Zadanie 1. Korzystając z twierdzenia Greena policzyć następujące całki:

i. $\oint_K y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$, gdzie K jest okręgiem o środku w $(0,0)$ i promieniu R,

ii. $\oint_K (x+y)\mathrm{d}x + y^2\mathrm{d}y$, gdzie K jest brzegiem kwadratu o wierzchołkach w $(\pm1,\pm1)$.

iii. $\oint_K -yx^2\mathrm{d}x + xy^2\mathrm{d}y$, gdzie K jest okręgiem o środku w $(0,0)$ i promieniu 1,

iv. $\oint_K (1-x^2)y\mathrm{d}x + x(1+y^2)\mathrm{d}y$, gdzie K jest okręgiem o środku w $(0,0)$ i promieniu R

v. $\int_K (e^x + e^y - y)\mathrm{d}x + (xe^y)\mathrm{d}y$, gdzie K jest wykresem funkcji $y = \sin x$, dla $x \in [0,\pi]$,

vi. $\int_K (e^x \sin y)\mathrm{d}x + (e^x \cos y)\mathrm{d}y$, gdzie K jest parabolą $y = -x^2+1$ pomiędzy punktami $(-1,0)$ a $(1,0)$.

Zadanie 2. Korzystając z twierdzenia Greena udowodnić, że pole powierzchni obszaru D ograniczonego krzywą K wyraża się za pomocą całek krzywoliniowych następująco:

$$|D| = \oint_K x\mathrm{d}y = -\oint_K y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\oint_K x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x.$$

Zadanie 3. Za pomocą całki krzywoliniowej skierowanej obliczyć pole ograniczone:

i. elipsą $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, gdzie $a, b > 0$ są dane,

ii. asteroidą $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, gdzie $a > 0$ jest dane.

Zadanie 4. Obliczyć następujące całki:

i. $\int_\gamma (4xy - 5y)\mathrm{d}x + (2x^2 - 5x + 3y^2)\mathrm{d}y$, gdzie $\gamma : [0,2\pi] \ni t \mapsto (2\cos t, 4\sin t) \in \mathbb{R}^2$,

ii. $\int_\gamma (4xy - 5y)\mathrm{d}x + (2x^2 - 5x + 3y^2)\mathrm{d}y$, gdzie $\gamma : [0,1] \ni t \mapsto (t, t^2) \in \mathbb{R}^2$,

iii. $\int_\gamma (6xy - y)\mathrm{d}x + (3x^2 - x + 3y^2)\mathrm{d}y$, gdzie $\gamma : [0,\pi] \ni t \mapsto (\cos t + 1, \sin t) \in \mathbb{R}^2$,

iv. $\int_K e^x((1-\cos y)\mathrm{d}x - (y - \sin y)\mathrm{d}y)$, gdzie K jest wykresem funkcji $y = \sin x$, dla $x \in [0,\pi]$,

v. $\int_\gamma (3x^2y^2 + \frac{y^4}{2})\mathrm{d}x + (2xy^3 + 2x^3y)\mathrm{d}y$, gdzie $\gamma : [0,2\pi] \ni t \mapsto (2\cos t, 3\sin t) \in \mathbb{R}^2$,

vi. $\int_K x\mathrm{d}x - y\mathrm{d}y$, gdzie K jest brzegiem trójkąta o wierzchołkach $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$,

vii. $\int_K (-y\cos^2 x)\mathrm{d}x + (\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x)\mathrm{d}y$, gdzie K jest okręgiem jednostkowym o środku w $(0,0)$.