

Zadanie 1. Obliczyć całki krzywoliniowe zorientowane wzdłuż łuku K :

- (1) $\int_K \cos^2 x dy + \sin^2 y dx$, gdzie K jest odcinkiem w \mathbb{R}^2 łączącym punkt $(0, 0)$ z punktem $(1, 1)$,
- (2) $\int_K (x^2 + 2xy) dx + y^2 dy$, gdzie K to odcinek od punktu $(0, 0)$ do punktu $(2, 2)$,
- (3) $\int_K (x^2 + 2xy) dx + (y^2 - xy) dy$, gdzie K to łamana ABC , $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (2, 2)$,
- (4) $\int_K y dx + (x + y) dy$, gdzie K to łuk cykloidy o równaniu $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ od punktu $(0, 0)$ do punktu $(2a\pi, 0)$,
- (5) $\int_K (x+y) dx + y^2 dy$, gdzie K jest kwadratem o wierzchołkach w $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$ obieganym przeciwnie do ruchu wskazówek zegara,
- (6) $\int_K \frac{xdx+yd y}{x^2+y^2}$, gdzie K jest elipsą $x^2/4 + y^2 = 4$ zorientowaną ujemnie.

Zadanie 2. Obliczyć całkę krzywoliniową $\int_K y dx + z dy + x dz$ od punktu $A = (0, 0, 0)$ do punktu

$B = (1, 1, 1)$ gdy krzywa K jest:

- (1) odcinkiem łączącym punkty A i B ,
- (2) łamaną $ACDB$, gdzie $C = (1, 0, 0)$ i $D = (1, 1, 0)$.

Zadanie 3. Obliczyć całki krzywoliniowe nieskierowane:

- (1) $\int_K y e^{-x} dl$, gdzie K jest brzegiem trójkąta o wierzchołkach: $A(0, 0)$, $B(-1, 1)$, $C(1, 1)$,
- (2) $\int_K \sqrt{x^2 + y^2 + 4} dl$, gdzie K jest krzywą: $x(t) = 2t \cos t$, $y(t) = 2t \sin t$, $t \in [0, \pi/6]$,
- (3) $\int_K (x - y) dl$, gdzie $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2y - x + 2 = 0, x \in [0, 4]\}$,
- (4) $\int_K 4\sqrt{y} dl$, gdzie K jest łukiem paraboli $y = (x + 1)^2$, $x \in [-1, 1]$.

Zadanie 4. Sprawdzić, że wartość danych całek krzywoliniowych zorientowanych nie zależy od drogi całkowania. Obliczyć je:

- (1) $\int_{(-1,1)}^{(1,2)} xy^2 dx + x^2 y dy$,
- (2) $\int_{(\pi/2, \pi/2)}^{(\pi, \pi)} \sin x \cos y dx + \cos x \sin y dy$.

Zadanie 5. W pewnym polu sił składowe pola wynoszą

$$P(x, y) = 3x^2 y + 2xy^2 + 1, \quad Q(x, y) = x^3 + 2x^2 y + 1.$$

Policzyć pracę potrzebną do przesunięcia punktu materialnego wzdłuż krzywej K łączącej punkt $(0, 0)$ z punktem $(1, 1)$, danej wzorem $y = x^{20}$.

Zadanie 6. Dane jest pole sił o składowych

$$P(x, y) = 2xy, \quad Q(x, y) = x^2.$$

Obliczyć pracę jaką należy wykonać przy przeniesieniu punktu materialnego o jednostkowej masie wzdłuż łuku paraboli $y = x^2$ od punktu $A(1, 1)$ do punktu $B(0, 0)$.