Zadanie 1. Sprawdzić, czy funkcje $y(t)$ są rozwiązaniami podanych równań różniczkowych $(C, C_1, C_2, \omega$ - stałe)

(1) $ty' = 2y, \quad y(t) = 5t^2$
(2) $t + y + ty' = 0, \quad y(t) = \frac{C^2-t^2}{2t}$
(3) $y'' + \omega^2 y = 0, \quad y(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$
(4) $y'' - 2y' + y = 0, \quad y(t) = te^t$

Zadanie 2. Znaleźć równanie różniczkowe opisujące rodzinę krzywych $(C, C_1, C_2$ - stałe)

(1) $y = Cx$
(2) $x^3 = C(x^2 - y^2)$
(3) $y = C_1(x - C_2)^2$
(4) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$

Zadanie 3. Interpretując obraz pola kierunków (pola wektorowego)

$$\mathrm{dom} f \ni (t, x) \longrightarrow (t, x) + ((1, f(t, x))) \in \mathbb{R}^2$$

określić w przybliżeniu przebieg rozwiązania równania różniczkowego $x' = f(t, x)$, jeśli

(1) $f(t, x) = -2$
(2) $f(t, x) = -t$
(3) $f(t, x) = -\frac{1}{x}$
(4) $f(t, x) = x - t$
(5) $f(x, t) = x^2 - t$
(6) $f(t, x) = -\frac{t}{x}$

Zadanie 4. Pokazać, że dla dowolnej stałej $C \in \mathbb{R}$ funkcje

$$f_C(t) = \begin{cases} 0, & \text{dla } t \leqslant C \\ (t - C)^3, & \text{dla } t > C \end{cases}$$

$$g_C(t) = \begin{cases} (t - C)^3, & \text{dla } t < C \\ 0, & \text{dla } t \geqslant C \end{cases}$$

i $h \equiv 0$, są rozwiązaniami równania różniczkowego $x' = 3x^{\frac{2}{3}}$. Czy istnieją jeszcze jakieś rozwiązania tego równania nie uwzględnione powyżej? Czy istnieje taki problem początkowy Cauchy'ego dla tego równania, który nie ma rozwiązania? Wskazać wszystkie takie punkty (t_0, x_0), dla których problem początkowy

$$\begin{cases} x'(t) = 3x^{\frac{2}{3}}(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

- ma rozwiązanie jednoznaczne w przedziale $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ dla pewnego $\delta > 0$,
- ma co najmniej dwa różne rozwiązania w przedziale $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ dla dowolnego $\delta > 0$.

Zadanie 5. Pokazać, że dla dowolnej stałej $C \in \mathbb{R}$ funkcje

$$f_C(t) = \begin{cases} 0, & \text{dla } t \leqslant 0 \\ C \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right), & \text{dla } t > 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad g_C(t) = \begin{cases} C \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right), & \text{dla } t < 0 \\ 0, & \text{dla } t \geqslant 0 \end{cases}$$

są rozwiązaniami równania różniczkowego $t^3 x' = 2x$. Czy istnieją jeszcze jakieś rozwiązania tego równania nie uwzględnione powyżej? Wskazać wszystkie takie punkty (t_0, x_0), dla których problem początkowy

$$\begin{cases} t^3 x'(t) = 2x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

- nie ma rozwiązania,
- ma rozwiązanie jednoznaczne w przedziale $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ dla pewnego $\delta > 0$,
- ma co najmniej dwa różne rozwiązania w przedziale $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ dla dowolnego $\delta > 0$.

Zadanie 6. Rozwiązać problem Cauchy'ego:

(1) $\dot{x} = x \cos t, \quad x(0) = 1,$
(2) $\dot{x} x \sqrt{1 - t^2} + t \sqrt{1 - x^2} \ = \ 0, \quad x\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},$

Zadanie 7. Rozwiąż równania różniczkowe, zakładając warunek początkowy $y(t_0) = y_0$:

(1) $y'(x) = \lambda y(x)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$
(2) $y'(x) = y(x)(1 - y(x)^2)$
(3) $2x^2 y' = y$
(4) $y - xy' = 1 + x^2 y'$

Zadanie 8. Rozwiązać równania:
(1) $x^2(y' + y^2) = (xy - 1)$, (wykonać podstawienie $xy = u$)
(2) $y' + \frac{y}{x} = \frac{1+x^2y^2}{2}$, (wykonać podstawienie $y = \frac{u}{x}$

Zadanie 9. Znaleźć krzywe, dla których odcinek stycznej zawarty między osiami współrzędnych jest podzielony na połowy w punkcie styczności.

Zadanie 10. Rozwiązać równania liniowe:

(1) $y' = \frac{1}{x^2} y$
(2) $y' = y \cos x$
(3) $y' = y + 1$
(4) $y' = 2\frac{y}{1+x} + (1+x)^3$

Zadanie 11. Znaleźć krzywą całkową równania $y' - 2y + 3 = 0$ przechodzącą przez punkt $(0, 1)$.

Zadanie 12. Sprowadź do równania rzędu pierwszego i rozwiąż:
(1) $y'' = x^2$
(2) $xy'' + y' = 2x$

Zadanie 13. Rozwiąż równania o stałych współczynnikach:

(1) $y'' + 2y' + y = 0$
(2) $y'' = 9y$
(3) $y'' - 2y' + 3y = x + 1$
(4) $y'' + y = \exp x$
(5) $y'' + 9y = \sin x$

Zadanie 14. Wyznaczyć równanie $s = f(t)$ ruchu prostoliniowego, w którym prędkość jest wprost proporcjonalna do kwadratu przebytej drogi.

Zadanie 15. Materialny punkt o masie $m = 1$ g porusza się ruchem prostoliniowym pod wpływem działania siły F wprost proporcjonlanej do czasu t i odwrotnie proporcjonalnej do prędkości v punktu. W momencie $t = 10$ s prędkość wynosiła 20 cm/s, a siła $F = 10$ dyn. Wyznaczyć prędkość punktu po upływie minuty od czasu $t = 0$.

Zadanie 16. Wyznaczyć przebieg zmian prędkości v spadającego swobodnie ciała o masie m, uwzględniając przy tym opór powietrza (siła oporu powietrza jest równa mkv^2, gdzie k to współczynnik tarcia).

Zadanie 17. Zgodnie z prawem rozpadu promieniotwórczego, liczba N atomów izotopu pierwiastka promieniotwórczego, która ulega rozpadowi w jednostce czasu, jest proporcjonalna do ogólnej liczby atomów tego izotopu, która nie uległa rozpadowi. Definiuje się okres połowicznego rozpadu jako czas, po którym połowa atomów danego izotopu ulega rozpadowi. Z obserwacji wynika, że okres połowicznego rozpadu oznaczany literą T (lub $T_{\frac{1}{2}}$) jest stałą wielkością charakteryzującą dany izotop (tzn. nie zmienia się w czasie ani nie zależy od innych czynników chemicznych czy fizycznych).
(1) Wyznaczyć zależność pozostałej liczby atomów izotopu od czasu (z wykorzystaniem czasu połowicznego rozpadu).
(2) Jaki czas musi upłynąć, by promieniotwórczy stront (90) zredukował liczbę swoich atomów do 1/16 jej wartości początkowej? Okres połowicznego rozpadu strontu wynosi 28 lat.
(3) Polon-210 ma okres połowicznego rozpadu równy 140 dni. Jaki procent początkowej liczby jego atomów pozostanie po 100 dniach?

Zadanie 18. Bank prowadzi konta z ciągłą kapitalizacją odsetek. Niech $K(t)$ oznacza wartość w chwili t kapitału złożonego w tym banku (jednostką czasu jest 1 rok). Niech r będzie roczną stopą procentową.

(1) Pokazać, że zachodzi równanie $K'(t) = rK(t)$.
(2) Na jaki okres należy złożyć kapitał w banku z ciągłą kapitalizacją odsetek i roczną stopą procentową 8%, by go podwoić?

Zadanie 19. Znaleźć rodziny krzywych prostopadłych do rodziny krzywych zadaych równaniami (a jest parametrem):
(1) $x^2 + 2y^2 = a^2$,
(2) $xy = a$.