
Twierdzenie 1 (Ceva)**.** *Dany jest trójkąt ABC. Punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB.*
Wówczas proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{AF}{BF} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1.$$

Twierdzenie 2 (Menelaus)**.** *Dany jest trójkąt ABC. Punkty D, E, F rózne od wierzchołków trójkąta ABC, leżą odpowiednio na prostych BC, CA, AB, przy czym spełniony jest jeden z dwóch warunków:*

- *dokładnie dwa spośród pukntów D, E, F leżą na obwodzie trójkąta ABC,*
- *żaden z tych punktów nie leży na obwodzie trójąta ABC.*

Wówczas punkty D, E, F leżą na jednej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{AF}{BF} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1.$$

Twierdzenie 3 (Stewart)**.** *Dany jest trójkąt ABC. Punkt D leży na odcinku BC. Wówczas zachodzi:*

$$AD^2 \cdot BC = AB^2 \cdot CD + AC^2 \cdot DB - BC \cdot DC \cdot BD.$$

Twierdzenie 4 (van Aubel)**.** *Dany jest trójkąt ABC. Punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB, przy czym proste AD, BE, CF przecinają się w punkcie P.*
Wówczas zachodzi:

$$\frac{AP}{PD} = \frac{AE}{EC} + \frac{AF}{FB}.$$

Twierdzenie 5 (Ptolemeusz)**.** *W dowolnym czworokącie wypukłym $ABCD$ zachodzi nierówność:*

$$BA \cdot CD + BC \cdot AD \geqslant AC \cdot BD.$$

Ponadto równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

Zadania 1. *Dany jest trójkąt ABC. Punkty P, Q, R są odpowiednio środkami łuków BC, CA i AB okręgu opisanego na trójkącie ABC. Udowodnij, że okręgi o środkach w punktach P, Q, R i promieniach równych długościom odcinków BP, CQ i AR przecinają się w jednym punkcie.*

Zadania 2. *W trójkącie ABC zachodzi równość $2AB = AC + BC$. Udowodnij, że następujące cztery punkty: środek okęgu wpisanego w ten trójkąt, środek okręgu opisanego oraz środki boków AC i BC, leżą na jednym okręgu.*

Zadania 3. *Dany jest sześciokąt* $ABCDEF$*. Czworokąty* $ABCE$*,* $CDEA$*,* $EFAC$ *są wypukłe oraz zachodzą równości:*

$$\angle EAF = \angle CAB,\ \angle ACB = \angle ECD,\ \angle CED = \angle AEF.$$

Udowodnij, że przekątne AD, BE, CF *przecinają się w jednym punkcie.*

Zadania 4. *Dany jest trójkąt* ABC*. Punkt* D *leży na boku* BC*, przy czym* $AD > BC$*. Punkt* E *leży na boku* AC*. Odcinki* AD*,* BE *przecinają się w punkcie* P*.*

Udowodnij, że $\frac{AE}{EC} = \frac{BD}{AD-BC}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $AP = BC$*.*