)}$, gdzie $\Phi(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$.

(9.33) Znajdź wielomian interpolacyjny Hermite'a, wiedząc, że:
a) $f(2) = 1$, $f'(2) = 2$, $f''(2) = 0$, $f(3) = 1$, $f'(3) = 2$;
b) $f(2) = 1$, $f(4) = 1$, $f'(4) = 1$, $f''(4) = 1$.

(9.34) Oszacuj błąd powstały przy interpolacji Lagrange'a przy:
a) obliczaniu $f(x) = \sqrt{7}$ przy węzłach w punkach $1, 4$ i 9;
b) obliczaniu $f(x) = \sin \dfrac{\pi}{36}$ znając wartości $\sin 0, \sin \dfrac{\pi}{6}, \sin \dfrac{\pi}{4}, \sin \dfrac{\pi}{3}$.

(9.35) Dla funkcji $f(x) = 3xe^x - e^{2x}$ obliczyć $f(1.03)$ za pomocą wzorów interpolacyjnych Hermite'a stopnia 3, przyjmując punkty węzłowe $x_0 = 1$ i $x_1 = 1.05$. Oszacuj błąd interpolacyjny.

(9.36) Znaleźć wielomian interpolujący (trygonometryczny) funkcję daną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in [0, \pi] \\ 2\pi - x & \text{dla } x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

w węzłach $x_0 = 0$, $x_1 = \dfrac{\pi}{2}$, $x_2 = \pi$, $x_3 = \dfrac{3\pi}{2}$.

(9.37) Wyznacz funkcję sklejaną stopnia 2, która w punktach $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ ma wartości $1, 9, 2, 0$.

(9.38) Dla tych samych danych z poprzedniego zadania wyznacz funkcję sklejaną stopnia 3.

(9.39) Pokazać, że dla $n + 1$ węzłów $0 \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_n < \pi$ oraz wartości $y_0, \ldots, y_n$ istnieje dokładnie jeden wielomian trygonometryczny

$$W(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \cos(jx)$$

taki, że $W(x_k) = y_k$. Czy teza twierdzenia pozostaje prawdziwa jeśli węzły wybieramy z przedziału $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$?

10. Aproksymacja

(10.1) Wyznaczyć rodziny wielomianów ortogonalnych związanych z następującymi funkcjami wagowymi:
(a) $w(x) = (x(1-x))^{-\frac{1}{2}}$, dla $x \in [0, 1]$,
(b) $w(x) = 1$, dla $x \in [0, 1]$.

(10.2) Wyznaczyć wielomiany ortogonalne $\varphi_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, 3)$ ze współczynnikiem wiod"acym 1 dla funkcji wagowej $w(x) = 1 + x^2$ i $x \in [-1, 1]$.

(10.3) Wyznaczyć wielomiany ortogonalne $\varphi_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, 3, 4)$ ze współczynnikiem wiod"acym 1 na zbiorze $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ z wag"a $w_i = 1$ dla $i = -2, -1, 0, 1, 2$.

(10.4) Pokazać, że jeśli $x = \cos(\phi)$ to $U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\phi}{\sin\phi}$ jest wielomianem n-tego stopnia spełniającym wzór rekurencyjny:

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x).$$

Pokazać, że $\{U_n\}$ jest rodziną wielomianów ortogonalnych wzgl"edem funkcji wagowej $w(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, dla $x \in [-1, 1]$.

(10.5) Dla funkcji $f(x) = \pi^2 - x^2$ oraz ustalonej liczby $n \in \mathbf{N}$ wyznaczyć wielomian trygonometryczny $C(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j \cos(jx)$ minimalizujący wartość wyrażenia $\int_0^{\pi} |f(x) - C(x)|^2 dx$.

(10.6) Wyznaczyć wielomian trygonometryczny

$$H(t) = a_0 + a_1 \sin(\frac{2\pi t}{12}) + a_2 \cos(\frac{2\pi t}{12})$$

minimalizujący wartość wyrażenia $\sum_{i=0}^{5} |H(2s) - G(2s)|^2$, jeśli $G(0) = 1$, $G(2) = 1.6$, $G(4) = 1.4$, $G(6) = 0.6$, $G(8) = 0.2$, $G(10) = 0.8$.

(10.7) Niech $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ będzie ciągiem wielomianów zmiennej rzeczywistej o współczynnikach rzeczywistych takich, że φ_n jest wielomianem stopnia n, ortogonalnym względem wszystkich wielomianów niższego stopnia w przedziale $[a,b]$ z ciągłą wagą $w\colon [a,b] \to [0,\infty)$. Niech $U_n \in \mathcal{C}^n([a,b])$ będzie rozwiązaniem równania

$$w(x)\varphi_n(x) = \frac{d^n U_n(x)}{dx^n}.$$

Pokazać, że funkcja U_n spełnia równanie

$$\Big[U_n^{(n-1)}q - U_n^{(n-2)}q' + U_n^{(n-3)}q'' - \ldots + (-1)^{n-1}U_n q^{(n-1)}\Big]_a^b = 0$$

w którym $q(x)$ jest dowolnym wielomianem stopnia co najwyżej $n-1$, a $\Big[F\Big]_a^b := F(b) - F(a)$ dla dowolnej funkcji F na przedziale $[a,b]$.

(10.8) Niech $L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)$ dla $n = 0,1,2,\ldots$. Pokazać, że $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest ciągiem wielomianów ortogonalnych względem funkcji wagowej $w(x) = e^{-x}$, gdzie $x \in [0,\infty)$. Wykazać, że zachodzi związek rekurencyjny

$$L_{n+1} = (2n+1-x)L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x), \quad n \geqslant 1.$$

(10.9) Dla funkcji $f(x) = \sin x$ określonej w przedziale $[0, \frac{\pi}{2}]$ znaleźć wielomian $p \in \Pi_4$ taki, że

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x) - p(x)|^2\, dx = \min_{q\in\Pi_4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x) - q(x)|^2\, dx,$$

gdzie Π_4 jest zbiorem wszystkich wielomianów o współczynnikach rzeczywistych co najwyżej czwartego stopnia,

(10.9.1) rozwiązując odpowiedni układ normalny,

(10.9.2) stosując wielomiany Legendre'a.

(10.10) Napisać program/funkcję która mając daną wagę i stopień wielomianu oblicza odpowiedni wielomian ortogonalny a następnie umieszcza na osi jego miejsca zerowe.

(10.11) Wyznacz funkcję liniową aproksymującą punkty $(1,1)$, $(2,2.5)$, $(3,3.5)$, $(4,4)$. Wyznacz błąd aproksymacji w sensie normy maksimum.

(10.12) Wyznacz parabolę aproksymującą punkty $(0,1.15)$, $(0.2,0.7)$, $(0.4,0.5)$, $(0.6,0.4)$, $(0.8,0.25)$, $(1,0.2)$. Wyznacz błąd aproksymacji w sensie normy maksimum.

(10.13) Dla zestawu danych

x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y_i	1.15	0.7	0.5	0.4	0.25	0.2

znajdź wielomian aproksymacyjny stopnia **a)** pierwszego **b)** drugiego w bazie wielomianów ortogonalnych. Wyznacz błąd aproksymacji w sensie normy maksimum.

(10.14) Wyznacz aproksymację trygonometryczną dla punktów $(0,3)$, $(\frac{\pi}{3},2)$, $(\frac{2\pi}{3},3)$, $(\pi,1)$, $(\frac{4\pi}{3},1)$, $(\frac{5\pi}{3},2)$.

(10.15) Znaleźć wielomian drugiego stopnia najlepiej przybliżający, w sensie metryki średniokwadratowej funkcję $f(x) = \sqrt{x}$ w przedziale $[0,2]$.

(10.16) Wyznaczyć rodziny wielomianów ortogonalnych związanych z następującymi funkcjami wagowymi:

(10.16.1) $w(x) = (x(1-x))^{-\frac{1}{2}}$ dla $x \in [0,1]$, (10.16.2) $w(x) = 1$ dla $x \in [0, 1]$.

(10.17) Wyznaczyć wielomiany ortogonalne $\varphi_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, 3)$ ze współczynnikiem wiodącym 1 dla funkcji wagowej $w(x) = 1 + x^2$ i $x \in [-1, 1]$.

(10.18) Proszę pokazać, że jeśli $x = \cos(\phi)$ to $U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\phi}{\sin\phi}$ jest wielomianem n-tego stopnia spełniającym wzór rekurencyjny:

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x).$$

Pokazać, że $\{U_n\}$ jest rodziną wielomianów ortogonalnych względem funkcji wagowej $w(x) = \sqrt{1 - x^2}$ dla $x \in [-1, 1]$.

(10.19) Niech $L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$. Proszę pokazać, że $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest ciągiem wielomianów ortogonalnych względem funkcji wagowej $w(x) = e^{-x}$, gdzie $x \in [0, \infty)$. Wykazać, że zachodzi związek rekurencyjny:

$$L_{n+1} = (2n + 1 - x)L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x), \; n \geqslant 1.$$

11. Całkowanie numeryczne

(11.1) Obliczyć $\int_0^1 \sqrt{x}dx$ za pomocą metody

- prostokątów z $h = 1/4$
- trapezów z $h = 1/4$
- Newtona-Cotesa z węzłami inerpolacji w punktach 1/8, 3/8, 5/8, 7/8 (najwygodniej posłużyć się tu programem komputerowym do rozwiązania układu równań 4×4, można też ewentualnie zmniejszyć liczbę węzłów do trzech).

Porównać otrzymane wyniki z rzeczywistą wartością $\int_0^1 \sqrt{x}dx$. Który ze sposobów okazał się lepszy, dlaczego?

(11.2) Wykazać, że wzór trapezów dla całkowania w przedziale o długości 2π i dla $h = 2\pi/(n+1)$ jest dokładny dla wszystkich wielomianów trygonometrycznych stopnia n o okresie 2π, tzn. dla funkcji postaci

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}, \qquad c_k \in \mathbb{C}.$$

(11.3) Wyprowadzić dwupunktowy wzór Gaussa dla całki $\int_{-1}^{1} f(x)dx$. Skorzystać z wzajemnie jednoznacznego przekształcenia afinicznego odcinka $[a, b]$ $(a < b)$ na $[-1, 1]$ i wyprowadzić dwupunktowy wzór Gaussa dla całki $\int_a^b f(x)dx$.

(11.4) W oparciu o wielomiany Czebyszewa wyprowadzić $k + 1$–punktowy wzór całkowania dla całek postaci

$$\int_{-1}^{1} f(x)(1 - x^2)^{-1/2}dx,$$

dokładny dla wielomianów stopnia $2k + 1$.

(11.5) Oszacować błąd obcięcia przy obliczaniu całki $\int_{-1}^{1} x^4 \sin x dx$ metodą Newtona-Cotesa z węzłami $-1, -1/2, 0, 1/2, 1$. (Zastosować teorię z [Björck, Dahlquist, rozdział 7.4.6]).

(11.6) (11.6.1) Pokazać, że dla dowolnego $M \geqslant 0$ i dla dowolnego n istnieje funkcja ciągła f na przedziale $[0, 1]$ taka, że błąd obcięcia przy obliczaniu całki $\int_0^1 f(t)dt$ metodą prostokątów z $h = 2^{-k}$ jest większy niż M dla $k = 0, \cdots n$.

(11.6.2) Pokazać, że f w punkcie (a) może być wybrane w klasie wielomianów.

(11.6.3) Czy powyższe zjawisko zachodzi dla również dla metod Newtona-Cotesa i Gaussa?

(11.7) Stosując metodę trapezów oblicz całkę $\int\limits_0^{\pi} \sin x dx$ dzieląc przedział na cztery części.

(11.8) Stosując metodę Simpsona oblicz poniższe całki dzieląc przedział całkowania na N części:

(11.8.1) $\int\limits_0^1 (x^2 + 2x)dx$ dla $N = 4$,

(11.8.2) $\int\limits_1^3 (x^2 - 3x + 5)dx$ dla $N = 3$,

(11.9) Stosując metodę Newtona-Cotesa (przy interpolacji wielomianem 3-go stopnia), obliczyć całkę: $\int\limits_{-1}^{2} (-8x^3 + 4x^2 + 20x + 8)dx$.

(11.10) Wyznacz współczynniki kwadratury, która jest oparta na interpolacji Lagrange'a dla węzłów $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

(11.11) Policz przybliżoną wartość całki funkcji $\int\limits_0^3 \frac{x}{x^2+1} dx$ stosując kwadraturę dla węzłów z poprzedniego zadania.

(11.12) Policz $\int\limits_0^{\pi} \sin x dx$ korzystając z przybliżenia funkcji podcałkowej wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a dla węzłów $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{3}$, $x_2 = \frac{2\pi}{3}$, $x_3 = \pi$. Podaj górne oszacowanie na błąd tej kwadratury.

(11.13) Oblicz $\int\limits_0^1 \sqrt{x} dx$ za pomocą metody:

(11.13.1) prostokątów z $h = \frac{1}{4}$,

(11.13.2) trapezów z $h = \frac{1}{4}$,

(11.13.3) Newtona-Cotesa z węzłami interpolacji w punktach $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$ (najwygodniej posłużyć się tu programem komputerowym do rozwiązania układu równań 4×4, można też ewentualnie zmniejszyć liczbę węzłów do trzech).

Proszę porównać otrzymane wyniki z rzeczywistą wartością $\int\limits_0^1 \sqrt{x} dx$. Który ze sposobów okazał się lepszy, dlaczego?

(11.14) Oblicz współczynniki (węzły i wagi) dla kwadratury Gaussa, gdy $n = 2$.

(11.15) Wyprowadzić dwupunktowy wzór Gaussa dla całki $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$. Skorzystać z wzajemnie jednoznacznego przekształcenia afinicznego odcinka $[a, b]$, gdzie $(a < b)$ na $[-1,1]$ i wyprowadzić dwupunktowy wzór Gaussa dla całki $\int\limits_a^b f(x)dx$.

(11.16) Stosując kwadraturę Gaussa dla dwóch węzłów oblicz całkę $\int\limits_{-1}^{1}(4x^3+5x^2+1)dx$.

(11.17) Oblicz całkę $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin x dx$ stosując kwadraturę Gaussa dla trzech węzłów.

(11.18) W oparciu o wielomiany Czebyszewa wyprowadzić $k+1$-punktowy wzór całkowania dla całek postaci

$$\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx,$$

dokładny dla wielomianów stopnia $2k+1$.