

**Zadania 1.** W trójkacie  $ABC$  punkty  $O$ ,  $D$  i  $E$  są odpowiednio: środkiem okręgu opisanego, środkiem boku  $AB$  i środkiem ciężkości trójkąta  $ACD$ . Udowodnij, że proste  $CD$  i  $OE$  są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy  $AB = AC$ .

**Zadania 2.** Na przeciwprostokątnej  $AC$  trójkąta prostokątnego  $ABC$  obrano taki punkt  $D$ , że  $AB = CD$ . Udowodnij, że w trójkącie  $ABD$  dwusieczna kąta  $A$ , środkowa wychodząca z wierzchołka  $B$  i wysokość poprowadzona z wierzchołka  $D$  przecinają się w jednym punkcie.

**Zadania 3.** Dany jest taki sześciokąt  $ABDEF$ , że czworokąt  $BCEF$  jest równoległobokiem, zaś trójkąt  $ABF$  jest równoboczny. Oblicz pole sześciokąta wiedząc, że:

$$BC = 1, AD = 3, CD + DE = 2.$$

**Zadania 4.** Przekątne czworokąta wypukłego  $ABCD$  przecinają się w punkcie  $O$ . Udowodnij, że jeśli czworokąt ten można wpisać w okrąg, to proste prostopadłe do  $AD$ ,  $BD$  i  $AC$ , przechodzące odpowiednio przez  $O$ ,  $B$  i  $C$ , przecinają się w jednym punkcie.

**Zadania 5.** Przekątne czworokąta wypukłego  $ABCD$  przecinają się w punkcie  $O$ . Środkami boków  $AB$  i  $CD$  są odpowiednio  $P$  i  $Q$ . Udowodnij, że jeśli czworokąt ten można wpisać w okrąg, to proste prostopadłe do  $AD$ ,  $BD$  i  $AC$ , przechodzące odpowiednio przez  $O$ ,  $P$  i  $Q$ , przecinają się w jednym punkcie.

**Zadania 6.** Punkty płaszczyzny pokolorowano dwoma kolorami. Udowodnij, że istnieje trójkąt równoboczny, którego wszystkie wierzchołki są jednakowego koloru.

**Zadania 7.** Punkty przestrzeni pokolorowano dwoma kolorami. Czy musi istnieć czworościan foremny, którego wszystkie wierzchołki są jednakowego koloru?

**Zadania 8.** Trójkąt równoboczny  $ABC$  podzielono na 100 przystających trójkątów równobocznych. Jaka jest największa liczba wierzchołków małych trójkątów wybranych tak, że żadne dwa nie leżą na prostej równoległej do jednego z boków trójkąta  $ABC$ ?