

Zadania 1. W trójkacie ABC punkty O , D i E są odpowiednio: środkiem okręgu opisanego, środkiem boku AB i środkiem ciężkości trójkąta ACD . Udowodnij, że proste CD i OE są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $AB = AC$.

Zadania 2. Wykaż, że złożenie dwóch jednokładności jest jednokładnością lub translacją.

Zadania 3. W czworokącie wypukłym $ABCD$ przekątne AC i BD są do siebie prostopadłe i przecinają się w punkcie E . Obrazami punktu E w symetriach względem prostych AB , BC , CD i DA są odpowiednio punkty P , Q , R , S . Udowodnij, że leżą one na jednym okręgu.

Zadania 4. Środkami boków AB , BC , CA są odpowiednio punkty X , Y , Z ; P jest takim punktem prostej BC , że $\angle CPZ = \angle YXZ$. Udowodnij, że proste AP i BC są prostopadłe.

Zadania 5. Pięciokąt $ABCDE$ jest wpisany w okrąg. Odległości wierzchołka A od prostych BC , CD i DE wynoszą odpowiednio a , b , c . Wyznacz odległość A od przekątnej BE .

Zadania 6. Niech E będzie liczbą krawędzi i T liczbą trójkątów w zwykłym (nieskierowanym) grafie. Udowodnij, że

$$9T^2 \leq 2E^3.$$

Zadania 7. Udowodnij, że nie można obejść konikiem całej szachownicy o wymiarach 8×8 odwiedzając każde pole tylko jeden raz oraz startując z pola w prawym dolnym rogu i kończąc w lewym górnym rogu.

Zadania 8. Dana jest szachownica o parzystych wymiarach. Dwóch graczy na przemian umieszcza na szachownicy kločki o wymiarach 1×2 . Kločki nie mogą na siebie nachodzić. Przegrywa ten, kto pierwszy nie będzie mógł umieścić na szachownicy kločka. Czy istnieje strategia wygrywająca dla któregoś z graczy?

Zadania 9. Na stole leżą dwa stosy cukierków. W pierwszym stosie jest 12, a w drugim 13 cukierków. Dwóch graczy gra w pewną grę wykonując na przemian swoje ruchy. Jeden ruch polega albo na zjedzeniu dwóch cukierków z któregoś z stosów, albo na przełożeniu jednego cukierka z pierwszego stosu do drugiego. Przegrywa ten, kto pierwszy nie będzie mógł wykonać ruchu. Udowodnij, że rozpoczynający grę musi ją przegrać.

Zadania 10. W każdym polu szachownicy o wymiarach 8×8 zapisana jest pewna liczba całkowita. Na szachownicy możemy wybrać dowolny kwadrat o wymiarach 3×3 , bądź 4×4 i dodać 1 do każdej liczby znajdującej się w tym kwadracie. Czy zawsze w wyniku takich operacji możemy przekształcić tablicę wyjściową w tablicę, której wszystkie liczby są podzielne przez 3?