Zadanie 1. Obliczyć (o ile istnieją), granice funkcji:

(1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\frac{1}{y}\sin\frac{1}{x}$
(2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$
(3) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$
(4) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$
(5) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}$
(6) $\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$
(7) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$
(8) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2(x^2+y^2)^2}$

Zadanie 2. Zbadać ciągłość funkcji:

(1) $f(x,y)=\begin{cases} 5-x^2+y^2 & (x,y)\neq(1,1) \\ 1 & (x,y)=(1,1)\end{cases}$
(2) $f(x,y)=\begin{cases} \sin\frac{1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 2016 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$
(3) $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$
(4) $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Zadanie 3. Oblicz następujące pochodne cząstkowe:

(1) $\frac{d}{dz}\Big(z^2t+arctg(e^xt)+\frac{sin(zt)}{z}\Big)$,
(2) $\frac{d}{dt}\Big(z^2t+arctg(e^yt)+\frac{sin(zt)}{z}\Big)$,
(3) $\frac{d}{dt}\Big(yt^3+at^2+e^{-t}\Big)$,
(4) $\frac{d}{dt}\Big(t^3+at^2+t^{-t}\Big)$,
(5) $\frac{d}{da}\Big(yt^3+at^2+a^{-ta}\Big)$.

Zadanie 4. Policzyć pochodne cząstkowe w podanych punktach:
(1) $f(x,y)=6x^2-5xy+10y^3, (x,y)=(1,1)$
(2) $f(x,y)=\ln(x^2+y^2), (x,y)=(1,0)$
(3) $f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2)}, (x,y)=(3,2)$
(4) $f(x,y,z)=(\sin x)^{yz}, (x,y,z)=(\pi/2,2,1)$
(5) $f(x,y,z)=\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}, (x,y,z)=(0,1,1)$
(6) $f(x,y,z)=\frac{x}{z}-\frac{y}{x}+\frac{z}{x}, (x,y,z)=(1,1,1)$

Zadanie 5. Oblicz gradient następujących funkcji(pojawiają się tu również parametry):

(1) $y(z,x)=z^2t+arctg(e^xt)+\frac{sin(zt)}{z}$,
(2) $x(z,t)=z^2t+arctg(e^yt)+\frac{sin(zt)}{z}$,
(3) $x(a,y)=yt^3+at^2+e^{-t}$,
(4) $y(a,t)=t^3+at^2+arcsin(a+t)$,
(5) $x=yt^3+\ln(at^2)+a^{-ta}$.

Zadanie 6. Policzyć pochodne cząstkowe drugiego rzędu:
(1) $f(x,y)=x^6+y^15-xy$
(2) $u(x,y,t)=e^{xyt}$
(3) $u(x,y,z)=e^x(\sin y-e^z)$

Zadanie 7. Zbadaj różniczkowalność następujących funkcji w punkcie $(0,0)$:

(1) $f(x,y)=|x|y$,
(2) $g(x,y)=|x|$,
(3) $h(x,y)=\sqrt[3]{xy}$,
(4) $i(x,y)=(x^2+y^2)\sin(\frac{1}{x^2+y^2}), i(0,0)=0$,
(5) $j(x,y)=x-y\frac{y}{\sqrt{x^4+y^2}}, j(0,0)=0$.

Zadanie 8. Znaleźć równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji
(1) $f(x,y)=2x^2+y^2$ w punkcie $(1,-1)$,
(2) $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ w punkcie $(1,1)$,
(3) $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ w punkcie $(0,1)$.