Zadanie 1. Oblicz ekstrema lokalne funkcji g, gdzie:

(1) $g(x,y) = 3x^4 - \frac{2}{3}y^3 + 2x^2y - 2x^2 + y^2$,
(2) $g(x,y) = 3x^4 - \frac{2}{3}y^3 + 2x^2y - 2x^2 + y^2$,
(3) $g(x,y) = x^2 + xy + 2x + y^2$,
(4) $g(x,y) = xe^{-y} + \frac{1}{x} + e^y$,
(5) $g(x,y) = xy + \ln y + x^2$,
(6) $g(x,y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$.
(7) $g(x,y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$,
(8) $g(x,y) = e^{x^2-y}(5 - 2x + y)$,
(9) $g(x,y) = \ln|x+y| - x^2 - y^2$,
(10) $g(x,y) = x - 2y + \ln\sqrt{x^2+y^2} + 3\text{arctg}\,\frac{y}{x}$.

Zadanie 2. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji

(1) $f(x,y,z) = x^4 - y^3 + 2z^3 - 2x^2 + 6y^2 - 3z^2$,
(2) $g(x,y,z) = x^3 + xy + y^2 - 2zx + 2z^2 + 3y - 1$,
(3) $h(x,y,z) = xyz(4 - x - y - z)$.

Zadanie 3.
I. Pokazać, że funkcja $f(x,y) = (1+e^x)\cos y + xe^x$ ma nieskończenie wiele minimów, natomiast nie ma żadnego maksimum.
II. Pokazać, że funkcja $f(x,y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2$ nie ma minimum w punkcie $(0,0)$, ale jej zacieśnienie do dowolnej prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych ma silne minimum w tym punkcie.

Zadanie 4. Oblicz wartości maksymalne i minimalne funkcji f na zbiorze zwartym K, gdzie:

(1) $f(x,y) = 3x^4 - \frac{2}{3}y^3 + 2x^2y - 2x^2 + y^2, \quad K = [-1,2] \times [-1,2]$,
(2) $f(x,y) = 3x^4 - \frac{2}{3}y^3 + 2x^2y - 2x^2 + y^2, \quad K = [-1,0] \times [-1,0]$,
(3) $f(x,y) = x^2 + xy + 2x + y^2, \quad K = [-1,0] \times [0,1]$.
(4) $h(x,y) = \sin x + \cos y + \cos(x-y), \quad K = (0,\pi)^2$.
(5) $v(x,y) = xy(4-x-y)$ w trójkącie ograniczonym prostymi $x = 1, y = 0, x + y = 6$

Zadanie 5. Liczbę $a > 0$ zapisać w postaci sumy 3 liczb, których iloczyn jest maksymalny.

Zadanie 6. Znaleźć wymiary prostokątnej wanny, która przy danej objętości V ma najmniejszą powierzchnię.

Zadanie 7. Na płaszczyźnie dane są trzy punkty materialne $P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2), P_3(x_3,y_3)$ o masach odpowiednio m_1, m_2, m_3. Zbadać, przy jakim położeniu punktu $P(x,y)$ moment bezwładności danego układu względem P

$$m_1|P_1P|^2 + m_2|P_2P|^2 + m_3|P_3P|^2$$

jest najmniejszy.

Zadanie 8. Firma produkuje dwa wyroby w warunkach doskonałej konkurencji. Ceny produkowanych wyrobów wynosi odpowiednio P_1, P_2. Oznaczmy przez Q_1 i Q_2 poziomy produkcji wyrobu pierwszego i drugiego. Zakładamy, że funkcja kosztów całkowitych rozważanej firmy ma postaci

$$C(Q_1,Q_2) = Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2$$

Wyznaczyć poziomy produkcji przy których zysk firmy jest maksymalny.