1. Podstawowe konstrukcje homotopijne

$(X, *_x)$ i $(Y, *_y)$ są przestrzeniami topologicznymi z wyróżnionym punktem bazowym. Oznaczamy przez $\mathbb{TOP}$. kategorię takich par z odwzorowaniami ciągłymi zachowującymi punkt bazowy. Podefiniujmy:

$$X \vee Y := X \times \{*_y\} \cup \{*_x\} \times Y \subset X \times Y$$
$$X \wedge Y := X \times Y / X \vee Y$$

odpowiednio - bukiet X i Y, oraz ich smash-product. Zauważyć, że te operacje nie wychodzą poza kategorię $\mathbb{TOP}$. - wyniki mają dobrze określony punkt bazowy. Natomiast zawieszenie:

$$\Sigma X := X \times I / \{X \times \{0\}, X \times \{1\}\}$$

punktu bazowego nie ma (zgniatamy do dwóch punktów osobno dno cylindra $X \times I$, osobno górę). Trzeba je poprawić do zredukowanego zawieszenia:

$$SX := X \times I / \{X \times \{0\}, X \times \{1\}, *_x \times I\}$$

które już punkt bazowy ma.

Zadania. *Jakie własności algebraiczne ma $\mathbb{TOP}$. z operacjami $\vee, \wedge$? Względem jakich równości (równość zbiorów, kanoniczny homeomorfizm, homotopijna równoważność)? Czy zawieszenie i zredukowane zawieszenie są ze sobą homotopijnie równoważne? Homeomorficzne? Hint: rozważyć klasę przestrzeni w niezdegenerowanym punktem: mającym otoczenie ściągalne do niego. Pokazać $\mathbb{S}^n \wedge \mathbb{S}^m = \mathbb{S}^{n+m}$. Hint: smash czasem daje się zdefiniować jako jednopunktowe uzwarcenie pewnej przestrzeni. Pokazać $SX = X \wedge \mathbb{S}^1$. Czy dla rozmaitości M i N $M \wedge N$ jest rozmaitością?*

Raz na zawsze ustalmy sobie punkt bazowy w sferach (jednostkowych w przestrzeni euklidesowej): punkt o pierwszej współrzędnej równej 1 i pozostałych - zero. Zbiór odwzorowań z okręgu w przestrzeń X (w kategorii $\mathbb{TOP}$.) oznaczamy przez ΩX i nazywamy przestrzenią pętli. Jest to przestrzeń topologiczna z topologią zwarto-otwartą. Ponieważ będziemy się głównie poruszać w zwartych (lub lokalnie zwartych) przestrzeniach metrycznych, wystarczy myśleć o topologii jednostajnej zbieżności (lub niemal jednostajnej zbieżności).

Zbiór odwzorowań pomiędzy X i Y podzielony przez relację homotopijności oznaczamy przez $[X, Y]$.

Zadania. *Zaproponować ϕ, bijekcję pomiędzy $[X, \Omega Y]$ a $[SX, Y]$ i sprawdzić, że jest naturalna ze względu na odwzorowania w $\mathbb{TOP}$. (doprecyzować).*

W szczególności oznacza to, że przestrzenie homotopijnie równoważne zachowują się tak samo przy braniu przestrzeni klas homotopii odwzorowań.

Zadania. *Sprawdzić, że dla każdych X i Y, $[SX, Y]$ ma strukturę grupy. Hint: żeby znaleźć iloczyn klasy $[f]$ przez klasę $[g]$, gdzie oba odwzorowania idą z SX do Y wystarczy znaleźć odpowiednie odwzorowanie z SX w $SX \vee SX$. Sprawdzić, że po podwójnym zawieszeniu $[S^2X, Y]$ ma strukturę grupy abelowej. Hint: zaadaptować rysunkowy dowód abelowości drugiej grupy homotopii z dowolnego podręcznika topologii algebraicznej.*

W ten sposób dostaliśmy definicję grup homotopii:

$$\pi_i(X) := [S^i\mathbb{S}^0, X] = [\mathbb{S}^i, X] = [\mathbb{S}^1, \Omega^{i-1}] = \pi_1(\Omega^{i-1}X)$$

a raczej równoważność kilku definicji naraz (ten ostatni pomysł, przez grupę podstawową odpowiedniej przestrzeni pętli to oryginalna definicja pochodząca od Hurewicza), a także abelowość wszystkich grup poza pierwszą. π_i definiuje funktor z kategorii $\mathbb{TOP}$. w $\mathbb{GRP}$.

2. Grupy homotopii

Zadania. *Pokazać, że grupy homotopii zachowują się dobrze ze względu na produkty:*

$$\pi_i X \times Y = \pi_i X \oplus \pi i Y$$

Zastanowić się, co z nieskończonymi produktami.

Pierwsza grupa homotopii zachowuje się dobrze przy dzieleniu przestrzeni:

Twierdzenie 2.1. *Twierdzenie Seiferta - Van Kampena*
Jeśli A, B oraz $A \cap B$ są łukowo spójne i zawierają punkt bazowy $A \cup B$, to grupa podstawowa $A \cup B$ jest pushoutem w diagramie:

$$\begin{tikzcd} \pi A \arrow[r] & \pi A \cup B \\ \pi A \cap B \arrow[u] \arrow[r] & \pi B \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Niepodpisane strzałki pochodzą od inkluzji.

Zadania. *Rozpracować tajemnicze nazwy w powyższym twierdzeniu.*

Znając $\pi_* X, \pi_* Y$ policzyć $\pi_* X \vee Y, \pi_* \Sigma X$. Dla zuchwałych $\pi_* X \wedge Y$.

Nakryciem nazywamy trójkę (E, p, B), dwie przestrzenie i odwzorowanie:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "p"] \\ B \end{tikzcd}$$

o następującej własności: każdy punkt $b \in B$ ma otoczenie U takie, że $p^{-1}(U)$ rozpada się na rozłączną sumę otwartych zbiorów $\bigsqcup_i U_i$, które są (przez zawężone p) homeomorficzne z U.

Jeśli B jest spójne, to dla każdego $b \in B$ $p^{-1}(b)$ ma stałą moc, zwaną krotnością nakrycia.

Nakrycia podnoszą odwzorowania, jeżeli odpowiednio zachowuje się grupa podstawowa przestrzeni, z którymi pracujemy: istnieje strzałka F domykająca diagram

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "p"] & \\ B & X \arrow[l, "f"'] \arrow[ul, dotted, "F"'] \end{tikzcd}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $p_*\pi E \subset f_*\pi X$.

Nakrycia mają własność podnoszenia homotopii: jeżeli z przestrzeni X do B idą dwa homotopijne odwzorowania i jedno z nich podnosi się do nakrycia, to wtedy podnosi się też drugie oraz homotopia między nimi.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "p"] & X \times 0 \arrow[l, "H_0"'] \arrow[d] \\ B & X \times I \arrow[l, "h"'] \arrow[ul, dotted, "H"'] \end{tikzcd}$$

Zadania. *Pokazać, że jeżeli przestrzeń ma nakrycie jednospójne, to tylko jedno. Uwierzyć, że porządne przestrzenie takie nakrycie mają (nazywane nakryciem uniwersalnym). Hint: przy pewnych założeniach jest to przestrzeń dróg w przestrzeni bazowej podzielona przez relację homotopijności modulo końce. Zauważyć, że każda pętla γ w przestrzeni bazowej definiuje homeomorfizm przestrzeni nakrywającej, σ_γ, zachowujący odwzorowanie nakrywające: $p = p \circ \sigma_\gamma$. Zauważyć, że jest to homomorfizm grup, zauważyć, że w przypadku nakrycia uniwersalnego jest to izomorfizm. Dopracować szczegóły, zwłaszcza dotyczące wyboru punktu bazowego.*

Policzyć grupę podstawową okręgu. Grupy podstawowe sfer. Grupy podstawowe powierzchni dwuwymiarowych. Hint: narysować powierzchnie jako wielokąty z utożsamionymi krawędziami i skorzystać z Twierdzenia Seiferta - Van Kampena.

Z powyższej wskazówki wyciągnąć następujący wniosek: grupy podstawowe powierzchni to grupy wolne generowane na krawędziach wielokąta (po utożsamieniu), podzielone przez pewne relacje wynikające ze sposobu łączenia tych krawędzi wnętrzem wielokąta. Skonstruować w ten sposób przestrzeń topologiczną, której grupa podstawowa jest równa z góry danej skończenie generowanej grupie. Jaki warunek musi być spełniony, by taka konstrukcja dawała rozmaitość?

Nakrycie jest szczególnym przypadkiem rozwłóknienia: czwórkę (E, p, F, B) nazywamy rozwłóknieniem, jeżeli

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "p"] \\ B \end{tikzcd}$$

ma własność podnoszenia homotopii. Można pokazać, że wtedy każde włókno $p^{-1}(b)$ dla każdego $b \in B$ jest homotopijnie równoważne pewnemu F, które nazywa się włóknem homotopijnym.

Zadania. *Uwierzyć, że każda wiązka lokalnie trywialna jest rozwłóknieniem. Dla wiązek pokazać dokładność ciągu homotopii:*

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} \pi_n F \longrightarrow \pi_n E \xrightarrow{p_*} \pi_n B \xrightarrow{\partial_*} \pi_{n-1} F \longrightarrow \cdots$$

gdzie niepodpisan strzałka to inkluzja włókna, a ∂_* otrzymuje się, jak następuje.

Element $\pi_n B$ to odwzorowanie ϕ z kostki I^n w B, takie że ∂I^n trafia w całości w punkt bazowy $*_B$; ale z drugiej strony ϕ jest homotopią z $I^{n-1} \times I$ do B, która podnosi się w czasie zero ($\phi(I^{n-1} \times 0) \subset \phi(\partial I^n) = *_B$) - wystarczy wybrać dowolny punkt $*_F$ we włóknie nad $*_B$; podnosi się zatem cała homotopia, do ψ, które ma tę własność, że $\psi(I^{n-1} \times 1)$ trafia w całości we włókno nad $*_B$; można dobrać ψ tak, by $\partial I^{n-1} \times I$ trafiał w całości w $*_F$; $\psi(,1)$ definiuje więc element $\pi_{n-1} F$.
Uzupełnić szczegóły, zwłaszcza dokładnie przemyśleć wybór punktów bazowych i jednoznaczność powyższej konstrukcji (z dokładnością do homotopii). Pokazać, że ∂_* jest homomorfizmem grup.
Zastanowić się, jaka jest interpretacja dokładności na końcu ciągu, przy zerowych "grupach" homotopii.

Zauważyć, że powyższy ciąg oznacza równość wszystkich grup nakrycia i przestrzeni nakrywanej poza grupą podstawową. Podać wszystkie grupy homotopii okręgu. Policzyć przy pomocy tych narzędzi grupy homotopii torusa i butelki Kleina (przestrzenie totalne wiązki okręgów nad okręgiem).

Dla zuchwałych: przyjrzeć się wiązce Hopfa

$$\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$$

i wyciągnąć wnioski o trzeciej grupie homotopii sfery dwuwymiarowej.

3. Homologie

X jest przestrzenią topologiczną bez wyróżnionego punktu. $C^n X$ oznacza grupę łańcuchów singularnych, wolną grupę abelową generowaną przez zbiór wszystkich ciągłych odwzorowań ze standardowego sympleksu $\Delta^n = [e_o, \ldots, e_n]$ do przestrzeni X. Na bazie grupy określa się odwzorowanie ∂:

$$\partial\sigma = \Sigma_{i=0,\ldots,n}(-1)^i \sigma|_{[e_0,\ldots,\widehat{e_i},\ldots,e_n]}$$

i rozszerza liniowo do odwzorowania z $C^n X$ do $C^{n-1} X$. Sprawdzić (raz w życiu), że $\partial^2 = 0$. Można zatem zdefiniować:

$$H_*(X) = \frac{ker\partial}{im\partial}$$

Zadania. *Przemyśleć gradację powstałej grupy. Przemyśleć użycie innych współczynników w konstrukcji łańcuchów. Zrozumieć, jak działa indukowanie odwzorowań w homologiach z odwzorowań pomiędzy przestrzeniami topologicznymi.*

Policzyć, dla żartu, z definicji homologie punktu. Policzyć z definicji homologie przestrzeni ściągalnej. Policzyć z definicji homologie okręgu.

Wszystkie przestrzenie ze skończoną triangulacją mają wygodną metodę liczenia homologii: niech $\Sigma_n X$ oznacza grupę wolną generowaną przez sympleksy n-wymiarowe w rozkładzie przestrzeni X. Każdy sympleks musimy (dowolnie) wyposażyć w orientację - ustalone numerowanie wierzchołków. Operator brzegu określamy na bazie:

$$\partial\sigma = \Sigma_{\sigma_i \in \Sigma_n \cap \partial\sigma} \pm \sigma_i$$

stawiając minus wtedy i tylko wtedy, gdy orientacja indukowana z sympleksu σ na brzeg jest przeciwna do tej, jaką wybraliśmy dla sympleksu σ_i i rozszerzamy liniowo.

Zadania. *Zrozumieć powyższy straszny napis, sprawdzić, że kwadrat operatora brzegu równa się zero. Uwierzyć, że homologie określone w ten sposób są równe homologiom określonym uprzednio. Policzyć homologie powierzchni, sfer, homologicznej sfery Poincaré, bukietu sfer, bukietu przestrzeni triangulowalnych.*

Homologie singularne spełniają następujące aksjomaty Eilenberga-Steenroda:

(1) Wymiar: homologie punktu są równe użytemu pierścieniowi współczynników w wymiarze zero i równe zero w wymiarach wyższych.
(2) Homotopii: odwzorowania homotopijne między przestrzeniami indukują to samo odwzorowania pomiędzy ich homologiami.
(3) Wycinania: jeżeli $U \subset \overline{U} Int A \subset X$, to homologie $H_*(X \setminus U, A \setminus U)$ są równe $H_*(X, A)$. Doczytać, co to są homologie pary, na potrzeby tych warsztatów myśleć o homologiach pary (X, A) jak o homologiach przestrzeni (X/A). Dla zuchwałych - znaleźć, kiedy powyższa sugestia jest uzasadniona.
(4) Ciągu dokładnego: krótki ciąg dokładny kompleksów łańcuchowych

$$0 \to C_*(X) \to C_*(Y) \to C_*(Z) \to 0$$

indukuje długi ciąg dokładny homologii:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_n X \longrightarrow H_n Y \longrightarrow H_n Z \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1} X \longrightarrow \cdots$$

Zadania. *Przyswoić z Hatchera dokładne wypowiedzi tych aksjomatów oraz obejrzeć zarysy dowodów: bieganie po diagramach dla ciągu dokładnego, podziały barycentryczne dla wycinania i - co właściwie sprowadza się do zadania z liczeniem homologii przestrzeni ściągalnej - operator łączący dla homotopii.*

W szczególności przestrzenie homotopijnie równoważne mają te same homologie.

Jeśli nie mamy do dyspozycji triangulacji, podstawowym narzędziem liczenia homologii jest ciąg Mayera-Vietorisa:

$$\begin{tikzcd} A \cap B \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"'] & A \arrow[d, "\widetilde{a}"] \\ B \arrow[r, "\widetilde{b}"'] & A \cup B \end{tikzcd}$$

daje długi ciąg dokładny:

$$\cdots \longrightarrow H_n A \cap B \xrightarrow{(a_*, -b_*)} H_n A \oplus H_n B \xrightarrow{\widetilde{a}_* + \widetilde{b}_*} H_n A \cup B \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1} A \cap B \longrightarrow \cdots$$

gdzie wyjątkowo opisaliśmy odwzorowania indukowane z inkluzji. Szczegóły - znów z Hatchera.

Zadania. *Policzyć raz jeszcze homologie sfer, powierzchni, itd., okręgu warszawskiego, długiej prostej, dywanu Sierpińskiego, pawiego oczka (sumy nieskończonej ilości okręgów o malejących promieniach połączonych jednym punktem), smashów rozmaitych przestrzeni, zawieszeń i zawieszeń zredukowanych (tam, gdzie stanowi to jakąś różnicę). Nie przejmować się niepowodzeniami.*

Powyższe wystarczy, by zrozumieć różnicę pomiędzy grupami homologii i grupami homotopii.

Zadania. *Podać przykład przestrzeni i pętli w niej, która jest łańcuchem homologicznym zeru (brzegiem) i homotopijnie nietrywialną.*

Różnice ujawniają się szczególnie wyraźnie kiedy chcemy policzyć homologie produktu kartezjańskiego. Po pierwsze, izomorficzne homologie mają zawsze kompleksy łańcuchowe $C_*(X \times Y)$ i $C_*X \otimes C_*Y$ (zdefiniować właściwy operator brzegu w tym drugim kompleksie). Po drugie, mamy ciąg dokładny:

$$0 \longrightarrow (H_*X \otimes H_*Y)_n \longrightarrow H_nX \times Y \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n-1} Tor(H_iX, H_jY) \longrightarrow 0$$

Czyli, w szczególności, homologie nie zachowują produktów. Powyższy ciąg nazywa się formułą Künnetha. Pozostaje zdefiniować Tor: jeśli mamy grupę abelową A, to pasuje ona do ciągu dokładnego

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow R \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

gdzie F jest wolne (hint: R to relacje, które definiują grupę A), nazywanego rezolwentą wolną; po pomnożeniu przez grupę B, ciąg przestaje być dokładny (z jednej strony); trzeba go poprawić o pewną grupę,

$$0 \longrightarrow Tor(A, B) \longrightarrow F \otimes B \longrightarrow R \otimes B \longrightarrow A \otimes B \longrightarrow 0$$

którą nazywamy iloczynem torsyjnym.

Zadania. *Uwierzyć, że jest to dobra definicja w kategorii grup abelowych (nie zależy od wybranej rezolwenty). Wyciągnąć wniosek na temat homologii o współczynnikach w ciele.*

Podobną naturę do twierdzenia Künnetha ma twierdzenie o współczynnikach uniwersalnych: ciąg

$$0 \to H_i(X, \mathbb{Z}) \otimes R \to H_i(X, R) \to \mathrm{Tor}(H_{i-1}(X, \mathbb{Z}), R) \to 0$$

jest dokładny. R jest tu dowolnym pierścieniem (dziedziną ideałów głównych z jedynką). Zrozumieć znaczenie powyższego napisu, w myśl hasła:

> Morał z tej bajki krótki i niektóym znany
> najważniejsze są homologie z całkowitymi współczynnikami.

Zadania. *Policzyć homologie dysku dwuwymiarowego, któremu brzeg podzielono relacją $z \sim w \Leftrightarrow z^n = w^n$, oznaczmy $\mathbb{D}/n\mathbb{D}$. Policzyć homologie $\mathbb{D}/n\mathbb{D} \times \mathbb{D}/m\mathbb{D}$.*

Przemyśleć dalsze różnice pomiędzy grupami homologii i homotopii. Przemyśleć zastosowania (np. w kontekście nakryć) następującego twierdzenia:

Twierdzenie 3.1. *Twierdzenie Hurewicza*
Pierwsze nietrywialne grupy homologii i homotopii spójnej przestrzeni topologicznej występują w tym samym wymiarze, ponadto są izomorficzne, jeżeli ten wymiar jest większy niż 2, jeżeli zaś jest równy 1, to pierwsza grupa homologii jest abelianizacją grupy podstawowej.

Zadania. *Znaleźć błąd w powyższym, naprawić go. Zapoznać się z homologiami zredukowanymi.*

Skoro już znamy homologie sfer, możemy zdefiniować stopień odwzorowania pomiędzy sferami. Jeśli $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, to f_* jest homomorfizmem $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, a zatem wyznacza i jest wyznaczany przez jedyną liczbę całkowitą, nazywaną stopniem odwzorowania f. Ważnym i trudnym faktem jest twierdzenie Hopfa mówiące, że dwa odwzorowania pomiędzy sferami są homotopijne gddy mają ten sam stopień.

Dobre rzeczy przychodzą do tych, którzy czekają.

Zadania. *Przy pomocy powyższych narzędzi pokazać niezmienniczość dziedziny, podstawowe twierdzenie teorii wymiaru, twierdzenie Brouwera o punkcie stałym, i wszystkie pochodne.*
Dla zainteresowanych: sprawdzić inne definicje stopnia (lokalny stopień Brouwera), zastanowić się nad zachowaniem stopnia przy zawieszaniu i smashowaniu.

4. Kohomologie

Zamiast o kompleksach łańcuchów będziemy teraz mówić o kompleksach kołańcuchów. Niech $C^n(X, R)$ oznacza przestrzeń $Hom(C_nX, R)$, wyposażoną w operator kobrzegu δ zdefiniowany następująco: kobrzeg homomorfizmu f z $C^n(X, R)$ będzie kołańcuchem z $C^{n+1}(X, R)$, czyli wystarczy podać jego wartość na sympleksach $n + 1$-wymiarowych

$$\delta f(\sigma) := f(\partial\sigma)$$

Zadania. *Sprawdzić raz w życiu, że $\delta^2 = 0$. Zdefiniować $H^*(X, R)$ kohomologie przestrzeni X o współczynnikach w R i powtórzyć wszystkie konstrukcje homologiczne powyżej dla kohomologii, zwracając uwagę na kierunki odwzorowań indukowanych. Zrozumieć, czym różnią się, w języku teorii kategorii funktory H_* i H^*.*

W kohomologiach naturalnie występuje iloczyn, zamieniający moduł kohomologii w pierścień z gradacją. Niech f i g będą kołańcuchami wymiarów, odpowiednio, m i n. Określimy $f \cup g$, kołańcuch wymiaru $n+m$, podając jego wartość na dowolnym $m + n$-wymiarowym sympleksie singularnym $\sigma : \Delta^{n+m} \to X$:

$$f \cup g(\sigma) := f(\sigma \circ (\Delta^n \hookrightarrow \Delta^{n+m}))g(\sigma \circ (\Delta^m \hookrightarrow \Delta^{m+n}))$$

gdzie mnożenie pochodzi z pierścienia, a inkluzje oznaczają, odpowiednio, przednią i tylnią ścianę $n + m$-wymiarowego sympleksu.

Zadania. *Zrozumieć powyższy napis. Poszukać przydatnych wzorów dotyczących cup-iloczynu. Znaleźć w Greenbergu najzabawniejszy dowcip w historii XX-wiecznych tłumaczeń na język polski. Zauważyć, że iloczyn indukuje się na kohomologie. Znaleźć struktury pierścieni w kohomologiach powierzchni, sfer, itd. (oczywiście należy wcześniej zaadaptować poprzednie techniki do policzenia samych grup kohomologii). Znaleźć dwie przestrzenie, których kohomologie są izomorficzne jako moduły z gradacją, a nieizomorficzne jako pierścienie. Odszukać definicję słabej homotopijnej równoważności i zastanowić się, czy takie dwie przestrzenie mogą być słabo homotopijnie równoważne.*

Dualność definicji homologii i kohomologii "na dole" przekształca się na dualność "na górze", choć szczególnego typu:

Na rozmaitości M, orientowalnej (lub dowolnej, lecz przy współczynnikach $\mathbb{Z}_2$) wymiaru n mamy izomorfizmy:

$$H_p(M) \cong H^{n-p}(M)$$

czyli Dualność Poincaré. Znaleźć informacje o innych dualnościach. Znaleźć informację, dla jakich przestrzeni da się je udowodnić. Tu ograniczamy się do rozmaitości ze względu na potrzebny zakres a także ze względu na następne ćwiczenie.

Zadania. *W rozmaitości n-wymiarowej M z triangulacją T każdy $n-1$-sympleks jest ścianą dokładnie dwóch n-sympleksów. Jeżeli da się wybrać zgodną orientację dla wszystkich sympleksów, wtedy suma wszystkich sympleksów n-wymiarowych jest cyklem, z konieczności homologicznie nietrywialnym, i $H_n(M,R) = R$, generowane nad R przez ten właśnie cykl (generator ten nazywamy klasą fundamentalną). Dopracować potrzebne definicje, rozważyć przypadek nieorientowalny i przypadek współcznników $\mathbb{Z}_2$.*

Znaleźć triangulację T' dualną do wyjściowej: każdemu k-sympleksowi w T odpowiada jedyny $n-k$-sympleks w T'; dwa wierzchołki T' należą do jednej krawędzi gddy odpowiadające im n-sympleksy miały wspólną ścianę, trzy krawędzie ograniczają trójkąt gddy odpowiadające im $n-1$-sympleksy miały wspólną $n-2$-ścianę, itd. Dla upartych: pokazać, że nowopowstała striangulowana przestrzeń jest homeomorficza z M.
Dla sympleksu σ w T oznaczmy $D(\sigma)$, kołańcuch, który przyjmuje wartość 1 na sympleksie odpowiadającym σ w T'. Przekonać się, że cykle przechodzą w ten sposób - izomorficznie - na kocykle. Stąd dualność Poincaré.

Zastanowić się, gdzie w powyższym orientowalność.

Skoro wiemy już, jak wyglądają homologie zorientowanych rozmaitości, przemyśleć dla nich teorię stopnia.