## 1. Homotopijne własności wiązek.

**Zadania.** *Pokazać, że wiązka nad bazą $B \times I$ daje, po obcięciu do $B \times \{0\}$ i $B \times \{1\}$ wiązki izomorficzne. Wyciągnąć wniosek o trywialności wiązek nad przestrzeniami ściągalnymi. Uogólnić powyższy lemat na mnożenie przez przestrzenie ściągalne. Wyciągnąć wniosek, że dwa odwzorowania homotopijne cofają daną wiązkę do wiązek izomorficznych.*

Potrzebujemy przenieść się ze świata wiązek wektorowych do świata wiązek włóknistych głównych. Następującą konstrukcję nazywamy wiązką stowarzyszoną z wiązką wektorową.

Jeśli $(F, E, p, B)$ jest wiązką o grupie strukturalnej $G$ (będzie to dla nas zawsze grupa Liego), to wybrawszy pokrycie $B$ lokalnymi trywializacjami $(U : p^{-1}U \sim U \times F$ możemy zastąpić produkty przez $U \times G$ i pokleić je używając takich samych map przejścia. W ten sposób otrzymaliśmy wiązkę włóknistą główną, obiekt z globalnym działaniem grupy strukturalnej.

**Zadania.** *Wiązka główna jest trywialna gddy ma sekcję.*

*Odwzorowanie włókniste między wiązkami głównymi to to samo, co ekwiwariantne odwzorowanie między ich przestrzeniami totalnymi ($f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$). Stąd wyciągnąć wniosek, że żeby wiązka główna była cofnięciem innej wiązki potrzeba i wystarcza znalezienie odwzorowania ekwiwariantnego między przestrzeniami totalnymi.*

*Rozważyć następującą konstrukcję:*

*przypuśćmy, że mamy wiązkę $(G, E_G, p, B_G)$, gdzie $E_G$ ma wszystkie grupy homotopii trywialne; wtedy, dla dowolnej wiązki $(G, E, p, B)$ nad CW-kompleksem możemy zdefiniować - indukcyjnie - odwzorowanie ekwiwariantne; niech $B^0$ będzie pewnym podkompleksem, a*

$$E^0 = p^{-1}(B^0)$$

*i niech $F^0 : F^0 \to E_G$ będzie ekwiwariantne; będziemy teraz komórkowo rozszerzać to odwzorowanie; niech $(n-1)$-wymiarowy szkielet $B$ leży w $B^0$, a komórka $\mathbb{D}_n$ - poza nim; wykorzystać trywialność grup homotopii $E_G$ do rozszerzenia $F^0$ na doklejaną komórkę, a ściągalność (a więc trywialność wszystkich wiązek) $\mathbb{D}_n$ do pokazania, że rozszerza się ono ekwiwariantnie; jeżeli teraz przyjmiemy $B^0 = \emptyset$, okaże się, że każda wiązka główna pochodzi z cofnięcia wiązki głównej o przestrzeni totalnej ściągalnej; jeżeli użyjemy tego twierdzenia do $B \times I$ dostaniemy homotopijną jedyność odwzorowania cofającego.*

*Sklasyfikować wiązki wektorowe przez odwzorowania w odpowiednie Grassmanniany. Zastanowić się, czy da się przeprowadzić konstrukcję analogiczną do powyższej.*

*Zauważyć, że nigdzie nie wspominaliśmy, że wiązka $(G, E_G, p, B_G)$ istnieje.*

Z ciągu dokładnego rozwłóknienia można podać homotopijny warunek na przestrzeń $B_G$: $\pi_{i+1} B_G = \pi_i G$.

Musimy teraz skonstruować wiązkę klasyfikującą $E_G$. Interesują nas wiązki wektorowe.

**Zadania.** *Będziemy klasyfikować tylko grupę $O(n)$, zamiast $Gl(n)$ - przemyśleć, dlaczego.*

*Przemyśleć jeszcze raz, dlaczego i odpowiedzieć w języku teorii homotopii.*

*Pokazać, że grupy $O(n)$ pasują do wiązki:*

$$O(n) \hookrightarrow O(n+1) \to \mathbb{S}^n$$

*wyciągnąć wnioski na temat niektórych grup homotopii $O(n)$.*

*Mamy naturalne inkluzje*

$$O(n) \ni A \mapsto \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in O(n+N)$$

*oraz*

$$O(N) \ni B \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \in O(n+N)$$

*Zauważyć, że ponieważ działania tych podgrup na $O(n+N)$ są przemienne, mamy (wolne) działanie $O(n)$ na ilorazie $O(n+N)/O(N)$, a przez to wiązkę, którą będziemy tendencyjnie oznaczać*

$$O(n) \hookrightarrow V_{n+N,n} \to G_{n+N,n}$$

*Wyjaśnić, skąd wzięły się w powyższej wiązce Grassmanniany. Wyjaśnić, co to są $V_{n+N,n}$. Zauważyć, że naturalne inkluzje dają ciąg odwzorowań włóknistych:*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & V_{n+N,n} \arrow[r] \arrow[d] & V_{n+N+1,n} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & G_{n+N,n} \arrow[r] & G_{n+N+1,n} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

*Przejść do granicy w tym systemie. Zobaczyć, że granica jest wiązką lokalnie trywialną.*

*Pokazać, że przestrzeń totalna tej wiązki ma wszystkie grupy homotopii trywialne.*

*Co trzeba zmienić w tej konstrukcji, żeby dostać przestrzenie klasyfikujące dla wszystkich podgrup $Gl(n)$?*

*Przeprowadzić analogiczną konstrukcję dla wiązek zespolonych.*

## 2. Klasy charakterystyczne.

$G$ będzie oznaczać jedną z grup $Gl(n), Gl_{\mathbb{C}}(n), O(n), U(n)$. Mając przestrzeń klasyfikującą, możemy zupełnie zapomnieć o wiązkach nad $M$, a interesować się tylko klasami homotopii $[M, B_G]$. Problem rozróżnienia klasy homotopii odwzorowania jest jednak bardzo trudny, zamieniamy go na problem algebraiczny: badanie odwzorowań indukowanych w homologiach (problem dobrze określony dzięki aksjomatowi homotopii).

**Zadania.** *Odwzorowanie homotopijne do stałego (a zatem odpowiadające wiązce trywialnej) indukuje odwzorowanie zerowe w homologiach, ale nie każde odwzorowanie trywialne w homotopiach jest homotopijne do stałego. Podać przykład. Podać przykład na rozmaitościach.*

Czyli wyniki mogą być tylko częściowe: jeśli odwzorowania zadają różne homomorfizmy w homologiach/kohomologiach, to nie mogą być homotopijne. Z wiązką główną $(G, E, p, B)$ zwiążemy klasy charakterystyczne: jeśli wiązka klasyfikuje się przez $f_E : B \to B_G$, to klasą charakterystyczną wiązki $E$ nazwiemy każdą klasę $f_E^*(\alpha), \alpha \in H^*(B_G)$. Nie mamy narzędzi, żeby policzyć kohomologie $B_G$, więc poniższe należy przyjąć na wiarę.

(1) Wszystkie elementy torsyjne w $H^*(B_G, \mathbb{Z})$ są rzędu 2, więc cały pierścień kohomologii daje się opisać, jeśli znamy $H^*(B_G, \mathbb{Q})$ oraz $H^*(B_G, \mathbb{Z}_2)$.
(2) Pierścień kohomologii $H^*(G_{\infty,n}, \mathbb{Z}_2)$ (podkreślamy wymiar Grassmannianu) jest wolno generowany (jako algebra wielomianów nad $\mathbb{Z}_2$) przez klasy Stiefela-Whitneya $w_i \in H^i(G_{\infty,n}, \mathbb{Z}_2)$.
(3) Cofnięcia klas $w_i$ przez odwzorowanie klasyfikujące wiązkę $E$ nazywamy klasami Stiefela-Whitneya tej wiązki i oznaczamy przez $w_i(E)$.

    **Zadania.** *Znaleźć standardowe aksjomaty klas Stiefela-Whitneya, sprawdzić, że powyższa definicja je spełnia (zakładając, że rzeczywiście kohmologie przestrzeni klasyfikującej są wolno generowaną algebrą).*

(4) Analogicznie - $H^*(G_{\infty,n}, \mathbb{Q})$ jest wolną algebrą wielomianów generowaną przez klasy $p_k \in H^{4k}(G_{\infty,n}, \mathbb{Q})$, jeżeli $n$ jest nieparzyste, i przez $p_k \in H^{4k}(G_{\infty,n}, \mathbb{Q})$ i $e \in H^n(G_{\infty,n}, \mathbb{Q})$, gdy $n$ jest parzyste. Nazywamy je klasami Pontriagina i klasą Eulera.

    **Zadania.** *Znaleźć standardowe aksjomaty powyższych klas, sprawdzić je, jak wcześniej.*

    *Przemyśleć algebrę stojącą za wyborem współczynników.*

Będą nas interesować głównie dwa fenomeny. Po pierwsze zachowanie klasy Eulera przy istnieniu sekcji. Począwszy od charakterystyki Eulera i istnienia sekcji wiązki stycznej, bo to nie jest przypadek, że te obiekty nazywają się podobnie. Proszę wymyśleć mnóstwo przykładów na użyteczność istnienia sekcji.

Po drugie, warunek na bycie brzegiem: rozmaitość zwarta jest brzegiem gddy wszystkie liczby Stiefela-Whitneya są zerami (postarać się o definicję; wiązką, którą badamy będzie wiązka styczna). Poszukać wyliczeń dla płaszczyzny rzutowej. Spróbować rozwiązać zadanie homotopijnie.